



Modèles de renouvellement avec effets de tendance, et application à l'assurance pour fautes des professionnels de la santé

Thèse

Emmanuel Hamel

Doctorat en actuariat
Philosophiæ doctor (Ph. D.)

Québec, Canada

© Emmanuel Hamel, 2018

Résumé

Dans cette thèse, nous présentons une classe très large de processus de dénombrement, incluant le processus de renouvellement et le processus de Poisson non-homogène, à laquelle s'ajouteront des taux d'escompte stochastiques afin de modéliser les coûts agrégés liés aux assurances pour fautes des professionnels de la santé.

Ainsi, dans l'introduction, nous présentons certaines caractéristiques importantes du processus des coûts agrégés liés aux assurances pour fautes des professionnels de la santé. Au chapitre 1, nous présentons des concepts théoriques préalables à l'élaboration et l'application du modèle mathématique qui sera proposé au chapitre 4. Au chapitre 2, nous présentons des résultats liés aux processus de Poisson non-homogène composé et de Cox composé, avec escompte. En particulier, nous y présentons des expressions analytiques pour les fonctions génératrices des moments qui seront inversées numériquement en utilisant la transformée de Fourier afin d'obtenir une approximation de la fonction de répartition. Au chapitre 3, nous considérons une classe de processus qui généralise celle étudiée au chapitre 2 : les processus de renouvellement composés, avec effet de tendance et escompte. Pour cette nouvelle classe, nous obtenons des formules récursives pour le calcul des moments ainsi que des expressions analytiques pour la fonction génératrice des moments, fonction qui peut être inversée analytiquement ou numériquement dans plusieurs cas particuliers afin d'obtenir une expression exacte ou une approximation de la fonction de répartition. Au chapitre 4, nous présentons les hypothèses du modèle stochastique qui servira à évaluer le risque du processus des coûts agrégés liés aux assurances pour fautes des professionnels de la santé, ce dernier généralisant la classe de modèles considérée au chapitre 3. Au chapitre 5, nous calibrons le modèle proposé au chapitre 4 sur la base de données des réclamations « fermées » d'une compagnie d'assurance de la Floride. Finalement, nous concluons cette thèse avec un résumé des nouveaux résultats et une discussion sur les avenues de recherches potentielles liées à la présente thèse.

Abstract

In this thesis, we present a very large class of counting processes including the renewal process and the non-homogeneous Poisson process, to which we add stochastic discount rates, in order to model the aggregate cost related to medical malpractice insurance. In the introduction, we present some important characteristics related to the cost process of medical malpractice insurance. In Chapter 1, we present some theoretical concepts that will be used to build the aggregate cost process related to the medical malpractice insurance model that is proposed in Chapter 4. In Chapter 2, we present some results related to the compound non-homogeneous Poisson and compound Cox processes with a discount factor. In particular, we derive an analytic expression for the moment generating functions that will be inverted numerically using Fourier transforms in order to obtain an approximation of the probability distribution function. In Chapter 3, we study a class of models that generalizes the class of models studied in Chapter 2 : the compound trend renewal process with discount factor. For this new class of processes, we obtain recursive formulas for the moment calculations and an analytic expression for the moment generating function. The moment generating function can be inverted analytically or numerically for many particular cases in order to obtain an exact expression or an approximation of the probability distribution function. In Chapter 4, we present the stochastic model that will be used to measure the risk of an aggregate cost related to medical malpractice insurance, which also generalizes the class of models considered in Chapter 3. In Chapter 5, we calibrate the model proposed in Chapter 4 on the closed claims database of Florida. The conclusion follows with a short summary of the results and an outline of some extensions for future research.

Table des matières

Résumé.....	ii
Abstract	iii
Table des matières	iv
Liste des figures.....	vii
Liste des tableaux.....	viii
Liste des symboles.....	x
Liste des abréviations.....	xi
Remerciements	xii
Avant-propos.....	xiii
Introduction.....	1
0.1 Assurances pour fautes des professionnels de la santé.....	1
0.1.1 Différentes couvertures.....	2
0.1 Modèle de renouvellement composé, avec escompte et sans effet de tendance	3
0.1 Application en assurance pour responsabilité professionnelle	4
Chapitre 1 Concepts théoriques préalables	6
1.0 Motivation	6
1.1 Processus de renouvellement composé, avec escompte et sans effet de tendance.....	6
1.1.1 Processus de renouvellement sans effet de tendance.....	6
1.1.2 Processus de renouvellement composé, avec escompte et sans effet de tendance.....	8
1.1.3 Moments simples et conjoints	8
1.1.4 Fonction génératrice des moments (FGM)	9
1.1.5 Distribution de $Z(t)$	9
1.1.6 Définitions de processus de Poisson, avec ou sans effet de tendance	11
1.2 Méthodes statistiques.....	13
1.2.1 Maximum de vraisemblance	13
1.2.2 Méthode de quasi-vraisemblance	14
1.3 Méthodes numériques	17
1.3.1 Méthodes d'intégration numérique.....	17
1.3.2 Méthodes d'inversion de la transformée de Fourier	21
1.4 Notions d'ordonnancement stochastique.....	22
Chapitre 2 Processus de Poisson composé, avec escompte et effet de tendance (PPCT).....	25
2.0 Motivation	25
2.1 Processus de Poisson composé (PPC) avec intensité constante ou aléatoire.....	25

2.1.1 FGM du PPC avec intensité constante (PPCC)	26
2.2 PPC avec effet de tendance (PPCT)	28
2.2.1 FGM du PPCT	28
2.2.2 Calcul de moments récurrents	30
2.3 Processus de Cox composé avec escompte	33
2.4 Comparaison des distributions	34
2.4.1 Expressions pour les transformées de Fourier des PPCT	35
2.4.2 Calculs numériques	36
2.5 Ajout de la dépendance entre T_k et X_k	38
2.6 Discussion des résultats	40
Chapitre 3 Modèles de renouvellement composé avec effet de tendance et escompte	41
3.0 Motivation	41
3.1 PRC avec effet de tendance déterministe (PRCT)	41
3.1.1 Calcul des moments récurrents avec force d'actualisation constante	43
3.1.2 Calcul des moments avec une force stochastique d'intérêt net	46
3.1.3 FGM et fonction de répartition du PRCT	47
3.2 PRCT avec effet de tendance aléatoire	51
3.3 Ajout de la dépendance entre T_k et X_k	53
3.4 Ordonnement entre le PPCT et PRCT	55
3.4.1 Exemple numérique	56
3.5 Discussion des résultats	57
Chapitre 4 Un modèle général d'assurance pour fautes professionnelles	59
4.1 Présentation du modèle	59
4.2 Modélisation du « tail coverage » et du « ddr coverage »	61
4.2.1 « tail coverage »	61
4.3 Calcul du premier moment	63
4.4 Calcul du deuxième moment simple	64
4.5 Analyse des résultats	69
Chapitre 5 Calibration d'un modèle d'assurance pour fautes des professionnels de la santé	70
5.1 Base de données de la Floride	70
5.2 Modèle calibré	71
5.3 Calibration de l'inflation déterministe	73
5.4 Calibration des distributions de délai ξ_k et ζ_k	77
5.5 Calibration des distributions de la fonction d'intensité	78

5.6 Estimation des distributions de $X_k \zeta_k$ et de $Y_k \zeta_k$	82
5.7 Calcul de mesures de risque et de différents effets de tendance.....	84
5.7.1 Calculs du premier moment du processus de comptage	85
5.7.2 Calculs du premier moment du processus de risque	88
5.7.3 Calculs deuxième moment du processus de risque	90
5.7.4 Calculs de mesures de risque	92
5.8 Discussion des résultats.....	94
Conclusion	96
Bibliographie.....	97
Annexe 1.....	100
Fonctions $h_1(x) = \alpha_1 \exp(a_1 x)$ et $h_2(x) = \alpha_2 \exp(a_2 x)$	100
Fonctions $h_1(x) = \alpha_1 + a_1 x$ et $h_2(x) = \alpha_2 + a_2 x$	101

Liste des figures

Figure 1 : Trois moments importants	2
Figure 2 : Exemples de lois de la famille exponentielle linéaire	15
Figure 3 : Exemples de partitions de l'algorithme d'intégration de Cuhre	18
Figure 4 : Fonctions de répartition $G(x)$ et $H(x)$	52
Figure 5 : PRCT et le processus PPCT associé : distributions de probabilité	57
Figure 6 : Théorie unificatrice.....	58
Figure 7 : $\ln X_k \zeta_k, X_k > 0$ fonction de $\ln(1 + \zeta_k)$	74
Figure 8 : $\ln Y_k \zeta_k, Y_k > 0$ fonction de $\ln(1 + \zeta_k)$	75
Figure 9 : Approximation de l'intensité avant calibration.....	80
Figure 10 : Intensité estimée	81
Figure 11 : Nombre de réclamations observées vs nombre de réclamations moyen	82
Figure 12 : Densité de $\ln X_k \zeta_k, X_k > 0$	83
Figure 13 : Densité de $\ln Y_k \zeta_k, Y_k > 0$	84
Figure 14 : Valeur espérée « Tail coverage » en fonction du temps.....	89
Figure 15 : $\ln X_k \zeta_k, X_k > 0$ en fonction de ζ_k	100
Figure 16 : $\ln Y_k \zeta_k, Y_k > 0$ en fonction de ζ_k	100
Figure 17 : $X_k \zeta_k, X_k > 0$ en fonction de ζ_k	101
Figure 18 : $Y_k \zeta_k, Y_k > 0$ en fonction de ζ_k	101

Liste des tableaux

Tableau 1 : Exemple de calcul des trois premiers moments pour un PPC.....	33
Tableau 2 : Comparisons de mesures de risque PPC, PPCT, PPCA, et PCC.....	36
Tableau 3 : Comparisons des fonctions de répartition PPC, PPCT, PPCA, et PCC.....	37
Tableau 4 : Comparaison des distributions PP, Binomiale négative, PPT, et PCC.....	37
Tableau 5 : Comparaison de mesures de risque des PP, Binomiale négative, PPT, et PCC.....	38
Tableau 6 : Espérance et écart-type de $Z(t)$	51
Tableau 7 : Fonction de répartition de $\hat{Z}(\Lambda(t))$	56
Tableau 8 : Erreurs absolues entre les fonctions de répartition de $Z(t)$ et de $\hat{Z}(\Lambda(t))$	57
Tableau 9 : Primes et part de marché.....	71
Tableau 10 : Paramètres d'inflation estimés.....	76
Tableau 11 : Paramètres estimés des distribution de ξ_k et ζ_k	78
Tableau 12 : Comparaison des modèles des distributions de ξ_k et ζ_k	78
Tableau 13 : Paramètres estimés de la distribution de $N(t)$	81
Tableau 14 : Paramètres estimés de la distribution de X_k	83
Tableau 15 : Paramètres estimés de la distribution de Y_k	84
Tableau 16 : Calculs analytiques : $F(x, a, b)$	85
Tableau 17 : Calculs analytiques : espérance de $N(t)$, cas 1.....	87
Tableau 18 : Calculs analytiques : espérance de $N(t)$, cas 2.....	87
Tableau 19 : Calculs analytiques : espérance de $N(t)$, cas 3.....	87
Tableau 20 : Calculs analytiques : espérance de $Z(t)$, cas 1.....	88
Tableau 21 : Calculs analytiques : espérance de $Z(t)$, cas 2.....	88
Tableau 22 : Calculs analytiques : espérance de $Z(t)$, cas 3.....	88
Tableau 23 : Calculs analytiques : deuxième moment de $Z(t)$, cas 1.....	91
Tableau 24 : Calculs analytiques : deuxième moment de $Z(t)$, cas 2.....	91
Tableau 25 : Calculs analytiques : deuxième moment de $Z(t)$, cas 3.....	91

Tableau 26 : Simulations du $TVaR_{0.95}[Z(t)]$, cas 1.....	92
Tableau 27 : Simulations du $TVaR_{0.95}[Z(t)]$, cas 2.....	93
Tableau 28 : Simulations du $TVaR_{0.95}[Z(t)]$, cas 3.....	93
Tableau 29 : Simulations de $m[Z(t)]$, cas 1.....	93
Tableau 30 : Simulations de $m[Z(t)]$, cas 2.....	94
Tableau 31 : Simulations de $m[Z(t)]$, cas 3.....	94

Liste des symboles

- $E[X]$ est l'opérateur d'espérance de la variable aléatoire X ;
- $P(X \in A)$ est la probabilité que les valeurs de X soient dans A ;
- $I(A)$ est la variable indicatrice de l'ensemble A ;
- $N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$;
- \mathbf{R} est l'ensemble des nombres réels ;
- Ω est un sous-ensemble de \mathbf{R} comprenant l'origine 0 ;
- $M_Z(\cdot)$ est la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire Z ;

Liste des abréviations

- BDRFF : base de données de réclamations fermées de la Floride;
- DFR : « Decreasing failure rate »;
- DFRA : « Decreasing failure rate average »;
- FGM : fonction génératrice des moments;
- FPIC : « First Professionals Insurance Company Inc. »;
- IFR : « Increasing failure rate »;
- IFRA : « Increasing failure rate average »;
- NBU : « New better than used »;
- NWU : « New worse than used »;
- NBUE : « New better than used in expectation »;
- NWUE : « New worse than used in expectation »;
- PH : « Phase Type »;
- PP : Poisson homogène;
- PPC : Processus de Poisson composé avec intensité déterministe;
- PPCA : Processus de Poisson composé avec intensité aléatoire;
- PCC : Processus de Cox composé;
- PPCC : Processus de Poisson composé avec intensité constante;
- PPCT : Processus de Poisson composé avec effet de tendance et escompte;
- PPT : Poisson avec effet de tendance déterministe;
- PR : Processus de renouvellement, sans effet de tendance;
- PRCT : Processus de renouvellement composé avec effet de tendance et escompte;
- PRT : Processus de renouvellement avec effet de tendance;
- PRC : Processus de renouvellement composé, sans effet de tendance et avec escompte;

Remerciements

À Ghislain Léveillé, mon directeur de recherche, je tiens à le remercier pour le soutien financier et pour l'encadrement qu'il m'a donné dans l'élaboration et la rédaction de cette thèse de doctorat.

À ma famille, à mes amis et à ma copine, je tiens à exprimer une profonde reconnaissance pour le soutien qu'ils m'ont apporté. En particulier, je tiens à remercier mes parents, Diane Germain et Rolland Hamel, deux entrepreneurs qui m'ont appris à être déterminé, à travailler fort et à croire en moi, qualités qui m'ont été très utiles tout au cours de mes études doctorales. Je tiens aussi à remercier mes parents de m'avoir appris à croire en mes idées peu importe les préjugés négatifs que les gens peuvent avoir et de m'avoir appris à ne pas baisser les bras même lorsqu'on fait des erreurs ou lorsqu'on connaît la défaite.

Je tiens aussi à remercier Julien Reid, mon directeur à l'Autorité des marchés financiers pour avoir crû en moi et m'avoir donné la possibilité d'étudier et de travailler à temps plein en même temps.

Avant-propos

État des articles acceptés :

1- Léveillé, G., Hamel, E., (2017). A compound trend renewal model for medical/professional liabilities. *European actuarial journal*. 7 , 2: 435-463. (soumis le 4 janvier 2017, accepté le 27 mai 2017 et publié le 19 juin 2017).

2- Léveillé, G., Hamel, E., (2018). Conditional, Non-Homogeneous and Doubly Stochastic Compound Poisson Processes with Stochastic Discounted Claims. *Methodology and computing in applied probability*. 20, 1: 353-368. (soumis le 30 juillet 2016, accepté le 6 mars 2017 et publié le 20 mars 2017).

3- Léveillé, G., Hamel, E., (2018). Compound trend renewal process with discounted claims : a unified approach. *Scandinavian actuarial journal* (soumis le 13 mars 2018, Accepté le 28 octobre 2018).

Modifications entre les articles insérés et publiés, ou soumis :

Les articles ayant été écrits en anglais, les textes et les résultats obtenus dans chacun de ces articles ont été adaptés au format de cette thèse.

La contribution, le rôle exact de l'étudiant pour chacun de ces articles :

L'étudiant a collaboré de façon majeure à tous les aspects de chacun de ces articles, que ce soit dans les recherches bibliographiques, l'élaboration des résultats et la rédaction des articles.

Le statut d'auteur de l'étudiant :

L'étudiant a le statut de co-auteur pour chacun de ces articles.

Renseignements pour chacun des co-auteurs :

Ghislain Léveillé : Professeur titulaire à l'École d'actuariat, directeur de recherche de l'étudiant.

Emmanuel Hamel : Étudiant au doctorat à l'École d'actuariat, analyste en normalisation à l'Autorité des marchés financiers (AMF).

Introduction

Dans cette section, nous motivons l'étude qui est effectuée dans le présent document. Dans un premier temps, nous faisons une revue des caractéristiques importantes de l'assurance pour fautes des professionnels de la santé. Dans un second temps, nous présentons une classe très large de modèles stochastiques qui sera étudiée dans ce document : le modèle de renouvellement composé, avec escompte et effet de tendance. Finalement, nous décrivons l'application pratique considérée, soit l'implantation et la calibration d'un modèle de renouvellement composé, avec escompte et effet de tendance pour les coûts agrégés liés aux assurances pour fautes des professionnels de la santé.

0.1 Assurances pour fautes des professionnels de la santé

Dans notre société, la santé est une préoccupation constante pour tous et représente des coûts importants. Les coûts des soins de santé sont liés à plusieurs facteurs, dont les assurances pour fautes des professionnels de la santé ne sont pas les moindres. Le besoin d'assurance des professionnels de la santé vient du fait que ces derniers peuvent commettre des fautes professionnelles avec des incidences financières très graves. Pour qu'un acte professionnel soit reconnu comme négligent devant le tribunal, ce dernier doit satisfaire certains critères (voir Hamel (2013)) :

« Pour qu'il y ait négligence ou faute d'un professionnel de la santé, le patient doit avoir subi un préjudice relativement important. Plus précisément, le juge peut émettre un constat défavorable au praticien selon les trois critères suivants: un fait générateur, une faute ayant causé dommage et l'existence d'un lien de causalité entre ces derniers. De plus, il y a plusieurs types de fautes possibles : acte technique fautif, acte non fautif (aléa), infection nosocomiale, affection iatrogène, accident dû à la prescription ou à la délivrance de produits de santé, etc. »

Les caractéristiques importantes d'un processus des coûts agrégés pour fautes des professionnels de la santé sont les suivantes : les indemnités payées, les dépenses, les taux d'actualisation avec des forces d'inflation et d'intérêt qui ne sont pas nécessairement les mêmes pour les indemnités payées et les dépenses, le moment où la faute médicale survient, le délai avant que la réclamation parvienne à l'assureur, le délai séparant la réclamation de son règlement, la fréquence des réclamations et la période de temps sur laquelle les couvertures sont offertes. Il faut aussi noter que les réclamations se règlent souvent sans paiement de la part de l'assureur.

Les indemnités payées peuvent prendre la forme d'un montant forfaitaire ou la forme d'une rente. Dans ce document, nous supposons que les indemnités payées sont des montants forfaitaires. Ces derniers montants sont généralement composés de dommages économiques et non économiques. Par dommages économiques, nous entendons les coûts médicaux associés à la réclamation ainsi que les pertes de revenus, de déplacement, etc. De plus, nous entendons par dommages non économiques les dommages résultants de souffrance psychologique et physique (p.ex. dommage corporel, dommage moral, etc.) (voir Hamel, 2013). De plus, le montant des dépenses est généralement composé de frais d'avocats, de frais d'experts en sinistres médicaux, etc. En général, les frais d'avocats constituent l'élément dominant du montant des dépenses.

Plusieurs études (p. ex. Staudt, 2010 et Black et coll. , 2008) semblent corroborer l'hypothèse qu'il existe une dépendance positive entre : le délai séparant le moment où la réclamation parvient à l'assureur et le paiement de l'indemnité, le montant effectivement payé à l'assuré et le montant des dépenses encourues. Cette dernière hypothèse est corroborée par les résultats présentés au chapitre 5 du présent document.

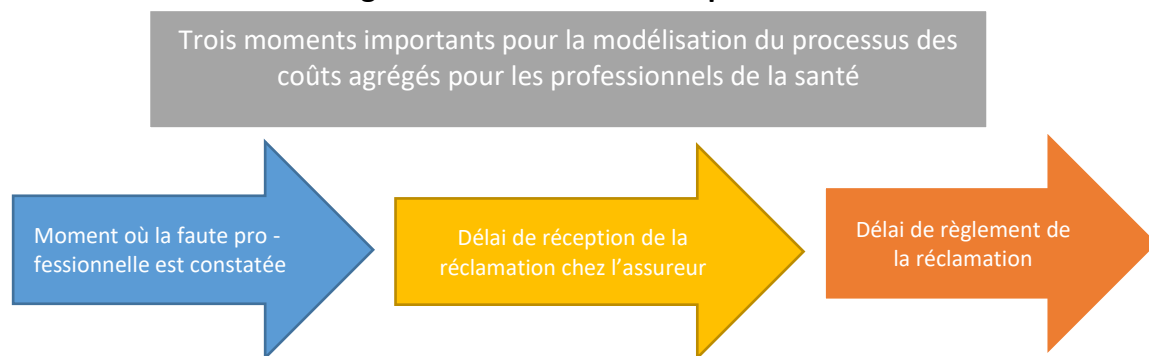
Le processus des coûts agrégés pour fautes des professionnels de la santé, tel qu'étudié dans ce document, prend en compte toutes les caractéristiques mentionnées précédemment. De plus, ce dernier processus considère les couvertures les plus courantes dans cette ligne d'affaire, dont nous adopterons, pour le moment, les termes américains, soit: « occurrence », « claims-made », « claims-paid », « death, disability and retirement » et « tail coverage ».

Dans cette thèse, nous proposons donc un modèle général qui permettra d'étudier quasi simultanément toutes les garanties énoncées précédemment. Ce modèle sera défini rigoureusement et étudié d'une manière exhaustive au chapitre 4 dans ses moments simples comme dans sa distribution au chapitre 5.

0.1.1 Différentes couvertures

Dans cette section, nous présentons les définitions des différentes couvertures considérées dans cette thèse pour l'assurance pour fautes des professionnels de la santé : « occurrence », « claims-made », « claims-paid », « death, disability and retirement » et « tail coverage ». Les différences entre ces couvertures reposent essentiellement sur trois éléments temporels : moment où la faute professionnelle est constatée, délai de réception de la réclamation chez l'assureur et le délai de règlement de la réclamation.

Figure 1 : Trois moments importants



0.1.1.1 « occurrence »

La couverture d'un contrat dit « occurrence » couvre le titulaire de police que si le « sinistre » survient durant la période de couverture définie dans le contrat (voir GAO, 2003).

0.1.1.2 « claims-made »

La couverture d'un contrat dit « claims-made » couvre le titulaire de police que si le « sinistre » survient, et est déclaré par ce dernier à l'assureur, durant la période de couverture définie dans le contrat (voir GAO, 2003).

0.1.1.3 « claims-paid »

La couverture d'un contrat dit « claims-paid » couvre le titulaire de police que si le « sinistre » survient, est déclaré par ce dernier à l'assureur et que l'indemnisation est reçue durant la période de couverture définie dans le contrat (voir Bates et Winch, 2004).

0.1.1.4 « death, disability and retirement »

La couverture d'un contrat dit « death, disability and retirement (DDR) » est complémentaire aux « claims-made ». Cette couverture donne une protection au professionnel de la santé, en cas de la survenance d'un des trois événements ci-haut mentionnés, généralement sans prime additionnelle (voir Forray, 2010).

0.1.1.5 « tail coverage »

La couverture d'un contrat dit « tail coverage » est un type de couverture qui est complémentaire aux « claims-made » et qui est achetée pour couvrir les sinistres qui surviennent après l'arrêt d'une couverture de type « claims-made » (voir GAO, 2003).

0.1 Modèle de renouvellement composé, avec escompte et sans effet de tendance

Dans cette thèse, nous allons modéliser le processus des coûts agrégés pour fautes des professionnels de la santé à l'aide d'un modèle de renouvellement composé, avec escompte et avec effet de tendance. Les résultats obtenus pour cette classe de modèles sont intimement liés à ceux qui ont déjà été obtenus dans la littérature en ce qui a trait aux modèles de renouvellement composé, avec escompte et sans effet de tendance. Ces derniers modèles ont été étudiés dans la littérature actuarielle par plusieurs auteurs. Nous mentionnerons notamment Léveillé et Garrido (2001a), Léveillé et Garrido (2001b), Léveillé et coll. (2010), Léveillé et Adékambi (2011, 2012), Léveillé et Hamel (2013), Wang et coll. (2018), dont les principaux résultats sont les suivants:

- expressions intégrales pour le calcul de la fonction génératrice des moments lorsque la force d'intérêt net est constante;
- formules récursives pour le calcul des moments simples et conjoints lorsque la force d'intérêt net est constante;
- formules analytiques pour le calcul des premiers moments simples et conjoints lorsque la force d'intérêt net est stochastique;
- inversion de la fonction génératrice des moments, dans plusieurs cas.

Jusqu'à tout récemment, la principale limitation des modèles de renouvellement composés résidait dans le fait qu'aucun effet de tendance dans la distribution du nombre des réclamations n'était réellement pris en compte. En particulier, le nombre espéré de réclamations dans un intervalle de temps donné est asymptotiquement linéaire. Cette importante limitation dans les modèles précédents posait des difficultés non négligeables lorsque nous voulions calibrer cette classe de processus sur certaines bases de données. Pour palier à ce problème, Léveillé et Hamel (2017) et Léveillé et Hamel (2018 a) ont initié une classe de modèles de renouvellement

composés, avec escompte et effet de tendance. En particulier, Léveillé et Hamel (2017) ont démontré qu'incorporer un effet de tendance permet une meilleure adaptation à certaines bases de données, dont celle reliée aux fautes des professionnels de la santé dans l'État de la Floride et dont nous nous servons dans cette étude. Les détails de ce dernier article sont présentés dans le présent document aux chapitres 4 et 5.

Notons aussi qu'un net avantage de ce nouveau modèle avec effet de tendance par rapport au modèle de Poisson composé non-homogène, avec escompte et effet de tendance (voir Léveillé et Hamel, 2018 a), est que la moyenne du nombre de réclamations dans un intervalle de temps donné peut être supérieure, égale ou inférieure à la variance, ce qui est primordial d'un point de vue pratique.

En résumé, une classe générale de modèles incorporant les processus de renouvellement, de Poisson non-homogènes et de Cox est ainsi générée, classe pour laquelle il est possible de calculer plusieurs quantités d'intérêt dont nous démontrerons la pertinence dans ce document.

0.1 Application en assurance pour responsabilité professionnelle

Un modèle de renouvellement composé avec escompte, sans effet de tendance, a été étudié par Léveillé et Hamel (2013) et Hamel (2013) pour modéliser le processus des coûts agrégés liés aux assurances pour les professionnels de la santé. Le processus proposé par ces auteurs modélise le nombre de réclamations, le moment où la réclamation est reçue par l'assureur, le délai de règlement de la réclamation et la dépendance entre le délai de règlement de la réclamation, l'indemnité payée et les dépenses encourues suite à cette réclamation.

Néanmoins, le modèle proposé par ces auteurs considérait seulement les contrats de type « claims-made ». Dans cette thèse, nous généralisons leurs travaux à plusieurs égards. Tout d'abord, nous modélisons le délai entre la survenance du « sinistre » et la réclamation à l'assureur. Nous permettons aussi au processus de dénombrement d'avoir une forme plus générale en considérant un processus de renouvellement avec effet de tendance. Autre considération d'importance, le modèle étudié dans cette thèse permet de modéliser simultanément plusieurs couvertures d'assurance, soit: « claims-made », « claims-paid », « occurrence », « tail-coverage » et « death, disability and retirement ». Finalement, une autre amélioration majeure par rapport aux travaux de Léveillé et Hamel (2013) et de Hamel (2013) est que nous calibrons le modèle proposé dans cette thèse sur une base de données réelles, précisément sur la base de données des réclamations fermées¹ pour fautes des professionnels de la santé de l'État de Floride.

Au chapitre 1, les concepts théoriques préalables à la compréhension du présent document sont présentés : le processus de renouvellement composé avec escompte et sans effet de tendance, les méthodes statistiques utilisées pour la calibration, les méthodes numériques pour l'intégration et la simulation, et certaines notions d'ordonnement de risque.

¹ Par base de données de réclamations fermées, nous entendons une base de données qui contient seulement des réclamations qui ont été payées par l'assureur. Par exemple, si une réclamation est en devant le tribunal, alors cette réclamation ne sera pas incluse dans la base de données. Si la même réclamation a été payée par l'assureur, alors cette réclamation sera incluse dans la base de données.

Au chapitre 2, le processus de Cox composé avec escompte est étudié. Cette classe de processus est un cas particulier important de celle qui est présentée au chapitre 3. Il est utile d'étudier ce cas particulier pour plusieurs raisons, notamment : 1) des formules analytiques calculables peuvent être obtenues pour la fonction génératrice des moments, ce qui généralise plusieurs résultats qui ont été obtenus dans la littérature 2) un sous-ensemble de la classe de processus présentée au chapitre 3 peut être borné stochastiquement par celle étudiée au chapitre 2, classe qui présente souvent moins de difficultés calculatoires.

Au chapitre 3, nous étudions le processus de renouvellement composé avec escompte et effet de tendance, variables pouvant être toutes les deux aléatoires. Tel que mentionné précédemment, cette classe de processus généralise celle qui est présentée au chapitre 2 et permet d'unifier la théorie des processus de Cox composé avec escompte et celle des processus de renouvellement composé avec escompte. Une des principales motivations pour l'étude de cette classe de processus est sa flexibilité qui donne un grand potentiel d'applications pratiques. Cette flexibilité est liée à certaines caractéristiques de cette classe de processus, notamment : 1) des effets de tendance non-linéaires peuvent être introduits dans le processus de comptage, 2) des processus de comptage qui ont une moyenne plus petite, égale ou plus grande que la variance peuvent être considérés.

Au chapitre 4, nous présentons notre modèle de renouvellement composé, avec escompte et effet de tendance, pour modéliser le processus des coûts agrégés pour fautes des professionnels de la santé. Ce modèle généralise la classe de modèles présentée au chapitre 3. Le modèle présenté au chapitre 4 permet de modéliser simultanément plusieurs couvertures d'assurance, soit: « claims-made », « claims-paid », « occurrence », « tail-coverage » et « death, disability and retirement ». Il permet aussi de modéliser, de façon séparée, les indemnités payées et les dépenses encourues.

Au chapitre 5, nous calibrons le modèle proposé au chapitre 4 sur la base de données des professionnels de la santé de l'État de la Floride, ce qui démontre que ce modèle peut être utilisé en pratique. De plus, nous démontrons aussi que les deux premiers moments de ce modèle sont calculables. Nous présentons par la suite une comparaison numérique du risque des garanties suivantes, ce qui est d'intérêt pour les actuaires : « claims-made », « claims-paid », « occurrence », « tail-coverage » et « death, disability and retirement ». Finalement, la conclusion résume les résultats obtenus et présente les futures directions de recherche.

Chapitre 1 Concepts théoriques préalables

1.0 Motivation

Dans ce chapitre, nous présentons les concepts théoriques préalables à la compréhension des résultats obtenus dans ce document. La structure du présent chapitre s'établit comme suit : processus de renouvellement composé, avec escompte et sans effet de tendance, méthodes statistiques, méthodes numériques et notions d'ordonnancement stochastique.

1.1 Processus de renouvellement composé, avec escompte et sans effet de tendance

Dans cette section, nous supposons que le processus de comptage est un processus de renouvellement, sans effet de tendance. Rappelons d'abord que le processus de renouvellement est une généralisation du processus de Poisson homogène. De plus, un des avantages du processus de renouvellement sur le processus de Poisson homogène est que le processus de renouvellement peut avoir une moyenne du nombre de réclamations inférieure ou supérieure à la variance de celui-ci, ce qui permet d'incorporer déjà un peu plus de réalisme dans les problèmes actuariels.

1.1.1 Processus de renouvellement sans effet de tendance

Nous présentons maintenant le processus de renouvellement, sans effet de tendance (PR), lequel sera utile lors de l'élaboration du modèle mathématique proposé dans cette thèse. Nous rappelons aussi les principaux résultats établis par Léveillé et Garrido (2001a), Léveillé et Garrido (2001b), Léveillé et coll. (2010), Léveillé et Adékambi (2011, 2012), Wang et coll. (2018) pour les processus de renouvellement composé, sans effet de tendance et avec escompte (PRC). Nous définissons d'abord les variables aléatoires qui génèrent le PR. Nous analysons ensuite certaines quantités importantes, dont la fonction de renouvellement.

Définition 1 Soient les variables aléatoires suivantes :

- τ_k est le délai entre les $(k-1)$ -ième et k -ième événements, $k \in \mathbf{N}^* = \{1, 2, \dots\}$
- $\{\tau_k; k \in \mathbf{N}^*\}$ est une suite de variables aléatoires positives i.i.d.
- $T_k = T_{k-1} + \tau_k$, $T_0 = 0$, T_k est le moment où se produit le k -ième événement

Alors le processus de dénombrement $\underline{N} = \{N(t); t \geq 0\}$, défini par

$$N(t) = \sup\{k \in \mathbf{N}, T_k \leq t\},$$

est dit être un PR.

Les définitions précédentes nous permettent de faire le lien entre le nombre d'évènements sur un intervalle de temps donné et les variables aléatoires qui définissent les moments où les réclamations sont effectuées. Ainsi, nous avons

$$P(N(t) \geq k) = P(T_k \leq t) = F_{T_k}(t).$$

À partir de cette dernière identité, la fonction de renouvellement $m(t)$ est définie comme suit :

$$m(t) = E[N(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} P(N(t) \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{T_k}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{\tau}^{*k}(t),$$

où $F_{\tau}^{*k}(t) = F_{\tau_1}^{*k}(t)$ est la k -ième convolution de la distribution de $\tau \sim \tau_k$.

Rappelons aussi que cette fonction satisfait une équation dite de type renouvellement. Ainsi en conditionnant sur le premier évènement réalisé au temps $T_1 = \tau_1 = x$, nous obtenons

$$E[N(t) | \tau_1 = x] = \begin{cases} 1 + E[N(t-x)] & , x \leq t \\ 0 & , x > t \end{cases}$$

En utilisant la dernière expression, la fonction de renouvellement sera solution de l'équation de renouvellement suivante :

$$m(t) = \int_0^t E[N(t) | \tau_1 = x] dF_{\tau}(x) = \int_0^t [1 + m(t-x)] dF_{\tau}(x) = F_{\tau}(t) + \int_0^t m(t-x) dF_{\tau}(x).$$

De cette dernière identité, nous obtenons facilement l'expression précédente pour $m(t)$ en l'appliquant récursivement une infinité de fois. Nous présentons ci-dessous un théorème qui joue un rôle clef dans la démonstration de plusieurs résultats, théorème qui sera généralisé au chapitre 3 du présent document.

Théorème 1 *Considérons le processus PR tel que défini précédemment. Alors, nous avons*

(1) *Si $0 < x \leq t$ et $1 \leq k \leq n$:*

$$f_{T_k | N(t)}(x | n) = \frac{f_{T_k}(x) P(N(t-x) = n-k)}{P(N(t) = n)}.$$

(2) *Si $0 < x < y \leq t$ et $1 \leq k < j \leq n$:*

$$f_{T_k, T_j | N(t)}(x, y | n) = \frac{P(N(t-y) = n-j) f_{T_{j-k}}(y-x) f_{T_k}(x)}{P(N(t) = n)}.$$

Preuve : Voir Lévillé et Adékambi (2011). □

1.1.2 Processus de renouvellement composé, avec escompte et sans effet de tendance

Dans cette section, nous présentons des résultats sur les moments du PRC, résultats qui ont été obtenus par Léveillé et Garrido (2001a, b) et Léveillé et Adékambi (2011). Ainsi le PRC étudié par les auteurs précédents se décrit comme suit :

$$Z(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} D(T_k) X_k ,$$

où,

- $Z(t)$ est le montant agrégé des réclamations escomptées.
- T_k est le moment où se produit la k -ième réclamation, et $\{\tau_k, k \in \mathbf{N}^*\}$ forme une suite de variables aléatoires continues positives i.i.d. telle que $T_k = \sum_{i=1}^k \tau_i$.
- X_k est le montant de la k -ième réclamation (sans inflation), les X_k formant une suite de variables aléatoire positives i.i.d., indépendantes de la suite $\{T_k; k \in \mathbf{N}^*\}$.
- $\{N(t); t \geq 0\}$ forme un processus PR.
- $D(u) = \exp\left\{-\int_0^u \delta(t) dt\right\}$ est un facteur d'escompte, où $\delta(t)$ est une force d'intérêt déterministe ou stochastique, net (d'inflation).

1.1.3 Moments simples et conjoints

Dans cette section, nous présentons les calculs des moments simples et conjoints (lorsque ces derniers existent) avec force d'intérêt net constante et stochastique.

