



Évaluation et amélioration de l'échantillonnage par lot pour l'assurance de la qualité (LQAS) pour le suivi de programmes d'aide humanitaire

Mémoire

Awa Diop

Maîtrise en statistique - avec mémoire
Maître ès sciences (M. Sc.)

Québec, Canada

© Awa Diop, 2018

Évaluation et amélioration de l'échantillonnage par lot pour l'assurance de la qualité (LQAS) pour le suivi de programmes d'aide humanitaire

Mémoire

Awa Diop

Sous la direction de:

Anne-Sophie Charest, directrice de recherche

Résumé

Introduit par Dodge and Romig [1959] et rendu populaire par Valadez [1991]), le Lot Quality Assurance Sampling (LQAS) est une méthode beaucoup utilisée par les organismes dans le suivi de leurs activités (Robertson and Valadez [2006]). Le LQAS est utilisé dans le contexte comme une approche simple et peu coûteuse pour prendre rapidement des décisions par rapport à l'allocation des ressources. L'approche proposée par Valadez consiste à réaliser le test usuel de la binomiale exacte sur une proportion où on contrôle à la fois les erreurs α et β pour choisir une taille n et un seuil critique c . Pour rendre accessible son utilisation, Valadez et al. [2002] ont développé un manuel des praticiens qui présente une méthodologie d'utilisation du LQAS plus complexe que l'approche proposée par Valadez.

Plusieurs problèmes liés à l'utilisation du LQAS en pratique sont identifiés et nous avons évalué leurs impact sur les erreurs de type I et II. Nous avons proposé d'autres solutions comme le test exact de Fisher, le test exact de Barnard, un test basé sur l'approximation par la loi normale avec et sans transformation $\arcsin(\sqrt{x})$ en contrôlant pour chacun de ces tests α et β . Nous avons aussi soulevé le problème de la comparaison multiple et nous avons proposé une correction, celle de Bonferroni. Au terme de l'étude, nous avons développé une application Shiny sur R (<https://lqasdesign.shinyapps.io/app1/>) pour faciliter la conception et l'analyse selon le LQAS.

Abstract

Introduced by Dodge and Romig [1959] and popularized by Valadez [1991], Lot Quality Assurance Sampling (LQAS) is a method widely used by tremendous organizations to tracking their activities (Robertson and Valadez [2006]). It is a simple and economical approach which allow them to make quick decisions about resource allocation. The approach proposed by Valadez consists in carrying out the usual exact binomial test on a proportion where we control both the α and β errors to choose a n size and a critical c threshold.

In this study, several issues related to the use of LQAS in practice have been identified and we assessed their impact on Type I and Type II errors. Then, we proposed several solutions such as Fisher's exact test, Barnard's exact test, as well as a test based on the normal approximation with and without transformation $\arcsin(\sqrt{x})$ by checking for each of them α and β . We also raised the problem of multiple comparison and proposed a correction using the Bonferroni framework. Finally, we developed a Shiny application on R (<https://lqasdesign.shinyapps.io/app1/>) to facilitate the practical implementation of each these methods.

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	iv
Table des matières	v
Liste des tableaux	viii
Liste des figures	ix
Avant-propos	xii
Introduction	1
1 Le LQAS selon Valadez et Lemeshow	3
1.1 Notation	3
1.2 Approche de Valadez (test binomial exact)	4
1.2.1 Table de décision de Valadez	5
1.2.2 L'approche de Valadez en pratique	7
1.3 Approche de Lemeshow(test du score sur une proportion)	8
1.4 Comparaison des approches de Valadez et Lemeshow	10
1.4.1 Similitude des deux approches	12
1.4.2 Courbes d'efficacité du test	12
1.5 Discussion	14
2 Le LQAS en pratique selon l'adaptation de Valadez	16
2.1 Notation et formulation des hypothèses	16
2.2 Estimation de l'erreur de type I et II, Intervalle de confiance	17
2.3 Impact de la pratique sur l'erreur de type I	18
2.3.1 Estimation de l'erreur de type I pour le test binomial	18
2.3.2 Estimation de l'erreur de type I pour l'approximation normale	21
2.4 Impact de la pratique sur l'erreur de type II	26
2.4.1 Estimation de l'erreur de type II avec le test binomial	26
2.4.2 Estimation de l'erreur de type II avec l'approximation normale	28
2.5 Discussion	30
3 Méthodes alternatives pour la comparaison d'une proportion avec la moyenne de $(k - 1)$ proportions	31
3.1 Comparaison selon le test exact de Fisher	31

3.1.1	Test exact de Fisher	32
3.1.2	Calcul de la taille n	35
3.1.3	Illustrations	37
3.2	Comparaison selon le test exact de Barnard	38
3.2.1	Test exact de Barnard	38
3.2.2	Calcul de la taille n	42
3.2.3	Illustrations	43
3.3	Comparaison selon une approximation par la loi normale	44
3.3.1	Test par approximation normale	44
3.3.2	Calcul de la taille n	48
3.3.3	Illustrations	49
3.4	Comparaison selon une approximation normale avec transformation $\arcsin(\sqrt{x})$	51
3.4.1	Test selon une approximation normale avec la tranformation $\arcsin(\sqrt{x})$	52
3.4.2	Calcul de la taille n	55
3.4.3	Ilustrations	56
3.5	Comparaison des tailles n avec et sans transformation $\arcsin(\sqrt{x})$	57
3.6	Conclusion	59
4	Comparaison multiple et correction de Bonferroni	60
4.1	Correction de Bonferroni	60
4.2	Impact d'une comparaison multiple sur les erreurs de type I et II sans et avec correction de Bonferroni	62
4.3	Exemple illustratif	64
4.3.1	Comparaison multiple suivant le test exact de Fisher	65
4.3.2	Comparaison multiple suivant l'approximation par la loi normale	65
5	Présentation de l'application	67
5.1	Méthodes classiques	67
5.2	Méthodes alternatives	68
5.3	Analyse	69
	Conclusion	71
A	Le LQAS selon Dodge et Romig	73
A.1	Définitions et notation	73
A.2	Risque d'erreur	74
A.3	Coût d'inspection	74
A.4	Problème d'optimisation	75
A.5	Solutions des équations	77
A.6	Discussion	78
B	Distribution de la statistique de test Z_2	79
C	Distribution de la statistique du test exact de Fisher	81
D	Tailles n dans le test exact de fisher pour un effet de taille de 0,2	83
E	Test de Wald à deux proportions	84
E.1	Rappel du test usuel à deux proportions	84

E.2	Calcul de la taille d'échantillon pour le test usuel à 2 proportions	87
F	Codes R	89
F.1	Codes du chapitre 1	89
F.2	Codes du chapitre 2	96
F.3	Codes du chapitre 3	108
F.4	Codes du chapitre 4	120
	Bibliographie	139

Liste des tableaux

1.1	Table de décision proposée par Valadez	5
1.2	Exemple d'utilisation de la table de décision proposée par Valadez	7
1.3	α, β pour une proportion p_0 allant de 0,80 à 0,85 selon un pas de 0,01	8
1.4	Table de décision proposée par Lemeshow	11
1.5	Comparaison des valeurs du couple $(n = 19, c)$ dans l'approche de Valadez et celle de Lemeshow	12
2.1	Table des quantiles de la distribution de Z_2 et Z_5 pour différents percentiles, p variant dans $[0, 2; 0, 9]$ et $n = 100$	26
3.1	Table 2x2 utilisée dans le test de Fisher exact	32
3.2	Table observée 2x2	33
3.3	Passage d'une table observée kx2 à une table 2x2	34
3.4	Passage d'une table au format 5x2 à une table 2x2	35
3.5	Seuils β pour $\alpha = 10\%$ et un effet de taille de 0,3 selon n et p_1 dans le test exact de Fisher	36
3.6	Seuils β pour $\alpha = 10\%$ et un effet de taille de 0,3 selon n et p_1 dans le test exact de Barnard	42
3.7	Tailles n calculées selon une approximation normale sans transformation pour $k = 5$, $\alpha = 5\%, 10\%$, $\beta \in [1\%; 10\%]$ selon un pas de 0,01	50
3.8	Tailles n calculées selon une approximation normale avec transformation $\arcsin(\sqrt{x})$ pour $k = 5$, $\alpha = 5\%, 10\%$	56
4.1	Erreurs de type I et II sans correction de Bonferroni pour α et β	63
4.2	Erreurs de type I et II avec correction de Bonferroni uniquement du seuil α	63
4.3	Erreurs de type I et II avec correction de Bonferroni pour α et β	63
4.4	Série de tables 2x2 déduite de la table 3.4	64
4.5	Résultat d'un classement réalisé avec le test exact de Fisher avec ou sans correction de Bonferroni au seuil $\alpha = 10\%$ et $\frac{\alpha}{5} = 2\%$	65
4.6	Résultat d'un classement réalisé avec l'approximation par la loi normale sans transformation avec ou sans correction de Bonferroni $\alpha = 10\%$ et $\frac{\alpha}{5} = 2\%$	65
4.7	Résultat d'un classement réalisé avec l'approximation par la loi normale sans transformation avec ou sans correction de Bonferroni $\alpha = 10\%$ et $\frac{\alpha}{5} = 2\%$	66
D.1	Tailles n calculées selon le test exact de Fisher pour $\alpha = 0, 1$ et un effet de taille de 0,2	83

Liste des figures

1.1	Tailles n pour $\alpha, \beta \leq 10\%$	6
1.2	Courbes d'efficacité des deux tests pour $(n, c) = (19, 13), (19, 12)$, p et $1 - P_p(W)$ selon que $H_0 : p \geq p_0$ et $H_0 : p \leq p_0$	13
1.3	$H_0 : p \geq 80\%$ pour $n = 19$, $\alpha, \beta \leq 10\%$	14
1.4	$H_0 : p \leq 50\%$ pour $n = 19$, $\alpha, \beta \leq 10\%$	14
2.1	Nombre de tests non réalisés dans l'estimation de l'erreur de type I pour la binomiale exacte. Note : Les axes des ordonnées de la figure 2.1 ne sont pas harmonisés.	20
2.2	Estimation de l'erreur de type I par la binomiale exacte quand $n = 19, 35$, $B = 1000$ pour $\alpha, \beta = 5\%, 10\%$ pour 2 proportions	21
2.3	Estimation de l'erreur de type I pour la binomiale exacte quand $n = 19$, $fig_a, n = 35$, $fig_b, B = 1000$, $\alpha, \beta = 5\%$ et $p \in [0, 35; 0, 95]$ pour 5 proportions	21
2.4	Estimation de l'erreur de type I pour une approximation normale quand $n = 19$, $fig_a, n = 35$, $fig_b, B = 1000$, $\alpha, \beta = 5\%; 10\%$ et $p \in [0, 1; 0, 9]$ pour 2 proportions	23
2.5	Estimation de l'erreur de type I pour une approximation normale quand $n = 19$, $fig_a, n = 35$, $fig_b, B = 1000$, $\alpha, \beta = 5\%; 10\%$ et $p \in [0, 1; 0, 9]$ pour 5 proportions	23
2.6	Coefficient d'asymétrie des distributions de Z_2 et Z_5	24
2.7	Comparaison des distributions Z_2, Z_5 à z_α pour une proportion $p = 0, 2; 0, 5$ et $n = 100$. Note : Les axes des ordonnées de la figure 2.7 ne sont pas harmonisés.	25
2.8	Estimation de l'erreur de type II par la binomiale exacte quand $n = 19$, $fig_a, n = 35$, $fig_b, B = 1000$, $\alpha, \beta = 5\%; 10\%$ et $p_2 \in [0, 1; 0, 7]$ pour 2 proportions	28
2.9	Estimation de l'erreur de type II par la binomiale exacte quand $n = 19$, $fig_a, n = 35$, $fig_b, B = 1000$, $\alpha, \beta = 5\%; 10\%$ et $\bar{p} \in [0, 1; 0, 7]$ pour 5 proportions	28
2.10	Estimation de l'erreur de type II pour une approximation par la loi normale quand $n = 19$, $fig_a, n = 35$, $fig_b, B = 1000$, $\alpha, \beta = 5\%; 10\%$ et $p_2 \in [0, 1; 0, 7]$ pour 2 proportions	29
2.11	Estimation de l'erreur de type II par approximation d'une binomiale par une loi normale quand $n = 19$, $fig_a, n = 35$, $fig_b, B = 1000$, $\alpha, \beta = 5\%; 10\%$ et $\bar{p} \in [0, 1; 0, 7]$ pour 5 proportions	30
3.1	Estimation de l'erreur de type I avec $\alpha, \beta \leq 10\%$ $k = 5$, $n = 23$ et p variant dans $[0, 1; 0, 9]$	37
3.2	Estimation de l'erreur de type II avec $\alpha, \beta \leq 10\%$, $k = 5, n = 23$ et p variant dans $[0, 1; 0, 7]$	37
3.3	P-valeur du test exact de Barnard	41
3.4	Estimation de l'erreur de type I avec $\alpha, \beta \leq 10\%$, $k = 5$, $n = 26$ et p variant dans $[0, 1; 0, 9]$	43

3.5	Estimation de l'erreur de type II avec $\alpha, \beta \leq 10\%$, $k = 5, n = 26$ et p variant dans $[0, 1; 0, 7]$	43
3.6	Estimation de l'erreur de type I, $\alpha, \beta = 10\%$ pour $k = 5$, p variant dans $[0, 2; 0, 65]$	51
3.7	Estimation de l'erreur de type II, $\alpha, \beta = 10\%$ pour $k = 5$, p_1 variant dans $[0, 2; 0, 65]$	51
3.8	Estimation de l'erreur de type I avec transformation, $\alpha, \beta = 10\%$ pour $k = 5$, p variant dans $[0, 2; 0, 65]$	57
3.9	Estimation de l'erreur de type II avec transformation, $\alpha, \beta = 10\%$ pour $k = 5$, p_1 variant dans $[0, 2; 0, 65]$	57
3.10	Comparaison des tailles n dans le cas d'une proportion	58
3.11	Comparaison des tailles n dans le cas de deux proportions	59
3.12	Comparaison des tailles n dans le cas de cinq proportions	59
5.1	Fenêtre de conception selon les méthodes méthodes classiques I	68
5.2	Fenêtre de conception selon les méthodes méthodes classiques II	68
5.3	Fenêtre de conception selon les méthodes méthodes alternatives I	69
5.4	Fenêtre de conception selon les méthodes méthodes alternatives II	69
5.5	Fenêtre d'analyse I	70
5.6	Fenêtre d'analyse II	70
A.1	Figures proposées par Dodge et Romig pour trouver le couple (n, c)	78

*Tout ce que je sais, c'est que je ne
sais rien.*

Socrate

Avant-propos

C'est en Février 2014 que j'ai découvert la méthode LQAS dans le cadre d'une formation d'une durée de deux semaines destinée aux praticiens. Je venais alors de commencer à travailler pour Vision Mondiale Sénégal, un organisme d'aide humanitaire qui a pour cible les enfants. J'étais alors engagée comme responsable de suivi et évaluation. La formation se déroulait au Mali à 550 km de la capitale malienne, à San. On était en plein milieu rural. Pendant deux semaines, on nous a vendu les mérites de l'approche LQAS pour économiser les ressources nécessaires au suivi des projets de développement. Le LQAS était présenté comme la méthode qui allait aider les gestionnaires de projet à prendre de meilleures décisions. À raison, les gains étaient importants. On a pu constater dans la mise en oeuvre des économies considérables. Toutefois la méthodologie faisait réfléchir. Il y avait beaucoup de non dits. La lecture des articles publiés à ce sujet n'était pas suffisant pour comprendre l'approche en profondeur.

Avec la reprise de mes études à l'Université Laval en automne 2016, j'ai eu la belle opportunité de tomber sur une directrice de recherche ouverte d'esprit et qui a accepté de s'engager dans ce projet avec l'espoir que ce modeste travail pourra améliorer les pratiques. C'est de là que tout a commencé. Mes chaleureux remerciements vont donc à Anne-Sophie Charest. J'ai beaucoup apprécié notre collaboration. Elle s'est beaucoup impliquée dans ce travail avec dynamisme et le tout dans la bonne humeur. J'apprécie particulièrement qu'elle ait accepté de m'encadrer sur un sujet hors de ses champs de recherches et de m'avoir laissé beaucoup de liberté sur ce projet. Elle n'a pas manqué de me motiver à réaliser des activités autres que la recherche et à découvrir la beauté du Québec. J'apprécie aussi mon passage à l'Université Laval. C'est avec un grand plaisir que j'ai pu découvrir une autre manière d'étudier où l'interaction avec les professeurs est rendue facile. Cette accessibilité a beaucoup facilité la reprise de mes études. Je suis contente d'avoir pu travailler au sein du département de mathématiques et de statistique. Un travail qui contribue au développement de nos connaissances théoriques et pratiques en statistique. Je suis reconnaissante d'avoir eu la chance d'être auxiliaire de recherche au Service de Consultation Statistique (SCS) ainsi qu'auxiliaire d'enseignement au Centre de Dépannage et d'Apprentissage en mathématiques et statistique (CDA).

Je suis heureuse d'avoir trouvé des amis qui n'ont pas manqué de me soutenir dans mes travaux de recherche et de me montrer le Québec.

Introduction

Le Lot Quality Assurance Sampling (LQAS) est une méthode issue du contrôle de la qualité introduite avec les travaux de Dodge and Romig [1959]. On peut définir le contrôle de la qualité comme un processus consistant à s'assurer que les biens et services produits par les industries soient aptes à l'utilisation par les consommateurs (Montgomery [2009]). Durant ce processus, on s'assure que la production correspond aux exigences des clients. Dodge and Romig [1959] présentent le LQAS comme un plan d'échantillonnage qui consiste à tirer aléatoirement d'un lot de N éléments, un petit échantillon de taille n et à inspecter chaque élément. Si le nombre d'éléments défectueux ne dépasse pas un seuil c , l'ensemble du lot est accepté. Sinon, on teste tous les N éléments du lot pour décider si on l'accepte. Ce procédé permet non seulement de réduire les coûts d'inspection mais aussi de réduire le temps alloué à cette tâche. Le producteur peut s'assurer suivant un risque fixé à l'avance que le lot de produits livré aux consommateurs ne contient pas trop d'éléments défectueux. Leur objectif consiste ainsi à trouver l'équilibre entre les coûts d'inspection et la qualité du produit fournit au consommateur. L'idée est de trouver la paire de valeurs (n, c) qui minimise les coûts de contrôle de la qualité du lot tout en maintenant un certain niveau de risque associé au consommateur (voir annexe A pour les dérivations).

Ces travaux ont été à l'origine développés pour les besoins du secteur de la télécommunication spécifiquement pour Bell Telephone System, Dodge et Romig ayant eux-mêmes travaillés pour Bell. En effet, la compagnie Bell avait un groupe de chercheurs dédié au développement de techniques permettant d'améliorer l'inspection de la production. En d'autres termes leur travail consistait à développer des méthodes pour améliorer le contrôle de la qualité. Leurs travaux ont été influencés par celui qui est considéré comme le père du contrôle de la qualité, W.A. Shewhart qui travaillait lui-même pour Bell Telephone System.

Le LQAS connaît un grand succès dans le contrôle de la qualité au sein de l'industrie avant d'être adapté dans les années 1980 pour les besoins des programmes de santé (Robertson and Valadez [2006]). L'adaptation du LQAS dans le domaine de la santé est clairement présentée par Lemeshow and Stroh [1989] avant de gagner en popularité avec les travaux de Valadez [1991]). Valadez a particulièrement milité pour l'utilisation du LQAS dans le domaine de la santé (voir Valadez [1991]). Le LQAS est présenté dans ce contexte comme une méthode à faible coût et facile à mettre oeuvre permettant de classer les populations bénéficiaires d'une intervention en prioritaire ou non prioritaire. Valadez propose un

procédé complet qui part du plan d'échantillonnage jusqu'à la règle de décision pour classer les populations bénéficiaires. Le LQAS permet ainsi de prendre une décision de manière simple et rapide sur la distribution des ressources entre les populations bénéficiaires.

Le LQAS est de plus en plus utilisé dans le secteur de la santé, comme en témoigne une étude de Robertson and Valadez [2006]. On y identifie 805 enquêtes LQAS menées entre 1984 et 2004 par différentes équipes de l'Organisation Mondiale de la Santé, de la Banque mondiale, de gouvernements, d'organisations non gouvernementales ainsi que de chercheurs individuels. Ces enquêtes concernent notamment les facteurs de risques du VIH/SIDA/Infection sexuellement transmissible, la couverture vaccinale, la santé de la femme, la croissance et la nutrition et le contrôle de la diarrhée. En particulier, le LQAS est surtout utilisé dans le suivi afin de déterminer si oui ou non, les programmes/projets sont en train d'atteindre leurs objectifs de performance. Par exemple, une enquête LQAS organisée par l'Organisation des Nations unies pour l'alimentation et l'agriculture (ONUAA) en Somalie (voir Oguta et al. [2008]) a permis de mesurer le succès de leur programme concernant la proportion d'enfants de 0-5 ans en situation d'insuffisance pondérale, la proportion de ménages ayant accès à une source d'eau potable et la proportion de ménages ayant accès à des latrines. Pour d'autres exemples, voir J. et al. [2001], Alberti et al. [2008], et Mushtaq et al. [2010].

Dibaba et al. [2014] pensent que le LQAS donne des résultats tout aussi fiables que ceux obtenus avec une taille d'échantillon beaucoup plus grande avec une autre méthode d'échantillonnage. Différentes adaptations du LQAS ont également été proposées et plus récemment par Casey [2010] avec une approche bayésienne. Cependant, le LQAS tel que proposé par Valadez [1991] a soulevé de nombreuses discussions autour de sa validité scientifique. Rhoda et al. [2010] critiquent la méthode et appellent les utilisateurs à la prudence. Ils estiment que l'adaptation du LQAS proposée par Valadez [1991] met en péril les populations vulnérables en conduisant à prendre de mauvaises décisions.

Cet enthousiasme autour du LQAS ainsi que les différentes critiques formulées contre la méthode nous pousse à nous poser des questions sur la validité statistique du LQAS pour le suivi des programmes ainsi que la différence entre les adaptations actuelles du LQAS. Nous allons porter un intérêt particulier au manuel d'utilisation du LQAS proposé par Valadez et al. [2002] et à l'approche proposée par Lemeshow and Stroh [1989]. Nous allons répondre à ces questions en articulant le présent document autour de cinq chapitres. Le premier chapitre permet de revenir sur les origines du LQAS. Nous allons présenter au chapitre 1 l'évolution du LQAS suite aux travaux de Dodge et Romig. Le chapitre 2 fait état d'un problème que pose la procédure suggérée dans le manuel d'utilisation du LQAS. Nous allons proposer au chapitre 3 des méthodes alternatives pour réaliser adéquatement le test réalisé dans le manuel des praticiens. Au chapitre 4 nous allons aborder le problème des comparaisons multiples et proposer une correction, celle de Bonferroni. Pour finir, nous allons présenter au chapitre 5 l'application Shiny développée pour rendre accessible la conception et l'analyse basées sur le LQAS.

Chapitre 1

Le LQAS selon Valadez et Lemeshow

Dodge et Romig déterminaient n et c en minimisant une fonction de coût tout en contrôlant le risque du consommateur. Tenir compte des coûts est pertinent dans le contexte de Dodge et Romig puisque si un lot est refusé, tous les $N - n$ éléments restants sont inspectés pour trier les bons éléments des mauvais. En d'autres termes, si on refuse fréquemment des lots, les dépenses d'inspection du producteur vont être plus élevées.

Dans le cadre du suivi des programmes, on n'appliquera pas en général le même principe. En effet, pour un programme de vaccination, le rejet de la réussite de l'intervention impliquerait de vérifier un à un tous les enfants de la région si oui ou non ils sont vaccinés, ce qui ne peut se faire en pratique. L'adaptation du LQAS conduit à contrôler deux risques plutôt qu'un risque et des coûts.

L'adaptation la plus populaire du LQAS est proposée par Valadez [1991]. Cette approche se base sur un test binomial exact, une autre approche basée sur une approximation de la loi binomiale par la loi normale est proposée par Lemeshow and Stroh [1989]. Nous allons présenter et comparer les deux approches.

1.1 Notation

La notation définie ici garde des similitudes avec la notation définie pour présenter les travaux de Dodge et Romig. On suppose une population de N enfants composée de M enfants non vaccinés et $(N - M)$ enfants vaccinés.

On tire de cette population par échantillonnage aléatoire simple avec remise un échantillon de n enfants. Soit X_i une variable indicatrice qui vaut 1 si le i ème enfant de l'échantillon est vacciné et qui vaut 0 si le i ème enfant est non vacciné avec $i = 1, \dots, n$. Les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont supposées indépendantes avec l'hypothèse que $n \ll N$, ce qui permet d'approximer la loi hypergéométrique par la loi binomiale et de réaliser des tirages indépendants. Soit K le nombre d'enfants vaccinés de l'échantillon, $K = \sum_{i=1}^n X_i$ correspond à la statistique de test.

On s'intéresse dans le test de Valadez à l'hypothèse nulle H_0 que la population de bénéficiaires soit non prioritaire en terme d'intervention et à l'hypothèse alternative que la population de bénéficiaires soit prioritaire. On s'intéresse dans le test de Lemeshow à l'hypothèse nulle H_0 que la population de bénéficiaires soit prioritaire en terme d'intervention et à l'hypothèse alternative H_1 que la population de bénéficiaires soit non prioritaire en terme d'intervention. On note par α l'erreur de type I qui consiste à rejeter l'hypothèse nulle H_0 lorsque H_0 est vrai et β l'erreur de type II qui consiste à ne pas rejeter H_0 quand H_0 est faux. L'écriture des différentes hypothèses sera clarifiée dans les prochaines sections.

On définit deux risques soit celui de la population et celui du gestionnaire. Le risque de la population est la probabilité de déclarer une population non prioritaire alors qu'elle est prioritaire et le risque du gestionnaire est la probabilité de déclarer une population prioritaire alors qu'elle est non prioritaire. Chacun des risques peut correspondre à α ou β selon les hypothèses considérées. Notons par p la proportion inconnue de succès dans la population, p_0 une constante sous H_0 et p_1 une constante sous l'hypothèse alternative H_1 . Les deux constantes p_0 et p_1 seront notées par la suite respectivement p_{inf} et p_{sup} .

1.2 Approche de Valadez (test binomial exact)

Le test binomial exact permet un calcul exact de la p-valeur. Pour toute combinaison (n, p) , dans le test binomial exact, l'erreur de type I n'excède pas le niveau α du test (Krishnamoorthy [2016]). Valadez [1991] expose l'application du LQAS dans le domaine de la santé, en particulier pour un programme de vaccination en utilisant le test binomial exact. Nous allons présenter son approche (voir Biedron et al. [2010]).

Dans son approche, Valadez cherche à contrôler le risque de la population et le risque du gestionnaire. Il détermine le couple (n, c) tel que les valeurs de ces risques soient inférieures ou égales à des valeurs choisies. La classification qu'il réalise est équivalente à faire un test à une proportion. Les hypothèses du test peuvent s'écrire comme suit :

$$H_0 : p \geq p_0 \text{ vs } H_1 : p < p_0$$

La région critique du test s'écrit comme suit :

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^n X_i < c \right\} \quad (1.1)$$

On rejette $H_0 : p \geq p_0$ si l'on trouve dans l'échantillon de taille n moins de c enfants vaccinés. Le risque du gestionnaire correspond ici à $\alpha = P(K < c | p = p_0)$. Sous $H_1 : p < p_0$, on calcule le risque de la population pour une valeur de $p = p_1$ avec $p_1 < p_0$, $\beta = P(K \geq c | p = p_0)$. Les deux équations peuvent s'écrire sous forme de système comme suit :

$$\begin{cases} \alpha = \sum_{k=0}^{c-1} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k} \\ \beta = 1 - \sum_{k=0}^{c-1} \binom{n}{k} p_1^k (1-p_1)^{n-k} \end{cases} \quad (1.2)$$

La résolution du système (1.2) permet de trouver la taille n et le seuil critique du test c .

1.2.1 Table de décision de Valadez

Pour déterminer le couple (n, c) selon des valeurs de α et β choisies, Valadez procède par énumération. On cherche le couple (n, c) qui satisfait la contrainte $\alpha + \beta \leq 20\%$ avec $\alpha \leq 10\%$ et $\beta \leq 10\%$. Les valeurs de α et β permettent de déterminer les valeurs du couple (n, c) par énumération. Ainsi le couple (n, c) est choisi pour des valeurs de α et β respectivement inférieures à 10%. Autrement dit, on cherche n et c pour une erreur de type I inférieure ou égale à 10% et pour une puissance supérieure ou égale à 90%.

La table 1.1 est constituée en ligne par les tailles d'échantillon allant de 12 à 30 et en colonne par les différentes valeurs possibles de la proportion p_0 multiple de 5 ou 10. À l'intérieur de la table, on retrouve les différentes valeurs du seuil critique c . Les cellules sans couleur de la table correspondent

TABLE I
Optimal LQAS Decision Rules for Sample Sizes of 12–30
and Coverage Benchmarks or Average Coverage of 20–95%

Sample Size	Annual Coverage Benchmarks (for Monitoring and Evaluation) or Average Coverage (Baselines, Monitoring, and Evaluation)																	
	10%	15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%	50%	55%	60%	65%	70%	75%	80%	85%	90%	95%
12	na	na	1	1	2	2	3	4	5	5	6	7	7	8	8	9	10	11
13	na	na	1	1	2	3	3	4	5	6	6	7	8	8	9	10	11	11
14	na	na	1	1	2	3	4	4	5	6	7	8	8	9	10	11	11	12
15	na	na	1	2	2	3	4	5	6	6	7	8	9	10	10	11	12	13
16	na	na	1	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10	11	12	13	14
17	na	na	1	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
18	na	na	1	2	2	3	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	14	16
19	na	na	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
20	na	na	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	16	17
21	na	na	1	2	3	4	5	6	8	9	10	11	12	13	14	16	17	18
22	na	na	1	2	3	4	5	7	8	9	10	12	13	14	15	16	18	19
23	na	na	1	2	3	4	6	7	8	10	11	12	13	14	16	17	18	20
24	na	na	1	2	3	4	6	7	9	10	11	13	14	15	16	18	19	21
25	na	1	2	2	4	5	6	8	9	10	12	13	14	16	17	18	20	21
26	na	1	2	3	4	5	6	8	9	11	12	14	15	16	18	19	21	22
27	na	1	2	3	4	5	7	8	10	11	13	14	15	17	18	20	21	23
28	na	1	2	3	4	5	7	8	10	12	13	15	16	18	19	21	22	24
29	na	1	2	3	4	5	7	9	10	12	13	15	17	18	20	21	23	25
30	na	1	2	3	4	5	7	9	11	12	14	16	17	19	20	22	24	26

na: not applicable, meaning LQAS cannot be used in this assessment because the coverage is either too low or too high to assess an SA.
Notes: α and β errors < 10% for all decision rules except where noted. Lightly shaded cells indicate where α or β errors are $\geq 10\%$.
Darker cells indicate where α or β errors are $\leq 15\%$.

TABLE 1.1 – Table de décision proposée par Valadez

Source: Valadez and Devkota [2002]

à des valeurs de c pour lesquelles les erreurs α, β sont inférieures à 10% et les couleurs gris clair et gris foncé correspondent respectivement à des valeurs de $\alpha, \beta \geq 10\%$ et $\alpha, \beta \leq 15\%$. Les cellules

grisées ne sont donc pas recommandées pour le choix de (n, c) . Les valeurs *NA* correspondent à des valeurs de p_0 ne permettant pas de définir une valeur critique. La proportion permettant de calculer la puissance est déterminée en posant $p_1 = p_{inf} = p_0 - 0,3$ avec $p_0 = p_{sup}$. La table est construite en conservant un écart de 30% entre la proportion à laquelle on évalue l'erreur de type I, p_0 et la proportion à laquelle on évalue la puissance, p_1 . On peut noter que Valadez ne précise pas l'écart utilisé pour déterminer les règles de décisions avec $p_{sup} \leq 0,3$. La particularité dans l'utilisation de la table 1.1 est qu'on doit *a priori* choisir une taille d'échantillon n . Toutefois, dans la table, la taille $n = 19$ est le plus petit échantillon pour des erreurs $\alpha, \beta \leq 10\%$ pour tout p , raison pour laquelle Valadez et al. [2002] recommande de choisir $n = 19$. La figure 1.1 présente pour différentes tailles n et pour des proportions p_0 allant de 0,35 à 0,95 selon un pas de 0,05, les erreurs α et β qu'on peut obtenir. On remarque qu'à partir de $n = 19$, des erreurs α et β inférieures à 10% sauf pour les valeurs de $n = 20$ et $n = 22$. On peut remarquer dans la table 1.1 que pour certaines valeurs de p_0 les erreurs α et β sont supérieures à 10% lorsque $n = 20$ et $n = 22$. Le seuil critique c est ensuite déterminé à la

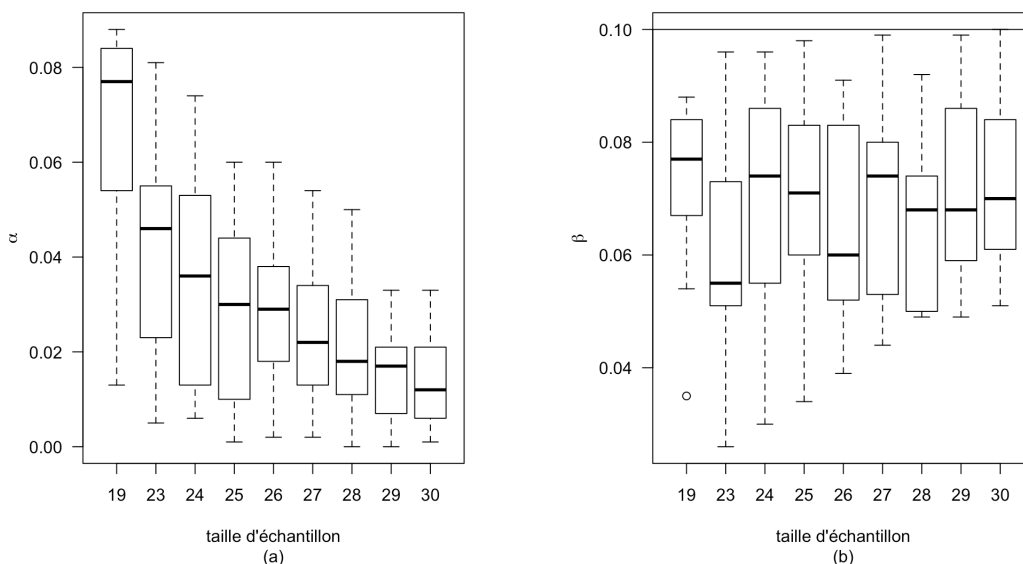


FIGURE 1.1 – Tailles n pour $\alpha, \beta \leq 10\%$

croisée de n et p_0 dans la table 1.1. Par exemple, pour $n = 19$ et $p_0 = 80\%$, la valeur critique $c = 13$. On rejette l'hypothèse nulle H_0 , lorsqu'on trouve moins de 13 succès. La population d'étude est alors déclarée prioritaire (voir Biedron et al. [2010] pour plus de détails).

On peut reproduire d'autres tables pour différentes valeurs de α et β . On peut vouloir une table avec des valeurs de $\alpha, \beta \leq 5\%$ ou encore pour $\alpha \leq 5\%$ et $\beta \leq 10\%$. On peut obtenir les tables souhaitées par énumération. On peut montrer que sous la contrainte $\alpha \leq 5\%$ et $\beta \leq 10\%$, la taille minimale respectant cette condition est $n = 28$ et pour $\alpha \leq 5\%$ et $\beta \leq 5\%$, la taille minimale est $n = 35$.

1.2.2 L'approche de Valadez en pratique

L'utilisation de la table 1.1 nécessite de connaître à l'avance la valeur de p_0 . En revanche dans la pratique, on ne choisit pas p_0 mais on le calcule plutôt à partir des données observées.

Afin d'illustrer nos propos, on présente dans la table 1.2, un exemple fictif de résultats d'une enquête réalisée en utilisant le LQAS. Cette enquête concerne les enfants de 0 à 5 ans. Suivant les recommandations de Valadez, un échantillon de 19 enfants a été tiré dans chacune des 5 régions d'intérêts, pour un total de 95 enfants. La table montre le nombre d'enfants vaccinés parmi les enfants de l'échantillon dans chaque région. Après l'enquête, on trouve au total 42 enfants vaccinés sur 95 soit un pourcentage de 44,21%. En se basant sur la procédure proposée dans le manuel, on doit arrondir ce pourcentage à une valeur multiple de 5 soit dans cet exemple 45%. Ensuite, on cherche le seuil critique correspondant à ce pourcentage et pour une taille d'échantillon $n = 19$ dans la table proposée par Valadez. La lecture de la table 1.1 permet de trouver comme seuil critique la valeur 6. Pour prendre une décision, on compare le nombre d'enfants vaccinés (nombre de succès) de chaque région au seuil critique trouvé. On décide que la région 4 est prioritaire et a besoin de plus de ressources. Dans d'autres situations, on peut se retrouver avec aucune ou plus d'une région prioritaire. En se référant au manuel, la décision est prise tout en conservant des erreurs α et β inférieures à 10%.

Régions	Taille n	# vaccinés	Seuil critique	Décision
Région 1	19	11	>6	Non prioritaire
Région 2	19	7	>6	Non prioritaire
Région 3	19	13	>6	Non prioritaire
Région 4	19	2	<6	Prioritaire
Région 5	19	9	>6	Non prioritaire
Total	95	42		

TABLE 1.2 – Exemple d'utilisation de la table de décision proposée par Valadez

L'objectif du test proposé dans le manuel est de classer les différentes populations bénéficiaires selon le statut prioritaire ou non afin d'indiquer au gestionnaire dans quelle(s) région(s) mettre plus de ressources. Le test qu'on vient de décrire ressemble à un test à deux proportions puisqu'on compare la proportion estimée de chaque région avec la moyenne estimée des proportions. En effet, au lieu de choisir à l'avance p_0 qui est supposée être de valeur fixe, p_0 est estimée à partir des données observées et correspond à la proportion moyenne de succès de toutes les populations. La valeur de p_0 varie ainsi selon les données observées. Cette valeur estimée de p_0 permet ensuite de choisir un seuil critique c . Un seuil qui permet de classer les différentes populations d'intérêt.

En pratique, les programmes doivent fixer les objectifs qu'ils souhaitent atteindre pour chaque intervention mais il arrive fréquemment que cela ne soit pas le cas. S'ils ont un objectif de performance, ils font deux classements des populations bénéficiaires : le premier selon la proportion p_0 estimée et le second classement selon leur objectif de performance. Ils se basent ensuite sur les deux classements pour prendre la décision d'attribuer oui ou non des ressources additionnelles à la population de

beneficiaires.

Il ne s'agit pas seulement d'un problème de choix de p_0 . On compare une population relativement aux autres populations et pour ce faire, dans le manuel il est proposé de choisir un seuil critique à partir de la moyenne des proportions estimées. Cette manière de choisir ce seuil induit une corrélation entre la règle de décision et le nombre de succès de chaque échantillon. Pour évaluer ce procédé, nous allons tenter de comprendre en théorie et par simulation les conséquences d'une telle pratique sur les erreurs de type I et II.

Remarque

Lorsqu'on calcule p_0 à partir des données et qu'on trouve des valeurs à décimales, pour utiliser la table, Valadez propose d'arrondir au chiffre supérieur multiple de 5. Cette suggestion introduit un problème supplémentaire car le choix de comment arrondir ne peut être arbitraire. En effet, le fait d'arrondir au chiffre inférieur ou supérieur donne différentes valeurs du seuil critique.

La table 1.3 présente pour $p_0 = 0,8$ et $p_1 = 0,5$, les différentes erreurs α et β qu'on peut obtenir selon l'arrondi. Par exemple, pour p_0 allant de 0,8 à 0,85 selon un pas de 0,01, lorsqu'on arrondit au chiffre inférieur on a des α plus petits que le seuil choisi mais des β plus grands que le seuil choisi et lorsqu'on arrondit au chiffre supérieur on obtient le contraire soit des α plus grands et des β plus petits que le seuil choisi. Le choix de l'arrondi influence différemment les valeurs de α et β (voir table 1.3).

		$c = 13$		$c = 14$	
p_0	p_1	α	β	α	β
0,80	0,50	0,068	0,084	0,163	0,032
0,81	0,51	0,053	0,098	0,136	0,039
0,82	0,52	0,041	0,114	0,111	0,046
0,83	0,53	0,031	0,132	0,089	0,055
0,84	0,54	0,023	0,151	0,070	0,066
0,85	0,55	0,016	0,173	0,054	0,078

TABLE 1.3 – α, β pour une proportion p_0 allant de 0,80 à 0,85 selon un pas de 0,01

1.3 Approche de Lemeshow(test du score sur une proportion)

Nous présentons ici un autre test proposé par Lemeshow and Stroh [1989]. Le test proposé par Lemeshow est le test classique du score basé sur une approximation par la loi normale. Le test est utilisé dans les travaux de Lemeshow and Stroh [1989] et Lemeshow et al. [1990] pour présenter le LQAS dans le contexte d'un programme de vaccination. Ces travaux sont repris dans l'article de Rhoda et al. [2010] qui présente l'approche de Lemeshow comme étant meilleure que celle de Valadez. Les auteurs exposent de même le LQAS en prenant un exemple sur la vaccination et en faisant référence aux travaux de Dodge et Romig. Lemeshow cherche aussi à déterminer le couple (n, c) tout en contrôlant les deux risques d'erreurs, celui de la population et celui du gestionnaire. Pour ce faire, Lemeshow utilise un

test du score à une proportion plutôt qu'un test exact. Les hypothèses du test se présentent comme suit :

$$H_0 : p \leq p_0 \text{ vs } H_1 : p > p_0$$

Soit W la région de rejet du test, on a :

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^n X_i > c \right\} \quad (1.3)$$

On rejette l'hypothèse nulle si l'on trouve plus de c enfants vaccinés dans l'échantillon de taille n . Le risque de la population correspond ici à l'erreur de type I, $\alpha = P(K > c | p = p_0)$ et le risque de gestionnaire correspond ici à l'erreur de type II, $\beta = P(K \leq c | p = p_1)$. Selon Rhoda et al. [2010], la manière d'écrire α et β rend l'approche de Valadez complètement différente de celle de Lemeshow mais nous allons voir plus tard que les deux approches sont équivalentes.

On peut retrouver les expressions de (n, c) en utilisant l'approximation de la binomiale par la loi normale. On a sous H_0 , $K = X_1 + \dots + X_n$, une somme de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p_0 . Sous H_0 , $K \sim \mathcal{B}(n, p_0)$, supposons que sous H_1 , $k \sim \mathcal{B}(n, p_1)$ avec $p_1 > p_0$. Notons Z une variable aléatoire qui suit la normale centrée et réduite ($Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$). D'après le théorème central limite pour tout couple de nombre réels $a < b$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left\{ a \leq \frac{k - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \leq b \right\} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp[-x^2/2] dx$$

En effet :

$$\frac{k - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Dans le cas d'une loi discrète, pour un niveau α fixé, il est rare de trouver une région critique de niveau exactement égale à α . Il faudrait en effet qu'il existe une région W telle que :

$$\alpha = \sum_{x \in W} P_p(x) \quad (1.4)$$

Nous allons chercher les valeurs de n et c pour un test dont à la fois le niveau est inférieur ou égal à α ($\alpha_p(W) \leq \alpha$) et qui maximise la puissance $(1 - \beta)$ pour des valeurs de α et β choisies.

Sous H_0 pour $p = p_0$ on a :

$$\begin{aligned} \alpha &= P(k > c | p = p_0) \\ &= P\left(Z > \frac{c - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{c - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \right) \end{aligned}$$

On peut tirer l'expression de c en fonction de n, p_0 et α :

$$c = np_0 - z_{1-\alpha} \sqrt{np_0(1-p_0)} \quad (1.5)$$

Sous H_1 , supposons qu'on calcule la puissance à une proportion $p = p_1$:

$$\begin{aligned} \beta &= P(k < c | p = p_1) \\ &= P\left(Z < \frac{c - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right) \end{aligned}$$

On peut tirer de nouveau l'expression de c en fonction de n, p_1 et β :

$$c = z_{1-\beta} \sqrt{np_1(1-p_1)} + np_1 \quad (1.6)$$

Pour trouver n égalisons les deux expressions de c :

$$\begin{aligned} np_0 - z_{1-\alpha} \sqrt{np_0(1-p_0)} &= np_1 + z_{1-\beta} \sqrt{np_1(1-p_1)} \\ \sqrt{n}(p_0 - p_1) &= z_{1-\alpha} \sqrt{p_0(1-p_0)} + z_{1-\beta} \sqrt{p_1(1-p_1)} \\ n &= \frac{\{z_{1-\alpha} \sqrt{p_0(1-p_0)} + z_{1-\beta} \sqrt{p_1(1-p_1)}\}^2}{(p_0 - p_1)^2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Le couple (n, c) est défini en fonction de α, β, p_0 et p_1 en utilisant une approximation normale de la binomiale. Pour α, β, p_0 et p_1 fixes, on peut calculer (n, c) à l'aide des formules (1.6) et (1.7). Lemeshow and Stroh [1989]) fournissent également des tables pour simplifier la vie des utilisateurs. Lemeshow and Stroh [1989]) décident d'arrondir la taille d'échantillon n à l'entier supérieur et le seuil critique à l'entier inférieur. Les auteurs proposent plusieurs séries de tables pour différentes valeurs de α et β contrairement à Valadez.

Par exemple, pour $\alpha = 0,01$, $\beta = 0,5$, $p_0 = P_0 = 0,5$ et $p_1 = P_a = 0,25$, on trouve dans la table 1.4, $n = 22$ et $d^* = c = 5$. Supposons qu'on échantillonne d'une population, un échantillon aléatoire de taille $n = 22$ et que l'on trouve que le nombre d'enfants vaccinés est de 6 ou plus dans ce cas on rejette H_0 et on déclare la population non prioritaire. Par contre, si on trouve que 5 enfants ou moins sont vaccinés, on ne peut rejeter H_0 et on considère la population comme prioritaire. On peut noter qu'on peut trouver directement les valeurs du couple (n, c) sans utiliser les tables.

