FRANCK ADÉKAMBI

LES SOMMES DE RENOUVELLEMENT ESCOMPTÉES AVEC TAUX D'INTÉRÊT GÉNÉRAL

Thèse présentée
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval
dans le cadre du programme de doctorat en mathématiques
pour l'obtention du grade de Philosophiae Doctor (Ph.D.)

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

2011

Résumé

Dans la littérature actuarielle, les modèles collectifs les plus souvent utilisés pour représenter le montant total des réclamations sur un intervalle de temps donné sont ceux construits à partir de sommes de renouvellement dans lesquelles les forces d'intérêt et d'inflation peuvent éventuellement être prises en compte.

Le modèle de renouvellement dans lequel le contexte économique est ignoré, même si trop simpliste, a toutefois permis dans plusieurs cas le calcul de quantités d'intérêt telles que les moments, la fonction génératrice des moments, la distribution du montant total des réclamations, la probabilité de ruine, et a ainsi constitué une première approche de ce problème d'assurance.

Pour le modèle de renouvellement avec force d'intérêt constante, les mathématiques sont déjà plus complexes, mais plusieurs résultats ont tout de même été obtenus. Nous pouvons citer deux articles des professeurs Léveillé et Garrido, où ces auteurs proposent des formules récursives pour le calcul de tous les moments.

Dans cette thèse, nous proposons un modèle de renouvellement escompté encore plus réaliste où la force d'intérêt est soit représentée par une fonction déterministe ou par un processus stochastique. Les difficultés qu'ajoute ainsi une force d'intérêt plus générale nous obligent à développer une identité qui donnera la distribution conjointe conditionnelle du temps des réclamations connaissant leur nombre dans un intervalle de temps donné. Cet outil fondamental nous permettra de calculer les premiers moments simples et conjoints, de construire une équation intégrale de la fonction génératrice des moments, d'obtenir certaines distributions, de développer des prédicteurs de la valeur présente de notre processus de risque ainsi que d'autres résultats connexes.

Abstract

In the actuarial literature, the collective models the most often used to represent the total amount of the claims on a given time interval are the ones built from the renewal sums in which the forces of interest and inflation can be eventually taken into account.

The renewal model in which the economical context has been ignored, even if too simplistic, has allowed in several cases the calculation of quantities of interest such as the moments, the moment generating function, the distribution of the total amount of claims, the ruin probability, thus constituting a first approach to this insurance problem.

For the renewal model with a constant force of interest, the mathematics are already more complex, but several results however were obtained. We can quote two papers of the professors Léveillé and Garrido, where these authors propose recursive formulas for the calculation of all the moments.

In this thesis, we propose a more realistic renewal model where the force of interest is represented by a deterministic function or by a stochastic process. The difficulties that arise with a general force of interest oblige us to develop an identity that will give the conditional joint distribution of the time of claims knowing their number in a given time interval. This fundamental tool will allow us to calculate the first simple and joint moments, to construct an integral equation of the moment generating function, to obtain certain distributions, to develop predictors of the present value of our risk process as well as other related results.

Avant-Propos

Cette thèse étant une extension de précédents travaux de mon directeur de thèse, Monsieur Ghislain Léveillé, je tiens donc à le remercier pour m'avoir initié au sujet des sommes de renouvellement et aux techniques de renouvellement, qui ont été appliquées depuis des années dans différents domaines tels que les sciences actuarielles, le risque de crédit, l'économie de la santé, etc.

La réalisation d'un projet de thèse est jalonnée de difficultés et je ne saurais assez remercier Monsieur Léveillé pour m'avoir soutenu à certains moments clefs de ce parcours qui, à mon sens, demande beaucoup de patience. Son grand intérêt pour les mathématiques et ses applications à l'actuariat, son sens de la rigueur, m'ont plus qu'habité.

Les différents financements inhérents à mon progrès, que j'ai reçus aussi bien de mon directeur de recherche que de l'École d'actuariat, m'ont été d'un grand secours.

Je remercie profondément ma famille au Bénin pour les bonnes valeurs de persévérance qu'elle m'a inculquées et pour son soutien.

Je remercie aussi tous les amis rencontrés à Québec, surtout Arthur, Damigou, Dogui qui ont rendu mon séjour à Québec très agréable et Damigou qui m'a aussi lu.

Je dédie cette thèse à feue
Corréa Margueritte, ma grand-mère

Table des matières

Liste des tableaux

Chapitre 1
INTRODUCTION

1.1 Modèle collectif du risque

La théorie collective du risque est née au $20^{\text{ème}}$ siècle avec les travaux de mathématiciens scandinaves tels que Filip Lundberg (1903), dans sa thèse de doctorat intitulée « *Approximations of the Probability Function/Reinsurance of Collective Risks* », et Harald Cramer (1969), dans un article de la revue *Skandinavisk Aktuarietidskrift* intitulée « *Historical Review of Filip Lundberg's Work on Risk Theory* ».

En sciences actuarielles, deux modèles ont souvent été utilisés pour représenter le montant total des réclamations dans un portefeuille donné, soit le modèle individuel et le modèle collectif du risque. Dans le modèle individuel « classique » du risque, les réclamations sont liées à chacune des polices d'un portefeuille de taille n. Ainsi, si X_k représente le montant de la réclamation associé à la *k*-ième police, nous pouvons alors modéliser le montant total des réclamations de ce portefeuille par

$$S=\sum_{k=1}^{n} X_k \ ,$$

où les X_k sont des variables aléatoires non négatives et indépendantes mais pas nécessairement identiquement distribuées.

Dans le modèle collectif du risque, sur un horizon de temps fini, les réclamations ne sont plus associées à chaque police. Si $N(t)$ représente le nombre de réclamations dans la période $[0,t]$, et X_k est le montant de la *k*-ième réclamation, alors nous pouvons écrire:

$$S(t)=\sum_{k=1}^{N(t)} X_k \ ,$$

où les X_k sont des variables aléatoires positives indépendantes et identiquement distribuées, et les variables aléatoires $N(t), X_1, X_2, \ldots$ sont considérées mutuellement indépendantes, pour tout $t>0$.

Le modèle individuel du risque est plus adapté à l'assurance vie mais les calculs qu'il implique deviennent vite très laborieux, surtout quand il s'agit de trouver la fonction de répartition. Cependant, afin de faciliter le calcul de la distribution du montant total des réclamations touchant le portefeuille, nous approximons souvent le modèle individuel par un modèle collectif utilisant la loi de Poisson composée. Le modèle collectif du risque est quant à lui mieux adapté à la modélisation des risques en assurance automobile ou en assurance de dommages.

1.2 Importance du contexte économique

Le modèle collectif « classique » du risque ne tient pas compte du contexte économique, dont entre autres du taux d'intérêt et de l'inflation. Cette hypothèse apparaît très peu réaliste sauf peut-être sur une courte période de temps, pour des assurances à court terme.

L'inflation peut avoir un impact significatif sur les montants assurés. Les pays développés ont pu maintenir un taux d'inflation inférieur à 5% ces vingt dernières années, mais les périodes de haute inflation peuvent réapparaître périodiquement dans tout marché comme ce fut le cas récemment où le contexte économique a été caractérisé par une envolée remarquable des cours du pétrole et des produits agricoles. L'inflation est un problème encore plus important dans les économies des pays en voie de développement où le taux d'inflation dépasse souvent les 10%. Les compagnies d'assurances doivent connaître l'effet de l'inflation sur le montant total de leur engagement quand elles calculent les primes ou les réserves.

Dans une certaine mesure, l'inflation peut annuler les intérêts sur les réserves investies. Cela explique en partie pourquoi, pendant longtemps, les modèles classiques de risque n'ont pas tenu compte de l'inflation et de l'intérêt.

Le taux d'intérêt d'un prêt ou d'un emprunt est le pourcentage, calculé selon des conventions prédéfinies, qui mesure d'une manière systématique, sur une période donnée, la rentabilité pour le prêteur ou le coût pour l'emprunteur de l'échéancier de flux financiers du prêt ou de l'emprunt.

La notion de taux d'intérêt s'applique à priori à toutes les opérations où l'une des parties contractantes s'endette, y compris à des instruments financiers qu'on décrit généralement par convention comme des produits d'épargne (compte d'épargne, obligation, etc.). Elle s'applique également à postériori ou par comparaison à tous les instruments financiers et investissements, pour en mesurer la rentabilité relative ou absolue. Cette notion de taux d'intérêt occupe donc une place centrale dans le fonctionnement des économies modernes.

Les deux grandes écoles de pensées en économie, que sont les néoclassiques et les keynésiens, définissent différemment le taux d'intérêt.

Pierre-Alain Muet (1979) dans un article de la revue, *Revue économique* intitulée *« Les modèles « néoclassiques » et l'impact du taux d'intérêt sur l'investissement : un essai de synthèse »*, définit le taux d'intérêt comme la rémunération de l'abstinence : celui qui prête renonce à une consommation immédiate pour épargner. Le taux d'intérêt devient le prix du temps, la récompense de l'attente.

Pour Keynes (1936), dans son œuvre majeure intitulée *« La théorie générale de l'emploi, de l'intérêt et de la monnaie»*, définit le taux d'intérêt comme la récompense de la renonciation à la liquidité. « Il mesure la répugnance des détenteurs de monnaie à aliéner leur droit d'en disposer à tout moment ». Il conduit les agents à arbitrer entre actifs liquides (généralement préférés) ou placés (contre rémunération).

1.2.1 Un bref rappel sur les modèles de taux d'intérêt.

En théorie du risque, le taux d'intérêt constant a longtemps été utilisé en raison de la simplicité des résultats qu'il induit. À ce jour très peu de résultats ont été obtenus pour des taux d'intérêt déterministes autres que pour le taux constant. Certains modèles de taux déterministes ou stochastiques pourraient bien être plus conformes à la réalité économique.

En finance, depuis les années 1970, on utilise essentiellement les taux stochastiques. Les modèles stochastiques des taux d'intérêts sont utilisés à deux fins essentielles:

- pour l'évaluation et la couverture de produits de taux délivrant des flux aléatoires dans le futur (par exemple, options de taux d'intérêt). Le vendeur d'option doit être capable de donner un prix au produit qu'il vend, mais surtout de répliquer (ou couvrir) l'option qu'il vend car il encourt une perte illimitée.
- pour la mise en place de l'analyse par scénario.

  Quand un gestionnaire de portefeuille met en place une stratégie, il a besoin de savoir ce qu'il va gagner dans le scénario de la courbe des taux qu'il anticipe. Pour cela, il a besoin de mettre en place un outil qui lui permet d'envisager tous les scénarios possibles de déformation de la courbe des taux. Mais comme il n'est pas sûr que son scénario se réalise, il a aussi besoin de mesurer le risque qu'il prend si ce scénario ne se réalise pas dans les faits.

  La construction d'une analyse par scénario se déroule en trois étapes:

  - On accumule dans un premier temps un maximum d'informations concernant le contexte macro-économique, la politique en termes de taux d'intérêt à court terme des banques centrales, l'avis d'experts, des études économétriques sur des variables financières clef, un travail réalisé en particulier par un service d'études économiques.
  - On fait la synthèse de toutes ces informations et on formule des anticipations sur un horizon de temps donné.
  - On traduit ces anticipations dans un modèle de taux d'intérêt réaliste.

La modélisation stochastique des taux d'intérêt a véritablement débuté avec le modèle de Black-Scholes-Merton. Ce sujet de recherche a été l'un des plus prolifiques au cours des vingt dernières années et a souvent rassemblé des mathématiciens, spécialistes des probabilités, et des habitués de la finance. Les plus grandes découvertes en matière de modélisation des taux d'intérêt datent des années 1990 avec le modèle de Heath, Jarrow et Merton (1992).

Dans ce qui suit, nous mettrons en relief deux exemples de taux que nous utiliserons dans nos exemples. L'utilisation de ces deux modèles est très répandue sur les marchés financiers et les formules sont généralement assez simples à manipuler.

1.2.1.1 Le modèle de Ho-Lee-Merton

Le processus de Ho-Lee-Merton est un modèle à court terme de la force d'intérêt qui ne possède pas la propriété de retour à la moyenne.

L'équation différentielle stochastique de ce modèle est donnée par :

$$d\delta(t) = r\,dt + \sigma\,dB(t) ,$$

avec dérive constante r et et coefficient de diffusion σ, et où $B(t)$ est un mouvement brownien standard.

1.2.1.2 Le modèle de Vasicek.

Un seul facteur est à l'origine des déformations de la courbe des taux. Ce facteur est le « taux court » dont les fluctuations sont régies par un mouvement brownien standard. Comme limitations de ces modèles à un facteur, nous pouvons citer :

- Certains modèles (Merton & Vasicek) autorisent les taux d'intérêt à devenir négatifs, cependant ce n'est pas une limitation si nous retranchons le taux d'inflation du taux d'intérêt.
- Incapacité à rendre compte de l'ensemble des formes de courbes de taux possibles sur le marché.
- Mauvais calibrage de ces modèles sur les données de marché (prix d'obligations). Il est fréquent d'observer des prix d'obligations reproduits par le modèle qui diffèrent de 1% ou plus des prix de marché.

Le « taux court » est modélisé sous la forme d'un processus obéissant à l'équation différentielle stochastique

$$d\delta(t) = \alpha\left[\beta - \delta(t)\right]dt + \sigma\,dB(t)$$

où $\delta(t)$ est la force d'intérêt nette au temps t , β est la moyenne à long terme du taux court, α est la vitesse de retour à la moyenne et $B(t)$ est le mouvement brownien standard. Cette modélisation permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne constatée sur les taux d'intérêt. Des valeurs élevées des taux ont tendance à être suivies plus fréquemment par des baisses que par des hausses. L'effet inverse est également constaté pour des niveaux de taux inhabituellement bas.

Lorsque $\delta(t)$ est éloigné de β, l'expression $\alpha\left[\beta-\delta(t)\right]$ est positive si $\delta(t)<\beta$. Dans ce cas, le taux court a tendance à augmenter, se rapprochant de la moyenne sur le long terme d'autant plus rapidement qu'il s'en est écarté et que le paramètre α est grand. À l'inverse, si $\delta(t)>\beta$, $\alpha\left[\beta-\delta(t)\right]$ est négative et $\delta(t)$ diminue dans le temps pour se rapprocher de β.

1.3 Problèmes importants

1.3.1 Calcul des moments

L'espérance mathématique du total des réclamations joue un rôle important dans la détermination de la prime pure, en plus de donner une mesure de la tendance centrale de sa distribution. Les moments centrés à la moyenne d'ordre 2, 3 et 4 sont les autres moments habituellement considérés, car ils donnent généralement une bonne indication de l'allure de la distribution, et ceux-ci nous donnent respectivement une mesure de la dispersion de la distribution autour de sa moyenne, une mesure de l'asymétrie et de l'aplatissement de la distribution considérée.

Les moments, qu'ils soient simples, conjoints ou conditionnels, peuvent éventuellement nous servir à construire des prédicteurs, des courbes de régression ou des approximations de la distribution du montant des réclamations.

Dans le modèle étudié par Léveillé et Garrido (2001b), des formules récursives pour le calcul des moments ont été obtenues. Rappelons les hypothèses de ce modèle :

(i) le processus du nombre des réclamations $\{N(t), t\geq 0\}$ forme un processus de renouvellement ordinaire et pour $k\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$:

- le temps où se produit la k-ième réclamation est représenté par la variable positive T_k , $k\in\mathbb{N}$.

- la variable positive représentant le temps entre deux réclamations successives est donnée par $\tau_k=T_k-T_{k-1}$, $k\in\mathbb{N}$, $T_0=0$, avec fonction de répartition commune F_{τ_1}.

(ii) la variable représentant le montant de la réclamation, sans inflation, est donnée par X_k, $k \in \mathbb{N}$, où :

- $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$ sont i.i.d.
- $\{X_k, \tau_k ; k \in \mathbb{N}\}$ sont mutuellement indépendants.
- la fonction génératrice des moments de X, M_X, existe sur $\Omega \subset \mathbb{R}$ contenant zéro,

(iii) la valeur totale escomptée au temps 0 du montant des réclamations sur la période $[0,t]$ est représentée par la variable aléatoire

$$Z(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\delta T_k} X_k ,$$

où $\delta > 0$ est une force d'intérêt nette, et $Z(t) = 0$ si $N(t) = 0$.

Le théorème suivant donne une relation de récurrence des moments de $Z(t)$.

Théorème 1

Pour $t \geq 0$, $\delta \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$E\left[Z^n(t)\right] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} E\left[X^{n-k}\right] \int_0^t e^{-n\delta v} E\left[Z^k(t-v)\right] dm(v),$$

où $m(t) = E\left[N(t)\right]$ est la fonction de renouvellement.

1.3.2 Fonction génératrice des moments

La fonction génératrice des moments de $Z(t)$, si elle existe, permet de calculer tous les moments de $Z(t)$ et dans certains cas, après inversion, de trouver la fonction de répartition de $Z(t)$. Ainsi nous reproduisons dans cette section, sans démonstrations, quelques théorèmes donnant des équations intégrales pour la fonction génératrice des moments de $Z(t)$.

Ces résultats seront généralisés, dans le dernier chapitre de cette thèse, à une force d'intérêt déterministe plus générale et, dans une moindre mesure, à une force d'intérêt stochastique. Les méthodes utilisée seront essentiellement basées sur les résultats de Léveillé, Garrido et Wang (2010) et sur un lemme donnant la distribution conjointe conditionnelle des temps où se produisent les réclamations connaissant leur nombre dans l'intervalle $[0,t]$.

Théorème 1.1

Pour $t \geq 0$, $\delta \geq 0$ et $s \in \Omega \subset \mathbb{R}$, l'expression de la fonction génératrice des moments, pour un processus de renouvellement ordinaire, est donnée par :

$$M_{Z(t)}(s) = \bar{F}_{\tau_1}(t) + \int_0^t M_X\left(se^{-\delta v}\right) M_{Z(t-v)}\left(se^{-\delta v}\right) dF_{\tau_1}(v) .$$

Pour la démonstration, voir Léveillé et Garrido (2001b).

Le théorème suivant donne une expression équivalente pour la fonction génératrice des moments de $Z(t)$.

Théorème 1.2

Pour $t \geq 0$, $\delta \geq 0$ et $s \in \Omega \subset \mathbb{R}$, l'expression de la fonction génératrice des moments, pour un processus de renouvellement ordinaire, est donnée par :

$$M_{Z(t)}(s) = 1 + \int_0^t \left[M_X\left(se^{-\delta v}\right) - 1 \right] M_{Z(t-v)}\left(se^{-\delta v}\right) dm(v) .$$

Pour la démonstration, voir Léveillé, Garrido et Wang (2010).

Nous reproduisons les deux prochains théorèmes pour obtenir une expression analytique de la fonction génératrice des moments de $Z(t)$, exprimée en terme d'intégrales.

Théorème 1.3

Pour $t \geq 0$, $\delta \geq 0$ et $s \in \Omega \subset \mathbb{R}$, l'expression de la fonction génératrice des moments, pour un processus de renouvellement ordinaire, est donnée par :

$$M_{Z(t)}(s) = \bar{F}_{\tau_1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^{t-\sum_{i=1}^{k} x_i} \prod_{i=1}^{k+1} M_X\left(se^{-\delta \sum_{j=1}^{i} x_j} \right) \bar{F}_{\tau_1}\left(t - \sum_{i=1}^{k+1} x_i \right) dF_{\tau_1}(x_{k+1}) \dots dF_{\tau_1}(x_1) .$$

Pour la démonstration, voir Léveillé, Garrido et Wang (2010).

Théorème 1.4

Pour $t \geq 0$, $\delta \geq 0$ et $s \in \Omega \subset \mathbb{R}$, l'expression de la fonction génératrice des moments, pour un processus de renouvellement ordinaire, est donnée par :

$$M_{Z(t)}(s) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^{t-\sum_{i=1}^{k} x_i} \prod_{i=1}^{k+1} \left[M_X\left(se^{-\delta \sum_{j=1}^{i} x_j} \right) - 1 \right] dm(x_{k+1}) \dots dm(x_1) .$$

Pour la démonstration, voir Léveillé, Garrido et Wang (2010).

1.3.3 Distributions

1.3.3.1 Cas où la fonction génératrice des moments existe

Si la fonction génératrice des moments de $Z(t)$ existe, il est parfois possible d'inverser celle-ci afin de trouver la distribution de $Z(t)$. Ce sera le cas pour les temps des réclamations appartenant à la famille des distributions Phase-type, dans laquelle nous retrouvons entre autres les distributions Erlang pour lesquelles les transformées de Laplace sont rationnelles.

Exemple 1 :

Si $\{N(t),\, t \geq 0\}$ suit un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors pour $t \geq 0$, $\delta \geq 0$ et $s \in \Omega \subset \mathbb{R}$,

$$M_{Z(t)}(s) = \exp\left\{\lambda \int_0^t \left[M_X\left(se^{-\delta v}\right) - 1\right] dv\right\}.$$

De plus, si $X \sim \exp(\theta)$, $\theta > 0$, alors

$$M_{Z(t)}(s) = \left[\frac{\theta - se^{-\delta t}}{\theta - s}\right]^{\frac{\lambda}{\delta}}.$$

Exemple 2 : (Une généralisation de l'exemple précédent…)

Si $\{N(t),\, t \geq 0\}$ suit un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et le montant des réclamations a une distribution hyper-exponentielle de paramètres $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$ et de coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, alors pour tout $\mathrm{t} > 0$, $\delta > 0$ et $s < \lambda_1$,

$$M_{Z(t)}(s) = \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{\lambda_k - se^{-\delta t}}{\lambda_k - s}\right]^{\frac{\lambda \alpha_i}{\delta}},$$

que nous reconnaissons comme la f.g.m. d'une convolution de distributions binomiale négative-exponentielle (voir Léveillé, Garrido et Wang, 2010).

1.3.3.2 Cas où la fonction génératrice des moments n'existe pas

Dans le cas où la fonction génératrice des moments de $Z(t)$ n'existe pas, Léveillé (2002) a proposé une expression pour la fonction de répartition de $Z(t)$. Même si cette méthode présente une alternative intéressante, elle ne sera pas toutefois généralisée dans cette thèse et nous nous contenterons de ne signaler que deux résultats liés à cette méthode.

Théorème 1.5

Pour $t \geq 0$, $\delta \geq 0$ et $s \in \Omega \subset \mathbb{R}$, l'expression de la fonction de répartition de $Z(t)$, pour un processus de renouvellement ordinaire, est donnée par :

$$F_{Z(t)}(s) = \overline{F}_{\tau_1}(t) + \int_0^t F_{Z(t-v)} * F_X\left(xe^{\delta v}\right) dF_{\tau_1}(v) .$$

Nous reproduisons le théorème suivant pour donner une expression analytique, en termes d'intégrales, de la fonction de répartition de $Z(t)$.

Théorème 1.6

Pour $t \geq 0$, $\delta \geq 0$ et $s \in \Omega \subset \mathbb{R}$, l'expression de la fonction de répartition de $Z(t)$, pour un processus de renouvellement ordinaire, est donnée par :

$$F_{Z(t)}(x) = \overline{F}_{\tau_1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \int_0^{x\exp\{\delta x_1\}} \ldots \int_0^{t-\sum_{i=1}^{k} x_i} \int_0^{x\exp\left\{\delta \sum_{j=1}^{k+1} x_j\right\} - \sum_{i=1}^{k} y_i \exp\left\{\delta \sum_{j=i+1}^{k+1} x_j\right\}} \overline{F}_{\tau_1}\left(t - \sum_{i=1}^{k+1} x_i\right) \times$$
$$dF_X(y_{k+1})\, dF_{\tau_1}(x_{k+1}) \ldots dF_X(y_1)\, dF_{\tau_1}(x_1).$$

La formule ci-dessus, obtenue à partir du théorème précédent, peut aussi nous permettre de trouver des bornes pour cette dernière. Ces bornes peuvent nous être utiles quand l'inverse de la fonction génératrice des moments de $Z(t)$ est difficile à trouver.

1.3.4 La probabilité de ruine

La « ruine » en actuariat est entraînée par une perte qui dépasse les réserves disponibles et rend l'assureur insolvable au sens de la réglementation qui lui est imposée.

Pour calculer la probabilité de ruine de l'assureur, c'est-à-dire la probabilité que les primes et les réserves soient insuffisantes pour couvrir les déboursés consécutifs aux risques couverts, nous trouvons dans la littérature actuarielle plusieurs techniques.

Dans le cas où le nombre des réclamations sur une année suit une loi Poisson de paramètre λ et où la sévérité des réclamations suit une loi exponentielle, certains auteurs, dont Teugels (1995), ont trouvé une expression explicite de la probabilité de ruine. Il y a aussi différents algorithmes, dont le célèbre algorithme de Panjer (1981), qui ont permis d'évaluer ou d'approximer la probabilité de ruine.

Il y a également l'inégalité de Lundberg qui donne une borne supérieure de la probabilité de ruine dans un contexte sans taux d'intérêt, borne qui a été généralisée par Jun Cai (2003) au modèle de Sparre Andersen et auquel il a ajouté une force d'intérêt constante. Ce sera cette borne sur laquelle nous nous concentrerons dans le dernier chapitre afin de l'étendre à une force d'intérêt stochastique.

1.4 Objectifs de la thèse

Cette thèse a pour objectif essentiel d'étendre les résultats obtenus par Léveillé et Garrido (2001a, 2001b) et Léveillé, Garrido et Wang (2010) sur les moments, la fonction génératrice des moments et la distribution des sommes de renouvellement escomptées, résultats obtenus pour une force d'intérêt constante.

Nous considérerons donc un modèle de taux d'intérêt plus général, et éventuellement stochastique, plus conforme à la réalité économique. Afin d'obtenir plusieurs des caractéristiques liées à la distribution de $Z(t)$, nous développerons un outil important qui donnera la distribution conjointe conditionnelle des temps d'arrivée des réclamations, connaissant leur nombre dans $[0,t]$. Des équations intégrales de la fonction génératrice des moments simples et conjoints seront obtenues, pour une force d'intérêt déterministe et, dans une moindre mesure, pour une force d'intérêt stochastique. Des formules explicites seront ainsi déduites pour les moments simples et conjoints d'ordre n, et plusieurs expressions seront obtenues pour la f.g.m. et la distribution de $Z(t)$ dans quelques cas particuliers.

Nous présenterons au dernier chapitre quelques autres considérations telles que la question des prédicteurs et l'obtention d'une borne pour la probabilité de ruine dans le cas d'un taux d'intérêt stochastique. Ce modèle des sommes de renouvellement escomptées, tel que développé avec une force d'intérêt générale, pourra ainsi mieux s'adapter à beaucoup de produits actuariels tels l'assurance automobile, l'assurance habitation, le risque de crédit, etc .

Chapitre 2
DU MODÈLE CLASSIQUE AU MODÈLE ESCOMPTÉ

Le fait de ne pas tenir compte du contexte économique, dont entre autres de l'intérêt sur les réserves et de l'inflation sur les coûts des réclamations, est très certainement peu conforme à la réalité. Dans la mesure où la tarification de plusieurs produits d'assurance se fait à plus long terme et que l'évaluation des réserves doit tenir compte du taux d'intérêt réel, le modèle « classique » du risque doit incorporer le plus possible les facteurs financiers qui affectent d'une manière sensible le produit d'assurance visé.

2.1 Modèle classique du risque

Dans le modèle classique du risque, nous considérons le portefeuille non pas sur une seule période de temps mais sur plusieurs périodes et le nombre de réclamations suit habituellement une loi de Poisson.

Ainsi, notons par $N(t)$ le nombre de réclamations qui touchent ce portefeuille sur l'intervalle de temps $[0,t]$ et par X_i le montant de la i-ième réclamation, $i \in \mathbb{N}$. Alors le montant total des réclamations dans la période $[0,t]$ sera noté par :

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i ,$$

où $S(t)=0$ si $N(t)=0$.

Ce modèle ne constitue qu'une première approche de notre portefeuille d'assurance. Une première extension naturelle du modèle classique serait de considérer une classe plus large pour la distribution de $N(t)$.