Théorème 2 Pour le processus $\{Z(t); t \geq 0\}$ défini à la section précédente, $X \sim X_k$ et pour une force constante d'intérêt net positive tel que les moments suivants existent, nous avons pour $n, m \in \mathbf{N}^*$:

$$(1) \quad E[Z^n(t)] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} E[X^{n-k}] \int_0^t e^{-n\delta v} E[Z^k(t-v)] dm(v) .$$

$$(2) \quad E[Z^n(t)Z^m(t)] = \sum_{k=1}^{n+m} E[X^k] \sum_{i=[k-m]_+}^{\min(k,n)} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \\ \times \int_0^t e^{-(n+m)\delta v} E[Z^{n-i}(t-v)Z^{m-(k-i)}(t-h-v)] dm(v) .$$

Preuve : Pour (1), voir Lèveillé et Garrido (2001), et pour (2), voir Lèveillé et Adékambi (2011). \square

Le corollaire 1 qui suit présente des cas particuliers du théorème 2, lesquels seront généralisés au chapitre 4. Le théorème 3, quant à lui, généralise les résultats présentés au corollaire 1 en incorporant une force d'intérêt aléatoire. Le corollaire 1 et le théorème 3 seront utilisés au chapitre 4 lors de l'élaboration du processus des coûts agrégés pour les professionnels de la santé.

Corollaire 1 *Du théorème 2, nous obtenons les deux premiers moments simples suivants :*

$$(1) \quad E[Z(t)] = E[X] \int_0^t e^{-\delta v} dm(v) .$$

$$(2) \quad E[Z(t)^2] = E[X^2] \int_0^t e^{-2\delta v} dm(v) + 2E[X]^2 \int_0^t \int_0^{t-v} e^{-\delta[2v+u]} dm(u) dm(v) .$$

Théorème 3 *Pour le processus des coûts $\{Z(t); t \geq 0\}$ défini à la section précédente, et pour une force d'intérêt net stochastique tel que les moments suivants existent, nous avons*

$$(1) \quad E[Z(t)] = E[X] \int_0^t E[D(v)] dm(v) .$$

$$(2) \quad E[Z(t)^2] = E[X^2] \int_0^t E[D^2(v)] dm(v) + 2E[X]^2 \int_0^t \int_0^{t-v} E[D(v)D(u+v)] dm(u) dm(v)$$

Preuve : Voir Lèveillé et Adékambi (2011). \square

1.1.4 Fonction génératrice des moments (FGM)

Dans la littérature actuarielle, l'expression suivante a été obtenue pour la fonction génératrice des moments par Lèveillé et coll. (2010) pour un PRC avec force d'intérêt net constante. En utilisant les hypothèses de cette section, nous obtenons ainsi les deux expressions suivantes :

$$M_{Z(t)}(s) = 1 - F(t) + \int_0^t M_X(se^{-\delta v}) M_{Z(t-v)}(se^{-\delta v}) dF_\tau(v) ,$$

et

$$M_{Z(t)}(s) = 1 + \int_0^t [M_X(se^{-\delta v}) - 1] M_{Z(t-v)}(se^{-\delta v}) dm(v) .$$

En utilisant les distributions Phase-Type, cette dernière équation peut être transformée en une équation différentielle qui permet, pour plusieurs cas particuliers, d'inverser $M_{Z(t)}(s)$ analytiquement ou numériquement si nécessaire, ce qui sera l'objet de la section suivante.

1.1.5 Distribution de $Z(t)$

L'expression intégrale qui a été présentée à la section précédente peut être inversée analytiquement ou numériquement pour certains cas particuliers où τ est une distribution Phase-Type.

1.1.5.1 Distributions Phase-Type

Dans cette section, nous présentons un bref résumé sur les distributions Phase-Type telles qu'introduites dans Léveillé et coll. (2010).

Définition 2 Soit A une matrice carrée non-singulière de dimension $n \times n$, telle que $\exp(Ax) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$, $\underline{\alpha}$ est un vecteur colonne de dimension n avec des éléments non-négatifs tels que $\underline{\alpha}' \underline{1} = 1$, où $\underline{1}$ est un vecteur colonne de 1. Alors, si la fonction de répartition F_τ d'une variable aléatoire τ peut être écrite sous la forme suivante :

$$F_\tau(x) = [1 - \underline{\alpha}' \exp(Ax) \underline{1}] 1_{]0, \infty[}(x),$$

nous dirons que F_τ suit une distribution Phase-type (PH) continue avec paramètres $(\underline{\alpha}, A)$. Ainsi, dans le cas PH, la fonction de densité est donnée par

$$f_\tau(x) = [-\underline{\alpha}' \exp(Ax) A \underline{1}] 1_{]0, \infty[}(x),$$

et la FGM par

$$M_\tau(t) = \underline{\alpha}' [tI + A]^{-1} A \underline{1}.$$

Les moments simples sont alors obtenus de la FGM précédente, c.-à-d.

$$E[\tau^n] = (-1)^n n! \underline{\alpha}' A^{-n} \underline{1}, \quad n \in \mathbf{N}^*,$$

De plus, dans le cas PR avec distribution PH, nous avons

$$m'(t) = -\underline{\alpha}' \exp(A[I - \underline{1}\underline{\alpha}']t) A \underline{1}.$$

Exemple 1 Si τ a une distribution *Erlang* (n, λ) , c.-à-d. avec fonction de densité

$$f_\tau(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} \exp(-\lambda x)}{(n-1)!} 1_{]0, \infty[}(x), \quad n \in \mathbf{N}^*, \quad \lambda > 0,$$

alors celle-ci pourra s'écrire comme une distribution PH continue avec paramètres

$$\underline{\alpha} = (1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)',$$

où $\underline{\alpha}$ est un vecteur colonne de dimension n ,

et la matrice A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

1.1.5.2 Équation différentielle : cas Phase-Type

Dans le cas PH continue, nous avons le théorème suivant qui établit une équation différentielle pour la FGM de $Z(t)$.

Théorème 4 Soit $\{N(t); t \geq 0\}$ un processus PR, où la distribution de τ est PH continue avec paramètres $(\underline{\alpha}, A)$ et X est le montant des réclamations tel que sa FGM existe dans un ensemble Ω comprenant l'origine. Alors, pour $t > 0$, $\delta \geq 0$ et $s \in \Omega$, nous avons

$$\frac{\partial M_{Z(t)}(s)}{\partial t} = \left[M_X(se^{-\delta t}) - 1 \right] \left[\underline{\alpha}' \exp(Bt)(-A)\underline{1} + f(t, s) \right],$$

où

$$B = A(I - \underline{1}\underline{\alpha}'),$$

et, en posant $y_0 = 0$,

$$f(t, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{y_k} \cdots \int_0^{y_2} \underline{\alpha}' \exp(B(t - y_k))(-A)\underline{1} \prod_{i=1}^k \left\{ \left[M_X(se^{-\delta y_i}) - 1 \right] \right. \\ \left. \times \underline{\alpha}' \exp(B(y_i - y_{i-1}))(-A)\underline{1} \right\} dy_1 \cdots dy_k.$$

Preuve : Voir Léveillé et coll. (2010). □

En utilisant cette dernière expression, Léveillé et coll. (2010) et Wang et coll. (2018) ont démontré qu'il était possible d'inverser analytiquement, sinon numériquement, la FGM pour un PRC avec un taux d'intérêt net constant.

1.1.6 Définitions de processus de Poisson, avec ou sans effet de tendance

Dans cette section, nous présentons la définition d'un processus de Poisson homogène (PP), celle d'un processus de Poisson avec effet de tendance déterministe (PPT) (voir Ruwet, 2007) et celle d'un processus de Cox. Ces définitions sont particulièrement utilisées au chapitre 2 lorsque nous obtiendrons la FGM du processus de Poisson composé, avec escompte et effet de tendance.

Définition 3 Un processus de comptage $\{N(t); t \geq 0\}$ est un PP homogène d'intensité $\lambda > 0$ si

- $N(0) = 0$;
- le processus est à accroissements stationnaires;
- le processus est à accroissements indépendants;
- $\forall 0 \leq s < t$, la variable aléatoire $N(t) - N(s)$ suit une loi de Poisson avec moyenne $\lambda(t - s)$.

En particulier, nous avons

$$\Pr(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t), \quad k = 0, 1, \dots$$

Définition 4 Un processus de comptage $\{N(t); t \geq 0\}$ est un PPT s'il satisfait les conditions suivantes (voir Ruwet, 2007) :

- $N(0) = 0$;
- le processus est à accroissements indépendants;
- $\forall t \geq 0, \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Pr(N(t+h) - N(t) \geq 2)}{\Pr(N(t+h) - N(t) = 1)} = 0$;
- il existe une fonction à valeurs positives $\lambda(t)$ telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - \Pr(N(t+h) - N(t) = 0)}{h} = \lambda(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Alors, nous avons

$$\Pr(N(t) = k) = \frac{m(t)^k}{k!} \exp(-m(t)),$$

où,

$$m(t) = \int_0^t \lambda(u) du.$$

Définition 5 Soit $\{N(t); t \geq 0\}$ un processus de Cox (voir Cox, 1955). Alors, nous avons

$$\Pr(N(t) = k) = E \left[P(N(t) = k | \lambda(v), 0 \leq v \leq t) \right],$$

où $\{\lambda(t); t \geq 0\}$ est un processus stochastique.

1.2 Méthodes statistiques

Nous présentons la théorie des estimateurs du maximum de vraisemblance et de quasi-vraisemblance. Ces estimateurs seront utilisés au chapitre 5 pour calibrer les distributions des quantités suivantes qui sont des composantes du modèle proposé au chapitre 4 : les indemnités payées, les dépenses, l'inflation sur l'indemnité payée et l'inflation sur les dépenses, les paramètres de dépendance entre l'indemnité payée, les dépenses et le délai de règlement depuis la réclamation à l'assureur, le temps d'inter-occurrence des réclamations, le délai avant que la réclamation parvienne à l'assureur, le délai séparant la réclamation de son règlement et la distribution du nombre de réclamations dans un intervalle de temps donné.

Il y a deux principales raisons pour lesquelles nous considérons les estimateurs présentés dans cette sous-section :

- (1) ces estimateurs permettent une décomposition du problème de calibration du modèle proposé au chapitre 4 en plusieurs sous-problèmes;
- (2) les estimateurs proposés sont calculables.

Ces deux dernières considérations sont importantes, car calibrer un modèle sur une base de données de réclamations fermées n'est pas une tâche très facile, tel que discuté au chapitre 5.

1.2.1 Maximum de vraisemblance

Dans cette section, fortement inspirée de Green (2012), nous présentons un bref survol de la théorie des estimateurs du maximum de vraisemblance. Ainsi, nous définissons la fonction de vraisemblance

$$L(\theta) = f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n | x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f_{Y_i}(y_i | x_i, \theta),$$

où $f_Y(y|x, \theta)$ est la fonction de densité de la variable aléatoire Y , θ est un vecteur de paramètres et x est un vecteur de variables explicatives.

Hypothèses de régularité du maximum de vraisemblance (RMV)

Les hypothèses de régularité pour les calculs liés au maximum de vraisemblance sont les suivantes :

- Les trois premières dérivées de $\ln f_Y(y_i | x_i, \theta)$ par rapport à θ sont continues et finies pour presque tout y_i , $1 \leq i \leq n$;
- il est possible de calculer la valeur espérée de la première et de la deuxième dérivée de $\ln f_Y(y_i | x_i, \theta)$ par rapport à θ , $1 \leq i \leq n$;
- pour toutes les valeurs de θ , nous avons $\left| \frac{\partial^3 \ln f_Y(y_i | x_i, \theta)}{\partial \theta_j \partial \theta_k \partial \theta_l} \right| < \infty, 1 \leq i \leq n$.

Propriété de l'estimateur du maximum de vraisemblance

Si les hypothèses RMV sont satisfaites, alors l'estimateur du maximum de vraisemblance a les propriétés suivantes :

- *convergence en probabilité* : $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta_0$, $\hat{\theta}_n$ est un estimateur basé sur un échantillon de taille n et θ_0 est la vraie valeur du paramètre;
- *normalité asymptotique* : $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}_n \sim N\left(\theta_0, I(\theta_0)^{-1}\right)$, où $I(\theta_0) = -E\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_0 \partial \theta_0'}\right]$;
- *efficacité asymptotique* : $\hat{\theta}$ est asymptotiquement efficient et atteint la borne inférieure de Rao-Cramér;
- *Invariance* : l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\gamma_0 = c(\theta_0)$ est $c(\hat{\theta})$ si $c(\theta_0)$ est une fonction continue et différentiable.

1.2.2 Méthode de quasi-vraisemblance

La méthode de quasi-vraisemblance a été étudiée, entre autres, par Gouriéroux et coll. (1984). L'idée derrière la théorie de la quasi-vraisemblance est la suivante : nous maximisons la vraisemblance d'une distribution de probabilité qui n'est pas nécessairement celle des données observées. Cela nous permet, dans plusieurs cas de figure, de simplifier les équations d'estimation.

Par exemple, au chapitre 5, nous allons estimer les paramètres d'un processus de renouvellement avec effet de tendance (PRT) en effectuant une minimisation de la somme des erreurs quadratiques de l'écart entre le nombre espéré de réclamations et le nombre de réclamations observées sur un intervalle de temps donné. Or, cette minimisation d'erreurs quadratiques est équivalente à maximiser la vraisemblance d'une loi normale. Ainsi, nous estimons les paramètres d'un processus PRT en maximisant la vraisemblance d'une loi normale : nous utilisons la théorie de quasi-vraisemblance. La méthode de quasi-vraisemblance, telle que mentionnée précédemment, permet de simplifier la calibration de certains modèles, ce qui sera démontré au chapitre 5 du présent document. Néanmoins, cette simplification a un coût : les estimateurs maximisant la quasi-vraisemblance ne sont généralement pas efficaces asymptotiquement.

Avant d'introduire la méthode de quasi-vraisemblance, nous devons présenter une famille de lois de probabilité qui est très importante pour cette classe d'estimateurs : la famille exponentielle linéaire. Les estimateurs de quasi-vraisemblance considérés dans cette thèse seront ceux liés à la famille exponentielle linéaire.

1.2.2.1 Famille exponentielle linéaire univariée

La famille exponentielle linéaire univariée est une famille de lois de probabilité pour laquelle la fonction de densité $l(u, m)$ peut être écrite sous la forme suivante :

$$l(u, m) = \exp\left(A(m) + B(u) + C(m)u\right), \quad u \in \mathbf{R},$$

où $A(m)$, $B(u)$, $C(m)$ sont des scalaires et m est un vecteur de paramètres.

Dans le cas d'un estimateur de quasi-vraisemblance, la fonction de densité $l(u, m)$ n'est pas nécessairement la vraie fonction de densité des données observées. La famille exponentielle linéaire a aussi la propriété suivante :

$$\frac{\partial A(m)}{\partial m} + \frac{\partial C(m)}{\partial m} m = 0 .$$

À la figure 2, nous présentons quelques exemples de lois appartenant à la famille exponentielle linéaire univariée.

Figure 2 : Exemples de lois de la famille exponentielle linéaire ²

Famille	Densité	$C(m)$
Binomiale	$\binom{n}{u} \left(\frac{m}{n}\right)^u \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{n-u}$	$\ln\left(\frac{m}{n-m}\right)$
Poisson	$\frac{e^{-m} m^u}{u!}$	$\ln m$
Binomiale négative	$\frac{\Gamma(a+u)}{\Gamma(a)\Gamma(u+1)} \left(\frac{m}{a}\right)^u \left(1 + \frac{m}{a}\right)^{-(a+u)}$	$\ln\left(\frac{m}{a+m}\right)$
Gamma	$\frac{u^{a-1} \exp(-u a/m)}{\Gamma(a)(m/a)^a}$	$-\frac{a}{m}$
Normale	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}\right]$	$\frac{m}{\sigma^2}$

De façon générale, la fonction de quasi-vraisemblance est définie comme suit :

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln l(y_i, m) = \sum_{i=1}^n \ln l(y_i, g(x_i, \theta)) ,$$

où $y_i, i = 1, \dots, n$ représente les données observées, x_i est un vecteur de variables explicatives, θ est un vecteur de paramètres et $g(x_i, \theta)$ est une fonction qui fait un lien entre la distribution de y_i , les variables explicatives x_i , le vecteur de paramètres θ et le vecteur de paramètres m , car $m = g(x_i, \theta)$. Pour estimer le vecteur de paramètres θ , il suffit de calculer $\arg \max_{\theta} Q(\theta)$.

² Cette figure provient de Gouriéroux et coll. (1984).

Nous présentons ci-après un théorème important lié à la matrice de variance-covariance asymptotique des estimateurs de quasi-vraisemblance. Ce théorème suppose que les $y_i | x_i, 1 \leq i \leq n$, sont indépendants.

Théorème 5 Si $l(u, m)$ est de la famille exponentielle linéaire univariée, alors nous avons

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, J^{-1} I J^{-1}),$$

où

$$I = \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial C}{\partial m} \Omega_0 \frac{\partial C'}{\partial m} \frac{\partial g'}{\partial \theta}, \quad J = \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial C}{\partial m} \frac{\partial g'}{\partial \theta},$$

et Ω_0 est la matrice de variance-covariance des données $y_i | x_i, 1 \leq i \leq n$, sous la vraie mesure de probabilité. Cette dernière famille de variance-covariance a une borne inférieure donnée par

$$\Phi = \left[\frac{\partial g}{\partial \theta} \Omega_0^{-1} \frac{\partial g'}{\partial \theta} \right]^{-1}.$$

Preuve : voir Gouriéroux et coll. (1984). □

Remarque 1 Lorsque la loi de l'estimateur de quasi-vraisemblance est la même que la distribution de probabilité sur laquelle nous faisons inférence, cette dernière matrice n'est autre que la matrice de Fisher (voir Gouriéroux et coll., 1984).

Exemple 2 Dans le cas de la quasi-Poisson, l'expression de quasi-vraisemblance est donnée par

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^n -g(x_i, \theta) + y_i \ln g(x_i, \theta),$$

où y_1, \dots, y_n est la variable aléatoire d'intérêt observée, x_1, \dots, x_n est une suite de vecteurs de variables explicatives et θ est un vecteur de paramètres. Pour obtenir l'estimé du vecteur de paramètres θ avec la méthode de quasi-vraisemblance, il suffit de calculer

$$\max_{\theta} Q(\theta).$$

Exemple 3 Dans le cas quasi-Normale, l'expression de quasi-vraisemblance est donnée par

$$Q(\theta) = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - g(x_i, \theta))^2,$$

où y_1, \dots, y_n sont les variables aléatoires observées, x_1, \dots, x_n est une suite de vecteurs de variables explicatives, σ est un paramètre arbitraire et θ est un vecteur de paramètres. L'estimé du vecteur de paramètres θ est calculé comme précédemment.

1.3 Méthodes numériques

Dans cette section, nous présentons les méthodes numériques qui seront utilisées dans cette thèse. Premièrement, nous présentons deux méthodes d'intégration multivariée qui seront utilisées au chapitre 5 pour calculer les deux premiers moments du modèle proposé au chapitre 4. Par la suite, nous présentons la méthode qui sera utilisée pour inverser numériquement des transformées de Fourier au chapitre 2.

1.3.1 Méthodes d'intégration numérique

Dans cette sous-section, nous présentons deux méthodes numériques qui seront utilisées dans cette thèse pour la calibration du modèle. Cette section est calquée sur Hamel (2013), où des intégrales multiples de dimension 6 ou moins ont été résolues numériquement, notamment en rapport avec les moments simples et conjoints de $Z(t)$.

Conséquemment, des méthodes numériques pour résoudre ce type de problème s'avèreront également nécessaires dans cette thèse. Ainsi nous présentons des méthodes qui permettent de résoudre l'intégrale suivante, soit

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d ,$$

où $f(x_1, \dots, x_d)$ est une fonction multivariée de dimension d qui est intégrable.

Il n'y a pas de perte de généralité à se restreindre au domaine d'intégration précédent, car ces méthodes peuvent s'appliquer à d'autres domaines d'intégration bornés en effectuant les changements de variables appropriés³. Pour résoudre ce problème, nous utiliserons des méthodes de « quadrature adaptives ». Celles-ci permettent de discrétiser le problème d'intégration pour en assurer la calculabilité, avec un degré de précision satisfaisant. Une méthode de quadrature permet donc d'approximer une intégrale sur le domaine $[0,1]^d$, où d est le nombre de dimensions, c.-à-d. :

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d \approx \sum_{i_1, \dots, i_d} w(i_1, \dots, i_d) f(i_1, \dots, i_d) ,$$

où $i_j \in [0,1], j = 1, \dots, d$ et $w(i_1, \dots, i_d)$ sont des poids déterminés par la méthode de quadrature.

³Dans le cas univarié, nous avons $\int_a^b f(y) dy = (b-a) \int_0^1 f(a+(b-a)x) dx$. Ce dernier résultat se généralise facilement au cas multivarié.

1.3.1.1 Méthode de Cuhre

Dans cette section, nous présentons brièvement l'algorithme de Cuhre qui est un algorithme déterministe. Pour plus de détails sur cet algorithme, veuillez consulter Bernsten et coll. (1991 a, 1991 b), Dooren et Ridder (1976), Genz et Malik (1980) et Hahn (2005).

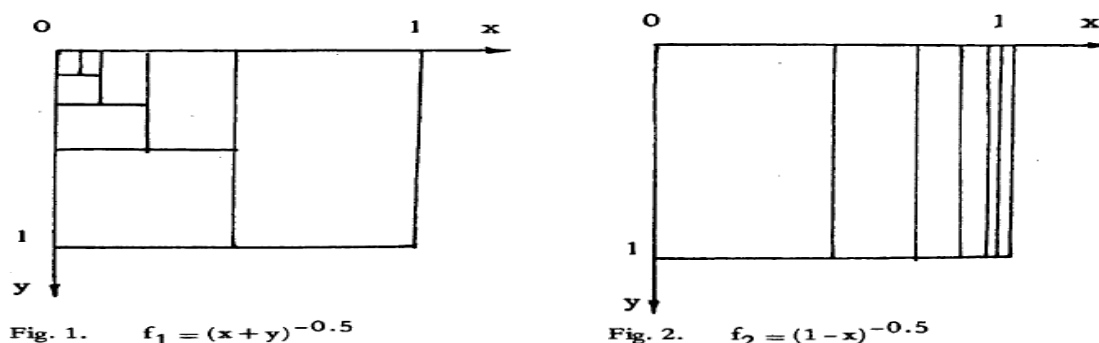
L'algorithme de Cuhre a été décrit pour la première fois dans Dooren et Ridder (1976) sous le nom de Half. Ensuite, il a été amélioré à plusieurs reprises, notamment par Genz et Malik (1980). L'algorithme de Cuhre, utilisé dans cette thèse, provient du « package » Cuba qui est décrit dans Hahn (2005). Ce package peut être utilisé avec le logiciel R.

En résumé, voici les grandes lignes de l'algorithme de Cuhre :

- approximer le volume d'une ou de plusieurs régions à l'aide d'une méthode de quadrature (p. ex. la méthode de degré 9 décrite dans Brensten et coll. (1991b) pour les intégrales de dimension 3 et plus, et la méthode de degré 7 décrite dans Bernsten et coll. (1991b) pour les intégrales en deux dimensions) et évaluer une métrique de difficulté d'intégration;
- diviser la région choisie en deux parties par rapport à la dimension avec la plus grande métrique de difficulté d'intégration;
- appliquer la méthode de quadrature dans les deux sous-régions;
- fusionner les régions dans la liste de régions et mettre à jour la valeur de l'approximation de l'intégrale;
- Répéter les étapes précédentes jusqu'à ce que l'algorithme converge.

La figure qui suit est extraite de Dooren et Ridder (1976) et montre la façon dont l'algorithme aurait partitionné le domaine d'intégration des deux fonctions présentées sur les figures ci-dessous.

Figure 3 : Exemples de partitions de l'algorithme d'intégration de Cuhre



Dans ce cas, l'algorithme de Cuhre va évaluer l'aire de chaque région par une méthode de quadrature et va additionner le tout. Dans la figure de gauche, il y a une concentration de la

division des régions d'intégration dans le côté supérieur gauche, ce qui est logique, car lorsque $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, nous avons $f(x, y) \rightarrow \infty$, ce qui crée plus de difficulté pour la méthode de quadrature. Ainsi, l'algorithme de Cuhre va chercher à partitionner cette région pour obtenir une meilleure précision. Pour le deuxième graphique, le commentaire est identique, car nous avons une singularité lorsque $x \rightarrow 1$.

1.3.1.2 Méthode de Vegas

Dans cette sous-section, nous présentons brièvement l'algorithme de Vegas. L'algorithme de Vegas est une méthode de Monte Carlo adaptive. À noter qu'une méthode de Monte Carlo est une méthode de quadrature à la différence que les points d'intégration sont simulés et ne sont pas donnés de façon déterministe. Pour plus de détails sur cet algorithme, veuillez consulter Lepage (1978) et Hahn (2005).

Quelques notions d'intégration Monte Carlo sont présentées avant d'introduire l'algorithme. Premièrement, nous avons l'identité suivante, qui est une généralisation des méthodes de Monte Carlo classiques :

$$I = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{f(x_1, \dots, x_d)}{p(x_1, \dots, x_d)} p(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d ,$$

où,

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 p(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d = 1 , \quad p(x_1, \dots, x_d) > 0 .$$

Par conséquent, si nous simulons des valeurs de x_1, \dots, x_d à partir de $p(x_1, \dots, x_d)$, nous pouvons obtenir l'estimateur suivant de notre intégrale multiple à partir de la formule suivante :

$$S_M^k = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\frac{f(x_{1,i}, \dots, x_{d,i})}{p(x_{1,i}, \dots, x_{d,i})} \right)^k .$$

Nous pouvons démontrer, en utilisant la loi des grands nombres, que lorsque le nombre de simulations tend vers l'infini, $S_M^1 \rightarrow I$. De plus, nous pouvons obtenir une estimation de la variance de l'intégrale lors des simulations, soit (voir Lepage (1978))

$$\sigma_{I_f}^2 \approx \frac{S_M^2 - (S_M^1)^2}{M - 1} .$$

L'algorithme de Vegas utilise la distribution de probabilité qui minimise la variance de l'estimateur S_M^1 , soit

$$p(x_1, \dots, x_d) = |f(x_1, \dots, x_d)| \left(\int_0^1 \cdots \int_0^1 |f(x_1, \dots, x_d)| dx_1 \cdots dx_d \right)^{-1} .$$

Pour complément d'information, nous présentons l'algorithme de Vegas pour le cas univarié, la généralisation au cas multivarié étant naturelle. Ainsi ...

- **étape 1 :** Nous posons $p_j(x)$ comme étant une loi de probabilité discrète dont le support contient n_j valeurs, $0 = x_{j,0} < \dots < x_{j,n_j} = 1$, avec

$$\Delta x_{j,i} = x_{j,i} - x_{j,i-1} \quad , \quad \sum_{i=1}^{n_j} \Delta x_{j,i} = 1 \quad ,$$

où

$$p_j(x) = \frac{1}{n_j \Delta x_{j,i}} \quad , \quad x_{j,i-1} \leq x < x_{j,i} \quad , \quad i = 1, \dots, n_j \quad ,$$

et j représente l'indice d'itération de l'algorithme. À noter que les n_1 valeurs du support de $p_1(x)$ peuvent être choisies de façon arbitraire, ce qui ne devrait pas affecter la convergence de l'algorithme en général.

- **étape 2 :** Nous générerons une première approximation de I avec une méthode de Monte Carlo avec m simulations. À cette fin, nous utilisons $p_1(x)$ tel que défini précédemment pour simuler les points à partir desquels la fonction à intégrer sera évaluée.
- **étape 3 :** Ensuite, $p_j(x)$ est ajustée pour accélérer la vitesse de convergence de la méthode de Monte Carlo à chaque itération. Pour expliquer le fonctionnement de cet ajustement, nous définissons certaines quantités d'intérêt :

$$m_{j,i} = k \left(\frac{\bar{f}_{j,i} \Delta x_{j,i}}{\sum_{i=1}^{n_j} \bar{f}_{j,i} \Delta x_{j,i}} \right) \quad ,$$

où k est une constante arbitraire et

$$\bar{f}_{j,i} = \sum_{x \in [x_{j,i-1}, x_{j,i}[} |f(x)| \quad .$$

À chaque itération, tous les intervalles de la distribution de probabilité $p_j(x)$ seront subdivisés en $m_{j,i} + 1$ points. Autrement dit, nous divisons tout les $\Delta x_{j,i}$ en $m_{j,i} + 1$ points. À noter qu'il y a d'autres façons de définir $m_{j,i}$ pour éviter une subdivision trop rapide des intervalles, ce qui peut rendre instable l'algorithme numérique. En pratique, une valeur adéquate de k est $k = 1000$.

- **étape 4** : Ensuite, l'intégrale est réévaluée à l'aide de simulations provenant de la densité ajustée.
- **étape 5** : Répéter les étapes 3 et 4 jusqu'à convergence de l'algorithme. Par exemple, des critères de convergence de l'algorithme pourraient être une estimation de l'erreur de l'intégrale ou un nombre d'évaluations de la fonction à intégrer (p.ex. 500 000 évaluations).

Précisément, nous pouvons obtenir des estimations de la qualité de l'approximation de l'intégrale à l'aide des fonctions définies ci-après à la T -ième itération:

$$\bar{I} = \sigma_I^2 \sum_{j=1}^T \frac{I_j}{\sigma_j^2} \quad , \quad \sigma_I = \left[\sum_{j=1}^T \sigma_j^{-2} \right]^{-\frac{1}{2}} ,$$

où I_j est la valeur estimée de l'intégrale à la j -ième itération et σ_j est une estimation de l'écart-type de l'intégrale à la j -ième itération. Ainsi, nous avons

$$\sum_{j=1}^T \frac{(I_j - \bar{I})^2}{\sigma_j^2} \sim \chi_{(T-1)}^2 .$$

Lepage (1978) mentionne que la valeur de la Chi-carré précédente ne devrait pas beaucoup dépasser $T - 1$, sous faute de quoi l'algorithme pourrait ne pas donner une réponse précise en général.

1.3.2 Méthodes d'inversion de la transformée de Fourier

Pour inverser des transformées de Fourier, nous utiliserons la méthode présentée dans Shevchenko (2010). La transformée de Fourier de $Z(t)$ est donnée par

$$\varphi_{Z(t)}(s) = E \left[\exp(s i Z(t)) \right] = M_{Z(t)}(s i) ,$$

où $i = \sqrt{-1}$.

Ainsi, Shevchenko (2010) nous présente la formule d'inversion suivante :

$$\Pr(Z(t) \leq x) = F_{Z(t)}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left(\varphi_{Z(t)}(s) \right) \frac{\sin(sx)}{s} ds .$$

Cette dernière identité sera utilisée pour obtenir numériquement des valeurs très précises de la fonction de répartition de $Z(t)$ afin d'approximer $F_{Z(t)}(x)$.

1.4 Notions d'ordonnement stochastique

Nous présentons ci-dessous des notions d'ordonnement stochastique qui seront utilisées au chapitre 3 pour établir un ordre stochastique entre un processus de renouvellement composé, avec escompte et effet de tendance, et un processus de Poisson composé avec escompte et effet de tendance.

Les processus de Poisson composés, avec escompte et effet de tendance, sont étudiés au chapitre 2. Nous y démontrons qu'il est possible d'obtenir des résultats analytiques pour la fonction génératrice des moments, ce qui nous permet d'inverser cette dernière avec des transformées de Fourier. Généralement, il est difficile (mais pas impossible, tel que nous le démontrerons au chapitre 3) d'obtenir ou d'inverser la fonction génératrice des moments pour la classe de processus considérée au chapitre 3. Cela pourrait être particulièrement difficile dans le cas d'applications pratiques. Or, dans plusieurs cas particuliers, nous pouvons obtenir une borne stochastique pour les processus considérés au chapitre 3 en utilisant ceux présentés au chapitre 2, lesquels sont généralement plus simples à calculer. De plus, ces résultats liés à l'ordonnement stochastique peuvent aussi être utilisés pour obtenir des inégalités entre la probabilité de ruine de la classe de processus considérée au chapitre 3 et celle considérée au chapitre 2. Cela peut être particulièrement utile pour des travaux ultérieurs si une borne de probabilité de ruine calculable est éventuellement obtenue pour la classe de processus considérée au chapitre 2.

Définitions 6⁴ Considérons la fonction de répartition $F(x)$ d'une variable aléatoire positive. Alors,

- $F(x)$ est NBU (NWU) si $\bar{F}(x)\bar{F}(y) \geq (\leq) \bar{F}(x+y)$, pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
- $F(x)$ est IFR (DFR) si et seulement si $\bar{F}(x+y)/\bar{F}(y)$ est une fonction décroissante (croissante) de y pour tout $x \geq 0$.
- Soit $r(y) = f(y)/\bar{F}(y)$, $y \geq 0$. Si $r(y)$ est croissant, alors $\bar{F}(x+y)/\bar{F}(y)$ est décroissant. Si $r(y)$ est décroissant, alors $\bar{F}(x+y)/\bar{F}(y)$ est croissant. $r(y)$ est la fonction de hasard.
- $F(x)$ est IFRA si, pour $t \geq 0$, $-t^{-1} \ln(1-F(t))$ est croissant, et est DFRA si $-t^{-1} \ln(1-F(t))$ est décroissant.
- $F(x)$ NBUE (NWUE) si :

$$\int_0^{\infty} (1-F(x)) dx < \infty, \int_t^{\infty} (1-F(x)) dx \leq (\geq) \int_0^{\infty} (1-F(x)) dx (1-F(t)), t \geq 0.$$

⁴ NBU signifie : « New better than used », NWU signifie : « New worse than used », IFR signifie : « Increasing failure rate », DFR signifie : « Decreasing failure rate », IFRA signifie : « Increasing failure rate average », DFRA signifie : « Decreasing failure rate average », NBUE signifie : « New better than used in expectation », NWUE signifie : « New worse than used in expectation »

Remarque 3 Nous avons les relations d'ordre suivantes (voir Barlow et Proschan (1975))

$$IFR \Rightarrow IFRA \Rightarrow NBU \Rightarrow NBUE ,$$

et

$$DFR \Rightarrow DFRA \Rightarrow NWU \Rightarrow NWUE .$$

Exemple 4 La loi $GAMMA(\alpha, \lambda)$ étant importante dans beaucoup d'applications, nous montrons qu'elle est IFR si $\alpha \geq 1$ et DFR si $\alpha \leq 1$ (voir Barlow et Proschan, 1975).

Ainsi, pour $f(t) = \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$, nous avons

$$r(t)^{-1} = \frac{1-F(t)}{f(t)} = \frac{\bar{F}(t)}{f(t)} = \int_t^\infty \left(\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \exp(-\lambda(x-t)) dx .$$

En faisant le changement de variable $u = x - t$, nous obtenons

$$r^{-1}(t) = \int_0^\infty \left(1 + \frac{u}{t}\right)^{\alpha-1} \exp(-\lambda u) du .$$

Ainsi, la fonction $r(t)^{-1}$ est croissante pour $0 < \alpha \leq 1$ et décroissante pour $\alpha \geq 1$.

Nous présentons, ci-dessous, un théorème qui permettra d'établir un ordre stochastique entre un processus de Poisson non-homogène, avec une certaine fonction de moyenne, et un processus PR.

Théorème 6 *Considérons un processus PR $\{N(t); t \geq 0\}$ tel que les temps d'inter-occurrence ont une fonction de répartition commune F , et supposons que $\varphi(t) = -\ln(1 - F(t))$. Si F est NBU (NWU), alors*

$$\Pr(N(t) \leq n-1) \geq (\leq) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\varphi(t)^j}{j!} \exp(-\varphi(t)) , t \geq 0 , n \in \mathbf{N}^* .$$

Preuve : Voir Barlow et Proschan (1975). □

Théorème 7 *Si $F(x)$ est NBU (NWU), alors nous avons*

$$\text{Var}(N(t)) \leq (\geq) E[N(t)] .$$

Preuve : Voir Barlow et Proschan (1975).



Remarque 4 : Ce dernier théorème démontre que les PR permettent de considérer des processus de comptage avec une variance inférieure, égale ou supérieure à la moyenne, ce qui est très utile d'un point de vue pratique. C'est aussi le cas pour les processus PRT.

Chapitre 2 Processus de Poisson composé, avec escompte et effet de tendance (PPCT)

2.0 Motivation

Avant de s'attaquer à un modèle complexe, il est instructif d'étudier d'abord un cas particulier, car certaines caractéristiques du cas particulier se retrouveront sous une forme ou une autre dans le modèle plus complexe. Dans cet esprit, et avant d'étudier le processus de renouvellement composé avec effet de tendance et escompte (PRCT), nous étudions un cas particulier important de ce dernier : le processus de Poisson composé avec effet de tendance et escompte (PPCT). Dans ce chapitre, nous démontrons qu'il est possible d'obtenir une expression intégrale de la FGM du processus PPCT, avec escompte déterministe ou stochastique, et de l'inverser soit analytiquement soit numériquement.