1.4 Comparaison des approches de Valadez et Lemeshow

Rhoda et al. [2010] critique l'approche de Valadez et reprenne l'approche de Lemeshow qu'ils préfèrent à celle de Valadez. Le principal argument de Rhoda et al. [2010] porte sur l'écriture de l'hypothèse nulle. Ils stipulent que l'hypothèse nulle devrait s'écrire comme suit $H_0 : p \leq p_0$ au lieu de l'écrire comme étant $p \geq p_0$. Toutefois Pagano and Valadez [2010] présentent le LQAS comme une

Table 6c: Sample Size and Decision Rule for LQAS, Alpha=0.01, Beta=0.50, One-sided Test

Pa	Po									
	0.50		0.60		0.70		0.80		0.90	
	n	d*	n	d*	n	d*	n	d*	n	d*
0.05	7	0	5	0	*		*		*	
0.10	9	0	6	0	*		*		*	
0.15	12	1	7	0	*		*		*	
0.20	16	2	9	1	5	0	*		*	
0.25	22	5	11	2	6	0	*		*	
0.30	34	10	15	4	8	1	*		*	
0.35	61	21	21	7	10	2	5	1	*	
0.40	136	54	33	13	13	4	6	1	*	
0.45	542	243	58	26	19	7	8	2	*	
0.50			130	65	29	14	10	4	*	
0.55			520	285	51	28	14	6	*	
0.60					114	68	22	13	6	2
0.65					455	295	39	25	8	4
0.70							87	60	13	8
0.75							347	260	22	16
0.80									49	39
0.85									195	165

* Sample size less than 5

TABLE 1.4 – Table de décision proposée par Lemeshow

Source: Lemeshow and Stroh [1989]

méthode de classification. Ils stipulent que tout l’argumentaire de Rhoda et al. [2010] n’est pas pertinent dans leur approche. Ils ajoutent que Dodge et Romig ont proposé leurs travaux bien avant que Neyman and Pearson [1933] ne proposent le cadre des tests d’hypothèses tel qu’on le connaît. Nous allons tenter de clarifier ces différents, pour ce faire introduisons une notation supplémentaire. On sait que Valadez détermine la puissance de son test à partir d’une valeur qui est égale à $p_0 - 0,3$, notons cette quantité p_{inf} . Dans ce cas p_0 peut être notée p_{sup} . Dans Rhoda et al. [2010], les auteurs proposent de poser $p_0 = p_{inf}$ et ils calculent la puissance à $p_{sup} = p_{inf} + 0,3$. Les hypothèses peuvent se résumer comme suit :

$$H_0 : p \geq p_{sup} \text{ vs } H_1 : p < p_{sup} \text{ (Valadez)}$$

$$H_0 : p \leq p_{inf} \text{ vs } H_1 : p > p_{inf} \text{ (Lemeshow)}$$

Dans cette section, on cherche à montrer que les deux approches sont similaires.

1.4.1 Similitude des deux approches

Pour comparer les deux approches, on détermine d'abord les valeurs de α, β qui ont permis d'aboutir au couple (n, c) dans l'approche de Valadez. Pour ce faire, on fixe $n = 19$ et on laisse c varier selon les valeurs de p_{inf} et p_{sup} avec $p_{sup} - p_{inf} = 0,3$. Ensuite, on utilise ces valeurs de α, β comme données d'entrée pour calculer le couple (n, c) dans l'approche de Lemeshow.

On constate que les valeurs du couple (n, c) de l'approche de Valadez et de Lemeshow sont similaires (table 1.5). L'écart se creuse pour des valeurs plus petites ou grandes de p_0 une différence imputable à l'approximation par la loi normale. Pour un seuil critique égale à 13, on dira dans le test de Valadez qu'on rejette H_0 si $k < 13$. C'est-à-dire qu'il n'y a pas assez d'évidence pour déclarer la population d'étude prioritaire. Dans le cas du test de Lemeshow, on dira qu'on rejette H_0 si $k \geq 12$. On dira de même qu'il n'y a pas assez d'évidence pour déclarer la population prioritaire. Les deux tests sont similaires. Ce résultat rejoint l'idée développée par Casey [2010] dans sa thèse sur la similitude des deux approches.

p_{inf}	p_{sup}	valeur n (Valadez)	valeur n (Lemeshow)	seuil critique (Valadez)	seuil critique (Lemeshow)
0,10	0,40	19	17,82	5	4,08
0,15	0,45	19	18,20	6	5,18
0,20	0,50	19	18,37	7	6,23
0,25	0,55	19	18,59	8	7,31
0,30	0,60	19	18,62	9	8,31
0,35	0,65	19	19,61	1	9,73
0,40	0,70	19	18,62	11	10,31
0,45	0,75	19	18,59	12	11,28
0,50	0,80	19	18,37	13	12,14
0,55	0,85	19	18,20	14	13,02
0,60	0,90	19	17,82	15	13,75
0,65	0,95	19	16,83	16	14,00

TABLE 1.5 – Comparaison des valeurs du couple $(n = 19, c)$ dans l'approche de Valadez et celle de Lemeshow

1.4.2 Courbes d'efficacité du test

On peut aussi voir la similitude des deux approches à l'aide des courbes d'efficacité. La courbe d'efficacité permet de visualiser la probabilité d'accepter H_0 quelque soit la valeur de p . Autrement dit, pour tout p , nous allons représenter la probabilité d'accepter l'hypothèse nulle qui est égale à $1 - P_p(W)$. Considérons l'exemple suivant : pour $p_{inf} = 50\%$ et $p_{sup} = 80\%$, on sait que $(n, c) = (19, 13)$ dans l'approche de Valadez et $(n, c) = (19, 12)$ dans l'approche de Lemeshow.

Dans la figure 1.2, il apparait dans le cas où $H_0 : p \geq p_0$ que la probabilité d'accepter H_0 lorsque $p \geq 80\%$ est supérieure à 90% et la probabilité d'accepter H_0 lorsque $p \geq 50\%$ est inférieure à 10%. Le même résultat est obtenu dans le cas où $H_0 : p \leq p_0$ lorsque H_0 s'écrit sous a forme $p \leq 50\%$. On

peut voir en permutant les proportions p_0 et p_1 que les deux approches sont similaires. Nous avons réalisé le test de Valadez avec $H_0 : p \geq 80\%$ et le test de Lemeshow avec $H_0 : p \leq 50\%$ pour $n = 19$.

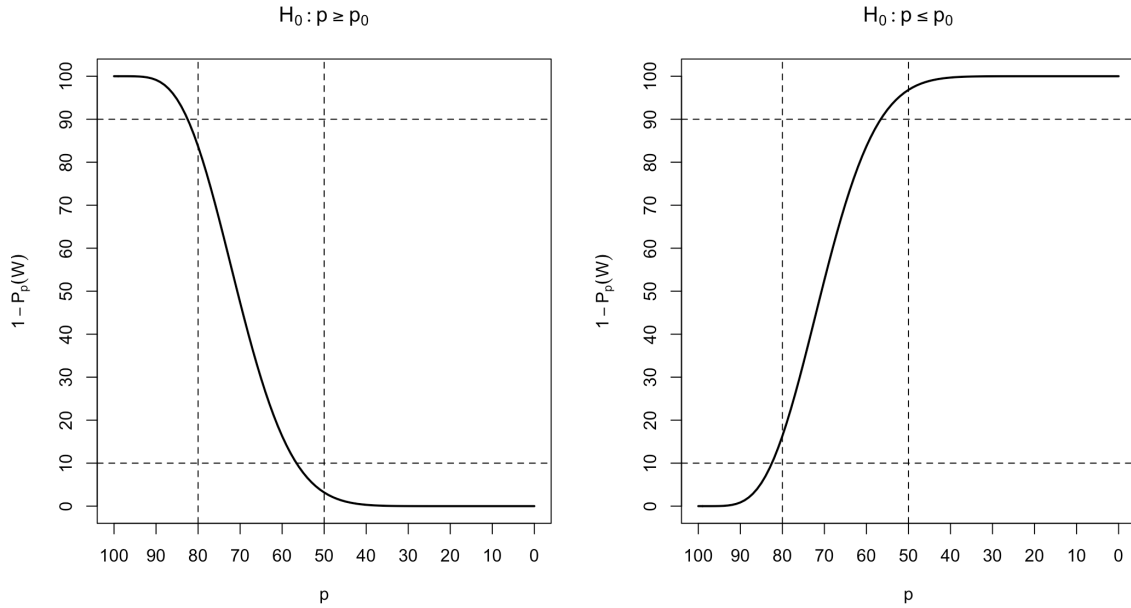


FIGURE 1.2 – Courbes d’efficacité des deux tests pour $(n, c) = (19, 13), (19, 12)$, p et $1 - P_p(W)$ selon que $H_0 : p \geq p_0$ et $H_0 : p \leq p_0$

On trouve dans les figures 1.3 et 1.4, les mêmes règles de décision à la croisée des erreurs α et β . Les arguments formulés par Rhoda et al. [2010] sur la différence entre l’approche de Valadez et Lemeshow nous semblent invalides.

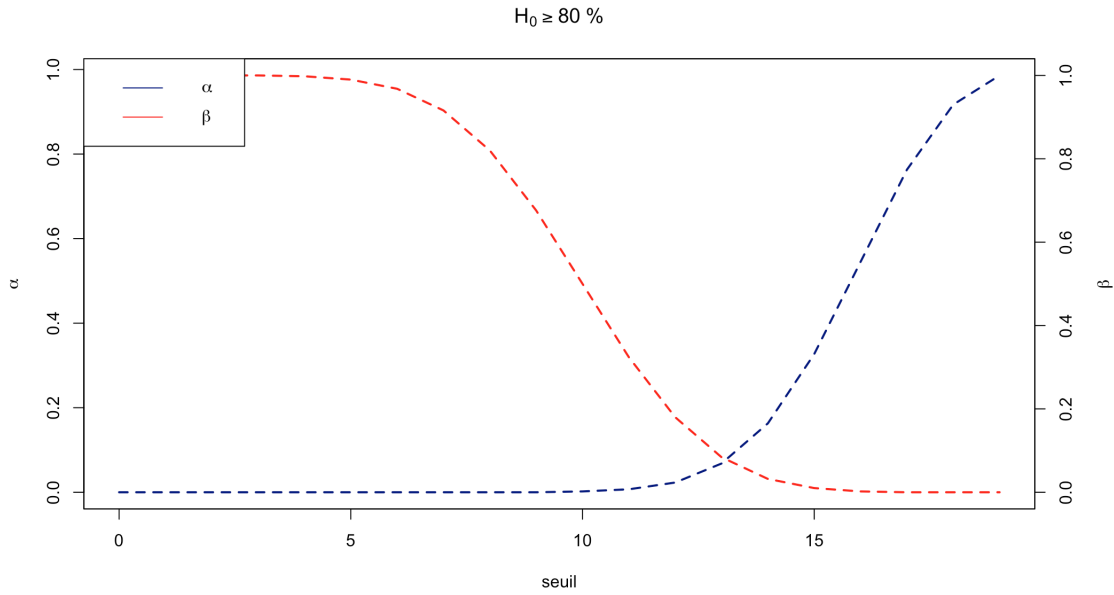


FIGURE 1.3 – $H_0 : p \geq 80\%$ pour $n = 19$, $\alpha, \beta \leq 10\%$

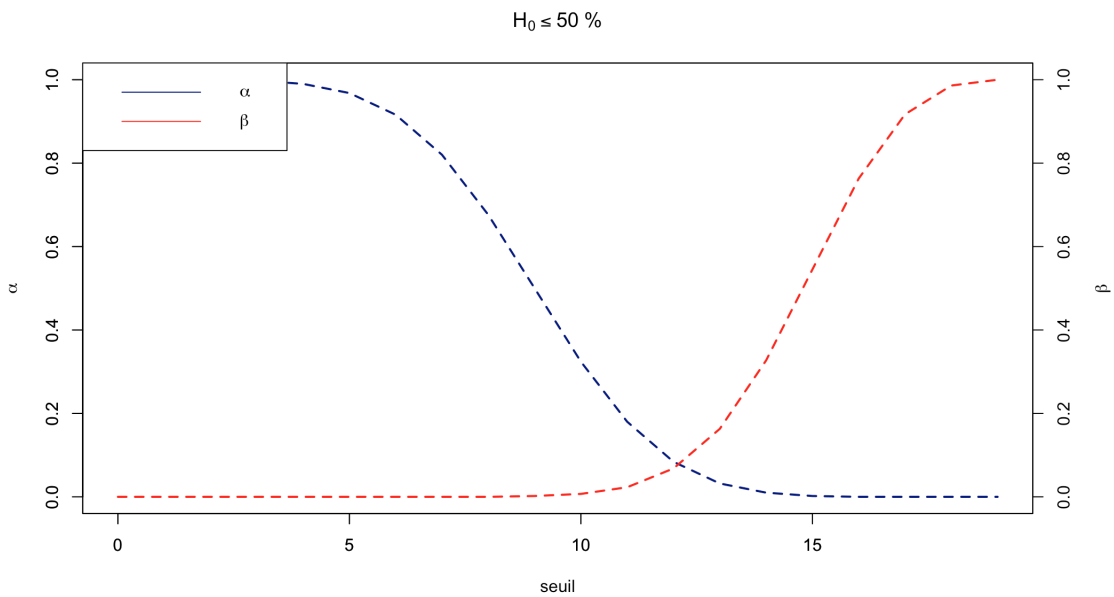


FIGURE 1.4 – $H_0 : p \leq 50\%$ pour $n = 19$, $\alpha, \beta \leq 10\%$

1.5 Discussion

L'écriture de l'hypothèse alternative dans l'approche de Valadez diffère certes de celle de Lemeshow mais les deux approches permettent d'aboutir à des résultats similaires. Pour la suite, on s'intéresse en particulier à l'approche de Valadez. Valadez propose dans un manuel destiné aux praticiens (Valadez et al. [2002]) d'utiliser sa table d'une manière qui diffère du test usuel à une proportion.

Sur la base de ce manuel, on peut réaliser deux classements des populations. Un classement avec un seuil critique choisi à partir d'une proportion p_0 estimée selon les données observées et un classement selon un seuil critique choisi à partir d'un p_0 fixe qui correspond à l'objectif de performance. Les deux classements sont utilisés pour prendre une décision. Cependant bien souvent le projet/programme ne dispose pas d'objectifs de performances pour l'indicateur visé et dans ce cas le classement se fait uniquement sur la base du seuil critique choisi à partir d'une proportion p_0 estimée. On réalise implicitement un test de comparaison à deux proportions inconnues répété autant de fois qu'il n'y a de proportions à comparer, ce qui amène à formuler les problèmes suivants :

- choix d'une proportion p_0 estimées à partir de données observées et impact sur les erreurs de type I et II.
- Choix du test approprié pour comparer plusieurs proportions.
- Comparaison multiple et contrôle des erreurs de type I et II.

Nous allons traiter dans les prochains chapitres chacun de ces problèmes et proposer des solutions. En particulier, dans le prochain chapitre nous allons traiter le problème du choix de p_0 et son impact sur le risque du gestionnaire et le risque des bénéficiaires.

Chapitre 2

Le LQAS en pratique selon l'adaptation de Valadez

L'un des objectifs du LQAS consiste à classer une population en prioritaire ou non prioritaire. Cette classification permet d'assurer une allocation optimale des ressources destinées aux populations bénéficiaires du même programme d'intervention. Le LQAS est devenu populaire grâce à un manuel destiné aux praticiens. Le manuel présente la mise en oeuvre du LQAS de manière simple et accessible aux non statisticiens. Les termes statistiques sont remplacés par des illustrations et tableaux faciles à comprendre (voir Valadez et al. [2002]).

Dans le précédent chapitre, on a montré que l'approche de Valadez est un test à une proportion avec comme hypothèse alternative $H_1 : p < p_0$. On trouve le couple (n, c) avec un test binomial plutôt que par approximation par la loi normale. De plus, on s'intéresse à classer une population de bénéficiaires d'une intervention en prioritaire ou non selon des erreurs α, β connues donc à comparer une proportion p à une proportion p_0 choisie. Cependant, la procédure présentée dans le manuel vise à classer plus qu'une population de bénéficiaires. On sait que la règle de décision consiste à rejeter le succès de l'intervention si on trouve moins de c succès dans l'échantillon. Dans le manuel, il est proposé de choisir le seuil critique c sur la base de la proportion moyenne de succès de toutes les populations. Autrement dit, le manuel propose de réaliser un test qui diffère de ce que Valadez suggère en théorie.

Nous allons dans ce chapitre étudier l'impact du choix d'une proportions p_0 estimée à partir des données sur les erreurs de type I et II. Pour ce faire, nous allons réaliser des simulations en utilisant le test de la binomiale exacte ainsi que l'approximation par la loi normale.

2.1 Notation et formulation des hypothèses

En pratique, on cherche à prioriser entre les populations qui bénéficient d'un même traitement afin de déterminer quelle(s) population(s) doit (doivent) recevoir plus de ressources. Considérons J populations à comparer de tailles N_j et J échantillons aléatoires de taille n_j avec $N_j \gg n_j$. On tire

par échantillonnage aléatoire simple avec remise ces J échantillons aléatoires indépendants de ces populations en raison de un échantillon par population. Soit X_{ij} une variable indicatrice qui vaut 1 si le i ème élément du j ème échantillon correspond à un succès et qui vaut 0 si l'on rencontre un échec avec $i = 1, \dots, n_j$ et $j = 1, \dots, J$. Notons S_j la somme des succès du j ème échantillon. Notons p_j la proportion de succès du j ème échantillon et $\hat{p}_j = \frac{S_j}{n_j}$ la proportion estimée du j ème échantillon avec $\hat{p}_j \sim \mathcal{N}\left(p_j, \frac{p_j(1-p_j)}{n_j}\right)$ et $S_j \sim B(n_j, p_j)$. On note \bar{p}_{-j} , la proportion moyenne sans la j ème proportion.

Dans la procédure décrite dans le manuel, on cherche à comparer p_j à la moyenne de toutes les probabilités de succès. Ce qui revient à comparer cette probabilité à la probabilités de succès des autres distributions. On peut le voir aisément pour $j = k$:

$$p_k = \frac{p_1 + \dots + p_k + \dots + p_J}{J}$$

$$Jp_k = p_1 + \dots + p_k + \dots + p_J$$

$$p_k = \frac{\sum_{1 \leq j \leq J, j \neq k} p_j}{J-1}$$

On peut écrire les hypothèses du problème comme suit :

$$H_0 : p_j = \bar{p}_{-j} \text{ contre } H_1 : p_j \leq \bar{p}_{-j}$$

Dans la suite du chapitre, on ne s'intéresse pas à l'impact d'une comparaison multiple sur les erreurs de type I et II. On évalue plutôt l'impact de la comparaison d'une probabilité de succès à la moyenne des $(J-1)$ probabilités de succès sur les erreurs de type I et II. On compare donc p_1 à \bar{p}_{-1} . On n'utilisera alors simplement la notation \bar{p} pour désigner \bar{p}_{-1} .

2.2 Estimation de l'erreur de type I et II, Intervalle de confiance

Au cours de nos analyses nous allons estimer par simulation la proportion de rejet sous $H_0 = p_1 = \bar{p}$ qui correspond à l'erreur de type I et la proportion de rejet sous H_1 qui correspond à l'erreur de type II pour des erreurs α et β choisies. Notons r_0 , le nombre fois que l'hypothèse nulle est rejetée alors qu'elle est vraie, r_1 , le nombre de fois que l'hypothèse nulle ne peut être rejetée alors qu'elle est fautive. On note par B le nombre de fois que la simulation est réalisée. On peut estimer les erreurs de type I et II par simulation comme suit :

$$\hat{e}_1 = \frac{r_0}{B} \tag{2.1}$$

Un intervalle de confiance pour l'erreur de type I est déterminé en utilisant un intervalle de confiance classique pour une proportion. Notons \hat{e}_1 l'erreur de type I et \hat{e}_2 l'erreur de type II. L'intervalle de confiance de \hat{e}_1 est donné par :

$$\hat{e}_1 \pm Z_{\alpha/2} \frac{\hat{e}_1(1-\hat{e}_1)}{B} \tag{2.2}$$

avec $Z_{\alpha/2}$ le quantile de la loi normale pour une valeur de α . De même, on peut déterminer l'erreur de type II \hat{e}_2 et l'intervalle de confiance associé.

2.3 Impact de la pratique sur l'erreur de type I

Dans cette section, nous allons estimer par simulation l'erreur de type I. Pour faire cette estimation nous allons utiliser le test binomial exact et le test du score. Pour rappel, ces deux tests sont respectivement utilisés dans l'approche de Valadez et dans l'approche de Lemeshow. Nous avons indiqué que ces deux approches sont similaires donc on s'attend à trouver des erreurs de type I similaires.

2.3.1 Estimation de l'erreur de type I pour le test binomial

Nous allons maintenant utiliser le test binomial exact pour évaluer l'impact de la pratique du LQAS sur l'erreur de type I. Nous avons montré dans le chapitre 1 que $n = 19$ est la taille pour laquelle les erreurs α et β sont inférieures à 10% pour certaines proportions p_0 multiple de 5. La taille $n = 35$ est la taille qui permet d'avoir des erreurs α et β inférieures à 5%. Nous allons donc estimer les erreurs de type I pour une taille $n = 19$ et une taille $n = 35$.

Simulation 2.1: Description de l'estimation de l'erreur de type I

-Test à deux proportions

Sous $H_0 : p_1 = p_2 = p$ avec p variant dans $[0,35;0,95]$ selon un pas de 0,01, on simule à B reprises le nombre de succès S_1, S_2 selon une taille $n = 19$ et $n = 35$. On calcule \hat{p}_2 pour choisir le seuil critique c . Pour chaque itération, on considère qu'il y a rejet lorsque $S_1 < c$. On calcule la proportion pour le nombre de rejets parmi $B = 1000$ itérations. L'intervalle de confiance à 95% est déterminé comme suggéré dans la sous-section 2.2.

-Test à 5 proportions

Sous $H_0 : p_1 = \bar{p} = p$ avec p variant dans $[0,35;0,95]$ selon un pas de 0,01, on simule à B reprises S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5 pour 5 probabilités de succès p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5 selon une taille $n = 19$ et $n = 35$. On calcule $\sum_{i=2}^5 S_i$ et on obtient le seuil critique c pour \hat{p} et on considère qu'il y a rejet lorsque $S_1 < c$. On calcule la proportion de rejet pour le nombre de rejets parmi $B = 1000$ itérations ainsi que l'intervalle de confiance à 95%.

Commentaires sur les simulations

Il faut cependant apporter quelques précisions sur les simulations. Certaines valeurs estimées de p_0 , comme 0,82 (voir table 1.3), ne permettent pas de trouver un seuil critique pour lequel les erreurs $\alpha \leq 10\%$, $\beta \leq 10\%$ et $n = 19$. Raison pour laquelle on arrondit à une valeur multiple de 5 qui permet comme l'indique d'ailleurs la table de décision de Valadez 1.1 de tomber sur des seuils critiques qui répondent à la contrainte sur les erreurs α et β . Ainsi, en plus de l'effet du choix de p_0 sur les erreurs de type I et II, on comptabilise aussi l'effet induit par l'arrondissement.

Dans les simulations, on s'intéresse sous $H_0 : p_1 = \bar{p} = p$ aux proportions $p \in [0,35;0,95]$ car comme précisé dans le chapitre 1, on ignore le rationnel derrière le calcul des valeurs critiques pour des proportions $p_0 < 0,3$.

Cette restriction est cependant insuffisante car avec une proportion $p = 0,35$, on peut par hasard en simulant une distribution binomiale avec comme probabilité de succès p , tomber sur une proportion estimée p_0 estimée à 0,2 ou 0,3. Dans un tel cas, on ne réalise pas le test. On le comptabilise et on calcule la proportion de rejets uniquement sur le nombre de tests réellement réalisés.

On peut aussi se demander dans les simulations comment choisir \bar{p} sous $H_0 : p_1 = \bar{p} = p$. Par exemple pour $J = 5$, on compare p_1 à $\frac{p_2 + p_3 + p_4 + p_5}{4}$. La valeur de \bar{p} dépend des probabilités allant de p_2 à p_5 qui ne sont pas forcément égales. Sous l'hypothèse nulle H_0 , il existe une infinité de valeurs de $p_j, j = 2, \dots, 5$ permettant d'arriver à l'égalité $p_1 = \bar{p} = p$ avec p une probabilité de succès variant dans $[0; 1]$. Pour mieux définir la valeur de \bar{p} sous $H_0 : p_1 = \bar{p} = p$, prenons, c_2, c_3, c_4 et c_5 variant dans $] - 1, 1[$, on pose $p_2 = p + c_2, p_3 = p + c_3, p_4 = p + c_4$ et $p_5 = p + c_5$ tels que $c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 0$. Le cas où $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p$ est un cas particulier pour lequel $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$. Par exemple pour $c_2 = 0,25, c_3 = 0,2, c_4 = -0,3$ et $c_5 = -0,15$, on trouve une somme nulle. De manière plus générale, on peut définir sous $H_0, c_j \in] - 1, 1[$ tel que :

$$\sum_{j=2}^J c_j = 0 \text{ et } \bar{p} = \frac{\sum_{j=2}^J (p_j + c_j)}{J - 1} = p$$

Dans les simulations nous avons considéré $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$. En effet, nous avons essayé plusieurs combinaisons pour \bar{p} et les résultats des estimations sont similaires.

Commentaires sur les résultats

La figure 2.1 présente le nombre de tests non réalisés durant les simulations. On peut voir sur la figure 2.1 que le nombre de tests non réalisés est élevé pour des proportions inférieures à 0,4, des valeurs pour lesquelles, on a plus de chances de tomber sur des proportions p_0 estimées inférieures ou égales à 0,3. On remarque que le nombre de tests non réalisés dans le cas à 2 proportions est plus élevé que dans le cas à 5 proportions. La proportion estimée dans le cas à 5 proportions implique la moyenne de 4 proportions, ce qui sans doute permet de rapprocher la valeur estimée de p_0 à la valeur de p et donc de réaliser le test. Les proportions de rejet sont donc calculées en soustrayant des B simulations le nombre de tests non réalisés. Les figures 2.2 et 2.3 représentent les erreurs de type I dans le cas à 2 proportions et à 5 proportions respectivement.

L'erreur de type I correspond au risque du gestionnaire. Plus cette erreur est élevée plus on risque d'allouer à tort des ressources à une population de bénéficiaires. On constate avec les simulations que l'erreur de type I dépasse $\alpha = 10\%$ et $\alpha = 5\%$ dans le cas à deux proportions pour $n = 19$ et $n = 35$ (voir 2.2). L'erreur de type I atteint quasiment le double du seuil α choisi pour des proportions p entre 0,35 et 0,6. L'erreur de type I diminue pour $p > 0,6$ et croise le seuil de 10% avant d'être en dessous de 5% pour $p > 0,9$. Cette baisse peut sans doute s'expliquer par le fait que des proportions élevées

de succès sont plus faciles à identifier et donc l'erreur de décision se réduit.

Dans le cas à 5 proportions, on remarque une modeste augmentation de l'erreur de type I. On pouvait sans doute s'y attendre puisque l'estimation de p_0 avec 4 proportions approxime la proportion p . L'augmentation de l'erreur de type I est moindre mais atteint 15% pour $\alpha = 10\%$ et 8% pour $\alpha = 5\%$. Pour 5 proportions, estimer p_0 à partir des données n'induit pas d'énormes erreurs de décision. L'erreur de type I est plus importante dans le cas à 2 proportions puisque p_0 est uniquement estimée à partir d'un seul échantillon.

On peut sans doute penser que le risque du gestionnaire est moins grave que le risque de réduire les ressources de populations bénéficiaires. Toutefois, il en reste une erreur de décision qui peut compromettre la bonne gestion des activités du programme.

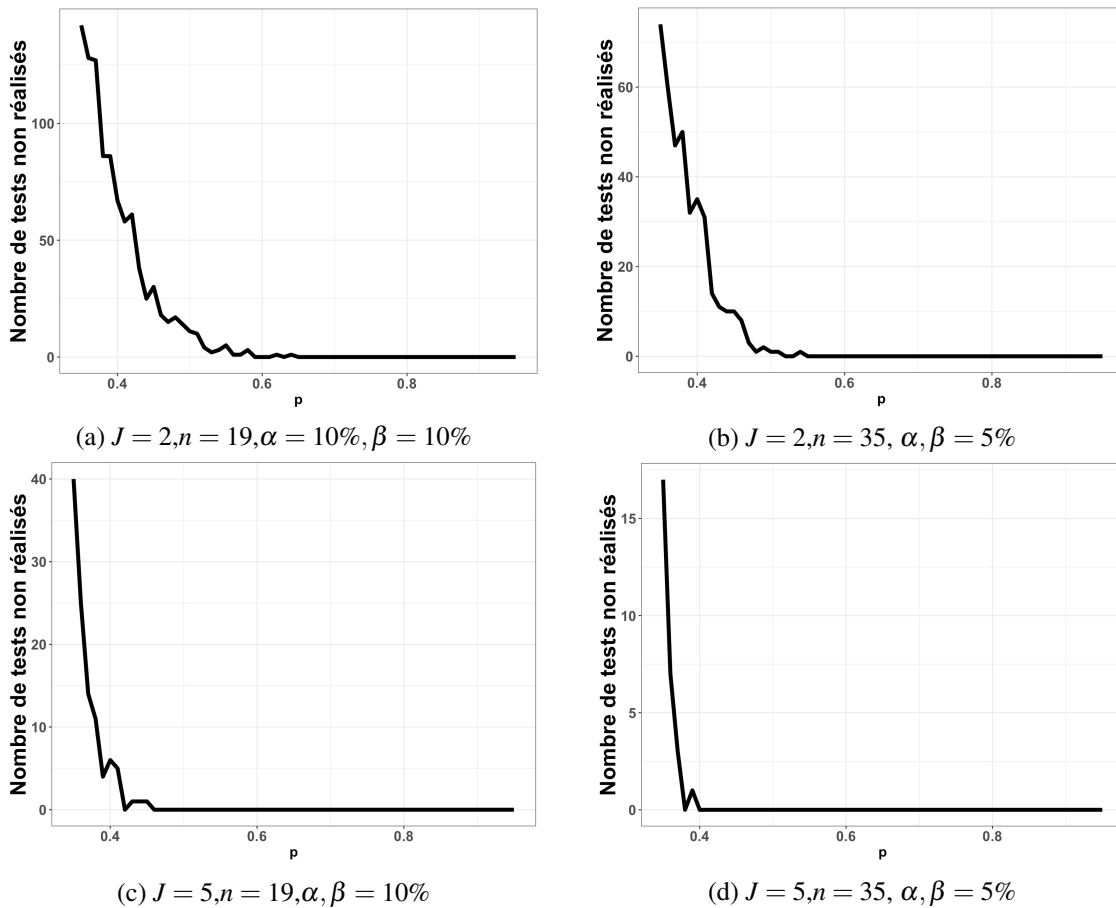
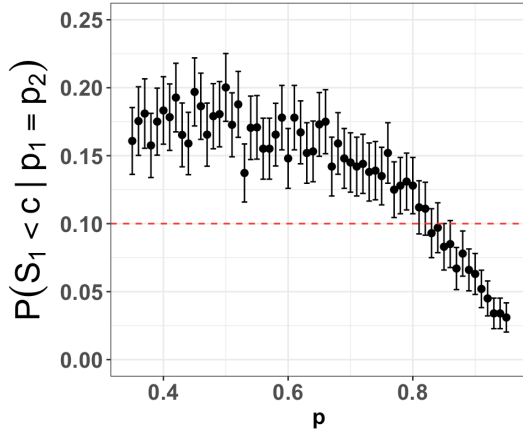
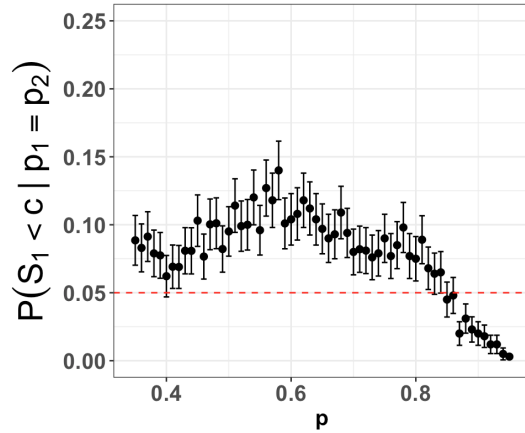


FIGURE 2.1 – Nombre de tests non réalisés dans l'estimation de l'erreur de type I pour la binomiale exacte. **Note** : Les axes des ordonnées de la figure 2.1 ne sont pas harmonisés.

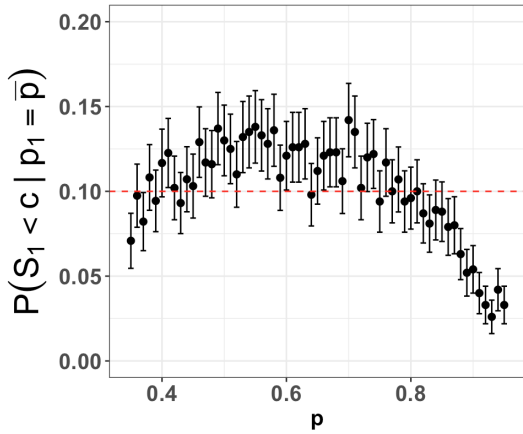


(a) $J = 2, n = 19, \alpha = 10\%, \beta = 10\%$

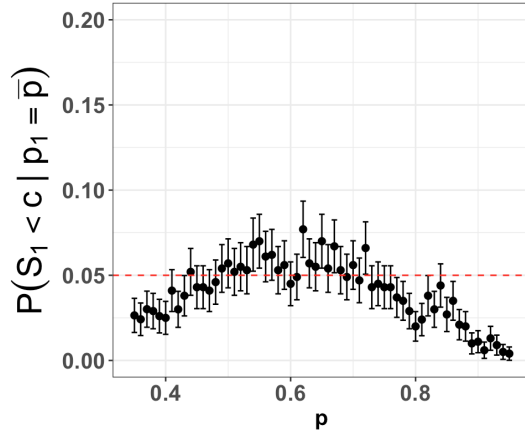


(b) $J = 2, n = 35, \alpha, \beta = 5\%$

FIGURE 2.2 – Estimation de l’erreur de type I par la binomiale exacte quand $n = 19, 35, B = 1000$ pour $\alpha, \beta = 5\%, 10\%$ pour 2 proportions



(a) $J = 5, n = 19, \alpha, \beta = 10\%$



(b) $J = 5, n = 35, \alpha, \beta = 5\%$

FIGURE 2.3 – Estimation de l’erreur de type I pour la binomiale exacte quand $n = 19, fig_a n = 35, fig_b, B = 1000, \alpha, \beta = 5\%$ et $p \in [0, 35; 0, 95]$ pour 5 proportions

2.3.2 Estimation de l’erreur de type I pour l’approximation normale

On estime selon le test proposé par Lemeshow l’erreur de type I en représentant l’erreur commise. Ce qui permet d’avoir une autre perspective de cette erreur. Sous H_0 , si le test réalisé en pratique est valide, l’erreur de type I ne devrait pas dépasser le niveau α du test. Supposons qu’on dispose de 2 populations et on compare 2 proportions de succès inconnues, si l’on décide de traiter ce test à 2 proportions comme un test à 1 proportion où \hat{p}_2 devient p_0 . L’expression analytique de la statistique de test invalide sous H_0 peut s’écrire dans ce contexte comme suit :

$$Z_2 = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}_2(1 - \hat{p}_2)}{n}}} \quad (2.3)$$

On remarque au dénominateur, qu'il n'y a que la variance de \hat{p}_2 comme dans le test à une proportion. On ignore la distribution de cette statistique de test qui ne suit pas une loi normale centrée réduite.

On peut déterminer la distribution de Z_2 par changement de variable. La résolution (voir annexe B), n'a pas permis d'aboutir à une forme explicite de la distribution de Z_2 . La forme qu'on a trouvée permet toutefois de confirmer le résultat assez évident que la distribution de cette statistique de test ne suit pas une loi normale.

On peut écrire la statistique du test sous $H_0 : p_1 = \bar{p}$ qu'on note Z_J avec J qui désigne le nombre de proportions à comparer, comme suit :

$$Z_J = \frac{\hat{p}_1 - \hat{\bar{p}}}{\sqrt{\frac{\hat{\bar{p}}(1 - \hat{\bar{p}})}{n}}} \quad (2.4)$$

Il s'agit d'une expression similaire à la statistique d'un test à une proportion sauf que la valeur de p_0 est remplacée par une proportion moyenne estimée à partir des données observées.

Simulation 2.2: Description de l'estimation de l'erreur de type I

-Test à 2 proportions

Sous $H_0 : p_1 = p_2 = p$, p varie dans $[0, 1; 0, 9]$ avec un pas de 0,01. On fait la simulation pour $n = 19$ et $n = 35$. On simule sous H_0 , des échantillons aléatoires indépendants avec $n = 19$. On calcule B fois l'erreur de type I sous H_0 lorsque $z_2 < -z_\alpha$ avec $\alpha = 5\%$ et l'intervalle de confiance à 95% associé.

-Test à 5 proportions

Sous $H_0 : p_1 = \bar{p} = p$, p varie dans $[0, 1; 0, 9]$ avec un pas de 0,01. On réalise les simulation pour $n = 19$ et $n = 35$. Nous allons rencontrer les mêmes problèmes que dans le test à 2 proportions concernant l'approximation par la loi normale. On calcule B fois l'erreur de type I quand $z_5 < -z_\alpha$ avec l'intervalle de confiance associé.

Commentaires sur les simulations

L'approximation par la loi normale est moins bonne pour $np_0 \leq 5$ et $n(1 - p_0) \leq 5$. Pour $n = 19$ les conditions ne sont pas respectées lorsque $p_0 < 0,3$ et quand $p_0 > 0,7$. Pour $n = 35$, les conditions ne sont pas respectées lorsque $p_0 < 0,15$ et pour $p_0 > 0,85$. L'approximation par la loi normale est meilleure pour des valeurs de p_0 entre 40% et 60% avec des tailles $n = 19$ et $n = 35$.

Commentaires sur les résultats

Les figures 2.10 et 2.11 présentent les erreurs de type I dans le cas à 2 proportions et 5 proportions respectivement. L'erreur de type I semble croître en fonction de p sauf pour $J = 2$ et $n = 19$. Dans le cas à 2 proportions, l'erreur de type I est plus élevée que le seuil $\alpha = 10\%$. Elle atteint 0,2 pour une proportion $p \in [0, 25; 0, 75]$ quand $n = 19$ et atteint 0,15 quand $p > 0,3$ (voir figure 2.10). On remarque que les valeurs de l'erreur de type I que l'on trouve pour l'approximation normale (voir figure 2.10) sont similaires aux valeurs de l'erreur de type I que l'on trouve pour le test de la binomiale exacte

(voir figure 2.2). En considérant le test à 2 proportions comme un test à 1 proportion, la variance de la statistique de test ne dépend maintenant que de la valeur de \hat{p}_2 et devient ainsi plus petite. De plus, la différence $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ rest constante. La seule différence entre les deux tests réside au niveau de la variance de la statistique de test. Dans le cas à 5 proportions, l'erreur de type augmente de très peu. Pour des proportions $p \geq 0,5$, on constate une légère hausse de l'erreur de type I aussi bien pour $n = 19$ que $n = 35$. Ce résultat nous conforte dans l'idée que le choix de p_0 à partir des données observées n'induit pas une augmentation dramatique de l'erreur de type I.

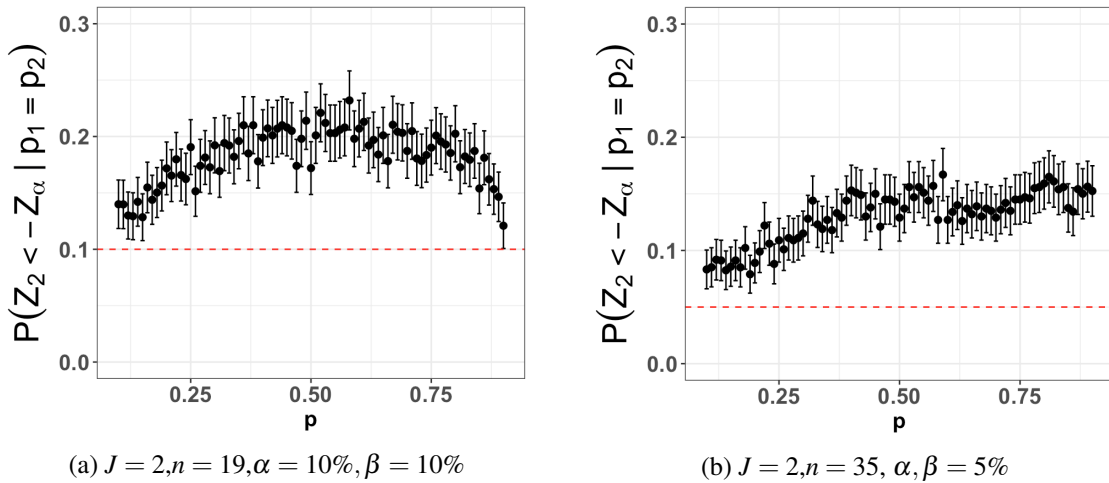


FIGURE 2.4 – Estimation de l'erreur de type I pour une approximation normale quand $n = 19, fig_a, n = 35, fig_b, B = 1000, \alpha, \beta = 5\%; 10\%$ et $p \in [0, 1; 0, 9]$ pour 2 proportions

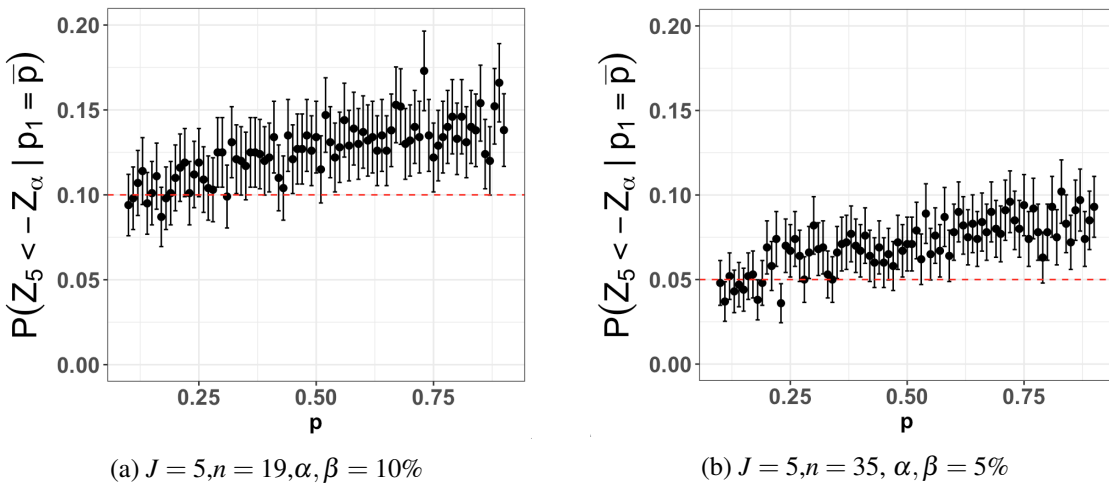


FIGURE 2.5 – Estimation de l'erreur de type I pour une approximation normale quand $n = 19, fig_a, n = 35, fig_b, B = 1000, \alpha, \beta = 5\%; 10\%$ et $p \in [0, 1; 0, 9]$ pour 5 proportions

Toutefois, on peut douter de la qualité de l'approximation avec des tailles $n = 19$ et $n = 35$. Nous allons prendre une taille plus grande pour que $np \geq 10$ et $n(1 - p) \geq 10$, soit $n = 100$. Cette taille $n = 100$ correspond à une valeur de $\alpha = 0,00045$ et $\beta = 0,00045$ dans le cadre d'un test à une

proportion. Nous allons avec $n = 100$ calculer le coefficient d'asymétrie ainsi que les quantiles de la distribution de la statistique de test afin de mieux comprendre l'impact de la procédure sur l'erreur de type I.

Coefficient d'asymétrie

Il est clair que la distribution de la statistique Z_j n'est pas symétrique. On a pu constater avec la détermination de la loi de la statistique de test Z_2 qu'on a pas une distribution normale. On peut mieux le voir en estimant le coefficient d'asymétrie de Fisher $\frac{m^3}{s^3}$ de la distribution de Z_2 et Z_5 pour $n = 100$.

Le coefficient d'asymétrie permet d'avoir une idée de la variation de l'asymétrie de la distribution de Z_j en fonction de p . On remarque dans la figure 2.6, une asymétrie nulle avec des valeurs de p proche de 0,5. L'asymétrie est plus forte pour des valeurs extrêmes de p comme 0,2 ou 0,9. Nous

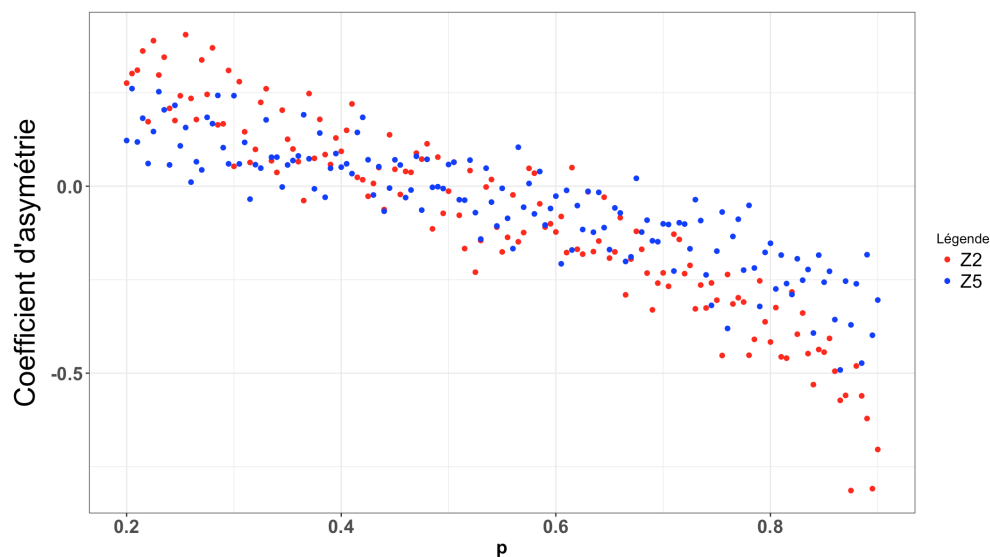


FIGURE 2.6 – Coefficient d'asymétrie des distributions de Z_2 et Z_5

pouvons aussi comparer la distribution de la statistique de test Z_2 et Z_5 aux quantiles théoriques de la loi normale centrée et réduite. Cette comparaison permet d'apprécier l'erreur de type I qu'on commet en utilisant une statistique de test invalide.

Quantiles de la distribution

On peut déterminer les quantiles de la distribution de la statistique de test Z_2 et Z_5 . Puisque nous ignorons la distribution exacte de la statistique de test nous allons déterminer les quantiles empiriques qui vont nous permettre de définir les zones de rejets pour les différentes distributions (pour différentes probabilités de succès).

La figure 2.7 permet de comparer les quantiles empiriques aux quantiles théoriques de la loi normale centrée et réduite quand la proportion $p = 0,2$ et $p = 0,5$. On voit clairement une asymétrie à droite pour $p = 0,2$ et l'asymétrie est nulle pour $p = 0,5$. La zone d'acceptation pour $\alpha = 0,00045$ est définie par $[-3,32; 3,32]$ et on rejette $H_0 : p_1 = \bar{p}$ si $z_j < -3,32$. Dans le cas à 2 proportions, l'intervalle

de valeurs de la distribution empirique de la statistique de test Z_2 semble plus large que la zone d'acceptation. On peut s'attendre à une probabilité d'erreur plus élevée. Dans le cas à 5 proportions l'intervalle de valeurs de la distribution empirique de la statistique de test Z_5 est similaire à l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse nulle H_0 . Ce qui confirme les résultats déjà observés avec des tailles n plus petites.