2.2 Le modèle de Sparre Andersen

Sparre Andersen (1957), dans un article présenté au Congrès international des actuaires à New York, a proposé une première généralisation du modèle classique du risque. En effet, au lieu de supposer que les temps entre deux réclamations successives sont des variables aléatoires indépendantes et suivent une même loi exponentielle, il a conservé l'hypothèse d'indépendance tout en permettant que le temps entre les réclamations ait une distribution autre qu'exponentielle. Ce modèle implique des calculs généralement plus compliqués que dans le cas du modèle de Poisson composé, mais celui-ci apparaît déjà plus général pour la modélisation de produits d'assurance.

2.3 Modèle des sommes de renouvellement escomptées avec force constante d'intérêt réel

Au modèle de Sparre Andersen a suivi, dans un premier temps, le modèle de Poisson composé escompté. Bien que ce modèle tienne compte du taux d'intérêt pour la modélisation de produits d'assurance, il demeure limité car il suppose que le temps entre deux réclamations successives suit une loi exponentielle et que la force d'intérêt est constante.

Le modèle de Poisson composé escompté continue toujours d'alimenter la littérature actuarielle car les calculs sont moins compliqués que ceux du modèle plus général des sommes de renouvellement escomptées avec force constante d'intérêt, dont les premiers travaux ont été menés par Léveillé et Garrido (2001a, 2001b). Mentionnons que ces derniers ont examiné ces sommes pour des processus de renouvellement ordinaire, retardé et stationnaire.

Les hypothèses du modèle de Léveillé et Garrido (2001a) sont les suivantes:

- Le processus du nombre de réclamations $\{N(t), t \geq 0\}$ ou $\{N_d(t), t \geq 0\}$ forme un processus de renouvellement ordinaire ou retardé. Le moment où se produit la k-ième réclamation est noté par T_k, avec $T_0 = 0$, le temps séparant les réclamations successives est noté par $\tau_k = T_k - T_{k-1}$, $k \geq 1$, avec distribution commune $F_{\tau_2} \neq F_{\tau_1}$ dans le cas d'un processus de renouvellement retardé.

- Nous supposons qu'il y a un effet de l'inflation sur les réclamations et que la force d'inflation agissant sur la sévérité des réclamations à un moment t est α_t. De plus, nous supposons que la force d'intérêt agissant à un moment t est β_t.

- Le montant de la k-ième réclamation, avec l'effet de l'inflation, est noté par Y_k et, sans inflation, par X_k tel que

$$X_k = e^{-A(T_k)} Y_k \ , \ A(t) = \int_0^t \alpha_u du \ , \ k \geq 1 \ .$$

Les variables X_k sont i.i.d. et indépendantes du processus de dénombrement. Nous supposons de plus que la f.g.m de X, M_X, existe sur $\Omega \subset \mathbb{R}$ contenant le point 0.

- Le montant total des réclamations escomptées s'écrit donc respectivement, dans le cas d'un processus de renouvellement ordinaire ou retardé, comme suit :

$$Z(t)=\sum_{k=1}^{N(t)} e^{-B(T_k)}Y_k=\sum_{k=1}^{N(t)} e^{-C(T_k)}X_k \quad , \quad Z_d(t)=\sum_{k=1}^{N_d(t)} e^{-B(T_k)}Y_k=\sum_{k=1}^{N_d(t)} e^{-C(T_k)}X_k \quad , \quad t\geq 0,$$

où $C(t)=B(t)-A(t)=\int_0^t(\beta_s-\alpha_s)ds=\int_0^t\delta_s ds$, pour tout $t\geq 0$.

Si nous supposons que $\beta_s-\alpha_s=\delta_s=\delta>0$, alors le montant escompté à $t=0$ du total des réclamations devient (respectivement) :

$$Z(t)=\sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\delta T_k}X_k \quad , \quad Z_d(t)=\sum_{k=1}^{N_d(t)} e^{-\delta T_k}X_k \quad , \quad t\geq 0 \tag{3.1}$$

où $Z(t)=Z_d(t)=0$ si $N(t)=N_d(t)=0$.

2.3.1 Moments

Il est souvent plus facile de calculer les moments d'une variable aléatoire que de trouver sa distribution. Dans Léveillé, Garrido et Wang (2010), les expressions obtenues pour la fonction de répartition dans le modèle de renouvellement escompté ne sont guère simples. On pourrait alors penser à approximer cette fonction de répartition par une autre dont on aurait à estimer les paramètres, par exemple par la méthode des moments, ou encore construire des prédicteurs ou des courbes de régression associées à $Z(t)$.

2.3.1.1 Deux premiers moments

Puisqu'il est primordial d'évaluer la moyenne et la variance de la valeur présente associée à notre processus de risque, les lemmes qui suivent nous donneront les outils de base pour le calcul des deux premiers moments de $Z(t)$. Nous reproduisons ici les démonstrations de Léveillé et Garrido (2001a), dans le cas du renouvellement ordinaire, puis nous ne mentionnons que les résultats obtenus dans le cas retardé. Par cela, nous voulons indiquer que nous utiliserons ultérieurement une démarche distincte afin d'obtenir des résultats analogues sur ces deux premiers moments, ceci étant imposé par la présence d'une force d'intérêt plus générale.

Lemme 2.1

Considérons la fonction $H_\delta(t)=\int_0^t e^{-\delta v}\,d\,F_{\tau_1}(v)$, associée au processus de renouvellement ordinaire. Alors, pour tout $t\geq 0$ et $\delta\geq 0$,

1. $H_\delta^{*k}(t)=\int_0^t e^{-\delta v}\,dF_{\tau_1}^{*k}(v)$, où $F_{\tau_1}^{*k}(v)=\int_0^v F_{\tau_1}^{*(k-1)}(u)\,dF_{\tau_1}(u)$ pour $k\in\mathbb{N}$,

2. $\sum_{k=1}^{\infty}H_\delta^{*k}(t)=\int_0^t e^{-\delta v}\,dm(v)$, où $m(t)=\sum_{k=1}^{\infty}F_{\tau_1}^{*k}(t)$ est la fonction de renouvellement.

Démonstration

Par définition, la formule est vraie pour $k=1$. Supposons l'identité vraie pour $k=n$, alors :

$$\begin{aligned}
H_\delta^{*(n+1)}(t)&=\int_0^t\int_0^{t-v} e^{-\delta(u+v)}\,dF_{\tau_1}^{*n}(u)\,dF_{\tau_1}(v)\\
&=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\delta(u+v)}1_{[0,t]}(u+v)\,dF_{\tau_1}^{*n}(u)\,dF_{\tau_1}(v)\\
&=\int_0^\infty e^{-\delta v}1_{[0,t]}(v)\,dF_{\tau_1}^{*(n+1)}(v)\\
&=\int_0^t e^{-\delta v}\,dF_{\tau_1}^{*(n+1)}(v)
\end{aligned}$$

Enfin, une sommation sur les $k\in\mathbb{N}$ donne :

$$\sum_{k=1}^{\infty}H_\delta^{*k}(t)=\int_0^t e^{-\delta v}\,dm(v).$$

Lemme 2.2

Pour $t\geq 0$, $\delta\geq 0$, et $s\in\Omega\subset\mathbb{R}$,

$$M_{Z(t)}(s)=\overline{F}_{\tau_1}(t)+\int_0^t M_X\left(se^{-\delta v}\right)M_{Z(t-v)}\left(se^{-\delta v}\right)dF_{\tau_1}(v)\ .$$

Démonstration

En conditionnant par rapport à $\Im_{N(t)+1}$, où $\Im_n = \sigma\{T_1,...,T_n\}$ est la plus petite sigma-algèbre générée par les temps d'arrivée des réclamations $T_1,...,T_n$, le calcul d'espérance usuel donne :

$$M_{Z(t)}(s) = E\left[e^{sZ(t)}\right] = E\left\{E\left[e^{sZ(t)} \middle| \Im_{N(t)+1}\right]\right\} = E\left[\prod_{i=1}^{N(t)} M_X\left(se^{-\delta T_i}\right)\right].$$

Enfin il suffit de conditionner la dernière expression par rapport à T_1 pour obtenir le résultat.

Théorème 2.1

Pour $t \geq 0$ et $\delta \geq 0$, l'expression du premier moment, pour un processus de renouvellement ordinaire, est donnée par :

$$E\left[Z(\mathrm{t})\right] = E[X_1]\int_0^t e^{-\delta v} dm(v) \quad .$$

Démonstration

En utilisant le lemme 2.1 et en conditionnant par rapport à T_1, nous avons :

$$\begin{aligned}
E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\delta T_k}\right] &= \int_0^t e^{-\delta s} dF_{\tau_1}(s) + \int_0^t e^{-\delta s} E\left[\sum_{k=1}^{N(t-s)} e^{-\delta T_k}\right] dF_{\tau_1}(s) \\
&= H_\delta(t) + E\left[\sum_{k=1}^{N(.)} e^{-\delta T_k}\right] * H_\delta(t) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} H_\delta^{*k}(t) \\
&= \int_0^t e^{-\delta v}\, dm(v) \quad .
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
E\left[Z(t)\right] &= E\left\{E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\delta T_k} X_k \middle| N(\mathrm{t})\right]\right\} \\
&= E[X_1] E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\delta T_k}\right] \\
&= E[X_1]\int_0^t e^{-\delta v} dm(v) \quad .
\end{aligned}$$

Théorème 2.2

Pour $t \geq 0$ et $\delta \geq 0$, l'expression du deuxième moment, pour un processus de renouvellement ordinaire est donnée par :

$$E\left[Z^2(t)\right] = E\left[X_1^2\right]\int_0^t e^{-2\delta v}\, dm(v) + 2E^2\left[X_1\right]\int_0^t\int_0^{t-v} e^{-\delta(2v+u)} dm(u)\, dm(v),$$

Démonstration

Nous avons :

$$E\left[Z^2(t)\right] = E\left\{E\left[\left(\sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\delta T_k} X_k\right)^2 \middle| N(t)\right]\right\}$$

$$= E\left\{E\left[\left(\sum_{k=1}^{N(t)} e^{-2\delta T_k} X_k^2 + \sum_{i=1}^{N(t)}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N(t)} e^{-\delta(T_i+T_j)} X_i X_j\right) \middle| N(t)\right]\right\}$$

$$= E\left[X_1^2\right] E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} e^{-2\delta T_k}\right] + E^2\left[X_1\right] E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N(t)} e^{-\delta(T_i+T_j)}\right]$$

En conditionnant par rapport à T_1, nous obtenons :

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N(t)} e^{-\delta(T_i+T_j)}\right] = 2\int_0^t e^{-2\delta s} E\left[\sum_{j=1}^{N(t-s)} e^{-\delta T_j}\right] dF_{\tau_1}(s) + \int_0^t e^{-2\delta s} E\left[\sum_{i=1}^{N(t-s)}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N(t-s)} e^{-\delta(T_i+T_j)}\right] dF_{\tau_1}(s)$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty} H_\delta^*(.) * H_{2\delta}(t) + E\left[\sum_{i=1}^{N(.)}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N(.)} e^{-\delta(T_i+T_j)}\right] * H_{2\delta}(t)$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} H_\delta^{*k}(.) * H_{2\delta}^{*n}(t)$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-v} e^{-2\delta v} e^{-\delta u} dF_{\tau_1}^{*k}(v)\, dF_{\tau_1}^{*n}(u)$$

$$= 2\int_0^t\int_0^{t-v} e^{-\delta(2v+u)} d\sum_{k=1}^{\infty} F_{\tau_1}^{*k}(v)\, d\sum_{n=1}^{\infty} F_{\tau_1}^{*n}(u)$$

$$= 2\int_0^t\int_0^{t-v} e^{-\delta(2v+u)} dm(v)\, dm(u)\ .$$

Pour les prochains théorèmes, qui traitent du renouvellement retardé et son cas particulier, le renouvellement stationnaire, nous allons simplement les énoncer car leurs démonstrations sont similaires aux précédentes.

Théorème 2.3

Pour $t \geq 0$ et $\delta \geq 0$, l'expression du premier moment, pour un processus de renouvellement retardé, est donnée par :

$$E\left[Z_d(t)\right] = E\left[X_1\right] \int_0^t e^{-\delta v}\, dm_d(v),$$

où $m_d(t) = E\left[N_d(t)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} F_{\tau_1} * F_{\tau_2}^{*k}(t)$.

Théorème 2.4

Pour $t \geq 0$ et $\delta \geq 0$, l'expression du deuxième moment, pour un processus de renouvellement retardé, est donnée par :

$$E\left[Z_d^2(t)\right] = E\left[X_1^2\right] \int_0^t e^{-2\delta v}\, dm_d(v) + 2E^2\left[X_1\right] \int_0^t \int_0^{t-v} e^{-\delta(2v+u)} dm_o(u)\, dm_d(v),$$

où $m_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{\tau_2}^{*k}(t)$.

2.3.1.2 Formule récursive pour les moments

D'après Léveillé et Garrido (2001b), nous avons pour le cas ordinaire :

Théorème 2.5

Pour $t \geq 0$, $\delta \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$M_{Z(t)}^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} E\left[X_1^{n-k}\right] \int_0^t e^{-n\delta v} M_{Z(t-v)}^{(k)}(0)\, dm(v). \tag{2.3.1}$$

Démonstration :

La dérivée d'ordre *n* par rapport à *s*, appliquée à l'expression obtenue au lemme 2.2, donne :

$$M_{Z(t)}^{(n)}(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \int_0^t M_X^{n-k}\left(se^{-\delta v}\right) e^{-n\delta v} M_{Z(t-v)}^{(k)}\left(se^{-n\delta v}\right) dF_{\tau_1}(v)$$
$$+ \int_0^t M_X\left(se^{-\delta v}\right) e^{-n\delta v} M_{Z(t-v)}^{(n)}\left(se^{-n\delta v}\right) dF_{\tau_1}(v).$$

En évaluant cette identité à $s=0$, en appliquant le théorème de renouvellement et le lemme 2.1, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
M_{Z(t)}^{(n)}(s) &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}E\left[X_1^{n-k}\right]\int_0^t e^{-n\delta v}M_{Z(t-v)}^{(n)}(0)\,dF_{\tau_1}(v)+\int_0^t e^{-n\delta v}M_{Z(t-v)}^{(n)}(0)\,dF_{\tau_1}(v) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}E\left[X_1^{n-k}\right]M_{Z(\cdot)}^{(k)}(0)*H_{n\delta}(t)+M_{Z(\cdot)}^{(n)}(0)*H_{n\delta}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}E\left[X_1^{n-k}\right]M_{Z(\cdot)}^{(k)}(0)*\sum_{i=1}^{\infty}H_{n\delta}^{*i}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}E\left[X_1^{n-k}\right]\int_0^t e^{-n\delta v}M_{Z(t-v)}^{(k)}(0)\,dm(v)\,.
\end{aligned}$$

Le prochain lemme et le prochain théorème traitent des moments asymptotiques des sommes de renouvellement escomptées pour le cas ordinaire. Enfin, des formules récursives pour les moments sont aussi présentées pour les cas retardé et stationnaire, pour un temps fini et infini.

Lemme 2.3

Soit $\delta, \delta' > 0$ et L_{τ_1} la transformée de Laplace associé à τ_1. Alors,

1. $\lim_{t\to\infty} H_\delta * H_{\delta'}(t) = H_\delta * H_{\delta'}(\infty) = L_{\tau_1}(\delta)L_{\tau_1}(\delta')$,

2. $\sum_{i=1}^{\infty} H_{n\delta}^{*i}(\infty) = \int_0^{\infty} e^{-\delta v}dm(v) = \dfrac{L_{\tau_1}(\delta)}{1-L_{\tau_1}(\delta)}$.

Démonstration : Le résultat suit du lemme 2.1.

Théorème 2.6

Pour $\delta > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$M_{Z(\infty)}^{(n)}(0) = \frac{L_{\tau_1}(n\delta)}{1-L_{\tau_1}(n\delta)}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}E\left[X_1^{n-k}\right]M_{Z(\infty)}^{k}(0)\,.$$

Démonstration : Le résultat ci-dessus vient de l'application du lemme 2.3 au théorème 2.5.

Les résultats qui suivent donnent des formules récursives des moments dans le cas d'un processus de renouvellement retardé.

Théorème 2.7

Pour $t \geq 0$, $\delta \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$M_{Z_d(t)}^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} E\left[X_1^{n-k}\right] \int_0^t e^{-n\delta v} M_{Z_0(t-v)}^{(k)}(0)\, dm_d(v) \text{ ,}$$

où $Z_o(t)$ est le processus de risque associé au processus de renouvellement ordinaire sous-jacent (celui débutant avec τ_2).

Corollaire 2.1

Pour $\delta > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$M_{Z_d(\infty)}^{(n)}(0) = \frac{L_{\tau_1}(n\delta)}{1 - L_{\tau_2}(n\delta)} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} E\left[X_1^{n-k}\right] M_{Z(\infty)}^{(k)}(0) \text{ ,}$$

où $\dfrac{L_{\tau_1}(n\delta)}{1 - L_{\tau_2}(n\delta)} = \int_0^\infty e^{-n\delta v} dm_d(v)$.

Corollaire 2.2

Pour $t \geq 0$, $\delta \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, nous obtenons dans le cas d'un processus de renouvellement stationnaire:

$$M_{Z_s(t)}^{(n)}(0) = \gamma \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} E\left[X_1^{n-k}\right] \int_0^t e^{-n\delta v} M_{Z_0(t-v)}^{(k)}(0)\, dv,$$

où $E[\tau_2] = \gamma^{-1}$ et $Z_s(t)$ est le processus de risque associé à un processus de renouvellement stationnaire.

2.3.2 Fonction génératrice des moments

Dans Léveillé, Garrido et Wang (2010), plusieurs caractéristiques de la somme escomptée ont été trouvées dans des cas particuliers importants, dont la fonction génératrice des moments et la fonction de répartition de $Z(t)$.

Les deux premiers théorèmes qui suivent nous permettent d'obtenir d'une part une équation de « quasi-renouvellement » pour la fonction génératrice des moments et d'autre part une équation intégrale de la f.g.m. Pour démontrer le premier théorème, ils ont utilisé des techniques de renouvellement. La démonstration du deuxième théorème s'est appuyée quant à elle sur une application successive du lemme 2.2.

Théorème 2.8

Pour $t \geq 0$, $\delta \geq 0$ et $s \in \Omega \subset \mathbb{R}$, l'expression de la fonction génératrice des moments, pour un processus de renouvellement ordinaire, est donnée par :

$$M_{Z(t)}(s) = 1 + \int_0^t \left[M_X\left(se^{-\delta v}\right) - 1 \right] M_{Z(t-v)}\left(se^{-\delta v}\right) dm(v).$$

Démonstration :

Le résultat suit en insérant l'équation (2.3.1) dans la série de MacLaurin de $M_{Z(t)}(s)$.

Théorème 2.9

Pour $t \geq 0$, $\delta \geq 0$ et $s \in \Omega \subset \mathbb{R}$, l'expression de la fonction génératrice des moments, pour un processus de renouvellement ordinaire, est donnée par :

$$M_{Z(t)}(s) = \bar{F}_{\tau_1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^{t-\sum_{i=1}^{k} x_i} \prod_{i=1}^{k+1} M_X\left(se^{-\delta \sum_{i=1}^{k} x_i} \right) \bar{F}_{\tau_1}\left(t - \sum_{i=1}^{k} x_i \right) dF_{\tau_1}(x_{k+1}) \dots dF_{\tau_1}(x_1).$$

Démonstration

Nous appliquons le lemme 2.2 de manière successive.

Remarque : Le théorème précédent peut être réécrit sous la forme suivante

$$M_{Z(t)}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(t,s),$$

où $H_k(t,s) = \int_0^t \left[M_X\left(se^{-\delta v}\right) \right] H_{k-1}\left(t-v, se^{-\delta v}\right) dF_{\tau_1}(v)$, $H_0(t,s) = \bar{F}_{\tau_1}(t)$.

Théorème 2.10

Pour $t \geq 0$, $\delta \geq 0$ et $s \in \Omega \subset \mathbb{R}$, l'expression de la fonction génératrice des moments, pour un processus de renouvellement ordinaire, est donnée par :

$$M_{Z(t)}(s) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^{t-\sum_{i=1}^{k} x_i} \prod_{i=1}^{k+1} \left[M_X\left(se^{-\delta \sum_{i=1}^{k} x_i} \right) - 1 \right] dm(x_{k+1}) \dots dm(x_1)$$

Démonstration

Nous appliquons le théorème 2.8 de manière successive.

Remarque : Le théorème précédent peut être réécrit sous la forme suivante

$$M_{Z(t)}(s)=\sum_{k=0}^{\infty} I_k(t,s),$$

où $I_k(t,s)=\int_0^t \left[M_X\left(se^{-\delta v}\right)-1\right] I_{k-1}\left(t-v, se^{-\delta v}\right) dm(v)$, $I_0(t,s)=1$.

2.3.3 Distributions

Si la fonction génératrice des moments de $Z(t)$ existe, il est possible d'inverser celle-ci dans plusieurs situations afin de trouver la distribution de $Z(t)$. Voyons un exemple non trivial de cette situation, présentée dans Léveillé, Garrido et Wang (2010).

Exemple 1 :

Supposons que le temps entre deux réclamations successives suit une Erlang(2, 0.01), que le montant des sinistres suit une loi exponentielle de paramètre $\theta=1$ et que $\delta=0.01$. Alors, pour $t\geq 0$ et $s\in\Omega\subset\mathbb{R}$, nous avons :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_{Z(t)}(s)=a_1(t,s)\frac{\partial}{\partial t} M_{Z(t)}(s)+a_0(t,s)M_{Z(t)}(s),$$

où,

$$M_{Z(0)}(s)=1, \quad \frac{\partial}{\partial t} M_{Z(t)}(s)|_{t=0}=0,$$

$$a_0(t,s)=\frac{0.0001\times se^{-0.01}}{1-se^{-0.01}} \quad , \quad a_1(t,s)=\frac{0.01\left(2se^{-0.01}-3\right)}{1-se^{-0.01}}$$

Alors, avec l'aide du logiciel « Maple », nous obtenons pour $s<1$, l'expression suivante :

$$M_{Z(t)}(s)=\frac{1}{s^2}\left\{(s-1)\left[se^{-0.01t}-2\right]\ln\left[\frac{1-s}{1-se^{-0.01t}}\right]+se^{-0.01t}(s-2)+2s\right\},$$

une f.g.m qui peut être inversée pour donner la «sous» densité de probabilité suivante :

$$f_{Z(t)}(x)=\left\{\begin{array}{l}\left[2(x+1)+e^{-0.01t}\right]\left[E_1(x)-E_1\left(xe^{-0.01t}\right)\right] \\ \qquad -2\left[e^{-x}-e^{-0.01t-e^{-0.01t}x}\right]-e^{-0.01t}x^{-1}\left[e^{-x}-e^{-e^{0.01t}x}\right]\end{array}\right\} 1_{]0,\infty[}(x),$$

où $E_1(x)=\int_x^{\infty} v^{-1}e^{-v}dv$ est la fonction exponentielle intégrale usuelle (voir Abramowitz et Stegun (1969)).

Dans le chapitre qui suit, nous proposons des formules explicites de la distribution conjointe conditionnelle du temps d'arrivée des réclamations connaissant leur nombre dans un intervalle de temps donné, nous permettant ainsi de calculer les deux premiers moments simples et le moment conjoint simple de la somme escomptée avec une force d'intérêt générale. Ces mêmes formules nous serviront aussi à développer les moments simples et conjoints d'ordre supérieur, ainsi que des équations intégrales pour la f.g.m. de notre processus de risque.

Chapitre 3
LES PREMIERS MOMENTS DES SOMMES DE RENOUVELLEMENT ESCOMPTÉES

Léveillé et Garrido (2001b) ont obtenu des formules récursives pour les moments des sommes de renouvellement escomptées avec force d'intérêt constante. Plus récemment, Léveillé, Garrido et Wang (2010) ont obtenu des fonctions génératrices des moments et leurs inverses dans le cas où le temps entre les réclamations suivent une distribution phase-type.

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats sur les deux premiers moments simples et le premier moment conjoint de ce processus de risque, mais cette fois pour une force d'intérêt plus générale. Des exemples seront donnés dans le cas où le nombre des réclamations suit un processus de renouvellement Erlang.

3.1 Introduction

L'effet de la force réelle d'intérêt sur la valeur présente du processus de surplus fait toujours l'objet de plusieurs études, spécialement dans le contexte du renouvellement. Plusieurs auteurs comme Gerber (1971), Taylor (1979), Delbaen et Haezendonck (1987), Waters (1989), Sundt et Teugels (1995), Cai et Dickson (2001, 2003) ont travaillé sur la probabilité de ruine de la somme de renouvellement escomptée. D'autres comme Boogaert, Haezendonck et Delbaen (1988), Willmot (1989), Léveillé et Garrido (2001a, 2001b), Garrido et Léveillé (2004) et Léveillé, Garrido et Wang (2010) ont travaillé sur les moments et la distribution de ce processus de risque.

Dans le contexte des sommes de renouvellement escomptées, seule la force d'intérêt constante a été réellement considérée. Ainsi, dans ce chapitre, notre objectif est de généraliser le modèle précédent en considérant une force d'intérêt plus générale, ce qui nous donnera de nouveaux résultats pour les premiers moments, simples comme conjoints, pour ce processus plus réaliste.

Par conséquent, fixons les hypothèses de notre étude. Supposons que nous opérons dans un environnement économique où la force d'intérêt, de laquelle a été soustraite la force d'inflation, est un processus stochastique $\{\delta(t), t \geq 0\}$ tel que l'intégrale de chaque parcours échantillonnal a une valeur fini presque partout sur chaque intervalle de temps fini.

Définissons notre modèle de risque comme suit :

(i) Les processus du nombre de réclamations $\{N(t), t \geq 0\}$ et $\{N_d(t), t \geq 0\}$ représentent respectivement un processus de renouvellement ordinaire et un processus de renouvellement retardé et, pour $k \in \mathbb{N}$:

- le temps où se produit la k-ième réclamation est représenté par la variable T_k,
- la variable représentant le temps écoulé entre deux réclamations consécutives est donnée par $\tau_k = T_k - T_{k-1}, k \in \mathbb{N}$, et $T_0 = 0$.

(ii) La variable aléatoire représentant le montant (sans inflation) de la k-ième réclamation est donnée par X_k, et

- $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$ sont i.i.d,
- $\{X_k, \tau_k ; k \in \mathbb{N}\}$ sont mutuellement indépendantes.
- les deux premiers moments de X_1 existent.

(iii) La valeur totale escomptée au temps 0 du montant des réclamations sur la période $[0, t]$ est notée respectivement, pour le cas ordinaire et retardé, par

$$Z(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} D(T_k) X_k \quad , \quad Z_d(t) = \sum_{k=1}^{N_d(t)} D(T_k) X_k \ ,$$

où $Z(t) = Z_d(t) = 0$ si $N(t) = N_d(t) = 0$, $D(T_k) = e^{-I(T_k)}$ et $I(T_k) = \int_0^{T_k} \delta(x) dx$.

En se basant sur ces hypothèses, nous présentons à la section 3.2 quelques résultats sur le premier moment de la somme escomptée de ce processus de risque, pour une force d'intérêt déterministe et stochastique. À la section 3.3, nous présentons le même genre de résultat mais pour le moment d'ordre 2. À la section 3.4, nous examinons le moment conjoint d'ordre 2, d'abord pour une force d'intérêt constante et ensuite pour une force d'intérêt stochastique. Dans les sections 3.2 et 3.3, des exemples sont donnés pour les cas où le temps entre deux réclamations successives suit une loi exponentielle et Erlang($2, \lambda$). Dans la section 3.4, des exemples sont donnés uniquement pour le cas Poisson. La conclusion suit à la section 3.5.

3.2 Premier moment

3.2.1 Cas d'une force d'intérêt déterministe

Le premier moment d'un processus de renouvellement composé escompté a été considéré pour la première fois par Léveillé & Garrido (2001a), pour une force d'intérêt constante δ. Ces derniers ont utilisé essentiellement des techniques de renouvellement pour obtenir leur formule.