À la section 2.1, nous étudions le processus de Poisson composé avec intensité constante et avec facteur d'escompte aléatoire. En autant qu'elle existe, nous démontrons qu'il est possible d'obtenir la fonction génératrice des moments. À la section 2.1, nous considérons aussi un corollaire important : cas où l'intensité est aléatoire. À la section 2.2, nous généralisons les résultats de la section 2.1 en considérant le processus de Poisson composé non-homogène et démontrons qu'il est possible d'obtenir la fonction génératrice des moments de ce dernier avec une fonction d'intensité déterministe générale. Par la suite, à la section 2.3, nous généralisons les résultats de la section 2.2 en considérant le processus de Cox composé avec escompte. Nous démontrons qu'il est possible d'obtenir la fonction génératrice des moments. À la section 2.4, nous comparons numériquement les résultats obtenus aux sections 2.1, 2.2 et 2.3. Finalement, à la section 2.5, nous adaptons certains résultats des sections 2.1, 2.2 et 2.3 à un cas particulier du modèle proposé dans Léveillé et Hamel (2013), qui est un processus de coûts agrégés liés aux assurances pour fautes des professionnels de la santé. Ces résultats sont importants, car ils permettent de faire le lien entre les résultats obtenus dans cette section et l'application pratique qui en découle aux chapitres 4 et 5. Finalement, à la section 2.6, nous faisons un retour sur les résultats obtenus au chapitre 2.

2.1 Processus de Poisson composé (PPC) avec intensité constante ou aléatoire

Dans cette sous-section, nous étudions le PPC avec intensité constante ou aléatoire. Dans le cas aléatoire, le nombre moyen de réclamations qui surviennent sur l'intervalle $[0, t]$ est donné par

$$E[N(t)] = E[\Lambda]t.$$

où l'intensité Λ est aléatoire et $N(t)$ est le nombre de sinistres dans l'intervalle $[0, t]$.

Ces deux types de processus figurent en bonne place dans la théorie classique du risque. Néanmoins, leurs possibilités d'applications pratiques sont limitées. Par exemple, pour le cas déterministe, la variance du nombre de sinistres dans un intervalle de temps donné est égale à la moyenne de ce nombre. Notons toutefois que le PPC conditionnel (PPCA), c.-à-d. avec intensité aléatoire, permet de considérer un processus où la variance du nombre de sinistres dans un intervalle de temps est supérieure à sa moyenne, ce qui augmente les possibilités d'applications

pratiques. Néanmoins, le processus PPCA ne permet pas de considérer le cas où la variance du nombre de sinistres est inférieure à sa moyenne. Pour cette raison, nous considérons des extensions de ce processus aux chapitres 2, 3, 4 et 5.

Une autre classe de modèles, les processus de renouvellement composé avec effet de tendance et escompte, considérée aux chapitres 3, 4 et 5 en vue de l'application pratique présentée dans cette thèse, présente plus de souplesse que l'approche PPCA d'un point de vue d'application pratique, car elle permet aussi de considérer le cas où la variance du nombre de sinistres dans un intervalle de temps est inférieure à sa moyenne. De plus, l'approche considérée aux chapitres 3, 4 et 5 génère des équations d'estimation qui sont simples à résoudre et permet d'incorporer des effets de tendance dans la valeur espérée du nombre de sinistres dans un intervalle de temps donné.

Finalement, il est utile d'étudier l'approche PPCA, car cette dernière pourrait être utilisée, dans de travaux de recherche ultérieurs, pour construire des classes plus complexes qui pourraient permettre, par exemple, de modéliser l'impact de changements législatifs sur les coûts d'un processus de coûts agrégés liés aux assurances pour fautes des professionnels de la santé. La dernière remarque est aussi applicable aux processus étudiés à la section 2.3 (i. e. processus de Cox composé avec escompte).

2.1.1 FGM du PPC avec intensité constante (PPCC)

Avant de démontrer le résultat principal de cette sous-section, qui est une expression analytique pour la FGM du PPCC, nous rappelons un théorème classique de la théorie des probabilités qui joue un rôle important dans la démonstration de notre résultat.

Théorème 8 Soit $\{N(t); t \geq 0\}$ un processus de Poisson avec intensité constante $\lambda > 0$. Alors, la loi de probabilité conjointe conditionnelle des n premières occurrences de ce processus de dénombrement, sachant $N(t) = n$, se comporte comme la loi de probabilité conjointe des n statistiques d'ordre des variables aléatoires uniformes U_1, U_2, \dots, U_n avec fonction de répartition commune

$$F_{U_i}(u) = \frac{u}{t}, \quad 0 < u < t,$$

c.-à-d.,

$$f_{T_1, \dots, T_n | N(t)}(t_1, \dots, t_n | n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t.$$

Preuve : Voir Ruwet (2007). □

Nous sommes maintenant prêts à obtenir une expression analytique de la FGM du PPCC avec escompte stochastique. Ainsi, pour une force d'intérêt stochastique, ce résultat origine de ce document et apparaît dans Léveillé et Hamel (2018 a).

Théorème 9 Soit $\{N(t); t \geq 0\}$ un PP avec une intensité constante $\lambda > 0$. Nous considérons le processus suivant :

$$Z(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} D(T_k) X_k ,$$

où,

- T_k est le temps d'occurrence des réclamations et

$$- D(t) = \exp\left(-\int_0^t \delta(x) dx\right).$$

- $\{X_k; k \in \mathbf{N}^*\}$ est une suite de variables aléatoires positives et indépendantes des processus $\{N(t); t \geq 0\}$ et $\{D(t); t \geq 0\}$, tel que la FGM de X_k existe dans un sous-ensemble Ω de \mathbf{R} comprenant l'origine 0.

Alors, pour tout $t > 0$ et pour une force d'intérêt stochastique $\delta(t)$, la fonction génératrice des moments de $Z(t)$ est donnée par

$$M_{Z(t)}(s) = E\left\{\exp\left[\lambda \int_0^t [M_X(sD(v)) - 1] dv\right]\right\}, s \in \Omega.$$

Preuve : Pour tout parcours échantillonnal $\delta^*(x)$ de la force d'intérêt stochastique, nous posons

$$M_{Z(t), \delta^*}(s) = E\left[e^{sZ(t)} \mid \delta^*(x), x \in [0, t]\right].$$

Alors, en utilisant le théorème 8, nous avons

$$\begin{aligned} M_{Z(t), \delta^*}(s) &= E\left[e^{sZ(t)} \mid N(t), \delta^*(x), x \in [0, t]\right] \\ &= \bar{F}_\tau(t) + \sum_{n=1}^{\infty} E\left[\prod_{k=1}^n M_X(sD^*(T_k)) \mid N(t) = n\right] P(N(t) = n) \\ &= \bar{F}_\tau(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t \int_{v_1}^t \dots \int_{v_{n-1}}^t \prod_{k=1}^n M_X(sD^*(v_k)) f_{T_1, \dots, T_n \mid N(t)}(v_1, \dots, v_n \mid n) dv_n \dots dv_1 \right\} P(N(t) = n) \\ &= \bar{F}_\tau(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_{v_1}^t \dots \int_{v_{n-1}}^t \prod_{k=1}^n M_X(sD^*(v_k)) \left[\frac{n!}{t^n}\right] dv_n \dots dv_1 \left[\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}\right] \\ &= e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_0^t \int_{v_1}^t \dots \int_{v_{n-1}}^t \prod_{k=1}^n M_X(sD^*(v_k)) dv_n \dots dv_1 \\ &= e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_0^t \int_0^{v_n} \dots \int_0^{v_2} \prod_{k=1}^n M_X(sD^*(v_k)) dv_1 \dots dv_n . \end{aligned}$$

En dérivant cette dernière expression par rapport à t , nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_{Z(t), \delta^*}(s) &= -\lambda M_{Z(t), \delta^*}(s) + e^{-\lambda t} \left\{ \lambda M_X(sD^*(t)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda^n M_X(sD^*(t)) \int_0^t \int_0^{v_{n-1}} \dots \int_0^{v_2} \prod_{k=1}^{n-1} M_X(sD^*(v_k)) dv_1 \dots dv_{n-1} \right\} \\ &= -\lambda M_{Z(t), \delta^*}(s) + \lambda M_X(sD^*(t)) e^{-\lambda t} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_0^t \int_0^{v_n} \dots \int_0^{v_2} \prod_{k=1}^n M_X(sD^*(v_k)) dv_1 \dots dv_n \right\}. \end{aligned}$$

Et donc,

$$\frac{d}{dt} M_{Z(t), \delta^*}(s) = \lambda \left[M_X(sD^*(t)) - 1 \right] M_{Z(t), \delta^*}(s),$$

équation différentielle qui a comme solution

$$M_{Z(t), \delta^*}(s) = \exp \left[\lambda \int_0^t \left[M_X(sD^*(v)) - 1 \right] dv \right].$$

Cette dernière identité tenant pour tout parcours échantillonnal de la force d'intérêt stochastique, il suffit de prendre son espérance pour obtenir le résultat désiré. \square

2.2 PPC avec effet de tendance (PPCT)

Dans cette sous-section, nous étudions le PPCT, un processus plus réaliste que le PPCC puisqu'il apporte plus de flexibilité pour représenter l'intensité d'occurrence des réclamations dans une base de données actuarielle. Ainsi, dans cet esprit, nous généralisons les résultats de la section précédente.

2.2.1 FGM du PPCT

Avant de démontrer le résultat principal de cette section, nous rappelons un théorème classique qui sera utilisé pour obtenir la FGM du PPCT.

Théorème 10 Soit $\{N(t); t \geq 0\}$ un processus de Poisson non-homogène avec fonction d'intensité déterministe $\lambda(t)$, intégrable sur tout intervalle fini $[0, t]$. Alors, la loi de probabilité conjointe conditionnelle des n premières occurrences de ce processus de dénombrement, sachant que $N(t) = n$, se comporte comme la loi de probabilité conjointe des n statistiques d'ordre des variables aléatoires uniformes U_1, \dots, U_n avec fonction de répartition commune

$$F_{U_i}(u) = \frac{m(u)}{m(t)}, \quad 0 < u < t,$$

c.-à-d.,

$$f_{T_1, \dots, T_n | N(t)}(t_1, \dots, t_n | n) = \frac{n!}{m^n(t)} \prod_{i=1}^n \lambda(t_i) \quad , \quad 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t \quad .$$

Preuve : Voir Ruwet (2007). □

Le résultat du théorème 10 nous permet de généraliser le théorème 9 en considérant un PPT avec fonction d'intensité déterministe $\lambda(t)$, intégrable sur des intervalles finis, avec fonction de moyenne donnée par

$$m(t) = \int_0^t \lambda(x) dx \quad .$$

Nous sommes maintenant prêts à obtenir une expression analytique de la FGM du PPCT.

Théorème 11 Soit $\{N(t); t \geq 0\}$ un PPT avec taux d'intensité déterministe $\lambda(t)$ et $D(t) = \exp\left(-\int_0^t \delta(x) dx\right)$ un facteur d'actualisation. Alors, pour tout $t > 0$ et pour une force stochastique d'intérêt $\delta(t)$, la fonction génératrice des moments de $Z(t)$ est donnée, pour $s \in \Omega$, par

$$M_{Z(t)}(s) = E\left[\exp\left\{\int_0^t \lambda(v) [M_X(sD(v)) - 1] dv\right\}\right] = E\left[\exp\left\{\int_0^t [M_X(sD(v)) - 1] dm(v)\right\}\right] \quad .$$

Preuve : Nous utilisons une idée similaire au théorème 9. Nous avons, pour tout parcours échantillonnal $\delta^*(x)$,

$$\begin{aligned} M_{Z(t), \delta^*}(s) &= E\left[E\left[e^{sZ(t)} \mid N(t), \delta(x) = \delta^*(x), x \in [0, t]\right]\right] \\ &= \bar{F}_\tau(t) + \sum_{n=1}^{\infty} E\left[\prod_{k=1}^n M_X(sD^*(T_k)) \mid N(t) = n\right] P(N(t) = n) \\ &= \bar{F}_\tau(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t \int_{v_1}^t \dots \int_{v_{n-1}}^t \prod_{k=1}^n M_X(sD^*(v_k)) f_{T_1, \dots, T_n | N(t)}(v_1, \dots, v_n | n) dv_n \dots dv_1 \right\} P(N(t) = n) \\ &= \bar{F}_\tau(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_{v_1}^t \dots \int_{v_{n-1}}^t \prod_{k=1}^n M_X(sD^*(v_k)) \left[\frac{n!}{m^n(t)} \prod_{i=1}^n \lambda(v_i) \right] dv_n \dots dv_1 \left[\frac{m^n(t)}{n!} e^{-m(t)} \right] \\ &= e^{-m(t)} + e^{-m(t)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_{v_1}^t \dots \int_{v_{n-1}}^t \prod_{k=1}^n [\lambda(v_k) M_X(sD^*(v_k))] dv_n \dots dv_1 \\ &= e^{-m(t)} + e^{-m(t)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{v_n} \dots \int_0^{v_2} [\lambda(v_k) M_X(sD^*(v_k))] dv_1 \dots dv_n \end{aligned}$$

Nous dérivons cette dernière expression par rapport à t , ce qui nous permet d'obtenir l'équation différentielle suivante

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} M_{Z(t), \delta^*}(s) &= -m'(t)e^{-m(t)} - m'(t)e^{-m(t)} \left\{ \frac{M_{Z(t), \delta^*}(s) - e^{-m(t)}}{e^{-m(t)}} \right\} \\
&+ \lambda(t)e^{-m(t)} M_X(sD^*(t)) \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \int_0^{v_{n-1}} \dots \int_0^{v_2} \prod_{k=1}^{n-1} [\lambda(v_k) M_X(sD^*(v_k))] dv_1 \dots dv_{n-1} \right\} \\
&= -\lambda(t)e^{-m(t)} - \lambda(t)e^{-m(t)} \left\{ \frac{M_{Z(t), \delta^*}(s) - e^{-m(t)}}{e^{-m(t)}} \right\} + \lambda(t)e^{-m(t)} M_X(sD^*(t)) \left\{ \frac{M_{Z(t), \delta^*}(s)}{e^{-m(t)}} \right\} \\
&= \lambda(t) [M_X(sD^*(t)) - 1] M_{Z(t), \delta^*}(s).
\end{aligned}$$

En résolvant cette dernière équation différentielle et en prenant l'espérance, nous obtenons le résultat voulu. \square

Remarque 5 Dans le cas particulier d'une force constante d'intérêt $\delta > 0$, nous avons

$$M_{Z(t)}(s) = \exp \left\{ \int_0^t \lambda(v) [M_X(se^{-\delta v}) - 1] dv \right\} = \exp \left\{ \int_0^t [M_X(se^{-\delta v}) - 1] dm(v) \right\}.$$

De plus, si nous considérons une variable aléatoire ψ qui représente le délai de règlement comme dans Hamel (2013), nous obtenons

$$\begin{aligned}
M_{Z(t)}(s) &= E \left[\exp \left\{ \int_0^t \lambda(v) [M_X(se^{-\delta(v+\psi)}) - 1] dv \right\} \right] \\
&= E \left[\exp \left\{ \int_0^t [M_X(se^{-\delta(v+\psi)}) - 1] dm(v) \right\} \right].
\end{aligned}$$

2.2.2 Calcul de moments récursifs

Le théorème précédent nous permet d'obtenir une formule pour le calcul récursif des moments d'un PPCT, avec force d'intérêt déterministe qui est différente de celle qui a été obtenue dans la littérature dans le cas du PRC (voir théorème 2).

Théorème 12 En considérant les hypothèses de la section 2.2.1 et une force d'actualisation déterministe, nous avons

$$E[Z^n(t)] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} E[Z^k(t)] E[X^{n-k}] \int_0^t D^{n-k}(u) dm(u).$$

Preuve : En dérivant la fonction génératrice des moments n fois, nous obtenons

$$\frac{\partial^n M_{Z(t)}(s)}{\partial s^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{\partial^k M_{Z(t)}(s)}{\partial s^k} \int_0^t D^{n-k}(u) M_X^{(n-k)}(sD(u)) dm(u).$$

L'évaluation de cette dernière expression à $s=0$ donne le résultat. \square

Remarque 6 Dans le cas Poissonien et pour une force d'intérêt constante, la formule précédente est plus simple à calculer que celle correspondante (voir théorème 2) dans le cas des processus de renouvellement (mais par contre plus générale), ceci dû à la forme spéciale de la FGM de la Poisson composée.

2.2.2.1 Exemple Analytique

Dans cette sous-section, nous présentons un exemple analytique. Supposons que $m(t) = \lambda t$ et $D(t) = \exp(-\delta t)$. Alors, selon le théorème 12, nous obtenons

- $E[Z(t)] = \lambda E[X] \int_0^t \exp(-\delta u) du = \lambda E[X] \frac{1 - \exp(-\delta t)}{\delta}$.
- $E[Z^2(t)] = \lambda E[X^2] \int_0^t \exp(-2\delta u) du + \lambda E[Z(t)] E[X] \int_0^t \exp(-\delta u) du$
 $= \lambda E[X^2] \int_0^t \exp(-2\delta u) du + \lambda^2 E^2[X] \int_0^t \int_0^t \exp(-\delta u) \exp(-\delta v) dudv$
 $= \lambda E[X^2] \int_0^t \exp(-2\delta u) du + \lambda^2 E^2[X] 2 \int_0^t \int_0^{t-v} \exp(-\delta(u+v)) \exp(-\delta v) dudv$
 $= \lambda \sum_{k=0}^1 \binom{2}{k} E[X^{2-k}] \int_0^t \exp(-(2-k)v) E[Z^k(t-v)] dv$.

La troisième égalité provient du fait que,

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^{t-v} \exp(-\delta(u+v)) \exp(-\delta v) dudv &= \int_0^t \int_0^{t-v} \exp(-\delta u) \exp(-2\delta v) dudv \\ &= \frac{1 - e^{-2\delta t}}{2\delta^2} - \frac{1}{\delta^2} (\exp(-\delta t) - \exp(-2\delta t)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1 - \exp(-\delta t))}{\delta} \frac{(1 - \exp(-\delta t))}{\delta} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t \exp(-\delta u) \exp(-\delta v) dudv . \end{aligned}$$

De façon générale, nous avons obtenu l'identité suivante pour un PPCC (voir théorème 2) :

$$\lambda \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} E[Z^k(t)] E[X^{n-k}] \int_0^t \exp(-\delta(n-k)u) du = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} E[X^{n-k}] \times \int_0^t \exp(-\delta(n-k)v) E[Z^k(t-v)] dv,$$

où la partie gauche de l'égalité est généralement plus simple à calculer.

2.2.2.2 Exemple Numérique

Dans cette section, nous illustrons numériquement la formule récursive obtenue à la section 2.2.2.1. Nous considérons les hypothèses de la sous-section 2.2.1 et nous posons

$$m(t) = \lambda t, \quad D(t) = \exp(-\delta t),$$

où $\lambda = 1$, $\delta = 0,05$ et $X \sim \text{Exp}(1)$.

Ainsi, nous obtenons ces trois identités :

- $E[Z(t)] = \lambda E[X] \int_0^t \exp(-\delta u) du = \frac{1 - \exp(-0,05t)}{0,05}$
- $E[Z^2(t)] = \lambda E[X^2] \int_0^t \exp(-2\delta u) du + \lambda E[Z(t)] E[X] \int_0^t \exp(-\delta u) du$
 $= 2 \frac{1 - \exp(-0,1t)}{0,1} + \left(\frac{1 - \exp(-0,05t)}{0,05} \right)^2$
- $E[Z^3(t)] = \lambda \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} E[Z^k(t)] E[X^{n-k}] \int_0^t \exp(-\delta(3-k)u) du$
 $= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} E[Z^k(t)] (2-k)! \frac{1 - \exp(-\delta(3-k)t)}{\delta(2-k)}$
 $= 6 \frac{1 - \exp(-0,15t)}{0,15} + 4 \left(\frac{1 - \exp(-0,05t)}{0,05} \right) \frac{1 - \exp(-0,1t)}{0,1}$
 $+ \left(2 \frac{1 - \exp(-0,1t)}{0,1} + \left(\frac{1 - \exp(-0,05t)}{0,05} \right)^2 \right) \frac{1 - \exp(-0,05t)}{0,05}.$

En utilisant ces trois dernières formules, nous obtenons les résultats du tableau 1 où $\sigma[Z(t)]$ est l'écart-type de $Z(t)$ et $\kappa[Z(t)]$ est le coefficient d'asymétrie de $Z(t)$.

En analysant le tableau 1, nous remarquons que la valeur espérée et l'écart-type du processus augmentent avec le temps, ce qui est logique. En effet, l'incertitude sur un plus grand intervalle devrait être plus élevée et nous nous attendons à avoir plus de réclamations, en moyenne, sur un plus grand intervalle de temps. Finalement, le coefficient d'asymétrie diminue avec le temps. Ce résultat est en accord avec les résultats obtenus dans Hamel (2013).

Tableau 1 : Exemple de calcul des trois premiers moments pour un PPC

t	0,25	0,5	0,75	1
$E[Z(t)]$	0,24844	0,49380	0,73611	0,97541
$E[Z^2(t)]$	0,55552	1,21925	1,98699	2,85467
$E[Z^3(t)]$	1,85560	4,45564	7,84631	12,06907
$\sigma[Z(t)]$	0,70271	0,98763	1,20214	1,37958
$\kappa[Z(t)]$	4,1101	2,6252	1,76112	1,06166

2.3 Processus de Cox composé avec escompte

Le processus de Cox composé (PCC), avec intensité stochastique, est une généralisation du PPCT. Ce modèle permet d'ajouter du réalisme par rapport au PPCT. Le PCC pourrait être utile pour modéliser le processus des coûts agrégés pour fautes des professionnels de la santé lorsqu'il y a des changements réglementaires. Par exemple, il y a eu plusieurs « Medical malpractice crisis » aux États-Unis et plusieurs changements réglementaires importants sont survenus, ce qui a eu un impact, dans certains cas, sur le processus des coûts agrégés pour fautes des professionnels de la santé.

Dans cette section, nous démontrons qu'il est aussi possible d'obtenir la FGM du processus de Cox composé avec escompte stochastique. Ce résultat est une généralisation du Théorème 12.

Théorème 13 Soit $\{N(t); t \geq 0\}$ un processus de Cox avec intensité stochastique $\{\lambda(t); t \geq 0\}$. Alors, pour tout $t > 0$ et pour toute force stochastique d'intérêt net $\delta(t)$, la fonction génératrice des moments de $Z(t)$ est donnée, pour $s \in \Omega$, par,

$$M_{Z(t)}(s) = E \left[\exp \left\{ \int_0^t \lambda(v) [M_x(sD(v)) - 1] dv \right\} \right].$$

Preuve : Pour tout parcours échantillonnal $\lambda^*(v)$ et $D^*(v)$, $v \in [0, t]$, nous posons

$$M_{z(t), \lambda^*, D^*}(s) = E \left[e^{sZ(t)} \mid \lambda(v) = \lambda^*(v), D(v) = D^*(v), v \in [0, t] \right].$$

Alors, par le Théorème 12, nous avons

$$M_{z(t), \lambda^*, D^*}(s) = E \left[\exp \left\{ \int_0^t \lambda^*(v) [M_x(sD^*(v)) - 1] dv \right\} \right].$$

Comme la dernière identité tient pour tout parcours échantillonnal de la fonction d'intensité et de la force d'intérêt, il suffit de prendre l'espérance de cette dernière expression afin d'obtenir le résultat. \square

2.4 Comparaison des distributions

Dans les sections précédentes, nous avons obtenu la FGM de trois variantes du processus de Poisson, avec escompte stochastique. Afin de mieux comprendre ce qui différencie ces processus, nous effectuons une analyse numérique. En particulier, nous comparons la fonction de répartition des cinq processus suivants (avec escompte stochastique), soit le PPCC, le PPCA, le PPCT (avec deux fonctions d'intensité différentes) et le PCC. Nous considérons donc les différents processus suivants :

- PPCC, où $m_1(t) = \lambda t, \lambda > 0$;
- PPCA, où $m_2(t) = \mathcal{G}t$ et $\mathcal{G} \sim \text{GAMMA}(2, 2)$ ⁵;
- PPCT, où $m_3(t) = \lambda \sqrt{t}, \lambda > 0$;
- PPCT, où $m_4(t) = \lambda t^2, \lambda > 0$;
- PCC⁶, où $m_5(t) = \lambda \int_0^t \exp(G(u) - 2^{-1} \kappa^2(u)) du$, et

$$G(t) \sim N(0, \kappa^2(t)) \text{ et } \kappa^2(t) = \frac{\sigma^2}{\beta^2} \left(t - \frac{2}{\beta} (1 - \exp(-\beta t)) + \frac{1}{2\beta} (1 - \exp(-2\beta t)) \right).$$

⁵ Le cas où \mathcal{G} se comporte comme une loi $\text{GAMMA}(\alpha, \lambda)$ est lié à la loi binomiale négative.

⁶ L'idée derrière ce choix est d'avoir une variable aléatoire qui est un processus stochastique et qui a la propriété suivante afin d'être comparable aux cas 1 à 4 : $E[m_5(t)] = t\lambda$. Aussi, la fonction $\kappa^2(t)$ est la variance de la solution des équations différentielles stochastiques générées par un processus Vasicek (voir Hamel (2013)).

De plus, nous supposons que

$$X \sim \text{Exp}(\mu) , \quad -\ln D(t) \sim N(\mu(t), \sigma^2(t))$$

où,

$$\mu(t) = \alpha t \quad \text{et} \quad \sigma^2(t) = \frac{\theta^2}{\rho^2} \left\{ t - \frac{2}{\rho} [1 - \exp(-\rho t)] + \frac{1}{2\rho} [1 - \exp(-2\rho t)] \right\} .$$

Rappelons ici que $D(t)$ est la solution des équations différentielles stochastiques générées par un processus Vasicek, voir Hamel (2013) pour plus de détails.

2.4.1 Expressions pour les transformées de Fourier des PPCT

Dans cette section, nous donnerons des expressions intégrales pour les transformées de Fourier de nos cinq cas précédents. Nous les utiliserons à la section 2.4.2 pour obtenir et comparer les fonctions de répartition des cinq processus considérés. Pour ce faire, nous allons inverser numériquement les transformées de Fourier de ces processus en un nombre fini de points. Par souci de clarté, et en posant $\lambda = 1$, nous présentons donc d'abord les expressions des transformées de Fourier considérées ci-haut avant d'effectuer les calculs numériques :

(1) cas $m_1(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi_{Z(t),1}(s) &= E[\exp(isZ(t))] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\int_0^t \left(\frac{ise^{-\mu(y)-\sigma(y)x}}{1-ise^{-\mu(y)-\sigma(y)x}} dm_1(y)\right)\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\int_0^t \left(\frac{ise^{-\mu(y)-\sigma(y)x}}{1-ise^{-\mu(y)-\sigma(y)x}} dy\right)\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx . \end{aligned}$$

(2) cas $m_2(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi_{Z(t),2}(s) &= E[\exp(isZ(t))] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\int_0^t \left(\frac{ise^{-\mu(y)-\sigma(y)x}}{1-ise^{-\mu(y)-\sigma(y)x}} dm_2(y)\right)\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2^2 \left[2 - \int_0^t \left(\frac{ise^{-\mu(y)-\sigma(y)x}}{1-ise^{-\mu(y)-\sigma(y)x}} dy\right)\right]^{-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx . \end{aligned}$$

(3) cas $m_3(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi_{Z(t),3}(s) &= E[\exp(isZ(t))] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\int_0^t \left(\frac{ise^{-\mu(y)-\sigma(y)x}}{1-ise^{-\mu(y)-\sigma(y)x}} dm_3(y)\right)\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\int_0^t \left(\frac{ise^{-\mu(y)-\sigma(y)x}}{1-ise^{-\mu(y)-\sigma(y)x}} \frac{1}{2\sqrt{y}} dy\right)\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx . \end{aligned}$$

(4) cas $m_4(t)$:

$$\begin{aligned}\varphi_{Z(t),3}(s) &= E\left[\exp(isZ(t))\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\int_0^t \left(\frac{ise^{-\mu(y)-\sigma(y)x}}{1-ise^{-\mu(y)-\sigma(y)x}}\right) dm_4(y)\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\int_0^t \left(\frac{ise^{-\mu(y)-\sigma(y)x}}{1-ise^{-\mu(y)-\sigma(y)x}}\right) 2y dy\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx .\end{aligned}$$

(5) cas $m_5(t)$:

$$\begin{aligned}\varphi_{Z(t),5}(s) &= E\left[\exp(isZ(t))\right] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\int_0^t \left(\frac{ise^{-\mu(y)-\sigma(y)x}}{1-ise^{-\mu(y)-\sigma(y)x}}\right) dm_5(y)\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\int_0^t \left(\frac{ise^{-\mu(y)-\sigma(y)x}}{1-ise^{-\mu(y)-\sigma(y)x}}\right) \exp\left(-z\sqrt{\kappa^2(t)} - \kappa^2(t)/2\right) dy\right) \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2 + z^2}{2}\right) dx dz .\end{aligned}$$

2.4.2 Calculs numériques

Dans cette section, nous comparons la méthode d'inversion des transformées de Fourier (voir Shevchenko (2010)) et les simulations. Les fonctions de répartition sont comparées dans le tableau 3 (F signifie inversion par transformée de Fourier et S signifie par simulation). Pour les calculs d'intégrales de dimension deux ou plus, nous utilisons la méthode de Cuhre telle que présentée au chapitre 1. Pour les besoins spécifiques de nos calculs numériques d'inversion de la transformée de Fourier et de nos simulations, nous poserons $\beta = \lambda = \mu = \sigma = 1$, $\alpha = 0.05$, $\rho = 0.02$, $\theta = 0.2$ et $t = 1$.

Tableau 2 : Comparisons de mesures de risque PPC, PPCT, PPCA, et PCC

MR	F: Cas 1	F: Cas 2	F: Cas 3	F: Cas 4	F: Cas 5
$E[Z(1)]$	0,9797	0,9736	0,9834	0,9723	0,9845
$\sigma[Z(1)]$	1,3832	1,5467	1,3963	1,3772	1,4014
$VaR_{0.95}(Z(1))$	3,8436	4,2024	3,8576	3,8004	3,8584
$VaR_{0.99}(Z(1))$	6,0123	6,8463	6,1157	5,9963	6,1268

Tableau 3 : Comparaison des fonctions de répartition PPC, PPCT, PPCA, et PCC

x	S:	F:	S:	F:	S:	F:	S:	F:	S:	F:
	Cas 1	Cas 1	Cas 2	Cas 2	Cas 3	Cas 3	Cas 4	Cas 4	Cas 5	Cas 5
0	0,3678	0,3678	0,4452	0,4444	0,3678	0,3678	0,3677	0,3678	0,3704	0,3738
1	0,6638	0,6597	0,6832	0,6813	0,6610	0,6579	0,6625	0,6615	0,6595	0,6611
2	0,8265	0,8233	0,8198	0,8196	0,8236	0,8213	0,8257	0,8253	0,8213	0,8229
3	0,9117	0,9108	0,8990	0,8989	0,9103	0,9092	0,9119	0,9124	0,9083	0,9099
4	0,9559	0,9559	0,9435	0,9438	0,9553	0,9548	0,9572	0,9569	0,9549	0,9551
6	0,9895	0,9897	0,9829	0,9830	0,9893	0,9896	0,9900	0,9830	0,9891	0,9894
8	0,9974	0,9977	0,9950	0,9949	0,9974	0,9976	0,9977	0,9949	0,9974	0,9976
10	0,9993	0,9995	0,9985	0,9985	0,9993	1	0,9994	0,9985	0,9994	0,9995
12	0,9998	0,9998	0,9994	0,9996	0,9998	1	0,9998	0,9996	0,9999	0,9999
14	0,9999	1	0,9998	0,9998	0,9999	1	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
16	1	1	0,9999	0,9999	1	1	1	0,9999	1	1

Les cinq processus considérés ont la même espérance du nombre de réclamations, soit $E[N(1)] = 1$, ce qui permet d'avoir une certaine base de comparaison. Nous remarquons que les fonctions de répartition ont un comportement similaire pour $m_i(t)$, $i \in \{1, 3, 4, 5\}$. Comme la distribution des X_k et celle du facteur d'escompte sont identiques pour les cinq cas considérés, nous allons étudier ce qui différencie ces processus, c'est-à-d. la distribution du processus de comptage.

Dans le tableau 4, nous remarquons que la distribution de $N(1)$ est très similaire pour les cas 1, 3 et 4. Nous remarquons aussi que la distribution de $N(1)$ pour le cas 5 est très près des cas 1, 3 et 4. Dans le tableau 5, la valeur espérée de $N(1)$ est 1 dans tous les cas. Nous constatons que le facteur d'actualisation n'est pas le facteur qui a le plus d'impact sur la distribution de $Z(1)$, car les sinistres doivent survenir dans l'intervalle de temps $[0, 1]$. Ainsi, il n'est pas surprenant que les distributions de $Z(1)$ soient similaires pour les cas 1, 3, 4 et 5.

Enfin, nous notons que ce qui différencie le cas 2 des cas 1, 3, 4 et 5 est la distribution de $N(1)$ qui a la même valeur espérée que les cas 1, 3, 4 et 5, mais une variabilité plus élevée. Ainsi, la variabilité plus élevée de $N(1)$ se reflète dans la distribution de $Z(1)$.

Tableau 4 : Comparaison des distributions PP, Binomiale négative, PPT, et PCC ⁷

x	$\Pr(N(1) = x)$	$\Pr(N(1) = x)$	$\Pr(N(1) = x)$	$\Pr(N(1) = x)$	$\Pr(N(1) = x)$
	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4	Cas 5
0	0,3679	0,4444	0,3679	0,3679	0,3714
1	0,3679	0,2963	0,3679	0,3679	0,3649
2	0,1839	0,1481	0,1839	0,1839	0,1814
3	0,0613	0,0658	0,0613	0,0613	0,0618
4	0,0153	0,0274	0,0153	0,0153	0,0167

⁷ Les valeurs pour le cas 5 sont obtenues par simulations.

Tableau 5 : Comparaison de mesures de risque des PP, Binomiale négative, PPT, et PCC

	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4	Cas 5
$E[N(1)]$	1	1	1	1	0,9999
$\sigma[N(1)]$	1	1,5	1	1	1,0095

2.5 Ajout de la dépendance entre T_k et X_k

Dans cette sous-section, nous généralisons les résultats présentés dans la section 2.2 en ajoutant une hypothèse importante, soit la dépendance entre T_k et X_k . Cette nouvelle hypothèse s'avérera pertinente lorsque nous considérerons le problème des assurances pour fautes des professionnels de la santé, similairement au modèle étudié dans Léveillé et Hamel (2013).

Théorème 14 Soit $\{N(t); t \geq 0\}$ un PPT avec intensité $\lambda(t)$ et supposons qu'il y a dépendance entre X_k et T_k , $k \in \mathbf{N}^*$, de telle sorte que $\{X_k | T_k; k \in \mathbf{N}^*\}$ forme une suite de variables aléatoires conditionnellement indépendantes et identiquement distribuées.