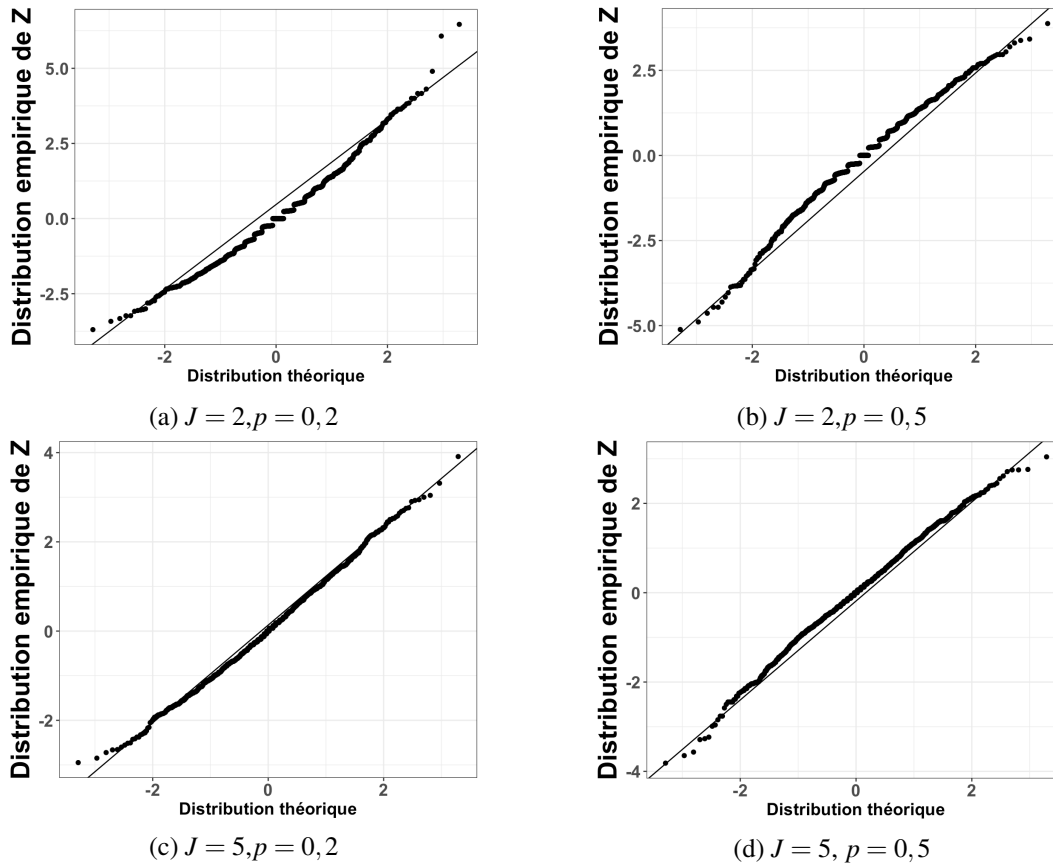


FIGURE 2.7 – Comparaison des distributions Z_2, Z_5 à z_α pour une proportion $p = 0,2; 0,5$ et $n = 100$.
Note : Les axes des ordonnées de la figure 2.7 ne sont pas harmonisés.

La table 2.1 donne les quantiles des distributions de Z_2 et Z_5 . On s'intéresse aux quantiles qui appartiennent à la zone de rejet. On rejette H_0 lorsque $z_2 < -3,32$ dans le cas à 2 proportions et lorsque $z_5 < -3,32$ dans le cas à 5 proportions. À partir de $p = 0,7$, le 1^{er} percentile de la distribution empirique de Z_2 prend comme valeur $-3,33$ donc l'erreur de type I sera supérieure à 1% au seuil $\alpha = 0,045\%$. Dans le cas à 5 proportions, pour tout p , on a une probabilité d'erreur de type I inférieure à 1%. Ce qui revient aux conclusions dans les précédentes simulations pour $n = 19$ et $n = 35$ comme quoi l'erreur de type I est plus petite dans le cas à 5 proportions.

p	1%	2,5%	5%	10%	15%	20%	80%	85%	90%	95%	97,5%	99%
Z_2												
0,20	-3,03	-2,58	-2,21	-1,80	-1,45	-1,19	1,25	1,53	1,91	2,45	2,88	3,69
0,30	-2,96	-2,67	-2,27	-1,87	-1,47	-1,11	1,31	1,60	1,87	2,45	3,06	3,80
0,40	-3,20	-2,81	-2,41	-1,82	-1,43	-1,21	1,22	1,46	1,86	2,31	2,57	3,09
0,50	-3,27	-2,81	-2,41	-1,81	-1,60	-1,20	1,20	1,41	1,81	2,22	2,81	3,25
0,60	-3,30	-2,79	-2,43	-1,87	-1,49	-1,24	1,21	1,42	1,82	2,40	2,81	3,20
0,70	-3,33	-2,93	-2,42	-1,93	-1,56	-1,28	1,24	1,45	1,69	2,25	2,55	3,24
0,80	-4,31	-3,33	-2,52	-1,96	-1,60	-1,33	1,15	1,41	1,76	2,21	2,66	3,09
0,90	-4,64	-3,79	-2,95	-2,11	-1,68	-1,33	1,16	1,40	1,64	2,08	2,40	2,73
Z_5												
0,20	-2,56	-2,00	-1,62	-1,34	-1,12	-0,91	0,93	1,16	1,41	1,78	2,24	2,88
0,30	-2,47	-2,14	-1,74	-1,38	-1,16	-0,90	0,95	1,19	1,47	1,85	2,28	2,64
0,40	-2,40	-2,05	-1,73	-1,44	-1,17	-0,96	0,86	1,09	1,36	1,90	2,17	2,75
0,50	-2,55	-2,22	-1,75	-1,40	-1,10	-0,90	0,90	1,10	1,45	1,80	2,10	2,40
0,60	-2,50	-2,12	-1,74	-1,35	-1,14	-0,95	0,97	1,19	1,41	1,78	2,07	2,39
0,70	-2,67	-2,15	-1,89	-1,52	-1,21	-0,99	0,85	1,09	1,35	1,68	1,98	2,50
0,80	-2,58	-2,33	-1,93	-1,53	-1,21	-0,98	0,90	1,15	1,39	1,75	2,07	2,35
0,90	-2,80	-2,44	-2,00	-1,57	-1,28	-0,95	0,93	1,10	1,33	1,66	1,98	2,24

TABLE 2.1 – Table des quantiles de la distribution de Z_2 et Z_5 pour différents percentiles, p variant dans $[0, 2; 0, 9]$ et $n = 100$

2.4 Impact de la pratique sur l’erreur de type II

On constate, dans la section 2.3 que le choix d’une proportion p_0 estimée à partir des données observées pour faire le test de comparaison de proportions entraîne une légère hausse de l’erreur de type I. Une hausse de l’erreur de type I traduit une plus grande probabilité d’investir des ressources dans une région non prioritaire. Il ne s’agit pas d’une erreur grave comme réduire les ressources des bénéficiaires. D’autant plus que l’erreur de type I reste proche du seuil α .

Cependant, que se passe-t-il pour l’erreur de type II? L’erreur de type II correspond ici au risque des bénéficiaires soit la probabilité de retirer ou réduire à tort des ressources nécessaires à une population. Dans cette section, nous allons évaluer l’erreur de type II en utilisant le test binomial exact et le test du score comme dans la section précédente.

2.4.1 Estimation de l’erreur de type II avec le test binomial

De manière similaire à l’estimation de l’erreur de type I, nous allons pour $\alpha, \beta = 5\%, 10\%$ estimer l’erreur de type II mais en se plaçant sous l’hypothèse alternative $H_1 : p_1 < \bar{p}$. Nous allons estimer les probabilités erreurs de type I et II pour des tailles $n = 19$ et $n = 35$.

Simulation 2.3: Estimation de la proportion de rejet sous H_1

-Test à 2 proportions

Sous $H_1 : p_2 = p_1 + 0,3$ avec p_1 variant dans $[0,1;0,7]$ selon un pas de 0,01, on simule sous H_1 , des échantillons aléatoires indépendants S_1, S_2 pour une taille $n = 19$ et $n = 35$. On choisit le seuil critique c avec \hat{p}_2 . On calcule B fois l'erreur de type II sous H_1 pour $S_1 \geq c$ ainsi que l'intervalle de confiance à 95% associé à chaque erreur de type II.

-Test à 5 proportions

Sous $H_1 : \bar{p} = p_1 + 0,3$ avec p_1 variant dans $[0,1;0,7]$ selon un pas de 0,01, on simule sous H_1 , des échantillons aléatoires indépendants S_1, \dots, S_5 pour une taille $n = 19$ et $n = 35$. On calcule B fois l'erreur de type II avec l'intervalle de confiance associé.

Commentaires sur les simulations

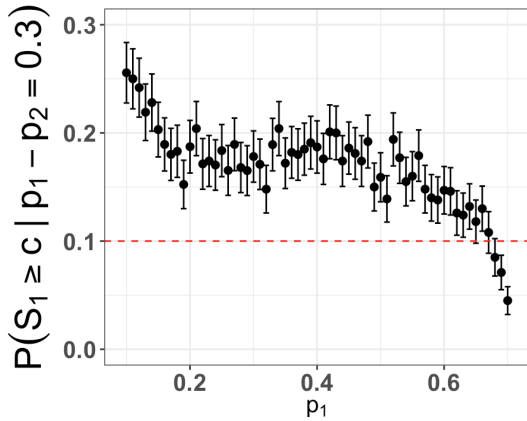
Pour estimer l'erreur de type II, on se place sous H_1 et on suppose un effet de taille de 0,3. Dans le cas à 2 proportions par exemple, on considère un écart entre p_1 et p_2 égale à 0,3. On choisit ensuite $p_0 = \hat{p}_2$ ainsi que le seuil critique. Lorsque $p_2 \in [0,4;1]$, la proportion de test rejet est plus faible. On tombe moins souvent sur des valeurs de $p_0 < 0,3$. Pour rappel, on ignore comment Valadez a choisi des valeurs critique pour $p_0 < 0,3$.

Commentaires sur les résultats

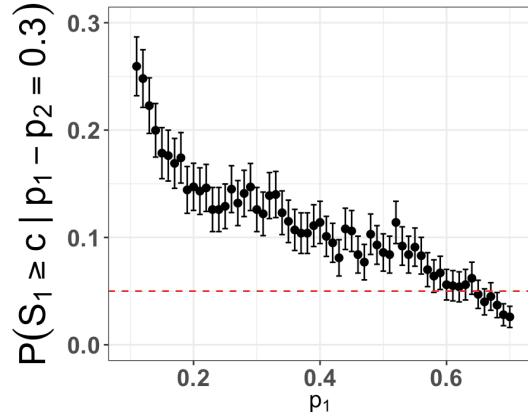
On remarque sur les figures 2.8 et 2.9, une erreur de type II qui décroît en fonction de p . Un résultat auquel on pouvait s'attendre puisque les erreurs α et β varient en sens inverse.

Dans la comparaison de 2 proportions, l'erreur de type II atteint 20% pour $n = 19$ lorsque $p_1 < 0,45$. L'erreur de type II diminue jusqu'à arriver en dessous du seuil $\beta = 10\%$ lorsque $p_1 \geq 0,45$. Pour une taille $n = 35$, la décroissance de l'erreur de type II en fonction de p est nette. L'erreur de type II varie de 0,25 à 0,15 lorsque $p_1 < 0,3$. Pour des proportions $p_1 \geq 0,4$, l'erreur de type II décroît jusqu'à avoir une valeur plus petite que le seuil $\beta = 5\%$.

Pour 5 proportions, l'erreur de type II n'est pas plus grande que le seuil β aussi bien pour une taille $n = 19$ que pour $n = 35$. Il semble ici encore que le choix d'une proportion p_0 estimée à partir des données n'implique pas une erreur de type II plus élevée que le seuil β .

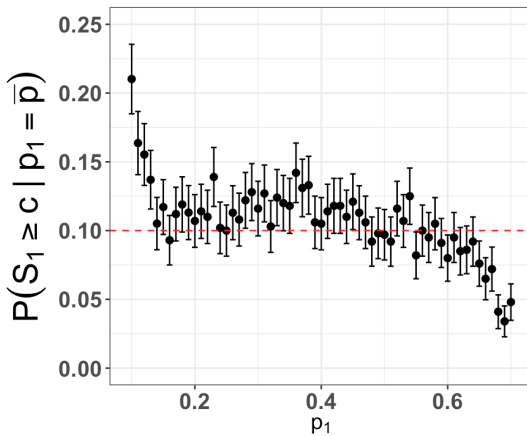


(a) $J = 2, n = 19, \alpha, \beta = 10\%$

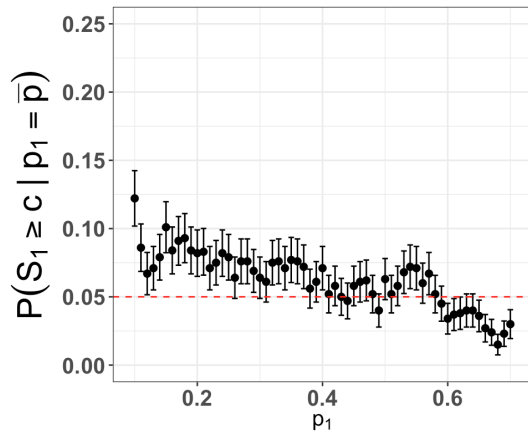


(b) $J = 2, n = 35, \alpha, \beta = 5\%$

FIGURE 2.8 – Estimation de l’erreur de type II par la binomiale exacte quand $n = 19, fig_a, n = 35, fig_b$, $B = 1000, \alpha, \beta = 5\%; 10\%$ et $p_2 \in [0, 1; 0, 7]$ pour 2 proportions



(a) $J = 5, n = 19, \alpha, \beta = 10\%$



(b) $J = 5, n = 35, \alpha, \beta = 5\%$

FIGURE 2.9 – Estimation de l’erreur de type II par la binomiale exacte quand $n = 19, fig_a, n = 35, fig_b$, $B = 1000, \alpha, \beta = 5\%; 10\%$ et $\bar{p} \in [0, 1; 0, 7]$ pour 5 proportions

2.4.2 Estimation de l’erreur de type II avec l’approximation normale

On vérifie empiriquement cette fois-ci l’erreur de type II pour le test du score.

Simulation 2.4: Estimation de la proportion de rejet sous H_1

-Test à 2 proportions

Sous $H_1 : p_2 = p_1 + 0,3$, on choisit de faire varier p_2 dans $[0, 1; 0, 7]$ avec un pas de 0,01. Les proportions p_1 et p_2 correspondent aux vraies probabilités de succès des deux populations à comparer. On simule sous H_1 , des échantillons aléatoires indépendants tels que S_1, S_2 avec $n = 19$ et $n = 35$. On calcule B fois l’erreur de type II sous H_1 pour $z_5 < z_\alpha$. On détermine B fois l’intervalle de confiance à 95% associé à chaque erreur de type II.

-Test à 5 proportions

Sous $H_1 : \bar{p} = p_1 + 0,3$, \bar{p} variant dans $[0,1;0,7]$ avec un pas de 0,01 pour un échantillon de taille $n = 19$. et $n = 35$. On calcule B fois l'erreur de type II avec l'intervalle de confiance associé.

Commentaires sur les simulations

On fait varier $p_1 \in [0,1;0,7]$ car nous avons pris un effet de taille de 0,3 de telle sorte que $p_2 \in [0,4;1]$ et $\bar{p} \in [0,4;1]$. On rappelle les conditions d'application du test. L'approximation est moins bonne pour $np_0 \leq 5$ et $n(1-p_0) \leq 5$. Pour $n = 19$ les conditions ne sont pas respectées lorsque $p_0 < 0,3$ et quand $p_0 > 0,7$. Pour $n = 35$, les conditions ne sont pas respectées lorsque $p_0 < 0,15$ et pour $p_0 > 0,85$.

Commentaires sur les résultats

L'erreur de type II semble globalement décroître en fonction de p_1 . On pouvait s'attendre à ce résultat puisqu'on avait observé une croissance de l'erreur de type I et il est connu que α et β varient en sens inverse. Dans le cas à 2 proportions, l'erreur de type II s'éloigne du seuil β pour atteindre respectivement 20% et 10% lorsque $n = 19$ et $n = 35$.

Pour 5 proportions, l'erreur de type II atteint 15% lorsque $p_1 \leq 0,5$ pour $n = 19$ et près de 10% quand $n = 35$. Il semble que l'erreur de type II est plus élevée pour des proportions p_1 entre 0,2 et 0,5. Si l'erreur de type I est globalement faible avec une légère hausse, l'erreur de type II est en revanche un peu plus élevée. Autrement dit, la probabilité de réduire les ressources nécessaires à des bénéficiaires est plus importante. Une conclusion similaire est faite dans l'article de Rhoda et al. [2010] mais avec d'autres arguments.

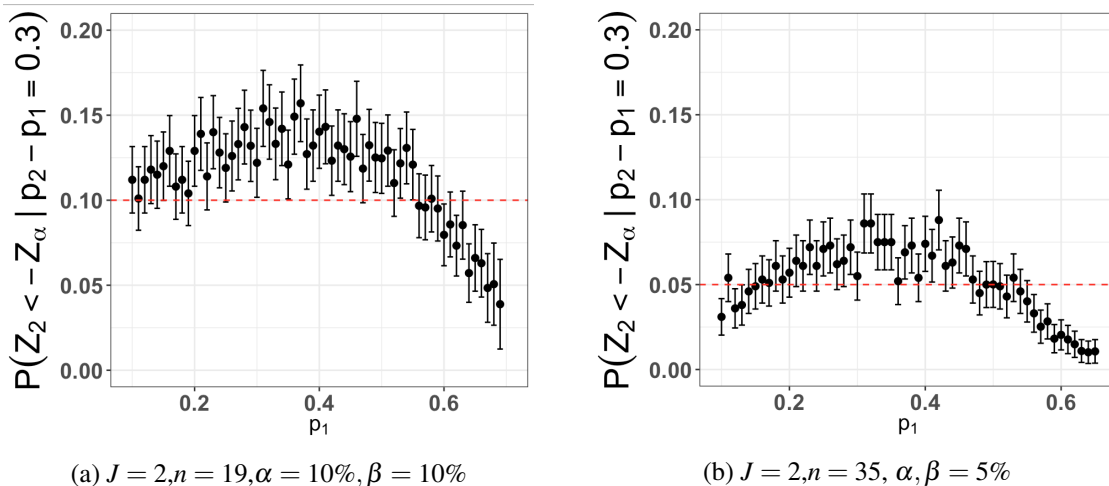
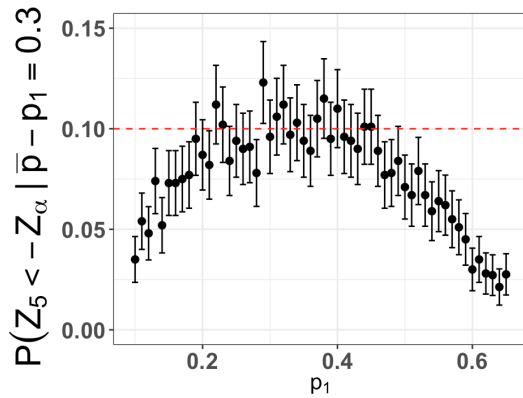
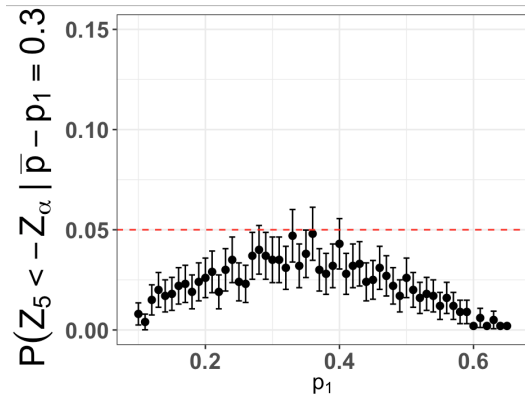


FIGURE 2.10 – Estimation de l'erreur de type II pour une approximation par la loi normale quand $n = 19$, fig_a , $n = 35$, fig_b , $B = 1000$, $\alpha, \beta = 5\%; 10\%$ et $p_2 \in [0,1;0,7]$ pour 2 proportions



(a) $J = 5, n = 19, \alpha, \beta = 10\%$



(b) $J = 5, n = 35, \alpha, \beta = 5\%$

FIGURE 2.11 – Estimation de l’erreur de type II par approximation d’une binomiale par une loi normale quand $n = 19, fig_a, n = 35, fig_b, B = 1000, \alpha, \beta = 5\%; 10\%$ et $\bar{p} \in [0, 1; 0, 7]$ pour 5 proportions

2.5 Discussion

Au sortie de ce chapitre, on note que le choix de la proportion p_0 estimée à partir des données observées, dans le cas de 5 proportions, ne donne pas des erreurs de type I et II beaucoup plus élevées que les seuils α et β . On doit cependant faire plus attention lorsqu’on compare 2 proportions, les erreurs de type I et II étant quasiment le double des seuils α et β choisis. En particulier, l’erreur de type I est plus élevée que l’erreur de type II. Autrement dit, le risque du gestionnaire est plus élevé que le risque des bénéficiaires. La probabilité d’allouer plus de ressources à une population non prioritaire est plus élevée.

Le choix d’une proportion p_0 estimée à partir des données observées ne peut pas se défendre sur le plan théorique même si cette solution semble fonctionner. En effet, dans le test usuel à une proportion p_0 doit être fixe. On ne recommande pas d’estimer p_0 à partir des données observées comme suggéré dans le manuel des participants Valadez et al. [2002]. On recommande plutôt de choisir *a priori* la valeur de p_0 qui correspond à l’objectif de performance de l’organisme. Pour réaliser de manière appropriée, la comparaison de la la jème proportion à la moyenne des $(J - 1)$ proportions, nous allons proposer d’autres méthodes, ce qui fera l’objet du prochain chapitre.

Chapitre 3

Méthodes alternatives pour la comparaison d'une proportion avec la moyenne de $(k - 1)$ proportions

Au chapitre 2, nous avons montré l'impact sur les erreurs de type I et II du choix d'une proportion p_0 estimée à partir des données observées. À présent, nous allons proposer des méthodes adaptées pour réaliser le test de comparaison d'une proportion avec la moyenne d'autres proportions. De manière similaire aux méthodes présentées dans le chapitre 1, nous allons proposer des tests exacts et des tests approximatifs. Nous allons pour chacune de ces méthodes présenter comment calculer la taille n pour α , β et des proportions choisies.

Nous allons d'abord présenter le test exact de Fisher ensuite le test exact de Barnard avant de passer au test basé sur une approximation normale sans et avec la transformation $\arcsin(\sqrt{x})$. Nous allons voir que cette transformation est intéressante dans la mesure où elle permet de stabiliser la variance et donc de mieux contrôler les erreurs de type I et II. On reprend la notation du chapitre 2, section 2.1. Pour éviter la confusion avec le chapitre 2, on parlera de K populations à comparer au lieu de J .

3.1 Comparaison selon le test exact de Fisher

Le test exact de Fisher est une méthode intéressante à considérer pour comparer deux proportions. D'autant plus que l'un des objectifs du LQAS est d'utiliser dans les enquêtes une petite taille n afin de réaliser en peu de temps avec peu de ressources le suivi des activités menées par les organismes (voir Valadez [1991]). Aussi, le test exact de Fisher est plus puissant que le test d'indépendance du chi-deux ou le test d'indépendance avec la statistique de test G^2 lorsque les tailles n sont petites (McDonald [2014]). Nous allons dans cette section présenter le test exact de Fisher et la détermination de la taille n tout en contrôlant les erreurs α et β . Nous allons par la suite faire des simulations pour illustrer les valeurs des erreurs de type I et II.

3.1.1 Test exact de Fisher

On utilise ici le test exact de Fisher pour étudier si les proportions de succès des régions d'intervention sont significativement différentes selon les indicateurs à l'étude. Par exemple, on peut comparer deux régions d'intervention selon les proportions d'enfants de 6 à 12 ans scolarisés. Le test est dit exact car le seuil observé est calculé de manière exacte plutôt que de manière approximative comme dans le test du chi-deux. Nous allons présenter dans cette partie, la comparaison de 2 proportions puis la comparaison d'une proportion avec la moyenne de $k - 1$ proportions.

Comparaison de deux probabilités de succès

Utilisé pour l'analyse des tables de contingence, le test exact de Fisher peut s'appliquer à une table 2x2. On considère alors toutes les tables 2x2 qu'on peut déduire de la table observée avec l'hypothèse que les marges restent fixes. Soient $S_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p_1)$ et $S_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p_2)$, on souhaite comparer les probabilités de succès p_1 et p_2 . Les hypothèses du test s'écrivent comme suit :

$$H_0 : p_1 = p_2 \text{ vs } H_1 : p_1 < p_2$$

On s'intéresse à la table 2x2 suivante :

Échantillon	Succès	Échec	
1	n_{11}	n_{12}	$n_{1.}$
2	n_{21}	n_{22}	$n_{2.}$
	$n_{.1}$	$n_{.2}$	n

TABLE 3.1 – Table 2x2 utilisée dans le test de Fisher exact

Le test proposé par Fisher est conditionnel aux marges du tableau observé de telle sorte que sous l'hypothèse nulle d'indépendance, la statistique du test suit une loi hypergéométrique (voir annexe C). Autrement dit la distribution conditionnelle de $S_1 = n_{11}$ sous $H_0 : p_1 = p_2$ selon $n_{1.} + n_{2.} = n$ est une hypergéométrique pour $k \in \max(0, n_{.1} + n_{1.} - n), \min(n_{.1}, n_{1.})$ et est donnée par :

$$P(n_{11} | n_{1.}, n_{2.}, n_{.1}, n_{.2}) = \frac{\binom{n_{1.}}{n_{11}} \binom{n - n_{1.}}{n_{.1} - n_{11}}}{\binom{n}{n_{.1}}} \quad (3.1)$$

On se demande sous H_1 si n_{11} est beaucoup plus petit qu'attendu sous H_0 (Agresti and Kateri [2011]). Les valeurs possibles de n_{11} sont entre $[n_{inf}, n_{sup}]$ avec $n_{inf} = \max(0, n_{.1} + n_{1.} - n)$ et $n_{sup} = \min(n_{.1}, n_{1.})$. Dans le cas où l'hypothèse alternative est $H_1 : p_1 < p_2$, la p-valeur qu'on note α_{obs} est donnée par la somme des probabilités d'observer les tableaux avec $n_{11} \leq n_{11obs}$. Pour rappel, on calcule le seuil observé sous H_0 en calculant la probabilité de tomber sur un résultat égal ou plus extrême que celui observé. Dans le contexte, extrême veut dire que n_{11} soit plus petit que n_{11obs} . Le seuil observé est donné par l'expression suivante avec a, b et c des constantes :

$$\alpha_{obs} = \sum_{s=0}^{n_{1obs}} P(n_{11} = s | n_{1.} = a, n_{.1} = b \text{ et } n = c) \quad (3.2)$$

Toutefois, le test exact de Fisher est connu pour être un test conservateur soit à ne pas assez rejeter l'hypothèse nulle H_0 (voir Agresti and Kateri [2011]). Ainsi pour atténuer l'aspect conservateur du test exact de Fisher, on divise la probabilité $P(n_{11} = s | n_{1.} = a, n_{.1} = b \text{ et } n = c)$ par 2 puisque cette valeur est tout aussi probable sous H_0 avec a, b et c des constantes. Le seuil observé ainsi modifié s'appelle la *mid p-value* et empêche le test d'être trop conservateur. Notons α_{obs}^* la *mid p-value*, son expression est la suivante :

$$\alpha_{obs}^* = \sum_{s=0}^{n_{1obs}-1} P(n_{11} = s | n_{1.} = w \text{ et } n = c) + \frac{1}{2} \cdot P(n_{11} = n_{1obs} | n_{1.} = a, n_{.1} = b \text{ et } n = c) \quad (3.3)$$

Exemple illustratif

On illustre l'application du test exact sur la table 2x2 (3.2). On cherche à comparer deux régions selon leur proportion de succès avec comme hypothèse alternative $H_1 : p_1 < p_2$. On suppose ici qu'on a un échantillon de taille $n = 38$ enfants de 6 à 12 ans et un succès équivaut à un enfant scolarisé. À

Régions	1	0	
R1	2	17	19
R2	11	8	19
	13	25	38

TABLE 3.2 – Table observée 2x2

partir de la table (3.2), on peut déduire les différentes tables suivantes pour $n_{11} \leq 2$. On calcule la probabilité d'observer chacune de ces tables et la somme de ces probabilités permet d'obtenir le seuil observé.

1	0		
R_1	0	19	19
R_2	13	6	19
	13	25	38

1	0		
R_1	1	18	19
R_2	12	7	19
	13	25	38

1	0		
R_1	2	17	19
R_2	11	8	19
	13	25	38

On rejette $H_0 : p_1 = p_2$ si $\alpha_{obs} \leq \alpha$. Dans la table 3.2, $n_{1obs} = 2, n_{1.} = n_{.1} = 19$ et $n = 38$ et les valeurs possibles de n_{11} avec l'hypothèse que les marges restent fixes $n_{1.} = n_{.1} = 19$ sont entre 0 et

19. On calcule le seuil observé comme suit :

$$\begin{aligned}\alpha_{obs} &= \sum_{s=0}^2 P(n_{11} = s | n_{1.} = 19, n_{.1} = 19 \text{ et } n = 38) \\ &= \sum_{s=0}^2 \frac{\binom{19}{s} \binom{19}{13-s}}{\binom{19}{13}} \\ &= 0,0028\end{aligned}$$

La *mid p-value* est donnée par la somme suivante de probabilités :

$$\begin{aligned}\alpha_{obs}^* &= \sum_{s=0}^1 P(n_{11} = s | n_{1.} = 19, n_{.1} = 19 \text{ et } n = 38) + \frac{1}{2} \cdot P(n_{11} = 2 | n_{1.} = 19, n_{.1} = 19 \text{ et } n = 38) \\ &= \sum_{s=0}^1 \frac{\binom{19}{s} \binom{19}{13-s}}{\binom{19}{13}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{19}{2} \binom{19}{11}}{\binom{19}{13}} \\ &= 0,0015\end{aligned}$$

On observe un seuil plus petit que $\alpha = 5\%$ ou $\alpha = 10\%$, on rejette l'hypothèse nulle d'égalité des proportions. On conclut que la région 2 a plus d'enfants scolarisés que la région 1.

Comparaison d'une proportion avec la moyenne des $(k - 1)$ proportions

Considérons qu'on dispose de k populations et de k échantillons aléatoires indépendants issus de ces populations. Les hypothèses du test s'écrivent comme suit :

$$H_0 : p_1 = \bar{p} \text{ vs } H_1 : p_1 < \bar{p}$$

On peut appliquer le test de Fisher à un tableau $k \times 2$ en le ramenant à un tableau 2×2 comme suit : Par

Table $k \times 2$ observée				Table transformée en format 2×2			
	Succès	Échec		Succès	Échec		
R_1	n_{11}	n_{12}	$n_{1.}$	R_1	n_{11}	n_{12}	$n_{1.}$
R_2	n_{21}	n_{22}	$n_{2.}$	$R_2 \text{ à } R_k$	$\sum_{j=2}^k n_{j1}$	$\sum_{j=2}^k n_{j2}$	$\sum_{j=2}^k n_{j.}$
\dots							
R_{k-1}	$n_{(k-1)1}$	$n_{(k-1)2}$	$n_{(k-1).}$		$n_{.1}$	$n_{.2}$	n
R_k	n_{k1}	n_{k2}	$n_{k.}$				
	$n_{.1}$	$n_{.2}$	n				

TABLE 3.3 – Passage d'une table observé $k \times 2$ à une table 2×2

exemple pour $k = 5$, on obtient :

Table 5x2 observée

Échantillons	1	0	
R_1	12	7	19
R_2	5	14	19
R_3	10	9	19
R_4	2	17	19
R_5	15	4	19
	44	51	95

Table transformée en format 2x2

Échantillons	1	0	
R_1	12	7	19
$R_2+R_3+R_4+R_5$	32	44	76
	44	51	95

TABLE 3.4 – Passage d'une table au format 5x2 à une table 2x2

3.1.2 Calcul de la taille n

Nous avons montré dans l'exemple précédent comment utiliser le test exact de Fisher sur une table 2x2 et prendre une décision au seuil α , tout en ignorant la puissance du test et donc l'erreur β commise. Toutefois dans le LQAS, on s'intéresse à contrôler à la fois α et β . Pour ce faire, nous allons introduire le calcul de la taille n . Connaissant la valeur de α , nous allons estimer la valeur de β *a posteriori* pour n , α et des proportions de succès connues. Pour rappel, les hypothèses du test sont :

$$H_0 : p_1 = \bar{p} \text{ vs } H_1 : p_1 < \bar{p}$$

Pour trouver la taille n dans le cas de la comparaison d'une proportion avec la moyenne de 4 autres proportions, on choisit *a priori* n , les proportions p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5 ainsi que la probabilité d'erreur α . On utilise ces valeurs pour trouver la puissance et donc en déduire la probabilité d'erreur β .

On pu aurait pu faire le calcul de la puissance directement mais on souhaite comparer plus que 2 proportions en tenant compte de la correction pour la *mid p-value*.

Pour obtenir la puissance de ce test, on calcule la probabilité de rejeter $H_0 : p_1 = \bar{p}$ sachant que H_0 est faux. Pour $n, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ et α choisis, on réalise $B = 1000$ fois le test exact de Fisher. On récupère les 1000 p-valeurs et on regarde la proportion de p-valeurs inférieure au seuil α choisi.

On rappelle qu'on réalise les tests sous l'hypothèse alternative $H_1 : p_1 < \bar{p}$ avec $\bar{p} - p_1 = 0,3$. À partir de la taille $n = 23$, les valeurs obtenues de β sont strictement inférieures à 10% (voir table 3.5).

n	p_1												
	10%	15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%	50%	55%	60%	65%	70%
12	0,17	0,20	0,26	0,26	0,27	0,31	0,27	0,28	0,23	0,22	0,16	0,12	0,08
13	0,13	0,21	0,23	0,26	0,24	0,27	0,25	0,26	0,21	0,20	0,15	0,08	0,07
14	0,13	0,20	0,21	0,24	0,24	0,24	0,23	0,20	0,21	0,17	0,13	0,08	0,06
15	0,12	0,14	0,20	0,19	0,20	0,21	0,21	0,18	0,15	0,13	0,11	0,07	0,03
16	0,09	0,15	0,17	0,16	0,17	0,17	0,17	0,21	0,16	0,14	0,08	0,05	0,03
17	0,08	0,11	0,13	0,18	0,17	0,16	0,16	0,15	0,14	0,10	0,08	0,05	0,01
18	0,08	0,11	0,13	0,15	0,15	0,19	0,16	0,13	0,12	0,11	0,07	0,04	0,00
19	0,08	0,08	0,11	0,13	0,15	0,16	0,12	0,12	0,10	0,10	0,06	0,04	0,02
20	0,05	0,08	0,11	0,13	0,13	0,14	0,13	0,12	0,11	0,08	0,05	0,02	0,01
21	0,05	0,07	0,09	0,09	0,10	0,12	0,12	0,10	0,08	0,06	0,04	0,02	0,00
22	0,03	0,08	0,07	0,09	0,10	0,13	0,09	0,07	0,10	0,06	0,05	0,03	0,00
23	0,03	0,06	0,06	0,07	0,10	0,09	0,09	0,07	0,07	0,06	0,04	0,02	0,00
24	0,03	0,04	0,07	0,08	0,08	0,09	0,07	0,06	0,07	0,05	0,03	0,01	0,00
25	0,02	0,04	0,06	0,06	0,07	0,08	0,07	0,06	0,06	0,03	0,02	0,01	0,00
26	0,01	0,03	0,04	0,06	0,07	0,06	0,07	0,06	0,05	0,04	0,02	0,01	0,00
27	0,01	0,03	0,05	0,05	0,07	0,06	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00
28	0,02	0,03	0,05	0,06	0,07	0,05	0,06	0,05	0,04	0,02	0,02	0,01	0,00
29	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,05	0,05	0,05	0,03	0,03	0,02	0,00	0,00
30	0,01	0,02	0,03	0,04	0,04	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00	0,00

TABLE 3.5 – Seuils β pour $\alpha = 10\%$ et un effet de taille de 0,3 selon n et p_1 dans le test exact de Fisher

3.1.3 Illustrations

Les figurent 3.1 et 3.2 présentent respectivement les probabilités d'erreurs de type I et II que l'on obtient selon la taille $n = 23$ et pour $p \in [0, 1; 0, 9]$. On constate que les erreurs de type I et II sont similaires aux erreurs α et β avec un niveau de confiance à 95%.

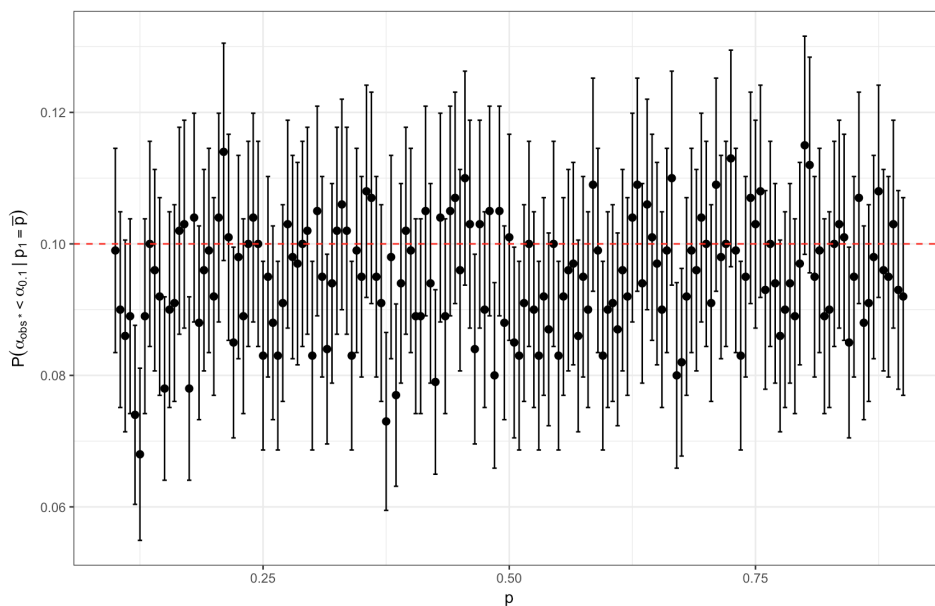


FIGURE 3.1 – Estimation de l'erreur de type I avec $\alpha, \beta \leq 10\%$ $k = 5$, $n = 23$ et p variant dans $[0, 1; 0, 9]$

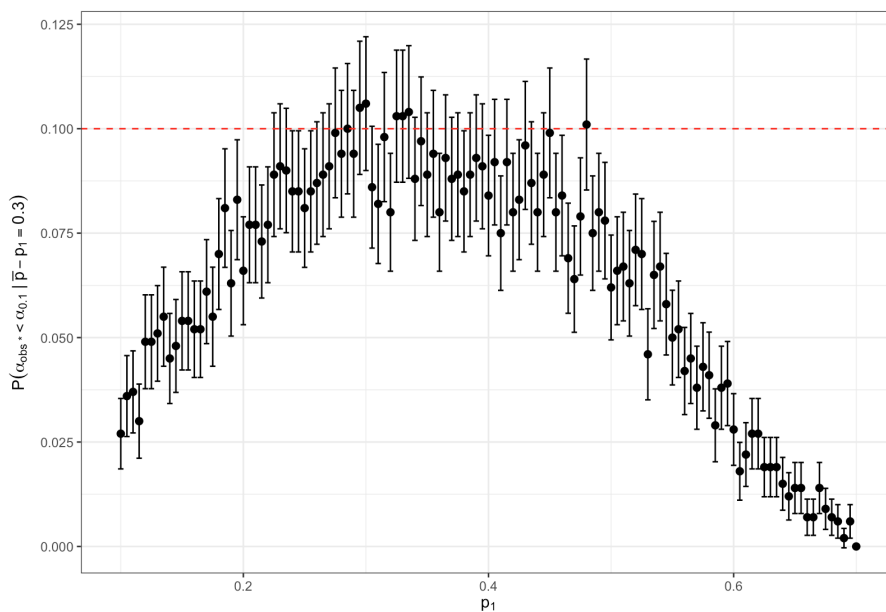


FIGURE 3.2 – Estimation de l'erreur de type II avec $\alpha, \beta \leq 10\%$, $k = 5$, $n = 23$ et p variant dans $[0, 1; 0, 7]$

Test conditionnel et test non conditionnel

Nous allons introduire le test exact de Barnard, qui est un test non conditionnel. Contrairement au test Fisher exact, le test exact Barnard ne fait pas l'hypothèse que toutes les marges du tableau observé sont fixes. Si dans le test de Fisher, l'hypothèse que les marges restent fixes permet de se départir de la proportion inconnue commune p sous H_0 et d'avoir une distribution hypergéométrique pour la statistique de test, dans le test exact de Barnard en revanche, le paramètre p ne disparaît pas. La différence principale entre les deux tests réside justement dans le traitement de ce paramètre de nuisance.

Une manière de calculer le seuil observé proposée par Barnard est de trouver la proportion p qui maximise le seuil observé. Nous allons voir dans la prochaine section plus en détails le test exact de Barnard.

3.2 Comparaison selon le test exact de Barnard

Le test exact de Barnard est considéré comme plus puissant que le test exact de Fisher. En effet, le test de Fisher est dit trop conservateur ce qui induit une perte de puissance. D'après Mehta and Senchaudhuri [2003], le test exact de Barnard est en particulier plus puissant pour un tableau 2x2 mais perd en puissance lorsqu'on s'intéresse à des tableaux de dimensions plus élevées.

Cependant, l'introduction de la correction du seuil observé avec la *mid p-value* permet de d'atténuer cet aspect conservateur du test exact de Fisher. Alors dans ce cas pourquoi utiliser le test exact de Barnard? L'avantage d'utiliser le test exact de Barnard peut se trouver dans le calcul *a priori* de la taille n . En effet, étant libre de l'hypothèse des marges fixes, on peut calculer n .

3.2.1 Test exact de Barnard

Dans le test proposé par Barnard, on souhaite réaliser un test exact similaire au test exact de Fisher tout en se libérant de l'hypothèse des marges fixes.

Comparaison de deux probabilités de succès

On dispose de deux échantillons aléatoires indépendants. Soient $S_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p_1)$ et $S_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p_2)$, on souhaite comparer les probabilités de succès p_1 et p_2 . Les hypothèses du test s'écrivent comme suit :

$$H_0 : p_1 = p_2 \text{ vs } H_1 : p_1 < p_2$$

On reprend le même tableau 2x2 (3.1). La probabilité d'observer un tableau dans le test de Fisher est donné avec l'équation (3.1) et la probabilité d'observer un tableau dans le test de Barnard est donnée par l'équation suivante Andrés and Tejedor [1995] :

$$\begin{aligned}
P(n_{11} = x, n_{21} = y | n_{1.}, n_{2.}) &= P(x, y) \\
&= \binom{n_{1.}}{n_{11}} \binom{n_{2.}}{n_{21}} p^{x+y} (1-p)^{n-x-y}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Preuve :

On peut retrouver ce résultat en remarquant que $n_{11} \sim \mathcal{B}(n_{1.}, p)$ et $n_{21} \sim \mathcal{B}(n_{2.}, p)$, ainsi :

$$P(n_{11} = x) = \binom{n_{1.}}{n_{11}} p^x (1-p)^{n_{1.}-x}$$

$$P(n_{21} = y) = \binom{n_{2.}}{n_{21}} p^y (1-p)^{n_{2.}-y}$$

Puisque les variables aléatoires n_{11} et n_{21} sont indépendantes, on peut écrire leur probabilité conjointe sous forme de produit, on obtient :

$$\begin{aligned}
P(x, y) &= P(n_{11} = x) P(n_{21} = y) \\
&= \binom{n_{1.}}{n_{11}} p^x (1-p)^{n_{1.}-x} \binom{n_{2.}}{n_{21}} p^y (1-p)^{n_{2.}-y} \\
&= \binom{n_{1.}}{n_{11}} \binom{n_{2.}}{n_{21}} p^{x+y} (1-p)^{n_{1.}+n_{2.}-x-y} \\
&= \binom{n_{1.}}{n_{11}} \binom{n_{2.}}{n_{21}} p^{x+y} (1-p)^{n-x-y}
\end{aligned}$$

Statistiques de test

Barnard propose deux statistiques de test, une basée sur le score :

$$T_{score} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p}) \left(\frac{1}{n_{1.}} + \frac{1}{n_{2.}} \right)}} \tag{3.5}$$

et une basée sur la statistique de Wald :

$$T_{wald} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_{1.}} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_{2.}}}} \tag{3.6}$$

Sous $H_0 : p_1 = p_2 = p$ avec p la proportion commune sous H_0 , on estime les proportions p_1, p_2 et p respectivement par $\hat{p}_1 = \frac{n_{11}}{n_{1.}}, \hat{p}_2 = \frac{n_{21}}{n_{2.}}$ et $\hat{p} = \frac{n_{11} + n_{21}}{n}$. Nous allons utiliser dans la suite la notation T_{obs} pour faire référence à la statistique observée du score ou de Wald.

Le test de Barnard est un test exact non paramétrique. Dans le test de Fisher, sous H_0 la probabilité d'observer chaque table ne dépend plus du paramètre de nuisance p . Cependant, dans le test exact de

Barnard, la probabilité d'observer un tableau dépend du paramètre de nuisance p . Soit $T(n_{11}, n_{21})$, la statistique de test pour une table avec n_{11} et n_{21} , on cherche la probabilité que $T(n_{11}, n_{21})$, soit plus petite que T_{obs} . Le seuil observé pour un paramètre de nuisance p inconnu est donné par :

$$\alpha_{obs}(p) = \sum_{n_{11}, n_{21} | T(n_{11}, n_{21}) \leq T_{obs}} \binom{n_{1.}}{n_{11}} \binom{n_{2.}}{n_{21}} p^{n_{1.}} (1-p)^{n_{2.}} \quad (3.7)$$

Pour éliminer le paramètre de nuisance, Barnard propose de calculer le seuil observé en prenant le maximum de tous les seuils observés calculés pour p variant dans $[0; 1]$ soit $\alpha_{obs} = \text{Sup}\{\alpha_{obs}(p), p \in [0; 1]\}$. On détermine la statistique $T(n_{11}, n_{21})$ que l'on compare à T_{obs} et on calcule le seuil observé. On choisit par la suite la valeur de p qui maximise le seuil observé. Le test de Barnard ne peut se faire que par calcul numérique et reste intensif en calcul.

Exemple illustratif

On reprend le même exemple présenté dans le test exact de Fisher. On réalise le test avec la statistique du score (3.5). La statistique de test est calculée selon la statistique du score où $\hat{p} = \frac{2+11}{38}$.

$$T_{obs} = \frac{2/19 - 11/19}{\sqrt{(13/38) * (1 - 13/38) * (1/19 + 1/19)}} = -3,077$$

Pour rappel, on considère le tableau observé suivant :

Régions	1	0	
R1	2	17	19
R2	11	8	19
	13	25	38

Table observée 2x2

Par calcul numérique, on trouve la valeur de $p = 0,7801$ qui maximise le seuil observé $\alpha_{obs} = 0,0018$. Cette valeur de α_{obs} n'est pas loin du seuil observé trouvé dans le test exact de Fisher lorsqu'on corrige en utilisant la *mid p-value*. On avait trouvé dans le test exact de Fisher une *mid p-value* égale à 0,0015. La figure 3.3 représente la valeur maximale de la *mid p-value* identifiée en rouge.