Pour le cas du renouvellement ordinaire, le premier moment de $Z(t)$ est obtenu pour un temps fini et infini:

$$E[Z(t)] = E[X_1]\int_0^t e^{-\delta v} dm(v) \quad , \quad E[Z(\infty)] = E[X_1]\frac{L_{\tau_1}(\delta)}{1 - L_{\tau_1}(\delta)} . \tag{3.2.1}$$

Pour le cas du renouvellement retardé (et stationnaire), des formules similaires sont aussi obtenues:

$$E[Z_d(t)] = E[X_1]\int_0^t e^{-\delta v} dm_d(v) \quad , \quad E[Z_d(\infty)] = E[X_1]\frac{L_{\tau_1}(\delta)}{1 - L_{\tau_2}(\delta)} , \tag{3.2.2}$$

La question que nous nous posons maintenant est la suivante: pouvons-nous obtenir une formule similaire dans le cas où la force d'intérêt est plus générale? La réponse est oui, mais cette fois-ci les techniques de renouvellement ne peuvent être utilisées, ceci justement à cause de la forme plus générale du facteur d'actualisation. Nous avons donc besoin préalablement d'un lemme afin d'obtenir l'espérance de ce modèle dont la force d'intérêt est plus réaliste.

Lemme 3.1

Considérons un processus de renouvellement ordinaire ou retardé, tel que donné dans la section 3.1. Alors, pour $0 < x \leq t$ et $k \leq n$, les fonctions de densité de probabilité conditionnelle $T_k \mid N(t) = n$ et $T_k \mid N_d(t) = n$ sont données respectivement par :

(1) Pour le cas ordinaire:

$$f_{T_k|N(t)}(x|n) = \frac{f_{T_k}(x) P(N(t-x) = n-k)}{P(N(t) = n)} . \tag{3.2.3}$$

(2) Pour le cas retardé:

$$f_{T_k|N_d(t)}(s|n) = \frac{f_{T_k}(s) P(N_o(t-s) = n-k)}{P(N_d(t) = n)} .$$

où $\{N_o(t), t \geq 0\}$ est le processus de renouvellement ordinaire sous-jacent.

Démonstration

Nous démontrons uniquement le cas ordinaire, la démonstration s'adaptant facilement pour le cas retardé. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\begin{aligned} P\left(T_k \le x \mid N(t)=n\right) &= \frac{P\left(N(t)=n,\, T_k \le x\right)}{P\left(N(t)=n\right)} \\ &= \frac{P\left(N(t)=n \mid T_k \le x\right) P\left(T_k \le x\right)}{P\left(N(t)=n\right)} \end{aligned} .$$

La dernière expression peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} P\left(T_k \le x \mid N(t)=n\right) &= \frac{\left\{\int_0^x P\left(N(t)=n \mid T_k \le x\,,\ T_k=v\right) f_{T_k \mid T_k \le x}(v)\, dv\right\} P\left(T_k \le x\right)}{P\left(N(t)=n\right)} \\ &= \frac{\int_0^x P\left(N(t)-N(v)=n\text{-}k \mid T_k=v\right) f_{T_k}(v)\, dv}{P(N(t)=n)} \end{aligned} .$$

Puisque,

$$P\left(N(t)-N(v)=n\text{-}k \mid T_k=v\right)=P\left(N(t-v)=n\text{-}k\right)$$

nous obtenons donc,

$$P\left(T_k \le x \mid N(t)=n\right)=\frac{\int_0^x P\left(N(t-v)=n-k\right)\, f_{T_k}(v)\, dv}{P(N(t)=n)} ,$$

d'où le résultat (3.2.3).

Théorème 3.1 :

Avec les hypothèses de la section 3.1, le premier moment de la somme de renouvellement escomptée est donné, pour $t>0$ et pour une force d'intérêt déterministe, par:

(1) Pour le cas de renouvellement ordinaire:

$$E[Z(t)]=E[X_1]\int_0^t D(v)\, dm(v) . \tag{3.2.4}$$

(2) Pour le cas de renouvellement retardé:

$$E[Z_d(t)]=E[X_1]\int_0^t D(v)\, dm_d(v) . \tag{3.2.5}$$

Démonstration

De nouveau, il sera suffisant de démontrer le résultat pour le cas du renouvellement ordinaire. Ainsi, en tenant compte de l'équation (3.2.3) du lemme 3.1, en conditionnant sur $N(t)$ et en utilisant l'hypothèse d'indépendance entre le nombre et la sévérité des réclamations, nous obtenons :

$$E\left[Z(t)\middle|N(t)=n\right]=E[X_1]\sum_{k=1}^{n}\int_0^t D(v)\,f_{T_k|N(t)=n}(v)\,dv$$

$$=\frac{E[X_1]\sum_{k=1}^{n}\int_0^t D(v)\,f_{T_k}(v)P(N(t-v)=n-k)dv}{P(N(t)=n)}\ .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}E\left[Z(t)\right]&=E\left[E\left[Z(t)\,|\,N(t)=n\right]\right]\\&=E[X_1]\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_0^t D(v)\,f_{T_k}(v)P(N(t-v)=n-k)dv\\&=E[X_1]\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t D(v)\,f_{T_k}(v)\sum_{n=k}^{\infty}P(N(t-v)=n-k)\,dv\\&=E[X_1]\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t D(v)\,f_{T_k}(v)dv\\&=E[X_1]\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t D(v)\,dF_{T_k}(v)\\&=E[X_1]\int_0^t D(v)\,d\sum_{k=1}^{\infty}F_{\tau_1}^{*k}(v)\\&=E[X_1]\int_0^t D(v)\,dm(v)\ .\end{aligned}$$

Corollaire 3.1

La formule asymptotique du premier moment de la somme de renouvellement escomptée pour le cas d'un processus ordinaire (et retardé) est donnée par :

$$E[Z(\infty)]=E[X_1]\sum_{k=1}^{\infty}L_{I(T_k)}(1)\ . \qquad (3.2.6)$$

Démonstration

La preuve suit directement des équations (3.2.4) ou (3.2.5).

Remarque 3.1

(1) Le théorème 3.2.1 présente une démonstration alternative à celle donnée dans Léveillé et Garrido (2001a) pour le premier moment avec une force d'intérêt constante.

(2) Quand $I(T_k) = \delta T_k$, nous obtenons les formules (3.2.1) et (3.2.2) de l'équation (3.2.6).

Exemple 3.1

Supposons que la force d'intérêt soit de la forme

$$\delta(t) = \delta_1 1_{[1,2[}(t) + \delta_2 1_{[2,3[}(t) + \delta_3 1_{[3,\infty[}(t), \text{ où } \delta_i > 0,\ i = 1, 2, 3.$$

Alors, de l'équation (3.2.4), nous avons :

$$E[Z(t)] = E[X_1] \int_0^t \exp\left\{-\int_0^v \left[\delta_1 1_{]0,1[}(x) + \delta_2 1_{]1,2[}(x) + \delta_3 1_{]2,\infty[}(x)\right] dx\right\} dm(v) . \quad (3.2.7)$$

Si nous supposons que $\tau_1 \sim \exp(\lambda)$, alors

$$\begin{aligned} E[Z(t)] = \lambda E[X_1] \Bigg\{ & \frac{1-e^{-\delta_1}}{\delta_1} 1_{]0,1]}(t) + \frac{1-e^{-\delta_1 t}}{\delta_1} 1_{]1,\infty[}(t) \\ & + e^{\delta_2 - \delta_1} \left[\frac{e^{-\delta_2} - e^{-\delta_2 t}}{\delta_2} 1_{]1,2]}(t) + \frac{e^{-\delta_2} - e^{-2\delta_2}}{\delta_2} 1_{]2,\infty[}(t) \right] \\ & + e^{2\delta_3 - \delta_2 - \delta_1} \frac{e^{-2\delta_3} - e^{-\delta_3 t}}{\delta_3} 1_{]2,\infty[}(t) \Bigg\} \end{aligned}$$

et,

$$E[Z(\infty)] = \lambda E[X_1] \left\{ \frac{1-e^{-\delta_1}}{\delta_1} + \frac{e^{-\delta_1} - e^{-\delta_2 - \delta_1}}{\delta_2} + \frac{e^{-\delta_2 - \delta_1}}{\delta_3} \right\} .$$

Quand $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3$, nous retrouvons de l'équation (3.2.7) les formules obtenues par Léveillé et Garrido (2001a) lorsque le processus du nombre de réclamations est un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, avec force d'intérêt constante $\delta > 0$:

$$E[Z(t)] = \lambda E[X_1] \frac{1-e^{-\delta t}}{\delta} \ , \ E[Z(\infty)] = \frac{\lambda E[X_1]}{\delta} .$$

Exemple 3.2

Supposons maintenant que la force d'intérêt soit de la forme $\delta(t) = a + b\sin(t)$, où $a > 0, b > 0$. Alors, de l'équation (3.2.5), nous avons :

$$E[Z_d(t)] = E[X_1] \int_0^t \exp\{-av - b\cos(v)\} dm_d(v) . \tag{3.2.8}$$

L'équation ci-dessus peut généralement être évaluée numériquement, à l'aide du logiciel ''Maple'' par exemple. Nous pouvons même utiliser les techniques des fonctions splines disponibles dans ce logiciel pour obtenir de bonnes approximations de la fonction donnant le premier moment.

Ce faisant considérons le cas particulier où le nombre de réclamations est un processus stationnaire tel que $\tau_2 \sim Erlang(2, \lambda)$, alors

$$E[Z_d(t)] = \frac{\lambda E[X_1]}{2} \int_0^t \exp\{-av - b\cos(v)\} dv .$$

De plus, si nous posons $\lambda = 2$, $E[X_1] = 1$, $a = 0.02$ et $b = 0.01$, alors le tableau suivant peut être obtenu:

Tableau 3.1 Premier moment de $Z_d(t)$ -- Cas déterministe

t	10	100	500	1000	∞
$E[Z_d(t)]$	9.067813450	43.23482375	49.99878036	50.00105011	50.00105021

Quand $a = \delta$ et $b = 0$, nous retrouvons également de l'équation (3.2.8) les formules obtenues par Léveillé et Garrido (2001a) pour le processus du nombre des réclamations stationnaire Erlang(2, λ) :

$$E[Z_d(t)] = \lambda E[X_1] \frac{1 - e^{-\delta t}}{2\delta} \quad , \quad E[Z_d(\infty)] = \frac{\lambda E[X_1]}{2\delta} .$$

Remarque 3.2

(1) Nous pouvons facilement généraliser le résultat obtenu dans l'exemple 3.2.1 en considérant des fonctions en escalier avec plus d'intervalles.

(2) Nous pouvons même utiliser ces fonctions en escalier pour approximer de manière assez convenable n'importe quelles fonctions $\delta(t)$; car toute fonction continue sur un segment est la limite uniforme de fonctions en escalier. De fait, plusieurs méthodes

numériques sont également disponibles pour de telles approximations mais elles doivent être utilisées assez prudemment surtout pour de petites valeurs de t, les valeurs escomptées des réclamations étant plus importantes près de 0.

3.2.2 Cas d'une force d'intérêt stochastique

Théorème 3.2 :

Selon les hypothèses de la section 3.1, le premier moment de la somme de renouvellement escomptée, dans le cas d'une force d'intérêt stochastique, est donné par :

(1) Pour le cas de renouvellement ordinaire :

$$E\left[Z(t)\right]=E\left[X_1\right]\int_0^t E\left[D(v)\right]\,dm(v)\ .$$

(2) Pour le cas de renouvellement retardé :

$$E\left[Z_d(t)\right]=E\left[X_1\right]\int_0^t E\left[D(v)\right]\,dm_d(v)\ .$$

Démonstration:

De nouveau, il sera suffisant de démontrer le résultat pour le cas du renouvellement ordinaire. Ainsi, en conditionnant sur $N(t)$ et en utilisant l'hypothèse d'indépendance entre le nombre et la sévérité des réclamations, nous obtenons :

$$\begin{aligned}E\left[Z(t)\mid N(t)=n\right]&=E\left[\sum_{k=1}^{n}D(T_k)X_k\mid N(t)=n\right]\\&=E\left[X_1\right]\sum_{k=1}^{n}E\left[D(T_k)\mid N(t)=n\right]\ .\end{aligned}$$

De l'équation (3.2.3) du lemme 3.1, nous obtenons pour chaque parcours échantiilonnal de la force d'intérêt $\delta(x)$:

$$\begin{aligned}E\left[Z(t)\middle|\,\delta(x),\,x\in[0,t]\right]&=E\left[E\left[Z(t)\middle|N(t),\delta(x),x\in[0,t]\right]\right]\\&=E\left[X_1\right]\int_0^t D(v)\,dm(v)\ .\end{aligned}$$

La dernière intégrale étant une variable aléatoire telle que $\int_0^t E\left[D(v)\right]dm(v)<\infty$, alors un théorème bien connu de la théorie des processus stochastiques (voir Karatzas and Shreve (1991), p. 3) nous permet d'écrire l'identité suivante :

$$
\begin{aligned}
E\left[Z(t)\right] &= E\left[E\left[Z(t)\,|\,\delta(x),\, x\in[0,t]\right]\right] \\
&= E\left[X_1\right] E\left[\int_0^t D(v)\; dm(v)\right] \\
&= E\left[X_1\right] \int_0^t E\left[D(v)\right]\, dm(v) \; .
\end{aligned}
$$

Remarque 3.3

(1) Quand la force d'intérêt est constante, nous obtenons assez aisément les formules (3.2.1) et (3.2.2) de l'équation (3.2.4) et (3.2.5).

(2) Dépendamment de la trajectoire suivie par la force d'intérêt nette, l'expression asymptotique du premier moment de la somme escomptée peut ne pas exister.

Exemple 3.2

Supposons que $\{\delta(t)\,,\, t\geq 0\}$ soit un processus d'Itô satisfaisant l'équation différentielle stochastique de Ho-Lee-Merton

$$
d\delta(t) = r\,dt + \sigma\, dB(t) \;,
$$

avec dérive constante r, coefficient de diffusion σ et où $B(t)$ est un mouvement Brownien standard (voir Oksendal (1992)).

Alors la solution analytique de l'équation ci-dessus est donnée par :

$$
\delta(t) = \delta(0) + rt + \sigma B(t) \; .
$$

Ainsi, nous avons:

$$
\int_0^t \delta(x)\, dx = \delta(0)\, t + r\frac{t^2}{2} + \sigma \int_0^t B(x)\, dx \; .
$$

De la formule d'intégration par parties d'Itô (voir Oksendal, p. 35), nous avons:

$$
\int_0^t B(x)\, dx = tB(t) - \int_0^t x\, dB(x) = \int_0^t (t-x)\; dB(x) \;,
$$

ce qui donne, par la définition et la propriété d'isométrie de l'intégrale d'Itô (voir Oksendal, p.18-19) :

$$\int_0^t B(x)dx \sim N\left(0,\frac{t^3}{3}\right) \;\Rightarrow\; \int_0^t \delta(x)dx \sim N\left(\delta(0)\,t + r\frac{t^2}{2}, \sigma^2\frac{t^3}{3}\right).$$

Donc du théorème 3.2, nous avons pour le cas du renouvellement ordinaire,

$$E\left[Z(t)\right] = E\left[X_1\right]\int_0^t \exp\left\{-\delta(0)v - r\frac{v^2}{2} + \sigma^2\frac{v^3}{6}\right\}dm(v).$$

Supposons maintenant que $\tau_k \sim \exp(\lambda = 1)$, $E\left[X_1\right] = 1$, $\delta(0) = 0.03$, $r = 0.002$ et $\sigma = 0.001$. Alors, à l'aide du logiciel ''Maple'', nous avons le tableau ci-dessous

Tableau 3.2 Premier moment de $Z(t)$ -- Cas Ho-Lee-Merton

t	1	5	10	15	20
$E[Z(t)]$	0.9848230973	4.606115332	8.380686312	11.32412846	13.50862840
t	30	40	50	60	70
$E[Z(t)]$	16.08951873	17.15895279	17.52411659	17.62695576	17.65086423

Remarque 3.4

(1) Si nous supposons que $r \to 0$ et $\sigma \to 0$ dans l'identité précédente, alors nous retrouvons la formule (3.2.1) pour une force d'intérêt constante.

(2) Le processus de Ho-Lee-Merton est un modèle à court terme de la force d'intérêt (réelle) qui ne possède pas la propriété de retour à la moyenne. L'identité précédente montre de manière explicite que l'expression asymptotique du premier moment de la somme escomptée n'existe pas dans ce cas, puisque la moyenne du facteur d'escompte n'est pas bornée sur $[0,\infty[$.

Exemple 3.3

Soit $\{\delta(t), t \geq 0\}$ un processus d'Itô satisfaisant l'équation différentielle stochastique de Vasicek

$$d\delta(t) = \alpha\left[\beta - \delta(t)\right]dt + \sigma\, dB(t),$$

où α, β et σ sont des constantes non négatives, et $B(t)$ est un mouvement Brownien standard.

Alors la solution analytique de la dernière équation est donnée par :

$$\delta(t)=\alpha+\left[\delta(0)-\alpha\right]e^{-\beta t}+\sigma\int_0^t e^{-\beta(t-v)}dB(v) .$$

Ainsi nous avons :

$$\begin{aligned}\int_0^t \delta(x)\,dx &= \alpha t+\left[\frac{\delta(0)-\alpha}{\beta}\right]\left[1-e^{-\beta t}\right]+\sigma\int_0^t\int_0^x e^{-\beta(x-v)}dB(v)\,dx\\ &= \alpha t+\left[\frac{\delta(0)-\alpha}{\beta}\right]\left[1-e^{-\beta t}\right]+\sigma\int_0^t\int_v^t e^{-\beta(x-v)}dx\,dB(v)\\ &= \alpha t+\left[\frac{\delta(0)-\alpha}{\beta}\right]\left[1-e^{-\beta t}\right]+\frac{\sigma}{\beta}\int_0^t\left[1-e^{-\beta(t-v)}\right]dB(v)\end{aligned}$$

qui donne, par les propriétés de l'intégrale d'Itô :

$$\int_0^t \delta(x)\,dx \sim N\left(\alpha t+\left[\frac{\delta(0)-\alpha}{\beta}\right]\left[1-e^{-\beta t}\right],\ \frac{\sigma^2}{\beta^2}\left\{t-\frac{2}{\beta}\left[1-e^{-\beta t}\right]+\frac{1}{2\beta}\left[1-e^{-2\beta t}\right]\right\}\right) .$$

Donc, de l'équation (3.2.7), nous avons pour le cas de renouvellement retardé,

$$\begin{aligned}E\left[Z_d(t)\right]=E\left[X_1\right]\int_0^t \exp\Bigg\{-\Bigg\{&\alpha v+\left[\frac{\delta(0)-\alpha}{\beta}\right]\left[1-e^{-\beta v}\right]\Bigg\}\\ &+\frac{\sigma^2}{2\beta^2}\left\{v-\frac{2}{\beta}\left[1-e^{-\beta v}\right]+\frac{1}{2\beta}\left[1-e^{-2\beta v}\right]\right\}\Bigg\}dm_d(v)\end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas particulier d'un processus de renouvellement stationnaire tel que $\tau_2 \sim Erlang(2,2)$, $E\left[X_1\right]=1$, $\delta(0)=0.03$, $\alpha=0.01$, $\beta=0.02$ et $\sigma=0.001$. Alors, de nouveau à l'aide du logiciel ''Maple'', nous obtenons le tableau ci-dessous.

Tableau 3.3 Premier moment de $Z_d(t)$ -- cas Vasicek

t	1	5	10	20	30
$E[Z_d(t)]$	0.9852138264	4.650390201	8.691066040	15.36465870	20.65477419
t	40	55	70	85	100
$E[Z_d(t)]$	24.96241723	30.13155473	34.21946275	37.55376165	40.33732027

Remarque 3.5

(1) Si nous supposons que $\delta(0)=\beta=\alpha$ et $\sigma\to 0$ dans l'exemple précédent, alors nous retrouvons la formule (3.2.2), pour une force d'intérêt constante.

(2) Le processus de Vasicek est un modèle à court terme de la force d'intérêt (réelle) qui a la propriété de retour à la moyenne. Ici, nous pouvons aisément évaluer numériquement que $E\left[Z_d(\infty)\right]\approx 60.47329672$.

3.3 Second moment

3.3.1 Cas d'une force d'intérêt déterministe

Léveillé et Garrido (2001a) ont aussi considéré le deuxième moment pour une force constante d'intérêt mais en utilisant toujours des techniques de renouvellement.

Dans le cas du processus de renouvellement ordinaire, ces derniers ont obtenu les formules suivantes :

$$E\left[Z^2(t)\right]=E\left[X_1^2\right]\int_0^t e^{-2\delta v}dm(v)+2E^2\left[X_1\right]\int_0^t\int_0^{t-v} e^{-\delta(2v+u)}dm(u)\,dm(v), \quad (3.3.1)$$

et,

$$E\left[Z^2(\infty)\right]=\frac{L_{\tau_1}(2\delta)}{1-L_{\tau_1}(2\delta)}\left\{E\left[X_1^2\right]+2E^2\left[X_1\right]\left[\frac{L_{\tau_1}(\delta)}{1-L_{\tau_1}(\delta)}\right]\right\}, \quad (3.3.2)$$

Dans le cas de processus du renouvellement retardé, ces derniers ont obtenu les formules suivantes :

$$E\left[Z_d^2(t)\right]=E\left[X_1^2\right]\int_0^t e^{-2\delta v}dm_d(v)+2E^2\left[X_1\right]\int_0^t\int_0^{t-v} e^{-\delta(2v+u)}dm_o(u)\,dm_d(v), \quad (3.3.3)$$

et,

$$E\left[Z_d^2(\infty)\right]=\frac{L_{\tau_1}(2\delta)}{1-L_{\tau_2}(2\delta)}\left\{E\left[X_1^2\right]+2E^2\left[X_1\right]\left[\frac{L_{\tau_2}(\delta)}{1-L_{\tau_2}(\delta)}\right]\right\}.$$

Comme dans le théorème 3.1, nous pouvons obtenir des formules similaires pour le moment d'ordre 2 et pour une force générale d'intérêt. Ce faisant, pour y parvenir, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.2

Considérons un processus de renouvellement ordinaire ou retardé du nombre des réclamations, tel que défini dans la section 3.1. Alors, pour $0<x<y<t$ et $1\leq i<j\leq n$, les fonctions de densité de probabilité conjointes conditionnelles $T_i,T_j \mid N(t)=n$ et $T_i,T_j \mid N_d(t)=n$ sont données respectivement par :

1. Pour le cas ordinaire:

$$f_{T_i,T_j|N(t)}(x,y|n)=\frac{P\big(N(t-y)=n-j\big)f_{T_{j-i}}(y-x)f_{T_j}(x)}{P\big(N(t)=n\big)} \quad . \tag{3.3.4}$$

2. Pour le cas retardé:

$$f_{T_i,T_j|N_d(t)}(x,y|n)=\frac{P\big(N_o(t-y)=n-j\big)f_{T_j-T_i}(y-x)f_{T_i}(x)}{P\big(N_d(t)=n\big)} \quad ,$$

où $\{N_o(t)\,,\,t\geq 0\}$ est le processus de renouvellement ordinaire sous-jacent.

Démonstration

Comme dans le lemme 3.1, nous démontrons uniquement le cas ordinaire, Ainsi, pour $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$:

$$\begin{aligned}P\big(T_i\leq x,T_j\leq y\mid N(t)=n\big)&=\frac{P\big(N(t)=n,\,T_i\leq x,T_j\leq y\big)}{P\big(N(t)=n\big)}\\&=\frac{P\big(N(t)=n\,\big|\,T_i\leq x,T_j\leq y\big)P\big(T_i\leq x,T_j\leq y\big)}{P\big(N(t)=n\big)}.\end{aligned}$$

La dernière expression peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned}P\big(T_i\leq x,T_j\leq y\mid N(t)=n\big)&=\frac{\left\{\int_0^x\int_u^y P\big(N(t)=n\mid T_i=u,T_j=v\big)f_{T_i,T_j|T_i\leq x,T_j\leq y}(u,v)\,dvdu\right\}P\big(T_i\leq x,T_j\leq y\big)}{P\big(N(t)=n\big)}\\&=\frac{\int_0^x\int_u^y P\big(N(t-v)=n-j\big)f_{T_i,T_j}(u,v)\,dvdu}{P(N(t)=n)}\quad .\end{aligned}$$

En notant que,

$$P\left(T_i \le u, T_j \le v\right) = P\left(T_j \le v \mid T_i \le u\right) P\left(T_i \le u\right)$$
$$= \int_0^u P\left(T_j \le v \mid T_i = z\right) f_{T_i \mid T_i \le u}(z) P\left(T_i \le u\right) dz$$
$$= \int_0^u P\left(\tau_{i+1} + \ldots + \tau_j \le v - z\right) f_{T_i}(z) dz ,$$

nous obtenons

$$f_{T_i, T_j}(u,v) = f_{T_{j-i}}(v-u) f_{T_i}(u) .$$

Finalement,

$$P\left(T_i \le x, T_j \le y \mid N(t) = n\right) = \frac{\int_0^x \int_u^y P\left(N(t-v) = n-j\right) f_{T_{j-i}}(v-u) f_{T_i}(u)\, dv du}{P(N(t)=n)} ,$$

ce qui donne l'équation (3.3.4).

Théorème 3.3

D'après les hypothèses de la section 3.1, le second moment de la somme de renouvellement escomptée pour une force d'intérêt déterministe est donné par :

(1) Pour le cas du renouvellement ordinaire :

$$\begin{aligned} E\left[Z^2(t)\right] &= E\left[X_1^2\right] \int_0^t D^2(v) dm(v) \\ &\quad + 2E^2\left[X_1\right] \int_0^t \int_0^{t-v} D(u+v) D(v) dm(u) dm(v) . \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

(2) Pour le cas du renouvellement retardé :

$$\begin{aligned} E\left[Z_d^2(t)\right] &= E\left[X_1^2\right] \int_0^t D^2(v) dm_d(v) \\ &\quad + 2E^2\left[X_1\right] \int_0^t \int_0^{t-v} D(u+v) D(v)\, dm_o(u) dm_d(v) . \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Démonstration

Comme dans le théorème 3.2, nous démontrons le résultat pour le cas ordinaire. Ainsi, en conditionnant sur $N(t)$ et en utilisant l'indépendance en probabilité entre le nombre et la sévérité de réclamations, nous avons :

$$\begin{aligned}
E\left[Z^2(t)\middle|N(t)=n\right] &= E\left[\sum_{k=1}^{n} D^2(T_k)X_k^2\middle|N(t)=n\right] \\
&\quad +2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} E\left[D(T_i)D(T_j)X_iX_j\middle|N(t)=n\right] \\
&= E\left[X_1^2\right]\sum_{k=1}^{n} E\left[D^2(T_k)\middle|N(t)=n\right] \\
&\quad +2E^2[X_1]\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} E\left[D(T_i)D(T_j)\middle|N(t)=n\right].
\end{aligned}$$

De l'équation (3.2.3) du lemme 3.1 et de l'équation (3.3.4) du lemme 3.2, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
E\left[Z^2(t)\right] &= E\left[E\left[Z^2(t)\middle|N(t)=n\right]\right] \\
&= E\left[X_1^2\right]\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_0^t D^2(v)f_{T_k}(v)P\left(N(t-v)=n-k\right)dv \\
&\quad +2E^2[X_1]\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\int_0^t\int_v^t D(u)D(v)P\left(N(t-v)=n-j\right)f_{T_{j-i}}(u-v)f_{T_i}(v)\,du\,dv \\
&= E\left[X_1^2\right]\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\int_0^t D^2(v)f_{T_k}(v)P\left(N(t-v)=n-k\right)dv \\
&\quad +2E^2[X_1]\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty}\int_0^t\int_v^t D(u)D(v)P\left(N(t-v)=n-j\right)f_{T_{j-i}}(u-v)f_{T_i}(v)\,du\,dv \\
&= E\left[X_1^2\right]\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t D^2(v)\,dF_{\tau_1}^{*k}(v)\,dv \\
&\quad +2E^2[X_1]\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty}\int_0^t\int_v^t D(u)D(v)f_{T_{j-i}}(u-v)f_{T_i}(v)\,du\,dv\ .
\end{aligned}$$

Enfin,

$$E\left[Z^2(t)\right]=E\left[X_1^2\right]\int_0^t D^2(v)\,d\left\{\sum_{k=1}^{\infty}F_{\tau_1}^{*k}(v)\right\}$$

$$+2E^2[X_1]\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t\int_v^t D(u)D(v)\,d\sum_{j=i+1}^{\infty}\left\{F_{\tau_1}^{*(j-i)}(u-v)\right\}f_{T_i}(v)\,dv$$

$$=E\left[X_1^2\right]\int_0^t D^2(v)\,dm(v)$$

$$+2E^2[X_1]\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t\int_v^t D(u)D(v)\,dm(u-v)\,f_{T_i}(v)\,dv$$

$$=E\left[X_1^2\right]\int_0^t D^2(v)\,dm(v)$$

$$+2E^2[X_1]\int_0^t\int_v^t D(u)D(v)\,dm(u-v)\,d\sum_{i=1}^{\infty}\left\{F_{\tau_1}^{*i}(v)\right\}$$

$$=E\left[X_1^2\right]\int_0^t D^2(v)\,dm(v)$$

$$+2E^2[X_1]\int_0^t\int_0^{t-v} D(u+v)D(v)\,dm(u)\,dm(v)\ .$$

Remarque 3.6

Le théorème 3.3 donne aussi une preuve alternative à celle donnée dans Léveillé et Garrido (2001a) pour le deuxième moment de la somme de renouvellement escomptée avec force constante d'intérêt.