Alors, pour tout $t > 0$ et pour toute force stochastique d'intérêt net $\delta(t)$, la FGM de $Z(t)$ est donnée, pour $s \in \Omega$, par

$$M_{Z(t)}(s) = E[\exp(sZ(t))] = E\left[\exp\left(\int_0^t [E[\exp(sD(T_k)X_k) | T_k = u] - 1] dm(u)\right)\right].$$

Preuve : Pour tout parcours échantillonnal $\delta^*(x)$, nous avons

$$M_{Z(t), \delta^*}(s) = E\left[E\left[e^{sZ(t)} | N(t), \delta(x) = \delta^*(x), x \in [0, t]\right]\right],$$

d'où,

$$\begin{aligned} M_{Z(t), \delta^*}(s) &= \bar{F}_\tau(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t \int_{v_1}^t \cdots \int_{v_{n-1}}^t \prod_{k=1}^n E\left[\exp(sD(T_k)X_k) | T_k = v_k\right] f_{T_1, \dots, T_n | N(t)}(v_1, \dots, v_n | n) dv_n \cdots dv_1 \right\} \\ &\quad \times \Pr(N(t) = n) \\ &= \exp(-m(t)) + \exp(-m(t)) \\ &\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t \int_0^{v_n} \cdots \int_0^{v_2} \prod_{k=1}^n E\left[\exp(sD(T_k)X_k) | T_k = v_k\right] f_{T_1, \dots, T_n | N(t)}(v_1, \dots, v_n | n) dv_1 \cdots dv_n \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons

$$\frac{\partial M_{Z(t), \delta^*}(s)}{\partial t} = \lambda(t) \left[E \left[\exp(sD(T_k)X_k) \mid T_k = t \right] - 1 \right] M_{Z(t), \delta^*}(s) ,$$

et la conclusion suit en résolvant l'équation différentielle obtenue. \square

Exemple 5 Nous définissons

$$\begin{aligned} Z(t) &= \sum_{k=1}^{N(t)} \left\{ \exp(-\delta_1 T_k) U_k + \exp(-\delta_2 T_k) V_k \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{N(t)} \exp(-\delta_1 T_k) \left\{ U_k + \exp(-(\delta_2 - \delta_1) T_k) V_k \right\} = \sum_{k=1}^{N(t)} \exp(-\delta_1 T_k) X_k , \end{aligned}$$

où les couples $\{(U_k, V_k); k \in \mathbb{N}^*\}$ sont indépendants et identiquement distribués, mais U_k peut être dépendant de V_k , et $N(t) \sim \text{Poisson}(m(t))$. Clairement nous avons que X_k et T_k satisfont les hypothèses du théorème 14, et donc

$$\begin{aligned} M_{Z(t)}(s) &= E \left[\exp(sZ(t)) \right] \\ &= E \left[\exp \left(\int_0^t \left[E \left[\exp(sD(T_k)X_k) \mid T_k = u \right] - 1 \right] dm(u) \right) \right] \\ &= E \left[\exp \left(\int_0^t \left(M_{U,V}(se^{-\delta_1 v}, se^{-\delta_2 v}) - 1 \right) dm(u) \right) \right] . \end{aligned}$$

Remarque 7 : Ce dernier résultat se généralise au cas où $Z(t)$ se comporte comme un processus de Cox composé, et avec taux d'intérêt stochastique. Nous obtenons ainsi l'expression suivante :

$$\begin{aligned} M_{Z(t)}(s) &= E \left[\exp(sZ(t)) \right] \\ &= E \left[\exp \left(\int_0^t \left\{ E \left[\exp(sD(T_k)X_k) \mid T_k = u \right] - 1 \right\} dm(u) \right) \right] \\ &= E \left[\exp \left(\int_0^t \lambda(u) \left\{ M_{U,V}(sD_1(v), sD_2(v)) - 1 \right\} du \right) \right] . \end{aligned}$$

Remarque 8 : En considérant les hypothèses de l'exemple 5, nous avons la relation récursive suivante pour le calcul des moments (il suffit de dériver la FGM n fois) :

$$E[Z^n(t)] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} E[Z^k(t)] \times \int_0^t \left(\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} E[U^i V^{n-k-i}] \exp(-i\delta_1 u) \exp(-(n-k-i)\delta_1 u) \right) dm(u) ,$$

puisque,

$$\frac{\partial^n f(t) h(t)}{\partial t^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^k f(t)}{\partial t^k} \frac{\partial^{n-k} h(t)}{\partial t^{n-k}} ,$$

où $f(t)$ et $h(t)$ sont des fonctions dérivables par rapport à t .

2.6 Discussion des résultats

Dans ce chapitre, nous avons obtenu des résultats analytiques pour le processus PPC avec intensité déterministe et aléatoire, pour le PPCT et pour le processus de Cox composé avec escompte aléatoire. Nous avons démontré, à la section 2.4, qu'il était possible d'utiliser ces expressions analytiques afin d'obtenir une approximation numérique des fonctions de répartition pour cinq cas d'intérêt. Ainsi, il est possible d'obtenir des approximations numériques qui sont très près de la fonction de répartition des processus présentés aux sections 2.1, 2.2 et 2.3 pour plusieurs cas particuliers même en présence d'un facteur d'escompte aléatoire et ce, grâce aux théorèmes liés aux fonctions caractéristiques. Ce genre de comparaison ne semble pas avoir été effectué dans la littérature au meilleur des connaissances de l'auteur du présent document. De plus, des approximations analytiques des différentes fonctions de répartition pourraient être obtenues en utilisant les inversions par transformée de Fourier et les méthodes d'interpolation par ratios de polynômes telles que la méthode de Thiele.

À la section 2.5, nous avons démontré que les résultats présentés aux sections 2.1, 2.2 et 2.3 peuvent être généralisés au cas où X_k est dépendant de T_k . Ce dernier cas est important, car il nous permet d'incorporer une composante supplémentaire dans notre analyse similairement à Hamel (2013). L'exemple 5 est particulièrement pertinent, car il permet de faire le lien entre les résultats obtenus dans cette section et l'application pratique qui en découle aux chapitres 4 et 5.

L'idée derrière les prochains chapitres de cette thèse est de généraliser les résultats présentés dans ces trois premiers chapitres en construisant une classe plus large de processus qui regroupe les processus de renouvellement, le processus de Poisson homogène ainsi que le processus de Cox. De surcroît, nous démontrerons que cette nouvelle classe de processus est calculable et calibrable sur une vraie base de données.

Chapitre 3 Modèles de renouvellement composé avec effet de tendance et escompte

3.0 Motivation

Dans ce chapitre, nous étudions des modèles de renouvellement composés avec effet de tendance et escompte (PRCT). Cette nouvelle classe de modèles généralise les résultats obtenus pour la classe PPCT au chapitre 2 et elle permet aussi d'ajouter encore plus de réalisme dans les diverses applications actuarielles. En particulier, les processus de Poisson homogène et non-homogène ont des moyennes qui sont égales à leurs variances, ce qui est très restrictif d'un point de vue application pratique. Le processus de Cox permet de considérer, quant à lui, une moyenne égale ou supérieure à la variance. La classe des modèles PRCT vient donc corriger ce problème en permettant de considérer des processus de dénombrement avec une moyenne inférieure, supérieure ou égale à la variance.

3.1 PRC avec effet de tendance déterministe (PRCT)

La classe des « modèles composés » avec escompte a été largement étudiée dans la littérature actuarielle et en théorie des probabilités. Le modèle PRC est un des plus importants et est directement lié au PRCT. Comme dans Léveillé et Hamel (2017), il est approprié de présenter la définition formelle d'un processus de renouvellement avec effet de tendance telle que proposée par Lindqvist et coll. (2003) avant d'introduire le processus de risque étudié dans cette section.

Définition 7 Soit $\lambda(t)$ une fonction non-négative définie pour $t \geq 0$ et satisfaisant

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du < \infty, \quad t \geq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda(t) = \infty.$$

De plus, soit F une fonction de répartition continue telle que $F(0) = 0$. Alors, la suite des temps d'occurrence $\{T_k; k \in \mathbf{N}^* = \{1, 2, \dots\}\}$ génère un processus de renouvellement avec tendance, noté $\text{PRT}[F, \lambda(\cdot)]$, si la suite des temps transformés $\{\Lambda(T_k); k \in \mathbf{N}^*\}$ forme un PR qui obéit à une fonction de répartition commune F et a une fonction déterministe intégrable $\lambda(t)$.

Remarque 9 (1) Comme $F(0) = 0$, nous supposons que Λ est une fonction strictement croissante et que son inverse Λ^{-1} existe.

(2) Deux processus PRT importants : le $\text{PRT}[F, \lambda(\cdot)]$, où λ est une constante, est un processus de renouvellement ordinaire avec distribution du temps entre les réclamations $F(x/\lambda)$, et le $\text{PRT}[1 - e^{-x}, \lambda(\cdot)]$ est un processus de Poisson non-homogène avec fonction d'intensité $\lambda(\cdot)$.

(3) Si $\tilde{t} = \Lambda(t)$, $\tilde{N} = N \circ \Lambda^{-1}$, $m(t) = E[N(t)]$ et $\tilde{m}(\tilde{t}) = E[\tilde{N}(\tilde{t})]$, alors nous avons :

$$F_{T_n}(t) = F^{*n}(\Lambda(t)) \Rightarrow f_{T_n}(t) = \lambda(t) f^{*n}(\Lambda(t)) ,$$

et,

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_n}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(\Lambda(t)) = \tilde{m}(\Lambda(t)) .$$

Maintenant, nous introduisons le PRCT avec une force constante d'intérêt net qui sera étudié dans la première partie de ce chapitre, soit

$$Z(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\delta T_k} X_k ,$$

où,

- $\{\tau_k; k \in \mathbf{N}^*\}$ est une suite de variables aléatoires continues positives telle que τ_k représente le délai entre les $(k-1)$ -ième et k -ième réclamations.
- $\{T_k; k \in \mathbf{N}^*\}$ et $\{\tilde{T}_k; k \in \mathbf{N}^*\}$ sont des suites de variables aléatoires positives telle que $T_k = \sum_{i=1}^k \tau_i$, $T_0 = 0$, T_k représente le temps d'occurrence de la k -ième réclamation et $\tilde{T}_k = \Lambda(T_k)$.
- $\{X_k; k \in \mathbf{N}^*\}$ est une suite de variables aléatoires positives, indépendantes et identiquement distribuées, indépendantes de $\{\tau_k; k \in \mathbf{N}^*\}$, telle que X_k représente le montant de la réclamation sans inflation.
- La fonction génératrice des moments de X_k , M_X , existe sur un sous-ensemble Ω de \mathbf{R} incluant l'origine.
- $\{N(t); t \geq 0\}$ est un processus PRT $[F, \lambda(\cdot)]$ et représente le nombre de réclamations dans l'intervalle $[0, t]$.
- $\delta > 0$ est une force constante d'intérêt net.

En plus des notations précédentes, nous ajoutons les suivantes qui permettront d'écrire de façon simple et compacte les équations récursives présentées subséquemment :

$$\tilde{Z}(\tilde{t}, \tilde{v}) = \sum_{k=1}^{\tilde{N}(\tilde{t}-\tilde{v})} e^{-\delta \Lambda^{-1}(\tilde{v} + \tilde{T}_k)} X_k \Leftrightarrow Z(t, v) = \sum_{k=1}^{N(\Lambda^{-1}[\Lambda(t)-\Lambda(v)])} e^{-\delta \Lambda^{-1}[\Lambda(v) + \Lambda(T_k)]} X_k ,$$

ce qui implique,

$$\tilde{Z}(\tilde{t}) =: \tilde{Z}(\tilde{t}, 0) = \sum_{k=1}^{\tilde{N}(\tilde{t})} e^{-\delta \Lambda^{-1}(\tilde{t}_k)} X_k \Leftrightarrow Z(t) = Z(t, 0) = \sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\delta T_k} X_k .$$

Ainsi, après avoir défini ce dernier processus de risque, nous présentons une formule récursive pour le calcul des moments d'un PRCT, avec force constante d'intérêt net, dans les sections 3.1.1 et 3.1.2. Dans la section 3.1.3, nous présentons une expression intégrale pour la FGM du PRCT avec force constante d'intérêt net. Dans cette dernière section, nous utilisons une méthode numérique de résolution d'équations différentielles en série afin d'obtenir la transformée de Laplace et ainsi obtenir par inversion une approximation de la fonction de répartition. Dans la section 3.2, nous présentons une extension du PRCT avec force constante d'intérêt net en considérant une force stochastique d'intérêt net et une fonction d'intensité stochastique. Dans la section 3.3, nous étudions le PRCT lorsque la dépendance est introduite entre T_k et X_k . Dans la section 3.4, nous présentons un théorème qui permet d'obtenir un ordre stochastique entre un PRCT et un PPCT associé d'une manière particulière au processus précédent. Finalement, à la section 3.5, nous présentons un résumé des résultats obtenus dans ce chapitre.

3.1.1 Calcul des moments récursifs avec force d'actualisation constante

Léveillé et Garrido (2001 b) ont obtenu des formules récursives pour le calcul des moments des PRC avec force constante d'intérêt net. Ici, nous présentons un théorème qui généralise ce dernier résultat pour les PRCT. Avant de le démontrer, un théorème important doit être présenté.

Théorème 15 *Considérons le processus de renouvellement avec effet de tendance généré par $\{T_k; k \in \mathbb{N}^*\}$. Alors, pour $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq t$, $i_0 = 0$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, $1 \leq k \leq n$, la fonction de densité conjointe conditionnelle de $T_{i_1}, T_{i_2}, \dots, T_{i_k} \mid N(t) = n$ est donnée par :*

$$f_{T_{i_1}, T_{i_2}, \dots, T_{i_k} \mid N(t)}(t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k} \mid n) = \frac{P\left(\tilde{N}\left(\Lambda(t) - \Lambda(t_{i_k})\right) = n - i_k\right) \prod_{j=1}^k f^{*(i_j - i_{j-1})}\left(\Lambda(t_{i_j}) - \Lambda(t_{i_{j-1}})\right)}{P(N(t) = n)} ,$$

où f^{*n} est la n -ième convolution de la variable aléatoire $\Lambda(T_i) - \Lambda(T_{i-1})$, $i \in \mathbb{N}^*$.

Preuve : Il suffit d'appliquer directement l'identité correspondante pour le PR dans Léveillé et Adékambi (2012) et le fait que

$$F_{T_{i_1}, T_{i_2}, \dots, T_{i_k} \mid N(t)}(t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k} \mid n) = F_{\Lambda(T_{i_1}), \Lambda(T_{i_2}), \dots, \Lambda(T_{i_k}) \mid \tilde{N}(\Lambda(t))}(\Lambda(t_{i_1}), \Lambda(t_{i_2}), \dots, \Lambda(t_{i_k}) \mid n). \quad \square$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant qui permet d'obtenir une formule récursive pour le calcul des moments du PRCT dans le cas où la force d'intérêt net est constante. Avant de démontrer ce résultat, nous présentons un lemme.

Lemme 1 *Considérons un processus PR avec une fonction de répartition commune $F(v)$, et supposons que $g(x)$ est une fonction non-négative qui est Lebesgue intégrable. Alors, pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $0 < t < \infty$, nous avons :*

$$\int_0^t \int_0^{t-v_1} \dots \int_0^{t-\sum_{i=1}^{n-1} v_i} g\left(\sum_{i=1}^n v_i\right) dF(v_n) \dots dF(v_1) = \int_0^t g(v) dF^{*n}(v).$$

Preuve : Le résultat tient clairement pour $n = 1$. Supposons qu'il est vrai pour $n = k$. Alors, pour $n = k + 1$, notre hypothèse d'induction implique que

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^{t-v_1} \dots \int_0^{t-v_1-\sum_{i=2}^k v_i} g\left(v_1 + \sum_{i=2}^{k+1} v_i\right) dF(v_{k+1}) \dots dF(v_1) &= \int_0^t \int_0^{t-v_1} g(v_1 + w) dF^{*k}(w) dF(v_1) \\ &= \int_0^t g(y) dF^{*k+1}(y). \end{aligned}$$

□

Théorème 16 *Considérer les processus de risque $\{Z(t,0); t \geq 0\}$ et $\{\tilde{Z}(\tilde{t},0); \tilde{t} \geq 0\}$ tels que définis dans la section 3.1. Alors, pour $n \in \mathbf{N}^*$, nous obtenons la formule récursive suivante pour le calcul des moments en supposant que ces derniers existent :*

$$E[\tilde{Z}^n(\tilde{t},0)] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} E[X^{n-k}] \int_0^{\tilde{t}} e^{-\delta(n-k)\Lambda^{-1}(\tilde{u})} E[\tilde{Z}^k(\tilde{t},\tilde{u})] d\tilde{m}(\tilde{u}),$$

où $E[\tilde{Z}^n(\tilde{t},0)] = E[Z^n(t,0)]$.

Preuve : Nous allons utiliser la FGM de $\tilde{Z}(\tilde{t},\tilde{v})$ conjointement avec le lemme 1 pour obtenir l'équation récursive des moments. Nous conditionnons premièrement sur la FGM de $\tilde{Z}(\tilde{t},\tilde{v})$ et sur les temps d'occurrence dans $[0, \tilde{t} - \tilde{v}]$ pour obtenir

$$\begin{aligned} M_{\tilde{Z}(\tilde{t},\tilde{v})}(s) &= E \left[E \left[\exp \left(s \sum_{k=1}^{\tilde{N}(\tilde{t}-\tilde{v})} \exp(-\delta \Lambda^{-1}(\tilde{v} + \tilde{T}_k)) X_k \right) \middle| \tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_{\tilde{N}(\tilde{t}-\tilde{v})}, \tilde{N}(\tilde{t}-\tilde{v}) \right] \right] \\ &= E \left[\prod_{k=1}^{\tilde{N}(\tilde{t}-\tilde{v})} M_X \left(s \exp(-\delta \Lambda^{-1}(\tilde{v} + \tilde{T}_k)) \right) \right]. \end{aligned}$$

En conditionnant encore sur \tilde{T}_1 , nous obtenons l'équation intégrale suivante

$$M_{\tilde{Z}(\tilde{t}, \tilde{v})}(s) = \bar{F}(\tilde{t} - \tilde{v}) + \int_0^{\tilde{t} - \tilde{v}} M_X \left(s \exp(-\delta \Lambda^{-1}(\tilde{v} + \tilde{u}_1)) \right) M_{\tilde{Z}(\tilde{t}, \tilde{v} + \tilde{u}_1)}(s) dF(\tilde{u}_1).$$

En dérivant n fois cette dernière expression par rapport à s , nous avons

$$\begin{aligned} M_{\tilde{Z}(\tilde{t}, \tilde{v})}^{(n)}(s) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^{\tilde{t} - \tilde{v}} \exp(-\delta(n-k)\Lambda^{-1}(\tilde{v} + \tilde{u}_1)) \\ &\quad \times M_X^{(n-k)} \left(s \exp(-\delta(n-k)\Lambda^{-1}(\tilde{v} + \tilde{u}_1)) \right) M_{\tilde{Z}(\tilde{t}, \tilde{v} + \tilde{u}_1)}^{(k)}(s) dF(\tilde{u}_1) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} E \left[X^{n-k} \right] \int_0^{\tilde{t} - \tilde{v}} \exp(-\delta(n-k)\Lambda^{-1}(\tilde{v} + \tilde{u}_1)) M_{\tilde{Z}(\tilde{t}, \tilde{v} + \tilde{u}_1)}^{(k)}(0) dF(\tilde{u}_1) \\ &\quad + \int_0^{\tilde{t} - \tilde{v}} M_{\tilde{Z}(\tilde{t}, \tilde{v} + \tilde{u}_1)}^{(n)}(0) dF(\tilde{u}_1). \end{aligned}$$

En appliquant itérativement m fois cette dernière équation, nous obtenons

$$\begin{aligned} M_{\tilde{Z}(\tilde{t}, \tilde{v})}^{(n)}(0) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} E \left[X^{n-k} \right] \sum_{j=1}^{m+1} \int_0^{\tilde{t} - \tilde{v} - \tilde{u}_1} \int_0^{\tilde{t} - \tilde{v} - \tilde{u}_1} \cdots \int_0^{\tilde{t} - \tilde{v} - \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{u}_i} \exp \left(-\delta(n-k)\Lambda^{-1} \left(\tilde{v} + \sum_{i=1}^j \tilde{u}_i \right) \right) \\ &\quad \times M_{\tilde{Z}(\tilde{t}, \tilde{v} + \sum_{i=1}^j \tilde{u}_i)}^{(k)}(0) dF(\tilde{u}_j) \cdots dF(\tilde{u}_1) \\ &\quad + \int_0^{\tilde{t} - \tilde{v}} \int_0^{\tilde{t} - \tilde{v} - \tilde{u}_1} \cdots \int_0^{\tilde{t} - \tilde{v} - \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{u}_i} M_{\tilde{Z}(\tilde{t}, \tilde{v} + \sum_{i=1}^j \tilde{u}_i)}^{(n)}(0) dF(\tilde{u}_j) \cdots dF(\tilde{u}_1). \end{aligned}$$

Étant donné que $P(\tilde{N}(\tilde{t} - \tilde{v}) < \infty) = 1$, alors pour \tilde{t} fixé et $0 \leq \tilde{v} \leq \tilde{t}$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_{\tilde{Z}(\tilde{t}, \tilde{v} + \sum_{i=1}^m \tilde{u}_i)}(s) = 1 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} M_{\tilde{Z}(\tilde{t}, \tilde{v} + \sum_{i=1}^m \tilde{u}_i)}^{(n)}(0) = 0.$$

Cela implique $\exists c > 0$, qui dépend de n, \tilde{t} et \tilde{v} , tel que

$$\left| M_{\tilde{Z}(\tilde{t}, \tilde{v} + \sum_{i=1}^m \tilde{u}_i)}^{(n)}(0) \right| \leq c, \forall m \in \mathbf{N}^*,$$

et alors

$$0 \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\tilde{t}-\tilde{v}} \int_0^{\tilde{t}-\tilde{v}-\tilde{u}_1} \dots \int_0^{\tilde{t}-\tilde{v}-\sum_{i=1}^{m-1} \tilde{u}_i} \left| M_{\tilde{Z}\left(\tilde{t}, \tilde{v} + \sum_{i=1}^m \tilde{u}_i\right)}^{(n)} \right| dF(\tilde{u}_m) \dots dF(\tilde{u}_1) \leq c \lim_{n \rightarrow \infty} F^{*m}(\tilde{t}) = 0.$$

Ainsi, nous avons

$$M_{\tilde{Z}(\tilde{t}, \tilde{v})}^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} E[X^{n-k}] \sum_{j=1}^{m+1} \int_0^{\tilde{t}-\tilde{v}} \int_0^{\tilde{t}-\tilde{v}-\tilde{u}_1} \dots \int_0^{\tilde{t}-\tilde{v}-\sum_{i=1}^{j-1} \tilde{u}_i} \exp\left(-\delta(n-k)\Lambda^{-1}\left(\tilde{v} + \sum_{i=1}^j \tilde{u}_i\right)\right) \times M_{\tilde{Z}\left(\tilde{t}, \tilde{v} + \sum_{i=1}^j \tilde{u}_i\right)}^{(k)}(0) dF(\tilde{u}_j) \dots dF(\tilde{u}_1).$$

En appliquant le lemme 1, nous obtenons

$$\begin{aligned} E[\tilde{Z}^n(\tilde{t}, 0)] &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\tilde{t}-\tilde{v}} e^{-\delta(n-k)\Lambda^{-1}(\tilde{u})} M_{\tilde{Z}(\tilde{t}, \tilde{u})}^{(k)}(0) dF^{*j}(\tilde{u}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \int_0^{\tilde{t}-\tilde{v}} e^{-\delta(n-k)\Lambda^{-1}(\tilde{u})} M_{\tilde{Z}(\tilde{t}, \tilde{u})}^{(k)}(0) d\left(\sum_{j=1}^{\infty} F^{*j}(\tilde{u})\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} E[X^{n-k}] \int_0^{\tilde{t}} e^{-\delta(n-k)\Lambda^{-1}(\tilde{u})} E[\tilde{Z}^k(\tilde{t}, \tilde{u})] d\tilde{m}(\tilde{u}). \end{aligned}$$

□

Remarque 10 Nous pouvons démontrer un résultat plus général que le théorème 16, c.-à-d. pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $0 \leq \tilde{v} < \tilde{t}$:

$$E[\tilde{Z}^n(\tilde{t}, \tilde{v})] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} E[X^{n-k}] \int_0^{\tilde{t}-\tilde{v}} e^{-\delta(n-k)\Lambda^{-1}(\tilde{v}+\tilde{u})} E[\tilde{Z}^k(\tilde{t}, \tilde{v}+\tilde{u})] d\tilde{m}(\tilde{u}).$$

Nous ne démontrons pas le résultat de la remarque 10, car la preuve est similaire au théorème 16. De plus, ce dernier résultat démontre bien qu'effectuer la transformation du temps sur le processus PRCT, afin de générer un PRC, ne nous empêche pas d'obtenir des formules récursives pour le calcul des moments du PRCT.

3.1.2 Calcul des moments avec une force stochastique d'intérêt net

Nous généralisons la méthode de calcul des moments récursifs présentée au théorème 16 en supposant que la force d'intérêt net est stochastique, ce qui augmente le potentiel d'application pratique de notre modèle.

Théorème 17 *Considérons les processus de risque $\{Z(t, v); t \geq 0\}$ et $\{\tilde{Z}(\tilde{t}, \tilde{v}); \tilde{t} \geq 0, \tilde{v} \leq \tilde{t}\}$ tels que*

$$\tilde{Z}(\tilde{t}, \tilde{v}) = \sum_{k=1}^{\tilde{N}(\tilde{t}-\tilde{v})} D(\Lambda^{-1}(\tilde{v} + \tilde{T}_k)) X_k \Leftrightarrow Z(t, v) = \sum_{k=1}^{N(\Lambda^{-1}[\Lambda(t)-\Lambda(v)])} D(\Lambda^{-1}[\Lambda(v) + \Lambda(T_k)]) X_k,$$

où $D(t) = \exp\left(-\int_0^t \delta(u) du\right)$, et $\delta(u)$ est une force d'intérêt net stochastique.

En supposant que chaque parcours échantillonnal de $\delta(u)$ est intégrable sur tout intervalle fini, nous obtenons la formule récursive suivante, pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit

$$E[\tilde{Z}^n(\tilde{t}, 0)] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} E[X^{n-k}] \int_0^{\tilde{t}} E[D^{n-k}(\Lambda^{-1}(\tilde{u})) E[\tilde{Z}^k(\tilde{t}, \tilde{u}) | \delta(x), x \in [0, \tilde{t}]]] d\tilde{m}(\tilde{u}),$$

où $E[\tilde{Z}^n(\tilde{t}, 0)] = E[Z^n(t, 0)]$.

Preuve : Pour tout parcours échantillonnal de la force d'intérêt net, il suffit d'adapter la démonstration du théorème 16 en remplaçant le facteur $e^{-\delta\Lambda^{-1}(v)}$ par $D(\Lambda^{-1}(v))$ pour obtenir

$$\begin{aligned} E[\tilde{Z}^n(\tilde{t}) | \delta(x), x \in [0, \tilde{t}]] \\ = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} E[X^{n-k}] \int_0^{\tilde{t}} D^{n-k}(\Lambda^{-1}(\tilde{u})) E[\tilde{Z}^k(\tilde{t}, \tilde{u}) | \delta(x), x \in [0, \tilde{t}]] d\tilde{m}(\tilde{u}). \end{aligned}$$

Finalement, nous prenons l'espérance de chaque côté de l'égalité et nous utilisons ensuite le théorème de Fubini pour obtenir le résultat. \square

Remarque 11 Pour une force d'intérêt net stochastique, la FGM et la fonction de répartition ont été obtenues pour un processus de Cox (voir Léveillé et Hamel, 2018 a). En général, il est difficile d'obtenir une expression analytique pour la FGM d'un PRCT qui soit simple à calculer. Cependant différentes approches numériques peuvent être adoptées pour approximer d'une manière satisfaisante cette fonction de répartition.

3.1.3 FGM et fonction de répartition du PRCT

Dans cette section, nous présentons une équation intégrale pour la FGM d'un PRCT, que nous pourrions ensuite résoudre pour plusieurs cas particuliers. Pour un processus de renouvellement ordinaire, plusieurs exemples ont été donnés dans Léveillé et coll. (2010), et pour un PPCT, dans Léveillé et Hamel (2018 a). Avant de donner un exemple de cas non triviaux du processus PRCT, nous aurons besoin de deux théorèmes.

Théorème 18 *Considérons les processus de risque $\{Z(t,0); t \geq 0\}$ et $\{\tilde{Z}(\tilde{t},0); \tilde{t} \geq 0\}$ tels que définis dans la section 3.1.1. Alors, la FGM de $\tilde{Z}(\tilde{t},0)$ satisfait l'équation intégrale suivante:*

$$M_{\tilde{Z}(\tilde{t},0)}(s) = 1 + \int_0^{\tilde{t}} \left[M_X \left(s e^{-\delta \Lambda^{-1}(\tilde{u})} \right) - 1 \right] M_{\tilde{Z}(\tilde{t},\tilde{u})}(s) d\tilde{m}(\tilde{u}),$$

où $M_{\tilde{Z}(\tilde{t},0)}(s) = M_{Z(t,0)}(s)$.

Preuve : Comme dans Léveillé et coll. (2010), nous insérons les moments récursifs obtenus précédemment dans la série de Maclaurin de $M_{\tilde{Z}(\tilde{t},0)}(s)$. Alors, nous obtenons

$$\begin{aligned} M_{\tilde{Z}(\tilde{t},0)}(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} M_{\tilde{Z}(\tilde{t},0)}^{(n)}(0) \frac{s^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} M_X^{(n-k)}(0) \int_0^{\tilde{t}} e^{-\delta(n-k)\Lambda^{-1}(\tilde{u})} M_{\tilde{Z}(\tilde{t},\tilde{u})}^{(k)}(0) d\tilde{m}(\tilde{u}) \right\} \frac{s^n}{n!} \\ &= 1 + \int_0^{\tilde{t}} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} M_{\tilde{Z}(\tilde{t},\tilde{u})}^{(k)}(0) \frac{s^k}{k!} \right\} \left\{ \sum_{n=k+1}^{\infty} e^{-\delta(n-k)\Lambda^{-1}(\tilde{u})} M_X^{(n-k)}(0) \frac{s^{n-k}}{(n-k)!} \right\} d\tilde{m}(\tilde{u}) \\ &= 1 + \int_0^{\tilde{t}} \left[M_X \left(s e^{-\delta \Lambda^{-1}(\tilde{u})} \right) - 1 \right] M_{\tilde{Z}(\tilde{t},\tilde{u})}(s) d\tilde{m}(\tilde{u}). \end{aligned}$$

□

Remarque 12 (1) Nous avons un résultat similaire, mais plus général que celui présenté précédemment, c.-à-d. pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\tilde{v} \geq 0$:

$$M_{\tilde{Z}(\tilde{t},\tilde{v})}(s) = 1 + \int_0^{\tilde{t}-\tilde{v}} \left[M_X \left(s e^{-\delta \Lambda^{-1}(\tilde{v}+\tilde{u})} \right) - 1 \right] M_{\tilde{Z}(\tilde{t},\tilde{v}+\tilde{u})}(s) d\tilde{m}(\tilde{u}).$$

(2) La formule précédente est équivalente à

$$M_{Z(t,0)}(s) = 1 + \int_0^t \left[M_X \left(s e^{-\delta u} \right) - 1 \right] M_{Z(t,u)}(s) dm(u).$$

3) Dans le cas où la force d'intérêt net est stochastique, nous avons

$$M_{Z(t,0)}(s) = 1 + \int_0^t E \left[\left[M_X \left(s D(u) \right) - 1 \right] M_{Z(t,u)|\delta(x),x \in [0,\tilde{t}]}(s) \right] dm(u).$$

Le théorème 19 présenté ci-dessous est une représentation alternative du théorème 18 qui sera utile lorsque nous voudrions inverser la fonction génératrice des moments d'un point de vue numérique pour obtenir une approximation de la fonction de répartition.

Théorème 19 *Considérons les processus de risque $\{Z(t,0); t \geq 0\}$ et $\{\tilde{Z}(\tilde{t},0); \tilde{t} \geq 0\}$ tels que définis à la section 3.1.1 et supposons que \tilde{m} est dérivable. Alors, la FGM de $\tilde{Z}(\tilde{t},0)$ satisfait l'équation intégrale suivante:*

$$M_{\tilde{Z}(\tilde{t},0)}(s) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\tilde{t}} \int_0^{\tilde{t}-\tilde{u}_k} \dots \int_0^{\tilde{t}-\sum_{i=1}^k \tilde{u}_i} \left\{ \prod_{i=1}^{k+1} \left[M_X \left(se^{-\delta \Lambda^{-1}(\tilde{u}_i)} \right) - 1 \right] \tilde{m}'(\tilde{u}_i - \tilde{u}_{i-1}) \right\} d\tilde{u}_1 \dots d\tilde{u}_{k+1}.$$

Preuve : Comme dans Léveillé et coll. (2010), nous avons

$$\begin{aligned} M_{\tilde{Z}(\tilde{t},0)}(s) &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\tilde{t}} \int_0^{\tilde{t}-\tilde{v}_1} \dots \int_0^{\tilde{t}-\sum_{i=1}^k \tilde{v}_i} \left\{ \prod_{i=1}^{k+1} \left[M_X \left(se^{-\delta \Lambda^{-1} \left(\sum_{i=1}^k \tilde{v}_i \right)} \right) - 1 \right] \tilde{m}'(\tilde{v}_i) \right\} d\tilde{v}_{k+1} \dots d\tilde{v}_1 \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\tilde{t}} \int_{\tilde{u}_1}^{\tilde{t}} \dots \int_{\tilde{u}_k}^{\tilde{t}} \left\{ \prod_{i=1}^{k+1} \left[M_X \left(se^{-\delta \Lambda^{-1}(\tilde{u}_i)} \right) - 1 \right] \tilde{m}'(\tilde{u}_i - \tilde{u}_{i-1}) \right\} d\tilde{u}_{k+1} \dots d\tilde{u}_1. \end{aligned}$$

Finalement, nous permutons les bornes d'intégration afin d'obtenir notre résultat. \square

Remarque 13 (1) L'équation précédente est équivalente à

$$M_{Z(t,0)}(s) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \int_0^{u_{k+1}} \dots \int_0^{u_2} \left\{ \prod_{i=1}^{k+1} \left[M_X \left(se^{-\delta u_i} \right) - 1 \right] dm(\Lambda(u_i) - \Lambda(u_{i-1})) \right\}, \quad u_0 = 0.$$

(2) En transformant l'équation intégrale ci-dessus en une équation différentielle par rapport à \tilde{t} , plusieurs cas particuliers ont été identifiées pour la FGM de $Z(t)$ lorsque le processus de dénombrement est un processus de renouvellement ordinaire (voir Léveillé et coll., 2010) et lorsque le processus de comptage est un PPT (voir Léveillé et Hamel, 2018 a).

3.1.3.1 Exemple numérique

Dans cette section, nous présentons un exemple numérique non trivial d'un PRCT. Ainsi considérons un PRT différent des deux processus précédents, c.-à-d. lorsque $\lambda(t)$ n'est pas une fonction constante et $F(y) \neq (1 - e^{-\beta y})1_{]0, \infty[}(y)$. Dans cet esprit, supposons que

$$\tilde{\tau}_k = \tilde{T}_k - \tilde{T}_{k-1} \sim \text{Erlang}(\alpha = 2, \beta = 1), \quad X \sim \exp(\mu = 1),$$

et,

$$\lambda(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \Rightarrow \Lambda(t) = \sqrt{t}, \quad \delta = 0.05.$$

Alors, en accord avec Léveillé et coll. (2010), nous obtenons l'équation différentielle de deuxième ordre suivante par rapport à \tilde{t} à partir du théorème 19, c.-à-d.

$$\frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} M_{\tilde{Z}(\tilde{t},0)}(s) = a(\tilde{t}, s) \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} M_{\tilde{Z}(\tilde{t},0)}(s) + b(\tilde{t}, s) M_{\tilde{Z}(\tilde{t},0)}(s) ,$$

où,

$$a(\tilde{t}, s) = \frac{-0.1\tilde{t}}{1 - se^{-0.05\tilde{t}}} - 2 , \quad b(\tilde{t}, s) = \frac{se^{-0.05\tilde{t}^2}}{1 - se^{-0.05\tilde{t}^2}} ,$$

avec conditions initiales,

$$M_{\tilde{Z}(0,0)}(s) = 1 , \quad \left. \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} M_{\tilde{Z}(\tilde{t},0)}(s) \right|_{\tilde{t}=0} = 0 .$$

Même en utilisant cette dernière équation différentielle, la FGM de $\tilde{Z}(\tilde{t},0)$ s'avère difficile à obtenir. Ainsi, pour le présent exemple, nous appliquons la méthode en série tronquée de Wang et coll. (2018) (ci-après, jusqu'à 15 termes) pour résoudre cette équation différentielle. Avec l'aide du logiciel Maple, nous obtenons une expression polynômiale qui est un peu trop longue pour être présentée dans ce document mais qui a cependant la forme suivante, soit

$$M_{\tilde{Z}(\tilde{t},0)}(s) \approx 1 + \sum_{k=2}^{14} r_k(s) \tilde{t}^k ,$$

où $r_k(s)$ est une fonction rationnelle de s , avec $r_k(0) = 0$. Plus précisément, en omettant plusieurs termes intermédiaires, nous obtenons

$$\begin{aligned} M_{\tilde{Z}(\tilde{t},0)}(s) \approx & 1 - \frac{s}{2(1+s)} \tilde{t}^2 + \frac{s}{3(1+s)} \tilde{t}^3 + \dots \\ & \vdots \\ & + \frac{s(1.927 \times 10^{-9} s^4 + \dots + 9.093 \times 10^{-8} s + 2.672)}{(1+s)^5} \tilde{t}^{13} \\ & + \frac{s(-1.491 \times 10^{-10} s^5 - \dots - 7.915 \times 10^{-9} s - 1.814 \times 10^{-9})}{(1+s)^6} \tilde{t}^{14} . \end{aligned}$$

Ci-dessous, au tableau 6, nous comparons (partiellement) le niveau de précision de la méthode en série en comparant la valeur espérée et l'écart-type obtenus aux formules exactes correspondantes. Nous remarquons que la méthode de calcul des moments basée sur les formules analytiques donne des résultats très similaires à la méthode d'inversion en série.

Tableau 6 : Espérance et écart-type de $Z(t)$

	t	0,5	1	1,5	2,0
Formule analytique	$E[Z(t)]$	0,1624	0,2780	0,3717	0,4520
Formule analytique	$\sigma[Z(t)]$	0,5540	0,7100	0,8098	0,8822
Méthode en série	$E[Z(t)]$	0,1624	0,2780	0,3717	0,4523
Méthode en série	$\sigma[Z(t)]$	0,5540	0,7106	0,8100	0,8823

La méthode d'inversion en série de Wang et coll. (2018) est une méthode simple qui donne des résultats adéquats. Les valeurs obtenues dans le tableau 6 par cette méthode sont calculées en utilisant l'approximation de la fonction de répartition. Pour le calcul des moments, nous utilisons les identités suivantes :

$$E[X] = \int_0^{\infty} \Pr(X > t) dt \text{ et } E[X^2] = 2 \int_0^{\infty} t \Pr(X > t) dt .$$

Mentionnons enfin que cette méthode est simple à utiliser et n'imposent pas des calculs trop lourds.