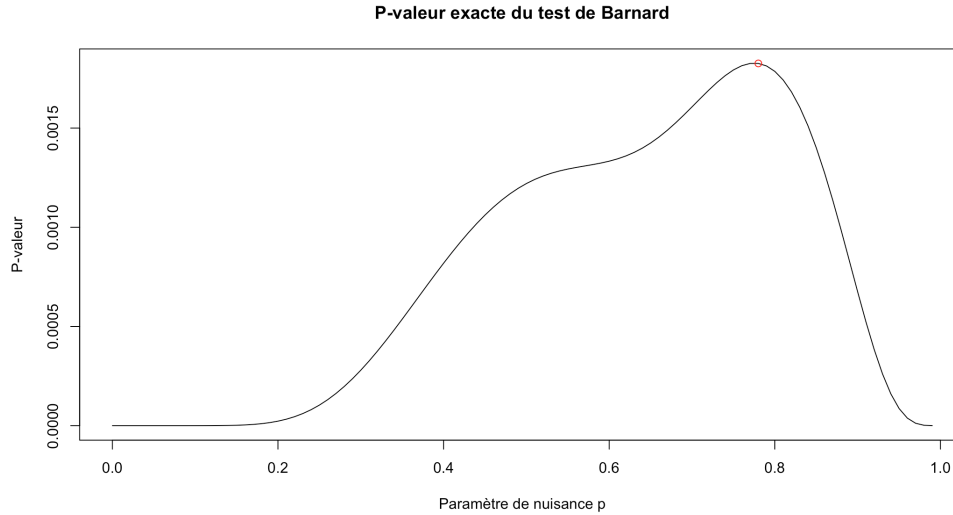


FIGURE 3.3 – P-valeur du test exact de Barnard

Comparaison d'une proportion avec la moyenne des $(k - 1)$ proportions

De manière similaire au test exact de Fisher, on ramène le tableau $k \times 2$ à un tableau 2×2 . On cherche à tester les mêmes hypothèses :

$$H_0 : p_1 = \bar{p} \text{ vs } H_1 : p_1 < \bar{p}$$

On peut réaliser le test de Barnard pour plusieurs proportions de la même manière qu'on a adapté le test exact de Fisher. On utilise le même procédé énoncé dans la partie 3.1.1. Sous $H_0 : p_1 = \bar{p} = p$ avec p la proportion commune sous H_0 , on estime les proportions p_1, \bar{p} et p respectivement par :

$$p_1 = \frac{n_{11}}{n_{1.}} \quad (3.8)$$

$$\hat{p} = \frac{\sum_{j=2}^k n_{j1}}{\sum_{j=2}^k n_{j.}} \quad (3.9)$$

$$\hat{p} = \frac{n_{11} + \sum_{j=2}^k n_{j1}}{n} \quad (3.10)$$

Statistiques de test

On peut écrire la statistique du score comme suit :

$$T_{score} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p}) \left(\frac{1}{n_{1.}} + \frac{1}{\sum_{j=2}^k n_{j.}} \right)}} \quad (3.11)$$

et la statistique de Wald comme suit :

$$T_{wald} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_{1.}} + \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{\sum_{j=2}^k n_j}}} \quad (3.12)$$

3.2.2 Calcul de la taille n

Pour $\alpha = 10\%$ et $n \in [12;30]$, nous allons déterminer la taille n qui permet d'obtenir $\beta \leq 10\%$ pour un effet de taille de 0,3. On calcule β pour différentes proportions p_1 pour $n = 12, 13, \dots, 30$. On peut obtenir l'erreur β comme suit

$$\beta(p) = \sum_{n_{11}, n_{21} | T(n_{11}, n_{21}) > T_{obs}} \binom{n_{1.}}{n_{11}} \binom{n_{2.}}{n_{21}} p^{n_{1.}} (1-p)^{n_{2.}} \quad (3.13)$$

On trouve que la taille $n = 26$ est la plus petite taille qui permet d'obtenir $\alpha \leq 10\%$ et $\beta \leq 10\%$. On peut noter qu'on trouve des tailles n similaires aux tailles n déterminées selon le test exact de Fisher avec correction du seuil observé.

	p_1											
	10%	15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%	50%	55%	60%	65%
12	0,26	0,30	0,32	0,35	0,36	0,36	0,35	0,34	0,31	0,27	0,20	0,14
13	0,22	0,27	0,31	0,32	0,33	0,32	0,31	0,30	0,27	0,24	0,18	0,11
14	0,21	0,25	0,26	0,28	0,29	0,29	0,29	0,28	0,25	0,21	0,16	0,09
15	0,17	0,21	0,25	0,27	0,28	0,27	0,26	0,25	0,22	0,19	0,14	0,08
16	0,16	0,20	0,22	0,23	0,24	0,25	0,25	0,23	0,20	0,16	0,12	0,06
17	0,13	0,17	0,20	0,23	0,24	0,24	0,22	0,21	0,18	0,14	0,10	0,05
18	0,11	0,16	0,18	0,20	0,21	0,21	0,20	0,19	0,16	0,13	0,09	0,05
19	0,10	0,13	0,16	0,17	0,18	0,19	0,19	0,17	0,15	0,11	0,08	0,04
20	0,08	0,13	0,15	0,17	0,18	0,18	0,17	0,16	0,13	0,10	0,07	0,03
21	0,07	0,11	0,13	0,15	0,16	0,16	0,15	0,14	0,12	0,09	0,06	0,03
22	0,06	0,09	0,11	0,13	0,14	0,14	0,14	0,12	0,11	0,08	0,05	0,02
23	0,06	0,09	0,11	0,13	0,13	0,13	0,13	0,12	0,10	0,07	0,04	0,02
24	0,05	0,07	0,09	0,11	0,12	0,12	0,12	0,11	0,09	0,06	0,04	0,02
25	0,04	0,07	0,08	0,10	0,11	0,11	0,10	0,09	0,08	0,05	0,03	0,01
26	0,04	0,06	0,08	0,09	0,10	0,10	0,09	0,08	0,07	0,05	0,03	0,01
27	0,03	0,05	0,07	0,08	0,09	0,09	0,08	0,08	0,06	0,05	0,03	0,01
28	0,03	0,05	0,06	0,07	0,08	0,08	0,08	0,07	0,06	0,04	0,03	0,01
29	0,02	0,04	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07	0,06	0,05	0,04	0,02	0,01
30	0,02	0,04	0,05	0,06	0,07	0,07	0,06	0,06	0,05	0,03	0,02	0,01

TABLE 3.6 – Seuils β pour $\alpha = 10\%$ et un effet de taille de 0,3 selon n et p_1 dans le test exact de Barnard

3.2.3 Illustrations

Dans la table 3.6 la taille $n = 26$ est la taille à partir de laquelle on obtient des erreurs $\alpha, \beta \leq 10\%$. Nous allons maintenant estimer par simulation, les erreurs de type I et II pour $n = 26$ et des valeurs de α, β choisies. Les erreurs de type I et II sur les figures 3.4 et 3.5 respectivement sont inférieures

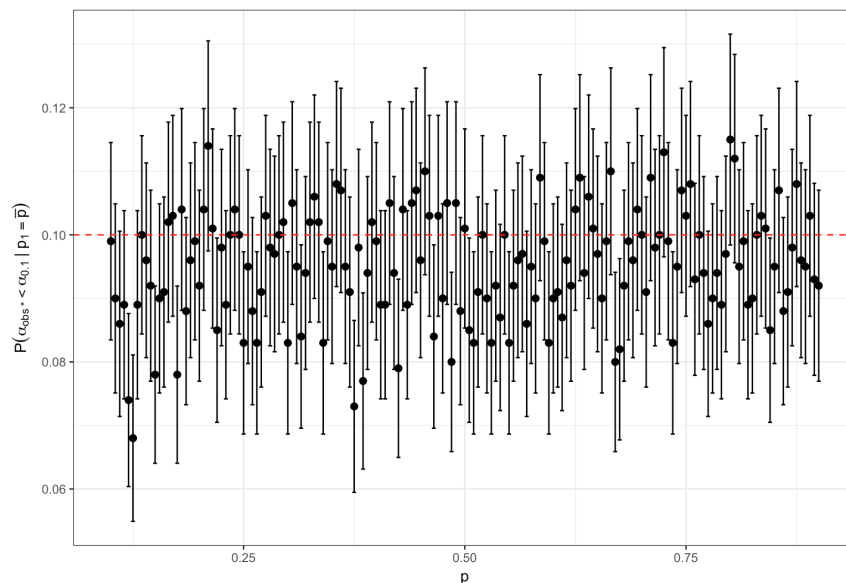


FIGURE 3.4 – Estimation de l'erreur de type I avec $\alpha, \beta \leq 10\%$, $k = 5$, $n = 26$ et p variant dans $[0, 1; 0, 9]$

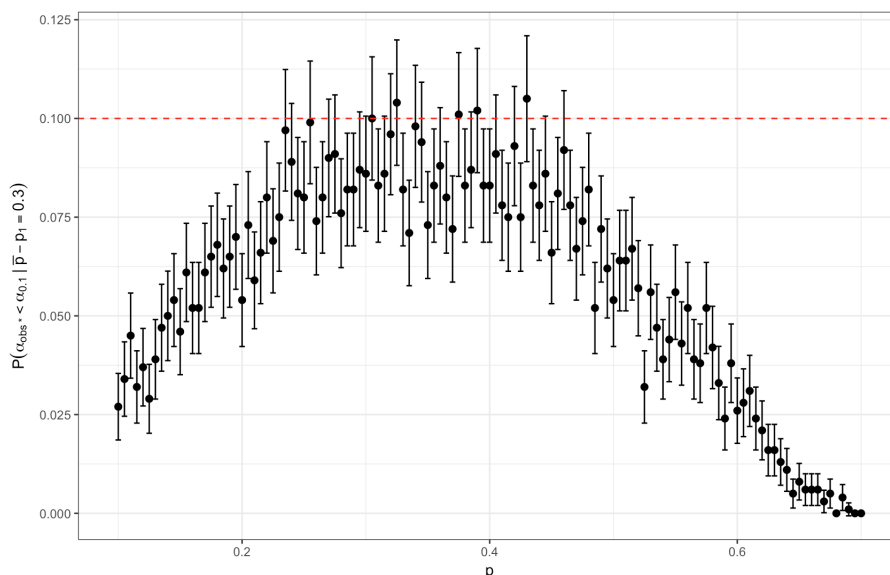


FIGURE 3.5 – Estimation de l'erreur de type II avec $\alpha, \beta \leq 10\%$, $k = 5$, $n = 26$ et p variant dans $[0, 1; 0, 7]$

aux seuils choisis.

3.3 Comparaison selon une approximation par la loi normale

On présente ici un test basé sur une approximation par la loi normale en utilisant la statistique de Wald pour comparer une proportion avec la moyenne des $k - 1$ proportions. On avait présenté au chapitre 1 le test proposé par Lemeshow et basé sur une approximation par la loi normale. Il s'agit ici de la continuité de ce test mais adapté pour répondre à la problématique de comparer une proportion à la moyenne des autres proportions. Pour réaliser ce test, on s'inspire du test de Wald usuel à 2 proportions rappelé en annexe E.

Nous allons rappeler les hypothèses du test et présenter les dérivations avant de montrer comment on obtient la taille n pour des erreurs α, β choisies. Nous allons finir par illustrer les erreurs de type I et II par simulation.

3.3.1 Test par approximation normale

Pour rappel Les hypothèses du test s'écrivent comme suit :

$$H_0 : p_1 = \bar{p} \text{ vs } H_1 : p_1 < \bar{p}$$

Nous allons donner l'expression des statistiques du test avant de passer aux dérivations. On note par Z_k la statistique de test sans correction pour la continuité et par Z_k^* la statistique de test avec correction pour la continuité. On réalise cette correction pour la continuité lorsqu'on approxime une loi discrète par une loi continue. Dans le contexte, on approxime une loi binomiale par une loi normale (voir annexe E), on a :

$$Z_k = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)}{n_1} + \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{\hat{p}_j(1 - \hat{p}_j)}{n_j} \right]}} \quad (3.14)$$

$$Z_k^* = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{\sum_{j=2}^k n_j} \right)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)}{n_1} + \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{\hat{p}_j(1 - \hat{p}_j)}{n_j} \right]}} \quad (3.15)$$

avec $\hat{p}_1 = \frac{S_1}{n_1}$ et $\hat{p} = \frac{\hat{p}_2 + \dots + \hat{p}_k}{k-1}$.

Règle de décision : on rejette l'hypothèse nulle $H_0 : p_1 = \bar{p}$ lorsque $z_k < z_\alpha$ dans le cas sans correction pour la continuité. Lorsqu'on corrige pour la continuité, on rejette H_0 lorsque $z_k^* < z_\alpha$.

3.3.1.1 Dérivations

Nous allons présenter les dérivations pour justifier la distribution de la statistique de test Z_k sous H_0 . On peut voir que $E(\hat{p}_1 - \hat{p}) = 0$, en effet les échantillons étant tous indépendants, on montre aisément que \hat{p} est un estimateur sans biais de la proportion inconnue p :

$$\begin{aligned} E(\hat{p}_1 - \hat{p}) &= E(\hat{p}_1) - E\left(\frac{\hat{p}_2 + \dots + \hat{p}_k}{k-1}\right) \\ &= p - \frac{E(\hat{p}_2) + \dots + E(\hat{p}_k)}{k-1} \\ &= p - \frac{p_2 + \dots + p_k}{k-1} \\ &= p - p = 0 \end{aligned}$$

On peut également montrer sous H_0 que la variance de $\hat{p}_1 - \hat{p}$ est égale à :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{p}_1 - \hat{p}) &= \text{Var}(\hat{p}_1) + \text{Var}\left(\frac{\hat{p}_2 + \dots + \hat{p}_k}{k-1}\right) \\ &= \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \text{Var}\left(\frac{\hat{p}_2 + \dots + \hat{p}_k}{k-1}\right) \\ &= \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{1}{(k-1)^2} \left(\frac{p_2(1-p_2)}{n_2} + \dots + \frac{p_k(1-p_k)}{n_k} \right) \end{aligned}$$

On peut remarquer que la variance s'écrit avec les vraies probabilités de succès et non avec les proportions estimées. On peut se demander qu'est-ce qui permet d'écrire alors la statistique de test avec les proportions estimées tout en gardant la même distribution d'une loi normale centrée et réduite. On peut montrer sous H_0 :

$$\sqrt{\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}}{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{\hat{p}_j(1-\hat{p}_j)}{n_j} \right]}} \approx \sqrt{\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}}{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{p_j(1-p_j)}{n_j} \right]}} \quad (3.16)$$

Preuve

Pour la preuve de l'approximation (3.16), nous allons utiliser le théorème de Slutsky (voir Casella and Berger [2002] pour le test à une proportion).

Théorème 3.3.1 Soient U_n et V_n deux suites de variables aléatoires, on suppose que $U_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} U$ et $V_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} c$ avec respectivement U une variable aléatoire et c une constante. D'après le théorème de Slutsky, $U_n/V_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} U/c$.

Dans notre contexte, on fait l'hypothèse que :

$$\hat{p}_j = \frac{S_j}{n_j} \sim \mathcal{N}\left(p_j, \frac{p_j(1-p_j)}{n_j}\right), j = 1, \dots, k$$

On a également montré que :

$$\hat{p} \sim \mathcal{N} \left(p, \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{p_j(1-p_j)}{n_j} \right] \right)$$

donc sous $H_0 : p_1 = \bar{p} = p$:

$$\hat{p}_1 - \hat{p} \sim \mathcal{N} \left(0, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{p_j(1-p_j)}{n_j} \right] \right)$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que :

$$\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{\hat{p}_j(1-\hat{p}_j)}{n_j} \right] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{1}{(k-1)^2} \cdot \left[\sum_{j=2}^k \frac{p_j(1-p_j)}{n_j} \right]$$

On peut dès maintenant faire le lien avec le théorème, on a $U_n = \hat{p}_1 - \hat{p}$, $V_n = g(\hat{p}_1, \hat{p})$ où g est une fonction continue qui sera définie et $c = \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{1}{(k-1)^2} \cdot \left[\sum_{j=2}^k \frac{p_j(1-p_j)}{n_j} \right]$. Pour la suite, on utilisera le corollaire 3.3.1.1 suivant :

Corollaire 3.3.1.1 Soient X_n et Y_n deux suites et g une fonction continue. On suppose que $(X_n, Y_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} (a, b)$ avec (a, b) des constantes, alors $g(X_n, Y_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} g(a, b)$.

Soient c_x et c_y , des constantes qui désignent les tailles des échantillons, on définit la fonction g suivante :

$$g :]0; 1[*]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \frac{x(1-x)}{c_x} + \frac{y(1-y)}{c_y}$$

La fonction g étant continue on a : $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = g(x_0,y_0)$, avec $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ Or

$$(\hat{p}_1, \hat{p}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} (p_1, \bar{p})$$

On en déduit alors que :

$$g(\hat{p}_1, \hat{p}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} g(p_1, \bar{p})$$

$$g(\hat{p}_1, \hat{p}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} \frac{p_1(1-p_1)}{c_{p_1}} + \frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{c_{\bar{p}}}$$

On peut montrer que :

$$\bar{p}(1-\bar{p}) = \frac{\sum_{j=2}^k p_j(1-p_j)}{(k-1)^2}$$

On sait que : 1. $\bar{p} = \frac{p_2 + \dots + p_k}{k-1}$ 2.

$$\begin{aligned} 1 - \bar{p} &= 1 - \frac{p_2 + \dots + p_k}{k-1} \\ &= \frac{k-1 - (p_2 + \dots + p_k)}{k-1} \\ &= \frac{(1-p_2) + \dots + (1-p_k)}{k-1} \\ &= \frac{q_2 + \dots + q_k}{k-1} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \bar{p}(1-\bar{p}) &= \frac{(p_2 + \dots + p_k)((1-p_2) + \dots + (1-p_k))}{(k-1)^2} \\ &= \frac{(p_2 + \dots + p_k)(q_2 + \dots + q_k)}{(k-1)^2} \\ &= \frac{q_2(p_2 + \dots + p_k)}{(k-1)^2} + \dots + \frac{q_k(p_2 + \dots + p_k)}{(k-1)^2} \\ &= \frac{q_2\bar{p}}{k-1} + \dots + \frac{q_k\bar{p}}{k-1} \\ &= \frac{\bar{p}(q_2 + \dots + q_k)}{k-1} \end{aligned}$$

L'utilisation du corollaire 3.3.1.1 nous permet d'obtenir le résultat suivant :

$$g(\hat{p}_1, \hat{p}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}} \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{1}{(k-1)^2} \cdot \left[\sum_{j=2}^k \frac{p_j(1-p_j)}{n_j} \right]$$

L'utilisation maintenant du théorème 3.3.1 permet de démontrer l'approximation (3.16), en effet si on pose :

$$U_n = \hat{p}_1 - \hat{p}$$

$$V_n = g(\hat{p}_1, \hat{p})$$

alors :

$$\frac{U_n}{V_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}} \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{p_j(1-p_j)}{n_j} \right]}}$$

3.3.1.2 Correction pour la continuité dans le test à k proportions

On introduit une correction pour continuité comme on approxime une loi discrète ici la loi binomiale par une loi continue, la loi normale. Nous avons ajouté une correction pour la continuité (pour plus de

détails sur la correction pour la continuité voir annexe E) égale à $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{\sum_{i=2}^k n_i} \right)$. En effet, $\sum_{j=2}^k n_j$ est la taille associée à \bar{p} . Nous allons ajouter une correction pour la continuité qui vaut $\frac{k}{(k-1)n}$, en effet pour $n_1 = n_2 = \dots = n_k$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{\sum_{j=2}^k n_j} \right) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n(k-1)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k}{n(k-1)} \right) \\ &= \frac{k}{2n(k-1)} \end{aligned}$$

3.3.2 Calcul de la taille n

Nous allons, en nous inspirant des travaux de Fleiss et al. [2013], calculer la taille n pour α, β choisies et pour une taille d'effet non standardisée $h = p_1 - \bar{p}$. On calcule la taille n sans tenir compte de la correction pour la continuité. Pour α, β choisies et $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$, la taille n est donnée par :

$$n = \frac{\left\{ (z_\alpha + z_\beta) \sqrt{p_1(1-p_1) + \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k p_j(1-p_j) \right]} \right\}^2}{h^2} \quad (3.17)$$

On sait qu'on rejette $H_0 : p_1 = \bar{p}$ lorsque $z_k < -z_\alpha$, la puissance peut donc être approximée par :

$$\begin{aligned}
1 - \beta &= P(Z_k < -z_\alpha | p_1 - \bar{p} = h) \\
&\approx P \left(\frac{\hat{p}_1 - \hat{\bar{p}}}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{p_j(1-p_j)}{n_j} \right]}} < -z_\alpha | p_1 - \bar{p} = h \right) \quad (\text{approximation possible avec Slutsky}) \\
&= P \left(\hat{p}_1 - \hat{\bar{p}} - h < -z_\alpha \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{p_j(1-p_j)}{n_j} \right]} - h \right) \\
&= P \left(\frac{\hat{p}_1 - \hat{\bar{p}} - h}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{p_j(1-p_j)}{n_j} \right]}} < \frac{-z_\alpha \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{p_j(1-p_j)}{n_j} \right]} - h}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{p_j(1-p_j)}{n_j} \right]}} \right) \\
&= \Phi \left(\frac{-z_\alpha \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{p_j(1-p_j)}{n_j} \right]} - h}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{p_j(1-p_j)}{n_j} \right]}} \right)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Ce qui donne :

$$z_\beta = - \frac{z_\alpha \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{i=2}^k \frac{p_i(1-p_i)}{n_i} \right]} + h}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{p_j(1-p_j)}{n_j} \right]}} \tag{3.19}$$

En supposant l'égalité des tailles $n_1 = \dots = n_k = n$, on obtient l'expression de n à partir de l'expression du quantile z_β de manière similaire au cas à deux proportions (voir annexe E sous-section E.2).

3.3.3 Illustrations

Pour $\alpha = 5\%, 10\%$ et β variant dans $[1\%; 10\%]$ selon un pas de 0,01, on calcule différentes tailles d'échantillons n selon la formule (3.17). Nous avons réalisé trois exemples. Dans le premier exemple, nous avons $p_1 = 0,2$ et $\bar{p} = \frac{0,3 + 0,4 + 0,3 + 1}{4} = 0,5$, dans le deuxième exemple $p_1 = 0,3$ et $\bar{p} = \frac{0,7 + 0,4 + 0,5 + 0,8}{4} = 0,6$ et dans le troisième exemple $p_1 = 0,5$ et $\bar{p} = \frac{0,7 + 0,8 + 0,8 + 0,9}{4} = 0,8$. Le choix des valeurs de ces proportions est arbitraire. .

Dans tous ces exemples, on conserve un écart entre p_1 et \bar{p} de 0,3. On retrouve les tailles n dans la table 3.7.

$\alpha = 5\%$			$\alpha = 10\%$		
$p_1 = 0,2$	$p_1 = 0,3$	$p_1 = 0,5$	$p_1 = 0,2$	$p_1 = 0,3$	$p_1 = 0,5$
38	47	51	30	39	42
33	41	44	25	33	36
30	37	40	23	30	33
28	34	37	21	27	30
27	32	35	20	26	28
25	31	33	18	24	26
24	29	32	18	23	25
23	28	30	17	22	24
22	27	29	16	21	23
21	26	28	15	20	22

TABLE 3.7 – Tailles n calculées selon une approximation normale sans transformation pour $k = 5$, $\alpha = 5\%, 10\%$, $\beta \in [1\%; 10\%]$ selon un pas de 0,01

Dans la table 3.7, on obtient la taille n et la puissance souhaitée pour des erreurs α, β choisies. Nous allons maintenant faire une simulation pour estimer les erreurs de type I et II afin de vérifier que le test est de niveau α avec la puissance souhaitée.

Simulation 3.1: Estimation de l'erreur de type I et II

Estimation de l'erreur de type I

On calcule la proportion de rejet sous $H_0 : p_1 = \bar{p} = p$ avec p variant dans $[0,2; 0,65]$ selon un pas arbitraire de 0,001 au seuil $\alpha, \beta = 10\%$ avec $n_1 = \dots = n_5 = n$. On calcule la taille n pour chaque valeur de p et on estime \bar{p} pour $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p$ tel que $p_1 = \bar{p}$. La statistique de test est calculée pour $z_5 < -z_\alpha$.

Estimation de l'erreur de type II

On calcule la proportion de rejet sous $H_1 : p_1 < \bar{p} = p$ avec p variant dans $[0,2; 0,65]$ selon un pas de 0,001 au seuil $\alpha, \beta = 10\%$ avec $n_1 = \dots = n_5 = n$. On calcule la taille n pour chaque valeur de p et on estime \bar{p} pour différentes valeurs de $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_1 + 0,3$ tel que $\bar{p} = p_1 + 0,3$.

On remarque globalement sur la figure 3.8, que les valeurs estimées de la probabilité d'erreur de type I ne dépasse pas le niveau α choisi. Globalement, l'intervalle de confiance à 95% contient la valeur α choisie soit 10%. On remarque tout de même que pour des valeurs de p inférieures à 0,4, l'erreur de type I semble un peu plus élevée que la valeur de α choisie. L'approximation par la normale est sans doute de moindre qualité pour $p < 0,4$. En revanche, pour l'erreur de type II, on obtient des valeurs beaucoup plus basses pour des proportions $p_1 > 0,6$. On soupçonne également un problème d'approximation par la normale. Toutefois globalement, l'erreur de type II ne dépasse pas le seuil β

fixé à 10%, on obtient la puissance souhaitée.

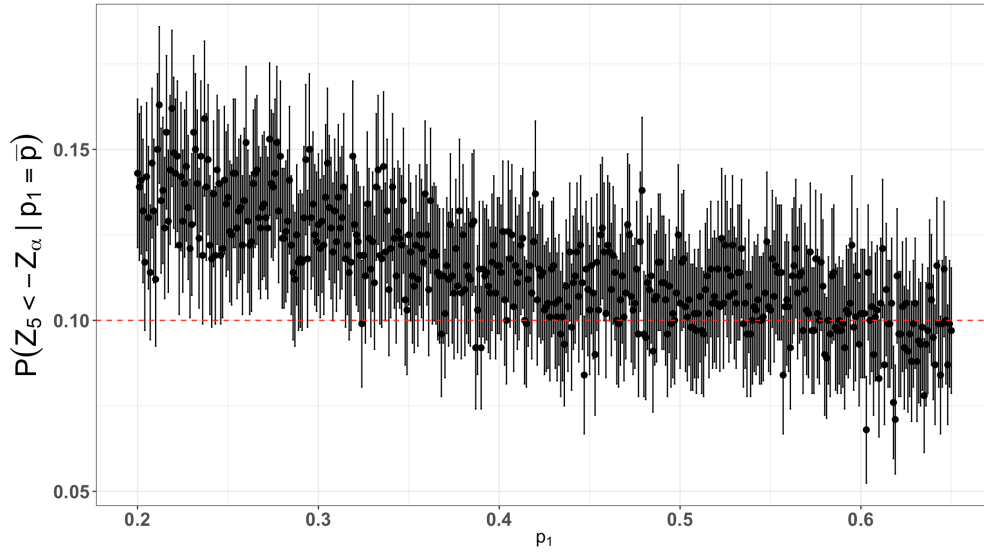


FIGURE 3.6 – Estimation de l’erreur de type I, $\alpha, \beta = 10\%$ pour $k = 5$, p variant dans $[0, 2; 0, 65]$

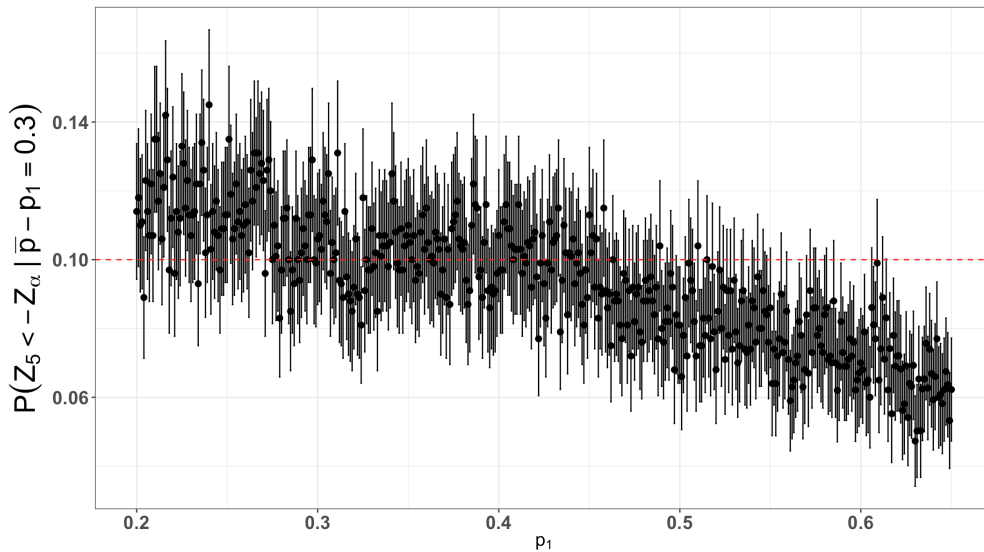


FIGURE 3.7 – Estimation de l’erreur de type II, $\alpha, \beta = 10\%$ pour $k = 5$, p_1 variant dans $[0, 2; 0, 65]$

3.4 Comparaison selon une approximation normale avec transformation $\arcsin(\sqrt{x})$

Dans un test de comparaison de proportions, la variance de la différence entre deux proportions dépend des probabilités de succès. Une transformation par la fonction inverse de la fonction sinus, (arcsinus) composée avec la fonction racine carrée permet de stabiliser la variance (Warton and Hui [2011], Cohen [1988]). En effet, dans le test de proportions, on remarque que dépendamment des

probabilités de succès, n varie grandement même si l'effet de taille h qui est la différence des probabilités de succès reste constant. Par exemple, pour $\alpha = 0,1, \beta = 0,01$, on trouve une taille d'échantillon $n = 30$ lorsque $p_1 = 0,2$ et $\bar{p} = 0,5$ et on trouve $n = 42$ lorsque $p_1 = 0,5$ et $\bar{p} = 0,8$. Nous allons présenter les dérivations qui mènent à cette transformation en particulier dans le cas d'égalité des tailles d'échantillon.

3.4.1 Test selon une approximation normale avec la transformation $\arcsin(\sqrt{x})$

Nous allons présenter les dérivations pour une et deux proportions avant de généraliser à k proportions. La démonstration se fait selon la méthode Delta (voir [Warton and Hui \[2011\]](#)).

3.4.1.1 Transformation pour un test à une proportion

On souhaite réaliser un test de Wald sur une proportion. Pour rappel, les hypothèses qui nous intéressent sont :

$$H_0 : p = p_0 \text{ vs } H_1 : p < p_0$$

On peut montrer que la statistique du test avec la transformation $\arcsin(\sqrt{x})$ s'écrit comme suit :

$$Z_0^t = 2\sqrt{n}(\arcsin(\sqrt{\hat{p}}) - \arcsin(\sqrt{p_0}))$$

On rejette H_0 lorsque $Z_0^t < -z_\alpha$. Nous allons présenter les dérivations qui mènent à ce résultat.

Dérivations

Considérons un échantillon aléatoire de probabilité de succès p , on peut montrer que :

$$\arcsin(\sqrt{\hat{p}}) \sim \mathcal{N}\left(\arcsin(\sqrt{p}), \frac{1}{4n}\right)$$

avec $\hat{p} \sim \mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$.

La loi faible des grands nombres dit que :

$$\frac{S_n}{n} = \hat{p} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} p \quad (3.20)$$

D'après le théorème central limite :

$$\sqrt{n}(\hat{p} - p) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, p(1-p)) \quad (3.21)$$

On considère $\psi : \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R}$ une application admettant au moins une dérivée continue. On pose $\psi(x) = \arcsin(\sqrt{x})$, d'après la méthode Delta :

$$\sqrt{n}(\psi(\hat{p}) - \psi(p)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, (\psi'(p))^2 p(1-p)) \quad (3.22)$$

On sait que :

$$\psi'(p)(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} \quad (3.23)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\psi'(p)^2 p(1-p) &= \frac{p(1-p)}{4p(1-p)} = \frac{1}{4} \\ \sqrt{n}(\psi(\hat{p}) - \psi(p)) &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\right)\end{aligned}\quad (3.24)$$

et :

$$\psi(\hat{p}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\arcsin(\sqrt{p}), \frac{1}{4n}\right) \quad (3.25)$$

La variance de $\psi(\hat{p})$ est ainsi indépendante de la probabilité de succès grâce à cette transformation.

Sous $H_0 : p = p_0$ on a :

$$\psi(\hat{p}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\psi(p_0), \frac{1}{4n}\right) \quad (3.26)$$

On obtient ainsi :

$$2\sqrt{n}(\psi(\hat{p}) - \psi(p_0)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad (3.27)$$

3.4.1.2 Transformation pour un test à deux proportions

La statistique de test dans le cas d'un test de deux proportions avec la transformation $\psi(x) = \arcsin(\sqrt{x})$ s'écrit comme suit en posant $n_1 = n_2 = n$:

$$\sqrt{2n}(\psi(\hat{p}_1) - \psi(\hat{p}_2)) \quad (3.28)$$

Règle de décision : on rejette H_0 lorsque $\sqrt{2n}(\psi(\hat{p}_1) - \psi(\hat{p}_2)) < -z_\alpha$. La région critique du test pour l'hypothèse alternative $H_1 : p_1 < p_2$ s'écrit comme suit :

$$W = \{\sqrt{2n}(\psi(\hat{p}_1) - \psi(\hat{p}_2)) < -z_\alpha\} \quad (3.29)$$

Dérivations

Nous allons présenter les dérivations qui mènent à l'expression de la statistique de test. En effet, lorsqu'on veut appliquer la transformation à un test à deux proportions p_1 et p_2 , on a sous $H_0 : p_1 = p_2$:

$$\psi(\hat{p}_1) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\arcsin(\sqrt{p_1}), \frac{1}{4n}\right) \quad (3.30)$$

$$\psi(\hat{p}_2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\arcsin(\sqrt{p_2}), \frac{1}{4n}\right) \quad (3.31)$$

Comme la combinaison linéaire de deux lois normales reste une loi normale, on obtient sous $H_0 : p_1 = p_2$:

$$\psi(\hat{p}_1) - \psi(\hat{p}_2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2n}\right) \quad (3.32)$$

3.4.1.3 Transformation dans le test de comparaison de k proportions

La statistique de test pour k proportions s'écrit comme suit :

$$Z_k^t = \frac{\psi(\hat{p}_1) - \psi(\hat{p})}{\sqrt{\frac{1}{4n} + \frac{1}{4\hat{p}(1-\hat{p})} \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{\hat{p}_j(1-\hat{p}_j)}{n} \right]}} \quad (3.33)$$

Règle de décision : on rejette H_0 lorsque $z_k^t < -z_\alpha$. La région critique du test pour l'hypothèse alternative $H_1 : p_1 < \bar{p}$ s'écrit comme suit :

$$W = \left\{ \frac{(\psi(\hat{p}_1) - \psi(\hat{p}))}{\sqrt{\frac{1}{4n} + \frac{1}{4\hat{p}(1-\hat{p})} \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{\hat{p}_j(1-\hat{p}_j)}{n} \right]}} < -z_\alpha \right\} \quad (3.34)$$

Dérivations

Nous allons présenter les dérivations qui mènent à cette expression de la statistique de test avec k proportions. On retrouve le même principe que dans le test à deux proportions. On compare sous $H_0 : p_1 = \bar{p}$:

$$\psi(\hat{p}_1) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(\arcsin(\sqrt{\bar{p}_1}), \frac{1}{4n} \right) \quad (3.35)$$

Comme on ignore la distribution de $\sum_{i=2}^k S_k$, on ne peut écrire la variance de \bar{p} sous la forme quadratique usuelle de l'approximation d'une somme de Bernouilli. Ainsi, la variance de \hat{p} ne peut s'exprimer sous une forme quadratique. Sa variance s'exprime en fonction des $k-1$ proportions. On obtient :

$$\psi(\hat{p}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(\arcsin(\sqrt{\bar{p}}), \frac{1}{4\bar{p}(1-\bar{p})} \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{p_j(1-p_j)}{n} \right] \right) \quad (3.36)$$

En effet :

$$(\psi'(\bar{p}))^2 = \frac{1}{4\bar{p}(1-\bar{p})}$$

En appliquant la méthode delta, on retrouve l'approximation 3.36.

Ainsi sous $H_0 : p_1 = \bar{p}$:

$$\psi(\hat{p}_1) - \psi(\hat{p}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{1}{4n} + \frac{1}{4\bar{p}(1-\bar{p})} \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{p_i(1-p_j)}{n} \right] \right) \quad (3.37)$$

On remarque ici aussi que la variance s'écrit avec les vraies probabilités de succès. On peut démontrer de manière similaire à la sous-section 3.3.1.1 avec le théorème de Slutsky que :

$$\frac{\psi(\hat{p}_1) - \psi(\hat{p})}{\sqrt{\frac{1}{4n} + \frac{1}{4\hat{p}(1-\hat{p})} \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{\hat{p}_j(1-\hat{p}_j)}{n} \right]}} \approx \frac{\psi(\hat{p}_1) - \psi(\hat{p})}{\sqrt{\frac{1}{4n} + \frac{1}{4\bar{p}(1-\bar{p})} \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{p_j(1-p_j)}{n} \right]}}$$

3.4.2 Calcul de la taille n

Pour déterminer la taille n suite à une transformation $\arcsin(\sqrt{x})$, on peut se référer aux travaux de Cohen [1988]) et Champely [2006].

3.4.2.1 Calcul de la taille d'échantillon pour 2 proportions

On peut montrer que la taille d'échantillon nécessaire pour obtenir α et β données est égale dans le cas à deux proportions à :

$$n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2}{2h^2} \quad (3.38)$$

Sous $H_1 : p_1 < p_2$:

$$\psi(\hat{p}_1) - \psi(\hat{p}_2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(\psi(\hat{p}_1) - \psi(\hat{p}_2), \frac{1}{2n} \right) \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} 1 - \beta &= P(\sqrt{2n}(\psi(\hat{p}_1) - \psi(\hat{p}_2)) < -z_\alpha | h) \\ 1 - \beta &= P((\psi(\hat{p}_1) - \psi(\hat{p}_2)) - h < \frac{-z_\alpha}{\sqrt{2n}} - h) \\ 1 - \beta &= P(\sqrt{2n} * (\psi(\hat{p}_1) - \psi(\hat{p}_2) - h) < -z_\alpha - h\sqrt{2n}) \\ &\approx \Phi(-z_\alpha - h * \sqrt{2n}) \end{aligned} \quad (3.40)$$

On peut déduire l'expression de n de l'expression du quantile z_β suivant :

$$\begin{aligned} z_\beta &= -z_\alpha - h\sqrt{2n} \\ z_\beta + z_\alpha &= h\sqrt{2n} \\ n &= \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2}{2h^2} \end{aligned}$$

3.4.2.2 Calcul de la taille d'échantillon pour comparer une proportions à la moyenne des $(k-1)$ proportions

On peut montrer que la taille d'échantillon n nécessaire pour obtenir α et β données ici est égale à :

$$n = \frac{\left\{ (z_\alpha + z_\beta) \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4\bar{p}(1-\bar{p})} \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k p_j(1-p_j) \right]} \right\}^2}{h^2}$$

Les calculs sont similaires aux calculs réalisés avec l'approximation normale sans transformation :

$$\begin{aligned}
 1 - \beta &= P \left(\frac{(\Psi(\hat{p}_1) - \Psi(\hat{p}))}{\sqrt{\frac{1}{4n} + \frac{1}{4\bar{p}(1-\bar{p})} \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{p_j(1-p_j)}{n} \right]}} < -z_\alpha | h \right) \\
 &\approx \Phi \left(\frac{-z_\alpha \sqrt{\frac{1}{4n} + \frac{1}{4\bar{p}(1-\bar{p})} \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{p_j(1-p_j)}{n} \right]} - h}{\sqrt{\frac{1}{4n} + \frac{1}{4\bar{p}(1-\bar{p})} \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{p_j(1-p_j)}{n} \right]}} \right) \quad (\text{approximation possible avec Slutsky})
 \end{aligned}
 \tag{3.41}$$

On peut déduire l'expression de n de l'expression du quantile z_β suivant :

$$z_\beta = -z_\alpha - \frac{h}{\sqrt{\frac{1}{4n} + \frac{1}{4\bar{p}(1-\bar{p})} \frac{1}{(k-1)^2} \left[\sum_{j=2}^k \frac{p_j(1-p_j)}{n} \right]}} \tag{3.42}$$

3.4.3 Illustrations

$\alpha = 5\%$			$\alpha = 10\%$		
$p_1 = 0,2$	$p_1 = 0,3$	$p_1 = 0,5$	$p_1 = 0,2$	$p_1 = 0,3$	$p_1 = 0,5$
47	52	48	37	43	40
41	45	42	32	37	34
37	41	38	29	33	30
35	38	35	26	30	28
33	36	33	25	28	26
31	34	31	23	27	25
29	32	30	22	25	23
28	31	28	21	24	22
27	30	27	20	23	21
26	28	26	19	22	20

TABLE 3.8 – Tailles n calculées selon une approximation normale avec transformation $\arcsin(\sqrt{x})$ pour $k = 5$, $\alpha = 5\%, 10\%$

On reprend la même simulation réalisée dans la sous-section 3.3.3 en ajoutant la transformation $\arcsin(\sqrt{x})$ pour estimer les erreurs de type I et II. Pour estimer l'erreur de type I, on calcule la taille n pour les différentes valeurs de p sous H_0 et on s'attend à ce que le test soit de niveau α . Effectivement, on remarque sur la figure 3.8 que les intervalles de confiance à 95% contiennent généralement la valeur de 10%, les valeurs de l'erreur de type I sont donc en accord avec la valeur

de $\alpha = 10\%$ choisie. De même dans la figure 3.9, les intervalles de confiance à 95% contiennent en général la valeur de 10% et on peut alors dire que l'erreur de type II est conforme au seuil β choisi.

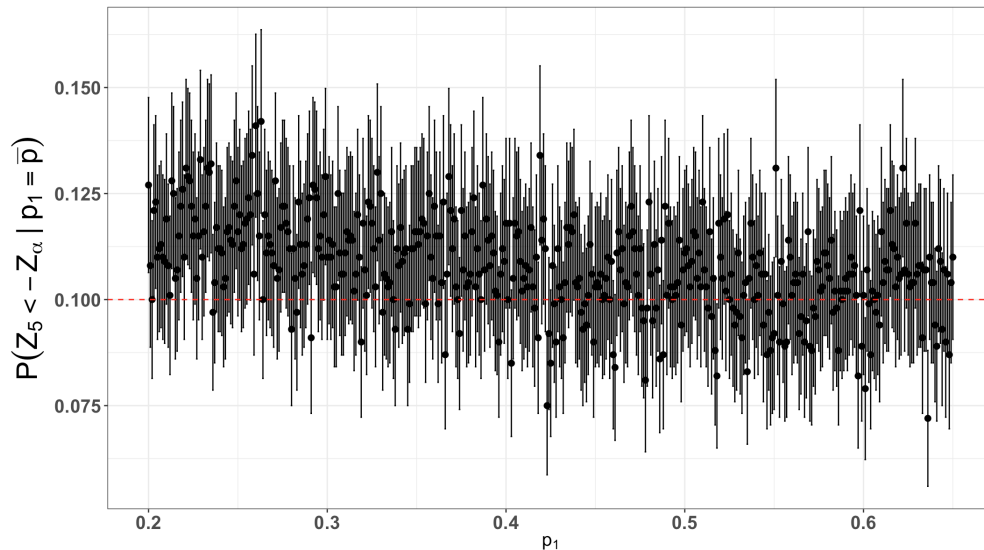


FIGURE 3.8 – Estimation de l'erreur de type I avec transformation, $\alpha, \beta = 10\%$ pour $k = 5$, p variant dans $[0, 2; 0, 65]$

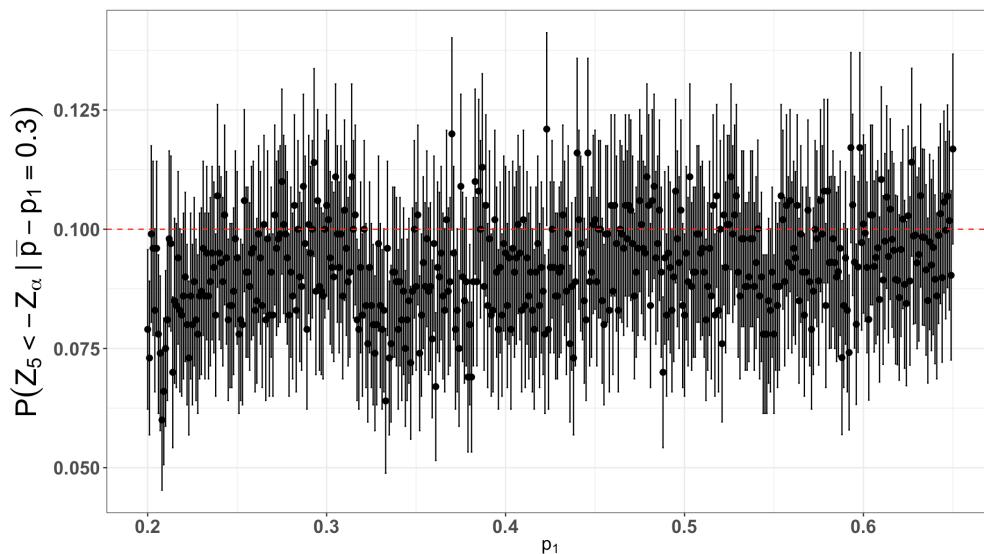


FIGURE 3.9 – Estimation de l'erreur de type II avec transformation, $\alpha, \beta = 10\%$ pour $k = 5$, p_1 variant dans $[0, 2; 0, 65]$

3.5 Comparaison des tailles n avec et sans transformation $\arcsin(\sqrt{x})$

On cherche à comparer les tailles n du test de Wald sans transformation aux tailles n du test de Wald avec transformation $\arcsin(\sqrt{x})$. On utilise les formules développées au chapitre 3 sections 3.3.1 et 3.4 pour calculer les tailles d'échantillons pour 1,2 et 5 proportions avec ou sans transformation. On

compare les tailles n non arrondies calculées avec ou sans transformation pour $\alpha, \beta = 10\%$ et p variant dans $[0, 1; 0, 7]$.

Notons n_k , la taille calculée selon une approximation par la loi normale sans transformation pour k proportions et n_k^t la taille calculée selon une approximation par la loi normale avec transformation. Pour réaliser la comparaison, on calcule la différence des tailles d'échantillon $n_k - n_k^t$ et on calcule le pourcentage de variation comme suit :

$$\frac{n_k - n_k^t}{n_k} * 100 \quad (3.43)$$

Pour une proportion : $k = 1$

La figure 3.10 présente une comparaison des tailles n pour une proportion avec et sans transformation arcsin. La taille n_1 est plus petite que n_1^t lorsque p est entre 0,1 et 0,4. Le test avec transformation devient plus efficace lorsque $p \geq 0,4$. Le pourcentage de variation est élevé pour de grandes valeurs de p et atteint 60% quand $p = 0,7$. Lorsqu'on regarde la différence brute, la taille n_1 dépasse de 3 la taille n_1^t pour $p > 0,4$.

Pour deux proportions : $k = 2$

La figure 3.11 présente une comparaison des tailles n pour deux proportions avec et sans transformation arcsin. Le test avec transformation est plus efficace dans la comparaison de deux proportions pour tout p . En effet, la taille n_2 dépasse la taille n_2^t de 2 à 10. On a un pourcentage de variation strictement positif qui atteint 60% comme dans le cas à une proportion pour $p = 0,7$.

Pour cinq proportions : $k = 5$

La figure 3.12 présente une comparaison des tailles n pour cinq proportions avec et sans transformation arcsin. Le pourcentage de variation variant entre -40% et 40% est relativement moins élevé lorsqu'on compare 5 proportions. La taille n_5 dépasse de 8 la taille n_5^t lorsque $p \geq 0,4$. Il semble que lorsqu'on compare 5 proportions, la transformation n'est pas efficace pour des valeurs de p plus petites que 0,4.