Exemple 3.4

Supposons que la force d'intérêt est celle de l'exemple 3.1. Alors, de l'équation (3.3.5), nous avons dans le cas du renouvellement ordinaire,

$$E\left[Z^2(t)\right]=E\left[X_1^2\right]\int_0^t e^{-2I_1(v)}dm(v)+2E^2[X_1]\int_0^t\int_0^{t-v} e^{-I_1(u+v)-I_1(v)}dm(u)\,dm(v)\ .$$

où $I_1(x)=\delta_1 1_{]0,1[}(x)+\delta_2 1_{]1,2[}(x)+\delta_3 1_{]2,\infty[}(x),\ x\in\mathbb{R}^+$.

Si nous supposons que $\tau_1 \sim \exp(\lambda)$, alors pour $t \in \left]0,1\right]$:

$$E\left[Z^2(t)\right] = \lambda\, E\left[X_1^2\right]\left(\frac{1-e^{-\delta_1}}{\delta_1}\right) + \lambda^2 E^2\left[X_1\right]\left(\frac{1-e^{-\delta_1 t}}{\delta_1}\right)^2.$$

Pour $t \in \left]1,2\right]$:

$$\begin{aligned} E\left[Z^2(t)\right] = {} & \lambda\, E\left[X_1^2\right]\left\{\left(\frac{1-e^{-2\delta_1}}{2\delta_1}\right) + \frac{e^{2(\delta_2-\delta_1)}}{2\delta_2}\left(e^{-2\delta_2} - e^{-2\delta_2 t}\right)\right\} \\ & + 2\lambda^2 E^2\left[X_1\right]\left\{\left(\frac{1-e^{-\delta_1}}{2\delta_1^2}\right)^2 + \frac{e^{(\delta_2-\delta_1)}}{\delta_1\delta_2}\left(1-e^{-\delta_1}\right)\left(e^{-\delta_2} - e^{-\delta_2 t}\right) + \frac{e^{2(\delta_2-\delta_1)}}{2\delta_2^2}\left(e^{-\delta_2} - e^{-\delta_2 t}\right)^2\right\}. \end{aligned}$$

Pour $t \in \left]2,\infty\right[$:

$$\begin{aligned} E\left[Z^2(t)\right] = {} & \lambda\, E\left[X_1^2\right]\left\{\left(\frac{1-e^{-2\delta_1}}{2\delta_1}\right) + \frac{e^{2(\delta_2-\delta_1)}}{2\delta_2}\left(e^{-2\delta_2} - e^{-4\delta_2}\right) + \frac{e^{2(2\delta_3-\delta_1-\delta_2)}}{2\delta_3}\left(e^{-4\delta_3} - e^{-2\delta_3 t}\right)\right\} \\ & + 2\lambda^2 E^2\left[X_1\right]\left\{\left(\frac{1-e^{-\delta_1}}{2\delta_1^2}\right)^2 + \frac{e^{(\delta_2-\delta_1)}}{\delta_1\delta_2}\left(1-e^{-\delta_1}\right)\left(e^{-\delta_2} - e^{-2\delta_2}\right) + \frac{e^{2(\delta_2-\delta_1)}}{2\delta_2^2}\left(e^{-\delta_2} - e^{-2\delta_2}\right)^2\right\} \\ & + 2\lambda^2 E^2\left[X_1\right]\left\{\frac{e^{2\delta_3-\delta_1-\delta_2}}{\delta_1\delta_3}\left(e^{-2\delta_3} - e^{-\delta_3 t}\right)\left(1-e^{-\delta_1}\right) + \frac{e^{2(\delta_3-\delta_1)}}{\delta_2\delta_3}e^{-\delta_2}\left(1-e^{-\delta_2}\right)\left(e^{-2\delta_3} - e^{-\delta_3 t}\right)\right\} \\ & + 2\lambda^2 E^2\left[X_1\right]\frac{e^{2(2\delta_3-\delta_1-\delta_2)}}{2\delta_3^2}\left(e^{-2\delta_3} - e^{-\delta_2 t}\right)^2. \end{aligned}$$

De ce qui précède, l'expression asymptotique du second moment donne :

$$\begin{aligned} E\left[Z^2(\infty)\right] = {} & \lambda\, E\left[X_1^2\right]\left\{\left(\frac{1-e^{-2\delta_1}}{2\delta_1}\right) + \frac{e^{2(\delta_2-\delta_1)}}{2\delta_2}\left(e^{-2\delta_2} - e^{-4\delta_2}\right) + \frac{e^{-2(\delta_1+\delta_2)}}{2\delta_3}\right\} \\ & + 2\lambda^2 E^2\left[X_1\right]\left\{\left(\frac{1-e^{-\delta_1}}{2\delta_1^2}\right)^2 + \frac{e^{-\delta_1}}{\delta_1\delta_2}\left(1-e^{-\delta_1}\right)^2 + \frac{e^{-2\delta_1}}{2\delta_2^2}\left(1-e^{-4\delta_1}\right)\right\} \\ & + 2\lambda^2 E^2\left[X_1\right]\left\{\frac{e^{-(\delta_1+\delta_2)}}{\delta_1\delta_3}\left(1-e^{-\delta_1}\right) + \frac{e^{-2(\delta_2+\delta_1)}}{\delta_2\delta_3}\left(1-e^{-\delta_2}\right) + \frac{e^{-2(\delta_1+\delta_2)}}{2\delta_3^2}\right\}. \end{aligned}$$

Quand $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta$ nous retrouvons l'expression bien connue dans le cas d'un processus de Poisson avec paramètre $\lambda > 0$, soit

$$E\left[Z^2(t)\right] = \lambda\, E\left[X_1^2\right]\left(\frac{1-e^{-2\delta t}}{2\delta}\right) + \lambda^2 E^2\left[X_1\right]\left(\frac{1-e^{-\delta t}}{\delta}\right)^2.$$

Exemple 3.5

Soit la force réelle d'intérêt telle que mentionnée dans l'exemple 3.2. De l'équation (3.3.6), nous avons pour le cas des processus de renouvellement retardé :

$$E\left[Z_d^2(t)\right]=E\left[X_1^2\right]\int_0^t e^{-2I_2(v)}dm_d(v)+2E^2\left[X_1\right]\int_0^t\int_0^{t-v} e^{-I_2(u+v)-I_2(v)}dm_o(u)\,dm_d(v)\,,$$

où $I_2(v)=av+b\sin(v)$.

Supposons que $E[X_1]=E\left[X_1^2\right]=1$, $a=0.02$, $b=0.01$, et que le processus du nombre de réclamations est un processus de renouvellement stationnaire tel que $\tau_2\sim Erlang(2,\,2)$, alors :

$$E\left[Z_d^2(t)\right]=E\left[X_1^2\right]\int_0^t e^{-2I_2(v)}dv+2E^2\left[X_1\right]\int_0^t\int_0^{t-v} e^{-I_2(u+v)-I_2(v)}\left(1-e^{-4v}\right)du\,dv\;.$$

3.3.2 Cas d'une force d'intérêt stochastique

Théorème 3.4

Selon les hypothèses de la section 3.1, le second moment de la somme de renouvellement escomptée est donnée, pour $t>0$ et pour une force d'intérêt stochastique, par :

(1) Pour le cas du renouvellement ordinaire :

$$\begin{aligned}E\left[Z^2(t)\right]&=E\left[X_1^2\right]\int_0^t E\left[D^2(v)\right]dm(v)\\&\quad+2E^2\left[X_1\right]\int_0^t\int_0^{t-v} E\left[D(u+v)D(v)\right]dm(u)\;dm(v)\,.\end{aligned}\tag{3.3.7}$$

(2) Pour le cas du renouvellement retardé :

$$\begin{aligned}E\left[Z_d^2(t)\right]&=E\left[X_1^2\right]\int_0^t E\left[D^2(v)\right]dm_d(v)\\&\quad+2E^2\left[X_1\right]\int_0^t\int_0^{t-v} E\left[D(u+v)D(v)\right]dm_o(u)\,dm_d(v)\,.\end{aligned}\tag{3.3.8}$$

Démonstration

Comme dans le théorème 3.2, nous démontrons uniquement le cas du renouvellement ordinaire. Ainsi, en utilisant le théorème 3.3 et en suivant un raisonnement similaire à celui employé dans le théorème 3.2, nous obtenons pour notre processus de la force d'intérêt $\{\delta(x),\, t \geq 0\}$:

$$\begin{aligned}
E\left[Z^2(t)\right] &= E\Big[E\left[Z^2(t)\middle|\, \delta(x),\, x\in[0,t]\right]\Big] \\
&= E\left[X_1^2\right] E\left[\int_0^t D^2(v)\, dm(v)\right] \\
&\qquad +2\, E^2\left[X_1\right] E\left[\int_0^t \int_0^{t-v} D(u+v)\, D(v)\, dm(u)\, dm(v)\right] \\
&= E\left[X_1^2\right] \int_0^t E\left[D^2(v)\right] dm(v) + 2\, E^2\left[X_1\right] \int_0^t \int_0^{t-v} E\left[D(u+v)\, D(v)\right] dm(u)\, dm(v)\,.
\end{aligned}$$

Remarque 3.7

(1) Le théorème 3.3 donne une autre preuve que celle donnée dans Léveillé et Garrido (2001a) pour le second moment de la somme escomptée avec une force d'intérêt constante.

(2) Quand la force d'intérêt (réelle) est constante, nous obtenons assez aisément les formules (3.3.1) et (3.3.2) des équations (3.3.7) et (3.3.8).

(3) Dépendamment de la trajectoire suivie par la force d'intérêt (réelle), l'expression asymptotique du second moment de la somme escomptée peut ne pas exister.

Exemple 3.6

Supposons que $\{\delta(t)\,,\, t\geq 0\}$ soit un processus d'Îto satisfaisant l'équation différentielle stochastique de Ho-Lee-Merton, telle que donnée dans l'exemple 3.2. Alors, pour $v \geq 0$,

$$\begin{aligned}
E\left[D^2(v)\right] &= E\left[\exp\left\{-2\int_0^v \delta(x)\, dx\right\}\right] \\
&= \exp\left\{-2\delta(0)\, v - rv^2 + \frac{2}{3}\sigma^2 v^3\right\}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $u \geq 0$ et $v \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
E\left[D(u+v)D(v)\right] &= E\left[e^{-\int_0^{u+v}\delta(x)dx}\, e^{-\int_0^{v}\delta(x)dx}\right] \\
&= E\left[e^{-2\int_0^{v}\delta(x)dx}\, e^{-\int_v^{u+v}\delta(x)dx}\right] \\
&= E\left[e^{-2\left[\delta(0)v+r\frac{v^2}{2}+\sigma\int_0^{v}B(x)dx\right]}\, e^{-\left[\delta(0)u+\frac{r}{2}\left(u^2+2uv\right)+\sigma\int_v^{u+v}B(x)dx\right]}\right] \\
&= e^{-\left[\delta(0)(u+2v)\right]-\frac{r}{2}\left[u^2+2uv+2v^2\right]}\, E\left[e^{-2\sigma\int_0^{v}B(x)dx}\, e^{-\sigma\int_v^{u+v}B(x)dx}\right] \\
&= e^{-\left[\delta(0)(u+2v)\right]-\frac{r}{2}\left[u^2+2uv+2v^2\right]}\, E\left[e^{-2\sigma\int_0^{v}(v-x)dB(x)}\, e^{-\sigma\left[\int_v^{u+v}(u+v-x)dB(x)+u\int_0^{v}dB(x)\right]}\right] \\
&= e^{-\left[\delta(0)(u+2v)\right]-\frac{r}{2}\left[u^2+2uv+2v^2\right]}\, E\left[e^{-\sigma\int_0^{v}\left[2(v-x)+u\right]dB(x)}\, e^{-\sigma\int_v^{u+v}(u+v-x)dB(x)}\right] \\
&= e^{-\left[\delta(0)(u+2v)\right]-\frac{r}{2}\left[u^2+2uv+2v^2\right]}\, E\left[e^{-\sigma\int_0^{v}\left[2(v-x)+u\right]dB(x)}\right] E\left[e^{-\sigma\int_v^{u+v}(u+v-x)dB(x)}\right] \\
&= e^{-\left[\delta(0)(u+2v)\right]-\frac{r}{2}\left[u^2+2uv+2v^2\right]}\, e^{\frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{(u+2v)^3-u^3}{6}\right]}\, e^{\frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{u^3}{3}\right]} \\
&= e^{-\left[\delta(0)(u+2v)\right]-\frac{r}{2}\left[u^2+2uv+2v^2\right]+\frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{(u+2v)^3+u^3}{6}\right]}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, de l'équation (3.3.7) nous obtenons:

$$
\begin{aligned}
E\left[Z^2(t)\right] &= E\left[X_1^2\right]\int_0^t e^{-2\delta(0)v-rv^2+\frac{2}{3}\sigma^2v^3}\,dm(v) \\
&\quad +2E^2\left[X_1\right]\int_0^t\int_0^{t-v} e^{-\left[\delta(0)(u+2v)\right]-\frac{r}{2}\left[u^2+2uv+2v^2\right]+\frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{(u+2v)^3+u^3}{6}\right]}\,dm(u)\,dm(v).
\end{aligned}
\tag{3.3.9}
$$

Supposons maintenant que $\tau_k \sim \exp(\lambda=1)$, $E\left[X_1\right]=1$, $E\left[X_1^2\right]=2$, $\delta(0)=0.03$, $r=0.002$ et $\sigma=0.001$. Alors, à l'aide du logiciel ''Maple'', l'équation (3.3.9) conduit au tableau suivant :

Tableau 3.4 Second moment de $Z(t)$ -- Cas Ho-Lee-Merton

t	1	5	10	15	20
$E\left[Z^2(t)\right]$	2.909785123	29.72458394	84.47066679	145.9729435	202.1785621
t	30	40	50	60	70
$E\left[Z^2(t)\right]$	280.0771734	315.9860602	328.7405826	332.3813597	333.2318004

Remarque 3.8

Si nous supposons que $r \to 0$ et $\sigma \to 0$ dans l'équation (3.3.9), alors nous retrouvons la formule (3.3.1) pour une force d'intérêt constante.

Exemple 3.7

Supposons que $\{\delta(t), t \geq 0\}$ soit un processus d'Îto satisfaisant l'équation différentielle stochastique de Vasicek, telle que donnée dans l'exemple 3.3 . Alors, pour $\nu \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
E\left[D^2(v)\right] &= E\left[e^{-2\int_0^v \delta(x)\,dx}\right] \\
&= e^{-2\left\{\alpha v+\left[\frac{\delta(0)-\alpha}{\beta}\right]\left[1-e^{-\beta v}\right]\right\}+\frac{2\sigma^2}{\beta^2}\left\{v-\frac{2}{\beta}\left[1-e^{-\beta v}\right]+\frac{1}{2\beta}\left[1-e^{-2\beta v}\right]\right\}} .
\end{aligned}
$$

Par ailleurs, pour $u \geq 0$ et $\nu \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
E\left[D(u+v)D(v)\right] &= E\left[e^{-\int_0^{u+v} \delta(x)\,dx}\, e^{-\int_0^{v} \delta(x)\,dx}\right] \\
&= E\left[e^{-2\int_0^{v} \delta(x)\,dx}\, e^{-\int_v^{u+v} \delta(x)\,dx}\right] \\
&= E\Bigg[e^{-2\left[\alpha v+\left[\frac{\delta(0)-\alpha}{\beta}\right]\left[1-e^{-\beta v}\right]+\frac{\sigma}{\beta}\int_0^v\left[1-e^{-\beta(v-x)}\right]dB(x)\right]} \\
&\qquad \times e^{-\left[\alpha u+\left[\frac{\delta(0)-\alpha}{\beta}\right]e^{-\beta v}\left[1-e^{-\beta u}\right]+\frac{\sigma}{\beta}\left\{e^{-\beta v}\left[1-e^{-\beta u}\right]\int_0^v e^{\beta x}\,dB(x)+\int_v^{u+v}\left[1-e^{-\beta(u+v-x)}\right]dB(x)\right\}\right]}\Bigg] \\
&= e^{-\alpha(u+2v)-\left[\frac{\delta(0)-\alpha}{\beta}\right]\left\{2\left[1-e^{-\beta v}\right]+e^{-\beta v}\left[1-e^{-\beta u}\right]\right\}} \\
&\qquad \times E\left[e^{-\frac{\sigma}{\beta}\int_0^v\left\{2\left[1-e^{-\beta(v-x)}\right]+e^{-\beta(v-x)}\left[1-e^{-\beta u}\right]\right\}dB(x)}\, e^{-\frac{\sigma}{\beta}\int_v^{u+v}\left[1-e^{-\beta(u+v-x)}\right]dB(x)}\right] .
\end{aligned}
$$

Ainsi, par indépendance en probabilité des accroissements du processus de Wiener, nous avons

$$
\begin{aligned}
E\left[D(u+v)D(v)\right] &= e^{-\alpha(u+2v)-\left[\frac{\delta(0)-\alpha}{\beta}\right]\left\{2-e^{-\beta v}\left[1+e^{-\beta u}\right]\right\}} \\
&\quad \times E\left[e^{-\frac{\sigma}{\beta}\int_0^v \left\{2-e^{-\beta(v-x)}\left[1+e^{-\beta u}\right]\right\} dB(x)}\right] E\left[e^{-\frac{\sigma}{\beta}\int_v^{u+v}\left[1-e^{-\beta(u+v-x)}\right] dB(x)}\right] \\
&= e^{-\alpha(u+2v)-\left[\frac{\delta(0)-\alpha}{\beta}\right]\left\{2-e^{-\beta v}\left[1+e^{-\beta u}\right]\right\}} \\
&\quad \times e^{\frac{\sigma^2}{2\beta^2}\left\{4v-\frac{4}{\beta}\left[1+e^{-\beta u}\right]\left[1-e^{-\beta v}\right]+\frac{1}{2\beta}\left[1-e^{-2\beta v}\right]\left[1+e^{-\beta u}\right]^2\right\}} e^{\frac{\sigma^2}{2\beta^2}\left\{u-\frac{2}{\beta}\left[1-e^{-\beta u}\right]+\frac{1}{2\beta}\left[1-e^{-2\beta u}\right]\right\}} \\
&= e^{-\alpha(u+2v)-\left[\frac{\delta(0)-\alpha}{\beta}\right]\left\{2-e^{-\beta v}\left[1+e^{-\beta u}\right]\right\}} \\
&\quad \times e^{\frac{\sigma^2}{2\beta^2}\left\{4v-\frac{4}{\beta}\left[1+e^{-\beta u}\right]\left[1-e^{-\beta v}\right]+\frac{1}{2\beta}\left[1-e^{-2\beta v}\right]\left[1+e^{-\beta u}\right]^2+u-\frac{2}{\beta}\left[1-e^{-\beta u}\right]+\frac{1}{2\beta}\left[1-e^{-2\beta u}\right]\right\}} .
\end{aligned}
$$

Donc, l'équation (3.3.8) donne

$$
\begin{aligned}
E\left[Z_d^2(t)\right] &= E\left[X_1^2\right]\int_0^t e^{-2\left\{\alpha v+\left[\frac{\delta(0)-\alpha}{\beta}\right]\left[1-e^{-\beta v}\right]\right\}+\frac{2\sigma^2}{\beta^2}\left\{v-\frac{2}{\beta}\left[1-e^{-\beta v}\right]+\frac{1}{2\beta}\left[1-e^{-2\beta v}\right]\right\}} dm_d(v) \\
&\quad +2E^2\left[X_1\right]\int_0^t\int_0^{t-v} e^{-\alpha(u+2v)-\left[\frac{\delta(0)-\alpha}{\beta}\right]\left\{2-e^{-\beta v}\left[1+e^{-\beta u}\right]\right\}} \\
&\quad \times e^{\frac{\sigma^2}{2\beta^2}\left\{4v-\frac{4}{\beta}\left[1+e^{-\beta u}\right]\left[1-e^{-\beta v}\right]+\frac{1}{2\beta}\left[1-e^{-2\beta v}\right]\left[1+e^{-\beta u}\right]^2+u-\frac{2}{\beta}\left[1-e^{-\beta u}\right]+\frac{1}{2\beta}\left[1-e^{-2\beta u}\right]\right\}} dm_o(u)\, dm_d(v) .
\end{aligned}
\tag{3.3.10}
$$

Considérons maintenant le cas particulier d'un processus de renouvellement stationnaire tel que $\tau_2 \sim Erlang(2,2)$, $E[X_1]=1$, $E\left[X_1^2\right]=2$, $\delta(0)=0.03$, $\alpha=0.01$, $\beta=0.02$ et $\sigma=0.001$. Alors, de nouveau à l'aide du logiciel ''Maple'', l'équation (3.3.10) donne le tableau ci-dessous :

Tableau 3.5 Second moment de $Z_d(t)$ -- Cas Vasicek

t	1	5	10	20	30
$E\left[Z_d^2(t)\right]$	2.477254148	27.86537700	86.41816724	253.3713859	447.8596138
t	40	55	70	85	100
$E\left[Z_d^2(t)\right]$	646.6649996	932.6396535	1194.663717	1431.012781	1643.147285

Remarque 3.9

Supposons que $\delta(0)=\beta=\alpha$ et $\sigma\to 0$ dans l'équation (3.3.10), alors nous retrouvons la formule (3.3.3) pour une force d'intérêt constante.

3.4 Moment conjoint

A notre connaissance, rien n'a encore été fait sur les moments conjoints des sommes de renouvellement escomptées. Il serait approprié de les obtenir si nous souhaitons par exemple construire des prédicteurs ou des mesures de risque sur ce modèle.

Ainsi, nous présentons un théorème sur les moments conjoints d'ordre 2 et puis nous examinons deux exemples; le premier supposant que le processus du nombre des réclamations est un processus de Poisson avec une force constante d'intérêt et le deuxième supposant que le processus du nombre des réclamations est le processus stationnaire Erlang(2,2) de l'exemple 3.7 avec une force générale d'intérêt.

3.4.1 Cas d'une force d'intérêt déterministe

Théorème 3.5

Selon les hypothèses de la section 3.1, le moment conjoint d'ordre 2 de la somme escomptée est donné, pour $t>0$, $h>0$ et pour une force d'intérêt déterministe, par :

(1) Pour le cas du renouvellement ordinaire :

$$E\left[Z(t)Z(t+h)\right]=E\left[Z^2(t)\right]+E^2\left[X_1\right]\int_0^t\int_{t-v}^{t+h-v}D(u+v)D(v)dm(u)dm(v).$$

(2) Pour le cas du renouvellement retardé :

$$E\left[Z_d(t)Z_d(t+h)\right]=E\left[Z_d^2(t)\right]+E^2\left[X_1\right]\int_0^t\int_{t-v}^{t+h-v}D(u+v)D(v)dm_o(u)dm_d(v).$$

Démonstration

À nouveau, nous démontrons le résultat dans le cas du processus de renouvellement ordinaire. Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned}E\left[Z(t)Z(t+h)\right]&=E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}D(T_i)X_i\sum_{j=1}^{N(t+h)}D(T_j)X_j\right]\\&=E\left[Z(t)^2\right]+E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}D(T_i)X_i\sum_{j=N(t)+1}^{N(t+h)}D(T_j)X_j\right].\end{aligned}$$

En conditionnant sur $N(t)$ et $N(t+h)$, nous obtenons pour le dernier terme :

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} D(T_i)X_i \sum_{j=N(t)+1}^{N(t+h)} D(T_j)X_j\right] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} D(T_i)X_i \sum_{j=N(t)+1}^{N(t+h)} D(T_j)X_j \mid N(t), N(t+h)\right]\right]$$
$$= E\left[X_1^2\right]E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} D(T_i) \sum_{j=N(t)+1}^{N(t+h)} D(T_j)\right].$$

Maintenant,

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} D(T_i) \sum_{j=N(t)+1}^{N(t+h)} D(T_j)\right] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} D(T_i) \sum_{j=N(t)+1}^{N(t+h)} D(T_j) \middle| N(t), N(t+h)\right]\right]$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} E\left[D(T_i)D(T_j) \middle| N(t), N(t+h)\right] P\left(N(t)=n, N(t+h)=m\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty}\sum_{m=j}^{\infty}\sum_{n=i}^{j-1}\int_0^t\int_t^{t+h} D(u)D(v) f_{T_i,T_j,N(t),N(t+h)}(v,u,n,m)\,dudv$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty}\sum_{m=j}^{\infty}\int_0^t\int_t^{t+h} D(u)D(v) f_{T_i,T_j,N(t+h)}(v,u,m)\,dudv$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty}\sum_{m=j}^{\infty}\int_0^t\int_t^{t+h} D(u)D(v) f_{T_i,T_j|N(t+h)=m}(v,u) P\left(N(t+h)=m\right)dudv.$$

Donc, en utilisant l'équation (3.3.4) du lemme 3.2, nous obtenons:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} D(T_i) \sum_{j=N(t)+1}^{N(t+h)} D(T_j)\right] = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty}\int_0^t\int_t^{t+h} D(u)D(v)\left[\sum_{m=j}^{\infty} P\left[N(t+h)=m-j\right]\right] f_{T_{j-i}}(u-v) f_{T_i}(v)\,dudv$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty}\int_0^t\int_t^{t+h} D(u)D(v) f_{T_{j-i}}(u-v) f_{T_i}(v)\,dudv$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t\int_t^{t+h} D(u)D(v) f_{T_i}(v)\, d\sum_{j=i+1}^{\infty} F_{T_1}^{*(j-i)}(u-v)\,dv$$
$$= \int_0^t\int_t^{t+h} D(u)D(v)\,dm(u-v)\,d\sum_{i=1}^{\infty} F_{T_1}^{*i}(v)$$
$$= \int_0^t\int_{t-v}^{t+h-v} D(u+v)D(v)\,dm(u)\,dm(v).$$

Et le résultat suit aisément.

Exemple 3.8

Considérons une force constante d'intérêt $\delta > 0$ et un processus de dénombrement Poissonnien de paramètre $\lambda > 0$. Alors, nous avons :

$$E\left[Z(t)Z(t+h)\right] = \lambda E\left[X_1^2\right]\left(\frac{1-e^{-2\delta t}}{2\delta}\right) + \lambda^2 E^2[X_1]\left\{\left(\frac{1-e^{-\delta t}}{\delta}\right)^2 + e^{-\delta t}\frac{\left(1-e^{-\delta t}\right)\left(1-e^{-\delta h}\right)}{\delta^2}\right\}$$

$$= \lambda E\left[X_1^2\right]\left(\frac{1-e^{-2\delta t}}{2\delta}\right) + \frac{\lambda^2 E^2[X_1]}{\delta^2}\left(1-e^{-\delta t}\right)\left(1-e^{-\delta(t+h)}\right) .$$

Ainsi,

$$Cov\left[Z(t)Z(t+h)\right] = \lambda E\left[X_1^2\right]\left(\frac{1-e^{-2\delta t}}{2\delta}\right) + \frac{\lambda^2}{\delta^2}E^2[X_1]\left(1-e^{-\delta t}\right)\left(1-e^{-\delta(t+h)}\right)$$

$$-\frac{\lambda^2}{\delta^2}E^2[X_1]\left(1-e^{-\delta t}\right)\left(1-e^{-\delta(t+h)}\right)$$

$$= \lambda E\left[X_1^2\right]\left(\frac{1-e^{-2\delta t}}{2\delta}\right),$$

laquelle est indépendante de h (et donc égale à $V[Z(t)]$) et est presque constante pour de grandes valeurs de t .