3.2 PRCT avec effet de tendance aléatoire

Dans cette section, nous présentons une classe de modèles qui unifie l'étude des processus PRCT et des processus de Cox composés avec facteur d'escompte.

En 1955, Cox a généralisé le PPT en supposant que la fonction d'intensité de la loi de Poisson non-homogène était aléatoire. De façon similaire, nous généralisons le PRCT au PRCT avec une fonction de tendance aléatoire en adaptant la définition de Lindqvist (2003). Cette classe de modèles nous permet d'étudier la classe des modèles de renouvellement en même temps que la classe des processus de Cox, qui sont deux cas particuliers.

Ainsi, nous dirons que le processus stochastique $\{N(t); t \geq 0\}$ génère un $\text{PRT}[F, \lambda(\cdot)]_s$, où $\{\lambda(t); t \geq 0\}$ forme un processus stochastique, si le processus conditionnel $\{N(t) | \lambda(t); t \geq 0\}$ est un $\text{PRT}[F, \lambda(\cdot)]$.

Pour illustrer cette définition, nous utilisons l'exemple précédent avec le PRCT (section 3.1.3.1) et nous modifions légèrement la fonction de tendance, c.-à-d.

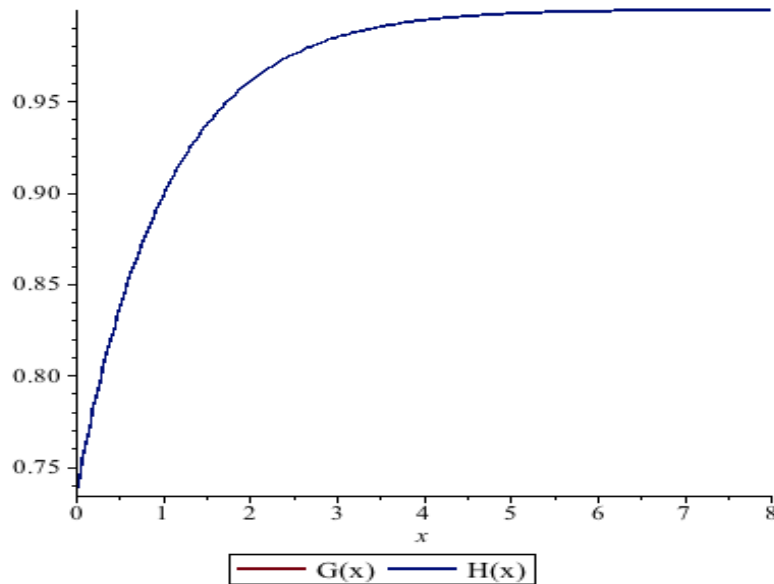
$$\tilde{\tau}_k = \tilde{T}_k - \tilde{T}_{k-1} \sim \text{Erlang}(\alpha = 2, \beta = 1), X \sim \exp(\theta = 1), \delta = 0,05 ,$$

et,

$$\lambda(t; \mu) = \frac{1}{2\sqrt{\mu t}} \Rightarrow \Lambda(t; \mu) = \sqrt{\frac{t}{\mu}} \quad , \quad \mu \sim \text{Unif}]0, 2[.$$

La même méthode de série tronquée peut être appliquée à la FGM de $\tilde{Z}(\tilde{t}, 0)$ qui dépend maintenant de la variable aléatoire μ . Nous prenons l'espérance de la fonction précédente par rapport à μ et nous inversons la transformée de Laplace correspondante.

Figure 4 : Fonctions de répartition $G(x)$ et $H(x)$



Si nous supposons que $G(x)$ et $H(x)$ sont respectivement des approximations des fonctions de répartition à $t = 1$ obtenues par la méthode en série tronquée, pour le cas déterministe (avec $\mu = 1$) et pour le cas où μ (et donc λ) est stochastique, nous obtenons les fonctions de répartition suivantes et leurs illustrations dans la figure 4, c.-à-d.

$$G(x) = 1 - e^{-x} \left\{ 0.2642411177 - 0.1338130042 x + 0.000001054855355 x^2 - 1.043786881 \times 10^{-8} x^3 - 1.184983462 \times 10^{-10} x^4 + 1.521020866 \times 10^{-12} x^5 \right\} ,$$

et

$$H(x) = 1 - e^{-x} \left\{ 0.2642411177 - 0.01335101542 x - 0.0000282363 x^2 - 6.977265123 \times 10^{-7} x^3 + 8.176026373 \times 10^{-9} x^4 - 1.535187601 \times 10^{-10} x^5 + 2.614071187 \times 10^{-12} x^6 \right\} .$$

Nous observons que ces fonctions de répartition sont pratiquement identiques, ce à quoi nous nous attendions quelque peu étant donné nos hypothèses sur les fonctions de tendance. En résumé, nous avons démontré qu'il est possible d'inverser numériquement la fonction génératrice d'un PRCT lorsque l'effet de tendance est aléatoire pour un cas particulier.

3.3 Ajout de la dépendance entre T_k et X_k

Dans cette section, nous montrons que les résultats de la section 3.1 peuvent être généralisés au cas où X_k dépend de T_k . Tel que mentionné à la section 2.5, cela nous permettra d'obtenir une expression pour la FGM du processus des indemnités payés et des dépenses, similairement au modèle étudié dans Léveillé et Hamel (2013).

Théorème 20 *Considérons les processus de risque $\{Z(t,0); t \geq 0\}$ et $\{\tilde{Z}(\tilde{t},0); \tilde{t} \geq 0\}$ tels que définis dans la section 3.1.1. De plus, nous supposons que T_k est dépendant de X_k , $k \in \mathbf{N}^*$, de telle sorte que $\{X_k | T_k; k \in \mathbf{N}^*\}$ forme une suite de variables aléatoires conditionnellement indépendantes et identiquement distribuées. Alors nous avons :*

(1) les moments de $\tilde{Z}(\tilde{t})$ satisfont l'équation réursive suivante si ces derniers existent :

$$E[\tilde{Z}^n(\tilde{t},0)] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} E[X^{n-k} | \tilde{T}_k = \tilde{u}] \int_0^{\tilde{t}} e^{-\delta(n-k)\Lambda^{-1}(\tilde{u})} E[\tilde{Z}^k(\tilde{t},\tilde{u})] d\tilde{m}(\tilde{u}).$$

(2) la FGM de $\tilde{Z}(\tilde{t})$ satisfait l'équation intégrale suivante:

$$M_{\tilde{Z}(\tilde{t},0)}(s) = 1 + \int_0^{\tilde{t}} \left[M_{X|\tilde{T}=\tilde{u}}(se^{-\delta\Lambda^{-1}(\tilde{u})}) - 1 \right] M_{\tilde{Z}(\tilde{t},\tilde{u})}(s) d\tilde{m}(\tilde{u}) \quad \text{où} \quad M_{\tilde{Z}(\tilde{t},0)}(s) = M_{Z(t,0)}(s).$$

Preuve : Pour (1), il suffit d'utiliser un raisonnement similaire au théorème 16. Pour (2), nous procédons comme dans Léveillé et coll. (2010). Nous insérons les moments récursifs obtenus précédemment dans la série de Maclaurin de $M_{\tilde{Z}(\tilde{t},0)}(s)$. Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} M_{\tilde{Z}(\tilde{t},0)}(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} M_{\tilde{Z}(\tilde{t},0)}^{(n)}(0) \frac{s^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} M_{X|T=\Lambda^{-1}(\tilde{u})}^{(n-k)}(0) \int_0^{\tilde{t}} e^{-\delta(n-k)\Lambda^{-1}(\tilde{u})} M_{\tilde{Z}(\tilde{t},\tilde{u})}^{(k)}(0) d\tilde{m}(\tilde{u}) \right\} \frac{s^n}{n!} \\ &= 1 + \int_0^{\tilde{t}} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} M_{\tilde{Z}(\tilde{t},\tilde{u})}^{(k)}(0) \frac{s^k}{k!} \right\} \left\{ \sum_{n=k+1}^{\infty} e^{-\delta(n-k)\Lambda^{-1}(\tilde{u})} M_{X|T=\Lambda^{-1}(\tilde{u})}^{(n-k)}(0) \frac{s^{n-k}}{(n-k)!} \right\} d\tilde{m}(\tilde{u}) \\ &= 1 + \int_0^{\tilde{t}} \left[M_{X|T=\Lambda^{-1}(\tilde{u})}(se^{-\delta\Lambda^{-1}(\tilde{u})}) - 1 \right] M_{\tilde{Z}(\tilde{t},\tilde{u})}(s) d\tilde{m}(\tilde{u}). \quad \square \end{aligned}$$

Corollaire 2 *Considérons le processus de risque*

$$\begin{aligned} Z(t, 0) &= \sum_{k=1}^{N(t)} \exp(-\delta_1 T_k) U_k + \exp(-\delta_2 T_k) V_k \\ &= \sum_{k=1}^{N(t)} \exp(-\delta_1 T_k) (U_k + \exp(-(\delta_2 - \delta_1) T_k) V_k) , \end{aligned}$$

où ,

- $\{(U_k, V_k); k \in \mathbf{N}^*\}$ forme une suite de vecteurs indépendants et identiquement distribués, à composantes positives généralement dépendantes;
- $\{N(t); t \geq 0\}$ forme un PRT;
- δ_1 et δ_2 sont deux forces d'intérêt net positives généralement distinctes.

Alors, la FGM de $\tilde{Z}(\tilde{t})$ satisfait l'équation intégrale suivante:

$$M_{\tilde{Z}(\tilde{t}, 0)}(s) = 1 + \int_0^{\tilde{t}} \left[M_{U, V} \left(se^{-\delta_1 \Lambda^{-1}(\tilde{u})}, se^{-\delta_2 \Lambda^{-1}(\tilde{u})} \right) - 1 \right] M_{\tilde{Z}(\tilde{t}, \tilde{u})}(s) d\tilde{m}(\tilde{u}).$$

Preuve : En posant $X_k = U_k + \exp(-(\delta_2 - \delta_1) T_k) V_k$, les hypothèses du théorème 20 s'appliquent pour ainsi obtenir le premier résultat. \square

Remarque 14 (1) *Nous avons un résultat similaire, mais plus général que celui présenté précédemment, c.-à-d. pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $\tilde{v} \geq 0$:*

$$M_{\tilde{Z}(\tilde{t}, \tilde{v})}(s) = 1 + \int_0^{\tilde{t} - \tilde{v}} \left[M_{X|T=\tilde{u}} \left(se^{-\delta \Lambda^{-1}(\tilde{v} + \tilde{u})} \right) - 1 \right] M_{\tilde{Z}(\tilde{t}, \tilde{v} + \tilde{u})}(s) d\tilde{m}(\tilde{u}) .$$

(2) *Le résultat du corollaire 2 est équivalent à*

$$M_{Z(t, 0)}(s) = 1 + \int_0^t \left[M_{X|T=u} \left(se^{-\delta u} \right) - 1 \right] M_{Z(t, u)}(s) dm(u) .$$

(3) *De plus, nous avons*

$$E[\tilde{Z}^n(\tilde{t}, 0)] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \int_0^{\tilde{t}} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} E[U^j V^{n-k-j}] e^{-(\delta_1 j + \delta_2 (n-k-j)) \Lambda^{-1}(\tilde{u})} E[\tilde{Z}^k(\tilde{t}, \tilde{u})] d\tilde{m}(\tilde{u}) .$$

Ce résultat est important, car il permet de faire un lien entre la classe de modèles étudiée dans ce chapitre, et celle étudiée au le chapitre 4.

Au théorème 21, nous présentons une expression équivalente au résultat du théorème 20. Cette expression pourra éventuellement être reconvertie en une équation différentielle dont la solution pourra être inversée analytiquement ou numériquement dans plusieurs cas.

Théorème 21 *Considérons les processus de risque $\{Z(t,0); t \geq 0\}$ et $\{\tilde{Z}(\tilde{t},0); \tilde{t} \geq 0\}$ tels que définis à la section 3.1.1 et supposons que \tilde{m} est dérivable. De plus, supposons que \tilde{T}_k est dépendant de X_k . Alors, la FGM de $\tilde{Z}(\tilde{t},0)$ satisfait l'équation intégrale suivante:*

$$M_{\tilde{Z}(\tilde{t},0)}(s) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\tilde{t}} \int_0^{\tilde{u}_{k+1}} \dots \int_0^{\tilde{u}_2} \left\{ \prod_{i=1}^{k+1} \left[M_{X|\tilde{T}=\tilde{u}_i} \left(se^{-\delta \Lambda^{-1}(\tilde{u}_i)} \right) - 1 \right] \tilde{m}'(\tilde{u}_i - \tilde{u}_{i-1}) \right\} d\tilde{u}_1 \dots d\tilde{u}_{k+1}.$$

Preuve : Comme dans Léveillé et coll. (2010), nous appliquons récursivement l'expression du théorème 20, ce qui nous permet d'obtenir

$$\begin{aligned} M_{\tilde{Z}(\tilde{t},0)}(s) &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\tilde{t}} \int_0^{\tilde{t}-\tilde{v}_1} \dots \int_0^{t-\sum_{i=1}^k \tilde{v}_i} \left\{ \prod_{i=1}^{k+1} \left[M_{X|\tilde{T}=\tilde{u}_i} \left(se^{-\delta \Lambda^{-1}\left(\sum_{i=1}^k \tilde{v}_i\right)} \right) - 1 \right] \tilde{m}'(\tilde{v}_i) \right\} d\tilde{v}_{k+1} \dots d\tilde{v}_1 \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\tilde{t}} \int_{\tilde{u}_1}^{\tilde{t}} \dots \int_{\tilde{u}_k}^{\tilde{t}} \left\{ \prod_{i=1}^{k+1} \left[M_{X|\tilde{T}=\tilde{u}_i} \left(se^{-\delta \Lambda^{-1}(\tilde{u}_i)} \right) - 1 \right] \tilde{m}'(\tilde{u}_i - \tilde{u}_{i-1}) \right\} d\tilde{u}_{k+1} \dots d\tilde{u}_1. \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons le résultat précédent en permutant les bornes d'intégration. □

3.4 Ordonnancement entre le PPCT et PRCT

Dans cette section, nous présentons un ordre de dominance stochastique entre le PRCT et un processus PPCT associé, ceci étant justifié en partie par le fait qu'il est généralement plus facile d'obtenir une distribution exacte ou une très bonne approximation pour le PPCT, comme il a été démontré dans Léveillé et Hamel (2018 a). Pour démontrer notre résultat principal sur la dominance stochastique entre un PRCT et son PPCT associé, nous aurons besoin d'un théorème de Barlow et Proschan (1975) qui établit la dominance stochastique entre un PR et PP avec une fonction d'intensité particulière reliée à la distribution du temps d'inter-occurrence du PR.

Théorème 22 *Supposons que $\{\hat{N}(t); t \geq 0\}$ est un PPT avec fonction d'intensité $\varphi(t) = -\ln(1 - F_{\tau}(t))$ et temps d'occurrence \hat{T}_n , et que $\{N(t); t \geq 0\}$ est un PR avec temps d'occurrence T_n , où $F_{\tau}(t)$ est IFR (DFR).*

Alors, pour $\delta > 0$ et pour une distribution IFR (DFR), nous obtenons

$$N(t) \leq_{ST} (\geq_{ST}) \hat{N}(t) \Rightarrow \hat{T}_n \leq_{ST} (\geq_{ST}) T_n \Rightarrow \exp(-\delta T_n) \leq_{ST} (\geq_{ST}) \exp(-\delta \hat{T}_n), n \geq 1.$$

Preuve : Barlow et Proshan (1975) ont démontré que $N(t) \leq_{ST} \hat{N}(t)$. Pour $n \geq 1$, nous obtenons donc directement que $\hat{T}_n \leq_{ST} T_n$ et que $\exp(-\delta T_n) \leq_{ST} \exp(-\delta \hat{T}_n)$. \square

Maintenant, nous utilisons le résultat du théorème 22 qui s'applique aux processus de dénombrement pour démontrer qu'il existe un ordre stochastique entre un PRCT et le PPCT associé.

Théorème 23 *Considérons le processus $\{Z(t); t \geq 0\}$, tel que défini à la section 3.1.1, et un PPCT associé $\{\hat{Z}(t); t \geq 0\}$ tel que son processus de dénombrement $\{\hat{N}(t); t \geq 0\}$ a comme fonction d'intensité $\varphi(t) = -\ln(1 - F_{\tilde{\tau}}(t))$, où $F_{\tilde{\tau}}(t)$ est IFR (DFR). Alors,*

$$Z(t) \leq_{ST} (\geq_{ST}) \hat{Z}(\Lambda(t)).$$

Preuve : Nous démontrons seulement le cas IFR, la preuve du cas DFR est similaire. Ainsi, notre ordre stochastique obtenu précédemment est conservé sous la composition :

$$Z(t) = \tilde{Z}(\tilde{t}) = \sum_{k=1}^{\tilde{N}(\tilde{t})} \exp(-\delta T_k) X_k \leq_{ST} \sum_{k=1}^{\tilde{N}(\tilde{t})} \exp(-\delta \hat{T}_k) X_k \leq_{ST} \sum_{k=1}^{\hat{N}(\tilde{t})} \exp(-\delta \hat{T}_k) X_k = \hat{Z}(\Lambda(t)).$$

\square

Notons que, en plus qu'il soit plus simple d'inverser numériquement la FGM du processus PPCT associé, ce résultat sur l'ordre stochastique pourrait servir à obtenir une borne de probabilité de ruine pour le PRCT en passant par celle obtenue pour le PPCT associé.

3.4.1 Exemple numérique

Dans cette sous-section, nous présentons un exemple numérique pour corroborer le résultat du théorème 23. Si nous considérons les hypothèses de la section 3.1.3.1, où $\tilde{\tau}_k = \tilde{T}_k - \tilde{T}_{k-1} \sim \text{Erlang}(\alpha = 2, \beta = 1)$ est une distribution IFR, alors nous obtenons les valeurs simulées de $F_{\hat{Z}(\Lambda(t))}(x)$ pour différentes valeurs de t et de $x > 0$. Tel que prévu, nous observons que $1 - F_{Z(t)}(x) = \bar{F}_{Z(t)}(x) \geq \bar{F}_{\hat{Z}(\Lambda(t))}(x) = 1 - F_{\hat{Z}(\Lambda(t))}(x)$ si nous comparons les valeurs des tableaux 7 et 8. Cette observation est aussi confirmée graphiquement tel que présenté dans la figure 5.

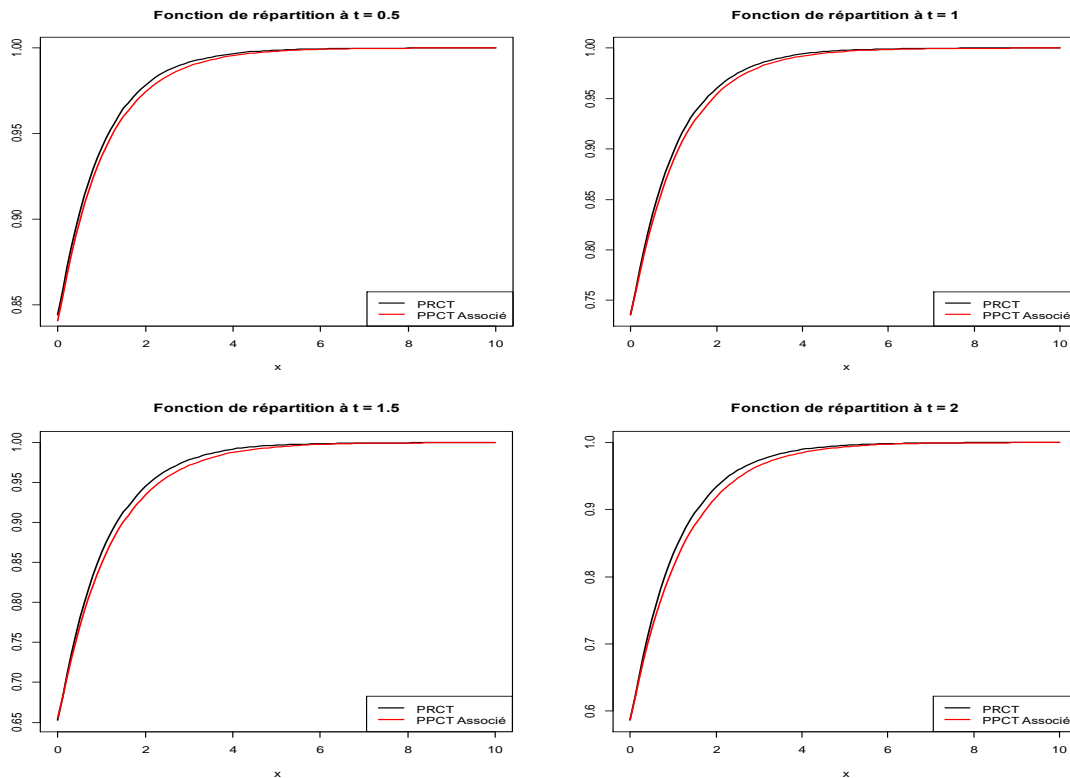
Tableau 7 : Fonction de répartition de $\hat{Z}(\Lambda(t))$

$t \backslash x$	0.5	1	1.5	2
0	0,84172	0,73576	0,65370	0,58694
1	0,93710	0,88979	0,84689	0,81692
2	0,97470	0,95462	0,93416	0,91968
3	0,98949	0,98178	0,97246	0,96427

Tableau 8 : Erreurs absolues entre les fonctions de répartition de $Z(t)$ et de $\hat{Z}(A(t))$

$t \backslash x$	0.5	1	1.5	2
0	0	0	0	0
1	0,00313	0,00808	0,01636	0,01669
2	0,00275	0,00600	0,01210	0,01421
3	0,00200	0,00307	0,00574	0,00931

Figure 5 : PRCT et le processus PPCT associé : distributions de probabilité



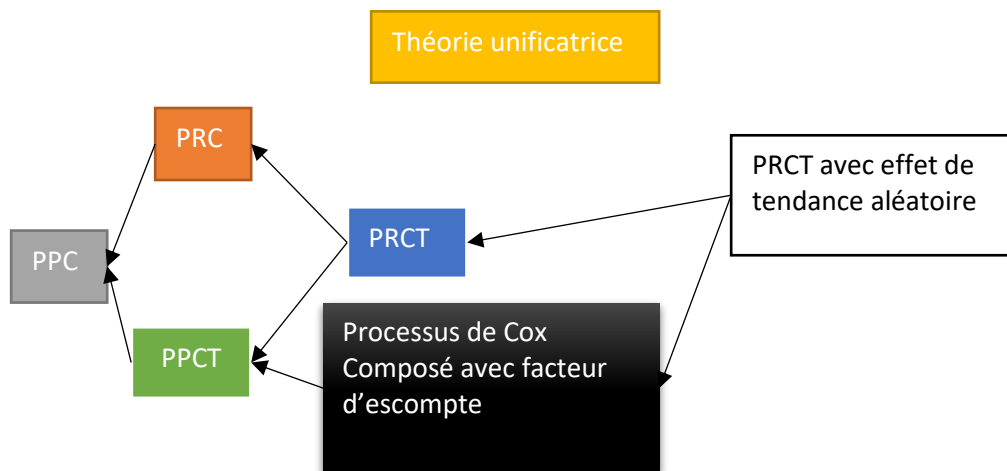
3.5 Discussion des résultats

Dans ce chapitre, nous avons démontré qu'il est possible d'avoir des équations récursives pour un processus PRCT avec force d'intérêt net stochastique ou déterministe malgré « la complexité apparente » de la classe de processus PRCT. Il est pertinent de mentionner que la classe PRCT a un grand potentiel d'application pratique, tel qu'il sera démontré au chapitre 5 du présent document, étant donné que les hypothèses de cette classe sont générales. De plus, nous avons obtenu une expression analytique pour la FGM dans les cas où la force d'intérêt net est stochastique ou déterministe. Dans le cas où la force d'intérêt net est déterministe, nous avons démontré qu'il était possible d'inverser numériquement la FGM. Nous avons aussi démontré qu'il est possible d'obtenir des résultats similaires lorsqu'il y a de la dépendance entre le temps d'occurrence et les indemnités payés.

Tous ces résultats pour la classe PRCT sont en fait basés sur la classe PRC. La classe PR possède une propriété très importante et c'est celle du renouvellement. Cette propriété permet d'établir des équations récurrentes pour la classe PR pour diverses quantités d'intérêts, résultats qui sont classiques dans la littérature. La classe PRC généralise la classe PR et incorpore un facteur d'actualisation et des indemnités payées. En d'autres mots, cette classe s'appuie aussi sur la structure récurrente de la classe PR. Par la suite, la classe PRCT est dérivée à partir de la classe PRC en faisant une transformation du temps. Cette transformation du temps n'affecte pas la structure récurrente qui est centrale à cette classe de processus. C'est à cause de cette propriété que les résultats du chapitre 3 ont été obtenus, car la structure récurrente de la classe PR est transférée à ses généralisations soit aux classes PRC et PRCT. Aussi, tel que démontré précédemment, la classe PRCT a une propriété particulière. Un « grand sous-ensemble » de cette dernière peut être bornée stochastiquement par un processus PPCT associé tel que démontré à la section 3.4. Cette propriété provient de la relation entre la classe PR et la loi de Poisson non-homogène. Ce dernier résultat pourra être utile pour des travaux de recherches ultérieurs, car les calculs pour le processus PPCT associé sont plus simples que pour « son processus PRCT ».

En résumé, au chapitre 3, nous avons démontré qu'il est possible d'utiliser la classe PRT dans un environnement économique avec facteur d'actualisation déterministe ou stochastique.

Figure 6 : Théorie unificatrice



De plus, la classe PRCT, avec effet de tendance aléatoire, permet d'unifier l'étude de la classe PRCT et la théorie des processus de Cox. Finalement, nous avons aussi démontré que certains résultats pour la classe PRC se généralisent facilement au cas PRCT, ce qui est dû à la nature des outils mathématiques utilisés.

Chapitre 4 Un modèle général d'assurance pour fautes professionnelles

Dans ce chapitre, nous généralisons le modèle proposé par Léveillé et Hamel (2013), celle-ci étant basée sur la classe des modèles PRCT. Nous présentons aussi des formules analytiques pour calculer les deux premiers moments de ce modèle ainsi que le premier moment conjoint. Précisément, Léveillé et Hamel (2013) ont proposé un PRC pour représenter une couverture « claims-made » pour l'assurance pour fautes des professionnels de la santé. Des modèles stochastiques, similaires à ceux étudiés par ces auteurs n'ont pas beaucoup été étudiés dans la littérature, au meilleur des connaissances de l'auteur du présent document. Néanmoins, plusieurs études empiriques et statistiques ont été effectuées en lien avec l'assurance pour fautes des professionnels de la santé (voir Bates et coll., 2004; Forray, 2010; GAO, 2003).

Dans ce chapitre, notre objectif est de proposer un modèle général stochastique qui tient compte du temps d'occurrence des réclamations, de l'effet de tendance du nombre de réclamations dans un intervalle de temps donné, de l'intervalle de temps depuis la survenance de la réclamation jusqu'à la déclaration à l'assureur, ainsi que le délai de règlement. Nous utiliserons un modèle PRCT qui est un candidat idéal, étant donné que ce dernier est souple et assez général. De plus, l'approche adoptée dans cette thèse nous permet de considérer plusieurs produits d'assurance avec un seul modèle. Cette approche généralise et complexifie quelque peu les formules présentées au chapitre 3. Ces formules demeurent néanmoins calculables, notamment à l'aide du logiciel **R** tel que nous le démontrerons. Une illustration numérique des formules présentées au chapitre 4 sera effectuée au chapitre 5 avec des paramètres qui proviennent de la calibration sur la base de données des réclamations fermées de la Floride. Comme dans Léveillé et Hamel (2013), nous supposons aussi que les indemnités payées sont sous forme de montants forfaitaires et non sous forme de rente. Nous procédons avec la même hypothèse pour les dépenses.

4.1 Présentation du modèle

Dans cette thèse, pour modéliser le processus des coûts agrégés pour fautes des professionnels de la santé, nous considérons le modèle général suivant :

$$Z(t) = Z_1(t) + Z_2(t) \\ = \sum_{k=1}^{N(t)} I(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) D_1(T_k + \xi_k + \zeta_k) X_k + \sum_{k=1}^{N(t)} I(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) D_2(T_k + \xi_k + \zeta_k) Y_k ,$$

où,

- $\{N(t); t \geq 0\}$ est un processus de renouvellement avec effet de tendance qui est généré par une suite de temps d'occurrence $\{T_k; k \in \mathbf{N}^*\}$ et qui représente le nombre de fautes professionnelles qui surviennent dans l'intervalle de temps $[0, t]$.
- $\{\xi_k; k \in \mathbf{N}^*\}$ est une suite de variables aléatoires continues et positives, indépendantes de T_k , telle que ξ_k représente le temps pris par l'assuré pour transmettre la réclamation à l'assureur depuis le moment où la faute professionnelle a été constatée.

- $\{\zeta_k; k \in \mathbf{N}^*\}$ est une suite de variables aléatoires continues et positives, indépendantes de T_k et ξ_k , telle que ζ_k est le temps pris par l'assureur à partir $T_k + \xi_k$ pour effectuer le paiement des indemnités payées et des dépenses correspondants à la k -ième réclamation.
- $\{X_k; k \in \mathbf{N}^*\}$ est une suite de variables aléatoires non-négatives, indépendantes de T_k et ξ_k , telle que X_k représente l'indemnité payée (sans inflation) par l'assureur pour la k -ième réclamation.
- $\{Y_k; k \in \mathbf{N}^*\}$ est une suite de variables aléatoires non-négatives, indépendantes de T_k et ξ_k , telle que Y_k représente le montant (sans inflation) des dépenses encourues par l'assureur pour régler la k -ième réclamation.
- $D_i(t) = \exp\left\{-\int_0^t \delta_i(u) du\right\}$, $i=1,2$, sont les facteurs d'escomptes à $t=0$ correspondants à $Z_i(t)$, qui ont la propriété de retour à la moyenne, et $\delta_i(t)$ est une force d'intérêt net qui peut être déterministe ou stochastique. De plus, $\{\delta_i(t); t \geq 0\}$, $i=1,2$, sont possiblement dépendants et sont indépendants des processus $\{N(t); t \geq 0\}$, $\{\xi_k; k \in \mathbf{N}^*\}$, $\{\zeta_k; k \in \mathbf{N}^*\}$, $\{X_k; k \in \mathbf{N}^*\}$ et $\{Y_k; k \in \mathbf{N}^*\}$.
- Les variables aléatoires X_k , Y_k et ζ_k sont possiblement dépendantes (voir Black et coll., 2008; Léveillé et Hamel, 2013).
- $I(T_k, \xi_k, \zeta_k, t)$ est une fonction qui peut prendre une des formes suivantes :

$$\overbrace{I_{occ}(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) = 1_{]0,t]}^{\text{« occurrence »}}(T_k) \quad , \quad \overbrace{I_{cm}(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) = 1_{]0,t]}^{\text{« claims-made »}}(T_k + \xi_k) \quad ,$$

$$\overbrace{I_{cp}(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) = 1_{]0,t]}^{\text{« claims-paid »}}(T_k + \xi_k + \zeta_k).$$

Ainsi, la fonction indicatrice peut être spécialisée pour modéliser les couvertures « occurrence », « claims-made » et « claims-paid ». Le modèle proposé permet aussi de considérer deux autres couvertures : « tail coverage » et « ddr coverage ».

Le modèle présenté ci-haut généralise la classe PRCT présentée au chapitre 3. Premièrement, nous avons ajouté deux variables aléatoires, ξ_k et ζ_k pour modéliser les effets temporels. Deuxièmement, nous avons aussi séparé les indemnités payées des dépenses encourus.

Troisièmement, nous avons ajouté une variable indicatrice qui nous permet de modéliser simultanément les cinq contrats mentionnés précédemment. En construisant sur la classe de modèles présentée au chapitre 2, nous avons généralisé cette dernière pour finalement obtenir un modèle applicable sur une vraie base de données, tel que nous le démontrerons au chapitre 5.

Dans ce qui suit, nous présentons brièvement les produits « tail coverage » et « ddr coverage ».

4.2 Modélisation du « tail coverage » et du « ddr coverage »

4.2.1 « tail coverage »

La couverture « claims-made » couvre seulement les réclamations rapportées qui surviennent lorsque la police était en vigueur. Lorsque la couverture « claims-made » se termine, il est suggéré que le titulaire de police se procure un « tail coverage » de son ancien assureur ou un « prior-acts coverage » de son nouvel assureur, dépendamment s'il change d'assureur ou s'il termine son contrat. Ces deux dernières couvertures protègent le titulaire de police contre des événements qui sont survenus pendant la couverture du contrat « claims-made », mais qui sont déclarés à l'assureur après la période de couverture du contrat « claims-made ». Alors, à $t=0$, les indemnités payées et les dépenses aux réclamations couvertes par un « tail coverage » (ou un « prior-acts coverage ») sont définis, dans cette thèse, par la variable aléatoire suivante :

$$\overbrace{Z_{tc}(t) = Z_{occ}(t) - Z_{cm}(t)}^{\text{« tail-coverage »}}.$$

De plus, nous avons

$$\overbrace{I_{tc}(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) = 1_{]0,t]}^{\text{« tail-coverage »}}(T_k) - 1_{]0,t]}(T_k + \xi_k).$$

Ces dernières formules nous permettent d'établir un lien entre une couverture « occurrence », une couverture « claims-made » et une couverture « tail-coverage ». De plus, la variable aléatoire $Z_{tc}(t)$ est liée aux sinistres encourus non rapportés (« IBNR »). Néanmoins, étudier les sinistres encourus non rapportés dépasse le cadre de cette thèse.

4.2.2 « ddr coverage »

Un « ddr coverage » offre au titulaire de police, s'il y a décès, invalidité ou retraite de ce dernier, une couverture « tail coverage ». Cela nous donne un processus de risque qui est une somme convexe entre un contrat « occurrence » et un contrat « claims-made » comme nous le démontrons ci-après. Pour plus de détails sur la couverture « ddr », voir Forray (2010).

Maintenant, nous allons représenter cette dernière couverture mathématiquement. Nous posons T_e comme étant le premier temps d'un événement de décès, d'invalidité ou de retraite de

l'assuré, et nous supposons que cet évènement survient de façon indépendante du processus de risque $\{Z_{occ}(t), t \geq 0\}$ et $\{Z_{cm}(t), t \geq 0\}$. Alors, le « ddr coverage » est défini comme suit :

$$\begin{aligned} \overbrace{Z_{ddr}(t)}^{\text{« ddr coverage »}} &= Z_{cm}(t) + I_{]0,t]}(T_e) Z_{tc}(t) \\ &= Z_{cm}(t) + I_{]0,t]}(T_e) \{Z_{occ}(t) - Z_{cm}(t)\} \\ &= Z_{cm}(t) I_{]t,\infty[}(T_e) + Z_{occ}(t) I_{]0,t]}(T_e) . \end{aligned}$$

Cette dernière formule nous permet d'établir un lien entre une couverture « occurrence », une couverture « claims-made » et une couverture « ddr coverage ». De plus, nous avons

$$\begin{aligned} \overbrace{I_{ddr}(T_k, \xi_k, \zeta_k, t)}^{\text{« ddr coverage »}} &= 1_{]0,t]}(T_e) 1_{]0,t]}(T_k) + 1_{]t,\infty[}(T_e) 1_{]0,t]}(T_k + \xi_k) \\ &= 1_{]0,t]}(T_k + \xi_k) + 1_{]t,\infty[}(T_e) I_{tc}(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) . \end{aligned}$$

Nous avons aussi les relations d'ordre stochastique suivantes :

$$Z_{occ}(t) \geq_{ST} Z_{ddr}(t) \geq_{ST} Z_{cm}(t) \geq_{ST} Z_{cp}(t) .$$

De plus, nous avons aussi cette autre relation d'ordre stochastique :

$$Z_{occ}(t) \geq_{ST} Z_{tc}(t) .$$

Ainsi, le contrat « occurrence » est supérieur, en ordre stochastique, à tous les contrats. De plus, nous avons les deux résultats suivants :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Pr(Z_{occ}(t) < x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr(Z_{cm}(t) < x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr(Z_{cp}(t) < x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr(Z_{ddr}(t) < x)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Pr(Z_{tc}(t) > 0) = 0 .$$

En mots simples, les comportements des contrats « occurrence », « claims-made », « claims-paid » et « ddr coverage » sont équivalents sur une longue période. De plus, toujours sur une longue période, le contrat de type « tail-coverage » tend vers 0. Néanmoins, nous verrons à la section 5.7.2 que cette « convergence » est lente selon les exemples numériques considérés.