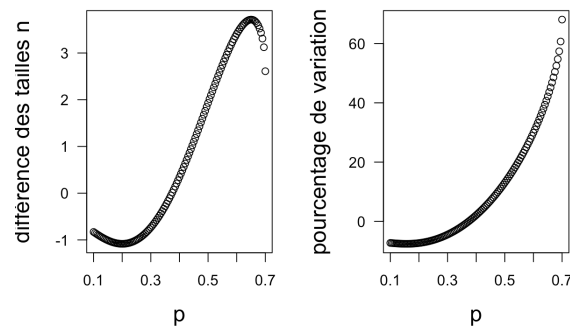


FIGURE 3.10 – Comparaison des tailles n dans le cas d'une proportion

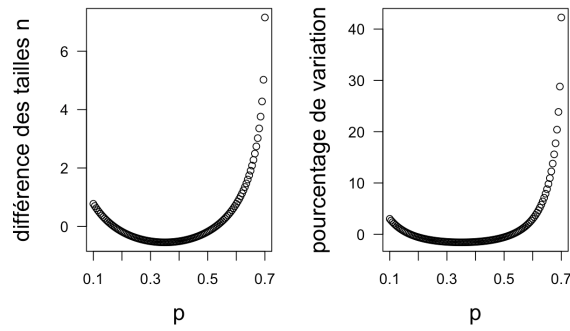


FIGURE 3.11 – Comparaison des tailles n dans le cas de deux proportions

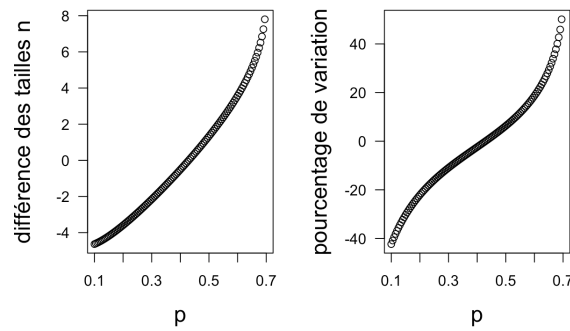


FIGURE 3.12 – Comparaison des tailles n dans le cas de cinq proportions

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté diverses méthodes alternatives afin de pallier au problème de la comparaison d'une proportion avec la moyenne d'autres proportions. Nous avons ainsi proposé deux tests exacts et deux tests approximatifs : le test exact de Fisher, le test exact de Barnard, le test avec une approximation par la loi normale avec et sans transformation arcsin.

Ces différentes méthodes permettent de réaliser le test décrit dans le manuel d'utilisation du LQAS proposé par Valadez. Au regard des divers résultats, nous suggérons en particulier l'utilisation du test exact de Fisher et du test basé sur une approximation par la loi normale avec transformation arcsin.

Chapitre 4

Comparaison multiple et correction de Bonferroni

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté la comparaison d'une proportion avec la moyenne des $(k - 1)$ proportions dans le but de prendre une décision sur une population. Nous avons présenté le test pour une population pour illustrer son fonctionnement. Toutefois en pratique, on s'intéresse à prendre une décision sur plus d'une population. Dès lors, il s'agit de faire autant de tests qu'il n'y a de proportions à comparer soit k tests. On est dans le contexte de comparaisons multiples. Il faudra alors corriger les seuils α et β .

Nous allons expliquer plus en détails pourquoi on corrige α et β avec la correction la plus simple et connue, la correction de Bonferroni. Nous allons montrer par simulation comment la comparaison multiple impacte les erreurs de type I et II avant de finir avec un exemple illustratif.

4.1 Correction de Bonferroni

Supposons qu'on réalise 5 tests au seuil de significativité de 10%. Notons par T une variable aléatoire qui vaut 1 si on rejette H_0 et 0 sinon. On a $\sum_{i=1}^n T_i \sim \mathcal{B}(5; 0, 1)$. La probabilité d'observer au moins par hasard un test significatif est de :

$$\begin{aligned} P(T \geq 1) &= 1 - P(T = 0) \\ &= 1 - \binom{5}{0} 0,1^0 0,9^5 \\ &= 40,95\% \end{aligned}$$

Lorsqu'on réalise 5 tests, il y a donc 40,95% de chance qu'on tombe par hasard sur un test significatif. Bien entendu, cette probabilité augmente avec le nombre de tests qu'on réalise, raison pour laquelle on introduit des corrections pour les tests multiples comme la correction de Bonferroni.

La correction de Bonferroni consiste à diviser le seuil de significativité α par le nombre de tests qu'on réalise. Pour k tests réalisés, le seuil de significativité qu'on utilise pour la correction est de α/k .

Dans notre exemple, $k = 5$ et on utilise un seuil de significativité égale à $0,1/5 = 0,02$. Par exemple, lorsqu'on réalise 100 tests au seuil de 10%, il y a au moins $1 - 0,9^{100} = 99,99\%$ d'obtenir un test significatif et donc en réalisant 100 tests, on risque de dépasser globalement le seuil de significativité qu'on s'est fixé.

Plus formellement, on peut introduire l'inégalité de Bonferroni qui dit que pour toute suite d'évènements $(A_i), i = 1, \dots, I$ avec A_i le i ème évènement qui correspond dans le cas de la correction du seuil α à la décision de rejeter le i ème test, soit de rejeter H_0 lorsque H_0 est vraie. Pour faciliter la compréhension prenons le cas où $i=2$, on a deux évènements A_1 et A_2 . Lorsqu'on cherche la probabilité que l'un des évènements se réalise au seuil α on a :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \\ &= \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} - \delta \end{aligned}$$

Si les deux évènements sont mutuellement exclusifs la probabilité $P(A_1 \cap A_2) = \delta = 0$. En revanche s'il existe une corrélation entre les tests cette probabilité devient non nulle et on trouve :

$$P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$$

De manière générale, on peut montrer le résultat suivant :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^I A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^I P(A_i^c)$$

Avec A^c le complémentaire de l'évènement A avec $P(A^c) = 1 - P(A)$. On peut facilement démontrer l'inégalité de Bonferroni en utilisant l'inégalité de Boole, en effet on a pour toute suite d'évènements $(A_i), i = 1, \dots, I$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^I A_i\right) \geq \sum_{1 \leq i \leq I} P(A_i)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^I A_i\right) &= 1 - P\left(\overline{\bigcap_{1 \leq i \leq I} A_i}\right) \\ &= 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^I A_i^c\right) \end{aligned}$$

On peut noter toutefois que la correction de Bonferroni a tendance à être conservatrice car elle ne tient pas compte de la corrélation possible entre les tests. La corrélation entre les tests réduit le seuil global.

On obtient après correction le seuil global suivant :

$$\begin{aligned} P(S \geq 1) &= 1 - P(S = 0) \\ &= 1 - \binom{5}{0} 0,02^0 0,98^5 \\ &= 9,61\% \end{aligned}$$

On trouve un seuil global qui est en dessous du niveau souhaité de 10%.

4.2 Impact d'une comparaison multiple sur les erreurs de type I et II sans et avec correction de Bonferroni

Simulation 4.1:

Les simulations sont globalement réalisés comme suit :

Valadez

On réalise pour 5 proportions le test binomial exact (approche de Valadez) aux seuils $\alpha = \beta$. On simule sous $H_0 : p = p_0 = p$, $S_j \sim \mathcal{B}(n, p)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$ pour n choisi et $p_0 = 0,5$. La valeur de $p_0 = 0,5$ est choisie de manière arbitraire. On réalise cette comparaison multiple $B = 1000$ fois. On compte pour chaque itération le nombre de tests qu'on rejette par hasard alors que H_0 est vrai. On estime l'erreur de type I en faisant le rapport du nombre de tests rejetés sur le nombre de tests réalisés. Pour estimer, l'erreur de type II, on simule avec un effet de taille de 0,3. On calcule le nombre de tests pour lesquels on accepte H_0 , lorsque celle-ci est fausse.

Fisher (*mid-pvalue*), La loi normale avec et sans transformation $\arcsin(\sqrt{x})$

Pour ces différents tests, on compare sous $H_0 : p_j = \bar{p}_{-j}$ chaque proportion p_j à la proportion \bar{p}_{-j} . Pour ce faire, on simule sous H_0 , $S_j \sim \mathcal{B}(n, p_j)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$ pour n choisi. On rappelle que ces tailles son celles qui correspondent aux valeurs choisies de $\alpha = \beta$. Les tests sont réalisés pour une proportion $p = 0,5$. On compte le nombre de tests qu'on rejette par hasard, lorsque H_0 est vrai. On estime l'erreur de type I en faisant le rapport du nombre de tests rejetés sur le nombre de tests réalisés. Pour estimer l'erreur de type II, on reprend la même démarche avec un effet de taille de 0,3.

Résultats de la simulation

Sans correction pour la comparaison multiple, on trouve des erreurs de type I et II relativement plus élevées que les seuils α et β choisis. Pour toutes les méthodes, on obtient des erreurs de type I et II qui varient entre 28% et 52%.

	Taille n	Erreur de type I	Erreur de type II
Valadez	19	35,5%	28,2%
Fisher	23	41%	28,5%
Loi normale sans transformation	22	35%	47,5%
Loi normale avec transformation	20	51,1%	36%

TABLE 4.1 – Erreurs de type I et II sans correction de Bonferroni pour α et β

Les simulations précédentes nous laisse croire qu'il est pertinent de corriger les seuils α et β . On reprend les mêmes simulations en appliquant cette fois-ci la correction de Bonferroni. Dans l'approche de Valadez pour $n = 19$, on ne trouve pas de seuil critique qui correspond à $\alpha = \beta = 0,02$, raison pour laquelle on a mis NA pour Non Applicable. Pour les autres méthodes, l'erreur de type I est inférieure au seuil $\alpha = 10\%$. L'erreur de type II est en revanche très élevée. On pouvait s'y attendre puisqu'on a gardé la même taille n .

	Taille n	Erreur de type I	Erreur de type II
Valadez	19	NA	NA
Fisher	23	8,7%	75,5%
Loi normale sans transformation	22	4,7%	91,5%
Loi normale avec transformation	20	10,2%	78,5%

TABLE 4.2 – Erreurs de type I et II avec correction de Bonferroni uniquement du seuil α

Pour contrôler aussi l'erreur de type II, il faudrait tenir compte de la correction de Bonferroni *a priori* en faisant le calcul des tailles n avec les seuils corrigés. En pratique, les régions d'intervention sont déjà définies et on connaît à l'avance le nombre de proportions à comparer. Pour $k = 5$ proportions à comparer, on sait que $\alpha = 0,02$ et $\beta = 0,02$. Nous allons calculer les tailles n pour chaque méthode avec $\alpha = \beta = 0,02$. Pour rappel, on considère la même taille n pour chaque région d'intervention.

	Taille n	Erreur de type I	Erreur de type II
Valadez	40	9,6%	8,6%
Fisher	50	9,9%	10%
Loi normale sans transformation	42	2,9%	37%
Loi normale avec transformation	51	9,4%	8,5%

TABLE 4.3 – Erreurs de type I et II avec correction de Bonferroni pour α et β

On remarque qu'une augmentation de la taille n permet de contrôler les erreurs de type I et II sauf pour la loi normale sans transformation. Pour la loi normale sans transformation, l'erreur de type I égale à 2,9% est beaucoup plus faible que le seuil $\alpha = 10\%$ alors que l'erreur de type II atteint 37%. L'erreur

de type II dans ce cas dépasse la valeur de $\beta = 10\%$. Il semble que la loi normale avec transformation $\arcsin(\sqrt{x})$ permet de mieux contrôler les erreurs de type I et II.

4.3 Exemple illustratif

Supposons qu'on dispose de $k = 5$ proportions, on souhaite comparer chaque proportion à la moyenne des 4 autres proportions. L'objectif est d'appliquer la correction de Bonferroni et voir comment le classement des régions d'intervention est affecté. On reprend les données la table 3.4 du chapitre 3 et on obtient les tables 4.4. On réalise la comparaison multiple avec le test exact de Fisher, l'approximation par la loi normale avec et sans transformation $\arcsin(\sqrt{x})$.

Dans cet exemple, on sélectionne une taille $n = 19$ pour chaque région d'intervention, ce qui fait un échantillon total égale à 95. Cette taille est prise de manière arbitraire et en pratique il faudra calculer la taille n selon chaque méthode. On ne contrôle donc pas l'erreur β dans ce cas. On s'intéresse au statut prioritaire ou non de chaque région d'intervention relativement aux autres régions.

Table 1				Table 2			
	1	0			0		
R1	12	7	19	R2	5	14	19
R2+R3+R4+R5	32	44	76	R1+R3+R4+R5	39	37	76
	44	51	95		44	51	95
Table 3				Table 4			
	1	0			0		
R3	10	9	19	R4	2	17	19
R1+R2+R4+R5	34	42	76	R1+R2+R3+R5	42	34	76
	44	51	95		44	51	95
Table 5							
	1	0					
R5	15	4	19				
R1+R2+R3+R4	29	47	76				
	44	51	95				

TABLE 4.4 – Série de tables 2x2 déduite de la table 3.4

4.3.1 Comparaison multiple suivant le test exact de Fisher

En opérant la correction de Bonferroni, le classement change. On constate que la région 2 qui était classée prioritaire sans correction devient non prioritaire avec la correction de Bonferroni. En effet le seuil de significativité passe de 0,1 à 0,02 et le seuil observé de la région 2 est égale à 0,02765.

R	Oui	Non	Résultat sans correction	Résultat avec correction	p-valeur
1	12	7	Non Prioritaire	Non Prioritaire	0,94465
2	5	14	Prioritaire	Non Prioritaire	0,02765
3	10	9	Non Prioritaire	Non Prioritaire	0,72530
4	2	17	Prioritaire	Prioritaire	0,00018
5	15	4	Non Prioritaire	Non Prioritaire	0,99915

TABLE 4.5 – Résultat d’un classement réalisé avec le test exact de Fisher avec ou sans correction de Bonferroni au seuil $\alpha = 10\%$ et $\frac{\alpha}{5} = 2\%$

4.3.2 Comparaison multiple suivant l’approximation par la loi normale

On remarque dans le test normal sans transformation que la région 2 et 4 sont déclarées prioritaires avec des seuils observés respectifs de 0,0946 et 0,00112. Ces deux régions correspondent à des nombres de succès relativement faibles. En appliquant la transformation de Bonferroni, seul la région 4 reste prioritaire. Malgré la taille $n = 19$, le test normal sans transformation permet de détecter les régions d’intervention à faible nombre de succès. On obtient le même classement que dans le test exact de Fisher.

4.3.2.1 Sans transformation

R	Oui	Non	Résultat sans correction	Résultat avec correction	p-valeur
1	12	7	Non Prioritaire	Non Prioritaire	0,8305
2	5	14	Prioritaire	Non Prioritaire	0,0946
3	10	9	Non Prioritaire	Non Prioritaire	0,6209
4	2	17	Prioritaire	Prioritaire	0,0112
5	15	4	Non Prioritaire	Non Prioritaire	0,9731

TABLE 4.6 – Résultat d’un classement réalisé avec l’approximation par la loi normale sans transformation avec ou sans correction de Bonferroni $\alpha = 10\%$ et $\frac{\alpha}{5} = 2\%$

4.3.2.2 Avec transformation

Lorsqu'on réalise le test avec la transformation $\arcsin(\sqrt{x})$, nous remarquons que le classement ne change pas sans ou avec correction de Bonferonni. Les régions 2 et 4 sont déclarées prioritaires avec des p-valeurs largement inférieures au seuil choisi de 10%.

R	Oui	Non	Résultat sans correction	Résultat avec correction	p-valeur
1	12	7	Non Prioritaire	Non Prioritaire	0,9559
2	5	14	Prioritaire	Prioritaire	0,0183
3	10	9	Non Prioritaire	Non Prioritaire	0,7373
4	2	17	Prioritaire	Prioritaire	0,0000
5	15	4	Non Prioritaire	Non Prioritaire	0,9997

TABLE 4.7 – Résultat d'un classement réalisé avec l'approximation par la loi normale sans transformation avec ou sans correction de Bonferroni $\alpha = 10\%$ et $\frac{\alpha}{5} = 2\%$

Chapitre 5

Présentation de l'application

Nous allons dans ce chapitre présenter l'application réalisée avec Shiny sur R. On propose un outil de conception et d'analyse selon le LQAS (<https://lqasdesign.shinyapps.io/app1/>). L'application est composée de trois volets pour le moment. Le premier volet porte sur les méthodes classiques du chapitre 2 et permet de trouver le couple (n, c) . Le deuxième volet correspond au chapitre sur les méthodes alternatives et permet de trouver la taille n , la décision étant prise sur la base des valeurs p . Le troisième volet permet de faire l'analyse des données après enquêtes et de prioriser entre les zones d'intervention.

Toute l'implémentation est faite pour les tests suivants :

-Dans le cas à une proportion

$$H_0 : p = p_0 \text{ vs } H_1 : p < p_0$$

-Dans le cas à deux proportions

$$H_0 : p_1 = p_2 \text{ vs } H_1 : p_1 < p_2$$

-Dans le cas à cinq proportions

$$H_0 : p_1 = \bar{p} \text{ vs } H_1 : p_1 < \bar{p}$$

5.1 Méthodes classiques

On peut choisir le couple (n, c) selon le test exact de la binomiale ou le test du score sur une proportion. On peut visualiser les erreurs α et β issues de l'énumération pour trouver le couple (n, c) dans le test exact de la binomiale. On peut afficher la représentation des erreurs sous forme de figure ou de table. La figure est téléchargeable pour usage.

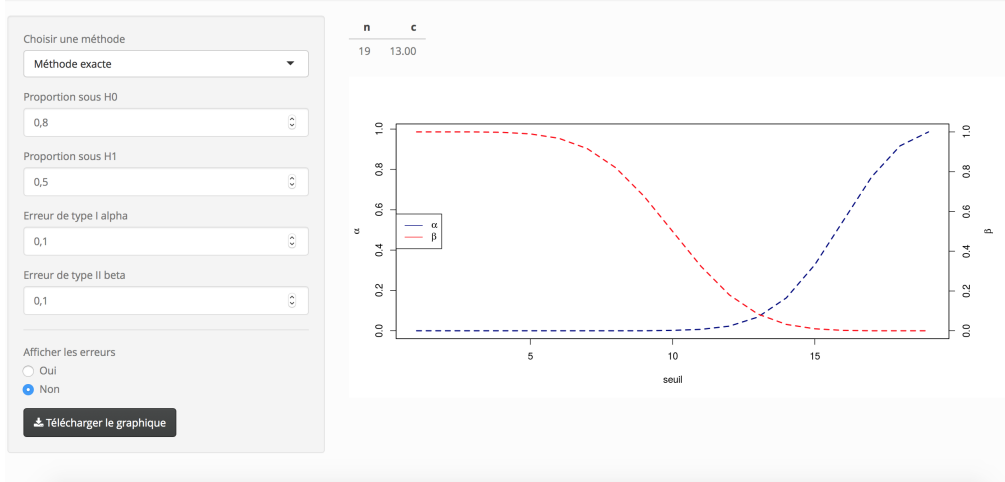


FIGURE 5.1 – Fenêtre de conception selon les méthodes méthodes classiques I

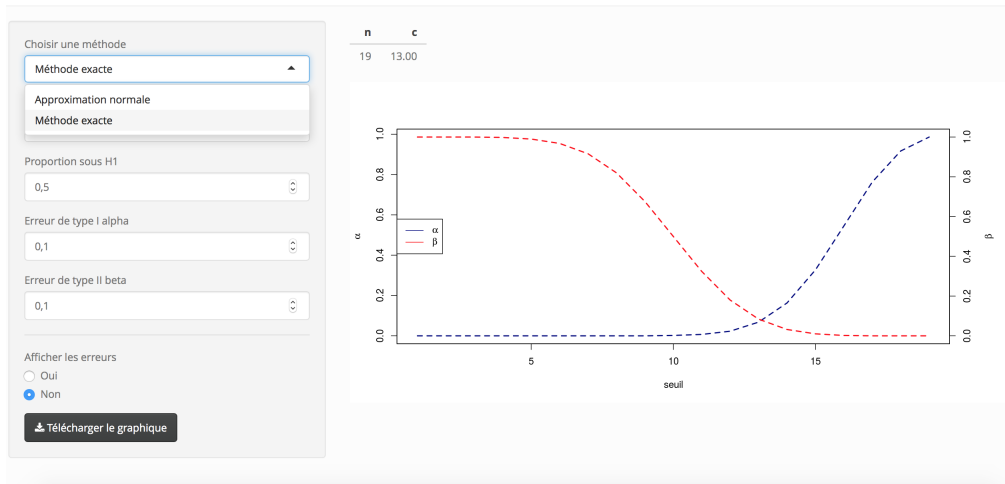


FIGURE 5.2 – Fenêtre de conception selon les méthodes méthodes classiques II

5.2 Méthodes alternatives

On présente l'implémentation des trois méthodes alternatives suivantes : le test exact de Fisher, le test selon une approximation par la loi normale sans et avec la transformation $\arcsin(\sqrt{x})$ du chapitre 3. Pour le choix de la taille n , il y a deux options disponibles : le choix de n dans le test de comparaison de 2 proportions et le choix de n dans le test de comparaison de 5 proportions.

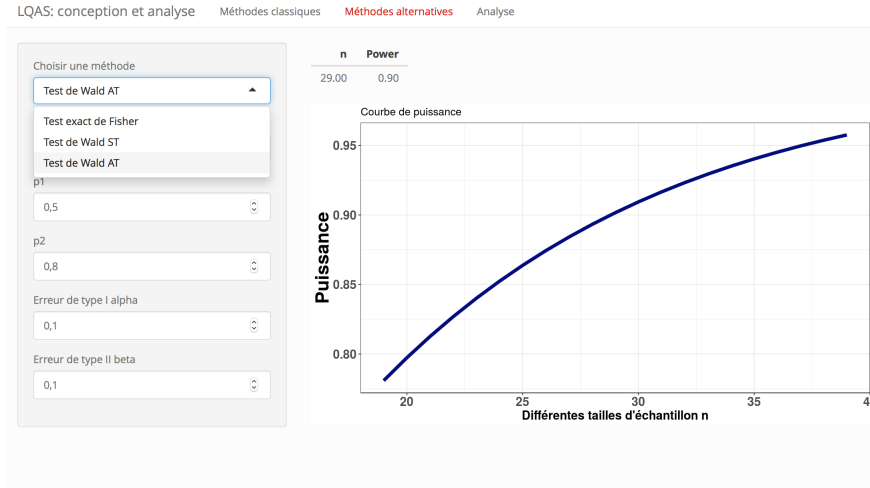


FIGURE 5.3 – Fenêtre de conception selon les méthodes méthodes alternatives I

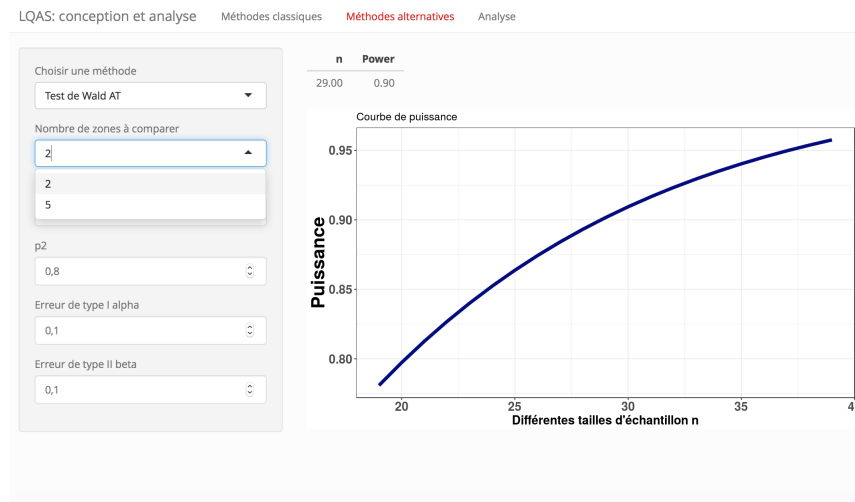


FIGURE 5.4 – Fenêtre de conception selon les méthodes méthodes alternatives II

5.3 Analyse

On peut charger un fichier de données avec les extensions “.txt” ou “.csv”. Le fichier doit être arrangé d’une certaine manière. Les régions à comparer sont en colonnes et les différents indicateurs en ligne. On peut filtrer les résultats par indicateur et comparer les différentes régions selon l’indicateur d’intérêt. Il est possible de modifier le nombre de régions à comparer.

Différentes options sont disponibles pour réaliser la comparaison. On peut choisir de comparer chaque région comme proposée dans les méthodes classiques. Il s’agit de définir un seuil critique selon l’objectif à atteindre et comparer le nombre de succès de chaque région à ce seuil. Dans les autres méthodes de comparaison, il s’agit de comparer la proportion de chaque région à la moyenne des autres proportions.

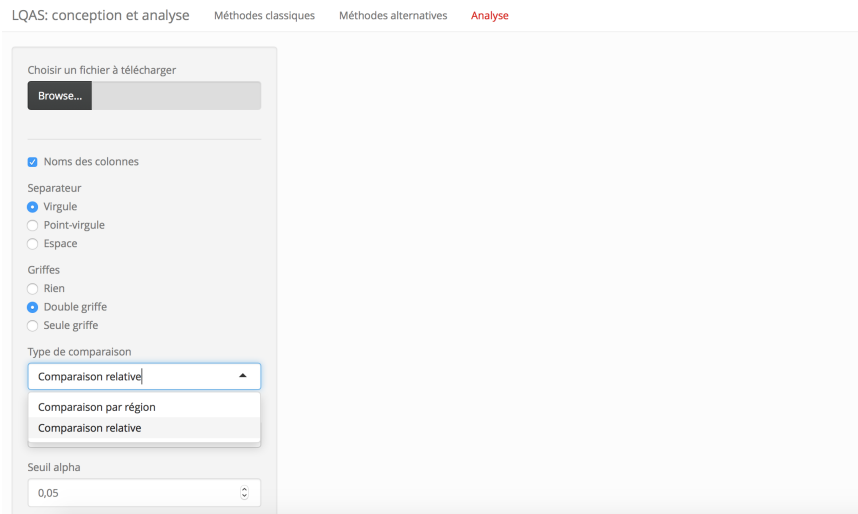


FIGURE 5.5 – Fenêtre d’analyse I

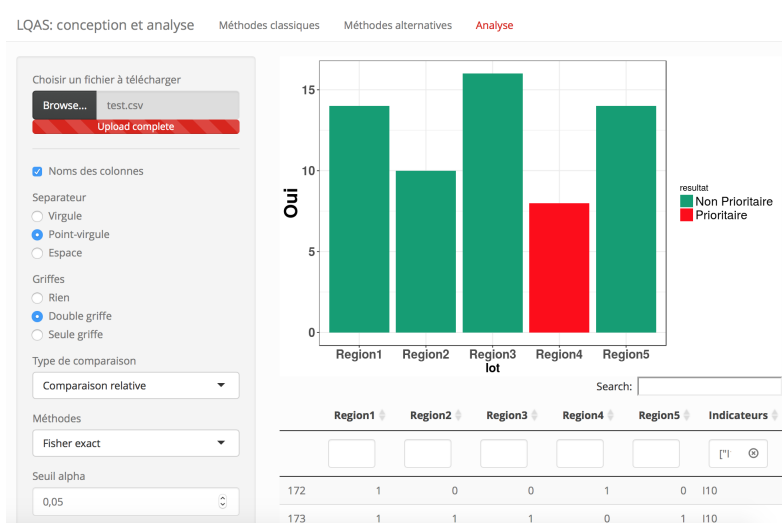


FIGURE 5.6 – Fenêtre d’analyse II

Conclusion

La principale question de recherche de ce mémoire porte sur la validité statistique du LQAS. Plus précisément, on s'est intéressé à l'approche développée par Valadez [1991] qui est la plus populaire et qui est vulgarisée grâce à la disponibilité d'un manuel destiné aux praticiens. Écrit de manière très accessible, le manuel est rédigé en faisant fi de la terminologie statistique. On propose dans ce manuel une méthodologie simple pour réaliser des enquêtes de suivi des activités en peu de temps avec peu de ressources.

La méthodologie décrite dans le manuel permet entre autres de prendre une décision sur plusieurs populations et de les classer en prioritaire ou non prioritaire tout en contrôlant les erreurs de type I et II. Pour ce faire, un test à une proportion est réalisé avec une proportion p_0 estimée à partir des données observées. Plusieurs problèmes ont été identifiés dans cette méthodologie.

Le premier problème porte sur le choix de la proportion p_0 . Nous avons vérifié dans le chapitre 2 pour 2 proportions et 5 proportions comment les erreurs de type I et II sont affectées. On constate que dans le cas à 2 proportions les erreurs de type I et II double quasiment pour des seuils α et β . En revanche avec 5 proportions les erreurs de type I et II sont similaires aux seuils α et β sans doute parce que l'estimation de p_0 devient bien meilleure et s'approche de la vraie proportion inconnue p . Au final, la méthodologie proposée pour le choix de p_0 à partir des données observées est acceptable car les risques dans la prise de décision ne s'écartent pas grandement des seuils α et β choisis. On note cependant que l'erreur de type I est légèrement plus élevée que l'erreur de type II. Ce qui traduit un risque du gestionnaire plus élevé. On aura tendance alors à plus investir dans une zone d'intervention non prioritaire. **On ne recommande pas d'estimer la proportion p_0 à partir des données observées. On recommande plutôt de choisir la proportion p_0 a priori selon l'objectif de performance du projet/programme.**

Le choix de la proportion p_0 est une question mais comparer la proportion de chaque population à la moyenne des $(k - 1)$ proportions restantes en est une autre. On compare dans ce cas deux proportions inconnues. Ce qui nous amène au deuxième problème identifié. Le choix de p_0 à partir des données observées n'est en réalité qu'une manière non dite de réaliser cette comparaison de chaque proportion à la moyenne des autres proportions. Nous avons suggéré pour réaliser ce test des méthodes exactes comme le test exact de Fisher avec la *mid p-value* et le test exact de Barnard et comme méthodes approximatives un test selon une approximation normale avec et sans transformation $\arcsin(\sqrt{x})$. **Au**

sortie de nos analyses on recommande d'utiliser le test exact de Fisher avec la *mid p-value* et le test selon une approximation normale avec transformation $\arcsin(\sqrt{x})$.

Lorsqu'on doit comparer 5 proportions en comparant chaque proportion à la moyenne des autres proportions, on réalise 5 tests. Nous faisons alors face à des comparaisons multiples. Cet aspect n'est pas tenue en compte dans la méthodologie proposée du LQAS. Ce qui nous amène au troisième problème. Nous avons montré dans le chapitre 4, l'impact de cette comparaison multiple sur les erreurs de type I et II. Les erreurs de type I et II varient dans ce contexte entre 28% et 55% pour des seuils $\alpha = \beta = 10\%$. Nous avons proposé comme correction celle de Bonferroni. **Dans ce cas, la recommandation est plus délicate. Si l'on corrige le seuil α *a posteriori* uniquement sans tenir compte de la taille n , l'erreur de type II devient très élevée. Si l'on corrige α et β *a priori*, on obtient une taille n plus élevée pouvant aller jusqu'à 40 contrairement à la taille $n = 19$ à laquelle sont habitués les praticiens du LQAS. Nous recommandons toutefois de tenir compte de la comparaison multiple et de corriger les seuils α et β .**

Nous avons implémenté les méthodes décrites dans le mémoire sous forme d'application Shiny sur R (<https://lqasdesign.shinyapps.io/app1/>). L'application permet aux utilisateurs de pouvoir choisir une des méthodes et de définir plus aisément la taille n . Ils pourront après une collecte, charger dans l'application leurs données d'enquêtes et obtenir de suite la classification de leurs régions d'intervention en prioritaire ou non prioritaire.

Comme perspective, on peut explorer d'autres aspects du LQAS comme la prise en compte du plan de sondage. Dans le travail, nous avons uniquement considéré un échantillonnage aléatoire simple mais en pratique on peut se retrouver avec échantillonnage à plusieurs degrés ou un échantillonnage stratifié. On peut penser à intégrer le plan de sondage dans le choix de n . La version bayésienne du LQAS est une autre perspective intéressante à explorer. On espère avec cette étude une amélioration du manuel proposé aux praticiens et faciliter davantage l'utilisation du LQAS.

Annexe A

Le LQAS selon Dodge et Romig

Pour mieux comprendre les adaptations au domaine de la santé, on présente ici en détails le LQAS tel que proposé par Dodge and Romig [1959]. Leur objectif consistait à trouver l'équilibre entre les coûts d'inspection et la qualité du produit fournit au consommateur. La méthode permet de décider de la qualité d'un lot sur la base d'un seul échantillon de ce lot. On parle donc d'une méthode d'échantillonnage simple, par opposition à d'autres méthodes plus élaborées qui utilisent des échantillons plus complexes du lot. L'idée est de trouver la paire de valeurs (n, c) avec n la taille de l'échantillon et c le seuil critique d'un lot de taille N , qui minimise les coûts de contrôle de la qualité du lot tout en maintenant un certain niveau de risque associé au consommateur.

A.1 Définitions et notation

On utilise la même notation que Dodge et Romig. On s'intéresse au nombre d'éléments défectueux dans un lot entier de taille N , que l'on dénote M . On suppose que le consommateur tolère au maximum M_t éléments défectueux dans le lot. En d'autres termes, le consommateur est prêt à tolérer une proportion de $p_t = \frac{M_t}{N}$ d'objets défectueux dans un lot. Un lot acceptable a donc moins de M_t éléments défectueux. Notons que M_t est une valeur connue, mais M est inconnue.

Pour tester si $M > M_t$, on sélectionne par échantillonnage aléatoire simple sans remise un ensemble de n éléments du lot. Soit X_i une variable indicatrice qui vaut 1 si l'élément i du lot est défectueux, et 0 si l'élément i du lot est conforme. La conformité ou non des éléments se décide sur la base d'une liste de critères établie avant le contrôle par des experts de la qualité.

L'acceptation ou le rejet du lot dépendra du nombre d'éléments défectueux dans l'échantillon, que l'on dénotera m . Notons que $m = \sum_{i=1}^n X_i$ et $M = \sum_{i=1}^N X_i$. Dodge et Romig proposent d'accepter tout lot pour lequel m est inférieur à un seuil critique c . Dans le cas contraire, tout le lot est inspecté pour en retirer les éléments défectueux. La valeur de c est choisie en contrôlant le risque d'erreur et le coût d'inspection.

Pour un n fixe, on peut choisir c de façon à contrôler le risque d'erreur mais augmenter n diminuera ce

risque. Toutefois, on ne peut pas augmenter n à l'infini car il faut penser au producteur donc, Dodge et Romig cherchent à obtenir simultanément le couple (n, c) tel que le risque du consommateur est maintenu à une certaine valeur et les coûts sont minimisés. Dans le contexte, on ne fait pas que simplement refuser le lot si il ne passe pas le test. On teste tous les éléments du lot pour séparer les éléments conformes des éléments défectueux. Donc, si l'échantillon est accepté, on aura analysé n éléments. S'il est refusé, on devra analyser les $N - n$ éléments supplémentaires individuellement.

A.2 Risque d'erreur

Il se peut qu'on se trompe avec le test, i.e. un lot dans lequel $m \leq c$ peut toutefois avoir $M > M_t$. On va dénoter par P , la probabilité d'accepter le lot avec une certaine valeur tolérée d'éléments défectueux M_t . Autrement dit P est la probabilité de déclarer à tort que le lot est acceptable, ce qui constitue le risque du consommateur. On veut contrôler ce risque et donc la probabilité d'accepter un lot avec $M > M_t$. On fixe a priori une valeur acceptable pour ce risque $P = 0, 1$.

Dans un lot de N éléments nous avons deux catégories. Le nombre d'éléments défectueux égale à M_t et le nombre d'éléments non défectueux égale à $N - M_t$. On tire sans remise un échantillon de taille n dans lequel on détermine m éléments défectueux et $n - m$ éléments non défectueux. Ainsi X suit une distribution hypergéométrique qu'on peut utiliser pour trouver P . Nous avons $X \sim \mathbb{H}(N, n, p_t)$ pour $\max(0, n - N + M_t) \leq x \leq \min(n, M_t)$. La probabilité de trouver c ou moins d'éléments défectueux dans un échantillon de taille n tiré d'un lot de taille N est donc donnée par :

$$P = \sum_{m=0}^{m=c} \frac{\binom{M_t}{m} \cdot \binom{N-M_t}{n-m}}{\binom{N}{n}} \quad (\text{A.1})$$

A.3 Coût d'inspection

Notons par I le nombre moyens d'éléments inspectés par lot. Minimiser I est l'un des objectifs de la méthode. Pour calculer I , on a besoin de la probabilité qu'un élément du lot soit défectueux. On suppose que l'échantillon provient d'une production dont la proportion d'éléments défectueux est \bar{p} , soit la proportion d'éléments défectueux produite en moyenne par le système de production de l'industrie. La valeur de \bar{p} est estimée suivant l'historique de la production de l'industrie. La valeur de \bar{p} est connue. L'expression de I est donnée par :

$$I = n + (N - n) \left[1 - \sum_{m=0}^{m=c} \binom{n}{m} (1 - \bar{p})^{n-m} \bar{p}^m \right] \quad (\text{A.2})$$

Il faut d'abord tester tout l'échantillon de taille n puis, on doit inspecter les $N - n$ éléments si on trouve plus de c éléments défectueux dans l'échantillon, ce qui arrive avec une probabilité $1 - \sum_{m=0}^{m=c} \binom{n}{m} (1 - \bar{p})^{n-m} \bar{p}^m$. Autrement dit, cette probabilité est celle de refuser le lot et d'inspecter les $N - n$ éléments restants.

Notons qu'une augmentation de n n'entraîne pas forcément une augmentation de I , si n est trop petit, on risque de rejeter trop souvent le lot à cause de la contrainte imposée en limitant la valeur de P . On risque donc d'inspecter souvent tous les N éléments du lot, ce qui viendrait augmenter les coûts liés au contrôle de la qualité.

A.4 Problème d'optimisation

En statistique classique, on choisit en général la région de rejet de façon à contrôler l'erreur de type I. Ici toutefois, la minimisation des coûts d'inspection est très importante. On cherche donc à minimiser I tout en s'assurant que P soit suffisamment petit. En fait, on fixe P et on veut n et c qui minimisent I .

La méthode consiste à minimiser la forme fonctionnelle de I sous contrainte que le risque du consommateur P soit maintenu aussi petit que possible. Il s'agit donc de résoudre un programme d'optimisation sous contrainte. On pourrait essayer de trouver les solutions du système par essai-erreur ou par optimisation directe entre autres. Dodge et Romig proposent une démarche pour résoudre ce système. Nous présentons ici leur dérivation.

Approximation de P

Pour faciliter la résolution, la taille du lot sera considérée comme infinie et la distribution de X approximée par une loi binomiale. Tout d'abord, on peut ainsi faire quelques approximations pour l'expression (A.1) de P .

Pour n et p_t fixés, $\lim_{N \rightarrow +\infty} P(X = m) = \binom{n}{m} p_t^m (1 - p_t)^{n-m}$. On a la convergence en loi de X vers la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_t)$. On sait que $p_t = \frac{M_t}{N}$, on peut donc écrire :

$$P = \sum_{m=0}^{m=c} \binom{n}{m} \left(\frac{M_t}{N}\right)^m \left(1 - \frac{M_t}{N}\right)^{n-m} \quad (\text{A.3})$$

On admet l'approximation suivante (voir Dodge and Romig [1959], page 629-630) :

$$P = \sum_{m=0}^{m=c} \binom{N}{n} \left(\frac{n}{N}\right)^m \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{M_t-m} \quad (\text{A.4})$$

Reparamétrisation

Pour résoudre le problème d'optimisation, Dodge et Romig reparamétrisent les formes fonctionnelles de P et I ((A.4), (A.2)) en introduisant trois nouveaux paramètres a , k et z .

Définition de a , k et z

Le premier paramètre créé avec l'introduction de p_t dans l'expression de I est $a = p_t * n$. Il s'agit du nombre d'éléments défectueux qu'on peut trouver en moyenne dans un échantillon. Trouver a permettra de trouver n plus tard. Le second paramètre introduit est $k = \frac{\bar{p}}{p_t}$. C'est le rapport relatif de la proportion d'éléments défectueux générée par le système de production avec la proportion d'éléments

défectueux acceptable. Le dernier paramètre à définir est $z = p_t I$. La valeur de z permet de déterminer celle de I soit le nombre moyen d'éléments à inspecter. Continuons le développement de P et I .

Dans l'expression de P nous avons déjà le paramètre $M_t = p_t N$ et puisque $\frac{a}{M_t} = \frac{p_t n}{p_t N} = \frac{n}{N}$ nous pouvons réécrire P comme suit :

$$P = \sum_{m=0}^{m=c} \binom{M_t}{m} \left(\frac{a}{M_t}\right)^m \left(1 - \frac{a}{M_t}\right)^{M_t-m} \quad (\text{A.5})$$

On calcule la valeur de z , en multipliant p_t de part et d'autres de I . La valeur de $z = p_t I$ est le nombre toléré d'éléments défectueux qu'on peut inspecter en moyenne.

$$p_t I = p_t n + p_t (N - n) \left[1 - \sum_{m=0}^{m=c} \binom{n}{m} (1 - \bar{p})^{n-m} \bar{p}^m \right] \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} z &= p_t n + p_t N \left[1 - \sum_{m=0}^{m=c} \binom{n}{m} (1 - \bar{p})^{n-m} \bar{p}^m \right] - p_t n \left[1 - \sum_{m=0}^{m=c} \binom{n}{m} (1 - \bar{p})^{n-m} \bar{p}^m \right] \\ &= a \left(1 - 1 + \sum_{m=0}^{m=c} \binom{n}{m} (1 - \bar{p})^{n-m} \bar{p}^m \right) + M_t \left(1 - \sum_{m=0}^{m=c} \binom{n}{m} (1 - \bar{p})^{n-m} \bar{p}^m \right) \\ &= M_t - (M_t - a) \sum_{m=0}^{m=c} \binom{n}{m} (1 - \bar{p})^{n-m} \bar{p}^m \end{aligned}$$

On aurait pu arrêter ici et résoudre pour a et z . Pour simplifier l'optimisation, on fait une approximation par la loi Poisson. Nous savons que l'approximation de la binomiale par une Poisson est bonne pour $\bar{p} < 0,1$. En effet, soit $M_t \sim \mathcal{B}(n, \bar{p})$, pour \bar{p} fonction de n et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\bar{p}(n) = \lambda$ ($\lambda > 0$).

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(M_t = m) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}$, $m \in \{0, 1, \dots, n\}$, par conséquent, il y a convergence vers la loi de Poisson de paramètre λ :

$$M_t \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$$

Ajoutons la notation k qui sera utile pour représenter les résultats. Avec $\lambda = n\bar{p} = ka$, en effet $ka = \frac{\bar{p}}{p_t} * p_t n$ et pour \bar{p} suffisamment petite l'approximation de la $\mathcal{B}(n, \bar{p})$ par une $\mathcal{P}(ka)$ donne la valeur suivante de z :

$$z = M_t - (M_t - a) \sum_{m=0}^{m=c} \frac{(ka)^m e^{-ka}}{m!} \quad (\text{A.7})$$

On se retrouve donc à fixer P , écrit en terme de a et c , et à minimiser z écrit aussi en terme de a et c . Les valeurs de a et c sont inconnues et celles des paramètres M_t et k sont connus. Pour tout M_t et k connues, on cherche le couple (a, c) optimal. La résolution du système d'équation suivant permet de trouver le couple (a, c) :

$$\begin{cases} P = \sum_{m=0}^{m=c} \binom{M_t}{m} \left(\frac{a}{M_t}\right)^m \left(1 - \frac{a}{M_t}\right)^{M_t-m} \\ z = M_t - (M_t - a) \sum_{m=0}^{m=c} \frac{(ka)^m e^{-ka}}{m!} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

```

1 #Libraries
2 library(nleqslv)
3 #Valeurs initiales
4 M=50 # Nombre de défectueux
5 k=0.2 # Rapport entre pbar et pt
6 x<-c(4,2)
7 dromigp<-function(x){
8   y <- numeric(2)
9   e<-c()
10  d<-c()
11  for(i in 1: x[2]){
12    d[i]=choose(M,i)*((x[1]/(M))^i)*((1-(x[1]/M))^(M-i))
13    y[1]<-sum(d)}
14  for(j in 1: x[2]){
15    e[j]=(((k*x[1])^j)*(exp((-1)*k*x[1])))/factorial(j)
16    y[2]<-M-((M-x[1])*sum(e))}
17  y
18 }
19
20 #Utilisation de la fonction nleqslv
21 nleqslv(x,dromigp,method="Newton",control=list(trace=1,allowSingular=TRUE))

```

Le couple (a, c) ainsi trouvé permettra de déduire la taille d'échantillon n qu'il faut inspecter pour un lot de taille N . On peut résoudre numériquement le système d'équation.

A.5 Solutions des équations

La résolution du système d'équations A.8 permet de trouver le couple (a, c) et d'en déduire le couple (n, c) . Dodge et Romig présentent les solutions des équations sous forme de figures (voir A.1) qui facilitent le choix du couple (n, c) pour des valeurs données de N , p_t et \bar{p} .

Pour déterminer le seuil critique c , on lit sur la figure A.1a, en ordonnée la valeur de $M_t = p_t * N$ et en abscisse la valeur de $k = \frac{\bar{p}}{p_t}$, la croisée de ces deux valeurs permet de trouver la valeur de c qui est délimitée par les courbes. Pour trouver la taille d'échantillon n , on lit sur la figure A.1b, la valeur de M_t en ordonnée et on projette la valeur de M_t sur la courbe correspondante à la valeur de c précédemment trouvée. À partir de la courbe de c , on fait ensuite une projection orthogonale sur l'axe des abscisses pour trouver la valeur de $a = p_t * n$. De la valeur de a , on déduit celle de $n = \frac{a}{p_t}$.

Exemple :

Pour illustration, prenons un exemple tiré de Dodge and Romig [1959]. Soit $N = 1000$, $p_t = 0,05$ et $\bar{p} = 0,01$, on peut calculer $M_t = p_t * N$ et $k = \bar{p} / p_t$. On obtient $M_t = 1000 * 0,05 = 50$ et $k =$

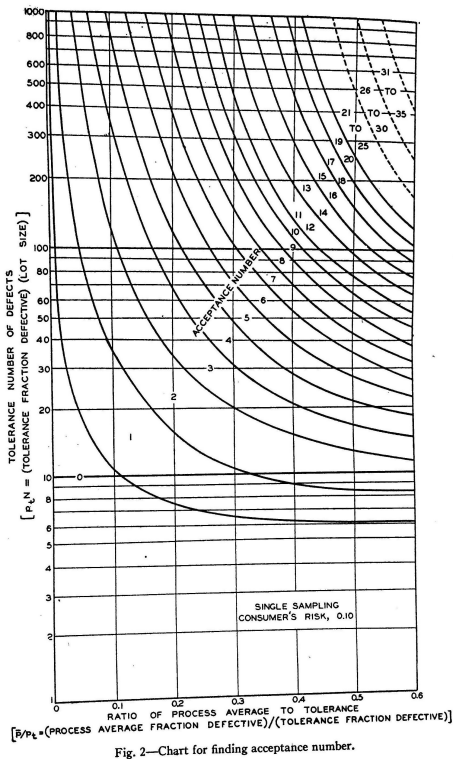


Fig. 2—Chart for finding acceptance number.