Si $\rho(t,h)$ est le coefficient de corrélation entre $Z(t)$ et $Z(t+h)$, alors

$$\rho(t,h) = \frac{\lambda E\left[X_1^2\right]\left(\frac{1-e^{-2\delta t}}{2\delta}\right)}{\left[\lambda E\left[X_1^2\right]\left(\frac{1-e^{-2\delta t}}{2\delta}\right)\right]^{1/2}\left[\lambda E\left[X_1^2\right]\left(\frac{1-e^{-2\delta(t+h)}}{2\delta}\right)\right]^{1/2}}$$

$$= \left[\frac{1-e^{-2\delta t}}{1-e^{-2\delta(t+h)}}\right]^{1/2} .$$

Notons que $\rho(t,h)$ est indépendant de λ, $\rho(t,h) \to \left[1-e^{-2\delta t}\right]^{1/2}$ quand $h \to \infty$ et $\rho(t,h)$ est presque 0 pour de petites valeurs de t et de grandes valeurs h.

3.4.2 Cas d'une force d'intérêt stochastique

Théorème 3.6

Selon les hypothèses de la section 3.1, le moment conjoint d'ordre 2 de la somme escomptée est donné, pour $t>0$, $h>0$ et pour une force d'intérêt stochastique, par :

(1) Pour le cas ordinaire:

$$E\left[Z(t)Z(t+h)\right]=E\left[Z^{2}(t)\right]+E^{2}\left[X_{1}\right]\int_{0}^{t}\int_{t-v}^{t+h-v}E\left[D(u+v)D(v)\right]dm(u)dm(v).$$

(2) Pour le cas retardé:

$$E\left[Z_{d}(t)Z_{d}(t+h)\right]=E\left[Z_{d}^{2}(t)\right]+E^{2}\left[X_{1}\right]\int_{0}^{t}\int_{t-v}^{t+h-v}E\left[D(u+v)D(v)\right]dm_{o}(u)dm_{d}(v).$$

Démonstration

À nouveau, nous démontrons uniquement pour le cas ordinaire. Ainsi, en utilisant le théorème 3.5 et en suivant un raisonnement similaire à ceux employés dans les théorèmes 3.2 et 3.4, nous obtenons pour notre processus de la force d'intérêt $\{\delta(x),t\geq 0\}$: .

$$\begin{aligned}E\left[Z(t)Z(t+h)\right]&=E\left[E\left[Z(t)Z(t+h)\middle|\delta(x),x\in[0,t+h]\right]\right]\\&=E\left[Z^{2}(t)\right]+E^{2}\left[X_{1}\right]E\left[\int_{0}^{t}\int_{t-v}^{t+h-v}D(u+v)D(v)\;dm(u)dm(v)\right]\\&=E\left[Z^{2}(t)\right]+E^{2}\left[X_{1}\right]\int_{0}^{t}\int_{t-v}^{t+h-v}E\left[D(u+v)D(v)\right]\;dm(u)dm(v).\end{aligned}$$

Exemple 3.9

Considérons la force d'intérêt réelle de l'exemple 3.6, telle que $\tau_{k}\sim\exp(\lambda=1)$, $E\left[X_{1}\right]=1$, $E\left[X_{1}^{2}\right]=2$, $\delta(0)=0.03$, $r=0.002$ et $\sigma=0.001$. Alors nous avons :

$$E\left[Z(t)Z(t+h)\right]=2\int_0^t e^{-2\delta(0)v-rv^2+\frac{2}{3}\sigma^2v^3}dv$$

$$+2\int_0^t\int_0^{t-v} e^{-\left[\delta(0)(u+2v)\right]-\frac{r}{2}\left[u^2+2uv+2v^2\right]+\frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{(u+2v)^3+u^3}{6}\right]}dudv$$

$$+\int_0^t\int_{t-v}^{t+h-v} e^{-\left[\delta(0)(u+2v)\right]-\frac{r}{2}\left[u^2+2uv+2v^2\right]+\frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{(u+2v)^3+u^3}{6}\right]}dudv\,.$$

Maintenant supposons que $G(t,h)=E\left[Z(t)Z(t+h)\right]$. Nous obtenons les valeurs numériques dans les tables qui suivent :

Tableau 3.6 Moment conjoint de $Z(t)Z(t+10)$-- Cas Ho-Lee-Merton 1

t	1	5	10	15	20
$G(t,10)$	10.83723622	60.66955665	127.4541238	188.2063611	237.0776889
t	30	40	50	60	70
$G(t,10)$	297.3270560	322.2794707	330.5541192	332.8061942	333.3136487

Tableau 3.7 Moment conjoint de $Z(t)Z(t+10)$-- Cas Ho-Lee-Merton 2

h	5	10	15	20	25
$G(5,h)$	47.11112047	60.66955665	70.73226188	77.84082810	82.62123494
h	30	35	45	55	65
$G(5,h)$	85.68190661	87.54781836	89.23009179	89.70388025	89.81403284

Remarque 3.10

La covariance et le coefficient d'asymétrie peuvent être aisément calculés à partir des tableaux 3.1, 3.3, 3.5 et 3.6. Nous pouvons aussi insérer directement nos formules dans le logiciel ''Maple'' et obtenir des valeurs selon la méthode numérique choisie.

3.5 CONCLUSION

Nous avons trouvé les deux premiers moments de la somme de renouvellement escomptée, pour une force d'intérêt générale. Ces formules ont été obtenues en donnant de nouvelles expressions de la densité de probabilité conditionnelle (conjointe) des temps d'arrivée correspondant à n'importe quel processus de renouvellement, présentant ainsi une extension de la technique bien connue du cas Poisson où les statistiques d'ordre sont utilisées, et fournissant surtout un outil puissant pour l'analyse de ce processus de risque. Par ailleurs, notre méthode présente une sérieuse alternative aux techniques utilisant les martingales qui s'appliquent au seul cas Poissonnien et qui ne réussissent pas à fournir ces formules générales dans un contexte de renouvellement.

Des exemples numériques ont aussi été donnés, montrant la calculabilité de nos formules dans plusieurs cas et la possibilité d'obtenir de meilleures approximations de ces moments que celles obtenues par des méthodes de simulation. Malgré cela, même si les taux d'intérêt instantanés de nos exemples modélisent mieux la réalité économique, nous demeurons conscients qu'ils restent imparfaits et doivent être justifiés. Avec de bonnes hypothèses sur le taux d'intérêt instantané, basées sur des données historiques fiables pour un produit d'assurance donné, il pourrait être approprié de construire un processus qui approximerait mieux la manière dont cette variable aléatoire évolue. Des recherches restent à être effectuées sur ce sujet, comme sur la fonction génératrice des moments et d'autres fonctions inhérentes aux sommes escomptées.

Chapitre 4
LES MOMENTS CONJOINTS DES SOMMES DE RENOUVELLEMENT ESCOMPTÉES

Les deux premiers moments et la covariance de la somme escomptée ont été trouvés pour un taux d'intérêt stochastique, duquel le taux d'inflation stochastique a été soustrait, et pour le nombre des réclamations qui suit un processus de renouvellement ordinaire ou retardé.

Dans ce chapitre, nous poursuivons notre analyse de ce processus de risque en présentant quelques formules pour les moments simples et conjoints d'ordre supérieur, formules qui peuvent être écrites d'une manière récursive dans le cas d'une force d'intérêt constante mais non dans le cas d'une force d'intérêt stochastique.

4.1 Introduction

Depuis les travaux de Gerber (1971), Taylor (1979), Willmot (1989), principalement reliés au processus de Poisson composé escompté et certaines de ses fonctionnelles, tel que le processus de surplus, d'autres auteurs comme Léveillé et Garrido (2001a, 2001b), , Jang (2004), Kim et Kim (2007), Léveillé, Garrido et Wang (2010) ont travaillé sur les moments et la distribution de ce processus de risque. Ces auteurs ont utilisé soit la théorie de renouvellement, soit l'approche martingale ou alors ils ont établi le processus de risque dans un environnement markovien.

Ce faisant, dans le contexte particulier des sommes de renouvellement escomptées, plusieurs résultats ont ainsi été obtenus lorsque la force d'intérêt nette est constante. Cependant, dans le cas continu, rien n'a encore réellement été fait sur la distribution de ce processus lorsque le taux d'intérêt est stochastique.

Ainsi, notre but dans cette section est d'étendre les formules obtenues sur la covariance de notre processus de risque, aux moments conjoints d'ordre supérieur dans un contexte où le caractère aléatoire de l'inflation et du taux d'intérêt est pris en compte.

En ajoutant une hypothèse à celles du chapitre 3, nous présentons à la section 4.2 une équation intégrale de la fonction génératrice des moments conjoints de la somme escomptée quand le taux d'intérêt instantané est constant. Puis des formules récursives sont obtenues pour les moments conjoints en utilisant essentiellement des arguments de renouvellement. À la section 4.3, nous examinons la même question, mais cette fois-ci pour une force d'intérêt nette stochastique. Comme les arguments de renouvellement ne sont plus utilisables, à cause de la forme générale du taux d'intérêt, nous présentons d'abord un lemme pour la distribution conjointe conditionnelle du temps d'arrivée des réclamations connaissant leur nombre dans $[0,t]$. Ensuite une équation intégrale de la fonction génératrice des moments conjoints est obtenue à partir de laquelle des moments conjoints de ce processus de risque seront donnés. Des exemples viendront illustrer les résultats des sections précédentes dans le cas où le temps entre deux réclamations successives suit une loi Erlang, et pour le modèle de taux stochastique de Ho-Lee-Merton. À la section 4.4, nous concluons.

4.2 Formules récursives des moments conjoints avec force d'intérêt constante

Les moments récursifs des sommes de renouvellement escomptées ont été considérés pour la première fois par Léveillé et Garrido (2001b), pour une force d'intérêt nette constante.

Nous considérons comme hypothèses celles présentées au chapitre 3, auxquelles nous ajoutons l'existence de la fonction génératrice des moments $M_X(t)$. En utilisant des arguments de renouvellement, ils ont obtenu les formules récursives suivantes :

(1) Pour le cas ordinaire:

$$M_{Z(t)}^{(n)}(s)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}E\left[X^{n-k}\right]\int_0^t e^{-n\delta v}E\left[Z^k(t-v)\right]dm(v) ,$$

$$M_{Z(t)}^{(n)}(\infty)=\frac{L_{\tau_1}(n\delta)}{1-L_{\tau_1}(n\delta)}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}E\left[X^{n-k}\right]E\left[Z^k(\infty)\right].$$

(2) Pour le cas retardé:

$$M_{Z_d(t)}^{(n)}(s)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}E\left[X^{n-k}\right]\int_0^t e^{-n\delta v}E\left[Z_o^k(t-v)\right]dm_d(v) ,$$

$$M_{Z_d(t)}^{(n)}(\infty)=\frac{L_{\tau_1}(n\delta)}{1-L_{\tau_2}(n\delta)}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}E\left[X^{n-k}\right]E\left[Z_o^k(\infty)\right] .$$

Ainsi la question est de savoir si nous pouvons obtenir des formules récursives pour les moments conjoints de ce processus de risque, quand la force d'intérêt est constante. La réponse est oui et la même technique de renouvellement employée par les auteurs précédents peut être utilisée pour les obtenir. Mais auparavant, nous avons besoin d'un lemme qui nous donnera une équation intégrale de la fonction génératrice des moments conjoints entre $Z(t)$ et $Z(t+h)$, pour $h>0$.

Lemme 4.1

Considérons un processus de renouvellement ordinaire ou retardé, tel que défini précédemment. Alors, pour tout $t>0$, $h>0$ et $(u,v)\in\Omega\times\Omega$, la f.g.m conjointe entre $Z(t)$ et $Z(t+h)$ satisfait respectivement aux équations suivantes:

(1) Pour le cas ordinaire:

$$\begin{aligned} M_{Z(t),Z(t+h)}(u,v) &= \bar{F}_{\tau_1}(t+h) + \int_t^{t+h} M_X\left(ve^{-\delta x}\right) M_{Z(t+h-x)}\left(ve^{-\delta x}\right) dF_{\tau_1}(x) \\ &\quad + \int_0^t M_X\left((u+v)e^{-\delta x}\right) M_{Z(t-x),Z(t+h-x)}\left(ue^{-\delta x}, ve^{-\delta x}\right) dF_{\tau_1}(x) . \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

(2) Pour le cas retardé:

$$\begin{aligned} M_{Z_d(t),Z_d(t+h)}(u,v) &= \bar{F}_{\tau_1}(t+h) + \int_t^{t+h} M_X\left(ve^{-\delta x}\right) M_{Z_o(t+h-x)}\left(ve^{-\delta x}\right) dF_{\tau_1}(x) \\ &\quad + \int_0^t M_X\left((u+v)e^{-\delta x}\right) M_{Z_o(t-x),Z_o(t+h-x)}\left(ue^{-\delta x}, ve^{-\delta x}\right) dF_{\tau_1}(x) . \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Démonstration

Nous démontrons uniquement le cas ordinaire, la démonstration s'adaptant aisément pour le cas retardé. Nous avons :

$$\begin{aligned} M_{Z(t),Z(t+h)}(u,v) &= E\left[e^{uZ(t)+vZ(t+h)}\right] \\ &= E\left[e^{(u+v)Z(t)+v\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)} e^{-\delta T_k} X_k}\right]. \end{aligned}$$

Ainsi en conditionnant sur les valeurs de $N(t), N(t+h), T_1, \ldots, T_{N(t+h)}$, nous obtenons :

$$E\left[e^{(u+v)Z(t)+v\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)} e^{-\delta T_k} X_k} \,\middle|\, N(t)=n, N(t+h)=m, T_1=t_1, \ldots, T_m=t_m\right]$$

$$\begin{aligned} &= E\left[e^{(u+v)\sum_{k=1}^{n} e^{-\delta t_k} X_k}\right] E\left[e^{v\sum_{k=n+1}^{m} e^{-\delta t_k} X_k}\right] \\ &= E\left[\prod_{k=1}^{n} M_X\left((u+v)e^{-\delta T_k}\right) \prod_{k=n+1}^{m} M_X\left(ve^{-\delta T_k}\right)\right] . \end{aligned}$$

Ainsi,

$$M_{Z(t),Z(t+h)}(u,v)=E\left[\prod_{k=1}^{N(t)}M_X\left((u+v)e^{-\delta T_k}\right)\prod_{k=N(t)+1}^{N(t+h)}M_X\left(ve^{-\delta T_k}\right)\right].$$

En conditionnant sur τ_1, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&M_{Z(t),Z(t+h)}(u,v)\\
&=E\left[E\left[\prod_{k=1}^{N(t)}M_X\left((u+v)e^{-\delta T_k}\right)\prod_{k=N(t)+1}^{N(t+h)}M_X\left(ve^{-\delta T_k}\right)\Big|\tau_1\right]\right]\\
&=\int_0^t M_X\left((u+v)e^{-\delta x}\right)E\left[\prod_{k=2}^{N(t)}M_X\left((u+v)e^{-\delta x}e^{-\delta(T_k-x)}\right)\prod_{k=N(t)+1}^{N(t+h)}M_X\left(ve^{-\delta x}e^{-\delta(T_k-x)}\right)\right]dF_{\tau_1}(x)\\
&\qquad+\int_t^{t+h}M_X\left(ve^{-\delta x}\right)E\left[\prod_{k=2}^{N(t+h)}M_X\left(ve^{-\delta x}e^{-\delta(T_k-x)}\right)\right]dF_{\tau_1}(x)+\int_{t+h}^{\infty}dF_{\tau_1}(x).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&M_{Z(t),Z(t+h)}(u,v)\\
&=\int_0^t M_X\left((u+v)e^{-\delta x}\right)E\left[\prod_{k=1}^{N(t-x)}M_X\left((u+v)e^{-\delta x}e^{-\delta T_k}\right)\prod_{k=N(t-x)+1}^{N(t+h-x)}M_X\left(ve^{-\delta x}e^{-\delta T_k}\right)\right]dF_{\tau_1}(x)\\
&\qquad+\int_t^{t+h}M_X\left(ve^{-\delta x}\right)E\left[\prod_{k=1}^{N(t+h-x)}M_X\left(ve^{-\delta x}e^{-\delta T_k}\right)\right]dF_{\tau_1}(x)+\overline{F}_{\tau_1}(t+h)\\
&=\int_0^t M_X\left((u+v)e^{-\delta x}\right)M_{Z(t-x),Z(t+h-x)}\left(ue^{-\delta x},ve^{-\delta x}\right)dF_{\tau_1}(x)\\
&\qquad+\int_t^{t+h}M_X\left(ve^{-\delta x}\right)M_{Z(t+h-x)}\left(ve^{-\delta x}\right)dF_{\tau_1}(x)+\overline{F}_{\tau_1}(t+h).
\end{aligned}$$

Remarque 4.1 :

(1) Des équations (4.2.1) et (4.2.2), nous vérifions aisément que:

$$M_{Z(t),Z(t+h)}(0,0)=1,\ M_{Z(t),Z(t+h)}(0,v)=M_{Z(t+h)}(v),\ M_{Z(t),Z(t+h)}(u,0)=M_{Z(t)}(u).$$

(2) Quand $t=0$ ou $h=0$ dans les équations (4.2.1) et (4.2.2), nous retrouvons les équations intégrales obtenues par Léveillé et Garrido (2001b).

Le théorème suivant nous donne une équation de récurrence des moments conjoints.

Théorème 4.1

Selon les hypothèses du lemme 4.1, les moments conjoints de notre processus de risque sont respectivement donnés, pour $n, m \in \mathbb{N}$, par :

(1) Pour le cas ordinaire:

$$E\left[Z^n(t)Z^m(t+h)\right] = \sum_{k=1}^{n+m} E\left[X_1^k\right] \sum_{i=[k-m]_+}^{\min(k,n)} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} \times \int_0^t e^{-(n+m)\delta v} E\left[Z^{n-i}(t-u)Z^{m-(k-i)}(t+h-u)\right] dm(u). \tag{4.2.3}$$

(2) Pour le cas retardé:

$$E\left[Z_d^n(t)Z_d^m(t+h)\right] = \sum_{k=1}^{n+m} E\left[X_1^k\right] \sum_{i=[k-m]_+}^{\min(k,n)} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} \times \int_0^t e^{-(n+m)\delta v} E\left[Z_o^{n-i}(t-u)Z_o^{m-(k-i)}(t+h-u)\right] dm_d(u),$$

où $[k-m]_+$ est la partie entière non négative de $k-m$.

Démonstration

Les équations ci-dessus sont obtenues en prenant les dérivées partielles des équations intégrales du lemme 4.1, un certain nombre de fois par rapport à u et v, puis en évaluant à chaque fois ces expressions à $(u,v)=(0,0)$ et enfin en utilisant l'induction.

Remarque 4.2

(1) Si nous supposons que $h=0$ dans les équations du théorème 4.1, alors nous retrouvons les expressions récursives pour les moments obtenus dans Léveillé et Garrido (2001b).

$$\begin{aligned} E\left[Z^{n+m}(t)\right] &= \sum_{k=1}^{n+m} E\left[X_1^k\right] \sum_{i=[k-m]_+}^{\min(k,n)} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} \int_0^t e^{-(n+m)\delta v} E\left[Z^{n+m-k}(t-v)\right] dm(v) \\ &= \sum_{k=1}^{n+m} \binom{m}{k-i} E\left[X_1^k\right] \int_0^t e^{-(n+m)\delta v} E\left[Z^{n+m-k}(t-v)\right] dm(v) . \end{aligned}$$

De façon similaire, nous avons :

$$E\left[Z_d^{n+m}(t)\right] = \sum_{k=1}^{n+m} \binom{m}{k-i} E\left[X_1^k\right] \int_0^t e^{-(n+m)\delta v} E\left[Z_o^{n+m-k}(t-v)\right] dm_d(v).$$

(2) Pour $m=n=1$, les moments conjoints du processus de risque du théorème 4.2 peuvent être écrits, pour le cas du renouvellement ordinaire, comme suit :

$$E\left[Z(t)Z(t+h)\right]=E\left[X_1\right]\int_0^t e^{-2\delta u}\left\{E\left[Z(t-u)\right]+E\left[Z(t+h-u)\right]\right\}dm(u)$$
$$+E\left[X_1^2\right]\int_0^t e^{-2\delta u}dm(u)\ .$$

Cette expression est équivalente à :

$$E\left[Z(t)Z(t+h)\right]=E\left[Z^2(t)\right]+E^2\left[X_1\right]\int_0^t\int_{t-u}^{t+h-u}e^{-\delta(v+2u)}dm(v)\,dm(u)\ .$$

De façon similaire, dans le cas retardé,

$$E\left[Z_d(t)Z_d(t+h)\right]=E\left[X_1\right]\int_0^t e^{-2\delta u}\left\{E\left[Z_o(t-u)\right]+E\left[Z_o(t+h-u)\right]\right\}dm_d(u)$$
$$+E\left[X_1^2\right]\int_0^t e^{-2\delta u}dm(u)\ ,$$

qui est aussi équivalente à:

$$E\left[Z_d(t)Z_d(t+h)\right]=E\left[Z_d^2(t)\right]+E^2\left[X_1\right]\int_0^t\int_{t-u}^{t+h-u}e^{-\delta(v+2u)}dm_o(v)\,dm_d(u)\ .$$

Exemple 4.1

Considérons une force d'intérêt réelle constante $\delta>0$ et un processus de dénombrement Poissonnien de paramètre $\lambda>0$. En utilisant l'identité bien connue pour $E\left[Z(t)\right]$, l'équation (3.4.1) et la formule 4.2.3 du théorème 4.1, nous obtenons :

$$E\left[Z^2(t)Z(t+h)\right]=\frac{\lambda}{3\delta}E\left[X_1^3\right]\left(1-e^{-3\delta t}\right)+\frac{\lambda^2}{2\delta^2}E\left[X_1^2\right]E\left[X_1\right]\left(1-e^{-\delta t}\right)\left[2-e^{-\delta(t+h)}\left(1-e^{-2\delta t}\right)\right]$$
$$+\frac{\lambda}{2\delta^3}E\left[X_1\right]\Big\{\lambda\left(\delta E\left[X_1^2\right]+2\lambda E^2\left[X_1\right]\right)-\lambda e^{-\delta t}\left(4\lambda E^2\left[X_1\right]+3\delta E\left[X_1^2\right]e^{-\delta t}\right.$$
$$\left.-2\lambda E^2\left[X_1\right]e^{-\delta t}-2\delta E\left[X_1^2\right]e^{-2\delta t}\right)-2\lambda^2E^2\left[X_1\right]e^{-\delta(t+h)}\left(1-e^{-\delta t}\right)^2\Big\}\ .$$

4.3 Les moments conjoints pour une force d'intérêt stochastique

Si nous considérons maintenant une force d'intérêt nette stochastique, la méthode précédente (celle qui utilise les arguments de renouvellement) ne peut être utilisée et, qui plus est, il n'est pas possible d'obtenir des formules récursives pour les moments conjoints. En conditionnant sur le temps de réalisation de la première réclamation, ce n'est guère le même processus qui se renouvelle après ce temps, car la dynamique de la force d'intérêt stochastique influe d'une manière beaucoup plus variable sur le processus.

Ainsi, nous avons besoin d'une méthode plus générale qui nous aidera à trouver des formules explicites du moment conjoint de notre processus de risque pour une force d'intérêt stochastique. Cette méthode sera basée essentiellement sur le lemme suivant qui donne la distribution conjointe conditionnelle des temps d'arrivée des réclamations sachant leur nombre dans l'intervalle de temps $[0, t]$, pour n'importe quel processus de renouvellement.

Lemme 4.2

Considérons un processus de renouvellement ordinaire ou retardé, tel que décrit en début de chapitre. Alors, pour tout $0 = x_0 < x_1 < x_2 ... < x_k \leq t$, $i_0 = 0, 1 = i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$ et $1 \leq k \leq n$, la distribution conjointe conditionnelle de $T_{i_1}, T_{i_2}, ..., T_{i_k} \mid N(t) = n$ et de $T_{i_1}, T_{i_2}, ..., T_{i_k} \mid N_d(t) = n$ est donnée par :

(1) Pour le cas ordinaire:

$$f_{T_{i_1}, T_{i_2}, ..., T_{i_k} | N(t)}\left(x_1, x_2, ..., x_k \middle| n\right) = \frac{P\left(N(t - x_k) = n - i_k\right) \prod_{j=1}^{k} f_{T_{i_j - i_{j-1}}}\left(x_j - x_{j-1}\right)}{P\left(N(t) = n\right)} \quad . \quad (4.3.1)$$

(2) Pour le cas retardé:

$$f_{T_{i_1}, T_{i_2}, ..., T_{i_k} | N_d(t)}\left(x_1, x_2, ..., x_k \middle| n\right) = \frac{P\left(N_o(t - x_k) = n - i_k\right) \prod_{j=1}^{k} f_{T_{i_j} - T_{i_{j-1}}}\left(x_j - x_{j-1}\right)}{P\left(N_d(t) = n\right)} \quad .$$

où $\{N_o(t), t \geq 0\}$ est le processus de renouvellement ordinaire sous-jacent.

Démonstration

Nous montrons le résultat pour le cas du renouvellement ordinaire. Ainsi, nous avons :

$$
\begin{aligned}
&P\left(T_{i_1} \le x_1, T_{i_2} \le x_2, \dots, T_{i_k} \le x_k \,\middle|\, N(t) = n\right) \\
&\quad = \frac{P\left(N(t) = n \,\middle|\, T_{i_1} \le x_1, T_{i_2} \le x_2, \dots, T_{i_k} \le x_k\right) P\left(T_{i_1} \le x_1, T_{i_2} \le x_2, \dots, T_{i_k} \le x_k\right)}{P\left(N(t) = n\right)} \\
&\quad = \frac{\int_0^{x_1}\int_{u_1}^{x_2} \dots \int_{u_{k-1}}^{x_k} P\left(N(t) = n \,\middle|\, T_{i_1} = u_1, T_{i_2} = u_2, \dots, T_{i_k} = u_k\right) f_{T_{i_1}, T_{i_2}, \dots, T_{i_k}}\left(u_1, u_2, \dots, u_k\right) du_k \dots du_1}{P\left(N(t) = n\right)} \\
&\quad = \frac{\int_0^{x_{i_1}}\int_{u_1}^{x_{i_2}} \dots \int_{u_{k-1}}^{x_{i_k}} P\left(N(t-u_k) = n - i_k\right) f_{T_{i_1}, \dots, T_{i_k}}(u_1, \dots, u_k)\, du_k \dots du_1}{P\left(N(t) = n\right)} .
\end{aligned}
$$

En notant que,

$$
\begin{aligned}
P\left(T_{i_1} \le u_1, T_{i_2} \le u_2, \dots, T_{i_k} \le u_k\right) &= P\left(T_{i_k} \le u_k \,\middle|\, T_{i_1} \le u_1, T_{i_2} \le u_2, \dots, T_{i_{k-1}} \le u_{k-1}\right) P\left(T_{i_1} \le u_1, T_{i_2} \le u_2, \dots, T_{i_{k-1}} \le u_{k-1}\right) \\
&= \int_0^{u_1}\int_{v_1}^{u_2} \dots \int_{v_{k-2}}^{u_{k-1}} P\left(T_{i_k} \le u_k \,\middle|\, T_{i_1} = v_1, T_{i_2} = v_2, \dots, T_{i_{k-1}} = v_{k-1}\right) f_{T_{i_1}, \dots, T_{i_{k-1}}}\left(v_1, \dots, v_{k-1}\right) dv_1 \dots dv_{k-1} \\
&= \int_0^{u_1}\int_{v_1}^{u_2} \dots \int_{v_{k-2}}^{u_{k-1}} P\left(T_{i_k - i_{k-1}} \le u_k - v_{k-1}\right) f_{T_{i_1}, \dots, T_{i_{k-1}}}\left(v_1, \dots, v_{k-1}\right) dv_1 \dots dv_{k-1} ,
\end{aligned}
$$

nous obtenons

$$
f_{T_{i_1}, \dots, T_{i_k}}\left(u_1, \dots, u_k\right) = f_{T_{i_k - i_{k-1}}}\left(u_k - u_{k-1}\right) f_{T_{i_1}, \dots, T_{i_{k-1}}}\left(u_1, \dots, u_{k-1}\right) .
$$

Ce qui nous donne

$$
f_{T_{i_1}, \dots, T_{i_k}}\left(u_1, \dots, u_k\right) = \prod_{j=1}^{k} f_{T_{i_k - i_{k-1}}}\left(u_j - u_{j-1}\right) .
$$

Finalement,

$$
P\left(T_{i_1} \le x_1, T_{i_2} \le x_2, \dots, T_{i_k} \le x_k \,\middle|\, N(t) = n\right) = \frac{\int_0^{x_1}\int_{u_1}^{x_2} \dots \int_{u_{k-1}}^{x_k} P\left(N(t-u_k) = n - i_k\right) \prod_{j=1}^{k} f_{T_{i_k - i_{k-1}}}\left(u_j - u_{j-1}\right) du_k \dots du_1}{P\left(N(t) = n\right)} ,
$$

ce qui donne l'équation (4.3.1).