Au chapitre 3, nous avons développé les outils qui nous permettent de calculer les deux premiers moments du modèle proposé dans ce chapitre. Ainsi, tel que mentionné précédemment, le modèle présenté au début de ce chapitre permet de considérer les cinq couvertures suivantes et

d'établir certaines relations entre ces dernières : « occurrence », « claims-made », « claims-paid », « tail coverage » et « ddr coverage ».

Nous sommes maintenant prêts à présenter des formules analytiques pour les deux premiers moments et le premier moment conjoint de notre processus de risque, ce qui nous aidera à mieux comprendre le comportement de ce dernier. La raison pour laquelle nous avons considéré seulement ces premiers moments est que les moments d'ordre supérieur sont beaucoup plus difficiles à calculer. Les intégrales multiples impliquées demandent une capacité de calcul qui est largement supérieure à celle de simples ordinateurs portables, même avec des méthodes de quadrature puissantes telles que Cuhre et Vegas.

4.3 Calcul du premier moment

Dans cette section, nous présentons une formule analytique qui permet de calculer le premier moment du modèle proposé dans ce chapitre.

Théorème 24 *Considérons le modèle tel que défini en section 4.1. Alors, pour des forces stochastiques d'intérêt net $\delta_1(t)$ et $\delta_2(t)$, le premier moment de $Z(t)$ est donné par l'expression suivante :*

$$E[Z(t)] = \int_0^\infty E[X|\zeta = w] \left\{ \int_0^\infty \int_0^t I(u, v, w, t) E[D_1(u+v+w)] d\tilde{m}(\Lambda(u)) dF_\xi(v) \right\} dF_\zeta(w) \\ + \int_0^\infty E[Y|\zeta = w] \left\{ \int_0^\infty \int_0^t I(u, v, w, t) E[D_2(u+v+w)] d\tilde{m}(\Lambda(u)) dF_\xi(v) \right\} dF_\zeta(w) ,$$

où $\tilde{m}(\Lambda(t)) = m(t)$.

Peuve : Nous conditionnons $Z_1(t)$ et $Z_2(t)$ sur $N(t)$, et ensuite nous suivons les mêmes étapes que dans Léveillé & Hamel (2013). Ainsi, nous obtenons

$$E[Z(t)] = E[E[Z_1(t)|N(t)]] + E[E[Z_2(t)|N(t)]] \\ = \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty E[I(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) D_1(T_k + \xi_k + \zeta_k) X_k | N(t) = n] P(N(t) = n) \\ + \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty E[I(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) D_2(T_k + \xi_k + \zeta_k) Y_k | N(t) = n] P(N(t) = n) \\ = \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \int_0^t E[I(u, \xi_k, \zeta_k, t) D_1(u + \xi_k + \zeta_k) X_k | N(t) = n] dF_{T_k|N(t)=n}(u) P(N(t) = n) \\ + \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \int_0^t E[I(u, \xi_k, \zeta_k, t) D_2(u + \xi_k + \zeta_k) Y_k | N(t) = n] dF_{T_k|N(t)=n}(u) P(N(t) = n)$$

D'où,

$$\begin{aligned}
E[Z(t)] &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \int_0^t E[I(u, \xi_k, \zeta_k, t) D_1(u + \xi_k + \zeta_k) X_k] P(\tilde{N}(\Lambda(t) - \Lambda(u)) = n - k) dF^{*k}(\Lambda(u)) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \int_0^t E[I(u, \xi_k, \zeta_k, t) D_2(u + \xi_k + \zeta_k) Y_k] P(\tilde{N}(\Lambda(t) - \Lambda(u)) = n - k) dF^{*k}(\Lambda(u)) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} I(u, v, w, t) E[D_1(u + v + w)] E[X|\zeta = w] dF_{\xi}(v) dF_{\zeta}(w) dF^{*k}(\Lambda(u)) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} I(u, v, w, t) E[D_2(u + v + w)] E[Y|\zeta = w] dF_{\xi}(v) dF_{\zeta}(w) dF^{*k}(\Lambda(u)) \\
&= \int_0^{\infty} E[X|\zeta = w] \int_0^{\infty} \int_0^t I(u, v, w, t) E[D_1(u + v + w)] d\tilde{m}(\Lambda(u)) dF_{\xi}(v) dF_{\zeta}(w) \\
&\quad + \int_0^{\infty} E[Y|\zeta = w] \int_0^{\infty} \int_0^t I(u, v, w, t) E[D_2(u + v + w)] d\tilde{m}(\Lambda(u)) dF_{\xi}(v) dF_{\zeta}(w) .
\end{aligned}$$

□

Remarque 15 : Pour les risques $Z_{tc}(t)$ et $Z_{ddr}(t)$, nous aurons

$$E[Z_{tc}(t)] = E[Z_{occ}(t)] - E[Z_{cm}(t)] ,$$

et

$$\begin{aligned}
E[Z_{ddr}(t)] &= E[Z_{cm}(t)] + \Pr(T_e < t) E[Z_{tc}(t)] \\
&= E[Z_{cm}(t)] \Pr(T_e > t) + E[Z_{occ}(t)] \Pr(T_e < t) .
\end{aligned}$$

Ces deux dernières identités seront utilisées à la section 5.7.2.

4.4 Calcul du deuxième moment simple

Dans cette section, nous présentons les calculs liés au deuxième moment du modèle présenté dans ce chapitre, y compris certains moments conjoints.

Théorème 25 *Considérons le modèle tel que défini en section 4.1. Alors, pour des forces stochastiques d'intérêt net $\delta_1(t)$ et $\delta_2(t)$, le deuxième moment de $Z(t)$ est donné par l'expression suivante :*

$$\begin{aligned}
E[Z^2(t)] &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^t A(u, v, w) I(u, v, w, t) d\tilde{m}(\Lambda(u)) dF_{\xi}(v) dF_{\zeta}(w) \\
&\quad + 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-u} B(u, u', v, v', w, w') I(u, v, w, t) I(u + u', v', w', t) \\
&\quad \quad \quad \times d\tilde{m}(\Lambda(u + u') - \Lambda(u)) d\tilde{m}(\Lambda(u)) dF_{\xi}(v') dF_{\zeta}(v) dF_{\xi}(w') dF_{\zeta}(w) ,
\end{aligned}$$

où,

$$A(u, v, w) = E[X^2 | \zeta = w] E[D_1^2(u + v + w)] + E[Y^2 | \zeta = w] E[D_2^2(u + v + w)] \\ + 2E[XY | \zeta = w] E[D_1(u + v + w) D_2(u + v + w)] ,$$

$$B(u, u', v, v', w, w') = E[X | \zeta = w] E[X | \zeta = w'] E[D_1(u + v + w) D_1(u + u' + v' + w')] \\ + E[X | \zeta = w] E[Y | \zeta = w'] E[D_1(u + v + w) D_2(u + u' + v' + w')] \\ + E[Y | \zeta = w] E[X | \zeta = w'] E[D_2(u + v + w) D_1(u + u' + v' + w')] \\ + E[Y | \zeta = w] E[Y | \zeta = w'] E[D_2(u + v + w) D_2(u + u' + v' + w')] .$$

Preuve : Premièrement, nous multiplions les sommes entre elles, ensuite nous séparons les termes, c.-à-d pour les indices $k = j$, $k < j$ et $k > j$.

Ainsi, nous obtenons

$$Z^2(t) = Z_1^2(t) + 2Z_1(t)Z_2(t) + Z_2^2(t) \\ = \sum_{k=1}^{N(t)} \sum_{j=1}^{N(t)} I(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) D_1(T_k + \xi_k + \zeta_k) I(T_j, \xi_j, \zeta_j, t) D_1(T_j + \xi_j + \zeta_j) X_k X_j \\ + 2 \sum_{k=1}^{N(t)} \sum_{j=1}^{N(t)} I(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) D_1(T_k + \xi_k + \zeta_k) I(T_j, \xi_j, \zeta_j, t) D_2(T_j + \xi_j + \zeta_j) X_k Y_j \\ + \sum_{k=1}^{N(t)} \sum_{j=1}^{N(t)} I(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) D_2(T_k + \xi_k + \zeta_k) I(T_j, \xi_j, \zeta_j, t) D_2(T_j + \xi_j + \zeta_j) Y_k Y_j ,$$

ce qui donne,

$$Z^2(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} I(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) D_1^2(T_k + \xi_k + \zeta_k) X_k^2 \\ + \sum_{k=1}^{N(t)} I(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) D_2^2(T_k + \xi_k + \zeta_k) Y_k^2 \\ + 2 \left\{ \sum_{k=1}^{N(t)} I(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) D_1(T_k + \xi_k + \zeta_k) D_2(T_k + \xi_k + \zeta_k) X_k Y_k \right. \\ + \sum_{k=1}^{N(t)-1} \sum_{j=k+1}^{N(t)} I(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) D_1(T_k + \xi_k + \zeta_k) I(T_j, \xi_j, \zeta_j, t) D_1(T_j + \xi_j + \zeta_j) X_k X_j \\ + \sum_{k=1}^{N(t)-1} \sum_{j=k+1}^{N(t)} I(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) D_2(T_k + \xi_k + \zeta_k) I(T_j, \xi_j, \zeta_j, t) D_2(T_j + \xi_j + \zeta_j) Y_k Y_j \\ + \sum_{k=1}^{N(t)-1} \sum_{j=k+1}^{N(t)} I(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) D_1(T_k + \xi_k + \zeta_k) I(T_j, \xi_j, \zeta_j, t) D_2(T_j + \xi_j + \zeta_j) X_k Y_j \\ \left. + \sum_{k=1}^{N(t)-1} \sum_{j=k+1}^{N(t)} I(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) D_2(T_k + \xi_k + \zeta_k) I(T_j, \xi_j, \zeta_j, t) D_1(T_j + \xi_j + \zeta_j) X_j Y_k \right\} .$$

En utilisant le théorème 24, l'espérance du premier terme donne,

$$\begin{aligned}
& E \left[\sum_{k=1}^{N(t)} I(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) D_1^2(T_k + \xi_k + \zeta_k) X_k^2 \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n E \left[I(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) D_1^2(T_k + \xi_k + \zeta_k) X_k^2 \mid N(t) = n \right] P(N(t) = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^t I(u, v, w, t) E \left[D_1^2(u + v + w) \right] E \left[X^2 \mid \zeta = w \right] dF_{T_k \mid N(t)=n}(u) dF_{\xi}(v) dF_{\zeta}(w) \\
&\hspace{25em} \times P(N(t) = n) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^t I(u, v, w, t) E \left[D_1^2(u + v + w) \right] E \left[X^2 \mid \zeta = w \right] P(\tilde{N}(\Lambda(t) - \Lambda(u)) = n - k) \\
&\hspace{25em} \times dF^{*k}(\Lambda(u)) dF_{\xi}(v) dF_{\zeta}(w) \\
&= \int_0^{\infty} E \left[X^2 \mid \zeta = w \right] \int_0^{\infty} \int_0^t I(u, v, w, t) E \left[D_1^2(u + v + w) \right] d\tilde{m}(\Lambda(u)) dF_{\xi}(v) dF_{\zeta}(w) .
\end{aligned}$$

Similairement, l'espérance du deuxième terme donne,

$$\begin{aligned}
& E \left[\sum_{k=1}^{N(t)} I(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) D_2^2(T_k + \xi_k + \zeta_k) Y_k^2 \right] \\
&= \int_0^{\infty} E \left[Y^2 \mid \zeta = w \right] \int_0^{\infty} \int_0^t I(u, v, w, t) E \left[D_2^2(u + v + w) \right] d\tilde{m}(\Lambda(u)) dF_{\xi}(v) dF_{\zeta}(w) ,
\end{aligned}$$

et l'espérance du troisième terme donne,

$$\begin{aligned}
& E \left[\sum_{k=1}^{N(t)} I(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) D_1(T_k + \xi_k + \zeta_k) D_2(T_k + \xi_k + \zeta_k) X_k Y_k \right] \\
&= \int_0^{\infty} E \left[XY \mid \zeta = w \right] \int_0^{\infty} \int_0^t I(u, v, w, t) E \left[D_1(u + v + w) D_2(u + v + w) \right] d\tilde{m}(\Lambda(u)) dF_{\xi}(v) dF_{\zeta}(w) .
\end{aligned}$$

Aussi, l'espérance du quatrième terme donne,

$$\begin{aligned}
& E \left[\sum_{k=1}^{N(t)-1} \sum_{j=k+1}^{N(t)} I(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) D_1(T_k + \xi_k + \zeta_k) I(T_j, \xi_j, \zeta_j, t) D_1(T_j + \xi_j + \zeta_j) X_k X_j \right] \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n \int_0^t \int_u^t E \left[I(u, \xi_k, \zeta_k, t) D_1(u + \xi_k + \zeta_k) I(z, \xi_j, \zeta_j, t) D_1(z + \xi_j + \zeta_j) X_k X_j \right] \\
&\hspace{25em} \times dF_{T_k, T_j \mid N(t)=n}(u, z) P(N(t) = n) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} \int_0^t \int_u^t E \left[I(u, \xi_k, \zeta_k, t) D_1(u + \xi_k + \zeta_k) I(z, \xi_j, \zeta_j, t) D_1(z + \xi_j + \zeta_j) X_k X_j \right] \\
&\hspace{25em} \times P(\tilde{N}(\Lambda(t) - \Lambda(z)) = n - j) dF^{*(j-k)}(\Lambda(z) - \Lambda(u)) dF^{*k}(\Lambda(u))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{t-u} I(u, v, w, t) I(u+u', v', w', t) E[D_1(u+v+w) D_1(u+u'+v'+w')] \\
&\quad \times E[X|\zeta = w] E[X|\zeta = w'] dF^{*(j-k)}(\Lambda(u+u') - \Lambda(u)) dF^{*k}(\Lambda(u)) \\
&\quad \times dF_{\xi}(v) dF_{\xi}(v') dF_{\zeta}(w) dF_{\zeta}(w') \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} E[X|\zeta = w] E[X|\zeta = w'] \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{t-u} I(u, v, w, t) I(u+u', v', w', t) \\
&\quad \times E[D_1(u+v+w) D_1(u+u'+v'+w')] d\tilde{m}(\Lambda(u+u') - \Lambda(u)) d\tilde{m}(\Lambda(u)) \\
&\quad \times dF_{\xi}(v) dF_{\xi}(v') dF_{\zeta}(w) dF_{\zeta}(w').
\end{aligned}$$

Similairement, l'espérance du cinquième terme donne,

$$\begin{aligned}
&E \left[\sum_{k=1}^{N(t)-1} \sum_{j=k+1}^{N(t)} I(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) D_2(T_k + \xi_k + \zeta_k) I(T_j, \xi_j, \zeta_j, t) D_2(T_j + \xi_j + \zeta_j) Y_k Y_j \right] \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} E[Y|\zeta = w] E[Y|\zeta = w'] \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{t-u} I(u, v, w, t) I(u+u', v', w', t) \\
&\quad \times E[D_2(u+v+w) D_2(u+u'+v'+w')] d\tilde{m}(\Lambda(u+u') - \Lambda(u)) d\tilde{m}(\Lambda(u)) \\
&\quad \times dF_{\xi}(v) dF_{\xi}(v') dF_{\zeta}(w) dF_{\zeta}(w'),
\end{aligned}$$

et l'espérance du sixième terme donne,

$$\begin{aligned}
&E \left[\sum_{k=1}^{N(t)-1} \sum_{j=k+1}^{N(t)} I(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) D_1(T_k + \xi_k + \zeta_k) I(T_j, \xi_j, \zeta_j, t) D_2(T_j + \xi_j + \zeta_j) X_k Y_j \right] \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} E[X|\zeta = w] E[Y|\zeta = w'] \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{t-u} I(u, v, w, t) I(u+u', v', w', t) \\
&\quad \times E[D_1(u+v+w) D_2(u+u'+v'+w')] d\tilde{m}(\Lambda(u+u') - \Lambda(u)) d\tilde{m}(\Lambda(u)) \\
&\quad \times dF_{\xi}(v) dF_{\xi}(v') dF_{\zeta}(w) dF_{\zeta}(w'),
\end{aligned}$$

et finalement, l'espérance du septième terme donne,

$$\begin{aligned}
&E \left[\sum_{k=1}^{N(t)-1} \sum_{j=k+1}^{N(t)} I(T_k, \xi_k, \zeta_k, t) D_2(T_k + \xi_k + \zeta_k) I(T_j, \xi_j, \zeta_j, t) D_1(T_j + \xi_j + \zeta_j) Y_k X_j \right] \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} E[Y|\zeta = w] E[X|\zeta = w'] \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{t-u} I(u, v, w, t) I(u+u', v', w', t) \\
&\quad \times E[D_2(u+v+w) D_1(u+u'+v'+w')] d\tilde{m}(\Lambda(u+u') - \Lambda(u)) d\tilde{m}(\Lambda(u)) \\
&\quad \times dF_{\xi}(v) dF_{\xi}(v') dF_{\zeta}(w) dF_{\zeta}(w').
\end{aligned}$$

Pour le reste de la preuve, nous additionnons tous les termes. □

Maintenant, afin de calculer les deuxième moment des risques $Z_{tc}(t)$ et $Z_{ddr}(t)$, nous présentons un lemme qui donnera le premier moment conjoint entre les risques $Z_{occ}(t)$ et $Z_{cm}(t)$.

Lemme 2 *Considérons le modèle tel que défini en section 4.1. Alors, pour des forces stochastiques d'intérêt net $\delta_1(t)$ et $\delta_2(t)$, le moment conjoint $E[Z_{occ}(t)Z_{cm}(t)]$ est donné par l'expression suivante :*

$$E[Z_{occ}(t)Z_{cm}(t)] = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^t A(u, v, w) I_{cm}(u, v, w, t) d\tilde{m}(\Lambda(u)) dF_\xi(v) dF_\zeta(w) \\ + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{t-u} B(u, u', v, v', w, w') \{ I_{occ}(u, v, w, t) I_{cm}(u+u', v', w', t) \\ + I_{cm}(u, v, w, t) I_{occ}(u+u', v', w', t) \} \\ \times d\tilde{m}(\Lambda(u+u') - \Lambda(u)) d\tilde{m}(\Lambda(u)) dF_\xi(v') dF_\zeta(v) dF_\xi(w') dF_\zeta(w),$$

où,

$$A(u, v, w) = E[X^2 | \zeta = w] E[D_1^2(u+v+w)] + E[Y^2 | \zeta = w] E[D_2^2(u+v+w)] \\ + 2E[XY | \zeta = w] E[D_1(u+v+w)D_2(u+v+w)],$$

$$B(u, u', v, v', w, w') = E[X | \zeta = w] E[X | \zeta = w'] E[D_1(u+v+w)D_1(u+u'+v'+w')] \\ + E[X | \zeta = w] E[Y | \zeta = w'] E[D_1(u+v+w)D_2(u+u'+v'+w')] \\ + E[Y | \zeta = w] E[X | \zeta = w'] E[D_2(u+v+w)D_1(u+u'+v'+w')] \\ + E[Y | \zeta = w] E[Y | \zeta = w'] E[D_2(u+v+w)D_2(u+u'+v'+w')].$$

Preuve : Le raisonnement est similaire au théorème 25. □

Ce lemme nous permet de calculer les deuxième moments d'un contrat « tail-coverage » et d'un contrat « ddr coverage ». En effet nous avons les relations suivantes :

$$E[Z_{tc}^2(t)] = E[(Z_{occ}(t) - Z_{cm}(t))^2] \\ = E[Z_{occ}^2(t)] - 2E[Z_{occ}(t)Z_{cm}(t)] + E[Z_{cm}^2(t)],$$

et,

$$\begin{aligned}
E[Z_{ddr}^2(t)] &= E\left[\left(Z_{cm}(t)1_{]t,\infty[}(T_e) + 1_{]0,t]}(T_e)Z_{occ}(t)\right)^2\right] \\
&= E[Z_{cm}^2(t)]\Pr(T_e > t) + 2E\left[1_{]0,t]}(T_e)1_{]t,\infty[}(T_e)\right]E[Z_{cm}(t)Z_{occ}(t)] \\
&\quad + \Pr(T_e < t)E[Z_{occ}^2(t)] \\
&= E[Z_{cm}^2(t)]\Pr(T_e > t) + \Pr(T_e < t)E[Z_{occ}^2(t)].
\end{aligned}$$

Ces deux dernières identités seront utilisées à la section 5.7.3.

4.5 Analyse des résultats

Dans ce chapitre, nous avons présenté un modèle qui généralise la classe PRCT présentée au chapitre 3. Le modèle étudié dans ce chapitre est réaliste et applicable à de vraies bases de données, comme nous le démontrerons au chapitre 5. De plus, ce dernier permet de modéliser les cinq couvertures d'assurance suivantes : « occurrence », « claims-made », « claims-paid », « tail coverage » et « ddr coverage ».

Aussi, il existe un lien entre les sinistres encourus non rapportés (« IBNR ») et la couverture « tail-coverage ». Le modèle présenté dans ce chapitre pourrait servir de base pour l'étude de réserve en assurance de dommages. Cet aspect sera exploré plus en détails dans de futurs travaux et est, néanmoins, hors de la portée du présent document.

Enfin, dans ce chapitre, nous avons présenté des formules analytiques pour le calcul des deux premiers moments ainsi que le premier moment conjoint. Nous n'avons pas présenté les moments d'ordre supérieurs, car ces derniers sont difficiles à calculer d'un point de vue numérique. Noter que nous n'avons pas présenté de calculs numériques pour illustrer les formules contenues dans ce chapitre. Nous avons plutôt préféré reporter ces calculs au chapitre 5, avec des paramètres qui proviennent de la calibration d'une base de données d'une compagnie d'assurance, car les valeurs obtenues auront une interprétation qui a une « valeur réelle ».

Chapitre 5 Calibration d'un modèle d'assurance pour fautes des professionnels de la santé

Dans ce chapitre, nous calibrons d'abord le modèle proposé au chapitre 4 sur la base de données des réclamations fermées de la Floride (BDRFF). Cette dernière viendra illustrer le fait que le modèle proposé au chapitre 4 est applicable en pratique. Par la suite, nous utilisons le modèle calibré pour calculer des mesures de risque liées aux produits qui ont été présentés précédemment, soit: « occurrence », « claims-made », « claims-paid », « ddr coverage » et « tail-coverage ».

Dans un premier temps, à la section 5.1, nous présentons les données utilisées pour calibrer le modèle proposé au chapitre 4, données qui proviennent de la BDRFF⁸. Par la suite, nous spécifions certaines hypothèses du modèle au chapitre 4 pour faciliter la calibration à la section 5.2. Les premiers paramètres calibrés sont les paramètres d'inflation à la section 5.3. L'outil utilisé pour cette calibration est la théorie de la quasi-vraisemblance. À la section 5.4, nous calibrons la distribution du temps pris par l'assuré pour faire parvenir la réclamation à l'assureur depuis le moment de survenance de la faute, et nous calibrons la distribution du délai de règlement de la réclamation. Ensuite, à la section 5.5, nous calibrons la distribution qui permet de générer la variable aléatoire qui modélise le nombre de réclamations. Encore une fois, nous utilisons la théorie de la quasi-vraisemblance. À la section 5.6, nous calibrons la distribution des indemnités payées ainsi que des dépenses. À la section 5.7, nous calculons des mesures de risque avec le modèle calibré. Finalement, à la section 5.8, nous présentons un résumé des résultats obtenus dans le chapitre 5.

5.1 Base de données de la Floride

Dans cette sous-section, nous analysons précisément les réclamations provenant d'une seule compagnie d'assurance : « First Professionals Insurance Company Inc. » (FPIC). La base de données de la Floride contient de l'information détaillée sur les réclamations fermées des professionnels de la santé entre 2005 et 2016, telle que les indemnités payées, les dépenses et les temps d'occurrence des événements (c.-à-d. survenance, déclaration et règlement). La base de données que nous considérons a un total de 4 794 réclamations distribuées sur 11 ans. Des données avant 2005 étaient aussi disponibles, mais n'étaient pas validées au moment d'écrire ce document et c'est pour cette raison que les données avant 2005 n'ont pas été utilisées. Aussi, comme démontré dans ce document et tel que suggéré par Bingham (2005), calibrer un modèle sur une base de données de réclamations fermées est une tâche difficile : nous devons utiliser des estimateurs statistiques ingénieux pour accomplir cette tâche. Cela est lié au fait que les réclamations doivent être fermées pour être présentes dans la base de données, ce qui nous force à ajuster les estimateurs statistiques pour tenir compte de cette information, ce qui complexifie considérablement les calculs liés à la calibration.

Avec notre modèle, tel que déjà observé par Black et coll. (2008) et tel qu'il sera démontré plus tard, nous observons une dépendance positive entre les indemnités « déflationnées » payées, le délai de règlement et les dépenses « déflationnées ». De plus, nous avons été capables d'obtenir

⁸ Voir <https://apps.fldfs.com/PLCR/Search/MPLClaim.aspx>

les primes directes souscrites en dollars US⁹ de la compagnie FPIC en Floride tel qu'illustré dans le tableau suivant.

Tableau 9 : Primes et part de marché

Année	Primes directes souscrites ¹⁰	Part de marché de la Floride
2016	0	0
2015	0	0
2014	1 783 341	0,003
2013	98 677 086	0,191
2012	106 798 631	0,196
2011	122 757 236	0,223
2010	116 184 713	0,208
2009	139 231 343	0,235
2008	158 409 971	0,239
2007	192 813 921	0,228
2006	215 690 159	0,254
2005	210 174 357	0,242

Il est important de mentionner que la compagnie d'assurance FPIC a été vendue à la « Doctors Company » en 2011 et que les lignes d'affaires ont été transférées graduellement. Lorsque nous analysons les primes directes souscrites, nous observons cet effet de tendance. Ainsi, utiliser un PR pour modéliser le nombre de réclamations dans un intervalle de temps donné ne serait pas approprié pour cette base de données sachant qu'il y a clairement un effet de tendance dans les expositions et conséquemment, dans la fréquence des réclamations comme reflété dans le tableau 9. Pour cette raison, un PRT sera utilisé pour modéliser le nombre de réclamations dans un intervalle de temps donné.

Aussi, nous avons lu la loi de la Floride¹¹ et nous sommes arrivés à la conclusion, après une lecture minutieuse et au meilleur de nos connaissances, qu'aucun ajustement ne devait être fait aux données et que les indemnités payées, les dépenses, le délai de déclaration et le délai de règlement n'étaient pas des variables tronquées ou limitées par une constante. Aussi, les trois réformes législatives qui sont survenues en Floride (en 2003, 2011 et 2013)¹² n'ont pas d'impacts significatifs sur le processus de réclamations, toujours au meilleur des connaissances de l'auteur du présent document.

5.2 Modèle calibré

Dans ce document, nous calibrons notre modèle avec des forces constantes d'inflation. Aussi, nous introduisons de la dépendance entre le délai de règlement, les indemnités payées et les

⁹ Primes directes souscrites : le montant des primes récoltées avant la déduction pour la réassurance

¹⁰ Voir, par exemple, <http://www.floir.com/Office/AnnualReports/ARPreviousYears.aspx>

¹¹ http://www.leg.state.fl.us/statutes/index.cfm?App_mode=Display_Statute&URL=0700-0799/0766/0766ContentsIndex.html&StatuteYear=2016&Title=-%3E2016-%3EChapter%20766

¹² <http://www.atra.org/issues/medical-liability-reform>

dépenses. Il est bon de mentionner que la structure de dépendance introduite dans le présent document semble être en accord avec les données, tel qu'il sera suggéré plus loin. Spécifiquement, nous considérons les hypothèses du modèle présenté au chapitre 4 et nous apportons quelques précisions sur certaines hypothèses :

- $(X_k, Y_k, T_k^*, \xi_k, \zeta_k)$ sont les données retenues de la BDRFF telles que $5,604 \leq T_k + \xi_k + \zeta_k \leq 9,621$ (jours) où T_k^* est la suite des T_k satisfaisant les inégalités précédentes, et X_k, Y_k sont les montants payés déflationnés ainsi que les dépenses déflationnés. Aussi, $T_0 = 0$ correspond à la date 1989 / 08 / 29.
- $\{X_k \equiv \tilde{X}_k h_1(\zeta_k); k \in \mathbf{N}^*\}$ est une suite de variables aléatoires non-négatives indépendantes de T_k et ξ_k , telle que $X_{k, \delta_1^*} = X_k \exp\{\delta_1^*(T_k^* + \xi_k + \zeta_k)\}$ représente l'indemnité payée avec inflation pour la k -ième réclamation, δ_1^* est le taux d'inflation estimé à partir de la base de données, $h_1(x)$ est une fonction continue qui permet d'introduire de la dépendance entre X_k et ζ_k , et \tilde{X}_k est indépendant de ζ_k ¹³.
- $\{Y_k \equiv \tilde{Y}_k h_2(\zeta_k); k \in \mathbf{N}^*\}$ est une suite de variables aléatoires non-négatives, indépendantes de T_k et ξ_k , telle que $Y_{k, \delta_2^*} = Y_k \exp\{\delta_2^*(T_k^* + \xi_k + \zeta_k)\}$ représente le montant des dépenses avec inflation payé par l'assureur pour la k -ième réclamation, δ_2^* est le taux d'inflation estimé sur la « closed-claims database », $h_2(x)$ est une fonction continue qui permet d'introduire la dépendance entre Y_k et ζ_k , et \tilde{Y}_k est indépendant de ζ_k .
- $X_k | \zeta_k$ et $Y_k | \zeta_k$ sont indépendants, et la dépendance entre X_k et Y_k est introduite seulement par l'entremise de ζ_k . Cette dernière hypothèse permet de simplifier, de façon significative, l'exercice de calibration tout en donnant un modèle qui représente bien les données. Entre autres, cette hypothèse nous permet de séparer le problème d'estimation de la distribution de (X_k, Y_k, ζ_k) en trois sous-problèmes : estimation de la distribution de $X_k | \zeta_k$, estimation de la distribution de $Y_k | \zeta_k$ et estimation de la distribution de ζ_k . De plus, cette dernière hypothèse permet de séparer l'estimation des paramètres d'inflation de celle du triplet (X_k, Y_k, ζ_k) , ce qui simplifie beaucoup les équations d'estimation. Si nous avons utilisé, par exemple, des copules pour calibrer la

¹³ L'hypothèse d'indépendance entre \tilde{X}_k et $h_1(\zeta_k)$ permet de simplifier significativement le problème d'estimation. La même hypothèse est faite entre la distribution de \tilde{Y}_k et $h_2(\zeta_k)$.

relation de dépendance du triplet (X_k, Y_k, ζ_k) , les équations d'estimation auraient été significativement plus complexes, sujet qui sera discuté à la section 5.3.

- Avec ces dernières hypothèses, nous démontrerons qu'il est possible de séparer l'estimation de l'inflation de la distribution de X_{k, δ_1^*} et des distributions de T_k , ξ_k et ζ_k , dont les unités sont en jours dans la base de données. La même remarque s'applique à Y_{k, δ_2^*} . Tel que mentionné précédemment, la calibration sur la base de données de réclamations fermées est complexe. En effet, les données observées sont $(X_k, Y_k, T_k^*, \xi_k, \zeta_k) | a \leq T_k^* + \xi_k + \zeta_k \leq b$ où $a = 5,604$ (jours) et $b = 9,621$ (jours). Le conditionnement sur l'information $a \leq T_k^* + \xi_k + \zeta_k \leq b$ rend la calibration difficile. Pour cette raison, tel que mentionné précédemment, nous décomposons la procédure de calibration en plusieurs étapes, ce qui simplifie grandement les problèmes d'optimisation numériques. Dans un premier temps, nous calibrons les paramètres d'inflation δ_1^* et δ_2^* , ensuite, nous calibrons les paramètres des fonctions $h_1(x)$ et $h_2(x)$, en utilisant la théorie de la quasi-vraisemblance basée sur la loi de Poisson. Dans un second temps, nous calibrons les distributions de ξ_k et ζ_k en utilisant la théorie du maximum de vraisemblance. Par la suite, nous calibrons la distribution de $N(t)$, qui a besoin comme intrants des résultats de la calibration de ξ_k et de ζ_k , en utilisant la théorie de quasi-vraisemblance basée sur la loi normale. Finalement, nous calibrons les distributions de \tilde{X}_k et de \tilde{Y}_k en utilisant les paramètres d'inflation obtenus précédemment par la théorie du maximum de vraisemblance.

5.3 Calibration de l'inflation déterministe

Avant de décrire notre méthode de calibration de la force d'inflation constante, nous présentons une courte justification qui suggère que les estimateurs naïfs d'inflation sont biaisés pour une base de données de réclamations fermées. Supposons que nous estimons l'inflation en prenant le ratio des sévérités annuelles (ou toute autre fréquence). Alors, pour une base de données de réclamations fermées, cet estimateur est généralement biaisé comme le démontre l'équation suivante :

$$\frac{E\left[X_{k, \delta_1^*} \mid a + h \leq T_k^* + \xi_k + \zeta_k \leq b + h\right]}{E\left[X_{k, \delta_1^*} \mid a \leq T_k^* + \xi_k + \zeta_k \leq b\right]} \neq \exp(\delta_1^* h) .$$

Le même argument s'applique à l'estimateur d'inflation pour les dépenses. Ainsi, nous ne pouvons pas utiliser un estimateur « naïf d'inflation ». Dans cette section, nous présentons une méthode basée sur les estimateurs de quasi-vraisemblance pour estimer les forces d'inflation constantes. Cette méthode garantit que les estimés des forces d'inflation sont convergents asymptotiquement, mais pas sans biais, si notre choix de modèle est adéquat. De plus, nous utilisons les hypothèses suivantes :

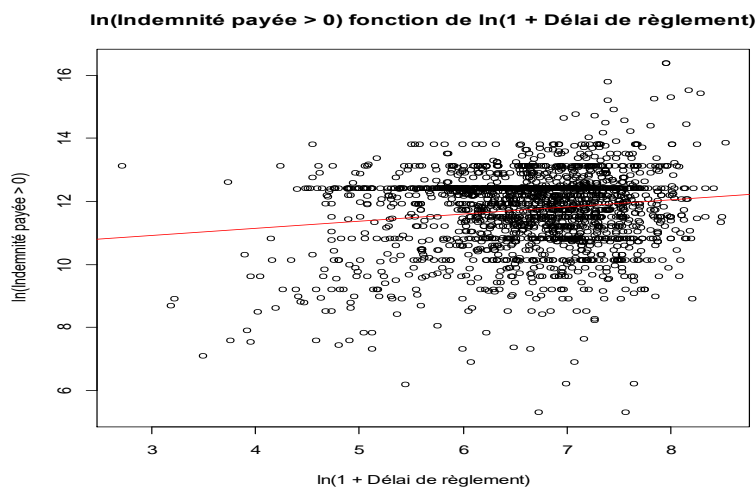
$$h_1(x) = (1+x)^{a_1} \quad , \quad h_2(x) = (1+x)^{a_2} \quad ,$$

où a_1 et a_2 sont des constantes qui doivent être estimées et qui sont liées à la structure de dépendance du triplet $(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k, \zeta_k)$. Les fonctions $h_i(x)$ considérées dans cette thèse permettent d'introduire plusieurs formes de dépendance :

- $a_1 = 0, a_2 = 0$ n'introduit pas de dépendance par rapport à ζ_k ;
- $a_1 > 0, a_2 > 0$ introduit de la dépendance positive par rapport à ζ_k ;
- $a_1 < 0, a_2 < 0$ introduit de la dépendance négative par rapport à ζ_k .

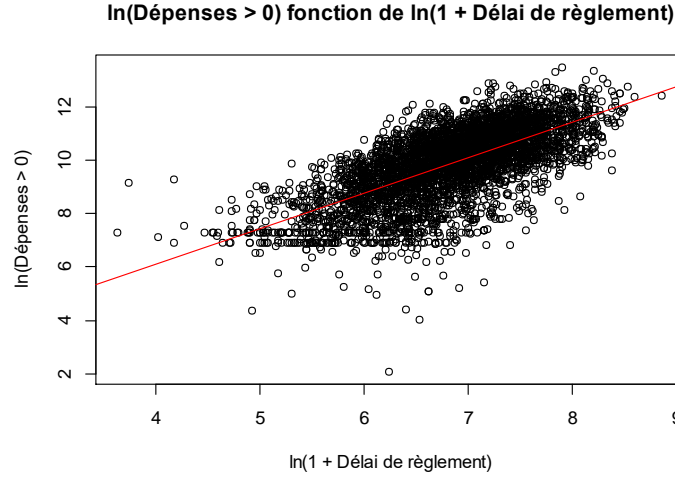
De plus, un autre avantage de la méthode choisie est qu'elle permet d'introduire de la dépendance qui n'est pas « symétrique » entre les couples (ζ_k, \tilde{X}_k) et (ζ_k, \tilde{Y}_k) . De plus, les fonctions $h_i(x)$ choisies pour calibrer la dépendance sont parcimonieuses¹⁴. Selon l'auteur du présent document, ces formes fonctionnelles sont justifiées par les deux graphiques suivants :

Figure 7 : $\ln \tilde{X}_k / \zeta_k, X_k > 0$ fonction de $\ln(1 + \zeta_k)$



¹⁴ D'autres formes fonctionnelles ont été testées. Néanmoins, l'adéquation de ces « autres formes fonctionnelles » aux données ne semble pas très bonne. Nous présentons un résumé de cette analyse à l'annexe 1.