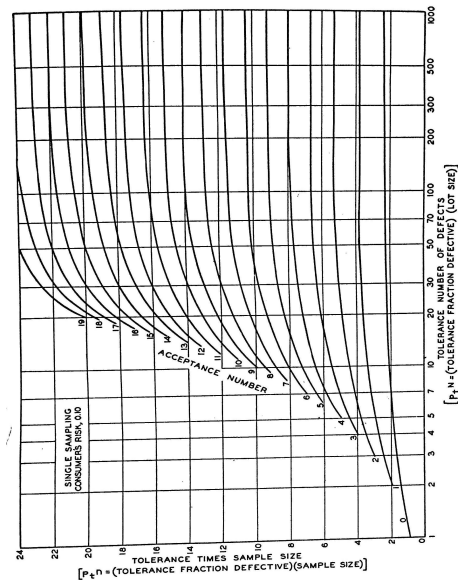


Fig. 3—Curves for finding size of sample.

(b) Courbes pour le choix de n

(a) Courbes pour le choix du seuil c

FIGURE A.1 – Figures proposées par Dodge et Romig pour trouver le couple (n, c)

Source: Dodge and Romig [1959]

0,01/0,05 = 0,2. On peut lire approximativement sur la figure A.1a, la valeur de $c = 3$ qui se trouve à la croisée de $M_t = 50$ et $k = 0,2$. Ensuite sur la figure A.1b, on peut lire la valeur de $a = 6,5$ qui se trouve sur l'axe des abscisse suite à la projection orthogonale de la valeur croisée de c et M_t , ce qui permet de déduire a valeur de n avec $n = a/p_t = 6,5/0,05 = 130$.

A.6 Discussion

Bien qu'on puisse trouver le couple (n, c) , les solutions proposées par Dodge et Romig sont relativement pénibles à utiliser. Les travaux de Dodge et Romig ont attiré l'intérêt de plusieurs auteurs conduisant à l'extension du LQAS en sciences sociales d'une manière plus aisée d'utilisation.

Nous allons dans le chapitre suivant présenter les différentes adaptations du LQAS ainsi que leur différence. En particulier, nous allons nous intéresser à l'adaptation proposée par Valadez [1991].

Annexe B

Distribution de la statistique de test Z_2

-Résolution

Soient (X_1, X_2) un couple de variables aléatoires de densité la loi normale : $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, avec X_1 et X_2 deux v.a indépendantes de sorte que leurs densités conjointes $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$. Soit $Z = H(X_1, X_2)$ avec H , la fonction de densité conjointe de X_1 et X_2 , on cherche à déterminer la loi de Z . Pour cela, nous allons faire un changement de variables. Posons $Y = \sqrt{\frac{X_2 - X_2^2}{n}}$, nous allons déterminer la densité du couple (Z, Y) et l'intégrer par rapport à Y pour trouver la densité de Z . La fonction $\varphi(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{\frac{x_2 - x_2^2}{n}}}; \sqrt{\frac{x_2 - x_2^2}{n}} \right) = (Z; Y)$ est une bijection de $]0, 1] \times]0, 1]$ dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ à dérivées partielles continues. La densité conjointe g est donnée par :

$$g(z, y) = \frac{f(x_1, x_2)}{\left| \frac{D(z, y)}{D(x_1, x_2)} \right|}$$

avec $\frac{D(z, y)}{D(x_1, x_2)}$ le jacobien de la transformation. Pour faciliter les calculs nous pouvons réécrire Z et Y comme suit :

$$Z = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{\frac{X_2 - X_2^2}{n}}} = \frac{\frac{X_1}{X_2} - 1}{\sqrt{\frac{\frac{1}{X_2} - 1}{n}}}$$

et

$$Y = \sqrt{\frac{\frac{1}{X_2} - 1}{n}}$$

ce qui revient à chercher la densité de $Z = \frac{\frac{X_1}{X_2} - 1}{\sqrt{\frac{1}{X_2} - 1}}$ et $Y = \sqrt{\frac{1}{X_2} - 1}$ de domaines respectifs $]-\infty, +\infty[$

et $]0, +\infty[$.

Le Jacobien de z, y par rapport à x_1, x_2 est :

$$J = \frac{\partial(z, y)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1/x_2}{\sqrt{1/x_2 - 1}} & E \\ 0 & -\frac{1}{2x_2^2} (1/x_2 - 1)^{-1/2} \end{vmatrix} = \frac{-\frac{1}{2x_2^3}}{\frac{1}{x_2} - 1}$$

On obtient : $\frac{\partial(z,y)}{\partial(x_1,x_2)} = -\frac{1}{2x_2^2(1-x_2)} = \frac{(1+y^2)^3}{2y^2}$

On peut aussi trouver les expressions de x_1 et x_2 en fonction de z et y .

$$\begin{cases} z = \frac{\frac{x_1}{x_2} - 1}{\sqrt{\frac{1}{x_2} - 1}} \\ \sqrt{1/x_2 - 1} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_1}{x_2} = zy + 1 \\ y = \sqrt{\frac{1}{x_2} - 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2(zy + 1) \\ x_2 = 1/(1 + y^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = (zy + 1)/(1 + y^2) \\ x_2 = 1/(1 + y^2) \end{cases}$$

On a :

$$g(z,y) = \frac{f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)}{\left| \frac{D(z,y)}{D(x_1,x_2)} \right|}$$

et

$$f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left\{-\frac{(x_2 - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}$$

Posons $\mu_1 = \mu_2$ et $\sigma_1 = \sigma_2$, on obtient :

$$f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{(x_1^2 + x_2^2 - 2\mu(x_1 + x_2))}{2\sigma^2}\right\} \exp\left\{-\frac{\mu^2}{\sigma^2}\right\}$$

Avec $x_1 + x_2 = \frac{zy+1}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^2} = \frac{zy+2}{1+y^2}$ et $x_1^2 + x_2^2 = \frac{(zy+1)^2+1}{(1+y^2)^2}$.

Ce qui permet d'obtenir :

$$g(z,y) = \frac{y^2}{\pi\sigma^2(1+y^2)^3} \exp\left\{-\frac{(zy+1)^2}{2\sigma^2(1+y^2)^2}\right\} * \exp\left\{-\mu\frac{zy+2}{\sigma^2(1+y^2)}\right\} \exp\left\{-\frac{\mu^2}{\sigma^2}\right\}$$

Soit h la densité de Z , h est donnée par :

$$h(Z) = \int_0^\infty g(z,y)dy$$

$$h(Z) = \frac{\exp\left\{-\frac{\mu^2}{\sigma^2}\right\}}{\pi\sigma^2} \int_0^\infty \frac{y^2}{(1+y^2)^3} \exp\left\{-\frac{(zy+1)^2+1}{2\sigma^2(1+y^2)^2}\right\} \exp\left\{-\mu\frac{zy+2}{\sigma^2(1+y^2)}\right\} dy$$

On peut clairement voir à partir de l'expression de la densité conjointe que Z ne suit pas une loi normale.

Annexe C

Distribution de la statistique du test exact de Fisher

Démonstration : Nous allons justifier que la distribution de la statistique de test est bien une hypergéométrique. On présente ici, la démonstration basée sur les notes du cours tableau de fréquences STT-4400.

$$P(n_{11} = k | n_{1.}, n_{2.}, n_{.1}, n_{.2} = (b, c-b, a, c-a)) = \frac{P(n_{11} = k, n_{12}, n_{21}, n_{22} = (b, c-b, a, c-a))}{P(n_{2.}, n_{.1}, n_{.2} = (b, c-b, a, c-a))} \\ = \frac{P(n_{11} = k, n_{12} = b-k, n_{21} = a-k, n_{22} = c-b-(a-k))}{P(n_{1.} = b, n_{.1} = a)}$$

On peut voir pour le dénominateur que connaître les valeurs de $n_{1.}$ et $n_{.1}$ suffit pour déterminer $n_{2.}$ et $n_{.2}$ en faisant la différence avec n .

$$P(n_{11} = k | n_{1.}, n_{2.}, n_{.1}, n_{.2} = (b, c-b, a, c-a)) = \frac{P((n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}) = (k, b-k, a-k, c-b-(a-k)))}{P(n_{1.} = b, n_{.1} = a)}$$

La probabilité au numérateur est une probabilité multinomiale égale à :

$$\frac{c!}{k!(b-k)!(a-k)!(c-b-(a-k))!} P_{11}^k P_{12}^{b-k} P_{21}^{a-k} P_{22}^{c-b-(a-k)}$$

Sous l'hypothèse nulle d'indépendance, on a $p_{ij} = p_{i.} * p_{.j}$, ainsi :

$$\frac{c!(p_{1.} p_{.1})^k (p_{1.} p_{.2})^{b-k} (p_{2.} p_{.1})^{a-k} (p_{2.} p_{.2})^{c-b-(a-k)}}{k!(b-k)!(a-k)!(c-b-(a-k))!}$$

Le produit des binomiales au dénominateur donne :

$$\frac{c!}{b!(c-b)!} P_1^b P_2^{c-b} \frac{c!}{a!(c-a)!} P_1^a P_2^{c-a}$$

Ainsi :

$$P(n_{11} = k | n_1, n_2, n_1, n_2 = (b, c-b, a, c-a)) = \frac{\frac{c!(p_1.p_1)^k (p_1.p_2)^{b-k} (p_2.p_1)^{a-k} (p_2.p_2)^{c-b-(a-k)}}{k!(b-k)!(a-k)!(c-b-(a-k))!}}{\frac{c!}{b!(c-b)!} P_1^b P_2^{c-b} \frac{c!}{a!(c-a)!} P_1^a P_2^{c-a}}$$

On peut voir que :

$$\begin{aligned} \frac{(p_1.p_1)^k (p_1.p_2)^{b-k} (p_2.p_1)^{a-k} (p_2.p_2)^{c-b-(a-k)}}{P_1^b P_2^{c-b} P_1^a P_2^{c-a}} &= \frac{p_1^k p_1^{b-k} p_1^k p_1^{a-k} p_2^{a-k} p_2^{c-b-a+k} p_2^{b-k} p_2^{c-b-a+k}}{P_1^b P_2^{c-b} P_1^a P_2^{c-a}} \\ &= \frac{p_1^b p_1^a p_2^{c-b} p_2^{c-a}}{P_1^b P_2^{c-b} P_1^a P_2^{c-a}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

En s'intéressant maintenant aux produits factoriels on a :

$$\begin{aligned} \frac{c!}{k!(b-k)!(a-k)!(c-b-a+k)!} * \frac{b!(c-b)! a!(c-a)!}{c! c!} &= \frac{b!}{k!(b-k)!} \frac{(c-b)!}{(a-k)!(c-b-(a-k))!} \frac{1}{\frac{c!}{a!(c-a)!}} \\ &= \frac{\binom{b}{k} \binom{c-b}{a-k}}{\binom{c}{a}} \end{aligned}$$

Ce résultat démontre bien que :

$$P(n_{11} = k | n_1, n_2, n_1, n_2 = (b, c-b, a, c-a)) = \frac{\binom{b}{k} \binom{c-b}{a-k}}{\binom{c}{a}}$$

Et donc la distribution de n_{11} sous H_0 est bien une hypergéométrique pour $k \in \max(0, n_1 + n_1 - n), \min(n_1, n_1)$. La probabilité d'observer un tableau si $H_0 : p_1 = p_2$ est vraie est :

$$P(n_{11} = k | n_1, n_2, n_1, n_2) = \frac{\binom{b}{k} \binom{c-b}{a-k}}{\binom{c}{a}}$$

Annexe D

Tailles n dans le test exact de fisher pour un effet de taille de 0,2

n	p_1													
	10%	15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%	50%	55%	60%	65%	70%	75%
25	0,16	0,20	0,23	0,30	0,31	0,30	0,33	0,30	0,30	0,27	0,27	0,20	0,17	0,09
26	0,13	0,19	0,24	0,27	0,29	0,29	0,28	0,26	0,28	0,27	0,25	0,20	0,15	0,08
27	0,14	0,18	0,22	0,25	0,32	0,28	0,30	0,27	0,27	0,25	0,24	0,18	0,12	0,07
28	0,13	0,17	0,20	0,25	0,25	0,25	0,29	0,26	0,28	0,22	0,21	0,14	0,16	0,07
29	0,12	0,16	0,21	0,22	0,26	0,27	0,24	0,26	0,26	0,22	0,19	0,15	0,12	0,07
30	0,10	0,15	0,20	0,22	0,26	0,25	0,25	0,27	0,22	0,19	0,18	0,16	0,11	0,06
31	0,11	0,15	0,16	0,20	0,24	0,24	0,24	0,25	0,21	0,22	0,20	0,16	0,09	0,04
32	0,10	0,15	0,16	0,19	0,22	0,22	0,26	0,24	0,22	0,21	0,17	0,14	0,08	0,05
33	0,11	0,12	0,16	0,17	0,19	0,19	0,20	0,22	0,22	0,20	0,18	0,14	0,10	0,04
34	0,07	0,11	0,17	0,16	0,21	0,22	0,20	0,21	0,19	0,17	0,13	0,13	0,07	0,04
35	0,06	0,10	0,17	0,17	0,19	0,20	0,21	0,19	0,19	0,16	0,16	0,12	0,07	0,04
36	0,06	0,12	0,15	0,18	0,18	0,18	0,18	0,19	0,20	0,15	0,16	0,11	0,07	0,03
37	0,06	0,10	0,14	0,13	0,18	0,20	0,18	0,18	0,18	0,16	0,12	0,09	0,07	0,02
38	0,06	0,10	0,12	0,15	0,16	0,15	0,16	0,17	0,18	0,16	0,11	0,09	0,05	0,02
39	0,05	0,09	0,13	0,17	0,16	0,18	0,15	0,16	0,14	0,14	0,11	0,08	0,05	0,03
40	0,05	0,07	0,11	0,14	0,17	0,17	0,18	0,16	0,16	0,14	0,12	0,09	0,05	0,02
41	0,05	0,10	0,12	0,12	0,16	0,15	0,17	0,16	0,14	0,13	0,12	0,08	0,04	0,02
42	0,04	0,09	0,11	0,13	0,13	0,15	0,15	0,15	0,13	0,14	0,12	0,08	0,05	0,02
43	0,04	0,07	0,07	0,13	0,13	0,13	0,12	0,14	0,13	0,10	0,12	0,06	0,06	0,02
44	0,04	0,07	0,10	0,11	0,13	0,15	0,14	0,13	0,12	0,13	0,09	0,06	0,04	0,01
45	0,04	0,05	0,08	0,11	0,11	0,14	0,14	0,13	0,11	0,09	0,09	0,06	0,04	0,02
46	0,03	0,05	0,08	0,10	0,11	0,10	0,11	0,12	0,11	0,10	0,07	0,06	0,04	0,02
47	0,03	0,05	0,08	0,11	0,10	0,09	0,12	0,12	0,11	0,08	0,07	0,05	0,03	0,01
48	0,03	0,05	0,06	0,08	0,11	0,10	0,11	0,12	0,11	0,08	0,08	0,05	0,02	0,00
49	0,02	0,05	0,08	0,10	0,11	0,11	0,12	0,11	0,10	0,07	0,06	0,05	0,02	0,01
50	0,02	0,04	0,06	0,07	0,09	0,10	0,09	0,10	0,10	0,10	0,06	0,04	0,03	0,00

TABLE D.1 – Tailles n calculées selon le test exact de Fisher pour $\alpha = 0,1$ et un effet de taille de 0,2

Annexe E

Test de Wald à deux proportions

E.1 Rappel du test usuel à deux proportions

On souhaite comparer les proportions de deux populations. On suppose qu'on tire 2 échantillons aléatoires indépendants de tailles n_1, n_2 de 2 populations soient S_1 et S_2 , le nombre de succès dans les échantillons 1 et 2 respectivement. On prend le cas où $i = 1, 2$ et on s'intéresse à comparer les proportions p_1 et p_2 . Les hypothèses du test unilatéral s'écrivent comme suit :

$$H_0 : p_1 = p_2 \text{ vs } H_1 : p_1 < p_2$$

La statistique du test sans correction pour la continuité s'écrit sous $H_0 : p_1 = p_2$ (voir Chow et al. [2007]) :

$$Z_2 = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\left(\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}\right)}} \quad (\text{E.1})$$

La statistique du test avec une correction pour la continuité s'écrit sous $H_0 : p_1 = p_2$:

$$Z_2^* = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}\right)}} \quad (\text{E.2})$$

On peut montrer par le théorème centrale limite que la statistique $Z_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$. En effet sous H_0 , on

peut voir que l'espérance est donnée par :

$$\begin{aligned} E(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) &= E(\hat{p}_1) - E(\hat{p}_2) \\ &= p - p \\ &= 0 \end{aligned}$$

La variance est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) &= \text{Var}(\hat{p}_1) + \text{Var}(\hat{p}_2) \\ &= \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2} \end{aligned}$$

En effet, les échantillons étant indépendants, le terme de covariance entre \hat{p}_1 et \hat{p}_2 est nulle. On trouve le statistique de test Z_2 en centrant la différence $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ et en réduisant par la variance, ce qui nous permet de trouver la distribution de la statistique de test par le théorème centrale limite. On peut aussi montrer que :

$$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\left(\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}\right)}} \approx \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\left(\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)}} \quad (\text{E.3})$$

La démonstration se fait selon le théorème de Slutsky (voir Casella and Berger [2002] pour le test à une proportion). Soient U_n et V_n deux suites de variables aléatoires tels que :

$U_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} U$ avec U une variable aléatoire et $V_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} c$ avec c une constante, d'après le théorème de Slutsky, on a alors $U_n/V_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} U/c$.

On sait que :

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 &= \frac{S_1}{n_1} \sim \mathcal{N}\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1}\right) \\ \hat{p}_2 &= \frac{S_2}{n_2} \sim \mathcal{N}\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right) \end{aligned}$$

Sous H_0 :

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$$

Soit g une fonction continue, si on a deux suites X_n et Y_n tels que (X_n, Y_n)

$(X_n, Y_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} (a, b)$ avec (a, b) un couple de constantes, alors $g(X_n, Y_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} g(a, b)$.

On peut définir g comme suit :

$$g:]0; 1[*]0; 1[\rightarrow \mathbf{R}$$

$$(x, y) \mapsto \frac{x(1-x)}{n} + \frac{y(1-y)}{n}$$

En effet, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = g(x_0,y_0)$, la fonction g est continue aux points (x_0, y_0) .

Or

$$(\hat{p}_1, \hat{p}_2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} (p_1, p_2)$$

On en déduit que :

$$g(\hat{p}_1, \hat{p}_2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} g(p_1, p_2)$$

On peut voir le résultat en posant :

$$U_n = \hat{p}_1 - \hat{p}_2$$

$$V_n = g(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$$

On trouve que :

$$\frac{U_n}{V_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\left(\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)}}$$

Correction pour la continuité dans le test à 2 proportions

On peut améliorer l'approximation de la distribution de la statistique de test en introduisant une correction pour la continuité. En effet, on souhaite approximer la distribution de probabilités d'une loi binomiale par la distribution de probabilité d'une loi normale.

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, la variable aléatoire X prend des valeurs entières entre 0 et n or pour une loi continue comme la loi normale la probabilité d'une valeur discrète est nulle. En d'autres termes, on ne peut approximer directement $P(X = k)$ par une loi normale. Il faudrait introduire une correction pour la continuité de la loi discrète et la correction la plus connue est celle de Yate's qui consiste à remplacer la valeur ponctuelle prise par X par un intervalle d'amplitude égale à 1 soit $P(X = k) \approx P(k - 1/2 < X < k + 1/2)$. Cette règle est valable dans le cas où $P(X < k) \approx P(X < k - 1/2)$ et

$P(X > k) \approx P(X < k + 1/2)$. Lorsque $n \Rightarrow \infty$ la correction pour la continuité tend vers 0, ce qui est prévisible car on retrouve au dénominateur la taille d'échantillon.

Dans le contexte d'un test à deux proportions avec égalité des tailles d'échantillon, lorsque S_1 augmente d'une unité, la différence entre $\frac{S_1}{n} - \frac{S_2}{n}$ varie de $\frac{1}{n}$ de même que pour une augmentation d'une unité de S_2 , la correction à appliquer dans ce cas est égale à $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ (voir Louis [2017]). Lorsque les tailles d'échantillons sont inégales $n_1 \neq n_2$, on doit calculer une moyenne harmonique de $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}$. La correction à appliquer est égale dans ce cas à $\frac{1}{2} \cdot \frac{(1/n_1 + 1/n_2)}{2} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$. Nous avons donc ajouté une correction pour la continuité équivalente à $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$.

E.2 Calcul de la taille d'échantillon pour le test usuel à 2 proportions

Pour α, β choisies et $n_1 = n_2 = n$, la taille d'échantillon est donnée par :

$$n = \frac{\left\{ (z_\alpha + z_\beta) \sqrt{p_1(1-p_1) + p_2(1-p_2)} \right\}^2}{h^2} \quad (\text{E.4})$$

Preuve

On sait qu'on rejette $H_0 : p_1 = \bar{p}$ lorsque $z_2 < -z_\alpha$, la puissance peut être approximée par :

$$\begin{aligned} 1 - \beta &= P\left(z_2 < -z_\alpha \mid p_1 - p_2 = h\right) \\ &\approx P\left(\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\left(\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)}} < -z_\alpha \mid p_1 - p_2 = h\right) \\ &= P\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 < -z_\alpha \sqrt{\left(\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)} \mid p_1 - p_2 = h\right) \\ &= P\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - h < -z_\alpha \sqrt{\left(\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)} - h\right) \\ &= P\left(\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - h}{\sqrt{\left(\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)}} < \frac{-z_\alpha \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} - h}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{-z_\alpha \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} - h}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}\right) \end{aligned}$$

On obtient le quantile suivant :

$$z_\beta = -\frac{z_\alpha \sqrt{p(1-p) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} + h}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \quad (\text{E.5})$$

En supposant l'égalité des tailles d'échantillon $n_1 = n_2 = n$, on peut tirer la valeur de n . En effet :

$$\begin{aligned} z_\beta \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{n}} &= -z_\alpha \sqrt{p(1-p) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right)} - h \\ (z_\beta + z_\alpha) \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{n}} &= -h \\ (z_\beta + z_\alpha) \sqrt{p_1(1-p_1) + p_2(1-p_2)} &= \sqrt{nh} \end{aligned}$$

et on trouve l'expression suivante de n :

$$n = \frac{\left\{ (z_\alpha + z_\beta) \sqrt{p_1(1-p_1) + p_2(1-p_2)} \right\}^2}{h^2}$$

Annexe F

Codes R

F.1 Codes du chapitre 1

```
1 #####
2 #Toutes les fonctions utilisées dans le chapitre 1
3 #####
4 #Fonction qui permet d'obtenir la table 1.1 de Valadez
5 tablelqas<-function(n,pi1,pi2){
6   xetoile=c()
7   bxetoile=list()
8   for(i in 1:length(n)){
9     xetoile=0:n[i]
10    bxetoile[i]=list(xetoile)
11  }
12  prob_erreurI=list()
13  b_alphaI=list()
14  for(i in 1:length(pi1))
15  {
16    pI=pi1[i]
17    for(j in 1:length(n)){
18      prob_erreurI[j] = list(pbinom(bxetoile[[j]]-1, n[j],pI))
19    }
20    b_alphaI[i]=list(prob_erreurI)
21  }
22  prob_erreurII=list()
23  b_alphaII=list()
24  for(i in 1:length(pi2))
25  {
26    pII=pi2[i]
27    for(j in 1:length(n)){
28      prob_erreurII[j] = list(1-pbinom(bxetoile[[j]]-1, n[j],pII))
29    }
30    b_alphaII[i]=list(prob_erreurII)
31  }
32  res=list()
33  t_res=list()
34  for(i in 1:length(pi1)){
35    balphaI=b_alphaI[[i]]
```

```

36     balphaII=b_alphaII[[i]]
37     for(j in 1:length(n)){
38         res[j] = list(data.frame(cbind(xetoile=bxetoile[[j]], alphaI =balphaI[[j]],
39             alphaII = balphaII[[j]])))
40         res[[j]]$SommeErreurs = cbind(res[[j]]$alphaI + res[[j]]$alphaII)
41         res[[j]]<-round(res[[j]],4)
42     }
43     t_res[i]=list(res)
44 }
45 sres=list()
46 opt=list()
47 x_opt=list()
48
49 for(i in 1:length(pi1)){
50     sres=t_res[[i]]
51     for(j in 1:length(n)){
52         opt[j]=list(sres[[j]][which.min(sres[[j]]$SommeErreurs),])
53     }
54     x_opt[i]=list(opt)
55 }
56
57 tab_f=matrix(ncol=length(pi1),nrow=length(n))
58 v_xet1=c()
59 for(i in 1:length(pi1)){
60     tx_opt=x_opt[[i]]
61     for(j in 1:length(n)){
62         v_xet1[j]=tx_opt[[j]][[1]]
63     }
64     tab_f[,i]<-v_xet1
65 }
66
67 rownames(tab_f)<-n
68 colnames(tab_f)<-paste(pi1*100,"%")
69 return(list(tab_f))
70 }
71 #####
72 ## Fonction pour le test H0:p>=p0 vs H1:p<p0
73 #La fonction donne le seuil critique et les erreurs selon les méthodes exactes et
74 #approximatives
75 #Dans la méthode exacte, la fonction retourne le couple (n,c) si aucune valeur de n
76 #n'est donnée
77 #Retourne le seuil critique c que n soit précisé ou non
78 #La méthode 'Lemeshow' détermine (n,c) pour rconso et rprod selon la loi normale
79 #La méthode 'Exact' donne (n,c) pour rconso et rprod selon le test binomial exact
80 #####
81 c_test<-function(P0,Pp,rconso,rprod,ns=NULL,method="Lemeshow")
82 {
83     #initiatilisation
84     n=0
85     c=0
86
87     if(! method %in% c("Lemeshow","Exact")){
88         return("Mauvais argument pour méthode")
89     }

```

```

89 # method<-match.arg(method)
90 if (method=="Lemeshow")
91 {
92   n=((qnorm(1-rconso)*sqrt(P0*(1-P0))+qnorm(1-rprod)*sqrt(Pp*(1-Pp)))^2)/((P0-Pp)^2)
93   c=n*P0-qnorm(1-rconso)*sqrt(n*P0*(1-P0))
94   return(data.frame(n=ceiling(n),c=floor(c)))
95 }
96
97 if(method=="Exact"){
98   {
99     if(is.null(ns)){
100       n=ceiling(((qnorm(1-rconso)*sqrt(P0*(1-P0))+
101         qnorm(1-rprod)*sqrt(Pp*(1-Pp)))^2)/((Pp-P0)^2))
102       while(nrow(subset(res, (alpha<=rconso) & (beta<=rprod)))==0){
103         alpha<-c()
104         beta<-c()
105         seuil<-1:n
106         for(i in 1:n){
107           alpha[i]<-round(pbinom(seuil[i]-1,n,P0),3)
108           beta[i]<-round((1-pbinom(seuil[i]-1,n,Pp)),3)
109         }
110         res<-data.frame(seuil,alpha,beta,somme_erreur=alpha+beta)
111         n=n+1
112       }
113       res2=subset(res, (alpha<=rconso) & (beta<=rprod))
114       c = as.numeric(res2[which.min(apply(res2[,1:2], 1, sum)),]$seuil)
115       n=nrow(res)
116       erreur=res
117       colnames(erreur)<-c("enumeration","erreur_alpha","erreur_beta","somme_erreur")
118     }
119
120     else if(!is.null(ns)){
121       n=ns
122       seuil<-1:n
123       alpha<-c()
124       beta<-c()
125       for(i in 1:n){
126         alpha[i]<-round(pbinom(seuil[i]-1,n,P0),3)
127         beta[i]<-round((1-pbinom(seuil[i]-1,n,Pp)),3)
128       }
129       res<-data.frame(seuil,alpha,beta,somme_erreur=alpha+beta)
130       res2 = subset(res, (alpha <= rconso) & (beta <= rprod))
131       c = as.numeric(res2[which.min(apply(res2[,1:2], 1, sum)),]$seuil)
132       erreur=res
133       colnames(erreur)<-c("enumeration","erreur_alpha","erreur_beta","somme_erreur")
134     }
135   }
136   return(list(erreur,n=n,c=c))
137 }
138 }
139
140 }
141 #####
142 #Fonction pour le test H0:p<=p0 vs H1:p>p0 qui donne le seuil critique et les erreurs
143 #Fonctions c_test et choisi_test: leur différence est par rapport à l'hypothèse
    alternative

```

```

144 #####
145 choisi_test<-function(P0,Pp,rconso,rprod,ns=NULL,method="Lemeshow")
146 {
147   #initiatilisation
148   n=0
149   c=0
150
151   if(! method %in% c("Lemeshow","Exact")){
152     return("Mauvais argument pour méthode")
153   }
154
155   # method<-match.arg(method)
156   if (method=="Lemeshow")
157   {
158     n=((qnorm(1-rconso)*sqrt(P0*(1-P0))+qnorm(1-rprod)*sqrt(Pp*(1-Pp)))^2)/((Pp-P0)^2)
159     c=n*P0+qnorm(1-rconso)*sqrt(n*P0*(1-P0))
160     return(data.frame(n,c=floor(c)))
161   }
162
163   if(method=="Exact"){
164     {
165       if(is.null(ns)){
166         n=ceiling(((qnorm(1-rconso)*sqrt(P0*(1-P0))+
167         qnorm(1-rprod)*sqrt(Pp*(1-Pp)))^2)/((Pp-P0)^2))
168         while(nrow(subset(res, (alpha<=rconso) & (beta<=rprod)))==0){
169           alpha<-c()
170           beta<-c()
171           seuil<-1:n
172           for(i in 1:n){
173             alpha[i]<-round(1-pbinom(seuil[i]-1,n,P0),3)
174             beta[i]<-round((pbinom(seuil[i]-1,n,Pp)),3)
175           }
176           res<-data.frame(seuil,alpha,beta,somme_erreur=alpha+beta)
177           n=n+1
178         }
179         res2=subset(res, (alpha<=rconso) & (beta<=rprod))
180         c = as.numeric(res2[which.min(apply(res2[,1:2], 1, sum)),]$seuil)
181         n=nrow(res)
182         erreur=res
183         colnames(erreur)<-c("enumeration","erreur_alpha","erreur_beta","somme_erreur")
184       }
185
186       else if(!is.null(ns)){
187         n=ns
188         seuil<-1:n
189         alpha<-c()
190         beta<-c()
191         for(i in 1:n){
192           alpha[i]<-round(1-(pbinom(seuil[i],n,P0)),3)
193           beta[i]<-round(pbinom(seuil[i],n,Pp),3)
194         }
195         res<-data.frame(alpha,beta,seuil)
196
197         res2 = subset(res, (alpha <= rconso) & (beta <= rprod))
198         c = res2[which.min(apply(res2[,1:2], 1, sum)),]$seuil
199         erreur=res

```



```

200     }
201   }
202 }
203
204   return(list(erreur=erreur, n=ceiling(n), c=c))
205 }
206
207 }
208 #####
209 #Fonction pour obtenir uniquement les erreurs alpha et beta
210 #Test binomial exact
211 #####
212 risque<-function(p0,n,rconso,rprod){
213   table=c_test(p0,p0-0.3,rconso,rprod,ns=n,method = "Exact")
214   tab=data.frame(table[[1]])
215   rslt=subset(tab, enumeration==as.numeric(table$c),select=c(erreur_alpha,erreur_beta
216     ))
217   return(data.frame(rslt))
218 }

```

```

1 #####
2 #Chapitre 1: Le LQAS selon Valadez et Lemeshow
3 #Le code concerne les tables : 1.2, 1.3 et 1.5
4 #Les figures : 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 et 1.6
5 #####
6 #Appel des fonctions du chapitre 2
7 source("fctchap2.R")
8 #####
9 #Couple (n,c) pour différentes valeurs de alpha et beta
10 #Figure 1.1
11 p=seq(0.35,0.95,0.05)
12 p0=pp=alpha=beta=0
13 alphas<-list()
14 betas<-list()
15 n=c(19,23:30)
16 for(j in 1:length(n)){
17   no=n[j]
18   for(i in 1:length(p)){
19     p0=p[i]
20     alpha[i]=data.frame(risque(p0,no,rconso=0.1,rprod=0.1))$erreur_alpha
21     beta[i]=data.frame(risque(p0,no,rconso=0.1,rprod=0.1))$erreur_beta
22   }
23   alphas[j]<-list(alpha)
24   betas[j]<-list(beta)
25 }
26 }
27
28 #Mettre la liste en un seul dataframe
29 allalpha=do.call(cbind, alphas)
30 colnames(allalpha)<-n
31 allbeta=do.call(cbind, betas)
32 colnames(allbeta)<-n
33
34 boxplot(allalpha,las=1,xlab="taille_d'échantillon", ylab=expression(alpha),sub="(a)")

```

```

35 abline(h=0.1)
36 boxplot(allbeta, las=1, xlab="taille_d'échantillon", ylab=expression(beta), sub="(b)")
37 abline(h=0.1)
38
39 #Figure 1.2
40 p=seq(0.35,0.95,0.05)
41 p0=pp=alpha=beta=0
42 alphas<-list()
43 betas<-list()
44 n=c(35:50)
45 for(j in 1:length(n)){
46   no=n[j]
47   for(i in 1:length(p)){
48     p0=p[i]
49     alpha[i]=data.frame(risque(p0,no,rconso=0.05,rprod=0.05))$erreur_alpha
50     beta[i]=data.frame(risque(p0,no,rconso=0.05,rprod=0.05))$erreur_beta
51   }
52   alphas[j]<-list(alpha)
53   betas[j]<-list(beta)
54
55 }
56 #Mettre la liste en un seul dataframe
57 allalpha=do.call(cbind, alphas)
58 colnames(allalpha)<-n
59 allbeta=do.call(cbind, betas)
60 colnames(allbeta)<-n
61
62 boxplot(allalpha, las=1, xlab="taille_d'échantillon", ylab=expression(alpha), sub="(a)")
63 abline(h=0.05)
64 boxplot(allbeta, las=1, xlab="taille_d'échantillon", ylab=expression(beta), sub="(b)")
65 abline(h=0.05)
66
67 #Figure 1.3
68 p=seq(0.35,0.95,0.05)
69 p0=pp=alpha=beta=0
70 alphas<-list()
71 betas<-list()
72 n=c(28:40)
73 for(j in 1:length(n)){
74   no=n[j]
75   for(i in 1:length(p)){
76     p0=p[i]
77     alpha[i]=data.frame(risque(p0,no,rconso=0.05,rprod=0.1))$erreur_alpha
78     beta[i]=data.frame(risque(p0,no,rconso=0.05,rprod=0.1))$erreur_beta
79   }
80   alphas[j]<-list(alpha)
81   betas[j]<-list(beta)
82
83 }
84
85 #Mettre la liste en un seul dataframe
86 allalpha=do.call(cbind, alphas)
87 colnames(allalpha)<-n
88 allbeta=do.call(cbind, betas)
89 colnames(allbeta)<-n
90

```

```

91 boxplot(allalpha, las=1, xlab="taille_d'échantillon", ylab=expression(alpha), sub="(a)")
92 abline(h=0.05)
93 boxplot(allbeta, las=1, xlab="taille_d'échantillon", ylab=expression(beta), sub="(b)")
94 abline(h=0.1)
95 #Arrondir dans la méthode de Valadez
96 p1<-seq(0.8,0.85,0.01)
97 p2<-seq(0.5,0.55,0.01)
98 alpha1<-c()
99 beta1<-c()
100 for(i in 1:length(p1)){
101   alpha1[i]<-pbinom(12,19,p1[i])
102   beta1[i]<-1-pbinom(12,19,p2[i])
103 }
104
105 p1<-seq(0.8,0.85,0.01)
106 p2<-seq(0.5,0.55,0.01)
107 alpha2<-c()
108 beta2<-c()
109 for(i in 1:length(p1)){
110   alpha2[i]<-pbinom(13,19,p1[i])
111   beta2[i]<-1-pbinom(13,19,p2[i])
112 }
113
114 #Permet de produire la table 1.2
115 print(xtable(cbind(alpha1,beta1,alpha2,beta2),digits=3), include.rownames =FALSE)
116
117 #Comparaison des approches #Table 2.4
118 p<-seq(0.1,0.65,0.05)
119 nl<-c()
120 cl<-c()
121 for(i in 1:length(p)){
122   res=choisi_test(p[i],p[i]+0.3,0.1,0.1,ns=19,method = "Exact")
123   tab=res$erreur
124   rslt=subset(tab, seuil==as.numeric(res$c),select=c(alpha,beta ))
125   nl[i]<-choisi_test(p[i],p[i]+0.3,rslt$alpha,rslt$beta,method="Lemeshow")$n
126   cl[i]<-choisi_test(p[i],p[i]+0.3,rslt$alpha,rslt$beta,method="Lemeshow")$c
127 }
128 cv<-c()
129 for(i in 1:length(p)){
130   cv[i]<-c_test(p[i]+0.3,p[i],0.1,0.1,ns=19,method = "Exact")$c
131 }
132 dat<-cbind(p,p+0.3,nv=rep(19,12),nl=round(nl,2),cl,cv)
133 print(xtable(dat), include.rownames =FALSE)
134
135 #Courbe d'efficacité #Figure 1.4
136 #On calcule la probabilité d'accepter H0 peu importe la valeur de p
137 #Avec pbinom lower.tail=FALSE , on calcule la probabilité d'avoir plus de 13 succès
138 #Avec pbinom lower.tail=TRUE , on calcule la probabilité d'avoir moins de 13 succès
139 pc<-seq(0,1,0.01)*100 #Probabilité de succès en pourcentage
140 p<-seq(0,1,0.01) #Probabilité de succès
141 bons <- which(pc>=50 & pc<= 80)
142 plot(pc, (pbinom(13,19,p,lower.tail = FALSE))*100,at = seq(0, 100, by = 10),
143       xlim=c(100, 0),
144       ylim=c(0,100),type="l", lwd=2,
145       xlab=expression(p),
146       ylab=expression(1-P[p](W)),

```

```

146     main=expression(H[0] : p >= p[0]))
147
148 abline(v=c(50,80), h=c(10,90),lty=2)
149
150 plot(p*100, (pbinom(13,19,p,lower.tail = TRUE))*100, xlim=c(100, 0),at = seq(0, 100,
151     by = 10),
152     ylim=c(0,100),type="l", lwd=2,
153     xlab=expression(p),
154     ylab=expression(1-P[p](W)),
155     main=expression(H[0] : p <= p[0]))
156 abline(v=c(50,80),h=c(10,90),lty=2)
157
158 #Figure 1.5 et 1.6
159 par(mfrow=c(1,1))
160 #Graphique avec H0:p>80%
161 par(mar=c(5,4,4,5)+.1)
162 df<-c_test(0.8,0.5,0.1,0.1,ns=19,method = "Exact")[1]
163 df=data.frame(df)
164
165 plot(df[,1],df[,2],xlab="seuil",col="navyblue",ylab=expression(alpha),
166     main=expression(H[0]>=80~"%"),type="l",lty=2, lwd=2)
167 par(new=TRUE)
168 plot(df[,1],df[,3],type="l",col="red",xaxt="n",yaxt="n",xlab="",ylab="", lty=2, lwd=2)
169 axis(4)
170 mtext(expression(beta),side=4,line=3)
171 legend("topleft",col=c("navyblue","red"),seg.len =
172     1,lty=1,text.width=0.5,legend=c(expression(alpha),expression(beta)))
173
174 #Graphique avec H0:p<50%
175 df<-choisi_test(0.5,0.8,0.1,0.1,ns=19,method = "Exact")$erreur
176 df=data.frame(df)
177
178 plot(df[,1],df[,2],xlab="seuil",col="navyblue",ylab=expression(alpha),
179     main=expression(H[0]<=50~"%"),type="l",lty=2, lwd=2)
180 par(new=TRUE)
181 plot(df[,1],df[,3],type="l",xaxt="seuil",col="red",yaxt="seuil",xlab="",ylab="",
182     lty=2, lwd=2)
183 axis(4)
184 mtext(expression(beta),side=4,line=3)
185 legend("topleft",col=c("navyblue","red"),lty=1,legend=c(expression(alpha),expression(beta)))
186
187 #Permet d'obtenir en partit la table 2.1
188 psup<-seq(0.35,0.95,0.05)
189 xtable(tablelqas(12:30,psup,psup-0.3))

```

F.2 Codes du chapitre 2

```

1 #####
2 #####Toutes les fonctions utilisées dans le chapitre 2#####
3 #####
4 #Appel des fonctions du chapitre 1
5 source("fctchap2.R")

```

```

6 #Fonctions pour estimer l'erreur de type I et II dans le cas du test binomial
7 #Tel que proposé dans le manuel du praticien
8 #Cette fonction permet d'estimer l'erreur de type I.
9 #p est la vraie probabilité de succes, qui est également p0
10 #On donne alpha et beta
11 #La zone de rejet est choisie par la methode exacte
12 #n est requis
13 #On considère plusieurs régions, k à choisir
14 #Prend pour acquis que Pp = P0 - 0.3
15 #On documente les problèmes potentiels avec count
16 #Lorsque pchap est trop petit, on ne peut plus faire Pp=P0-0.3
17 #La fonction calcule le nombre de fois que ça arrive avec count
18 #On suppose que la probabilité est la même pour toutes les zones
19 #####
20 errorI<-function(p, alpha=NULL, beta=NULL, n, B=1000, k=5){
21   #vp<-rep(p,k)
22   #vn<-rep(n,k)
23   rej=0
24   count=0
25   sc=0 #Seuil critique
26   rconso<-c()
27
28   for(j in 1:B){
29
30     X<-rbinom(k,n,p)
31     pchap=round(sum(X[2:k])/((k-1)*n),1)
32     if(pchap<0.3){count=count+1}
33     else if(pchap>0.3){
34       sc<-as.numeric(c_test(pchap,pchap-0.3,alpha,beta,ns=n,method = "Exact")$c)#Seuil
35         critique
36       if(X[1]<sc){rej=rej+1}
37     }
38     rconso<-rej/(B-count)
39     me<-abs(qnorm(0.05/2))*sqrt((rconso*(1-rconso))/(B-count))
40     return(data.frame(rconso,ICl=rconso-me,ICu=rconso+me,count))
41   }
42   #####
43 #Cette fonction permet d'estimer l'erreur de type II
44 #Alternative : H1:p< p0
45 #Memes arguments que errorI
46 #On suppose que la probabilité est la même pour toutes les zones
47 #p = vraie probabilité de succes pour la zone 1
48 #la probabilité de succès dans les autres zones est p + 0.3
49 #p0 est aléatoire, c'est pchap
50 #On utilise la table 1.1, i.e le choix de la zone de rejet utilise Pp=p0-0.3
51 #####
52 errorII<-function(p, alpha=NULL, beta=NULL, n, B=1000, k=5){
53   #vp<-rep(p,k)
54   #vn<-rep(n,k)
55   count=0
56   rej=0
57   sc=0 #Seuil critique
58   rconso<-c()
59
60   for(j in 1:B){

```

```

61 X<-rbinom(k,n,c(p,p+0.3,p+0.3,p+0.3,p+0.3))
62 pchap=round(sum(X[2:k])/((k-1)*n),1)
63 if(pchap<0.3){count=count+1}
64 else if(pchap>0.3){
65   sc<-as.numeric(c_test(pchap,pchap-0.3,alpha,beta,ns=n,method =
66     "Exact")$c)#Seuil critique
67   if(X[1]<sc){rej=rej+1}
68 }
69 rprod<-(1-sum(rej)/(B-count))
70 me<-abs(qnorm(0.05/2))*sqrt((rprod*(1-rprod))/(B-count))
71 return(data.frame(rprod,ICl=rprod-me,ICu=rprod+me,count))
72 }
73 #####
74 #On propose ici des fonctions pour estimer l'erreur de type I et II, si on souhaite
75 #réaliser le test proposé par le manuel avec l'approximation par la loi normale.
76 #####
77 errorNI<-function(p,alpha=NULL,n,B=1000,k=5){
78   Z<-c()
79   rconso<-c()
80   count=0
81   for(j in 1:B){
82
83     X<-rbinom(k,n,p)
84     pchap=sum(X[2:k])/((k-1)*n)
85     if(pchap==0|pchap==1){count=count+1}
86     else if(pchap!=0|pchap!=1){
87       Z[j]<-(X[1]/n-pchap)/sqrt((pchap*(1-pchap))/n)
88     }
89   }
90   rconso<-mean(na.omit(Z)<qnorm(alpha)) #La moyenne sur les valeurs sans pchap=0 ou
91     pchap=1
92   me<-abs(qnorm(0.05/2))*sqrt((rconso*(1-rconso))/B)
93   return(data.frame(rconso,ICl=rconso-me,ICu=rconso+me,count))
94 }
95 #####
96 #Cette fonction permet d'estimer l'erreur de type II
97 #Alternative : H1:p<p0
98 #Memes arguments que errorII
99 #On suppose que la probabilité est la meme pour toutes les zones
100 #p = vraie probabilité de succès pour la zone 1
101 #la probabilité de succès dans les autres zones est p + 0.3
102 #p0 est aleatoire, c'est pchap
103 #####
104 errorNII<-function(p,alpha=NULL,n,B=1000,k=5,count){
105   Z<-c()
106   rprod<-c()
107   count=0
108   for(j in 1:B){
109     X<-rbinom(k,n,c(p,p+0.3,p+0.3,p+0.3,p+0.3))
110     pchap=sum(X[2:k])/((k-1)*n)
111     if(pchap==0|pchap==1){count=count+1}
112     else if(pchap!=0|pchap!=1){
113       Z[j]<-(X[1]/n-pchap)/sqrt((pchap*(1-pchap))/(n))
114     }
115   }

```

```

115   rprod<-1-mean(na.omit(Z)<qnorm(alpha))#La moyenne sur les valeurs sans pchap=0 ou
      pchap=1
116   me<-abs(qnorm(0.05/2))*sqrt((rprod*(1-rprod))/(B-count))
117   return(data.frame(rprod,ICl=rprod-me,ICu=rprod+me,count))
118 }

```

```

1 #####
2 #####Chapitre 2 : Le LQAS en pratique selon Valadez#####
3 #####
4 #On appelle les fonctions qui donnent l'erreur de type I et II
5   source("fctchap3.R")
6 #####
7 #Paramètres graphiques
8 theme_set(theme_bw())
9 th<-theme(axis.text=element_text(size=15, face="bold"),
10           axis.title.x=element_text(size=15,face="bold"),
11           axis.title.y=element_text(size=23,face="bold"),
12           legend.text=element_text(size=15))
13 #Chargement des librairies
14 library(ggplot2)
15 library(statmod)
16 library(xtable)
17 library(e1071)
18 #####
19 #Test binomial exact
20 #Estimation des erreurs de type I et II et IC à (1-alpha)% -Table
21 #####
22 #Pour 2 proportions
23 set.seed(103)
24 p<-seq(0.35,0.95,0.01)
25 #alpha=beta=10%
26 df<-list()
27 for(i in 1:length(p)){
28   df[i]<-list(errorI(p[i],alpha=0.1,beta=0.1,n=19,k=2))
29 }
30 #Figure 3.1 - (Nombre de tests non réalisés)
31 df<-data.frame(p,do.call(rbind,df))
32 ggplot(df, aes(x = p,y=count)) +
33   geom_line(size = 2)+th+ylab("Nombre de tests non réalisés")
34
35 #CODES POUR CRÉER LA FIGURE 2.2 n=19
36 g=ggplot(df, aes(x = p, y = rconso)) +
37   geom_point(size = 2) +
38   geom_errorbar(aes(ymax = ICu, ymin = ICl))+
39   ylab(expression(P(S[1]<c~"|"~p[1]==p[2])))+ylim(0,0.25)
40 g+th+geom_hline(yintercept=0.1, linetype="dashed", color = "red")
41
42 #alpha=beta=5%
43 set.seed(100)
44 df<-list()
45 for(i in 1:length(p)){
46   df[i]<-list(errorI(p[i],alpha=0.05,beta=0.05,n=35,k=2))
47 }
48 df<-data.frame(p,do.call(rbind,df))