Remarque 4.3

(1) Pour $k=n$, nous avons pour le cas du renouvellement ordinaire (et similairement pour le cas retardé)

$$f_{T_1,\ldots,T_n|N(t)=n}(x_1,\ldots,x_n|n)=\frac{P(N(t-x_n)=0)\prod_{j=1}^{k}f_{\tau_j}(x_j-x_{j-1})}{P(N(t)=n)}$$

$$=\frac{\bar{F}_{\tau_1}(t-x_n)\prod_{j=1}^{k}f_{\tau_j}(x_j-x_{j-1})}{P(N(t)=n)}\ .$$

(2) Ce théorème généralise les formules bien connues pour le processus de Poisson obtenues en utilisant les propriétés des statistiques d'ordre, voir (Rolsky et al. (1999), Willmot (1989)).

(3) Ce théorème donne un outil simple et efficient pour obtenir les moments, les moments conjoints et même éventuellement la fonction génératrice des moments de la somme de renouvellement escomptée quand le facteur d'escompte a une forme plus générale, qu'elle soit déterministe ou stochastique.

À l'aide du théorème précédent, nous pouvons maintenant calculer les moments conjoints de notre processus de risque pour une force d'intérêt réelle stochastique. Évidemment, étant donné la forme générale du facteur d'escompte, il est impossible d'obtenir des formules récursives; ce faisant, nous ne présenterons que les trois premiers moments conjoints pour le cas de renouvellement ordinaire, la démonstration s'adaptant aisément au cas retardé et même aux moments conjoints d'ordres supérieurs.

Théorème 4.2

Selon les hypothèses de notre modèle de risque, et pour une force stochastique d'intérêt, les second moments conjoints entre $Z(t)$ et $Z(t+h)$ sont donnés pour $t>0$ et $h>0$ par

(1)

$$E\left[Z^2(t)Z(t+h)\right]=E\left[Z^3(t)\right]$$
$$+E\left[X_1^2\right]E[X_1]\int_0^t\int_{t-u}^{t+h-u}E\left[D^2(u)D(u+v)\right]dm(v)dm(u)$$
$$+2E^3[X_1]\int_0^t\int_0^{t-u}\int_{t-u-v}^{t+h-u-v}E\left[D(u)D(u+v)D(u+v+w)\right]dm(w)dm(v)dm(u)\ ,$$

où

$$E\left[Z^3(t)\right]=E\left[X_1^3\right]\int_0^t E\left[D^3(u)\right]dm(u)$$

$$+3E\left[X_1^2\right]E\left[X_1\right]\int_0^t\int_0^{t-u} E\left[D^2(u)D(u+v)\right]dm(v)\,dm(u)$$

$$+3E\left[X_1^2\right]E\left[X_1\right]\int_0^t\int_0^{t-u} E\left[D(u)D^2(u+v)\right]dm(v)\,dm(u)$$

$$+6E^3\left[X_1\right]\int_0^t\int_0^{t-u}\int_0^{t-u-v} E\left[D(u)D(u+v)D(u+v+w)\right]dm(w)\,dm(v)\,dm(u)\ .$$

(2)

$$E\left[Z(t)Z^2(t+h)\right]=E\left[Z^3(t)\right]$$

$$+3E\left[X_1^2\right]E\left[X_1\right]\int_0^t\int_{t-u}^{t+h-u} E\left[D(u)D^2(u+v)\right]dm(v)\,dm(u)$$

$$+3E\left[X_1^2\right]E\left[X_1\right]\int_0^t\int_{t-u}^{t+h-u} E\left[D^2(u)D(u+v)\right]dm(v)\,dm(u)$$

$$+4E\left[X_1^3\right]\int_0^t\int_0^{t-u}\int_{t-u-v}^{t+h-u-v} E\left[D(u)D(u+v)D(u+v+w)\right]dm(w)\,dm(v)\,dm(u)$$

$$+2E\left[X_1^3\right]\int_0^t\int_{t-u}^{t+h-u}\int_{t-u-v}^{t+h-u-v} E\left[D(u)D(u+v)D(u+v+w)\right]dm(w)\,dm(v)\,dm(u)\ .$$

Démonstration

Nous illustrons l'idée principale de la preuve en solutionnant le deuxième résultat de notre théorème. Ainsi, obtenons une expression de la fonction génératrice des moments conjoints, pour n'importe quel parcours échantillonnal $\delta(x)$ de la force d'intérêt sur la période $\left[0,t+h\right]$.

Nous conditionnons sur $N(t),N(t+h),T_1,...,T_{N(t+h)}$, pour obtenir:

$$E\left[e^{xZ(t)+yZ(t+h)}\,|\,\delta(z),z\in[0,t+h]\right]$$

$$=E\left[\prod_{k=1}^{N(t)}M_{X_1}\left((x+y)D(T_k)\right)\prod_{k=1}^{N(t+h)}M_{X_1}\left(yD(T_k)\right)|\,\delta(z),z\in[0,t+h]\right]\ .$$

Une évaluation appropriée des dérivées partielles à $(x,y)=(0,0)$ donne :

$$\begin{aligned}
&E\left[Z^2(t)Z(t+h)\middle|\delta(z),z\in[0,t+h]\right]\\
&\quad=E\left[X_1^3\right]E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}D^3(T_k)\middle|\delta(z),z\in[0,t+h]\right]\\
&\quad+3E\left[X_1^2\right]E[X_1]E\left[\sum_{k=1}^{N(t)-1}\sum_{j=k+1}^{N(t)}D^2(T_k)D(T_j)\middle|\delta(z),z\in[0,t+h]\right]\\
&\quad+3E\left[X_1^2\right]E[X_1]E\left[\sum_{k=1}^{N(t)-1}\sum_{j=k+1}^{N(t)}D(T_k)D^2(T_j)\middle|\delta(z),z\in[0,t+h]\right]\\
&\quad+6E^3[X_1]E\left[\sum_{k=1}^{N(t)-2}\sum_{j=k+1}^{N(t)-1}\sum_{l=j+1}^{N(t)}D(T_k)D(T_j)D(T_l)\middle|\delta(z),z\in[0,t+h]\right]\\
&\quad+E^3[X_1]E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}\sum_{j=N(t)+1}^{N(t+h)}D^2(T_k)D(T_j)\middle|\delta(z),z\in[0,t+h]\right]\\
&\quad+2E\left[X_1^2\right]E[X_1]E\left[\sum_{k=1}^{N(t)-1}\sum_{j=k+1}^{N(t)}\sum_{l=N(t)+1}^{N(t+h)}D(T_k)D(T_j)D(T_l)\middle|\delta(z),z\in[0,t+h]\right].
\end{aligned}$$

Maintenant, si nous conditionnons d'abord sur $N(t)$, le premier terme de la sommation précédente donne :

$$\begin{aligned}
E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}D^3(T_k)\middle|\delta(z),z\in[0,t+h]\right]&=E\left[E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}D^3(T_k)\middle|N(t),\delta(z),z\in[0,t]\right]\right]\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_0^t D^3(u)f_{T_k}(u)P\big(N(t-u)=n-k\big)du\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\int_0^t D^3(u)f_{T_k}(u)P\big(N(t-u)=n-k\big)du\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t D^3(u)dF_{\tau_1}^{*k}(u)\\
&=\int_0^t D^3(u)d\sum_{k=1}^{\infty}F_{\tau_1}^{*k}(u)\\
&=\int_0^t D^3(u)dm(u)\ .
\end{aligned}$$

De la même manière, nous montrons que :

$$E\left[\sum_{k=1}^{N(t)-1}\sum_{j=k+1}^{N(t)} D^2(T_k)D(T_j)\Big|\delta(z),z\in[0,t+h]\right]$$

$$=E\left[E\left[\sum_{k=1}^{N(t)-1}\sum_{j=k+1}^{N(t)} D^2(T_k)D(T_j)\Big|N(t),\delta(z),z\in[0,t+h]\right]\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n}\int_0^t\int_u^t D^2(u)D(v)P(N(t-v)=n-j)f_{T_{j-k}}(v-u)f_{T_k}(u)dvdu$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty}\int_0^t\int_u^t D^2(u)D(v)P(N(t-v)=n-j)f_{T_{j-k}}(v-u)f_{T_k}(u)dvdu$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-u} D^2(u)D(u+v)dF_{T_{j-k}}(v-u)dF_{T_k}(u)$$

$$=\int_0^t\int_0^{t-u} D(u)D(u+v)dm(v)dm(u)\ .$$

Et de façon similaire, pour le troisième terme nous avons :

$$E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}\sum_{j=N(t)+1}^{N(t)} D(T_k)D^2(T_j)\Big|\delta(z),z\in[0,t+h]\right]=\int_0^t\int_0^{t-u} D(u)D^2(u+v)dm(v)dm(u)\ .$$

Pour les trois derniers termes, nous obtenons :

$$E\left[\sum_{k=1}^{N(t)-2}\sum_{j=k+1}^{N(t)-1}\sum_{l=j+1}^{N(t)} D(T_k)D(T_j)D(T_l)\Big|\delta(z),z\in[0,t+h]\right]$$

$$=E\left[E\left[\sum_{k=1}^{N(t)-2}\sum_{j=k+1}^{N(t)-1}\sum_{l=j+1}^{N(t)} D(T_k)D(T_j)D(T_l)\Big|N(t),\delta(z),z\in[0,t+h]\right]\right]$$

$$=\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-2}\sum_{j=k+1}^{n-1}\sum_{l=j+1}^{n}\int_0^t\int_u^t\int_v^t D(u)D(v)D(w)f_{T_k,T_j,T_l,N(t)}(u,v,w,n)dw\,dv\,du$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty}\sum_{l=j+1}^{\infty}\sum_{n=l}^{\infty}\int_0^t\int_u^t\int_v^t D(u)D(v)D(w)P(N(t-w)=n-l)f_{T_{l-j}}(w-v)f_{T_{j-k}}(v-u)f_{T_k}(u)dw\,dv\,du$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty}\sum_{l=j+1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-u}\int_0^{t-u-v} D(u)D(u+v)D(u+v+w)dF_{\tau_1}^{*(l-j)}(w-v)dF_{\tau_1}^{*(j-k)}(v-u)dF_{\tau_1}^{*k}(u)$$

$$=\int_0^t\int_0^{t-u}\int_0^{t-u-v} D(u)D(u+v)D(u+v+w)dm(w)dm(v)dm(u)\ ,$$

$$E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}\sum_{j=N(t)+1}^{N(t+h)} D^2(T_k)D(T_j)\middle|\delta(z),z\in[0,t+h]\right]$$

$$=E\left[E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}\sum_{j=N(t)+1}^{N(t+h)} D^2(T_k)D(T_j)\middle|N(t),N(t+h),\delta(z),z\in[0,t+h]\right]\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k+1}^{m}\int_0^t\int_t^{t+h} D^2(u)D(v)f_{T_k,T_j,N(t),N(t+h)}(u,v,n,m)\,dvdu$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty}\sum_{m=j}^{\infty}\sum_{n=k}^{j-1}\int_0^t\int_t^{t+h} D^2(u)D(v)f_{T_k,T_j,N(t),N(t+h)}(u,v,n,m)\,dvdu$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty}\sum_{m=j}^{\infty}\int_0^t\int_t^{t+h} D^2(u)D(v)f_{T_k,T_j,N(t+h)}(u,v,m)\,dvdu$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty}\sum_{m=j}^{\infty}\int_0^t\int_t^{t+h} D^2(u)D(v)P\left(N(t+h-v)=m-j\right)f_{T_{j-k}}(v-u)f_{T_k}(u)\,dvdu$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty}\int_0^t\int_t^{t+h} D^2(u)D(v)\,dF_{\tau_1}^{*(j-k)}(v-u)\,dF_{\tau_1}^{*k}(u)\,dvdu$$

$$=\int_0^t\int_{t-u}^{t+h-u} D^2(u)D(v)\,dm(v)\,dm(u) \quad ,$$

$$E\left[\sum_{k=1}^{N(t)-1}\sum_{j=k+1}^{N(t)}\sum_{l=N(t)+1}^{N(t+h)} D(T_k)D(T_j)D(T_l)\middle|\delta(z),z\in[0,t+h]\right]$$

$$=E\left[E\left[\sum_{k=1}^{N(t)-1}\sum_{j=k+1}^{N(t)}\sum_{l=N(t)+1}^{N(t+h)} D(T_k)D(T_j)D(T_l)\middle|\delta(z),z\in[0,t+h]\right]\right]$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n}\sum_{l=n+1}^{m}\int_0^t\int_u^t\int_t^{t+h} D(u)D(v)D(w)f_{T_k,T_j,T_j,N(t),N(t+h)}(u,v,w,n,m)\,dvdu$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty}\sum_{l=j+1}^{\infty}\sum_{m=l}^{\infty}\sum_{n=j}^{l-1}\int_0^t\int_u^t\int_t^{t+h} D(u)D(v)D(w)f_{T_k,T_j,T_j,N(t),N(t+h)}(u,v,w,n,m)\,dvdu$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty}\sum_{l=j+1}^{\infty}\sum_{m=l}^{\infty}\int_0^t\int_u^t\int_t^{t+h} D(u)D(v)D(w)f_{T_k,T_j,T_j,N(t+h)}(u,v,w,m)\,dvdu$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty}\sum_{l=j+1}^{\infty}\sum_{m=l}^{\infty}\int_0^t\int_u^t\int_t^{t+h} D(u)D(v)D(w)P\left(N(t+h-w)=m-l\right)$$

$$\times f_{T_{l-j}}(w-v)f_{T_{j-k}}(v-u)f_{T_k}(u)\,dwdvdu$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty}\sum_{l=j+1}^{\infty}\int_0^t\int_t^{t-u}\int_{t-u-v}^{t+h-u-v} D(u)D(u+v)D(u+v+w)$$

$$\times dF_{\tau_1}^{*(l-j)}(w)\,dF_{\tau_1}^{*(j-k)}(v)\,dF_{\tau_1}^{*k}(u)\,dw\,dv\,du$$

$$=\int_0^t\int_0^{t-u}\int_{t-u-v}^{t+h-u-v} D(u)D(u+v)D(u+v+w)\,dm(w)\,dm(v)\,dm(u)\ .$$

Finalement, comme chacune des trois intégrales précédentes est une variable aléatoire, le résultat suit en prenant l'espérance de chacune de ces expressions comme nous l'avons fait au chapitre 3.

Exemple 4.3

Soit $\{\delta(t),\, t\geq 0\}$ un processus d'Itô satisfaisant l'équation différentielle stochastique de Ho-Lee-Merton

$$d\delta(t)=r\,dt+\sigma\,dB(t)\ ,$$

avec dérive constante r et coefficient de diffusion σ, et où $B(t)$ est un mouvement Brownien standard.

Nous savons déjà que,

$$\int_0^t \delta(x)\,dx \sim N\left(\delta(0)\,t+r\frac{t^2}{2},\sigma^2\frac{t^3}{3}\right)\ .$$

À nouveau, en utilisant la théorie d'Itô (voir Oksendal (1992), p. 14 ff), nous obtenons

$$E\left[D^3(u)\right]=\exp\left\{-3\delta(0)u-\frac{3}{2}ru^2+\frac{3}{2}\sigma u^3\right\},$$

$$E\left[D^2(u)D(u+v)\right]=\exp\left\{-3\delta(0)(3u+v)-\frac{r}{2}\left(v^2+2uv+3u^2\right)+\frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{(3u+v)^3+2v^3}{9}\right]\right\},$$

$$E\left[D(u)D^2(u+v)\right]=\exp\left\{-3\delta(0)(3u+2v)-\frac{r}{2}\left(2v^2+4uv+3u^2\right)+\frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{(3u+2v)^3+4v^3}{9}\right]\right\},$$

$$E\left[D(u)D(u+v)D(u+v+w)\right]=\exp\left\{-3\delta(0)(3u+2v+v)-\frac{r}{2}\left[u^2+(u+v)^2+(u+v+w)^2\right]\right.$$
$$\left.+\frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{(3u+2v+w)^3+(2v+w)^3+3w^3}{18}\right]\right\}.$$

Tableau 3.8 Moment conjoint de $Z^2(t)Z(t+10)$ -- Cas Ho-Lee-Merton

t	1	5	10	15	20
$G(t,10)$	12.79654115	81.21774643	130.3738417	213.4751721	258.3156792
t	30	40	50	60	70
$G(t,10)$	301.4361741	327.3286514	335.6451364	337.7852827	338.5129512

Conclusion

Nous avons trouvé des formules récursives pour les moments conjoints des sommes de renouvellement escomptées, pour le cas d'un processus de renouvellement ordinaire ou retardé, quand la force d'intérêt nette est constante. Ces formules ont été obtenues en donnant, dans un premier temps, une expression intégrale de la fonction génératrice de notre processus de risque et en évaluant ensuite les dérivées appropriées.

Nous avons aussi trouvé une équation intégrale pour les moments conjoints d'ordres supérieurs quand le facteur d'escompte est stochastique. Ces formules ont été obtenues en donnant de nouvelles expressions de la densité de probabilité conjointe conditionnelle du temps d'arrivée des réclamations connaissant leur nombre, pour n'importe quel processus de renouvellement ; nous obtenons ainsi une extension de la technique bien connue pour le cas Poisson où les statistiques d'ordre sont utilisées et en appliquant d'une manière convenable ces identités à la fonction génératrice des moments conjoints à notre processus de risque.

Toutes les formules présentées dans ce chapitre peuvent être évaluées numériquement, apportent une alternative efficace à la simulation stochastique et aux méthodes de martingales communément rencontrées dans ce contexte de taux stochastique et offrent une meilleure compréhension de l'interaction des différents paramètres de notre problème. Finalement, ces formules fournissent de nouveaux outils pour examiner plus en profondeur les aspects statistiques de notre processus de risque.

Chapitre 5
PRÉDICTEURS, FONCTION GÉNÉRATRICE DES MOMENTS, PROBABILITÉ DE RUINE

Dans ce chapitre, notre objectif est d'étendre dans différentes directions les résultats obtenus par Léveillé, Garrido et Wang (2010) et Cai et Dickson (2001, 2003). Ainsi nous présentons, à la section 5.1, des prédicteurs de la valeur présente du processus des réclamations. À la section 5.2 nous présentons une équation intégrale pour la fonction génératrice des moments, pour une force d'intérêt générale. À la section 5.3, nous généralisons l'inégalité de Lundberg au cas de l'intérêt stochastique dans un contexte de renouvellement.

5.1 Prédicteurs

5.1.1 Motivation

Ayant toutes les informations sur notre processus de risque $Z(t)$, jusqu'au temps t, nous aimerions pouvoir estimer la valeur présente de ce processus au temps $t+h$, même dans le cas d'une force d'intérêt stochastique. Étant donné qu'il est généralement difficile d'obtenir la distribution de $Z(t)$, il faut alors s'en remettre très souvent à des méthodes d'estimation ou de simulation.

Comme nous avons obtenu les moments simples et conjoints de $Z(t)$, nous pouvons par exemple construire des prédicteurs (linéaires, quadratiques, polynomiaux) basés sur la minimisation de la distance quadratique pour prédire la valeur de $Z(t+h)$ si on connait celle de $Z(t)$. Ces prédicteurs nous aideront à mieux évaluer notre risque, pour estimer sa variabilité dans le temps par exemple, au fur et à mesure des informations reçues par l'assureur.

5.1.2 Prédicteurs pour les sommes de renouvellement escomptées

A- Prédicteur linéaire

Nous construisons un prédicteur linéaire $L(t,h)=a+bZ(t)$, où a et b dépendent éventuellement de t et h, en minimisant la fonction $A_{t,h}$ définie par :

$$A_{t,h}(a,b)=E\left[\left[Z(t+h)-a-bZ(t)\right]^2\right].$$

Les dérivées partielles de la fonction $A_{t,h}$ par rapport à a et b, que nous égalons à 0, donnent

$$\frac{\partial A_{t,h}(a,b)}{\partial a} = -2E[Z(t+h)-a-bZ(t)]=0 \ ,$$

$$\frac{\partial A_{t,h}(a,b)}{\partial b} = -2E[Z(t)[Z(t+h)-a-bZ(t)]]=0 \ .$$

Ainsi, nous obtenons le système d'équations linéaires

$$\begin{pmatrix} 1 & E[Z(t)] \\ E[Z(t)] & E\left[Z^2(t)\right] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E[Z(t+h)] \\ E[Z(t)Z(t+h)] \end{pmatrix},$$

dont les solutions sont ,

$$b = \frac{Cov(Z(t),Z(t+h))}{Var[Z(t)]} \ ,$$

$$a = \frac{E\left[Z^2(t)\right]E[Z(t+h)] - E[Z(t)]E[Z(t+h)Z(t)]}{Var[Z(t)]} \ .$$

Notre prédicteur linéaire peut donc être réécrit sous la forme suivante :

$$L(t,h) = E\left[Z(t+h)\right] + \rho(t,h)\left[\frac{V\left[Z(t+h)\right]}{V\left[Z(t)\right]}\right]^{1/2}\left[Z(t) - E\left[Z(t)\right]\right] .$$

Considérons maintenant le cas particulier où le montant des réclamations suit une loi dégénérée à 1, le nombre des réclamations suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$ et $\delta = 0.005$. Alors, en tenant compte des identités déjà obtenues au chapitre 3, soit

$$E[Z(t)] = \frac{1-e^{-\delta t}}{\delta} \ , \ Var[Z(t)] = \frac{1-e^{-2\delta t}}{2\delta} \ , \ \rho(t,h) = \left[\frac{1-e^{-2\delta t}}{1-e^{-2\delta(t+h)}}\right]^{1/2},$$

nous pouvons d'abord simuler la valeur de $Z(t)$, puis nous comparons la valeur simulée de $Z(t+h)$ avec celle de $L(t,h)$ dans le tableau qui suit, pour différentes valeurs de t et de h.

Tableau 5.1 Comparaison entre $Z_{simul}(t+h)|Z(t)$ et $L(t,h)$

t	h	$Z(t)$	$Z_{simul}(t+h)\|Z(t)$	$L(t,h)$	Écart relatif
1	0.01	0.967	1.007	1.012885876	0.006
1	1	0.967	1.927	1.995465089	0.034
1	10	0.967	11.011	10.70840225	-0.028
10	0.01	9.985	9.999	9.994512056	0.000
10	1	9.985	11.113	10.93385531	-0.016
10	10	9.985	20.037	19.26340129	-0.040
100	0.01	100.1	100.241	100.1060652	-0.001
100	1	100.1	101.136	100.7050169	-0.004
100	10	100.1	110.077	106.016169	-0.038

Remarque 5.1: Nous avons effectué 10,000 simulations puis avons pris la moyenne de ces dernières. Pour simuler $Z(t+h)$, nous le séparons d'abord en deux parties, soit

$$Z(t+h) = Z(t) + \sum_{i=N(t)+1}^{N(t+h)} D(T_i) X_i \ ,$$

puis nous ajoutons à la valeur simulée de $Z(t)$, la valeur simulée de $\sum_{i=N(t)+1}^{N(t+h)} D(T_i) X_i$.

Nous constatons que l'écart entre la valeur estimée et la valeur simulée n'est pas très grande, pour des valeurs de h assez petites par rapport à t. Par contre quand la valeur de h devient trop grande par rapport à t, les estimations risquent d'être de moins en moins bonnes. Cela s'explique quelque peu par le fait que l'apport à $Z(t)$ se fait surtout dans les «premiers moments».

B- Prédicteur quadratique

Construisons un prédicteur quadratique $Q(t,h) = a + bZ(t) + cZ^2(t)$, où *a*, *b* et c dépendent éventuellement de t et h, en minimisant la fonction $B_{t,h}$ définie par :

$$B_{t,h}(a,b) = E\left[\left[Z(t+h) - a - bZ(t) - cZ^2(t)\right]^2\right] \ .$$

À nouveau, les dérivées partielles de la fonction $B_{t,h}$ par rapport à *a*, *b* et *c*, que nous égalons à 0, donnent

$$\frac{\partial B_{t,h}(a,b)}{\partial a} = -2E\left[Z(t+h) - a - bZ(t) - cZ^2(t)\right] = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial B_{t,h}(a,b)}{\partial b} = -2E\left[Z(t)\left[Z(t+h) - a - bZ(t) - cZ^2(t)\right]\right] = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial B_{t,h}(a,b)}{\partial c} = -2E\left[Z^2(t)\left[Z(t+h) - a - bZ(t) - cZ^2(t)\right]\right] = 0 \ .$$

D'où le système d'équations linéaires

$$\begin{pmatrix} 1 & E[Z(t)] & E\left[Z^2(t)\right] \\ E[Z(t)] & E\left[Z^2(t)\right] & E\left[Z^3(t)\right] \\ E\left[Z^2(t)\right] & E\left[Z^3(t)\right] & E\left[Z^4(t)\right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E[Z(t+h)] \\ E[Z(t)Z(t+h)] \\ E\left[Z^2(t)Z(t+h)\right] \end{pmatrix} .$$

En posant :

- $$\begin{aligned} \Delta = {} & E\left[Z^2(t)\right]E\left[Z^4(t)\right] - E^2\left[Z^3(t)\right] \\ & - E^2[Z(t)]E\left[Z^4(t)\right] - E\left[Z^3(t)\right]E\left[Z^2(t)\right]E[Z(t)] \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \Delta_a = {} & E[Z(t+h)]\left\{E\left[Z^2(t)\right]E\left[Z^4(t)\right] - E^2\left[Z^3(t)\right]\right\} \\ & - E[Z(t)Z(t+h)]\left\{E[Z(t)]E\left[Z^4(t)\right] - E\left[Z^2(t)\right]E\left[Z^3(t)\right]\right\} \\ & + E[Z(t)Z(t+h)]\left\{E[Z(t)]E\left[Z^4(t)\right] - E\left[Z^2(t)\right]E\left[Z^3(t)\right]\right\} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \Delta_b = {} & E[Z(t)Z(t+h)]E\left[Z^4(t)\right] - E\left[Z^2(t)Z(t+h)\right]E\left[Z^3(t)\right] \\ & - E[Z(t)]\left\{E[Z(t+h)]E\left[Z^4(t)\right] - E\left[Z^2(t)Z(t+h)\right]E\left[Z^2(t)\right]\right\} \\ & + E\left[Z^2(t)\right]\left\{E[Z(t+h)]E\left[Z^3(t)\right] - E\left[Z^2(t)\right]E[Z(t)Z(t+h)]\right\} \end{aligned}$$

$$\bullet\ \Delta_c = E\left[Z^2(t)Z(t+h)\right]E\left[Z^2(t)\right]-E\left[Z(t)Z(t+h)\right]E\left[Z^3(t)\right]$$
$$-E\left[Z(t)\right]\left\{E\left[Z^2(t)Z(t+h)\right]E\left[Z(t)\right]-E\left[Z(t+h)\right]E\left[Z^3(t)\right]\right\}$$
$$+E\left[Z^2(t)\right]\left\{E\left[Z(t+h)Z(t)\right]E\left[Z(t)\right]-E\left[Z^2(t)\right]E\left[Z(t+h)\right]\right\}$$

nous obtenons des équations précédentes,

$$a=\frac{\Delta_a}{\Delta}\ ,\ b=\frac{\Delta_b}{\Delta}\ ,\ c=\frac{\Delta_c}{\Delta}\ .$$

En considérant les mêmes hypothèses que dans l'exemple précédent, et en tenant compte du fait que :

$$\bullet\ E\left[Z^3(t)\right]=\frac{1-e^{-3\delta t}}{3\delta}+\frac{3\left(e^{-3\delta t}-e^{-2\delta t}-e^{-\delta t}+1\right)}{2\delta^2}+\frac{-e^{-3\delta t}+3e^{-2\delta t}-3e^{-\delta t}+1}{\delta^3}\ ,$$

$$\bullet\ E\left[Z^4(t)\right]=\frac{1-e^{-4\delta t}}{4\delta}+\frac{3-4e^{-\delta t}+e^{-4\delta t}}{2\delta^2}$$
$$+\frac{3\left(1-2e^{-2\delta t}+e^{-4\delta t}\right)}{4\delta^2}+\frac{3-4e^{-\delta t}+6e^{-2\delta t}-5e^{-4\delta t}}{2\delta^3}+\frac{1-4e^{-3\delta t}+3e^{-4\delta t}}{12\delta^2}$$
$$+\frac{1-4e^{-\delta t}+6e^{-2\delta t}-3e^{-4\delta t}}{\delta^4}+\frac{3-4e^{-\delta t}-6e^{-2\delta t}+12e^{-3\delta t}-5e^{-4\delta t}}{2\delta^3}\ ,$$

$$\bullet\ E\left[Z(t)Z(t+h)\right]=\frac{1-e^{-2\delta t}}{2\delta}+\frac{\left(1-e^{-\delta t}\right)\left(1-e^{-\delta(t+h)}\right)}{\delta^2}\ ,$$

$$\bullet\ E\left[Z^2(t)Z(t+h)\right]=\frac{1-e^{-3\delta t}}{3\delta}+\frac{1-e^{-\delta t}}{2\delta^2}\left[2-e^{-\delta(t+h)}\left(1-e^{-2\delta t}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{2\delta^3}\left\{(\delta+2)-e^{-\delta t}\left(4+3\delta e^{-\delta t}-2e^{-\delta t}-2\delta e^{-2\delta t}\right)-2e^{-\delta(t+h)}\left(1-e^{-\delta t}\right)^2\right\},$$

nous répétons le même type d'opérations afin de comparer la valeur simulée de $Z(t+h)$ avec celle de $Q(t,h)$ dans le tableau qui suit, pour différentes valeurs de t et de h.