Figure 8 : $\ln Y_k / \zeta_k, Y_k > 0$ fonction de $\ln(1 + \zeta_k)$



Ces deux derniers graphiques suggèrent que la dépendance est élevée pour les dépenses et est moins élevée pour les indemnités payés. Il est bon de mentionner que notre méthode de calibration fonctionne pour d'autres formes fonctionnelles. Des résultats liés à la calibration de deux autres formes fonctionnelles sont présentés à l'annexe 1.

Les estimés de quasi-vraisemblance des paramètres η_i , δ_i^* et a_i , $i = 1, 2$, basés sur la loi de Poisson, sont obtenues en résolvant les équations ci-dessous (voir Gouriéroux et coll. (1984)) :

- $\arg \max_{\eta_1, \delta_1^*, a_1} \sum_{k=1}^n \left(x_{k, \delta_1^*} \ln \left(\exp \left(\eta_1 + \delta_1^* \left[t_k^* + \xi_k + \zeta_k \right] \right) (1 + \zeta_k)^{a_1} \right) - \exp \left(\eta_1 + \delta_1^* \left[t_k^* + \xi_k + \zeta_k \right] \right) (1 + \zeta_k)^{a_1} \right)$
- $\arg \max_{\eta_2, \delta_2^*, a_2} \sum_{k=1}^n \left(y_{k, \delta_2^*} \ln \left(\exp \left(\eta_2 + \delta_2^* \left[t_k^* + \xi_k + \zeta_k \right] \right) (1 + \zeta_k)^{a_2} \right) - \exp \left(\eta_2 + \delta_2^* \left[t_k^* + \xi_k + \zeta_k \right] \right) (1 + \zeta_k)^{a_2} \right)$

où $\eta_1 = \ln E[\tilde{X}_k]$ et $\eta_2 = \ln E[\tilde{Y}_k]$ sont des paramètres de nuisance, et (t_k^*, ξ_k, ζ_k) sont les valeurs observées du triplet (T_k^*, ξ_k, ζ_k) . Aussi, nous remarquons que

$$E \left[X_{k, \delta_1^*} \mid T_k^*, \xi_k, \zeta_k \right] = E \left[\tilde{X}_k \right] \exp \left(\delta_1^* \left[T_k^* + \xi_k + \zeta_k \right] \right) (1 + \zeta_k)^{a_1}$$

et

$$E \left[Y_{k, \delta_2^*} \mid T_k^*, \xi_k, \zeta_k \right] = E \left[\tilde{Y}_k \right] \exp \left(\delta_2^* \left[T_k^* + \xi_k + \zeta_k \right] \right) (1 + \zeta_k)^{a_2}.$$

Alors, clairement, les deux équations sont des équations de quasi-vraisemblance basées sur la loi de Poisson. Il est important de mentionner que ces dernières équations de quasi-vraisemblance sont simples à résoudre.

Ainsi, en utilisant la théorie de la quasi-vraisemblance et les hypothèses présentées à la section 5.2, nous avons grandement simplifié le problème d'estimation des paramètres d'inflation et de dépendance en comparaison, par exemple, à une approche basée sur les copules. Avec notre approche, nous avons à estimer que trois paramètres dans ces dernières équations. Les termes

$$E\left[X_{k,\delta_1^*} | T_k^*, \xi_k, \zeta_k\right], \quad E\left[Y_{k,\delta_2^*} | T_k^*, \xi_k, \zeta_k\right],$$

ne dépendent que de trois paramètres. Si une approche par copule avait été utilisée, nous aurions utilisé les quantités

$$E\left[X_{k,\delta_1^*} | T_k^*, \xi_k, \zeta_k, Y_{k,\delta_2^*}\right], \quad E\left[Y_{k,\delta_2^*} | T_k^*, \xi_k, \zeta_k, X_{k,\delta_1^*}\right]$$

qui dépendraient alors des paramètres de la copule, de ceux de la distribution de X_{k,δ_1^*} , de ceux de la distribution de Y_{k,δ_2^*} , de ceux de la distribution de ζ_k en plus des paramètres d'inflation δ_1^* et δ_2^* . Ainsi, nous comprenons rapidement que la complexité calculatoire des deux approches est très différente. De plus, il n'est pas clair, pour l'approche basée sur les copules, si l'information contenue dans le premier moment est suffisante pour estimer adéquatement les paramètres de la copule. Néanmoins, répondre à cette question est hors de la portée du présent document. De plus, nous pouvons démontrer que ces estimateurs sont asymptotiquement convergents en utilisant la théorie de la quasi-vraisemblance. De surcroît, la matrice de variance-covariance asymptotique peut être obtenue en utilisant la théorie de la quasi-vraisemblance. Nous obtenons les valeurs suivantes pour les paramètres ainsi que leurs valeurs « p » :

Tableau 10 : Paramètres d'inflation estimés ¹⁵

δ_1^*	$p_{\delta_1^*}$	δ_2^*	$p_{\delta_2^*}$	a_1	p_{a_1}	a_2	p_{a_2}
0,04475	0,00194	0,04230	≈ 0	0,3223	≈ 0	1,1217	≈ 0

Les forces d'intérêt annuelles sont respectivement 4.48% pour les montant payés et 4.23% pour les dépenses. Tous les paramètres ci-hauts sont significatifs d'un point de vue statistique, étant donné que leur valeur respective « p » est près de 0 (selon le test « t »). Aussi, le fait que $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$ implique que la calibration suggère de la dépendance positive entre le délai de règlement, les indemnités payées et les dépenses comme espéré. Enfin, la dépendance entre le délai de règlement et les indemnités payés est plus élevée qu'entre les dépenses et le délai de règlement (c.-à-d. $a_2 > a_1$), ce qui est en accord avec les graphiques présentés précédemment (voir figure 7 et figure 8).

¹⁵ Aussi, nous obtenons $\eta_1 = 8.496$ et $\eta_2 = 1.077$.

5.4 Calibration des distributions de délai ξ_k et ζ_k

Dans cette section, nous calibrons les distributions de ξ_k et ζ_k en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance. La fonction de vraisemblance est donnée par :

$$L(\alpha_1, \tau_1, \theta_1, \alpha_2, \tau_2, \theta_2) = \prod_{k=1}^N f_{\xi}(\xi_k) f_{\zeta}(\zeta_k) / \Pr(a \leq T + \xi + \zeta \leq b | T = t_k^*) ,$$

où $a = 5,604$ (jours) et $b = 9,621$ (jours).

La quantité $\Pr(a \leq T + \xi + \zeta \leq b | T = t_k^*)$ est une intégrale double qui est calculée en utilisant des séquences de Sobol au lieu de nombres aléatoires (voir Bratley et Fox (1988), et Joe et Kuo (1998)). Cela nous permet d'isoler le changement dans la fonction de vraisemblance dû à un changement de paramètre de celui dû à une fluctuation statistique, ce qui stabilise la fonction de vraisemblance lors de l'optimisation numérique. Nous utilisons 100 000 points pour la séquence de Sobol bivariée.

Aussi, pour ξ_k , il y a 15 données qui prennent des valeurs 0. Nous posons ces données comme étant égales à 0.5 pour éviter des problèmes numériques dans les calculs de vraisemblance. Nous argumentons que cela a peu d'impact sur la valeur calibrée des paramètres. Nous pourrions ajouter une masse à 0, néanmoins cela ajouterait un paramètre qui aurait un impact négligeable sur le modèle. Nous avons calibré plusieurs combinaisons de distributions en utilisant le maximum de vraisemblance pour ξ_k et ζ_k . La «Double Transformed Gamma» pour ξ_k et ζ_k semblent donner des résultats satisfaisants. Ainsi, nous avons que les densités de ζ_k et ξ_k sont données respectivement par

$$f_{\zeta}(x) = \frac{1}{x\Gamma(\alpha_1)} \tau_1 \left(\frac{x}{\theta_1}\right)^{\alpha_1 \tau_1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta_1}\right)^{\tau_1}\right\} , \quad f_{\xi}(y) = \frac{1}{y\Gamma(\alpha_2)} \tau_2 \left(\frac{y}{\theta_2}\right)^{\alpha_2 \tau_2} \exp\left\{-\left(\frac{y}{\theta_2}\right)^{\tau_2}\right\} .$$

Premièrement, cette combinaison de paramètres est celle qui minimise l'AIC et le BIC (voir le tableau 12). De plus, le nombre espéré de réclamations à tous les 10 mois obtenu par le modèle semble être très près de celui observé empiriquement tel que présenté à la figure 11 à la section 5.5. Il est important de mentionner que nous ne pouvons pas faire un graphique des densités obtenues de ξ_k et ζ_k contre celles observées empiriquement, car les observations ne sont pas indépendantes et identiquement distribuées étant donné que nous observons $\xi_k | a \leq T_k^* + \xi_k + \zeta_k \leq b$ et $\zeta_k | a \leq T_k^* + \xi_k + \zeta_k \leq b$.

Dans un certain sens, nous sommes « aveugles » parce que nous ne pouvons pas comparer les distributions calibrées aux observations empiriques. Nous obtenons les estimés suivants des paramètres des distributions :

Tableau 11 : Paramètres estimés des distributions de ξ_k et ζ_k

α_1	τ_1	θ_1	α_2	τ_2	θ_2
3,055659	0,7057533	163,6608	0,4791371	1,835945	881,1367

À partir de cette table, nous obtenons que $E[\zeta_k] \approx 869.9486$ (délai de règlement moyen : 2.3834 années) et $E[\xi_k] \approx 470.3596$ (délai de déclaration moyen : 1.2886 années). Nous avons essayé plusieurs combinaisons de distribution de probabilités. Certaines sont présentées ci-dessous.

Tableau 12 : Comparaison des modèles des distributions de ξ_k et ζ_k

Distribution ξ_k	Distribution ζ_k	Log-Vraisemblance	AIC	BIC
Transf. Gamma	Transf. Gamma	-70 512,24	141 036,5	141 075,3
Gamma	Gamma	-70 705,21	141 418,4	141 444,3
Gamma	Log-Normal	-71 672,50	143 353,0	143 378,9
Gamma	Inverse Weibull	-72 186,03	144 380,1	144 406,0
Log-Normal	Weibull	-70 735,01	141 478,0	141 503,9
Gamma	Inverse Gaussian	-74 388,11	148 784,2	148 810,1
Weibull	Weibull	-70 963,63	141 935,3	141 961,2
Weibull	Gamma	-70 751,24	141 510,5	141 536,4

Tel que mentionné précédemment, nous favorisons le « double Transformed Gamma model ». Ce dernier semble être le modèle à privilégier selon les critères AIC et BIC. Maintenant, nous sommes en mesure de calibrer la distribution de $N(t)$, ce qui est l'objet de la section suivante.

5.5 Calibration des distributions de la fonction d'intensité

Avant de présenter notre méthode pour estimer les paramètres de la distribution de $N(t)$, nous devons définir la variable aléatoire suivante :

$$N^*(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} I\{a \leq T_k + \xi_k + \zeta_k \leq b, 0 \leq T_k \leq t\},$$

laquelle représente le nombre de réclamations observées dans l'intervalle $[a, b]$ pour une base de données de réclamations fermées. Nous n'observons pas directement la distribution de $N(t)$ à partir des données provenant de la BDRFF. Néanmoins, nous observons la variable aléatoire $N^*(t)$. En utilisant nos hypothèses, nous pouvons démontrer que

$$E[N^*(t)] = \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty I\{a \leq v + u + w \leq b, 0 \leq v \leq t\} f_\xi(u) f_\zeta(w) d\tilde{m}(\Lambda(v)).$$

De plus, nous utilisons une méthode qui nous permet d'obtenir un estimé initial de $\lambda(v)$ à partir duquel nous pouvons déduire une forme paramétrique qui serait acceptable pour $\lambda(v)$ tel que nous le démontrons ci-dessous. Notre méthode d'estimation initiale de $\lambda(v)$ est basée sur un « kernel density estimator » de T_k^* pour estimer la densité de $N^*(t)$ lorsque ce dernier est un processus de Poisson non-homogène, tel que mentionné dans Gamiz et Linqdqvist (2016). Nous décrivons brièvement ci-après cette procédure.

Premièrement, lorsque t est grand, nous pouvons facilement démontrer que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\tilde{m}(\Lambda(t))}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu^{-1} \lambda(t),$$

où $\mu = E[\tau]$ et $\tau \sim \Lambda(T_k) - \Lambda(T_{k-1})$.

Alors, la fonction de moyenne de notre processus, pour t relativement grand, a le même comportement que celle d'une loi de Poisson non-homogène. Ainsi, pour t relativement grand, nous avons l'approximation suivante :

$$\frac{d\tilde{m}(\Lambda(t))}{dt} \approx \mu^{-1} \lambda(t).$$

En utilisant le « kernel density estimator » de T_k^* , qui est basé sur une « gaussian kernel », pour estimer l'intensité du processus $N^*(t)$ lorsque ce dernier est une loi de poisson non-homogène, nous pouvons estimer

$$\psi(t) = \mu^{-1} \lambda(t) \Pr(a \leq t + \xi + \zeta \leq b)$$

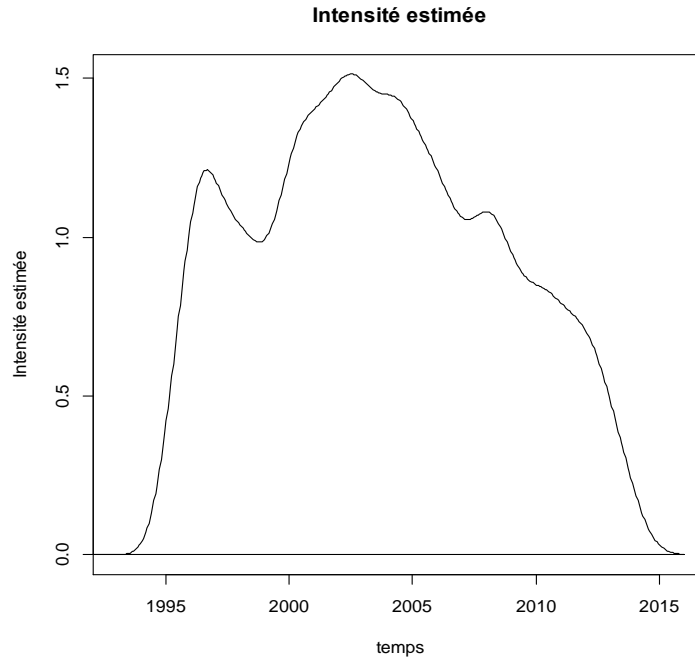
où,

$$\psi(t) = \frac{1}{nh} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-2^{-1}(t - t_k^*)^2 h^{-2}\right),$$

et où h est un paramètre qui doit être estimé et les t_k^* sont les valeurs observées des T_k^* .

De la dernière équation, nous pouvons obtenir $\mu^{-1}\lambda(t)$ en divisant l'estimateur $\psi(t)$ par notre estimé $\Pr(a \leq t + \xi + \zeta \leq b)$, en utilisant le modèle « double Transformed Gamma model ». Nous obtenons ainsi le graphique $\mu^{-1}\lambda(t)$ présenté ci-dessous.

Figure 9 : Approximation de l'intensité avant calibration



Nous remarquons qu'une fonction d'intensité qui a « deux cloches » principales semble avoir une forme appropriée. Nous observons aussi que $\mu^{-1}\lambda(t)$ a un comportement similaire aux primes directes souscrites pour les années 2005-2016, ce qui est tout à fait logique.

De plus, nous voulons éviter « l'overfitting », c'est-à-dire que le nombre de paramètres soit trop grand pour l'estimateur $\lambda(v)$, de sorte à faciliter la calibration.

Ainsi, pour la calibration, nous supposons que

$$\lambda(v) = \sum_{i=1}^2 p_i \Gamma(\alpha_i)^{-1} \lambda_i (v \lambda_i)^{\alpha_i - 1} \exp(-\lambda_i v) ,$$

où p_i, α_i et $\lambda_i > 0$. Pour calibrer les paramètres de $N(t)$, nous résolvons le système suivant qui est une quasi-vraisemblance basée sur la loi normale (voir Gouriéroux et coll., 1984) :

$$\min_{\alpha, p_1, \lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ E[N^*(t_k)] - E[N^*(t_{k-1})] - N^*(t_k) + N^*(t_{k-1}) \right\}^2 ,$$

où $0 = t_0 < \dots < t_n$ et $n = 30$. Ici, nous posons $t_j - t_{j-1} = t_{j-1} - t_{j-2}$, $j = 2, 3, 4, \dots$

Après plusieurs essais, nous sommes arrivés empiriquement à la conclusion que $n = 30$ est un bon compromis entre le temps de calcul et la précision des résultats obtenus. De plus, en utilisant la théorie des estimateurs de quasi-vraisemblance, nous pouvons démontrer que ce dernier estimateur est asymptotiquement convergent. Aussi, pour calculer $E[N^*(t)]$, nous utilisons la méthode de quadrature adaptative de Cuhre (voir Hahn, 2005) et nous supposons que $\tau \sim \Lambda(T_k) - \Lambda(T_{k-1}) \sim \text{GAMMA}(\alpha, 1)$. Ce choix donne beaucoup de flexibilité au modèle, car la loi Gamma peut être IFR et DFR. Ainsi, nous pouvons démontrer que $\alpha \leq 1$ implique

$$\text{Var}[N(t)] \geq E[N(t)]$$

et que $\alpha > 1$ implique

$$\text{Var}[N(t)] < E[N(t)].$$

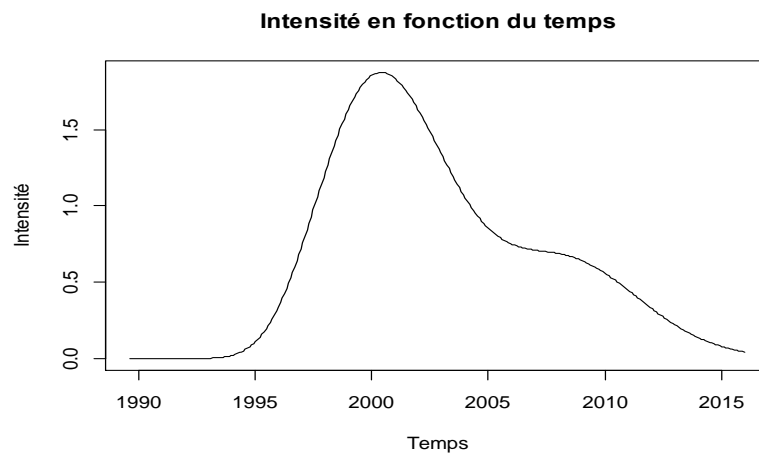
Ainsi, notre modèle permet de considérer trois cas d'importance pratique pour la distribution du nombre de réclamations : variance supérieure à la moyenne, variance égale à la moyenne et variance inférieure à la moyenne. Les paramètres obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Tableau 13 : Paramètres estimés de la distribution de $N(t)$

α	p_1	p_2	λ_1	λ_2	α_1	α_2
0,68885	1454,175	4850,509	0,0065190	0,0037207	46,6091	15,6070

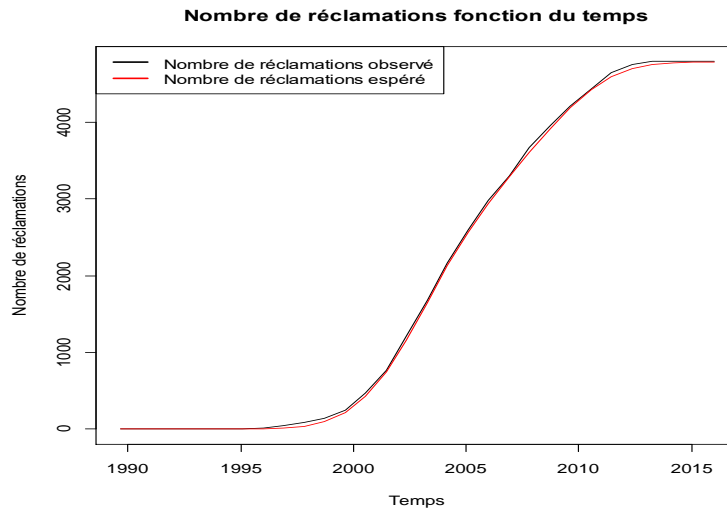
En analysant la figure 10 (voir page suivante), nous remarquons que la fonction d'intensité décroît de 2005 à 2016.

Figure 10 : Intensité estimée



Cet élément de tendance correspond à celui observé dans les primes directes souscrites comme mentionné précédemment. Aussi, la fonction de densité obtenue a une forme similaire à celle obtenue à la figure 9. Il ne faut pas oublier que la fonction d'intensité obtenue à la figure 9 n'est qu'une approximation. Nous remarquons que notre modèle permet de tenir compte facilement d'un changement dans la fréquence du nombre de sinistres, résultat très important d'un point de vue pratique. Notre calibration suggère que $Var[N(t)] > E[N(t)]$. De plus, nous remarquons que la calibration de l'effet de tendance semble donner des résultats satisfaisants (voir la figure ci-dessous).

Figure 11 : Nombre de réclamations observé vs nombre de réclamations moyen



5.6 Estimation des distributions de $X_k | \zeta_k$ et de $Y_k | \zeta_k$

Dans cette section, nous présentons les hypothèses pour calibrer les distributions de $X_k | \zeta_k$ et $Y_k | \zeta_k$. Précisément, nous considérons les hypothèses suivantes, qui sont justifiées par la qualité de l'adéquation aux données comme suggéré aux figures 12 et 13 :

$$F_{X_k | \zeta_k}(x, t) = p_X + (1 - p_X) \left\{ \sum_{i=1}^2 \lambda_{X,i} \int_0^x \frac{1}{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{X,i}} \exp \left[-\frac{(\ln v - \mu_{X,i} - a_1 \ln(1+t))^2}{2\sigma_{X,i}^2} \right] dv \right\}$$

et

$$F_{Y_k | \zeta_k}(x, t) = p_Y + (1 - p_Y) \left\{ \sum_{i=1}^2 \lambda_{Y,i} \int_0^x \frac{1}{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{Y,i}} \exp \left[-\frac{(\ln v - \mu_{Y,i} - a_2 \ln(1+t))^2}{2\sigma_{Y,i}^2} \right] dv \right\}.$$

où $\lambda_{Y,i} \geq 0, i=1,2$, $\sum_{i=1}^2 \lambda_{Y,i} = 1$, $1 > p_X > 0$, $1 > p_Y > 0$, $\sigma_{X,i} > 0, i=1,2$
 et $\sigma_{Y,i} > 0, i=1,2$.

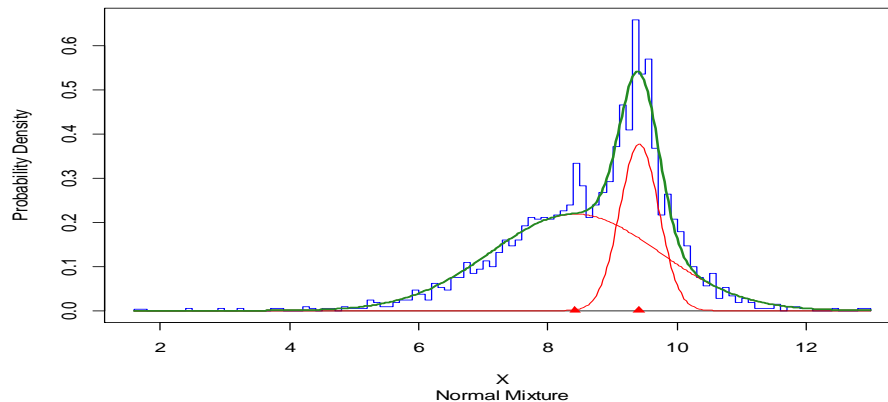
Les paramètres p_X et p_Y sont des masses à zéro. Une proportion importante des coûts des réclamations ont des valeurs nulles pour l'assureur dans la BDRFF. Les paramètres a_1 et a_2 ont été estimés précédemment. Nous concluons facilement que les deux dernières distributions sont des mélanges de lois log-normales avec des masses à zéro, distributions qui ont une « queue épaisse ». Nous utilisons l'algorithme EM pour calibrer les distributions¹⁶ de $\ln X_k | \zeta_k, X_k > 0$ et $\ln Y_k | \zeta_k, Y_k > 0$ (voir Hogg et coll. (2005)). Nous présentons les paramètres de la distribution de $\ln X_k | \zeta_k, X_k > 0$ dans le tableau ci-dessous :

Tableau 14 : Paramètres estimés de la distribution de X_k

Montant payé, algorithme EM						
p_X	$\lambda_{X,1}$	$\lambda_{X,2}$	$\mu_{X,1}$	$\mu_{X,2}$	$\sigma_{X,1}$	$\sigma_{X,2}$
0,556118	0,7132	0,2868	8,420	9,415	1,3023	0,3035

et la fonction de densité correspondante est présentée ci-dessous.

Figure 12 : Densité de $\ln X_k / \zeta_k, X_k > 0$



¹⁶ Veuillez prendre note que nous devons « déflationner » les indemnités payées (observées) ainsi que les dépenses avant d'appliquer l'algorithme EM.

La ligne bleue représente les observations empiriques. La ligne verte représente la densité observée. Les lignes rouges présentent les densités des lois normales dans le mélange de lois normales. Similairement, les paramètres de la distribution de $\ln Y_k | \zeta_k, Y_k > 0$ sont donnés dans le tableau qui est présenté ci-dessous :

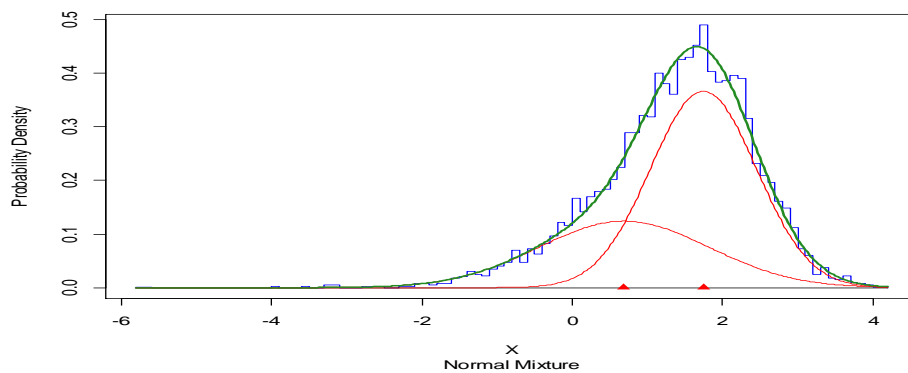
Tableau 15 : Paramètres estimés de la distribution de Y_k

Dépenses, algorithme EM

p_Y	$\lambda_{Y,1}$	$\lambda_{Y,2}$	$\mu_{Y,1}$	$\mu_{Y,2}$	$\sigma_{Y,1}$	$\sigma_{Y,2}$
0,161451	0,3525	0,6475	0,6858	1,7442	1,1340	0,7054

et la fonction de densité de probabilité correspondante est présentée ci-dessous.

Figure 13 : Densité de $\ln Y_k / \zeta_k, Y_k > 0$



Encore une fois, la ligne bleue représente les données observées empiriquement. La ligne verte représente la densité obtenue. Les deux lignes rouges sont les densités des deux lois normales considérées dans le « mélange ».

À partir des distributions précédentes, et en utilisant la méthode de Cuhre, nous obtenons les deux valeurs suivantes :

$$E[X_k] \approx 41,274.28, \quad E[Y_k] \approx 10,522.9.$$

Les deux dernières valeurs sont aux dates 1989/08/29 selon notre modèle. Si nous considérons l'inflation, nous avons qu'à 2016/01/01, le montant payé moyen est de \$134,263 et les dépenses moyennes sont de \$32,090.

5.7 Calcul de mesures de risque et de différents effets de tendance

Dans cette section, nous présentons une analyse numérique liée au modèle calibré dans ce chapitre. Dans un premier temps, nous effectuons des calculs du premier et deuxième moment de notre modèle. Par la suite, à l'aide de simulations, nous calculons des quantités d'intérêt pour les actuaires, soit la VaR_α et la $TVaR_\alpha$. Nous effectuons des calculs pour les cinq garanties

considérées dans le présent document : « occurrence », « claims-made », « claims-paid », « tail-coverage » et « ddr-coverage ». De plus, nous considérons les trois fonctions d'effet de tendance suivante pour comprendre leurs impacts sur le comportement des cinq garanties étudiées dans ce document :

$$\Lambda_1(t) = \lambda t = \tilde{t}; \Lambda_2(t) = \lambda \sqrt{t} = \tilde{t} \quad \text{et} \quad \Lambda_3(t) = \lambda t^{\frac{3}{2}} = \tilde{t}.$$

De plus, nous supposons que

$$\Pr(T_e < x) = F(x, a, b) = 1 - \exp\left(-\left((x + 30)^a - 30^a\right)/b^a\right),$$

où $a = 2$ et $b = 15$.

Cette hypothèse représente, dans notre modèle, le moment où un évènement « ddr coverage » se produit. Cette hypothèse est arbitraire et n'a pas été calibrée sur de vraies données étant donné que ces dernières n'étaient pas disponibles pour la BDRFF.

Tableau 16 : Calculs analytiques, $F(x, a, b)$

t	0,25	0,5	0,75	1
$F(x, a, b)$	0,064752	0,125799	0,183313	0,237468

5.7.1 Calculs du premier moment du processus de comptage

Avant de présenter les calculs liés au premier moment de notre processus de risque, nous allons étudier le comportement des processus de comptage des différentes garanties. Cette façon de procéder nous permet de mieux comprendre les résultats obtenus pour notre processus de risque présentés à la section 5.7.2. Dans les exemples numériques des sections 5.7.1, 5.7.2, 5.7.3 et 5.7.4, nous considérons trois effets de tendance différents pour évaluer l'impact sur la valeur espérée. De plus, nous définissons les cinq variables aléatoires suivantes :

- $N_{occ}(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} I_{occ}(T_k, \xi_k, \zeta_k, t);$
- $N_{cm}(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} I_{cm}(T_k, \xi_k, \zeta_k, t);$
- $N_{cp}(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} I_{cp}(T_k, \xi_k, \zeta_k, t);$
- $N_{tc}(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} I_{tc}(T_k, \xi_k, \zeta_k, t);$
- $N_{ddr}(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} I_{ddr}(T_k, \xi_k, \zeta_k, t).$

De plus, nous définissons les cinq fonctions suivantes et nous remarquons que ces cinq fonctions sont décroissantes par rapport à l'argument u et croissantes par rapport à l'argument t :

- $H_{occ}(u, t) = E[I_{occ}(u, \xi_k, \zeta_k, t)];$
- $H_{cm}(u, t) = E[I_{cm}(u, \xi_k, \zeta_k, t)];$
- $H_{cp}(u, t) = E[I_{cp}(u, \xi_k, \zeta_k, t)];$
- $H_{ic}(u, t) = E[I_{ic}(u, \xi_k, \zeta_k, t)];$
- $H_{ddr}(u, t) = E[I_{ddr}(u, \xi_k, \zeta_k, t)].$

De plus, nous avons

$$1 \geq H_{occ}(u, t) \geq H_{ddr}(u, t) \geq H_{cm}(u, t) \geq H_{cp}(u, t) \geq 0$$

et

$$1 \geq H_{occ}(u, t) \geq H_{ddr}(u, t) \geq 0.$$

À partir de ces dernières identités, nous avons

- $E[N_{occ}(t)] = \int_0^t H_{occ}(u, t) d\tilde{m}(\Lambda_i(u)) , i = 1, 2, 3;$
- $E[N_{cm}(t)] = \int_0^t H_{cm}(u, t) d\tilde{m}(\Lambda_i(u)) , i = 1, 2, 3;$
- $E[N_{cp}(t)] = \int_0^t H_{cp}(u, t) d\tilde{m}(\Lambda_i(u)) , i = 1, 2, 3;$
- $E[N_{ic}(t)] = \int_0^t H_{ic}(u, t) d\tilde{m}(\Lambda_i(u)) = E[N_{occ}(t) - N_{cm}(t)] , i = 1, 2, 3;$
- $E[N_{ddr}(t)] = \int_0^t H_{ddr}(u, t) d\tilde{m}(\Lambda_i(u)) = E[N_{cm}(t)] + \Pr(T_e < t) E[N_{ic}(t)] , i = 1, 2, 3$

Enfin, ces dernières relations nous permettent d'établir que

$$E[N_{occ}(t)] \geq E[N_{ddr}(t)] \geq E[N_{cm}(t)] \geq E[N_{cp}(t)] .$$

De plus, nous avons

$$\Pr(\tilde{N}_A(\Lambda_3(t)) \leq x) \leq \Pr(\tilde{N}_A(\Lambda_1(t)) \leq x) \leq \Pr(\tilde{N}_A(\Lambda_2(t)) \leq x),$$

où $A \in \{occ, cm, cp, ddr\}$, $\Lambda_1(t) = \lambda t = \tilde{t}$, $\Lambda_2(t) = \lambda \sqrt{t} = \tilde{t}$ et $\Lambda_3(t) = \lambda t^{\frac{3}{2}} = \tilde{t}$.

Tableau 17 : Calculs analytiques : espérance de $N(t)$, cas 1

t (en jours)	91,25	182,50	273,75	365
$E[N_{occ}(t)]$	132,05	264,25	398,09	530,67
$E[N_{cm}(t)]$	10,81	39,43	83,88	141,96
$E[N_{cp}(t)]$	0,055	0,735	3,154	8,561
$E[N_{tc}(t)]$	121,24	224,82	314,22	388,71
$E[N_{ddr}(t)]$	18,65910	67,71457	141,47899	234,26316

Nous pouvons aussi démontrer qu'il y a un ordre stochastique entre les distributions des T_k pour les trois cas considérés de $\Lambda_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. Ces résultats se reflètent dans les tableaux 17 à 19.

Nous comparons ci-dessous les valeurs espérées des cinq processus considérés. Nous remarquons que, pour les cinq garanties étudiées, les valeurs du tableau 17 sont plus élevées que celles du tableau 18 et plus faibles que celles du tableau 19. Cette observation est aussi vraie pour le contrat « tail-coverage » pour l'intervalle $t \in [0, 365]$ considéré. Néanmoins, cette dernière observation n'est pas vraie pour tous les intervalles.

Tableau 18 : Calculs analytiques : espérance de $N(t)$, cas 2

t (en jours)	91,25	182,50	273,75	365
$E[N_{occ}(t)]$	14,095	19,841	24,24	27,96
$E[N_{cm}(t)]$	1,4958	3,830	6,617	9,627
$E[N_{cp}(t)]$	0,010	0,097	0,335	0,774
$E[N_{tc}(t)]$	12,60	5,844	9,894	13,98
$E[N_{ddr}(t)]$	2,311735	5,844237	9,849403	13,982349

Tableau 19 : Calculs analytiques : espérance de $N(t)$, cas 3

t (en jours)	91,25	182,50	273,75	365
$E[N_{occ}(t)]$	1 265,601	3 579,24	6 575,29	10 123,20
$E[N_{cm}(t)]$	84,15	435,588	1 139,58	2 230,29
$E[N_{cp}(t)]$	0,328	6,249	33,22	105,49
$E[N_{tc}(t)]$	1 181,45	3 143,65	5 435,7	7 892,9
$E[N_{ddr}(t)]$	160,6583	831,0552	2136,040	4104,6084

Nous sommes maintenant prêts à étudier le comportement du premier moment de notre modèle calibré.

5.7.2 Calculs du premier moment du processus de risque

Dans cette sous-section, nous présentons les calculs liés au premier moment de notre processus de risque. Pour effectuer les calculs, nous utilisons la méthode de Cuhre. Nous remarquons aussi que la relation d'ordre stochastique obtenue à la section 4.2.2 est cohérente avec les résultats obtenus dans cette sous-section. De plus, les résultats de la section 5.7.1 sont aussi cohérents avec ceux de la section 5.7.2.3.

Tableau 20 : Calculs analytiques : espérance de $Z(t)$, cas 1

t (en jours)	91,25	182,50	273,75	365
$E[Z_{occ}(t)]$	6 134 795	12 216 731	18 258 279	24 260 078
$E[Z_{cm}(t)]$	514 909,8	1 870 274,1	3 963 318,0	6 678 630
$E[Z_{cp}(t)]$	881,07	14 394,03	69 746,97	206 285,52
$E[Z_{ic}(t)]$	5 619 883	10 346 457	14 294 961	17 581 449
$E[Z_{ddr}(t)]$	878 813,1	3 171 843,4	6 583 777,6	10 853 665,7

Pour les tableaux 20, 21 et 22, la valeur espérée des cinq garanties est croissante sur l'intervalle de temps considéré, ce qui est logique pour les garanties « occurrence », « claims-made », « claims-paid » et « ddr coverage ». Plus nous couvrons un risque sur un intervalle de temps qui est grand, plus le coût moyen devraient augmenter.