```

```

49
50 #Nombre de tests non réalisés
51 ggplot(df, aes(x = p,y=count)) +
52   geom_line(size = 2)+
53   ylab("Nombre_de_tests_non_réalisés")+th
54
55 #CODES POUR CRÉER LA FIGURE 3.2 n=35
56 g=ggplot(df, aes(x = p, y = rconso)) +
57   geom_point(size = 2) +
58   geom_errorbar(aes(ymax = ICu, ymin = IC1))+
59   ylab(expression(P(S[1]<c~|"~p[1]==p[2])))+ylim(0,0.25)
60 g+th+geom_hline(yintercept=0.05, linetype="dashed", color = "red")
61 #####
62 #Figure 3.3 -
63 #Pour 5 proportions
64 #alpha=beta=10%
65 set.seed(102)
66 df<-list()
67 for(i in 1:length(p)){
68   df[i]<-list(errorI(p[i],alpha=0.1,beta=0.1,n=19,k=5))
69 }
70 df<-data.frame(p,do.call(rbind,df))
71 #Nombre de tests non réalisés#Non inclus dans le document
72 ggplot(df, aes(x = p,y=count)) +
73   geom_line(size = 2)+
74   ylab("Nombre_de_tests_non_réalisés")+th
75 #CODE POUR CRÉER LA FIGURE 3.3 n=19
76 g=ggplot(df, aes(x = p, y = rconso)) +
77   geom_point(size = 2) +
78   geom_errorbar(aes(ymax = ICu, ymin = IC1))+
79   ylab(expression(P(S[1]<c~|"~p[1]==bar(p))))+ylim(0,0.2)
80 g+th+geom_hline(yintercept=0.1, linetype="dashed", color = "red")
81
82 #alpha=beta=5%
83 set.seed(115)
84 df<-list()
85 for(i in 1:length(p)){
86   df[i]<-list(errorI(p[i],alpha=0.05,beta=0.05,n=35,k=5))
87 }
88 df<-data.frame(p,do.call(rbind,df))
89 #Nombre de tests non réalisés#Non inclus dans le document
90 ggplot(df, aes(x = p,y=count)) +
91   geom_line(size = 2)+
92   ylab("Nombre_de_tests_non_réalisés")+th
93
94 #CODE POUR CRÉER LA FIGURE 3.3 n=35
95 g=ggplot(df, aes(x = p, y = rconso)) +
96   geom_point(size = 2) +
97   geom_errorbar(aes(ymax = ICu, ymin = IC1))+
98   ylab(expression(P(S[1]<c~|"~p[1]==bar(p))))+ylim(0,0.2)
99 g+th+geom_hline(yintercept=0.05, linetype="dashed", color = "red")
100
101 #####
102 #Figure 3.8 -
103 #On utilise la fonction qui donne l'erreur de type II
104 #Pour 2 proportions

```



```

105 set.seed(103)
106 p<-seq(0.1,0.7,0.01)
107 #alpha=beta=10%
108 df<-list()
109 for(i in 1:length(p)){
110   df[i]<-list(errorII(p[i],alpha=0.1,beta=0.1,n=19,k=2))
111 }
112 df<-data.frame(p,do.call(rbind,df))
113 #Nombre de tests non réalisés
114 ggplot(df, aes(x = p,y=count)) +
115   geom_line(size = 2)+th+ylab("Nombre_de_tests_non_réalisés")
116
117 #CODES POUR CRÉER LA FIGURE 3.8 n=19
118 g=ggplot(df, aes(x = p, y = rprod)) +
119   geom_point(size = 2) +
120   geom_errorbar(aes(ymax = ICu, ymin = ICl))+
121   ylab(expression(P(S[1]>=c~"|"~p[1]-p[2]==0.3)))+
122   xlab(expression(p[1]))+ylim(0,0.3)
123 g+th+geom_hline(yintercept=0.1, linetype="dashed", color = "red")
124
125 #alpha=beta=5%
126 set.seed(118)
127 p<-seq(0.1,0.7,0.01)
128 df<-list()
129 for(i in 1:length(p)){
130   df[i]<-list(errorII(p[i],alpha=0.05,beta=0.05,n=35,k=2))
131 }
132 df<-data.frame(p,do.call(rbind,df))
133 #Nombre de tests non réalisés#Non inclus dans le rapport
134 ggplot(df, aes(x = p,y=count)) +
135   geom_line(size = 2)+th+ylab("Nombre_de_tests_non_réalisés")
136
137 #CODES POUR CRÉER LA FIGURE 3.8 n=35
138 g=ggplot(df, aes(x = p, y = rprod)) +
139   geom_point(size = 2) +
140   geom_errorbar(aes(ymax = ICu, ymin = ICl))+
141   ylab(expression(P(S[1]>=c~"|"~p[1]-p[2]==0.3)))+
142   xlab(expression(p[1]))+ylim(0,0.3)
143 g+th+geom_hline(yintercept=0.05, linetype="dashed", color = "red")
144 #####
145 #FIGURE 3.9-
146 #Pour 5 proportions
147 #alpha=beta=10%
148
149 p<-seq(0.1,0.7,0.01)
150 set.seed(107652)
151 df<-list()
152 for(i in 1:length(p)){
153   df[i]<-list(errorII(p[i],alpha=0.1,beta=0.1,n=19,k=5))
154 }
155
156 #CODE POUR CRÉER LA FIGURE 3.9 n=19
157 df<-data.frame(p,do.call(rbind,df))
158 g=ggplot(df, aes(x = p, y = rprod)) +
159   geom_point(size = 2) +
160   geom_errorbar(aes(ymax = ICu, ymin = ICl))+

```

```

161   ylab(expression(P(S[1]>=c~"|"~p[1]==bar(p))))+
162   xlab(expression(p[1]))+ylim(0,0.25)
163
164 g+th+geom_hline(yintercept=0.1, linetype="dashed", color = "red")
165 #alpha=5% beta=5%
166 p<-seq(0.1,0.7,0.01)
167 set.seed(115)
168 df<-list()
169 for(i in 1:length(p)){
170   df[i]<-list(errorII(p[i],alpha=0.05,beta=0.05,n=35,k=5))
171 }
172
173 #CODE POUR CRÉER LA FIGURE 3.9 n=35
174 df<-data.frame(p,do.call(rbind,df))
175
176 g=ggplot(df, aes(x = p, y = rprod)) +
177   geom_point(size = 2) +
178   geom_errorbar(aes(ymin = IC1))+
179   ylab(expression(P(S[1]>=c~"|"~p[1]==bar(p))))+
180   xlab(expression(p[1]))+ylim(0,0.25)
181 g+th+geom_hline(yintercept=0.05, linetype="dashed", color = "red")
182 #####
183 #Test selon l'approximation normale
184 #Estimation des erreurs de type I et II
185 #####
186 set.seed(1003)
187 p<-seq(0.1,0.9,0.01)
188 #alpha=beta=10%
189 df<-list()
190 for(i in 1:length(p)){
191   df[i]<-list(errorNI(p[i],alpha=0.1,n=19,k=2))
192 }
193
194 df<-data.frame(p,do.call(rbind,df))
195
196 #CODES POUR CRÉER LA FIGURE 3.4 n=19
197 g=ggplot(df, aes(x = p, y = rconso)) +
198   geom_point(size = 2) +
199   geom_errorbar(aes(ymin = IC1))+
200   ylab(expression(P(Z[2]< - Z[alpha]~"|"~p[1]==p[2])))+ylim(0,0.3)
201 g+th+geom_hline(yintercept=0.1, linetype="dashed", color = "red")
202
203
204 set.seed(1004)
205 p<-seq(0.1,0.9,0.01)
206 #alpha=beta=10%
207 df<-list()
208 for(i in 1:length(p)){
209   df[i]<-list(errorNI(p[i],alpha=0.05,n=35,k=2))
210 }
211
212 df<-data.frame(p,do.call(rbind,df))
213
214 #CODES POUR CRÉER LA FIGURE 3.4 n=35
215 g=ggplot(df, aes(x = p, y = rconso)) +
216   geom_point(size = 2) +

```

```

217   geom_errorbar(aes(ymax = ICu, ymin = IC1))+
218   ylab(expression(P(Z[2] < - Z[alpha] ~ "|" ~ p[1]==p[2]))) + ylim(0,0.3)
219 g+th+geom_hline(yintercept=0.05, linetype="dashed", color = "red")
220 #####
221 -Figure 3.5 -
222 set.seed(10005)
223 p<-seq(0.1,0.9,0.01)
224 #alpha=beta=10%
225 df<-list()
226 for(i in 1:length(p)){
227   df[i]<-list(errorNI(p[i],alpha=0.1,n=19,k=5))
228 }
229
230 df<-data.frame(p,do.call(rbind,df))
231
232 #CODES POUR CRÉER LA FIGURE 3.5 n=19, m=5 et alpha=beta=10%
233 g=ggplot(df, aes(x = p, y = rconso)) +
234   geom_point(size = 2) +
235   geom_errorbar(aes(ymax = ICu, ymin = IC1))+
236   ylab(expression(P(Z[5] < - Z[alpha] ~ "|" ~ p[1]==bar(p)))) + ylim(0,0.2)
237 g+th+geom_hline(yintercept=0.1, linetype="dashed", color = "red")
238
239 set.seed(10006)
240 p<-seq(0.1,0.9,0.01)
241 #alpha=beta=10%
242 df<-list()
243 for(i in 1:length(p)){
244   df[i]<-list(errorNI(p[i],alpha=0.05,n=35,k=5))
245 }
246 df<-data.frame(p,do.call(rbind,df))
247
248 #CODES POUR CRÉER LA FIGURE 3.5 n=35, alpha=beta=5%,k=5
249 g=ggplot(df, aes(x = p, y = rconso)) +
250   geom_point(size = 2) +
251   geom_errorbar(aes(ymax = ICu, ymin = IC1))+
252   ylab(expression(P(Z[5] < - Z[alpha] ~ "|" ~ p[1]==bar(p)))) + ylim(0,0.2)
253 g+th+geom_hline(yintercept=0.05, linetype="dashed", color = "red")
254 #####
255 #Estimation de l'erreur de type II
256
257 set.seed(2001)
258 p<-seq(0.1,0.7,0.01)
259 #alpha=beta=10%
260 df<-list()
261 for(i in 1:length(p)){
262   df[i]<-list(errorNII(p[i],alpha=0.1,n=19,k=2))
263 }
264
265 df<-data.frame(p,do.call(rbind,df))
266
267 #CODES POUR CRÉER LA FIGURE 3.10 n=19,alpha=beta=10% k=2
268 g=ggplot(df, aes(x=p, y = rprod)) +
269   geom_point(size = 2) +
270   geom_errorbar(aes(ymax = ICu, ymin = IC1))+xlab(expression(p[1]))+
271   ylab(expression(P(Z[2] < - Z[alpha] ~ "|" ~ p[2]-p[1]==0.3))) + ylim(0,0.2)
272 g+th+geom_hline(yintercept=0.1, linetype="dashed", color = "red")

```

```

273
274 set.seed(2202)
275 p<-seq(0.1,0.65,0.01)
276 #alpha=beta=10%
277 df<-list()
278 for(i in 1:length(p)){
279   df[i]<-list(errorNII(p[i],alpha=0.05,n=35,k=2))
280 }
281 df<-data.frame(p,do.call(rbind,df))
282
283 #CODES POUR CRÉER LA FIGURE 3.10 n=35 k=2
284 g=ggplot(df, aes(x = p, y = rprod)) +
285   geom_point(size = 2) +
286   geom_errorbar(aes(ymin = IC1))+xlab(expression(p[1]))+
287   ylab(expression(P(Z[2] < - Z[alpha] | ~p[2]-p[1]==0.3)))+ylim(0,0.2)
288 g+th+geom_hline(yintercept=0.05, linetype="dashed", color = "red")
289
290 #####
291 set.seed(2203)
292 p<-seq(0.1,0.65,0.01)
293
294 #alpha=beta=10%
295 df<-list()
296 for(i in 1:length(p)){
297   df[i]<-list(errorNII(p[i],alpha=0.1,n=19,k=5))
298 }
299
300 df<-data.frame(p,do.call(rbind,df))
301 #CODES POUR CRÉER LA FIGURE 3.11 n=19,alpha=beta=10%,k=5
302 g=ggplot(df, aes(x = p, y = rprod)) +
303   geom_point(size = 2) +
304   geom_errorbar(aes(ymin = IC1))+
305   ylab(expression(P(Z[5] < - Z[alpha] | ~bar(p)-p[1]==0.3)))+
306   xlab(expression(p[1]))+ylim(0,0.15)
307 g+th+geom_hline(yintercept=0.1, linetype="dashed", color = "red")
308
309 set.seed(2004)
310 p<-seq(0.1,0.65,0.01)
311
312 #alpha=beta=5%
313 df<-list()
314 for(i in 1:length(p)){
315   df[i]<-list(errorNII(p[i],alpha=0.05,n=35,k=5))
316 }
317
318 df<-data.frame(p,do.call(rbind,df))
319 #Figure 3.11 - n=35, k=5
320 g=ggplot(df, aes(x = p, y = rprod)) +
321   geom_point(size = 2) +
322   geom_errorbar(aes(ymin = IC1))+
323   ylab(expression(P(Z[5] < - Z[alpha] | ~bar(p)-p[1]==0.3)))+
324   xlab(expression(p[1]))+ylim(0,0.15)
325 g+th+geom_hline(yintercept=0.05, linetype="dashed", color = "red")
326
327 #Calcul pour n=100
328 #On calcule la taille n comme dans un test à une proportion

```

```

329 n1prop(0.5,0.8,0.00045,0.00045)
330 p=seq(0.2,0.9,0.01)
331 n=100
332 B=1000
333 Z2=0
334 Z2v<-c()
335 Z2l<-list()
336 p1chap=p2chap=0
337 k=2
338 for(i in 1:length(p))
339 {
340   p1=p2=p[i]
341   rej=0
342   rconso=0
343   for(j in 1:B)
344   {
345     X1<-rbinom(1,n,p1)
346     X2<-rbinom(1,n,p2)
347     p1chap=X1/n
348     p2chap=X2/n
349     Z2<-(p1chap-p2chap)/sqrt((p2chap*(1-p2chap))/n)
350     Z2v[j]<-Z2
351   }
352   Z2l[i]<-list(Z2v)
353 }
354
355 #Distribution de la statistique de test pour tout p
356 allZ031=do.call(cbind,Z2l)
357 ##Test à 5 proportions
358 p=seq(0.2,0.9,0.01)
359 n=100
360 B=1000
361 Z5=0
362 Z5v<-c()
363 Z5l<-list()
364 p1chap=p2chap=p3chap=p4chap=p5chap=pbarchap=0
365 k=5
366 for(i in 1:length(p))
367 {
368   p1=p[i]
369   p2=p[i]+0.05
370   p3=p[i]+0.01
371   p4=p[i]+0.1
372   p5=p[i]-0.16
373   for(j in 1:B)
374   {
375     X1<-rbinom(1,n,p1)
376     X2<-rbinom(1,n,p2)
377     X3<-rbinom(1,n,p3)
378     X4<-rbinom(1,n,p4)
379     X5<-rbinom(1,n,p5)
380
381     p1chap=X1/n
382     p2chap=X2/n
383     p3chap=X3/n
384     p4chap=X4/n

```

```

385     p5chap=X5/n
386
387     pbarchap<-(X2+X3+X4+X5)/(4*n)
388     Z5<-(p1chap-pbarchap)/sqrt((pbarchap*(1-pbarchap))/n)
389     Z5v[j]<-Z5
390   }
391   Z51[i]<-list(Z5v)
392 }
393
394 #Distribution de la statistique de test pour tout p
395 allZ035=do.call(cbind,Z51)
396
397 #Quantile pour Z2
398 p01=0
399 p05=0
400 p10=0
401 p15=0
402 p20=0
403 p80=0
404 p85=0
405 p95=0
406 p025=0
407 p975=0
408 p90=0
409 p99=0
410 p<-seq(0.2,0.9,0.01)
411 for(i in 1:length(p)){
412   p01[i]=quantile(allZ031[,i],0.01)
413   p05[i]=quantile(allZ031[,i],0.05)
414   p10[i]=quantile(allZ031[,i],0.1)
415   p15[i]=quantile(allZ031[,i],0.15)
416   p85[i]=quantile(allZ031[,i],0.85)
417   p20[i]=quantile(allZ031[,i],0.2)
418   p80[i]=quantile(allZ031[,i],0.8)
419   p95[i]=quantile(allZ031[,i],0.95)
420   p025[i]=quantile(allZ031[,i],0.025)
421   p975[i]=quantile(allZ031[,i],0.975)
422   p90[i]=quantile(allZ031[,i],0.90)
423   p99[i]=quantile(allZ031[,i],0.99)
424 }
425 quant<-data.frame(p, p01,p025,p05,p10,p15,p20,p80,p85,p90,p95,p975,p99)
426 quant21<-quant[c(1,11,21,31,41,51,61,71),]
427 print(xtable(quant21), include.rownames = FALSE)
428 #Quantile pour Z2
429 p01=0
430 p05=0
431 p10=0
432 p15=0
433 p20=0
434 p80=0
435 p85=0
436 p95=0
437 p025=0
438 p975=0
439 p90=0
440 p99=0

```

```

441 p<-seq(0.2,0.9,0.01)
442 for(i in 1:length(p)){
443   p01[i]=quantile(allZ035[,i],0.01)
444   p05[i]=quantile(allZ035[,i],0.05)
445   p10[i]=quantile(allZ035[,i],0.1)
446   p15[i]=quantile(allZ035[,i],0.15)
447   p85[i]=quantile(allZ035[,i],0.85)
448   p20[i]=quantile(allZ035[,i],0.2)
449   p80[i]=quantile(allZ035[,i],0.8)
450   p95[i]=quantile(allZ035[,i],0.95)
451   p025[i]=quantile(allZ035[,i],0.025)
452   p975[i]=quantile(allZ035[,i],0.975)
453   p90[i]=quantile(allZ035[,i],0.90)
454   p99[i]=quantile(allZ035[,i],0.99)
455 }
456 quant2<-data.frame(p, p01,p025,p05,p10,p15,p20,p80,p85,p90,p95,p975,p99)
457 quant25<-quant2[c(1,11,21,31,41,51,61,71),]
458 print(xtable(quant25),include.rownames = FALSE)
459
460 #QQ-plot
461 qqplot.data <- function (vec)
462 {
463
464   y <- quantile(vec[!is.na(vec)], c(0.01, 0.99))
465   x <- qnorm(c(0.01, 0.99))
466   slope <- diff(y)/diff(x)
467   int <- y[1L] - slope * x[1L]
468
469   d <- data.frame(Z = vec)
470
471   ggplot(d, aes(sample = Z)) + stat_qq() + geom_abline(slope = slope, intercept =
    int)+
472     xlab("Distribution théorique")+
473     ylab("Distribution empirique de Z")
474 }
475
476 qqplot.data(allZ031[,1])
477 qqplot.data(allZ035[,1])
478 qqplot.data(allZ031[,61])
479 qqplot.data(allZ035[,61])
480
481 #Calcul du coefficient d'asymétrie pour le test à 2 proportions
482 asy1<-c()
483 for(i in 1:length(p)){
484   asy1[i]<-skewness(allZ031[,i])
485 }
486 #Calcul du coefficient d'asymétrie pour le test à 5 proportions
487 asy2<-c()
488 for(i in 1:length(p)){
489   asy2[i]<-skewness(allZ035[,i])
490 }
491
492 #Graphique des coefficients d'asymétrie pour 2 et 5 proportions
493 datasy1<-data.frame(p,asy1,asy2)
494 g=ggplot() +
495   geom_point(data = datasy1, aes(x =p, y =asy1,colour="Z2")) +

```

```

496 geom_point(data = datasy1, aes(x =p, y =asy2, colour="Z5")) +
497 xlab('p') + ylab(expression("Coefficient d'asymétrie"))+
498 scale_colour_manual(name="Légende", values=c(Z2="red", Z5="blue"))
499 g+th

```

F.3 Codes du chapitre 3

```

1 #####
2 #Toutes les fonctions utilisées dans le chapitre 3
3 #Librairies
4 library(ggplot2)
5 library(exact2x2) #Pour le test exact de Fisher avec mid p-value
6 library(xtable)
7 #####
8
9 #Test de Fisher
10 #Fonction pour estimer beta a posteriori
11 #Avec des tailles d'échantillon égales
12 beta.fisher5<-function(p1, p2,p3,p4,p5,
13                       n,alpha = 0.1,k=5, nsim = 1000, alternative = "less")
14 {
15   y1 <- rbinom(nsim, size =n, prob = p1)
16   y2 <- rbinom(nsim, size =n, prob = p2)
17   y3<- rbinom(nsim, size = n, prob = p3)
18   y4<- rbinom(nsim, size = n, prob = p4)
19   y5<- rbinom(nsim, size = n, prob = p5)
20
21   y <- cbind(y1, n-y1, y2, n-y2,y3,n-y3,y4,n-y4,y5,n-y5)
22   p.value <- rep(0, nsim)
23   for (i in 1:nsim) {
24     dat<-matrix(y[i, ], k, 2,byrow = T)
25     dat1<-matrix(c(dat[1,1],dat[1,2],sum(dat[setdiff(1:k,1),1]),
26                 sum(dat[setdiff(1:k,1),2])),2,2,byrow = T)
27     p.value[i]<-(fisher.exact(dat1, alternative = alternative,midp = TRUE)$p.value <
28                       alpha)
29   }
30   return(data.frame(n,beta=(1-mean(p.value)),alpha=alpha))
31 }
32
33 #Test selon la loi normal sans et avec transformartion arcsin
34 #Définition de la fonction arcsin(sqrt())
35 trans.arcsine <- function(x){
36   asin(sign(x) * sqrt(abs(x)))
37 }
38
39 #Calcul des tailles d'échantillon avec et sans transformation arcsin
40 #Taille n pour une proportion
41 #La fonction prend en entrée p, p0, alpha,beta et retourne n et la puissance
42 #Sans transformation
43 #Formule 1.8 du chapitre 1
44 n1prop<-function(p,p0,alpha,beta){
45   h=p-p0
46   n=((qnorm(1-alpha)*sqrt(p0*(1-p0))+qnorm(1-beta)*sqrt(p*(1-p)))/(p-p0))^2

```



```

44 sd=sqrt(p*(1-p)/n)
45 Power=pnorm((-qnorm(1-alpha)*sqrt((p0*(1-p0))/n)-h)/sd)
46 return(data.frame(n,Power))
47 }
48 #Avec transformation
49 #Formule en annexe E.3
50 tn1prop<-function(p,p0,alpha,beta){
51 h=trans.arcsine(p)-trans.arcsine(p0)
52 n=((qnorm(1-alpha)/2+qnorm(1-beta)*sqrt(p0*(1-p0)))/h)^2
53 sd=sqrt((p0*(1-p0))/n)
54 Power=pnorm((-qnorm(1-alpha)/(2*sqrt(n))-h)/sd)
55 return(data.frame(n,Power))
56 }
57
58 #Fonction pour 2 proportions
59 #La fonction prend en entrée les proportions p1, p2, alpha, beta
60 #et retourne n et la puissance
61 #Formule D.4 en annexe
62 n2prop<-function(p1,p2,alpha,beta){
63 p=(p1+p2)/2
64 h=p1-p2
65 n=((qnorm(1-alpha)*sqrt(2*p*(1-p))+qnorm(1-beta)*sqrt(p1*(1-p1)+
66 p2*(1-p2)))^2)/(h^2)
67 ceiling(n) #arrondit à l'entier supérieur
68 sd=sqrt(p1*(1-p1)/n+p2*(1-p2)/n)
69 (Power=pnorm((-qnorm(1-alpha)*sqrt((2*p*(1-p)/n))-h)/sd))
70 return(data.frame(n,Power))
71 }
72
73 #Avec transformation arcsin
74 #Formule 4.29 du chapitre 4
75 tn2prop<-function(p1,p2,alpha,beta){
76
77 h=trans.arcsine(p1)-trans.arcsine(p2)
78 n=((qnorm(1-alpha)+qnorm(1-beta))/(sqrt(2)*h))^2
79 Power=pnorm(-qnorm(1-alpha)-h*sqrt(2*n))
80 return(data.frame(n,Power))
81 }
82
83 #Pour 5 proportions
84 #La fonction prend en entrée les proportions p1, p2,p3,p4,p5 alpha et beta
85 #et retourne n et la puissance
86 #Sans transformation
87 #Formule 4.11 pour n et 4.12 pour la puissance, chapitre 4
88 n5prop<-function(p1,p2,p3,p4,p5,alpha,beta,k=5){
89 pbar=(p2+p3+p4+p5)/(k-1)
90 h=p1-pbar
91 s1=sqrt((p1*(1-p1))+((p2*(1-p2))+p3*(1-p3))+
92 (p4*(1-p4))+p5*(1-p5)))/((k-1)^2)
93 n=((qnorm(1-alpha)+qnorm(1-beta))*s1/h)^2
94 sd=sqrt((p1*(1-p1))/n+((p2*(1-p2))+p3*(1-p3))+
95 (p4*(1-p4))+p5*(1-p5)))/(((k-1)^2)*n)
96 (Power=pnorm((qnorm(alpha)*sd-h)/sd))
97 rslt=data.frame(n,Power,pbar)
98 return(rslt)
99 }

```

```

100 #Avec transformation
101 tn5prop<-function(p1,p2,p3,p4,p5,alpha,beta,k=5){
102   pbar=(p2+p3+p4+p5)/(k-1)
103   h=trans.arcsine(p1)-trans.arcsine(pbar)
104   st=sqrt((1/4+(1/(4*pbar*(1-pbar)))*(((p2*(1-p2))+(p3*(1-p3))+
105     (p4*(1-p4))+(p5*(1-p5)))/((k-1)^2))))
106   n=(((qnorm(1-alpha)+qnorm(1-beta))*st)^2)/(h^2)
107   sd=sqrt((1/(4*n)+(1/(4*pbar*(1-pbar)))*(((p2*(1-p2))+(p3*(1-p3))+
108     (p4*(1-p4))+(p5*(1-p5)))/((k-1)^2)*n)))
109   (Power=pnorm((-qnorm(1-alpha)-(h/sd))))
110   return(data.frame(n,Power,h))
111 }
112 #####
113 #Fonctions pour estimer les erreurs de type I et II
114 #####
115 #Fonction pour estimer l'erreur de type I
116 #H0:p1=pbar
117 #On suppose que la probabilité est la même pour toutes les zones
118 #p = vraie probabilité de succès
119 #Prends en entrée p, alpha, la taille n, le nombre d'itérations B et le nombre de
      zones k
120 errornI<-function(p,alpha=NULL,n,B=1000,k=5){
121   Z<-c()
122   rconso<-c()
123   pc<-c()
124   pchap=0
125   count=0
126   for(j in 1:B){
127
128     X<-rbinom(k,n,p)
129     for(i in 1:k){
130       pc[i]<-X[i]/n
131     }
132     pchap=sum(X[2:k])/((k-1)*n)
133     if(pchap==0|pchap==1){count=count+1}
134     else if(pchap!=0|pchap!=1){
135       Z[j]<-(pc[1]-pchap)/sqrt(((pc[1]*(1-pc[1]))/n+sum(pc[-1]*(1-pc[-1]))/((k-1)^2)*n))
136     }
137   }
138   rconso<-mean(na.omit(Z)<(-1)*abs(qnorm(alpha)))
139   me<-abs(qnorm(0.05/2))*sqrt((rconso*(1-rconso))/B)
140   return(data.frame(rconso,ICl=rconso-me,ICu=rconso+me,count))
141 }
142 #####
143 #Cette fonction permet d'estimer l'erreur de type II
144 #H1:p1<pbar
145 #Memes arguments que errornI
146 #On suppose que la probabilité est la même pour toutes les zones
147 #p = vraie probabilité de succès dans la zone 1
148 #p+0.3 comme probabilité de succès dans les autres zones
149 errornII<-function(p,alpha=NULL,n,B=1000,k=5,count){
150   Z<-c()
151   rprod<-c()
152   pc<-c()
153   count=0
154   for(j in 1:B){

```

```

155     X<-rbinom(k,n,c(p,p+0.3,p+0.3,p+0.3,p+0.3))
156     for(i in 1:k){
157         pc[i]<-X[i]/n
158     }
159     pchap=sum(X[2:k])/((k-1)*n)
160     if(pchap==0|pchap==1){count=count+1}
161     else if(pchap!=0|pchap!=1){
162         Z[j]<-(pc[1]-pchap)/sqrt((pc[1]*(1-pc[1]))/n+sum(pc[-1]*(1-pc[-1]))/(((k-1)^2)*n))
163     }
164 }
165 rprod<-1-mean(na.omit(Z)<(-1)*abs(qnorm(alpha)))
166 me<-abs(qnorm(0.05/2))*sqrt((rprod*(1-rprod))/B)
167 return(data.frame(rprod,ICl=rprod-me,ICu=rprod+me,count))
168 }
169 #####
170 #Avec transformation arcsin(sqrt(x))
171 #Estimation des erreurs de type I et II
172 #####
173 #Fonction pour estimer l'erreur de type I avec transformation
174 #Meme principe que errorn1 avec la transformation
175 terrorn1<-function(p,n,alpha,k=5,B=1000){
176     pchap=0
177     Z<-c()
178     pc<-c()
179     for(j in 1:B)
180     {
181         X<-rbinom(k,n,p)
182         for(i in 1:k){
183             pc[i]<-X[i]/n
184         }
185         pchap=sum(X[2:k])/((k-1)*n)
186         Z[j]<-(trans.arcsine(pc[1])-trans.arcsine(pchap))/sqrt(1/(4*n)+
187             (1/(4*pchap*(1-pchap)))*(sum(pc[-1]*(1-pc[-1]))/(((k-1)^2)*n)))
188     }
189     rconso<-mean(Z<(-1)*abs(qnorm(alpha)))
190     me<-abs(qnorm(0.05/2))*sqrt((rconso*(1-rconso))/B)
191     return(data.frame(rconso,ICl=rconso-me,ICu=rconso+me,count))
192 }
193 #####
194 #Fonction pour estimer l'erreur de type I avec transformation arcsin(sqrt(x))
195 #Meme principe que errorn2 avec la transformation
196 terrorn2<-function(p,alpha,n,k=5,B=1000){
197     pchap=0
198     rprod=0
199     Z<-c()
200     pc<-c()
201     for(j in 1:B)
202     {
203
204         X<-rbinom(k,n,c(p,p+0.3,p+0.3,p+0.3,p+0.3))
205         for(i in 1:k){
206             pc[i]<-X[i]/n
207         }
208         pchap=sum(X[2:k])/((k-1)*n)
209         Z[j]<-(trans.arcsine(pc[1])-trans.arcsine(pchap))/sqrt(1/(4*n)+
210             (1/(4*pchap*(1-pchap)))*((sum(pc[-1]*(1-pc[-1]))/(((k-1)^2)*n)))

```

```

211 }
212 rprod<-1-mean(na.omit(Z)<(-1)*abs(qnorm(alpha)))
213 me<-abs(qnorm(0.05/2))*sqrt((rprod*(1-rprod))/B)
214 return(data.frame(rprod,ICl=rprod-me,ICu=rprod+me,count))
215 }

```

```

1
2 #####
3 #Chapitre 4 : Méthodes alternatives
4 #Librairies
5 library(ggplot2)
6 library(Exact)#Pour calculer la puissance du test exact de barnard
7 library(exact2x2) #Pour réaliser le test exact de Fisher avec mid p-value
8 library(xtable)
9 #Paramètre graphique
10 theme_set(theme_bw())
11 th<-theme(axis.text=element_text(size=15, face="bold"),
12           axis.title.x=element_text(size=15,face="bold"),
13           axis.title.y=element_text(size=23,face="bold"),
14           legend.text=element_text(size=15))
15 #Appel des fonctions du chapitre 4
16 setwd("~/Dropbox/Mémoire_LQAS/Codes_R")
17 source("fctchap4.R")
18 #####
19
20 #Test exact de Fisher
21 #Procédure pour trouver la table 4.6
22 #alpha=0.1
23 n=seq(12,30,1)
24 p<-seq(0.1,0.7,0.05)
25 beta<-c()
26 allbeta<-list()
27 for(i in 1:length(p)){
28   p1=p[i]
29   p2=p3=p4=p5=p[i]+0.3
30   for(j in 1:length(n)){
31
32     beta[j]=beta.fisher5(p1=p1, p2=p2,p3=p3,p4=p4,p5=p5, n=n[j],alpha = 0.1,k=5)$beta
33   }
34   allbeta[i]<-list(beta)
35 }
36
37 beta1<-do.call(cbind, allbeta)
38 beta1<-data.frame(beta1)
39
40 #Nommer les colonnes
41 for(i in 1:length(p))
42 {
43   colnames(beta1)[i]<-paste0(p[i]*100,"%")
44 }
45
46 #Nommer les lignes
47 row.names(beta1)<-n
48 View(beta1)

```

```

49 #Table 4.6
50 xtable(beta1)
51 #####
52 #Simulations
53 #Erreur de type I pour n=23
54 #alpha=0.1
55 set.seed(43156792)
56 p=seq(0.1,0.9,0.005)
57 rej=0
58 n=23
59 B=1000
60 me<-c()
61 pv<-c()
62 p1=p2=p3=p4=p5=0
63 Xbar=0
64 alpha=0.1
65 dpv<-list()
66 vrconso<-c()
67 for(i in 1:length(p))
68 {
69
70   p1=p2=p3=p4=p5=p[i]
71   rej=0
72   rconso=0
73   for(j in 1:B)
74   {
75     X1<-rbinom(1,n,p1)
76     X2<-rbinom(1,n,p2)
77     X3<-rbinom(1,n,p3)
78     X4<-rbinom(1,n,p4)
79     X5<-rbinom(1,n,p5)
80     Xbar=(X2+X3+X4+X5)
81     dat<- matrix(c(X1,Xbar,n-X1,4*n-Xbar), ncol=2)
82     row.names(dat)<-c("lot1","lotg")
83     colnames(dat)<-c("Oui","Non")
84     pvalue<-fisher.exact(dat,alternative="less",midp=TRUE)$p.value
85     pv[j]<-pvalue
86     if(pvalue<=alpha){rej=rej+1}
87   }
88
89   #dpv[i]<-list(pv)
90   rconso=rej/B
91   me[i]<-abs(qnorm(alpha/2))*sqrt((rconso*(1-rconso))/B)
92   vrconso[i]<-rconso
93
94 }
95 #Figure 4.1
96 df<-data.frame(vrconso,p,ui=vrconso+me, li=vrconso-me)
97 ggplot(df, aes(x = p, y = vrconso)) +
98   geom_point(size = 2) +
99   geom_errorbar(aes(ymax = ui, ymin = li))+
100   ylab(expression(P(alpha[obs~']*'] < alpha[0.1]
~"|"~p[1]==bar(p))))+theme_bw()+xlab(expression(p[1]))+
101   geom_hline(yintercept=0.1, linetype="dashed", color = "red")
102 #####
103 #Erreur de type II pour n=23

```

```

104 #alpha=0.1
105 set.seed(1000145)
106 p=seq(0.1,0.7,0.005)
107 rej=0
108 n=23
109 B=1000
110 me<-c()
111 pv<-c()
112 p1=p2=p3=p4=p5=0
113 Xbar=0
114 alpha=0.1
115 dpv<-list()
116 vrprod<-c()
117 for(i in 1:length(p))
118 {
119
120   p1=p[i]
121   p2=p[i]+0.3
122   p3=p[i]+0.3
123   p4=p[i]+0.3
124   p5=p[i]+0.3
125
126   rej=0
127   rprod=0
128   for(j in 1:B)
129   {
130     X1<-rbinom(1,n,p1)
131     X2<-rbinom(1,n,p2)
132     X3<-rbinom(1,n,p3)
133     X4<-rbinom(1,n,p4)
134     X5<-rbinom(1,n,p5)
135     Xbar=(X2+X3+X4+X5)
136
137     dat<- matrix(c(X1,Xbar,n-X1,4*n-Xbar), ncol=2)
138     row.names(dat)<-c("lot1","lotg")
139     colnames(dat)<-c("Oui","Non")
140
141     pvalue<-fisher.exact(dat,alternative="less",midp=TRUE)$p.value
142     pv[j]<-pvalue
143     if(pvalue<=alpha){rej=rej+1}
144   }
145   rprod=(1-rej/B)
146   me[i]<-abs(qnorm(alpha/2))*sqrt((rprod*(1-rprod))/B)
147   vrprod[i]<-rprod
148 }
149
150 #Figure 4.2
151 df<-data.frame(vrprod,p,ui=vrprod+me, li=vrprod-me)
152 ggplot(df, aes(x = p, y = vrprod)) +
153   geom_point(size = 2) +
154   geom_errorbar(aes(ymax = ui, ymin = li))+
155   ylab(expression(P(alpha[obs ~ '*']< alpha[0.1] ~"|"~bar(p)-p[1]=0.3)))+
156   theme_bw()+xlab(expression(p[1]))+
157   geom_hline(yintercept=0.1,linetype="dashed",color = "red")
158 #####
159 #Test exact de Barnard

```

```

160 #Table 4.7
161 #Calcul des tailles $n$
162 n=seq(12,30,1)
163 p<-seq(0.1,0.65,0.05)
164 beta<-c()
165 allbeta<-list()
166 for(i in 1: length(p)){
167   for(j in 1:length(n)){
168
169     beta[j]=(1-power.exact.test(p[i],p[i]+0.3,n1=n[j],n2=4*n[j],alpha=0.1,
170       alternative="less",method="z-pooled")$power)
171   }
172   allbeta[i]<-list(beta)
173 }
174
175 beta1<-do.call(cbind, allbeta)
176 beta1<-data.frame(beta1)
177
178 #Nommer les colonnes
179 for(i in 1:length(p))
180 {
181   colnames(beta1)[i]<-paste0(p[i]*100,"%")
182 }
183 #Nommer les lignes
184 row.names(beta1)<-n
185 View(beta1)
186 #Table 4.5
187 xtable(beta1)
188 #####
189 #Simulations# Figures 4.4 - et Figure 4.5 -
190 #Erreur de type I pour n=26
191 #alpha=0.1
192 set.seed(43156792)
193 p=seq(0.1,0.9,0.005)
194 rej=0
195 n=26
196 B=1000
197 me<-c()
198 pv<-c()
199 p1=p2=p3=p4=p5=0
200 Xbar=0
201 alpha=0.1
202 dpv<-list()
203 vrconso<-c()
204 for(i in 1:length(p))
205 {
206   p1=p2=p3=p4=p5=p[i]
207   rej=0
208   rconso=0
209   for(j in 1:B)
210   {
211     X1<-rbinom(1,n,p1)
212     X2<-rbinom(1,n,p2)
213     X3<-rbinom(1,n,p3)
214     X4<-rbinom(1,n,p4)
215     X5<-rbinom(1,n,p5)

```

```

216     Xbar=(X2+X3+X4+X5)
217     dat<- matrix(c(X1,Xbar,n-X1,4*n-Xbar), ncol=2)
218     row.names(dat)<-c("lot1","lotg")
219     colnames(dat)<-c("Oui","Non")
220     pvalue<-exact.test(dat,alternative="less", npNumbers = 100,
221                       interval = FALSE,
222                       method = "Z-pooled", to.plot = FALSE,
223                       ref.pvalue = TRUE)$p.value
224     pv[j]<-pvalue
225     if(pvalue<alpha){rej=rej+1}
226   }
227   rconso=rej/B
228   me[i]<-abs(qnorm(alpha/2))*sqrt((rconso*(1-rconso))/B)
229   vrconso[i]<-rconso
230 }
231
232 #Figure 4.4 -
233 df<-data.frame(vrconso,p,ui=vrconso+me, li=vrconso-me)
234 ggplot(df, aes(x = p, y = vrconso)) +
235   geom_point(size = 2) +
236   geom_errorbar(aes(ymax = ui, ymin = li))+
237   ylab(expression(P(alpha[obs~']*')< alpha[0.1] ~"|"~p[1]==bar(p)))+theme_bw()+
238   geom_hline(yintercept=0.1, linetype="dashed", color = "red")
239 #####
240 #Erreur de type II pour n=26
241 #alpha=0.1
242 set.seed(1000145)
243 p=seq(0.1,0.7,0.005)
244 rej=0
245 n=26
246 B=1000
247 me<-c()
248 pv<-c()
249 p1=p2=p3=p4=p5=0
250 Xbar=0
251 alpha=0.1
252 dpv<-list()
253 vrprod<-c()
254 for(i in 1:length(p))
255 {
256
257   p1=p[i]
258   p2=p[i]+0.3
259   p3=p[i]+0.3
260   p4=p[i]+0.3
261   p5=p[i]+0.3
262
263
264   rej=0
265   rprod=0
266   for(j in 1:B)
267   {
268     X1<-rbinom(1,n,p1)
269     X2<-rbinom(1,n,p2)
270     X3<-rbinom(1,n,p3)
271     X4<-rbinom(1,n,p4)

```



```

272 X5<-rbinom(1,n,p5)
273 Xbar=(X2+X3+X4+X5)
274
275 dat<- matrix(c(X1,Xbar,n-X1,4*n-Xbar), ncol=2)
276 row.names(dat)<-c("lot1","lotg")
277 colnames(dat)<-c("Oui","Non")
278
279 pvalue<-exact.test(dat,alternative="less", npNumbers = 100,
280 interval = FALSE,
281 method ="Z-pooled", to.plot = FALSE,
282 ref.pvalue = TRUE)$p.value
283 pv[j]<-pvalue
284 if(pvalue<alpha){rej=rej+1}
285 }
286 rprod=(1-rej/B)
287 me[i]<-abs(qnorm(alpha/2))*sqrt((rprod*(1-rprod))/B)
288 vrprod[i]<-rprod
289 }
290
291 #Figure 4.5 -
292 df<-data.frame(vrprod,p,ui=vrprod+me, li=vrprod-me)
293 ggplot(df, aes(x = p, y = vrprod)) +
294 geom_point(size = 2) +
295 geom_errorbar(aes(ymax = ui, ymin = li))+
296 ylab(expression(P(alpha[obs ~ '*'< alpha[0.1] ~"|~bar(p)-p[1]==0.3]))+
297 theme_bw()+xlab(expression(p[1]))+
298 geom_hline(yintercept=0.1,linetype="dashed",color = "red")
299 #####
300 #Estimation des erreurs de type I et II
301 #On calcule les tailles d'échantillon dont on a besoin avec et sans transformation
302 n5<-c() #taille pour le test sans transformation pour 5 zones
303 tn5<-c()# taille pour le test avec transformation pour 5 zones
304 p<-seq(0.2,0.65,0.001)
305 for(i in 1:length(p)){
306
307 n5[i]=ceiling(n5prop(p[i],p[i]+0.3,p[i]+0.3,p[i]+0.3,p[i]+0.3,alpha=0.1,beta=0.1,k=5)$n)
308 tn5[i]=ceiling(tn5prop(p[i],p[i]+0.3,p[i]+0.3,p[i]+0.3,p[i]+0.3,alpha=0.1,beta=0.1,k=5)$n)
309
310 }
311
312 #Estimation de l'erreur de type I
313 #Simulation pour faire la figure 4.6
314 set.seed(30001)
315 p<-seq(0.2,0.65,0.001)
316 df<-list()
317 for(i in 1:length(p))
318 {
319 df[i]<-list(errornI(p[i],n=n5[i],alpha=0.1,k=5,B=1000))
320 }
321 df<-data.frame(p,do.call(rbind,df))
322 #Figure 4.6 -
323 g=ggplot(df, aes(x = p, y = rconso)) +
324 geom_point(size = 2) +
325 geom_errorbar(aes(ymax = ICu, ymin = IC1))+
326 ylab(expression(P(Z[5]< - Z[alpha]~"|~ p[1]==bar(p))))+
327 xlab(expression(p[1]))

```

```

328 g+th+geom_hline(yintercept=0.1, linetype="dashed", color = "red")
329
330 #Estimation de l'erreur de type II
331 #Simulation pour faire la figure 4.7
332 set.seed(200601)
333 p<-seq(0.2,0.65,0.001)
334 df<-list()
335 for(i in 1:length(p))
336 {
337   df[i]<-list(errornII(p[i],n=n5[i],alpha=0.1,k=5,B=1000))
338 }
339 df<-data.frame(p,do.call(rbind,df))
340 #Figure 4.7
341 g=ggplot(df, aes(x = p, y = rprod)) +
342   geom_point(size = 2) +
343   geom_errorbar(aes(ymax = ICu, ymin = IC1))+
344   ylab(expression(P(Z[5]< - Z[alpha]~"|"~bar(p)-p[1]==0.3)))+
345   xlab(expression(p[1]))
346 g+th+geom_hline(yintercept=0.1, linetype="dashed", color = "red")
347 #####
348 #Avec transformation
349 #Estimation de l'erreur de type I et II
350 #####
351 #Estimation de l'erreur de type I
352 #Simulation pour faire la figure 4.8
353 set.seed(207601)
354 p=seq(0.2,0.65,0.001)
355 df<-list()
356 for(i in 1:length(p))
357 {
358   df[i]<-list(terrorn1(p[i],n=tn5[i],alpha=0.1,k=5,B=1000))
359 }
360 df<-data.frame(p,do.call(rbind,df))
361
362 g=ggplot(df, aes(x = p, y = rconso)) +
363   geom_point(size = 2) +
364   geom_errorbar(aes(ymax = ICu, ymin = IC1))+
365   ylab(expression(P(Z[5]< - Z[alpha]~"|"~ p[1]==bar(p)))+
366   xlab(expression(p[1]))
367 g+th+geom_hline(yintercept=0.1, linetype="dashed", color = "red")
368
369 #Estimation de l'erreur de type II
370 #Simulation pour faire la figure 4.9
371 set.seed(209601)
372 p=seq(0.2,0.65,0.001)
373 df<-list()
374 k=5
375 for(i in 1:length(p))
376 {
377   df[i]<-list(terrorn2(p[i],n=tn5[i],alpha=0.1,k=5,B=1000))
378 }
379 df<-data.frame(p,do.call(rbind,df))
380 #Figure 4.9 -
381 g=ggplot(df, aes(x = p, y = rprod)) +
382   geom_point(size = 2) +
383   geom_errorbar(aes(ymax = ICu, ymin = IC1))+