Tableau 5.2 Comparaison entre $Z_{simul}(t+h)|Z(t)$ et $Q(t,h)$

t	h	$Z(t)$	$Z_{simul}(t+h)\|Z(t)$	$Q(t,h)$	Écart relatif
1	0.001	0.967	1.007	1.010867476	0.004
1	1	0.967	1.927	1.945560054	0.01
1	10	0.967	11.011	10.80720814	-0.02
10	0.01	9.985	9.999	9.997016090	0.000
10	1	9.985	11.113	11.09221136	-0.002
10	10	9.985	20.037	19.54650814	-0.025
100	0.01	100.1	100.241	100.1844870	-0.001
100	1	100.1	101.136	100.9025264	-0.002
100	10	100.1	110.077	108.223459	-0.017

Nous constatons que l'écart entre la valeur estimée et la valeur simulée n'est pas très grande pour de petites valeurs de h par rapport à t. De même quand la valeur de h devient grande par rapport à t, les estimations sont moins bonnes. En comparant les résultats des deux approches, en A et B, nous constatons que les estimations obtenues à partir du prédicteur quadratique nous donnent des estimations légèrement meilleures comparées à celles obtenues avec le prédicteur linéaire. Nous pouvons donc présumer que la qualité de l'estimation, pour un h relativement petit par rapport t, augmentera avec le degré du polynôme utilisé. Le prix à payer est de calculer des moments simples et conjoints.

5.2 Fonction génératrice des moments des sommes de renouvellement escomptées

Trouver la distribution de $Z(t)$ demeure un problème complexe, surtout lorsqu'une force d'intérêt plus générale est considérée. Un des moyens privilégiés pour l'obtenir est de trouver la f.g.m. du processus pour ensuite l'inverser. Une méthode a été développée en ce sens par Léveillé, Garrido et Wang (2010), pour une force d'intérêt constante, et nous nous appliquerons à l'étendre à une force d'intérêt plus générale.

5.2.1 Force d'intérêt déterministe

En utilisant les résultats du lemme 4.2 du chapitre 4, le théorème qui suit nous permet de généraliser l'équation intégrale de la f.g.m de $Z(t)$ obtenue par les auteurs précédents pour une force déterministe. Notre démarche sera similaire à la leur, mais tout de même avec quelques variantes.

Nous considérons les hypothèses de la section 3.1 du chapitre 3, auxquelles nous ajoutons l'existence de la fonction génératrice des moments $M_X(t)$.

Théorème 5.1

Pour $t>0$, $s\in\Omega\subset\mathbb{R}$ et pour une force d'intérêt déterministe $\delta(t)$, l'expression de la fonction génératrice des moments est donnée par :

(1) Pour le cas ordinaire:

$$M_{Z(t)}(s)=\bar{F}_{\tau_1}(t)$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t\int_{u_1}^t\ldots\int_{u_n}^t\prod_{i=1}^{n+1}M_X\left(sD(u_i)\right)\bar{F}_{\tau_1}\left(t-u_{n+1}\right)dF_{\tau_1}\left(u_{n+1}-u_n\right)\ldots dF_{\tau_1}\left(u_1\right). \tag{5.2.1}$$

(2) Pour le cas retardé:

$$M_{Z_d(t)}(s)=\bar{F}_{\tau_1}(t)+\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t\int_{u_1}^t\ldots\int_{u_n}^t\prod_{i=1}^{n+1}M_X\left(sD(u_i)\right)$$
$$\times\bar{F}_{\tau_2}\left(t-u_{n+1}\right)dF_{\tau_2}\left(u_{n+1}-u_n\right)\ldots dF_{\tau_2}\left(u_2-u_1\right)dF_{\tau_1}\left(u_1\right). \tag{5.2.2}$$

Démonstration

Nous démontrons le résultat uniquement pour le cas ordinaire. Ainsi en conditionnant d'abord sur le nombre des réclamations, nous obtenons

$$E\left[e^{sZ(t)}\middle|N(t)=n+1\right]$$
$$=\bar{F}(t)+\int_0^t\int_{u_1}^t\ldots\int_{u_n}^t E\left[\prod_{i=1}^{n+1}e^{sD(u_i)X_i}\right]f_{T_1,T_2,\ldots,T_{n+1}|N(t)}\left(u_1,u_2,\ldots,u_{n+1}\middle|n+1\right)du_{n+1}\ldots du_1$$
$$=\bar{F}(t)+\int_0^t\int_{u_1}^t\ldots\int_{u_n}^t\prod_{i=1}^{n+1}E\left[e^{sD(u_i)X_i}\right]f_{T_1,T_2,\ldots,T_{n+1}|N(t)}\left(u_1,u_2,\ldots,u_{n+1}\middle|n+1\right)du_{n+1}\ldots du_1$$
$$=\bar{F}(t)+\int_0^t\int_{u_1}^t\ldots\int_{u_n}^t\prod_{i=1}^{n+1}M_X\left(sD(u_i)\right)f_{T_1,T_2,\ldots,T_{n+1}|N(t)}\left(u_1,u_2,\ldots,u_{n+1}\middle|n+1\right)du_{n+1}\ldots du_1$$
$$=\bar{F}(t)+\int_0^t\int_{u_1}^t\ldots\int_{u_n}^t\prod_{i=1}^{n+1}M_X\left(sD(u_i)\right)\frac{f_{T_1,T_2,\ldots,T_{n+1},N(t)}\left(u_1,u_2,\ldots,u_{n+1},n+1\right)}{P\left(N(t)=n+1\right)}du_{n+1}\ldots du_1 .$$

Enfin, en sommant sur la distribution de $N(t)$ et en utilisant le lemme 4.2 du chapitre 4, nous obtenons des expressions similaires à celles de Léveillé, Garrido et Wang (2010), soit

$$\begin{aligned}M_{Z(t)}(s) &= E\left[e^{sZ(t)}\right]\\ &= \bar{F}(t)+\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{t}\int_{u_1}^{t}\dots\int_{u_n}^{t}\prod_{i=1}^{n+1}M_X\left(sD(u_i)\right)P\left(N(t-u_{n+1})=0\right)\prod_{j=1}^{n+1}f_{T_j-T_{j-1}}\left(u_j-u_{j-1}\right)du_{n+1}\dots du_1\\ &= \bar{F}(t)+\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{t}\int_{u_1}^{t}\dots\int_{u_n}^{t}\prod_{i=1}^{n+1}M_X\left(sD(u_i)\right)\bar{F}\left(t-u_{n+1}\right)dF_{\tau_1}\left(u_{n+1}-u_n\right)\dots dF_{\tau_1}\left(u_1\right).\end{aligned}$$

Remarque 5.2: L'équation (5.2.1), tout comme l'équation (5.2.2), peut s'écrire comme suit

$$M_{Z(t)}(s)=\bar{F}_{\tau_1}(t)+\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{t}\int_{0}^{t-x_1}\dots\int_{0}^{t-\sum_{i=1}^{n}x_i}\prod_{i=1}^{n+1}M_X\left(sD\left(\sum_{j=1}^{i}x_j\right)\right)\bar{F}_{\tau_1}\left(t-\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)dF_{\tau_1}\left(x_{n+1}\right)\dots dF_{\tau_1}\left(x_1\right).$$

5.2.2 Force d'intérêt stochastique

Léveillé, Garrido et Wang (2010) ont trouvé une expression intégrale et même une équation différentielle de la fonction génératrice des moments de la somme escomptée mais pour une force d'intérêt constante. Dans la sous-section précédente, nous avons donné des expressions intégrales pour la f.g.m. de la somme escomptée dans le cas d'une force d'intérêt déterministe. Que deviennent ces résultats si la force d'intérêt est stochastique?

Théorème 5.2

Pour $t>0$, et $s\in\Omega\subset\mathbb{R}$, l'expression de la fonction génératrice des moments de $Z(t)$, est donnée par :

(1) Pour le cas ordinaire:

$$\begin{aligned}M_{Z(t)}(s) &= \bar{F}_{\tau_1}(t)\\ &\quad +\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{t}\int_{u_1}^{t}\dots\int_{u_n}^{t}E\left[\prod_{i=1}^{n+1}M_X\left(sD(u_i)\right)\right]\bar{F}_{\tau_1}\left(t-u_{n+1}\right)dF_{\tau_1}\left(u_{n+1}-u_n\right)\dots dF_{\tau_1}\left(u_1\right).\end{aligned}$$

(2) Pour le cas retardé:

$$M_{Z(t)}(s)=\bar{F}_{\tau_1}(t)+\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t\int_{u_1}^t\ldots\int_{u_n}^t E\left[\prod_{i=1}^{n+1}M_X\left(sD(u_i)\right)\right]$$
$$\times\bar{F}_{\tau_2}(t-u_{n+1})dF_{\tau_2}(u_{n+1}-u_n)\ldots dF_{\tau_2}(u_2-u_1)dF_{\tau_1}(u_1).$$

Démonstration

À nouveau, nous ne démontrons que le cas ordinaire. Ainsi, de l'équation (5.2.1), et pour toute trajectoire fixée du taux $\delta(x)$, nous avons du théorème précédent:

$$E\left[e^{sZ(t)}\,|\,\delta(x),x\in[0,t]\right]=E\left[E\left[e^{sZ(t)}\,|\,N(t),\delta(x),x\in[0,t]\right]\right]$$
$$=\bar{F}(t)+\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t\int_{u_1}^t\ldots\int_{u_n}^t\prod_{i=1}^{n+1}M_X\left(sD(u_i)\right)\bar{F}_{\tau_1}(t-u_{n+1})dF_{\tau_1}(u_{n+1}-u_n)\ldots dF_{\tau_1}(u_1).$$

Comme l'intégrale précédente résulte d'une trajectoire particulière de la variable aléatoire $\delta(t)$, il ne reste qu'à appliquer l'espérance pour obtenir le résultat attendu, soit :

$$E\left[e^{sZ(t)}\right]=E\left[E\left[e^{sZ(t)}\,|\,\delta(x),x\in[0,t]\right]\right]$$
$$=\bar{F}(t)+E\left[\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-x_1}\ldots\int_0^{t-\sum_{i=1}^{n}x_i}\prod_{i=1}^{n+1}M_X\left(sD\left(\sum_{j=1}^{i}x_j\right)\right)\bar{F}_{\tau_1}\left(t-\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)dF_{\tau_1}(x_{n+1})\ldots dF_{\tau_1}(x_1)\right]$$
$$=\bar{F}(t)+\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-x_1}\ldots\int_0^{t-\sum_{i=1}^{n}x_i}E\left[\prod_{i=1}^{n+1}M_X\left(sD\left(\sum_{j=1}^{i}x_j\right)\right)\right]\bar{F}_{\tau_1}\left(t-\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)dF_{\tau_1}(x_{n+1})\ldots dF_{\tau_1}(x_1).$$

L'expression obtenue est essentiellement de nature théorique, le facteur d'espérance étant pratiquement impossible à manipuler. Nous nous limiterons donc à ne donner des exemples que pour une force d'intérêt déterministe.

5.2.3 Exemples

Dans cette sous-section, nous voulons essentiellement examiner le cas Poisson composé, et nous voulons ensuite étendre la méthode de Léveillé, Garrido et Wang (2010) afin de résoudre les équations intégrales précédentes, dans le cas d'une force d'intérêt déterministe.

A- Cas Poisson composée

Dans cette exemple, nous considérons la f.g.m. du processus de Poisson composé escompté, avec force d'intérêt déterministe.

Le théorème 5.1 nous donne dans ce cas :

$$M_{Z(t)}(s)=e^{-\lambda t}+e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n+1}\int_0^t\int_0^{u_{n+1}}\ldots\int_0^{u_2}\prod_{i=1}^{n+1}M_X\left(sD(u_i)\right)du_1\ldots du_{n+1} .$$

En dérivant l'expression de $M_{Z(t)}(s)$ par rapport à t, tout comme dans Léveillé, Garrido et Wang (2010), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}M_{Z(t)}(s)&=-\lambda\left[e^{-\lambda t}+e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t\int_{u_1}^t\ldots\int_{u_n}^t\prod_{i=1}^{n+1}M_X\left(sD(u_i)\right)d\left(u_{n+1}-u_n\right)\ldots du_1\right]\\&\quad+e^{-\lambda t}\left[M_X\left(sD(t)\right)+M_X\left(sD(t)\right)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\int_0^t\int_0^{u_n}\ldots\int_0^{u_2}\prod_{i=1}^{n}M_X\left(sD(u_i)\right)du_1\ldots du_n\right]\\&=-\lambda M_{Z(t)}(s)+M_X\left(sD(t)\right)M_{Z(t)}(s)\\&=\lambda\left[M_X\left(sD(t)\right)-1\right]M_{Z(t)}(s) .\end{aligned}$$

L'équation ci-dessus est une équation différentielle ordinaire du premier ordre, dont la solution est:

$$M_{Z(t)}(s)=\exp\left\{\lambda\int_0^t[M_X(sD(u))-1]du\right\}.$$

Ainsi, si $X\sim\exp(\theta)$ et $\delta(x)=a+bx$, nous obtenons :

$$M_{Z(t)}(s)=\exp\left\{\lambda s\int_0^t\left[\theta e^{au+\frac{b}{2}u^2}-s\right]^{-1}du\right\} .$$

En posant $a=0.01, b=0.002$, $\lambda=\theta=1$, nous obtenons pour $t>0$ et $s>0$:

$$M_{Z(t)}(s)=\left(\frac{6.408219509e^{-0.0632455532\,t}\ s-8.57464189}{6.408219509\,s-8.57464189}\right)^{15.42100372}.$$

Pour $t>0$ et $s<0$, nous avons une intégrale qui n'a pas de primitives simples puisque la fonction à intégrer a la forme :

$$\frac{1}{e^{0.01z+0.001z^2}+s}.$$

Il faut alors s'en remettre à l'intégration numérique, ce que Maple fait bien.

Remarque 5.3: Quand $b\rightarrow 0$, nous retrouvons l'expression de la f.g.m. donnée en page 8, dans le cas d'une force constante d'intérêt.

B- Cas Phase-type

Une distribution phase-type (PH) est définie comme une densité de probabilité qui représente le temps jusqu'à absorption d'une chaîne de Markov continue a n états de transition $i=1,2,3,\ldots,n$ et un état absorbant 0.

Les distributions (PH) englobent la loi exponentielle, Erlang(n), et les distributions de Cox. De plus, ces distributions sont denses dans la classe de toutes les distributions définies sur les nombres réels non négatif, permettant ainsi des approximations de distributions.

Léveillé, Garrido et Wang (2010) utilisent cette classe de distributions pour inverser la f.g.m. de $Z(t)$, dans le cas où la force d'intérêt est constante. Dans cette sous-section, nous étendons leurs résultats à une force d'intérêt déterministe.

Nous définissons en B-1 les distributions phase-types continues, leurs moments d'ordre n et leur fonction génératrice des moments, et en B-2 des identités liées au processus de renouvellement généré par une distribution (PH) et à la f.g.m. de $Z(t)$.

B-1 Définition des distributions phase-type continues

Ici, nous considérons uniquement la définition mathématique des distributions (PH). Pour les détails sur l'interprétation probabiliste et les propriétés des distributions (PH) dans les chaînes de Markov, se référer à Neuts (1981) et Asmussen (2003).

Supposons que A est une matrice carrée non singulière d'ordre n telle que $\lim_{x\to\infty} e^{Ax} = 0$, $\underline{\alpha}$ est un vecteur colonne de dimension n tel que : $\underline{\alpha}'\underline{1} = 1$, où $\underline{1}$ est un vecteur colonne de dimension n, ne contenant que des 1, i.e.:

$$\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)' \ , \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \, , \alpha_i \geq 0 \ , \ \underline{1} = (1\,1 ... 1)'.$$

Si la fonction de répartition $F_X(x)$ d'une variable aléatoire X peut être écrite comme suit:

$$F_X(x) = 1 - \alpha' e^{Ax} \underline{1} \ , \ x \geq 0 \ ,$$

alors nous disons que $F_X(x)$ est (ou X a) une distribution (PH) de paramètres (α, A).

En prenant la dérivée de $F_X(x)$, nous obtenons la fonction de densité de probabilité de X, soit:

$$f_X(x) = -\alpha' e^{Ax} A\underline{1}, \ x \geq 0.$$

En utilisant l'identité précédente, nous pouvons démontrer que les moments d'ordre n sont donnés par

$$E\left[X^n\right] = (-1)^n n! \alpha' A^{-n} \underline{1} \ \ , \ n \in \mathbb{N},$$

et que la f.g.m. de X est donnée par

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} f_X(x) dx = -\alpha' \int_0^\infty e^{(tI+A)x} dx A\underline{1} = -\alpha' (tI + A)^{-1} A\underline{1} \ ,$$

où I est la matrice identité d'ordre $n \times n$.

Nous présentons ci-dessous quelques exemples de distributions (PH) (voir Fackrell, 2003 et Neuts, 1981).

Exemple

Si X a une distribution exponentielle, avec densité $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$, alors X a une distribution (PH) avec $\alpha' = (1)$, $A = (-\lambda)_{1\times 1}$.

Exemple

Si X a une distribution hyper-exponentielle (aussi appelée mélange d'exponentielles), avec densité $f_X(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i e^{-\lambda_i x}$, $x>0$, $\lambda_i>0$, $\alpha_i>0$ et $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$, alors X a une distribution (PH) avec α et A donnés par :

$$\underline{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)' \text{ et } A=\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0\dots 0 \\ 0 & -\lambda_2\dots 0 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ 0 & 0\dots-\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Pour des propriétés additionnelles des distributions (PH), voir Asmussen (2003) et Neuts (1981).

B-2 Processus de renouvellement généré par une distribution Phase-type

Nous utiliserons ici essentiellement la démarche de Léveillé, Garrido et Wang (2010) pour développer une équation intégrale de la f.g.m. de $Z(t)$, dans le cas d'un processus de renouvellement (PH) et pour une force d'intérêt déterministe.

Considérons la fonction génératrice des moments $M_{Z(t)}(s)$ telle que $\{N(t)\,,t\geq 0\}$ est un processus de renouvellement ordinaire dont le temps entre les réclamations suit une loi Phase-type.

Ainsi, en suivant la démarche des auteurs précédents et en utilisant les identités de la sous-section B-1, nous avons :

$$\begin{aligned}M_{Z(t)}(s)&=\bar{F}(t)+\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t\int_{u_1}^t\dots\int_{u_n}^t\prod_{i=1}^{n+1}M_X(sD(u_i))\bar{F}(t-u_{n+1})dF(u_{n+1}-u_n)\dots dF(u_1)\\&=\alpha' e^{At}\underline{1}+\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t\int_0^{u_{n+1}}\dots\int_0^{u_2}\prod_{i=1}^{n+1}M_X(sD(u_i))\alpha' e^{A(t-u_{n+1})}\underline{1}\alpha' e^{A(u_{n+1}-u_n)}(-A)\underline{1}\dots\alpha' e^{Au_1}(-A)\underline{1}du_1..du_{n+1}\\&=\alpha' e^{At}\underline{1}+e^{At}h(t,s)\,,\end{aligned}$$

où,

$$h(t,s)=\int_0^t M_X(sD(u_i))\alpha' e^{Au_1}\underline{1}\alpha' e^{Au_1}(-A)\underline{1}du_1$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{u_{n+1}}...\int_0^{u_2}\prod_{i=1}^{n+1}M_X(sD(u_i))\alpha' e^{-Au_{n+1}}\underline{1}\alpha' e^{A(u_{n+1}-u_n)}(-A)\underline{1}...\alpha' e^{Au_1}(-A)\underline{1}du_1...du_{n+1}.$$

En dérivant les deux membres de l'égalité ci-dessus par rapport à t, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}M_{Z(t)}(s)&=\alpha' e^{At}A\underline{1}+e^{At}Ah(t,s)+e^{At}\frac{\partial}{\partial t}h(t,s)\\&=\left[M_X(sD(t))-1\right]\alpha' e^{At}(-A)\underline{1}+\left[M_X(sD(t))-1\right]f(t,s),\end{aligned}$$

où

$$f(t,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{u_n}...\int_0^{u_2}\prod_{i=1}^{n}M_X(sD(u_i))\alpha' e^{-Au_n}(-A)\underline{1}\alpha' e^{A(u_n-u_{n-1})}(-A)\underline{1}...\alpha' e^{Au_1}(-A)\underline{1}du_1...du_n.$$

a. Cas Erlang(2)

De façon similaire à ce qui a été fait dans Léveillé , Garrido et Wang (2010), il nous faudra dériver une seconde fois la f.g.m. de $Z(t)$ par rapport à t afin d'obtenir une équation différentielle d'ordre 2. Mais d'abord, nous devons évaluer $\frac{\partial}{\partial t}f(t,s)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}f(t,s)&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{u_n}...\int_0^{u_2}\prod_{i=1}^{n}M_X(sD(u_i))\alpha' Ae^{A(t-u_n)}(-A)\underline{1}\alpha' e^{Au_1}(-A)\underline{1}...e^{A(u_n-u_{n-1})}(-A)\underline{1}du_1...du_n\\&=-2\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{u_n}...\int_0^{u_2}\prod_{i=1}^{n}M_X(sD(u_i))\alpha' e^{A(t-u_n)}(-A)\underline{1}\alpha' e^{Au_1}(-A)\underline{1}...e^{A(u_n-u_{n-1})}(-A)\underline{1}du_1...du_n\\&\quad+\lambda^2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{u_n}...\int_0^{u_2}\prod_{i=1}^{n}M_X(sD(u_i))\alpha' e^{A(t-u_n)}\underline{1}\alpha' e^{Au_1}(-A)\underline{1}...e^{A(u_n-u_{n-1})}(-A)\underline{1}du_1...du_n\ .\end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$e^{A(t-u_n)}=\begin{pmatrix}e^{-\lambda(t-u_n)} & \lambda(t-u_n)e^{-\lambda(t-u_n)}\\ 0 & e^{-\lambda(t-u_n)}\end{pmatrix},$$

ce qui implique que

$$\lambda^2\alpha' e^{A(t-u_n)}\underline{1}-\lambda\alpha' e^{A(t-u_n)}A\underline{1}=\lambda^2 e^{-\lambda(t-u_n)}\ ,$$

et que

$$\alpha' A e^{A(t-u_n)}(-A)\underline{1} = -2\lambda\alpha' e^{A(t-u_n)}(-A)\underline{1} + \lambda^2\alpha' e^{A(t-u_n)}\underline{1} \ ,$$

cela entraîne que $\dfrac{\partial}{\partial t} f(t,s)$ peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,s) = -2\lambda f(t,s) + \lambda^2 M_{Z(t)}(s) - \lambda^2 \ .$$

Ainsi,

$$\frac{\partial}{\partial t} M_{Z(t)}(s) = \left[M_X(sD(t)) - 1\right]\alpha' e^{At}(-A)\underline{1} + \left[M_X(sD(t)) - 1\right] f(t,s) \ ,$$

et donc,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_{Z(t)}(s) = a_1(t,s)\frac{\partial}{\partial t} M_{Z(t)}(s) + a_0(t,s) M_{Z(t)}(s) \ ,$$

où

$$M_{Z(0)}(s) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial t} M_{Z(t)}(s)\Big|_{t=0} = 0 \ ,$$

$$a_0(t,s) = \lambda^2\left[M_X(sD(t)) - 1\right] \quad , \quad a_1(t,s) = \frac{\partial}{\partial t}\ln\left[M_X(sD(t)) - 1\right] - 2\lambda \ ,$$

ce qui constitue une équation différentielle d'ordre 2 à résoudre.

Maintenant supposons que le temps entre deux sinistres suit une Erlang(2), i.e.:

$$\alpha' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \ ,$$

et supposons également que le montant des sinistres suit une loi exponentielle de paramètre $\theta = 1$, et que $\lambda = 0.001, \delta_1 = 0.01, \delta_2 = 0.03$ avec $\delta(t) = \delta_1 1_{]0,2[}(t) + \delta_2 1_{[2,\infty[}(t)$. Alors, toujours avec l'aide de « Maple » , nous obtenons l'expression suivante :

$$M_{Z(t)}(x) = F_1(x)\, LegendreQ\left(-\frac{4}{3}, \frac{\left(xe^{\frac{-3t}{100}+\frac{1}{50}} - 2\right)e^{-\frac{1}{50}+\frac{3t}{100}}}{x}\right)e^{\frac{-t}{100}}$$

$$+ F_2(x)\, LegendreP\left(\frac{1}{3}, \frac{\left(xe^{\frac{-3t}{100}+\frac{1}{50}} - 2\right)e^{-\frac{1}{50}+\frac{3t}{100}}}{x}\right)e^{\frac{-t}{100}} \ ,$$

où $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont définies de telle sorte que

$$M_{Z(t)}(0) = 1 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} M_{Z(t)}(x)\bigg|_{t=0} = 0 \quad ,$$

et

$$LegendreP(a,z) = hypergeom\left([-a, a+1], 1, \frac{1-z}{2}\right) \ ,$$

$$LegendreQ(a,z) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(1+a)\, hypergeom\left(\left[1+\frac{a}{2}, 1+\frac{a}{2}\right], \left[\frac{3}{2}+a\right], \frac{1}{z^2}\right) \ .$$

Enfin, en posant

$$H(t,x) = LegendreQ\left(-\frac{4}{3}, \frac{\left(xe^{\frac{-3t}{100}+\frac{1}{50}} - 2\right)e^{-\frac{1}{50}+\frac{3t}{100}}}{x}\right)e^{\frac{-t}{100}} \ ,$$

et

$$K(t,x) = LegendreP\left(\frac{1}{3}, \frac{\left(xe^{\frac{-3t}{100}+\frac{1}{50}} - 2\right)e^{-\frac{1}{50}+\frac{3t}{100}}}{x}\right)e^{\frac{-t}{100}} \ ,$$

nous trouvons,

$$F_1(x) = \frac{-\frac{\partial}{\partial t} K(t,x)\Big|_{t=0}}{K(0,x)\frac{\partial}{\partial t} H(t,x)\Big|_{t=0} - H(0,x)\frac{\partial}{\partial t} K(t,x)\Big|_{t=0}} \quad ,$$

et,

$$F_2(x) = \frac{\frac{\partial}{\partial t} H(t,x)\Big|_{t=0}}{K(0,x)\frac{\partial}{\partial t} H(t,x)\Big|_{t=0} - H(0,x)\frac{\partial}{\partial t} K(t,x)\Big|_{t=0}} \quad .$$

b. Cas Erlang (n)

Plus généralement, si le temps entre deux sinistres successifs est une Erlang(n), Léveillé, Garrido et Wang (2010) ont obtenu par induction une équation différentielle homogène d'ordre n avec fonction inconnue $M_{Z(t)}(s)$.