Tableau 21 : Calculs analytiques : espérance de $Z(t)$, cas 2

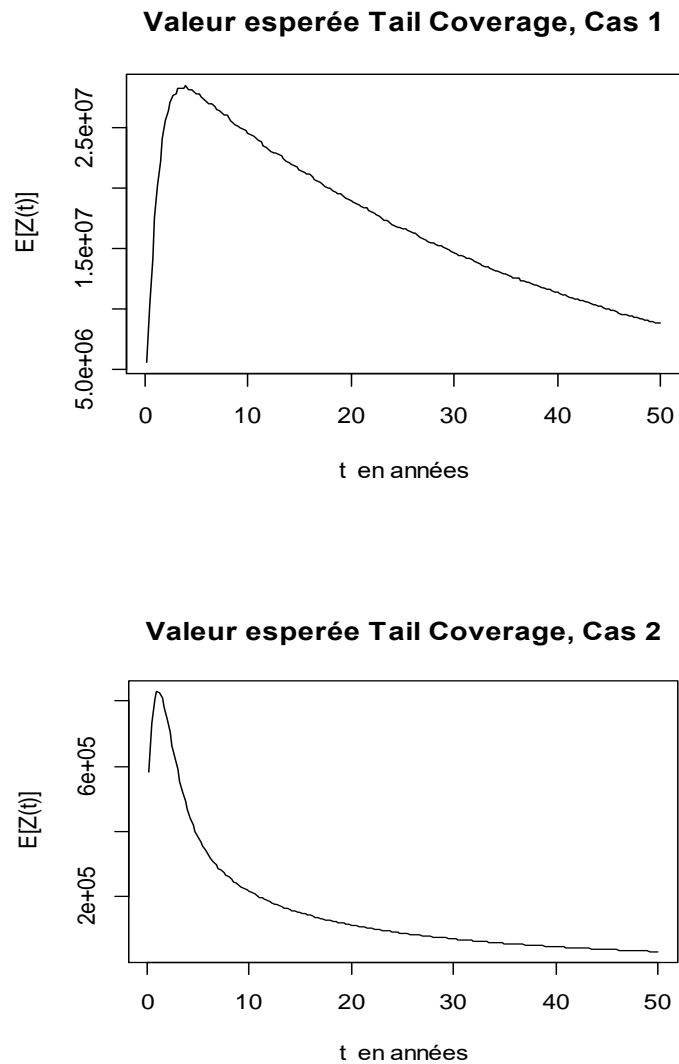
t (en jours)	91,25	182,50	273,75	365
$E[Z_{occ}(t)]$	651 266,9	914 763,1	1 115 640	1 283 893,2
$E[Z_{cm}(t)]$	71 295,33	181 887,88	313 149,05	453 953,20
$E[Z_{cp}(t)]$	175,64	1985,13	7 726,76	19 463,56
$E[Z_{ic}(t)]$	579 971,57	732 875,2	802 491,0	829 940
$E[Z_{ddr}(t)]$	108 850,1	274 082,5	460 256,4	651 037,6

Tableau 22 : Calculs analytiques : espérance de $Z(t)$, cas 3

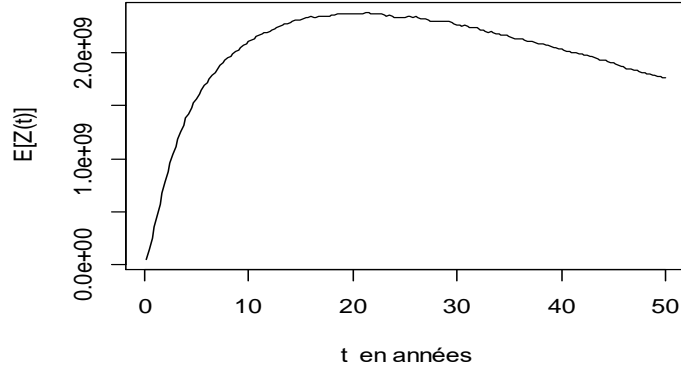
t (en jours)	91,25	182,50	273,75	365
$E[Z_{occ}(t)]$	58 369 322	164 439 627	300 924 660	461 517 816
$E[Z_{cm}(t)]$	4 007 173	20 648 676	53 792 261	104 773 320
$E[Z_{cp}(t)]$	5035,64	118 181,64	709 635,19	2 451 636,99
$E[Z_{ic}(t)]$	54 362 150	143 790 951	247 131 970	356 744 497
$E[Z_{ddr}(t)]$	7 527 277	38 737 371	99 095 322	189 488 804

Dans le cas de la couverture « tail-coverage », le comportement de la valeur espérée n'est pas croissant pour tout t , mais l'est pour $t \in [0, 365]$, car nous avons $\lim_{t \rightarrow \infty} E[Z_{tc}(t)] = 0$. Ainsi, pour le cas « tail-coverage », la valeur espérée est croissante sur un intervalle de temps et décroissante pas la suite comme le suggère les figures 14 à 16. Nous remarquons qu'il semble bel et bien y avoir une convergence vers 0. Néanmoins, cette vitesse de convergence semble être « lente » et dépend du cas considéré (c.-à-d. cas 1, cas 2 ou cas 3).

Figure 14 : Valeur espérée « Tail coverage » en fonction du temps



Valeur esperée Tail Coverage, Cas 3



5.7.3 Calculs deuxième moment du processus de risque

Dans cette section, nous présentons les calculs liés au deuxième moment de notre modèle. Pour effectuer les calculs, nous utilisons les formules du chapitre 4 et nous utilisons les méthodes de Cuhre et de Vegas. Avant de présenter les calculs du deuxième moment, nous faisons une courte analyse du comportement du deuxième moment du processus de comptage. En premier lieu, nous avons les identités suivantes :

- $$E[N_{occ}^2(t)] = \int_0^t H_{occ}(u,t) d\tilde{m}(\Lambda_i(u))$$

$$+ 2 \int_0^t \int_0^{t-v} H_{occ}(u+v,t) H_{occ}(v,t) d\tilde{m}(\Lambda_i(u+v)) d\tilde{m}(\Lambda_i(v)) , i=1,2,3$$
- $$E[N_{cm}^2(t)] = \int_0^t H_{cm}(u,t) d\tilde{m}(\Lambda_i(u))$$

$$+ 2 \int_0^t \int_0^{t-v} H_{cm}(u+v,t) H_{cm}(v,t) d\tilde{m}(\Lambda_i(u+v)) d\tilde{m}(\Lambda_i(v)) , i=1,2,3$$
- $$E[N_{cp}^2(t)] = \int_0^t H_{cp}(u,t) d\tilde{m}(\Lambda_i(u))$$

$$+ 2 \int_0^t \int_0^{t-v} H_{cp}(u+v,t) H_{cp}(v,t) d\tilde{m}(\Lambda_i(u+v)) d\tilde{m}(\Lambda_i(v)) , i=1,2,3$$
- $$E[N_{tc}^2(t)] = \int_0^t H_{tc}(u,t) d\tilde{m}(\Lambda_i(u))$$

$$+ 2 \int_0^t \int_0^{t-v} H_{tc}(u+v,t) H_{tc}(v,t) d\tilde{m}(\Lambda_i(u+v)) d\tilde{m}(\Lambda_i(v)) , i=1,2,3$$
- $$E[N_{ddr}^2(t)] = \int_0^t H_{ddr}(u,t) d\tilde{m}(\Lambda_i(u))$$

$$+ 2 \int_0^t \int_0^{t-v} H_{ddr}(u+v,t) H_{ddr}(v,t) d\tilde{m}(\Lambda_i(u+v)) d\tilde{m}(\Lambda_i(v)) , i=1,2,3 .$$

Ces dernières relations nous permettent d'établir directement que

$$E[N_{occ}^2(t)] \geq E[N_{ddr}^2(t)] \geq E[N_{cm}^2(t)] \geq E[N_{cp}^2(t)],$$

et,

$$E[N_{occ}^2(t)] \geq E[N_{ic}^2(t)].$$

De plus, la différence entre ces expressions et les expressions du deuxième moment (voir théorème 25) de notre processus de risque sont les indemnités payées, les dépenses et les facteurs d'actualisation qui sont essentiellement des « facteurs multiplicatifs dans les intégrales ». Ces distributions sont les mêmes pour les cinq contrats considérés : « occurrence », « claims-made », « claims-paid », « tail-coverage » et « ddr coverage ».

Tableau 23 : Calculs analytiques : deuxième moment de $Z(t)$, cas 1

t (en jours)	91,25	182,50	273,75	365
$E[Z_{occ}^2(t)]$	$3,9442 \times 10^{13}$	$1,5267 \times 10^{14}$	$3,3827 \times 10^{14}$	$5,9483 \times 10^{14}$
$E[Z_{cm}^2(t)]$	$4,2328 \times 10^{11}$	$4,0841 \times 10^{12}$	$1,6882 \times 10^{13}$	$4,6652 \times 10^{13}$
$E[Z_{cp}^2(t)]$	$1,2209 \times 10^8$	$2,6089 \times 10^9$	$1,7772 \times 10^{10}$	$8,3371 \times 10^{10}$
$E[Z_{ic}^2(t)]$	$3,3167 \times 10^{13}$	$1,0962 \times 10^{14}$	$2,0784 \times 10^{14}$	$3,1291 \times 10^{14}$
$E[Z_{ddr}^2(t)]$	$2,9458 \times 10^{12}$	$2,2745 \times 10^{13}$	$7,5696 \times 10^{13}$	$1,7659 \times 10^{14}$

Tableau 24 : Calculs analytiques : deuxième moment de $Z(t)$, cas 2

t (en jours)	91,25	182,50	273,75	365
$E[Z_{occ}^2(t)]$	$6,1342 \times 10^{11}$	$1,0980 \times 10^{12}$	$1,5586 \times 10^{12}$	$2,0050 \times 10^{12}$
$E[Z_{cm}^2(t)]$	$2,7084 \times 10^{10}$	$8,9402 \times 10^{10}$	$1,9408 \times 10^{11}$	$3,4632 \times 10^{11}$
$E[Z_{cp}^2(t)]$	$2,5057 \times 10^7$	$3,4629 \times 10^8$	$1,5373 \times 10^9$	$4,3831 \times 10^9$
$E[Z_{ic}^2(t)]$	$5,0125 \times 10^{11}$	$7,3633 \times 10^{11}$	$8,5351 \times 10^{10}$	$8,9227 \times 10^{11}$
$E[Z_{ddr}^2(t)]$	$6,5051 \times 10^{10}$	$2,1628 \times 10^{11}$	$4,4422 \times 10^{11}$	$7,4021 \times 10^{11}$

Tableau 25 : Calculs analytiques : deuxième moment de $Z(t)$, cas 3

t (en jours)	91,25	182,50	273,75	365
$E[Z_{occ}^2(t)]$	$3,4281 \times 10^{15}$	$2,7112 \times 10^{16}$	$9,0709 \times 10^{16}$	$2,1331 \times 10^{17}$
$E[Z_{cm}^2(t)]$	$1,7422 \times 10^{13}$	$4,3621 \times 10^{14}$	$2,9052 \times 10^{15}$	$1,1071 \times 10^{16}$
$E[Z_{cp}^2(t)]$	$6,9799 \times 10^8$	$3,2965 \times 10^{10}$	$6,2744 \times 10^{11}$	$6,4129 \times 10^{12}$
$E[Z_{ic}^2(t)]$	$2,9625 \times 10^{15}$	$2,0647 \times 10^{16}$	$6,1004 \times 10^{16}$	$1,2689 \times 10^{17}$
$E[Z_{ddr}^2(t)]$	$2,3757 \times 10^{14}$	$3,7817 \times 10^{15}$	$1,8951 \times 10^{16}$	$5,8941 \times 10^{16}$

L'ordre stochastique entre les différents contrats est généré par le processus de comptage. Conséquemment, la relation d'ordre observée pour le deuxième moment du processus de comptage devrait aussi se refléter dans le deuxième moment de notre processus de risque, fait que nous observons dans les tableaux 23, 24 et 25.

De même, le deuxième moment augmente avec le temps, ce qui est logique. Nous remarquons aussi que l'effet de tendance a beaucoup d'impact sur les valeurs du deuxième moment. Cela suggère que de développer des estimateurs pour estimer de façon adéquate l'effet de tendance de notre modèle est important étant donné les répercussions que cet impact a sur les résultats.

De surcroît, nous notons que le contrat « tail-coverage » semble être un contrat qui est plus risqué en comparaison au contrat « occurrence », « claims-made » et « ddr coverage ». En effet, selon les valeurs des deux premiers moments obtenus, le contrat « tail-coverage » semble générer, en moyenne, des pertes plus élevées que le contrat « ddr coverage ». Finalement, cette section démontre que le deuxième moment de notre modèle de risque est calculable.

5.7.4 Calculs de mesures de risque

Dans cette section, nous analysons le comportement de la $TVaR_{0,95}[X]$ pour les cinq garanties considérées dans le présent document. Nous n'avons pas été capables d'inverser numériquement la fonction génératrice des moments (ou la fonction caractéristique) du modèle considéré dans le chapitre 5. Ainsi, dans cette section, la $TVaR_{0,95}[X]$ est évaluée par simulation. De plus, nous comparons les trois cas suivants pour comprendre quel est l'impact de l'effet de tendance sur les mesures de risque : $\Lambda_1(t) = \lambda t = \tilde{t}$, $\Lambda_2(t) = \lambda \sqrt{t} = \tilde{t}$, $\Lambda_3(t) = \lambda t^{3/2} = \tilde{t}$.

Nous remarquons, en analysant les tableaux 26 à 28, que l'impact de l'effet de tendance est élevé sur les mesures de risque. Cela suggère que développer des estimateurs statistiques robustes pour estimer l'effet de tendance de notre modèle présente un aspect de recherche important.

Tableau 26 : Simulations du $TVaR_{0,95}[Z(t)]$, cas 1

t (en jours)	91,25	182,50	273,75	365
$TVaR_{0,95}[Z_{occ}(t)]$	9 730 315,98	17 045 622,5	24 065 071,9	30 860 423,7
$TVaR_{0,95}[Z_{cm}(t)]$	1 676 543,38	3 996 165,9	6 904 886,5	10 398 178,5
$TVaR_{0,95}[Z_{cp}(t)]$	18 855,86	150 962,6	400 114,9	815 926,9
$TVaR_{0,95}[Z_{tc}(t)]$	9 075 943,91	14 784 054,8	19 480 164,2	23 206 885,5
$TVaR_{0,95}[Z_{ddr}(t)]$	6 621 742,06	14 060 505,5	21 242 393,7	28 160 807,6

Tableau 27 : Simulations du $TVaR_{0,95}[Z(t)]$, cas 2

t (en jours)	91,25	182,50	273,75	365
$TVaR_{0,95}[Z_{occ}(t)]$	1 974 861,48	2 431 657,13	2 764 290	3 037 239
$TVaR_{0,95}[Z_{cm}(t)]$	505 833,53	882 731,29	1 231 809,9	1 542 321,0
$TVaR_{0,95}[Z_{cp}(t)]$	3 181,91	39 923,94	111 903,2	198 254,9
$TVaR_{0,95}[Z_{tc}(t)]$	1 827 665,897	2 087 733,39	2 200 601,3	2 252 203,0
$TVaR_{0,95}[Z_{ddr}(t)]$	892 948,739	1 496 053,55	1 953 938	2 309 742,2

Tableau 28 : Simulations du $TVaR_{0,95}[Z(t)]$, cas 3

t (en jours)	91,25	182,50	273,75	365
$TVaR_{0,95}[Z_{occ}(t)]$	68 340 386,52	180 449 003,5	322 055 212	487 387 943
$TVaR_{0,95}[Z_{cm}(t)]$	6 983 704,00	26 870 094,7	63 244 556	117 939 835
$TVaR_{0,95}[Z_{cp}(t)]$	73 414,05	526 817,1	1 729 848	4 287 177
$TVaR_{0,95}[Z_{tc}(t)]$	63 965 707,08	158 746 213,6	266 321 290	379 157 680
$TVaR_{0,95}[Z_{ddr}(t)]$	60 126 858,98	171 499 176,4	313 073 097	478 310 700

De plus, nous nous intéressons au coefficient de chargement par rapport à la valeur espérée pour obtenir une $TVaR_{0,95}[X]$ qui est définie comme suit :

$$m[X] = \frac{TVaR_{0,95}[X] - E[X]}{E[X]} .$$

Cette quantité est importante, car les régulateurs canadiens demandent aux compagnies d'assurance de mettre de côté, approximativement, un montant équivalent à la $TVaR_{0,95}[X]$ pour un risque donné. Ainsi, cette quantité est particulièrement d'intérêt pour un actuaire.

Tableau 29 : Simulations de $m[Z(t)]$, cas 1

t (en jours)	91,25	182,50	273,75	365
$m[Z_{occ}(t)]$	0,58839	0,39858	0,31917	0,27314
$m[Z_{cm}(t)]$	2,25838	1,2384	0,74038	0,55438
$m[Z_{cp}(t)]$	18,9950	9,51837	4,77205	2,95504
$m[Z_{tc}(t)]$	0,61743	0,43360	0,36462	0,3223
$m[Z_{ddr}(t)]$	6,50811	3,41368	2,21193	1,6007

Nous remarquons, pour les tableaux 29 à 31, que le coefficient de chargement est moins élevé pour le cas 3, suivi du cas 1 et du cas 2 pour les cinq garanties considérées. Tel que discuté précédemment, le cas 2 est le cas où le processus de comptage génère le moins de sinistres et est, en valeur absolue, le cas qui est le moins risqué (voir tableaux 26 à 28). Néanmoins, en valeur relative, le cas 2 est le processus le plus risqué (voir tableaux 29 à 31).

Tableau 30 : Simulations de $m[Z(t)]$, cas 2

t (en jours)	91,25	182,50	273,75	365
$m[Z_{occ}(t)]$	2,0288	1,6655	1,48467	1,36879
$m[Z_{cm}(t)]$	6,0846	3,8342	2,9435	2,3937
$m[Z_{cp}(t)]$	18,9960	18,8231	13,6135	9,1823
$m[Z_{tc}(t)]$	2,1478	1,8613	1,7502	1,7209
$m[Z_{ddr}(t)]$	7,2162	4,4584	3,2494	2,5468

Tableau 31 : Simulations de $m[Z(t)]$, cas 3

t (en jours)	91,25	182,50	273,75	365
$m[Z_{occ}(t)]$	0,17025	0,09731	0,0703	0,0560
$m[Z_{cm}(t)]$	0,7363	0,29657	0,1771	0,1229
$m[Z_{cp}(t)]$	13,7406	3,4599	1,4368	0,75061
$m[Z_{tc}(t)]$	0,1763	0,10453	0,0774	0,06357
$m[Z_{ddr}(t)]$	6,9212	3,4011	2,1565	1,5195

Le ratio du « ddr coverage » est élevé. En effet, la moyenne du « ddr coverage » est plus élevée que celle du « claims-made ». Néanmoins, comme le processus « ddr coverage » contient une partie « occurrence », les percentiles élevés du « ddr coverage » ont la possibilité d'être beaucoup plus élevés que ceux du « claims-made ». Le contrat « occurrence » semble être le contrat le moins risqué en valeur relative (voir tableaux 29 à 31), suivi du contrat « tail-coverage », du contrat « claims-made », du contrat « ddr coverage » et du contrat « claims-paid ». En valeur absolue (voir tableaux 26 à 28), le contrat le plus risqué semble être « occurrence », suivi de « tail-coverage », du « ddr coverage », du « claims-made » et du « claims-paid ». Ainsi, les relations d'ordre entre les contrats ne sont pas les mêmes si nous considérons les valeurs absolues ou les valeurs relatives. Finalement, encore une fois, nous remarquons que les effets de tendance ont beaucoup d'impact sur les mesures de risques.

5.8 Discussion des résultats

Dans ce chapitre, nous avons démontré qu'il était possible de calibrer le modèle proposé au chapitre 4 sur la BDRFF. Cela est dû au fait que la classe de modèles proposés au chapitre 4 est générale, souple et a un grand potentiel d'application pratique.

Le problème de calibration du modèle proposé au chapitre 4 sur le BDRFF est un problème complexe. Rappelons que les réclamations proviennent d'une base de données qui contient des réclamations fermées et que nous devons incorporer cette information dans nos estimateurs statistiques, ce qui complexifie de façon importante l'exercice de calibration.

Pour réaliser la tâche de calibration, nous avons décomposé le problème de calibration en plusieurs étapes : calibration de l'inflation déterministe, calibration des distributions des délais ξ_k et ζ_k , calibration de la distribution de $N(t)$, et calibration des distributions de $X_k | \zeta_k$ et de $Y_k | \zeta_k$. Les estimateurs utilisés sont des estimateurs de vraisemblance et de quasi-vraisemblance. Les estimateurs de quasi-vraisemblance ont permis de simplifier l'exercice de calibration présentée dans ce chapitre en permettant une décomposition et diminuant la complexité calculatoire des estimateurs. De plus, la méthode de calibration utilisée dans le présent document est simple à utiliser et semble très bien s'ajuster aux données.

Un autre point important de la calibration est que cette dernière suggère qu'une dépendance positive existe entre les composantes du triplet (X_k, Y_k, ζ_k) , ce qui est logique et semble avoir été observé dans d'autres études (voir Black et coll. (2008)). Les paramètres qui « contrôlent la dépendance » (c.-à-d. a_1 et a_2) sont significatifs d'un point de vue statistique. Ajoutons que l'approche considérée n'est pas basée sur des copules, et est donc plus simple.

La calibration de l'effet de tendance de la distribution de $N(t)$ est un aspect important de la calibration. En pratique, il est peu probable que le processus de comptage représente bien les données si la valeur espérée du nombre de sinistres dans l'intervalle de temps a un comportement linéaire. Il est beaucoup plus probable d'observer des effets de tendance et c'est le cas de la BDRFF. Les primes présentées à la section 5.1 ont un comportement similaire à l'effet de tendance estimé à la section 5.5, ce qui suggère que cet estimé est raisonnable et représente bien les données. Cela suggère aussi que notre méthode de calibration permet d'estimer les effets de tendance dans le comportement de $N(t)$. Aussi, il est important de mentionner, que les modèles de renouvellement avec effet de tendance ont facilité l'exercice de calibration à cause de ces derniers.

À la section 5.7, nous avons démontré que le modèle calibré était calculable. De plus, nous avons démontré que les effets de tendance ont beaucoup d'impact sur les mesures de risques des différents contrats. Les différents contrats considérés dans cette thèse représentent des risques significativement différents selon nos analyses. Nous remarquons aussi que le ratio $m[X]$ est élevé pour cette ligne d'affaire selon le modèle que nous avons calibré. Cela suggère que le risque de cette ligne d'affaire est élevé.

Conclusion

Dans l'introduction, nous avons présenté plusieurs caractéristiques de l'assurance pour fautes des professionnels de la santé. Au chapitre 1, nous avons présenté plusieurs concepts préalables à la compréhension de l'étude effectuée dans le présent document. Au chapitre 2, nous avons étudié le processus PPCT et le processus de Cox composé avec escompte. Nous avons obtenu des expressions récursives pour les moments ainsi que pour la fonction génératrice des moments pour plusieurs cas d'intérêt. Au chapitre 3, nous avons étudié une classe plus générale : la classe PRCT. Cela nous a permis d'« unifier » la théorie des processus de renouvellement, de Poisson non-homogène et de Cox, et de les traiter sous une seule théorie : la classe PRCT avec effet de tendance stochastique. Par la suite, au chapitre 4, nous avons généralisé la classe de modèle PRCT pour attaquer le problème de l'assurance responsabilité civile des professionnels de la santé. Cette généralisation consiste à modifier le modèle du chapitre 5 en ajoutant : le délai pour faire parvenir la réclamation à l'assureur à partir du moment de survenance du « sinistre », le délai pour régler la réclamation et les frais encourus par l'assureur. Ce dernier modèle permet d'incorporer une possible dépendance entre le délai de règlement, les dépenses et les indemnités payées, ce qui semble avoir été observé d'un point de vue empirique. De plus, le modèle présenté au chapitre 4 permet de modéliser cinq couvertures importantes dans le domaine de l'assurance responsabilité civile : « claims-made », « occurrence », « claims-paid », « death, disability and retirement » et « tail coverage ». Finalement, au chapitre 5, nous avons démontré qu'il était possible de calibrer le modèle du chapitre 4 sur une vraie base de données qui est la base de données de réclamations fermées de la Floride. Il est complexe de calibrer un modèle sur une base de données de réclamations fermées. Cette tâche a été possible dans le présent document grâce aux estimateurs de quasi-vraisemblance ainsi qu'au processus de renouvellement avec effet de tendance, car dans les données de la BDRFF, il semble y avoir des effets de tendance dans la fréquence du nombre de sinistres. Au meilleur des connaissances de l'auteur du présent document, l'exercice de calibration présenté au chapitre 5 n'avait jamais été effectué auparavant dans la littérature. Les résultats des simulations suggèrent fortement que le risque lié à l'assurance responsabilité civile pour les professionnels de la santé est élevé. De plus, le risque des différents contrats (c.-à-d. « occurrence », « claims-made », « claims-paid », « tail coverage » et « ddr coverage ») considérés au chapitre 4 diffère de façon significative. En résumé, dans cette thèse, nous avons développé des nouveaux modèles théoriques avancés et nous les avons mis en pratique.

Le modèle proposé au chapitre 4 est aussi applicable à d'autres types d'assurance (p. ex. « Lawyer professional liability ») et peut servir de base pour l'étude de ces derniers. Plusieurs autres extensions des travaux présentés dans le présent document sont possibles pour le modèle qui a été proposé au chapitre 4, notamment : calibrer ce modèle sur d'autres jeux de données (de pays différents ou de professions différentes), identifier une méthode adéquate pour calculer la prime des différentes couvertures considérées dans cette thèse, étudier le risque des contrats de réassurance liées à cette ligne d'affaire, proposer d'autres approches pour modéliser la dépendance entre les indemnités payées, les dépenses ainsi que le temps pris par l'assureur pour payer les réclamations, évaluer un niveau de prime adéquat, évaluer le risque des primes non acquises, évaluer le niveau de capital qui devrait être exigé par les autorités de réglementation ou introduire un modèle qui permet d'introduire des changements de régimes réglementaires (p. ex. « medical malpractice crisis » aux États-Unis).

Bibliographie

- [1] Adékambi, F. (2011). Les sommes de renouvellement escomptées avec taux d'intérêt général. Thèse de doctorat, Université Laval.
- [2] Barlow, R., Proschan, F. (1975). Statistical theory of reliability and life testing: probability models. Holt, Rinehart and Winston, New-York.
- [3] Bates, R. Kezirian, P., Winchm, T. (2004). Claims-paid policy offers risk retention groups a way to assess insurance costs on a real time basis. The Risk Retention Reporter. 18, 1.
- [4] Bernsten, J. Espelid, T. Genz, A. (1991 a). Algorithm 698: DCUHRE-an adaptive multidimensional integration routine for a vector of integrals. ACM Transactions on Mathematical Software 17, 452-456.
- [5] Bernsten, J. Espelid, T. Genz, A. (1991 b). An adaptive algorithm for the approximate calculation of multiple integrals. ACM Transactions on Mathematical Software 17, 4, 437-451.
- [6] Bingham, K. M. (2005). Important considerations when analyzing closed claim databases, American Academy of Actuaries Medical Malpractice Subcommittee Comment letter. Online at http://www.actuary.org/pdf/casualty/medmal_042005.pdf
- [7] Black, B. Silver, C. Hyman, D.A. Sage, W.M. (2008). Defense costs and insurer reserves in medical malpractice and other personal injury cases: Evidence from Texas, 1988-2004, American Law and Economics Review 10, 185-245.
- [8] Bratley, P., Fox, B. L. (1988). Algorithm 659 : implementing Sobol's Quasirandom Sequence Generator. ACM Transactions on Mathematical Software 14, 88-100.
- [9] Cox, D. R. (1955). Some Statistical Methods Connected with Series of Events. Journal of the Royal Statistical Society 17, 2, 129-164.
- [10] Dooren, P, V., Ridder, L. (1976). An adaptive algorithm for numerical integration over an n-dimensional cube. Journal of Computational and Applied Mathematics 2, 3, 207-217.
- [11] Forray, S.F. (2010). Reserving for Extended Reporting Endorsement Coverage, Including the Death, Disability, and Retirement Policy Provision. CAS E-Forum.
- [12] Gamiz, M. L., Lindqvist, B. H. (2016). Nonparametric estimation in trend-renewal processes. Reliability Engineering and System Safety 145, 38-46.
- [13] GAO (General accounting office) (2003). Multiple factors have contributed to increased premium rates. Report to congressional requesters. United States of America.
- [14] Genz, A. C., Malik, A. A. (1980). An adaptive algorithm for numerical integration over an n-dimensional rectangular region. Journal of Computational and Applied Mathematics 6, 295-302.

- [15] Gouriéroux, C., Monfort, A., Trognon, A. (1984). Pseudo maximum likelihood methods : theory. *Econometrica* 52, 3, 681-700.
- [16] Green, W. H. (2012). *Econometric analysis*. Seventh edition. Prentice hall.
- [17] Hahn, T. (2005). CUBA-a library for multidimensional numerical integration, *Computer Physics Communication* 168, 78-95.
- [18] Hamel, E. (2013). Un modèle d'évaluation des coûts agrégés liés aux assurances pour les professionnels de la santé. Thèse de maîtrise.
- [19] Hogg, R. V., McKean, J. W., Craig, A. T. (2005). *Introduction to mathematical statistics*. Sixth edition. Pearson Prentice Hall.
- [20] Joe, S. et Kuo, F. Y. (1998). Remark on algorithm 659 : implementing Sobol's quasi-random sequence generator.
- [21] Lepage, G. P. (1978). A new algorithm for adaptive multidimensional integration. *Journal of Computational Physics* 27, 192-210.
- [22] Léveillé, G., Adékambi, F. (2011). Covariance of discounted renewal sums with a stochastic interest rate, *Scandinavian Actuarial Journal* 2, 138-153.
- [23] Léveillé, G., Adékambi, F. (2012). Joint moments of discounted renewal sums, *Scandinavian Actuarial Journal* 1, 40-55.
- [24] Léveillé, G., Garrido, J. (2001 a). Moments of compound renewal sums with discounted claims. *Insurance mathematics and economics* 28, 217-231.
- [25] Léveillé, G., Garrido, J. (2001 b). Recursive moments of compound renewal sums with discounted claims, *Scandinavian Actuarial Journal* 2, 98-110.
- [26] Léveillé, G., Garrido, J., Wang, Y. F. (2010). Moment generating functions of compound renewal sums with discounted claims. *Scandinavian Actuarial Journal* 3, 165-184.
- [27] Léveillé, G., Hamel, E. (2013). A compound renewal model for medical malpractice insurance. *European Actuarial Journal* 3, 471-490.
- [28] Léveillé, G., Hamel, E., (2017). A compound trend renewal model for medical/professional liabilities. *European Actuarial Journal* 7,2: 435-463.
- [29] Léveillé, G., Hamel, E., (2018 a). Conditional, Non-Homogeneous and Doubly Stochastic Compound Poisson Processes with Stochastic Discounted Claims. *Methodology and Computing in Applied Probability* 20, 1: 353-368.
- [30] Léveillé, G., Hamel, E., (2018 b). Compound trend renewal process with discounted claims : a unified approach. Accepted for publication in *Scandinavian Actuarial Journal*.

[31] Lindqvist, B.H., Elvebakk, G., and Heggland, K. (2003). The trend renewal process for statistical analysis of repairable systems, *Technometrics* 45, 1, 31-44.

[32] Ruwet, C. (2007). *Processus de Poisson*. Thèse de maîtrise.

[33] Shevchenko P (2010). Calculation of aggregate loss distributions. *Journal of Operational Risk* 5(2):3–40.

[34] Staudt, A. (2010). Tail risk, systemic risk and copulas.
<http://www.casact.org/pubs/forum/10forumpt2/Staudt.pdf>

[35] Wang, Y.F., Garrido, J., Léveillé, G., (2018). The distribution of discounted compound PH-Renewal processes. *Methodology and Computing in Applied Probability* 20, 1: 69-96.

Annexe 1

Fonctions $h_1(x) = \alpha_1 \exp(a_1 x)$ et $h_2(x) = \alpha_2 \exp(a_2 x)$

Figure 15 : $\ln X_k / \zeta_k, X_k > 0$ en fonction de ζ_k

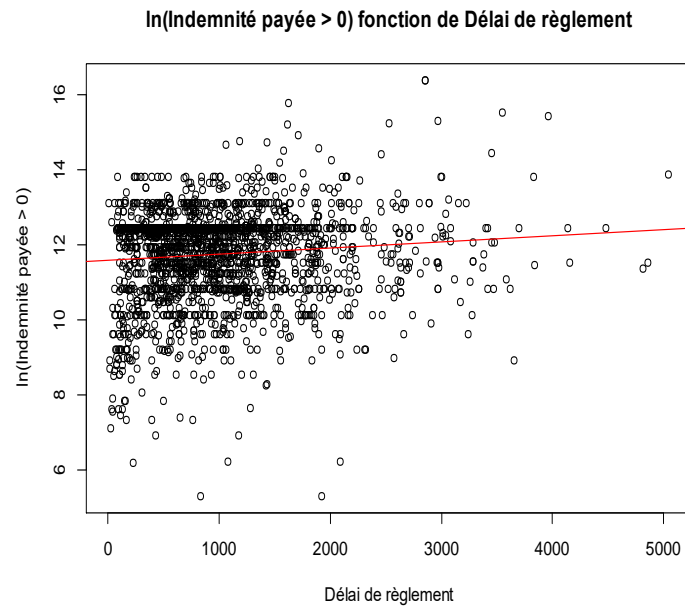
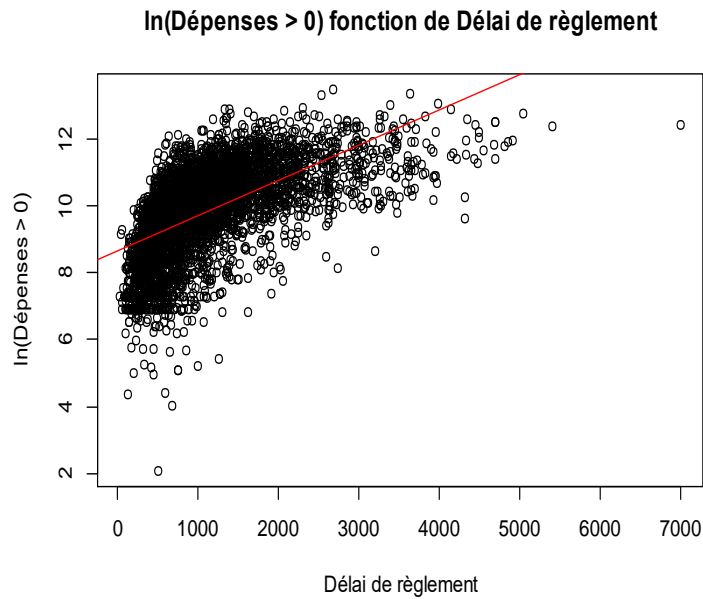


Figure 16 : $\ln Y_k / \zeta_k, Y_k > 0$ en fonction de ζ_k



Fonctions $h_1(x) = \alpha_1 + a_1x$ et $h_2(x) = \alpha_2 + a_2x$

Figure 17 : $X_k / \zeta_k, X_k > 0$ en fonction de ζ_k

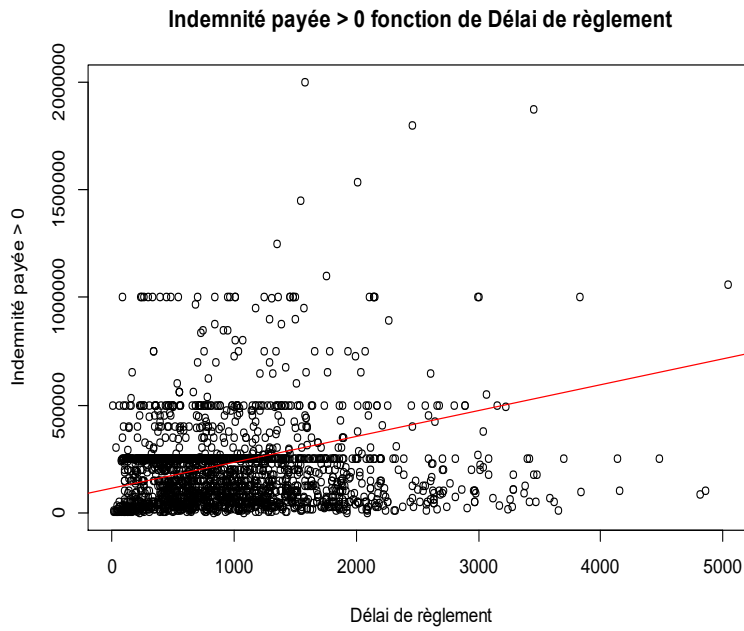


Figure 18 : $Y_k / \zeta_k, Y_k > 0$ en fonction de ζ_k