```

```

384   ylab(expression(P(Z[5] < - Z[alpha]~"|"~bar(p)-p[1]==0.3)))+
385   xlab(expression(p[1]))
386 g+th+geom_hline(yintercept=0.1, linetype="dashed", color = "red")
387 #####
388 #Comparaison des tailles n approximation normale avec et sans transformation
389 #####
390 #Comparaison taille d'échantillon pour une proportion
391 #Figure 4.11 du chapitre 4
392 n1<-c()
393 tn1<-c()
394 p<-seq(0.1,0.7,0.005)
395 for (i in 1:length(p)){
396   n1[i]=n1prop(p[i],p[i]+0.3,0.1,0.1)$n
397   tn1[i]=tn1prop(p[i],p[i]+0.3,0.1,0.1)$n
398 }
399 #Figure 4.11 -
400 #Comparaison taille d'échantillon pour une proportion
401 par(mfrow=c(1,2))
402 plot(p,n1-tn1,xlab="p", ylab="différence des tailles",cex.lab=1.5,las=1)
403 plot(p,(n1-tn1)*100/n1,ylab="pourcentage de variation",cex.lab=1.5,las=1)
404
405
406 #Figure 4.12 -
407 n2<-c()
408 tn2<-c()
409 p<-seq(0.1,0.7,0.005)
410 for (i in 1:length(p)){
411   n2[i]=n2prop(p[i],p[i]+0.3,0.1,0.1)$n
412   tn2[i]=tn2prop(p[i],p[i]+0.3,0.1,0.1)$n
413 }
414 #Figure 4.12 -
415 #Comparaison taille d'échantillon pour une proportion
416 par(mfrow=c(1,2))
417 plot(p,n2-tn2,xlab="p", ylab="différence des tailles",cex.lab=1.5,las=1)
418 plot(p,(n2-tn2)*100/n2,ylab="pourcentage de variation",cex.lab=1.5,las=1)
419
420 #Figure 4.13 -
421 #Pour 5 proportions
422 n5<-c()
423 tn5<-c()
424 p<-seq(0.1,0.7,0.005)
425 for(i in 1:length(p)){
426   p1=p[i]
427   p2=p[i]
428   p3=p[i]
429   p4=p[i]
430   p5=p[i]
431
432   n5[i]=n5prop(p1,p2+0.3,p3+0.3,p4+0.3,p5+0.3,alpha=0.1,beta=0.1,k=5)$n
433   tn5[i]=tn5prop(p1,p2+0.3,p3+0.3,p4+0.3,p5+0.3,alpha=0.1,beta=0.1,k=5)$n
434 }
435 #Figure 4.13 -
436 #Comparaison taille d'échantillon pour cinq proportion
437 par(mfrow=c(1,2))
438 plot(p,n5-tn5,xlab="p", ylab="différence des tailles",cex.lab=1.5,las=1)
439 plot(p,(n5-tn5)*100/n5,ylab="pourcentage de variation",cex.lab=1.5,las=1)

```

F.4 Codes du chapitre 4

```
1
2 #####
3 #Toutes les fonctions du chapitre 4
4 #####
5 #Fonction pour réaliser les comparaisons multiples
6 #Définition de la fonction arcsin(sqrt())
7 trans.arcsine <- function(x){
8   asin(sign(x) * sqrt(abs(x)))
9 }
10 #Test de Fisher avec correction pour la mid-pvalue
11 testF_mid<-function(dat,alpha,k,midp=TRUE){
12   #k est le nombre de proportions à comparer
13   #alpha le seuil de significativité
14   resultat=c()
15   pv<-c()
16   for (i in 1:k){
17     dat1<-data.frame(Oui=c(dat[i,1], sum(dat[setdiff(1:k,i),1])),Non=c(dat[i,2],
18       sum(dat[setdiff(1:k,i),2])))
19     pvalue<-fisher.exact(dat1, alternative="less",midp=TRUE)$p.value
20     pv[i]<-pvalue
21     if(pvalue>alpha){resultat[i]="Non_□Prioritaire"}
22     else{resultat[i]="Prioritaire"}
23   }
24   return(data.frame(lot=rownames(dat),dat,resultat,p.value=round(pv,5)))
25 }
26 #Test de comparaison avec la loi normale
27 #Sans transformation
28 testN<-function(dat,alpha,k){
29   resultat=c()
30   Z<-c()
31   for (i in 1:k){
32     n=sum(dat[1,])
33     p1=dat[1,1]/n
34     p2=dat[2,1]/n
35     p3=dat[3,1]/n
36     p4=dat[4,1]/n
37     p5=dat[5,1]/n
38
39     pchap=((k-1)*p1+(p2+p3+p4+p5))/(2*(k-1))
40     cr<-(k/((k-1)*4*n))#Correction pour la continuité
41     pbarc<-sum(dat[setdiff(1:k,i),1])/(4*n)
42     s0=sqrt((2*pchap*(1-pchap))/n)
43     Z0=(dat[i,1]/n-pbarc-cr)/s0
44     Z[i]<-Z0
45     if(Z0 < (-1)*abs(qnorm(alpha))){resultat[i]="Prioritaire"}
46     else{resultat[i]="Non_□Prioritaire"}
47   }
48   return(data.frame(lot=rownames(dat),dat,resultat,p.value=round(pnorm(Z),5)))
49 }
50 #Avec transformation
51
```

```

52 testTN<-function(dat , alpha ,k){
53   resultat=c()
54   Z<-c()
55   for (i in 1:k){
56     n=sum(dat [1,])
57     p1=dat [1,1]/n
58     p2=dat [2,1]/n
59     p3=dat [3,1]/n
60     p4=dat [4,1]/n
61     p5=dat [5,1]/n
62     pbarc<-sum(dat [setdiff(1:k,i),1])/(4*n)
63     sd=sqrt((1/(4*n)+(1/(4*pbarc*(1-pbarc)))*((p2*(1-p2))+(p3*(1-p3))+(p4*(1-p4))+(p5*(1-p5)))/((k-1)
64     Z5<-(trans.arcsine(dat [i,1]/n)-trans.arcsine(pbarc))/sd
65     Z[i]<-Z5
66     if(Z5< (-1)*abs(qnorm(alpha))){resultat [i]="Prioritaire"}
67     else{resultat [i]="Non_Prioritaire"}
68   }
69   return(data.frame.lot=rownames(dat),dat , resultat ,p.value=round(pnorm(Z),5))
70 }
71 #Test U#Test classique avec valadez ou lemeshow
72
73 testU<-function(dat ,p,h=0.3, alpha=0.1, beta=0.1,n=19,k=5){
74   resultat=c()
75   c=c_test(p,p-h,rconso=alpha ,rprod=beta,ns=n,method = "Exact")$c
76   for (i in 1:k){
77     if(dat [i,1]<c){resultat [i]="Prioritaire"}
78     else{resultat [i]="Non_Prioritaire"}
79   }
80   return(data.frame.lot=rownames(dat),resultat))
81 }

```

```

1
2 #####
3 #Chapitre 5 : Comparaison multiple et correction de Bonferroni
4 #Nous présentons ici l'approche de Valadez, le test exact de Fisher,
5 #Le test selon la loi normale avec et sans transformation arcsin
6 #Pour une proportion p=0.5, on réalise les tests sans correction d Bonferroni.
7 #On réalise ensuite les tests avec correction de Bonferroni a posteriori puis a priori
8 #en calculant de nouveau la taille n.
9 #On présente les résultats dans le chapitre 5 avec les tables :
10 #Appel des fonctions du chapitre 5
11 setwd("~/Dropbox/Mémoire_LQAS/Codes_R")
12 source("fctchap5.R")
13 #####
14 #Sans correction de Bonferroni aux seuils alpha=beta=10%
15 #####
16 #Valadez #seuil alpha
17 n=19
18 B=1000
19 p=0.5
20 R2<-c()
21 X1<-c()
22 X2<-c()
23 X3<-c()

```

```

24 X4<-c()
25 X5<-c()
26
27 for (i in 1:B){
28   X1[i]<-rbinom(1,n,p)
29   X2[i]<-rbinom(1,n,p)
30   X3[i]<-rbinom(1,n,p)
31   X4[i]<-rbinom(1,n,p)
32   X5[i]<-rbinom(1,n,p)
33 }
34 #Valeur critique
35 c=c_test(0.5,0.2,0.1,0.1,ns=19,method = "Exact")$c
36 X=c(X1,X2,X3,X4,X5)
37 #Selon la règle de décision, on rejette H0:p>=p0 si X1<c
38 #True="On rejette H0", False="On ne rejette pas H0"
39 test<-X<c
40 summary(test)
41 mean(test)
42
43 out = matrix(test, ncol = 5)
44 mean( apply(out,1,sum) != 0)
45 #Sans correction on trouve un seuil global de près de 30,1%
46 #Pour beta
47 n=19
48 B=1000
49 p=0.2
50 R2<-c()
51 X1<-c()
52 X2<-c()
53 X3<-c()
54 X4<-c()
55 X5<-c()
56
57 for (i in 1:B){
58   X1[i]<-rbinom(1,n,p)
59   X2[i]<-rbinom(1,n,p)
60   X3[i]<-rbinom(1,n,p)
61   X4[i]<-rbinom(1,n,p)
62   X5[i]<-rbinom(1,n,p)
63 }
64 c=c_test(0.5,0.2,0.1,0.1,ns=19,method = "Exact")$c
65 X=c(X1,X2,X3,X4,X5)
66 #Selon la règle de décision, on rejette H0:p>=p0 si X1<c
67 #True="On ne rejette H0", False="On rejette H0"
68 test<-X>=c
69 summary(test)
70 out = matrix(test, ncol = 5)
71 mean( apply(out,1,sum) != 0)
72 #Fisher
73 #On calcule la probabilité de rejeter H0:p1>=pbar alors que H0 est vraie
74 B=1000
75 v1=v2=v3=v4=v5=0
76 rej1=rej2=rej3=rej4=rej5=0
77 reslt<-data.frame()
78 n=23
79 p1=0.5

```

```

80 p2=0.5
81 p3=0.5
82 p4=0.5
83 p5=0.5
84
85 X1<-rbinom(1,n,p1)
86 X2<-rbinom(1,n,p2)
87 X3<-rbinom(1,n,p3)
88 X4<-rbinom(1,n,p4)
89 X5<-rbinom(1,n,p5)
90
91 pv1<-c()
92 pv2<-c()
93 pv3<-c()
94 pv4<-c()
95 pv5<-c()
96 for (i in 1:B){
97   X1<-rbinom(1,n,p1)
98   X2<-rbinom(1,n,p2)
99   X3<-rbinom(1,n,p3)
100  X4<-rbinom(1,n,p4)
101  X5<-rbinom(1,n,p5)
102
103  dat<-data.frame(Oui=c(X1,X2,X3,X4,X5), Non=n-c(X1,X2,X3,X4,X5))
104  rslt<-testF_mid(dat,0.1,5)
105  pv1[i]<-rslt$p.value[1]
106  pv2[i]<-rslt$p.value[2]
107  pv3[i]<-rslt$p.value[3]
108  pv4[i]<-rslt$p.value[4]
109  pv5[i]<-rslt$p.value[5]
110 }
111 #Selon la règle de décision, on rejette H0:p>=p0 si pv<0.1
112 #True="On rejette H0", False="On ne rejette pas H0"
113 pv<-c(pv1,pv2,pv3,pv4,pv5)
114 test<-pv<0.1
115 summary(test)
116 out = matrix(test, ncol = 5)
117 mean( apply(out,1,sum) != 0)
118
119 #Pour beta (Test de Fisher)
120 B=1000
121 v1=v2=v3=v4=v5=0
122 rej1=rej2=rej3=rej4=rej5=0
123 reslt<-data.frame()
124 n=23
125 p1=0.2
126 p2=0.5
127 p3=0.5
128 p4=0.5
129 p5=0.5
130
131 X1<-rbinom(1,n,p1)
132 X2<-rbinom(1,n,p2)
133 X3<-rbinom(1,n,p3)
134 X4<-rbinom(1,n,p4)
135 X5<-rbinom(1,n,p5)

```

```

136
137 pv1<-c()
138 pv2<-c()
139 pv3<-c()
140 pv4<-c()
141 pv5<-c()
142 for (i in 1:B){
143   X1<-rbinom(1,n,p1)
144   X2<-rbinom(1,n,p2)
145   X3<-rbinom(1,n,p3)
146   X4<-rbinom(1,n,p4)
147   X5<-rbinom(1,n,p5)
148
149   dat<-data.frame(Oui=c(X1,X2,X3,X4,X5), Non=n-c(X1,X2,X3,X4,X5))
150   rslt<-testF_mid(dat,0.1,5)
151   pv1[i]<-rslt$p.value[1]
152   pv2[i]<-rslt$p.value[2]
153   pv3[i]<-rslt$p.value[3]
154   pv4[i]<-rslt$p.value[4]
155   pv5[i]<-rslt$p.value[5]
156 }
157 #Selon la règle de décision, on rejette H0:p>=p0 si pv<0.1
158 #True="On ne rejette H0", False="On rejette H0"
159 test<-pv1>=0.1
160 summary(test)
161 out = matrix(test, ncol = 5)
162 mean( apply(out,1,sum) != 0)
163 #Test normal sans transformation
164 #On calcule la probabilité d'accepter H0:p1>=pbar alors que H0 est Faux
165 #Pour alpha
166 B=1000
167 v1=v2=v3=v4=v5=0
168 rej1=rej2=rej3=rej4=rej5=0
169 reslt<-data.frame()
170 n=22
171 p1=0.5
172 p2=0.5
173 p3=0.5
174 p4=0.5
175 p5=0.5
176
177 X1<-rbinom(1,n,p1)
178 X2<-rbinom(1,n,p2)
179 X3<-rbinom(1,n,p3)
180 X4<-rbinom(1,n,p4)
181 X5<-rbinom(1,n,p5)
182
183 pv1<-c()
184 pv2<-c()
185 pv3<-c()
186 pv4<-c()
187 pv5<-c()
188 for (i in 1:B){
189   X1<-rbinom(1,n,p1)
190   X2<-rbinom(1,n,p2)
191   X3<-rbinom(1,n,p3)

```



```

192 X4<-rbinom(1,n,p4)
193 X5<-rbinom(1,n,p5)
194
195 dat<-data.frame(Oui=c(X1,X2,X3,X4,X5), Non=n-c(X1,X2,X3,X4,X5))
196 rslt<-testN(dat,0.1,5)
197 pv1[i]<-rslt$p.value[1]
198 pv2[i]<-rslt$p.value[2]
199 pv3[i]<-rslt$p.value[3]
200 pv4[i]<-rslt$p.value[4]
201 pv5[i]<-rslt$p.value[5]
202 }
203 #Selon la règle de décision, on rejette H0:p>=p0 si pv<0.1
204 #True="On rejette H0", False="On ne rejette pas H0"
205 pv<-c(pv1,pv2,pv3,pv4,pv5)
206 test<-pv<0.1
207 summary(test)
208 out = matrix(test, ncol = 5)
209 mean( apply(out,1,sum) != 0)
210
211 #Pour beta
212 B=1000
213 v1=v2=v3=v4=v5=0
214 rej1=rej2=rej3=rej4=rej5=0
215 reslt<-data.frame()
216 n=22
217 p1=0.2
218 p2=0.5
219 p3=0.5
220 p4=0.5
221 p5=0.5
222
223 X1<-rbinom(1,n,p1)
224 X2<-rbinom(1,n,p2)
225 X3<-rbinom(1,n,p3)
226 X4<-rbinom(1,n,p4)
227 X5<-rbinom(1,n,p5)
228
229 pv1<-c()
230 pv2<-c()
231 pv3<-c()
232 pv4<-c()
233 pv5<-c()
234 for (i in 1:B){
235 X1<-rbinom(1,n,p1)
236 X2<-rbinom(1,n,p2)
237 X3<-rbinom(1,n,p3)
238 X4<-rbinom(1,n,p4)
239 X5<-rbinom(1,n,p5)
240
241 dat<-data.frame(Oui=c(X1,X2,X3,X4,X5), Non=n-c(X1,X2,X3,X4,X5))
242 rslt<-testN(dat,0.1,5)
243 pv1[i]<-rslt$p.value[1]
244 pv2[i]<-rslt$p.value[2]
245 pv3[i]<-rslt$p.value[3]
246 pv4[i]<-rslt$p.value[4]
247 pv5[i]<-rslt$p.value[5]

```

```

248 }
249 #Selon la règle de décision, on rejette H0:p>=p0 si pv<0.1
250 #True="On ne peut rejeter H0", False="On rejette H0"
251 test<-pv1>=0.1
252 summary(test)
253 out = matrix(test, ncol = 5)
254 mean( apply(out,1,sum) != 0)
255 #Test normal avec transformation
256 #On calcule la probabilité d'accepter H0:p1>=pbar alors que H0 est Faux
257 #Pour alpha
258 B=1000
259 v1=v2=v3=v4=v5=0
260 rej1=rej2=rej3=rej4=rej5=0
261 reslt<-data.frame()
262 n=20
263 p1=0.5
264 p2=0.5
265 p3=0.5
266 p4=0.5
267 p5=0.5
268
269 X1<-rbinom(1,n,p1)
270 X2<-rbinom(1,n,p2)
271 X3<-rbinom(1,n,p3)
272 X4<-rbinom(1,n,p4)
273 X5<-rbinom(1,n,p5)
274
275 pv1<-c()
276 pv2<-c()
277 pv3<-c()
278 pv4<-c()
279 pv5<-c()
280 for (i in 1:B){
281   X1<-rbinom(1,n,p1)
282   X2<-rbinom(1,n,p2)
283   X3<-rbinom(1,n,p3)
284   X4<-rbinom(1,n,p4)
285   X5<-rbinom(1,n,p5)
286
287   dat<-data.frame(Oui=c(X1,X2,X3,X4,X5), Non=n-c(X1,X2,X3,X4,X5))
288   rslt<-testTN(dat,0.1,5)
289   pv1[i]<-rslt$p.value[1]
290   pv2[i]<-rslt$p.value[2]
291   pv3[i]<-rslt$p.value[3]
292   pv4[i]<-rslt$p.value[4]
293   pv5[i]<-rslt$p.value[5]
294 }
295 #Selon la règle de décision, on rejette H0:p>=p0 si pv<0.1
296 #True="On rejette H0", False="On ne rejette pas H0"
297 pv<-c(pv1,pv2,pv3,pv4,pv5)
298 test<-pv<0.1
299 summary(test)
300 out = matrix(test, ncol = 5)
301 mean( apply(out,1,sum) != 0)
302 #Pour beta
303 B=1000

```

```

304 v1=v2=v3=v4=v5=0
305 rej1=rej2=rej3=rej4=rej5=0
306 reslt<-data.frame()
307 n=20
308 p1=0.2
309 p2=0.5
310 p3=0.5
311 p4=0.5
312 p5=0.5
313
314 X1<-rbinom(1,n,p1)
315 X2<-rbinom(1,n,p2)
316 X3<-rbinom(1,n,p3)
317 X4<-rbinom(1,n,p4)
318 X5<-rbinom(1,n,p5)
319
320 pv1<-c()
321 pv2<-c()
322 pv3<-c()
323 pv4<-c()
324 pv5<-c()
325 for (i in 1:B){
326   X1<-rbinom(1,n,p1)
327   X2<-rbinom(1,n,p2)
328   X3<-rbinom(1,n,p3)
329   X4<-rbinom(1,n,p4)
330   X5<-rbinom(1,n,p5)
331
332   dat<-data.frame(Oui=c(X1,X2,X3,X4,X5), Non=n-c(X1,X2,X3,X4,X5))
333   rslt<-testTN(dat,0.1,5)
334   pv1[i]<-rslt$p.value[1]
335   pv2[i]<-rslt$p.value[2]
336   pv3[i]<-rslt$p.value[3]
337   pv4[i]<-rslt$p.value[4]
338   pv5[i]<-rslt$p.value[5]
339 }
340 #Selon la règle de décision, on rejette H0:p>=p0 si pv<0.1
341 #True="On ne peut rejeter H0", False="On rejette H0"
342 test<-pv1>=0.1
343 summary(test)
344 out = matrix(test, ncol = 5)
345 mean( apply(out,1,sum) != 0)
346
347 #####
348 #Avec correction de Bonferroni a posteriori aux seuils alpha=beta=0.02
349 #####
350
351 #Avec correction pour alpha=beta=0.1/5=0,02
352 #Fisher
353 #On calcule la probabilité de rejeter H0:p1>=pbar alors que H0 est vraie
354 B=1000
355 v1=v2=v3=v4=v5=0
356 rej1=rej2=rej3=rej4=rej5=0
357 reslt<-data.frame()
358 n=23
359 p1=0.5

```

```

360 p2=0.5
361 p3=0.5
362 p4=0.5
363 p5=0.5
364
365 X1<-rbinom(1,n,p1)
366 X2<-rbinom(1,n,p2)
367 X3<-rbinom(1,n,p3)
368 X4<-rbinom(1,n,p4)
369 X5<-rbinom(1,n,p5)
370
371 pv1<-c()
372 pv2<-c()
373 pv3<-c()
374 pv4<-c()
375 pv5<-c()
376 for (i in 1:B){
377   X1<-rbinom(1,n,p1)
378   X2<-rbinom(1,n,p2)
379   X3<-rbinom(1,n,p3)
380   X4<-rbinom(1,n,p4)
381   X5<-rbinom(1,n,p5)
382
383   dat<-data.frame(Oui=c(X1,X2,X3,X4,X5), Non=n-c(X1,X2,X3,X4,X5))
384   rslt<-testF_mid(dat,0.02,5)
385   pv1[i]<-rslt$p.value[1]
386   pv2[i]<-rslt$p.value[2]
387   pv3[i]<-rslt$p.value[3]
388   pv4[i]<-rslt$p.value[4]
389   pv5[i]<-rslt$p.value[5]
390 }
391 #Selon la règle de décision, on rejette H0:p>=p0 si pv<0.1
392 #True="On rejette H0", False="On ne rejette pas H0"
393 pv<-c(pv1,pv2,pv3,pv4,pv5)
394 test<-pv<0.02
395 summary(test)
396 out = matrix(test, ncol = 5)
397 mean( apply(out,1,sum) != 0)
398 #Pour beta (Test de Fisher)
399 B=1000
400 v1=v2=v3=v4=v5=0
401 rej1=rej2=rej3=rej4=rej5=0
402 reslt<-data.frame()
403 n=23
404 p1=0.2
405 p2=0.5
406 p3=0.5
407 p4=0.5
408 p5=0.5
409
410 X1<-rbinom(1,n,p1)
411 X2<-rbinom(1,n,p2)
412 X3<-rbinom(1,n,p3)
413 X4<-rbinom(1,n,p4)
414 X5<-rbinom(1,n,p5)
415

```

```

416 pv1<-c()
417 pv2<-c()
418 pv3<-c()
419 pv4<-c()
420 pv5<-c()
421 for (i in 1:B){
422   X1<-rbinom(1,n,p1)
423   X2<-rbinom(1,n,p2)
424   X3<-rbinom(1,n,p3)
425   X4<-rbinom(1,n,p4)
426   X5<-rbinom(1,n,p5)
427
428   dat<-data.frame(Oui=c(X1,X2,X3,X4,X5), Non=n-c(X1,X2,X3,X4,X5))
429   rslt<-testF_mid(dat,0.02,5)
430   pv1[i]<-rslt$p.value[1]
431   pv2[i]<-rslt$p.value[2]
432   pv3[i]<-rslt$p.value[3]
433   pv4[i]<-rslt$p.value[4]
434   pv5[i]<-rslt$p.value[5]
435 }
436 #Selon la règle de décision, on rejette H0:p>=p0 si pv<0.1
437 #True="On ne rejette H0", False="On rejette H0"
438 test<-pv1>=0.02
439 summary(test)
440 out = matrix(test, ncol = 5)
441 mean( apply(out,1,sum) != 0)
442 #Test normal sans transformation
443 #On calcule la probabilité d'accepter H0:p1>=pbar alors que H0 est Faux
444 #Pour alpha
445 B=1000
446 v1=v2=v3=v4=v5=0
447 rej1=rej2=rej3=rej4=rej5=0
448 reslt<-data.frame()
449 n=22
450 p1=0.5
451 p2=0.5
452 p3=0.5
453 p4=0.5
454 p5=0.5
455
456 X1<-rbinom(1,n,p1)
457 X2<-rbinom(1,n,p2)
458 X3<-rbinom(1,n,p3)
459 X4<-rbinom(1,n,p4)
460 X5<-rbinom(1,n,p5)
461
462 pv1<-c()
463 pv2<-c()
464 pv3<-c()
465 pv4<-c()
466 pv5<-c()
467 for (i in 1:B){
468   X1<-rbinom(1,n,p1)
469   X2<-rbinom(1,n,p2)
470   X3<-rbinom(1,n,p3)
471   X4<-rbinom(1,n,p4)

```

```

472 X5<-rbinom(1,n,p5)
473
474 dat<-data.frame(Oui=c(X1,X2,X3,X4,X5), Non=n-c(X1,X2,X3,X4,X5))
475 rslt<-testN(dat,0.02,5)
476 pv1[i]<-rslt$p.value[1]
477 pv2[i]<-rslt$p.value[2]
478 pv3[i]<-rslt$p.value[3]
479 pv4[i]<-rslt$p.value[4]
480 pv5[i]<-rslt$p.value[5]
481 }
482 #Selon la règle de décision, on rejette H0:p>=p0 si pv<0.1
483 #True="On rejette H0", False="On ne rejette pas H0"
484 pv<-c(pv1,pv2,pv3,pv4,pv5)
485 test<-pv<0.02
486 summary(test)
487 out = matrix(test, ncol = 5)
488 mean( apply(out,1,sum) != 0)
489
490 #Pour beta
491 B=1000
492 v1=v2=v3=v4=v5=0
493 rej1=rej2=rej3=rej4=rej5=0
494 reslt<-data.frame()
495 n=22
496 p1=0.2
497 p2=0.5
498 p3=0.5
499 p4=0.5
500 p5=0.5
501
502 X1<-rbinom(1,n,p1)
503 X2<-rbinom(1,n,p2)
504 X3<-rbinom(1,n,p3)
505 X4<-rbinom(1,n,p4)
506 X5<-rbinom(1,n,p5)
507
508 pv1<-c()
509 pv2<-c()
510 pv3<-c()
511 pv4<-c()
512 pv5<-c()
513 for (i in 1:B){
514 X1<-rbinom(1,n,p1)
515 X2<-rbinom(1,n,p2)
516 X3<-rbinom(1,n,p3)
517 X4<-rbinom(1,n,p4)
518 X5<-rbinom(1,n,p5)
519
520 dat<-data.frame(Oui=c(X1,X2,X3,X4,X5), Non=n-c(X1,X2,X3,X4,X5))
521 rslt<-testN(dat,0.02,5)
522 pv1[i]<-rslt$p.value[1]
523 pv2[i]<-rslt$p.value[2]
524 pv3[i]<-rslt$p.value[3]
525 pv4[i]<-rslt$p.value[4]
526 pv5[i]<-rslt$p.value[5]
527 }

```

```

528 #Selon la règle de décision, on rejette H0:p>=p0 si pv<0.1
529 #True="On ne peut rejeter H0", False="On rejette H0"
530 test<-pv1>=0.02
531 summary(test)
532 out = matrix(test, ncol = 5)
533 mean( apply(out,1,sum) != 0)
534 #Test normal avec transformation
535 #On calcule la probabilité d'accepter H0:p1>=pbar alors que H0 est Faux
536 #Pour alpha
537 B=1000
538 v1=v2=v3=v4=v5=0
539 rej1=rej2=rej3=rej4=rej5=0
540 reslt<-data.frame()
541 n=20
542 p1=0.5
543 p2=0.5
544 p3=0.5
545 p4=0.5
546 p5=0.5
547
548 X1<-rbinom(1,n,p1)
549 X2<-rbinom(1,n,p2)
550 X3<-rbinom(1,n,p3)
551 X4<-rbinom(1,n,p4)
552 X5<-rbinom(1,n,p5)
553
554 pv1<-c()
555 pv2<-c()
556 pv3<-c()
557 pv4<-c()
558 pv5<-c()
559 for (i in 1:B){
560   X1<-rbinom(1,n,p1)
561   X2<-rbinom(1,n,p2)
562   X3<-rbinom(1,n,p3)
563   X4<-rbinom(1,n,p4)
564   X5<-rbinom(1,n,p5)
565
566   dat<-data.frame(Oui=c(X1,X2,X3,X4,X5), Non=n-c(X1,X2,X3,X4,X5))
567   rslt<-testTN(dat,0.02,5)
568   pv1[i]<-rslt$p.value[1]
569   pv2[i]<-rslt$p.value[2]
570   pv3[i]<-rslt$p.value[3]
571   pv4[i]<-rslt$p.value[4]
572   pv5[i]<-rslt$p.value[5]
573 }
574 #Selon la règle de décision, on rejette H0:p>=p0 si pv<0.1
575 #True="On rejette H0", False="On ne rejette pas H0"
576 pv<-c(pv1,pv2,pv3,pv4,pv5)
577 test<-pv<0.02
578 summary(test)
579 out = matrix(test, ncol = 5)
580 mean( apply(out,1,sum) != 0)
581 #Pour beta
582 B=1000
583 v1=v2=v3=v4=v5=0

```

```

584 rej1=rej2=rej3=rej4=rej5=0
585 reslt<-data.frame()
586 n=20
587 p1=0.2
588 p2=0.5
589 p3=0.5
590 p4=0.5
591 p5=0.5
592
593 X1<-rbinom(1,n,p1)
594 X2<-rbinom(1,n,p2)
595 X3<-rbinom(1,n,p3)
596 X4<-rbinom(1,n,p4)
597 X5<-rbinom(1,n,p5)
598
599 pv1<-c()
600 pv2<-c()
601 pv3<-c()
602 pv4<-c()
603 pv5<-c()
604 for (i in 1:B){
605   X1<-rbinom(1,n,p1)
606   X2<-rbinom(1,n,p2)
607   X3<-rbinom(1,n,p3)
608   X4<-rbinom(1,n,p4)
609   X5<-rbinom(1,n,p5)
610
611   dat<-data.frame(Oui=c(X1,X2,X3,X4,X5), Non=n-c(X1,X2,X3,X4,X5))
612   rslt<-testTN(dat,0.02,5)
613   pv1[i]<-rslt$p.value[1]
614   pv2[i]<-rslt$p.value[2]
615   pv3[i]<-rslt$p.value[3]
616   pv4[i]<-rslt$p.value[4]
617   pv5[i]<-rslt$p.value[5]
618 }
619 #Selon la règle de décision, on rejette H0:p>=p0 si pv<0.1
620 #True="On ne peut rejeter H0", False="On rejette H0"
621 test<-pv1>=0.02
622 summary(test)
623 out = matrix(test, ncol = 5)
624 mean( apply(out,1,sum) != 0)
625 #####
626 #Avec correction de Bonferroni a priori aux seuils alpha=beta=0.02%
627 #####
628 #Valadez #seuil alpha
629 n=40
630 B=1000
631 p=0.5
632 R2<-c()
633 X1<-c()
634 X2<-c()
635 X3<-c()
636 X4<-c()
637 X5<-c()
638
639 for (i in 1:B){

```



```

640   X1[i] <- rbinom(1,n,p)
641   X2[i] <- rbinom(1,n,p)
642   X3[i] <- rbinom(1,n,p)
643   X4[i] <- rbinom(1,n,p)
644   X5[i] <- rbinom(1,n,p)
645 }
646 #Valeur critique
647 c=c_test(0.5,0.2,0.02,0.02,ns=40,method = "Exact")$c
648 X=c(X1,X2,X3,X4,X5)
649 #Selon la règle de décision, on rejette H0:p>=p0 si X1<c
650 #True="On rejette H0", False="On ne rejette pas H0"
651 test<-X<c
652 summary(test)
653 out = matrix(test, ncol = 5)
654 mean( apply(out,1,sum) != 0)
655 #Pour beta
656 n=40
657 B=1000
658 p=0.2
659 R2<-c()
660 X1<-c()
661 X2<-c()
662 X3<-c()
663 X4<-c()
664 X5<-c()
665
666 for (i in 1:B){
667   X1[i] <- rbinom(1,n,p)
668   X2[i] <- rbinom(1,n,p)
669   X3[i] <- rbinom(1,n,p)
670   X4[i] <- rbinom(1,n,p)
671   X5[i] <- rbinom(1,n,p)
672 }
673 c=c_test(0.5,0.2,0.02,0.02,ns=40,method = "Exact")$c
674 X=c(X1,X2,X3,X4,X5)
675 #Selon la règle de décision, on rejette H0:p>=p0 si X1<c
676 #True="On ne rejette H0", False="On rejette H0"
677 test<-X>=c
678 summary(test)
679 out = matrix(test, ncol = 5)
680 mean( apply(out,1,sum) != 0)
681
682 #Test exact de Fisher
683 B=1000
684 v1=v2=v3=v4=v5=0
685 rej1=rej2=rej3=rej4=rej5=0
686 reslt<-data.frame()
687 n=50
688 p1=0.5
689 p2=0.5
690 p3=0.5
691 p4=0.5
692 p5=0.5
693
694 X1<-rbinom(1,n,p1)
695 X2<-rbinom(1,n,p2)

```

```

696 X3<-rbinom(1,n,p3)
697 X4<-rbinom(1,n,p4)
698 X5<-rbinom(1,n,p5)
699
700 pv1<-c()
701 pv2<-c()
702 pv3<-c()
703 pv4<-c()
704 pv5<-c()
705 for (i in 1:B){
706   X1<-rbinom(1,n,p1)
707   X2<-rbinom(1,n,p2)
708   X3<-rbinom(1,n,p3)
709   X4<-rbinom(1,n,p4)
710   X5<-rbinom(1,n,p5)
711
712   dat<-data.frame(Oui=c(X1,X2,X3,X4,X5), Non=n-c(X1,X2,X3,X4,X5))
713   rslt<-testF_mid(dat,0.02,5)
714   pv1[i]<-rslt$p.value[1]
715   pv2[i]<-rslt$p.value[2]
716   pv3[i]<-rslt$p.value[3]
717   pv4[i]<-rslt$p.value[4]
718   pv5[i]<-rslt$p.value[5]
719 }
720 #Selon la règle de décision, on rejette H0:p>=p0 si pv<0.1
721 #True="On rejette H0", False="On ne rejette pas H0"
722 pv<-c(pv1,pv2,pv3,pv4,pv5)
723 test<-pv<0.02
724 summary(test)
725 out = matrix(test, ncol = 5)
726 mean( apply(out,1,sum) != 0)
727 #Pour beta (Test de Fisher)
728 B=1000
729 v1=v2=v3=v4=v5=0
730 rej1=rej2=rej3=rej4=rej5=0
731 reslt<-data.frame()
732 n=50
733 p1=0.2
734 p2=0.5
735 p3=0.5
736 p4=0.5
737 p5=0.5
738
739 X1<-rbinom(1,n,p1)
740 X2<-rbinom(1,n,p2)
741 X3<-rbinom(1,n,p3)
742 X4<-rbinom(1,n,p4)
743 X5<-rbinom(1,n,p5)
744
745 pv1<-c()
746 pv2<-c()
747 pv3<-c()
748 pv4<-c()
749 pv5<-c()
750 for (i in 1:B){
751   X1<-rbinom(1,n,p1)

```

```

752 X2<-rbinom(1,n,p2)
753 X3<-rbinom(1,n,p3)
754 X4<-rbinom(1,n,p4)
755 X5<-rbinom(1,n,p5)
756
757 dat<-data.frame(Oui=c(X1,X2,X3,X4,X5), Non=n-c(X1,X2,X3,X4,X5))
758 rslt<-testF_mid(dat,0.02,5)
759 pv1[i]<-rslt$p.value[1]
760 pv2[i]<-rslt$p.value[2]
761 pv3[i]<-rslt$p.value[3]
762 pv4[i]<-rslt$p.value[4]
763 pv5[i]<-rslt$p.value[5]
764 }
765 #Selon la règle de décision, on rejette H0:p>=p0 si pv<0.1
766 #True="On ne rejette H0", False="On rejette H0"
767 test<-pv1>=0.02
768 summary(test)
769 out = matrix(test, ncol = 5)
770 mean( apply(out,1,sum) != 0)
771 #Test normal sans transformation
772 #On calcule la probabilité d'accepter H0:p1>=pbar alors que H0 est Faux
773 #Pour alpha
774 B=1000
775 v1=v2=v3=v4=v5=0
776 rej1=rej2=rej3=rej4=rej5=0
777 reslt<-data.frame()
778 n=42
779 p1=0.5
780 p2=0.5
781 p3=0.5
782 p4=0.5
783 p5=0.5
784
785 X1<-rbinom(1,n,p1)
786 X2<-rbinom(1,n,p2)
787 X3<-rbinom(1,n,p3)
788 X4<-rbinom(1,n,p4)
789 X5<-rbinom(1,n,p5)
790
791 pv1<-c()
792 pv2<-c()
793 pv3<-c()
794 pv4<-c()
795 pv5<-c()
796 for (i in 1:B){
797 X1<-rbinom(1,n,p1)
798 X2<-rbinom(1,n,p2)
799 X3<-rbinom(1,n,p3)
800 X4<-rbinom(1,n,p4)
801 X5<-rbinom(1,n,p5)
802
803 dat<-data.frame(Oui=c(X1,X2,X3,X4,X5), Non=n-c(X1,X2,X3,X4,X5))
804 rslt<-testN(dat,0.02,5)
805 pv1[i]<-rslt$p.value[1]
806 pv2[i]<-rslt$p.value[2]
807 pv3[i]<-rslt$p.value[3]

```

```

808   pv4[i]<-rslt$p.value[4]
809   pv5[i]<-rslt$p.value[5]
810 }
811 #Selon la règle de décision, on rejette H0:p>=p0 si pv<0.1
812 #True="On rejette H0", False="On ne rejette pas H0"
813 pv<-c(pv1,pv2,pv3,pv4,pv5)
814 test<-pv<0.02
815 summary(test)
816 out = matrix(test, ncol = 5)
817 mean( apply(out,1,sum) != 0)
818
819 #Pour beta
820 B=1000
821 v1=v2=v3=v4=v5=0
822 rej1=rej2=rej3=rej4=rej5=0
823 reslt<-data.frame()
824 n=42
825 p1=0.2
826 p2=0.5
827 p3=0.5
828 p4=0.5
829 p5=0.5
830
831 X1<-rbinom(1,n,p1)
832 X2<-rbinom(1,n,p2)
833 X3<-rbinom(1,n,p3)
834 X4<-rbinom(1,n,p4)
835 X5<-rbinom(1,n,p5)
836
837 pv1<-c()
838 pv2<-c()
839 pv3<-c()
840 pv4<-c()
841 pv5<-c()
842 for (i in 1:B){
843   X1<-rbinom(1,n,p1)
844   X2<-rbinom(1,n,p2)
845   X3<-rbinom(1,n,p3)
846   X4<-rbinom(1,n,p4)
847   X5<-rbinom(1,n,p5)
848
849   dat<-data.frame(Oui=c(X1,X2,X3,X4,X5), Non=n-c(X1,X2,X3,X4,X5))
850   rslt<-testN(dat,0.02,5)
851   pv1[i]<-rslt$p.value[1]
852   pv2[i]<-rslt$p.value[2]
853   pv3[i]<-rslt$p.value[3]
854   pv4[i]<-rslt$p.value[4]
855   pv5[i]<-rslt$p.value[5]
856 }
857 #Selon la règle de décision, on rejette H0:p>=p0 si pv<0.1
858 #True="On ne peut rejeter H0", False="On rejette H0"
859 test<-pv1>=0.02
860 summary(test)
861 out = matrix(test, ncol = 5)
862 mean( apply(out,1,sum) != 0)
863 #Test normal avec transformation

```

```

864 #On calcule la probabilité d'accepter  $H_0:p_1 \geq \bar{p}$  alors que  $H_0$  est Faux
865 #Pour alpha
866 B=1000
867 v1=v2=v3=v4=v5=0
868 rej1=rej2=rej3=rej4=rej5=0
869 reslt<-data.frame()
870 n=51
871 p1=0.5
872 p2=0.5
873 p3=0.5
874 p4=0.5
875 p5=0.5
876
877 X1<-rbinom(1,n,p1)
878 X2<-rbinom(1,n,p2)
879 X3<-rbinom(1,n,p3)
880 X4<-rbinom(1,n,p4)
881 X5<-rbinom(1,n,p5)
882
883 pv1<-c()
884 pv2<-c()
885 pv3<-c()
886 pv4<-c()
887 pv5<-c()
888 for (i in 1:B){
889   X1<-rbinom(1,n,p1)
890   X2<-rbinom(1,n,p2)
891   X3<-rbinom(1,n,p3)
892   X4<-rbinom(1,n,p4)
893   X5<-rbinom(1,n,p5)
894
895   dat<-data.frame(Oui=c(X1,X2,X3,X4,X5), Non=n-c(X1,X2,X3,X4,X5))
896   rslt<-testTN(dat,0.02,5)
897   pv1[i]<-rslt$p.value[1]
898   pv2[i]<-rslt$p.value[2]
899   pv3[i]<-rslt$p.value[3]
900   pv4[i]<-rslt$p.value[4]
901   pv5[i]<-rslt$p.value[5]
902 }
903 #Selon la règle de décision, on rejette  $H_0:p \geq p_0$  si  $pv < 0.1$ 
904 #True="On rejette  $H_0$ ", False="On ne rejette pas  $H_0$ "
905 pv<-c(pv1,pv2,pv3,pv4,pv5)
906 test<-pv<0.02
907 summary(test)
908 out = matrix(test, ncol = 5)
909 mean( apply(out,1,sum) != 0)
910 #Pour beta
911 B=1000
912 v1=v2=v3=v4=v5=0
913 rej1=rej2=rej3=rej4=rej5=0
914 reslt<-data.frame()
915 n=51
916 p1=0.2
917 p2=0.5
918 p3=0.5
919 p4=0.5

```

```

920 p5=0.5
921
922 X1<-rbinom(1,n,p1)
923 X2<-rbinom(1,n,p2)
924 X3<-rbinom(1,n,p3)
925 X4<-rbinom(1,n,p4)
926 X5<-rbinom(1,n,p5)
927
928 pv1<-c()
929 pv2<-c()
930 pv3<-c()
931 pv4<-c()
932 pv5<-c()
933 for (i in 1:B){
934   X1<-rbinom(1,n,p1)
935   X2<-rbinom(1,n,p2)
936   X3<-rbinom(1,n,p3)
937   X4<-rbinom(1,n,p4)
938   X5<-rbinom(1,n,p5)
939
940   dat<-data.frame(Oui=c(X1,X2,X3,X4,X5), Non=n-c(X1,X2,X3,X4,X5))
941   rslt<-testTN(dat,0.02,5)
942   pv1[i]<-rslt$p.value[1]
943   pv2[i]<-rslt$p.value[2]
944   pv3[i]<-rslt$p.value[3]
945   pv4[i]<-rslt$p.value[4]
946   pv5[i]<-rslt$p.value[5]
947 }
948 #Selon la règle de décision, on rejette H0:p>=p0 si pv<0.1
949 #True="On ne peut rejeter H0", False="On rejette H0"
950 test<-pv1>=0.02
951 summary(test)
952 out = matrix(test, ncol = 5)
953 mean( apply(out,1,sum) != 0)
954
955 #Comparaison multiple avec correction de bonferroni
956 #Exemple illustratif
957 #Les données
958 dat<-data.frame(Oui=c(12,5,10,2,15), Non=c(7,14,9,17,4))

```

Bibliographie

- [1] Agresti, A. and Kateri, M. (2011). *Categorical data analysis*. Springer.
- [2] Alberti, K., Guthmann, J., Fermon, F., Nargaye, K., and Grais, R. (2008). Use of lot quality assurance sampling (lqas) to estimate vaccination coverage helps guide future vaccination efforts. *Transactions of the Royal Society of Tropical Medicine and Hygiene*, 102(3) :251–254.
- [3] Andrés, M. and Tejedor, I. H. (1995). Is fisher’s exact test very conservative? *Computational statistics & data analysis*, 19(5) :579–591.
- [4] Biedron, C., Pagano, M., Hedt, B., Kilian, A., Ratcliffe, A., Mabunda, S., and Valadez, J. (2010). An assessment of lot quality assurance sampling to evaluate malaria outcome indicators : extending malaria indicator surveys. *International journal of epidemiology*, 39(1) :72–79.
- [5] Casella, G. and Berger, R. (2002). *Statistical inference*, volume 2. Duxbury Pacific Grove, CA.
- [6] Casey, O. (2010). *Improving LQAS for Monitoring and Evaluation of Health Programs in Resource-Poor Settings*. PhD thesis, HARVARD UNIVERSITY.
- [7] Champely, S. (2006). *Tests statistiques paramétriques : Puissance, taille d’effet et taille d’échantillon (sous R)*. Université Lyon 1.
- [8] Chow, S., Wang, H., and Shao, J. (2007). *Sample size calculations in clinical research*. CRC press.
- [9] Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* 2nd edn.
- [10] Dibaba, A., Chimombo, C., Uotila, A., King, W., and Myatt, M. (2014). Comparison of lqas and 30-by-30 two-stage cluster sampled survey method for the assessment of coverage indicators. *ENN Online*.
- [11] Dodge, H. and Romig, H. (1959). *Sampling inspection tables : single and double sampling*. Wiley Series in Probability and Statistics - Applied Probability and Statistics Section Series. Wiley.
- [12] Fleiss, J., Bruce, L., and Myunghee, P. (2013). *Statistical methods for rates and proportions*. John Wiley & Sons.

- [13] J., S., Schroeder, D., Marsh, D., Allhasane, S., and Kone, D. (2001). Assessing a computerized routine health information system in mali using lqas. *Health policy and planning*, 16(3) :248–255.
- [14] Krishnamoorthy, K. (2016). *Handbook of statistical distributions with applications*. CRC Press.
- [15] Lemeshow, S., Hosmer, D., Klar, J., and Stephen, K. (1990). Adequacy of sample size in health studies.
- [16] Lemeshow, S. and Stroh, G. (1989). Quality assurance sampling for evaluating health parameters in developing countries. *Survey methodology*, 15(1) :14–27.
- [17] Louis, L. (2017). Le test binomial exact de la différence entre deux proportions et ses approximations [the exact binomial test between two proportions and its approximations]. *The Quantitative Methods for Psychology*, 13(2) :141–147.
- [18] McDonald, J. (2014). *Handbook of biological statistics* (3rd edn, baltimore : Sparky house.
- [19] Mehta, C. R. and Senchaudhuri, P. (2003). Conditional versus unconditional exact tests for comparing two binomials. *Cytel Software Corporation*, 675.
- [20] Montgomery, D. (2009). *Statistical quality control*, volume 7. Wiley New York.
- [21] Mushtaq, M. U., Majrooh, M. A., Ullah, M. Z. S., Akram, J., Siddiqui, A. M., Shad, M. A., Waqas, M., Hussain, A. M., Waqar, A., Ubeera, S., et al. (2010). Are we doing enough? evaluation of the polio eradication initiative in a district of pakistan’s punjab province : a lqas study. *BMC Public Health*, 10(1) :60.
- [22] Neyman, J. and Pearson, E. (1933). On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 231(694-706) :289–337.
- [23] Oguta, T., Grainne, M., and Masese, L. (2008). Piloting lqas in somaliland. *ENN Online*.
- [24] Pagano, M. and Valadez, J. (2010). Commentary : Understanding practical lot quality assurance sampling. *International journal of epidemiology*, 39(1) :69–71.
- [25] Rhoda, D., Fernandez, S., Fitch, D., and Lemeshow, S. (2010). Lqas : user beware. *International journal of epidemiology*, 39(1) :60–68.
- [26] Robertson, S. and Valadez, J. (2006). Global review of health care surveys using lot quality assurance sampling (lqas), 1984–2004. *Social science & medicine*, 63(6) :1648–1660.
- [27] Valadez, J. (1991). *Assessing child survival programs in developing countries*. Dept. of Population and International Health, Harvard School of Public Health.
- [28] Valadez, J. and Devkota, B. R. (2002). Decentralized supervision of community health program using lqas in two districts of southern nepal. *Community-based health care : lessons from Bangladesh to Boston*. Boston : Management Sciences for Health, 26.

- [29] Valadez, J., Weiss, W., Leburg, C., and Davis, R. (2002). A participants manual for baseline surveys and regular monitoring. using lqas for assessing field programs in community health in developing countries. page 28.
- [30] Warton, D. and Hui, F. (2011). The arcsine is asinine : the analysis of proportions in ecology. *Ecology*, 92(1) :3–10.