Nous pouvons aussi généraliser leur résultat au cas Erlang (n), au cas d'une force d'intérêt déterministe, en suivant une démarche similaire (que nous ne démontrerons pas). Nous obtenons ainsi le résultat suivant :

Théorème 5.3

Si le temps entre deux sinistres successifs suit une Erlang(n), alors la dérivée partielle d'ordre $(n-1)$ de $M_{Z(t)}(s)$ par rapport à t est de la forme :

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} M_{Z(t)}(s) = a_{n-1}(t)\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} M_{Z(t)}(s) + a_{n-1}(t)\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} M_{Z(t)}(s) + \ldots$$
$$+ a_1(t)\frac{\partial}{\partial t} M_{Z(t)}(s) + a_0(t) M_{Z(t)}(s) \; ,$$

avec les valeurs initiales :

$$M_{Z(t)}(0) = 1,\ \frac{\partial}{\partial t} M_{Z(t)}(s)\Big|_{t=0} = 0,\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_{Z(t)}(s)\Big|_{t=0} = 0,\ \ldots,\ \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} M_{Z(t)}(s)\Big|_{t=0} = 0,$$

où,

$$a_{k-1}(t)=\frac{\binom{n-1}{n-k}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}M(t,s)-\binom{n-1}{n-k}\lambda^{n-k}M(t,s)-\sum_{i=1}^{(n-2)-(k-1)}a_{k+i}(t)\binom{k+i-1}{i}\frac{\partial^{i}}{\partial t^{i}}M(t,s)}{M(t,s)},$$

et,

$$M(t,s)=M_X\left(sD(t)\right)-1,\text{ pour } k=1,2,...,n-1.$$

5.3 Probabilité de ruine avec force d'intérêt stochastique

Le calcul de la valeur exacte de la probabilité de ruine demeure un problème fort complexe. Pour des cas assez simples du modèle collectif du risque, des formules exactes et des approximations ont été trouvées pour la probabilité de ruine. Cependant lorsqu'on incorpore au modèle collectif du risque l'effet de la force d'intérêt, les calculs deviennent plus ardus. Dans le cas du modèle de Poisson composé escompté, avec une force d'intérêt constante, une équation différentielle a été obtenue pour cette probabilité de ruine et une solution a été trouvée quand le montant des réclamations suit une loi exponentielle. Pour plus de détails, voir Sundt et Teugels (1995).

Le calcul de la probabilité de ruine peut aussi se faire si nous connaissons la distribution de notre processus de risque. Les expressions obtenues par Léveillé, Garrido et Wang (2010) pour la distribution de la somme de renouvellement escomptée, nous confirment qu'il sera très difficile de trouver une expression explicite de la probabilité de ruine dans le cadre défini par les auteurs précédents. D'où le recours à des bornes pour une estimation de la probabilité de ruine.

Plusieurs bornes ont été proposées, dans le cadre du modèle de Sparre Andersen, notamment par Cai et Dickson (2001, 2003) quand la force d'intérêt est constante et par Cai (2002) quand la force d'intérêt obéit à une série chronologique. À la sous-section 5.3.1, nous présentons les résultats de Cai et Dickson sur la borne supérieure de la probabilité de ruine quand la force d'intérêt est constante, et à la sous-section 5.3.2, nous présentons une extension de ces résultats au cas d'une force d'intérêt stochastique.

5.3.1 Inégalité de Lundberg-Cai-Dickson

Au modèle de Sparre Andersen défini au chapitre 2, Cai et Dickson incorporent une force d'intérêt constante $\delta > 0$. Puisque la ruine ne peut se produire qu'au moment d'une réclamation, ils considèrent le processus de surplus $U_\delta(t)$ tel que

$$
\begin{aligned}
&U_\delta(T_1) = ue^{\delta T_1} + \pi \bar{s}_{\overline{T_1}|\delta} - X_1 \\
&U_\delta(T_2) = U_\delta(T_1)e^{\delta \tau_2} + \pi \bar{s}_{\overline{\tau_2}|\delta} - X_2 = ue^{\delta T_2} + \pi \bar{s}_{\overline{T_2}|\delta} - X_1 e^{\delta \tau_2} - X_2 \\
&\quad \vdots \\
&U_\delta(T_n) = ue^{\delta T} + \pi \bar{s}_{\overline{T_n}|\delta} - \sum_{k=1}^{n} X_k \exp\left\{\delta \sum_{i=k+1}^{n} \tau_i\right\} ,
\end{aligned}
$$

où,

$$\bar{s}_{\overline{T_n}|\delta} = \frac{e^{\delta T_n} - 1}{\delta} .$$

Si nous supposons que le temps de la ruine de ce processus de surplus modifié est noté par $\tau_\delta = \inf\{t > 0 : U_\delta(t) < 0\}$, et si nous notons par $\psi_\delta(u)$ la probabilité ultime de ruine lorsque la force d'intérêt constante est δ, alors

$$\psi_\delta(u) = P\{\tau_\delta < \infty\} .$$

Comme la ruine ne peut intervenir que lors d'une réclamation, nous avons donc:

$$\psi_\delta(u) = P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} (U_\delta(T_n) < 0)\right\} .$$

Enfin Cai et Dickson, dans la recherche d'une borne pour $\psi_\delta(u)$, vont considérer l'événement que la ruine puisse se produire au plus tard à la *n*-ième réclamation, et ils noteront la probabilité de cet événement par

$$\psi_\delta(u;n) = P\left\{\bigcup_{k=1}^{n} (U_\delta(T_k) < 0)\right\} ,$$

ce qui entraîne que

$$\lim_{n\to\infty} \psi_\delta(u;n) = \psi_\delta(u) .$$

Énonçons maintenant un lemme qui sera préalable à l'obtention la borne supérieure de la probabilité de ruine de Cai et Dickson (2001, 2003).

Lemme 5.1

Dans tout ce qui suit, nous supposons que $M_X(t)$ existe pour $0<t<\gamma$ et que $\lim\limits_{t\to\gamma} M_X(t)=\infty$. Alors il existe un unique nombre $R>0$ tel que :

$$E\left[\exp\left[R\left(X-\pi\,\overline{s}_{\overline{\tau}|\delta}\right)\right]\right]=1 \tag{5.3.2}$$

où π est le taux de prime par unité de temps, τ est le temps entre les réclamations successives pour un processus de renouvellement ordinaire et $\pi E[\tau]\geq E[X]$, sinon la ruine interviendrait sûrement avec une probabilité 1.

Théorème 5.4

Soit R défini comme dans le lemme ci-dessus. Alors pour tout $u\geq 0$,

$$\psi_\delta(u)\leq \beta E\left[\exp(RX)\right]E\left[\exp\left[-R\left(ue^{\delta\tau}+\pi\,\overline{s}_{\overline{\tau}|\delta}\right)\right]\right].$$

où,

$$\beta^{-1}=\inf_{t\geq 0}\frac{\int_t^\infty e^{Ry}f_x(x)\,dx}{e^{Rt}\overline{F}_x(t)} \tag{5.3.3}$$

Quand $\delta\to 0$ dans (5.3.2), le coefficient d'ajustement R se réduit à celui du modèle de Sparre Andersen qui satisfait :

$$E\left[\exp\left[R_0(X-\pi\tau)\right]\right]=1 .$$

Remarque 5.3

Comme $\tau\geq 0$, nous avons $e^{\delta\tau}\geq 1$ et ainsi:

$$\begin{aligned}\psi_\delta(u)&\leq \beta E\left[\exp(RX)\right]E\left[\exp\left[-R\left[ue^{\delta\tau}+\pi\,\overline{s}_{\overline{\tau}|\delta}\right]\right]\right]\\&\leq \beta \mathrm{e}^{-Ru}\,E\left[\exp(RX)\right]E\left[\exp\left[-R\pi\,\overline{s}_{\overline{\tau}|\delta}\right]\right]\\&\leq \beta\mathrm{e}^{-Ru} .\end{aligned}$$

Donc, d'après la définition de β, $\psi_\delta(u)\leq\beta\mathrm{e}^{-Ru}\leq\mathrm{e}^{-Ru}\leq 1$.

5.3.2 Inégalité de Lundberg, avec force d'intérêt stochastique

Dans cette sous-section nous prolongeons les résultats de Cai et Dickson, au cas d'une force d'intérêt stochastique, en utilisant en grande partie les techniques que ces derniers ont développées. En plus des hypothèses ci-dessus, nous considérons le modèle de Sparre Andersen auquel nous incorporons une force d'intérêt nette stochastique.

Soit $\delta(t)$ une force d'intérêt stochastique, de laquelle nous avons retranché l'inflation, et posons :

$$\bar{a}_{\overline{t}|\delta} = \int_0^t e^{-\int_0^\alpha \delta(y)dy} d\alpha \quad , \quad \bar{s}_{\overline{t}|\delta} = \bar{a}_{\overline{t}|\delta} e^{\int_0^t \delta(y)dy} = \int_0^t e^{\int_\alpha^t \delta(y)dy} d\alpha$$

Nous avons,

$$D(\alpha) = e^{-\int_0^\alpha \delta(y)dy} \quad , \quad \bar{a}_{\overline{t}|\delta} = \int_0^t D(\alpha)d\alpha \; , \; \bar{s}_{\overline{t}|\delta} = D^{-1}(t)\int_0^t D(\alpha)d\alpha \, .$$

Comme à la section précédente, nous aurons besoin d'un lemme pour obtenir la borne supérieure de la probabilité de ruine, dans le cadre d'un modèle de renouvellement escompté avec taux d'intérêt stochastique.

Lemme 5.2

Dans tout ce qui suit, nous supposons que $M_X(t)$ existe pour $0 < t < \gamma$, $\delta(t) \geq 0$ et que $\lim_{t \to \gamma} M_X(t) = \infty$. Alors il existe un unique nombre $R > 0$ tel que :

$$E\left[\exp\left[R\left(X - \pi \bar{s}_{\overline{\tau}|\delta}\right)\right]\right] = 1 \; ,$$

où π et τ sont définis comme au lemme 5.1.

Démonstration :

Considérons la fonction $K(r)$ définie par :

$$K(r) = E\left[\exp\left[r\left(X - \pi \bar{s}_{\overline{\tau}|\delta}\right)\right]\right] - 1 \, .$$

Alors,

$$\frac{dK(r)}{dr} = E\left[\left(X - \pi \, \bar{s}_{\overline{\tau}|\delta}\right) \exp\left[r\left(X - \pi \, \bar{s}_{\overline{\tau}|\delta}\right)\right]\right],$$

et donc,

$$\left.\frac{dK(r)}{dr}\right|_{r=0} = E[X] - \pi E\left[\bar{s}_{\overline{\tau}|\delta}\right].$$

Montrons maintenant que $\left.\frac{dK(r)}{dr}\right|_{r=0} < 0$. En effet, puisque $\bar{s}_{\overline{t}|\delta} \geq t$ si $\delta(t) \geq 0$, nous avons

$$\int_0^\infty \bar{s}_{\overline{x}|\delta} f(x)\,dx \geq \int_0^\infty x\,f(x)\,dx \Rightarrow E[X] - E\left[\pi \bar{s}_{\overline{\tau}|\delta}\right] \leq E[X] - \pi E[\tau] < 0,$$

ce qui indique que la fonction K est donc décroissante en zéro.

De plus, $\frac{d^2K(r)}{dr^2} = E\left[\left(X - \pi\bar{s}_{\overline{\tau}|\delta}\right)^2 \exp\left[r\left(X - \pi\bar{s}_{\overline{\tau}|\delta}\right)\right]\right] > 0$ et donc la dérivée de $K(r)$ est une fonction croissante partout.

Enfin, il reste à montrer $\lim_{r\to\infty} K(r) = \infty$. Ainsi,

$$\bar{s}_{\overline{x}|\delta} \geq x \Rightarrow 0 < e^{-r\pi\bar{s}_{\overline{x}|\delta}} \leq e^{-r\pi x} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < \int_0^\infty e^{-r\pi\bar{s}_{\overline{x}|\delta}} f(x)\,dx \leq \int_0^\infty e^{-r\pi x} f(x)\,dx < \int_0^\infty f(x)\,dx,$$

et donc,

$$0 < E\left[\exp\left(-r\pi\,\bar{s}_{\overline{\tau}|\delta}\right)\right] < \int_0^\infty f(t)\,dt = 1.$$

Il existe donc un $m \in \left]0,1\right[$ tel que $m = E\left[\exp\left(-r\pi\,\bar{s}_{\overline{\tau}|\delta}\right)\right]$ et par hypothèse,

$$\lim_{r\to\infty} K(r) = \lim_{r\to\infty} m M_X(r) - 1 = \infty.$$

Théorème 5.5

Soit R défini comme dans le lemme précédent, alors nous avons pour tout $u \geq 0$,

$$\psi_\delta(u) \leq \beta E\left[\exp(RX)\right] E\left[\exp\left(-R\left(uD^{-1}(\tau) + \pi\bar{s}_{\overline{\tau}|\delta}\right)\right)\right], \qquad (5.3.4)$$

où

$$\beta^{-1} = \inf_{t \geq 0} \frac{\int_t^{\infty} e^{Ry} f_x(y)\, dy}{e^{Rt} \overline{F}_x(t)} .$$

Démonstration

Nous avons pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\psi_\delta(u, n+1) &= E\left[\psi_\delta\left(u\, D^{-1}(\tau) + \pi\; \overline{s}_{\overline{\tau}|\delta} - X\;, n\right)\right] \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \psi_\delta\left(u\, D^{-1}(t) + \pi \overline{s}_{\overline{t}|\delta} - x, n\right) dF_\tau(t)\, dF_X(x) \\
&= \int_0^{\infty}\left[\overline{F}_X\left(u\, D^{-1}(t) + \pi \overline{s}_{\overline{t}|\delta}\right) + \int_0^{u\, D^{-1}(t) + \pi \overline{s}_{\overline{t}|\delta}} \psi_\delta\left(u\, D^{-1}(t) + \pi \overline{s}_{\overline{t}|\delta} - x\;, n\right)\right] dF_\tau(t)\, dF_X(x).
\end{aligned}$$

D'après la définition de β en (5.3.3), nous avons pour tout $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\overline{F}_X(x) &\leq \beta e^{-Rx} \int_x^{\infty} e^{Ry} f_X(y)\, dy \\
&\leq \beta e^{-Rx} E\left[e^{RX}\right].
\end{aligned}$$

Pour $n = 1$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\varphi_\delta(u, 1) &= P\left\{X > uD^{-1}(\tau) + \pi \overline{s}_{\overline{\tau}|\delta}\right\} \\
&= \int_0^{\infty} P\left\{X > uD^{-1}(t) + \pi \overline{s}_{\overline{t}|\delta}\right\} dF_\tau(t) .
\end{aligned}$$

Puisque

$$\overline{F}_X\left(uD^{-1}(t) + \pi \overline{s}_{\overline{t}|\delta}\right) \leq E\left[e^{RX}\right] \beta e^{-R\left[uD^{-1}(t) + \pi \overline{s}_{\overline{t}|\delta}\right]} ,$$

alors

$$\int_0^{\infty} \overline{F}_X\left(uD^{-1}(t) + \pi \overline{s}_{\overline{t}|\delta}\right) dF_\tau(t) \leq E\left[e^{RX}\right] \beta \int_0^{\infty} e^{-R\left[uD^{-1}(t) + \pi \overline{s}_{\overline{t}|\delta}\right]} dF_\tau(t) ,$$

et donc,

$$\varphi_\delta(u, 1) \leq \beta E\left[\exp(RX)\right] E\left[\exp\left(-R\left(uD^{-1}(\tau) + \pi \overline{s}_{\overline{\tau}|\delta}\right)\right)\right].$$

Supposons l'inégalité vraie pour n et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$. Nous avons

$$
\begin{aligned}
\psi_\delta(u,n) &\le \beta E\left[\exp(RX)\right]E\left[\exp\left(-R\left(u+\pi\bar{s}_{\overline{\tau}|\delta}\right)\right)\right] \\
&= \beta e^{-Ru}E\left[\exp\left(-R\left(-X+\pi\bar{s}_{\overline{\tau}|\delta}\right)\right)\right] \\
&= \beta e^{-Ru} \quad .
\end{aligned}
$$

D'où,

$$
\begin{aligned}
\psi_\delta(u,n+1) &= \int_0^\infty \left[\bar{F}_X\left(uD^{-1}(t)+\pi\bar{s}_{\overline{t}|\delta}\right) + \int_0^{uD^{-1}(t)+\pi\bar{s}_{\overline{t}|\delta}} \psi_\delta\left(uD^{-1}(t)+\pi\bar{s}_{\overline{t}|\delta}-x,n\right)\right] dF_\tau(t)\,dF_X(x) \\
&= \int_0^\infty \left[\int_0^{uD^{-1}(t)+\pi\bar{s}_{\overline{t}|\delta}} dF_X(x) + \int_0^{uD^{-1}(t)+\pi\bar{s}_{\overline{t}|\delta}} \psi_\delta\left(uD^{-1}(t)+\pi\bar{s}_{\overline{t}|\delta}-x,n\right)\right] dF_\tau(t)\,dF_X(x) \quad .
\end{aligned}
$$

Or,

$$
uD^{-1}(t)+\pi\bar{s}_{\overline{t}|\delta}-x<0 \Leftrightarrow 1<e^{R_n\left(uD^{-1}(t)+\pi\bar{s}_{\overline{t}|\delta}-x\right)}
$$

ce qui entraîne que

$$
\begin{aligned}
\psi_\delta(u,n+1) &= \int_0^\infty \left[\bar{F}_Y\left(uD^{-1}(t)+\pi\bar{s}_{\overline{t}|\delta}\right) + \int_0^{u\,D^{-1}(t)+\pi\bar{s}_{\overline{t}|\delta}} \psi_\delta\left(uD^{-1}(t)+\pi\bar{s}_{\overline{t}|\delta}-x,n\right)\right] dF_\tau(t)\,dF_X(x) \\
&= \int_0^\infty \left[\int_0^{u\,D^{-1}(t)+\pi\bar{s}_{\overline{t}|\delta}} e^{R\left(u\,D^{-1}(t)+\pi\bar{s}_{\overline{t}|\delta}-y\right)} dF_X(x) + \int_0^{u\,D^{-1}(t)+\pi\bar{s}_{\overline{t}|\delta}} \varphi_\delta\left(uD^{-1}(t)+\pi\bar{s}_{\overline{t}|\delta}-x,n\right) dF_X(x)\right] dF_\tau(t) \\
&\le \int_0^\infty \left[\int_0^{uD^{-1}(t)+\pi\bar{s}_{\overline{t}|\delta}} e^{R\left(uD^{-1}(t)+\pi\bar{s}_{\overline{t}|\delta}-x\right)} dF_X(x) + \int_0^{uD^{-1}(t)+\pi\bar{s}_{\overline{t}|\delta}} \beta\exp(Rx)\exp\left(-R\left(uD^{-1}(t)+\pi\bar{s}_{\overline{t}|\delta}\right)\right) dF_X(x)\right] dF_\tau(t) \\
&\le \int_0^\infty \left[\int_0^{uD^{-1}(t)+\pi\bar{s}_{\overline{t}|\delta}} \beta\exp(Rx)\exp\left(-R\left(uD^{-1}(t)+\pi\bar{s}_{\overline{t}|\delta}\right)\right) dF_X(x)\right] dF_\tau(t) \\
&\le \beta E\left[\exp(RX)\right]E\left[\exp\left(-R\left(uD^{-1}(\tau)+\pi\bar{s}_{\overline{\tau}|\delta}\right)\right)\right]
\end{aligned}
$$

D'où l'équation (5.3.4) .

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré à la section 1 comment utiliser les moments et les moments conjoints pour construire des prédicteurs de notre processus de risque. Dans un premier temps, un prédicteur linéaire a été considéré mais les résultats obtenus ne sont intéressants que pour de petites valeurs de h. Dans un second temps, un prédicteur quadratique a été considéré et les résultats obtenus sont de meilleures qualités, mais pour de petites valeurs de h.

À la section 2, en nous inspirant des travaux de Léveillé, Garrido et Wang (2010), nous avons présenté une équation intégrale de la fonction génératrice des moments de notre processus de risque, aussi bien pour une force d'intérêt déterministe que stochastique. Nous avons aussi présenté des équations différentielles de la fonction génératrice des moments quand le temps entre deux réclamations successives suit une Erlang(n). Ces équations sont résolubles pour une forme particulière de force d'intérêt, mais l'inverse de la fonction génératrice des moments demeure toutefois un problème difficile.

À la section 3, nous avons obtenu une borne pour la probabilité de ruine dans le cas d'une force d'intérêt nette stochastique, en nous inspirant des techniques utilisées par Cai et Dickson (2001, 2003). Toutefois cette borne supérieure ne peut qu'être estimée ou simulée.

Conclusion

Dans cette thèse, nous proposons une extension des résultats obtenus par Léveillé et Garrido sur les sommes de renouvellement escomptées. Au lieu d'utiliser les techniques de renouvellement usuelles, nous avons utilisé les distributions de probabilité (conjointe) conditionnelles des temps d'arrivée des réclamations sachant qu'il y a eu n réclamations sur l'intervalle de temps donné. Nous avons développé ce résultat fondamental, car les techniques de renouvellement ne s'appliquent plus pour une force d'intérêt plus générale. Ce résultat généralise les techniques de statistique d'ordre qui ne s'appliquent que lorsque le processus du nombre des réclamations suit une loi Poisson.

Nous avons ainsi proposé des formules explicites des deux premiers moments de la somme de renouvellement escomptée avec une force générale d'intérêt, du moment conjoint ainsi que le coefficient de corrélation de notre modèle de risque.

Nous avons donné comme exemples des force d'intérêt, le modèle de Ho-Lee-Merton et celui de Vasicek, pour illustrer la calculabilité de nos formules. Évidemment, plus le modèle de force d'intérêt est compliqué plus difficile sera le calcul de l'espérance du facteur d'escompte, les méthodes numériques utilisées étant plus fortement sollicitées.

Ces résultats peuvent trouver des applications dans divers domaines autres que les sciences actuarielles, tel la finance ou l'économie de la santé. On pourrait par exemple penser que la durée entre deux dépôts successifs au guichet d'une banque suit un processus de renouvellement donné, le montant effectif de chaque dépôt est supposé être une variable aléatoire à un instant donné. Les autorités monétaires du pays en question souhaiteraient connaître le montant espérés des dépôts sur une période de temps ainsi que leur variabilité et partant, le montant des dépôts dans toutes les banques. Notre modèle peut ainsi aider pour une prise de décision.

Nous avons aussi proposé des formules de récurrence pour les moments conjoints de notre processus de risque lorsque la force d'intérêt est constante et des formules explicites des moments conjoints d'ordre supérieur pour une force d'intérêt stochastique. Ces moments peuvent nous être utiles pour une estimation éventuelle de la fonction de répartition de notre processus de risque qui, bien que calculable quand la force d'intérêt est constante, demeure un problème encore plus complexe pour un taux d'intérêt plus général.

Ces moments peuvent aussi nous permettre de faire de la prévision, en utilisant des prédicteurs polynomiaux. La distribution de notre processus de surplus étant pour l'heure difficile à trouver, ces prédicteurs pourraient nous permettre de faire une analyse plus approprié de l'évolution de la valeur présente de notre processus de risque dans le temps, au fur et à mesure de l'information reçue par l'assureur. De plus, ayant les moments simples et conjoints de notre processus de risque, nous pourrions voir éventuellement dans quelle mesure nous pouvons approximer la distribution de notre modèle de renouvellement et approcher d'une nouvelle manière la problématique des mesures de risque.

Une expression de la fonction génératrice des moments de la somme de renouvellement a aussi été trouvée lorsque la force d'intérêt est déterministe et le nombre des réclamations suit une loi de Poisson; de même que des équations intégrales et différentielles de la f.g.m. La résolution analytique, et même numérique, de ces dernières demeure cependant généralement très difficile, et pratiquement impossible dans le cas stochastique.

Enfin, un résultat sur la borne supérieure de la probabilité de ruine a été proposé quand la force d'intérêt est stochastique, présentant ainsi une extension des résultats de Jun Cai.

Bibliographie

[1] Abramowitz, M. & Stegun, I. (1969) Handbook of mathematical functions. New York: Dover.

[2] Andersen, E. S. (1957) On the collective theory of risk in case of contagion between claims. Transaction of the 15th International Congress of Actuaries, New York, II: 219-229.

[3] Asmussen, S. (2003) Applied Probability and Queues. Springer, New York.

[4] Black, F. and Scholes, M. (1973) The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy, 81: 637-654.

[5] Boogaert, P., Haezendonck, J. and Delbaen, F. (1988) Limit theorems for the present value of the surplus of an insurance portfolio. Insurance: Mathematics and Economics; 7: 131–138.

[6] Cai, J. and Dickson, D.C.M. (2001) Ruin probability in the Sparre Andersen model under forces of interest. Insurance: Mathematics and Economics; 7: 131–138.

[7] Cai, J. (2003) Upper bounds for ultimate ruin probabilities in the Sparre Andersen model with interest. Insurance: Mathematics and Economics; 32: 61–71.

[8] Cramer H. (1969) Historical Review of Filip Lundberg's Work on Risk Theory. Skandinavisk Aktuarietidskrift (Suppl.), 52: 6-12.

[9] Delbaen, F. and Haezendonc, J. (1987) Classical risk theory in an economic environment. Insurance: Mathematics and Economics; 6: 85–116.

[10] Fackrell, M.W. (2003) Characterization of Matrix-Exponential Distribution Ph.D thesis (Applied Mathematics), University of Adelaide, Australia.

[11] Garrido, J. and Léveillé, G. (2004) Inflation impact on aggregate claims. Encyclopedia of actuarial science, 2: 875 878.

[12] Gerber H. U. (1971) Deir Einfluss von Zins auf Ruinwarhrscheinlichkeit. Mitteilungen Vereinigung schweizerische Versicherungsmathematiker; 71: 63–70.

[13] Heath, D., Jarrow, R. and Merton, A. (1992). Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claim valuation. Econometrica 60: 77–105.

[14] Jang, J. W. (2004) Martingale approach for moments of discounted aggregate claims. Journal of Risk and Insurance; 71 (2): 201-211.

[15] Karatzas, I. and Shreve, S. E. (1991) Brownian Motion and Stochastic Calculus (2nd ed.), Springer Verlag: New–York.

[16] Keynes J. M. (1936) La théorie générale de l'emploi, de l'intérêt et de la monnaie Bibliothèque scientifique Payot, 1990 (1re éd. 1936), 387 p.

[17] Kim, B. and Kim, H.-S. (2007) Moments of claims in a Markovian environment. Insurance: Mathematics and Economics; 45 (3): 485–497.

[18] Klugman, S.A., Panjer, H.H. and Willmot, G. (2004) Loss Models: From Data to Decisions. Wiley, Hoboken, N.J.

[19] Léveillé, G. and Garrido, J. (2001a) Moments of compound renewal sums with discounted claims. Insurance: Mathematics and Economics, 28: 217–231.

[20] Léveillé, G. and Garrido, J. (2001b) Recursive moments of compound renewal sums with discounted claims. Scandinavian Actuarial Journal, 2: 98-110.

[21] Léveillé, G. (2002) Distribution of compound renewal sums with discounted claims. Working paper.

[22] Léveillé, G., Garrido, J. and Wang Y. F. (2010) Moments generating function of compound renewal sums with discounted claims. Scandinavian Actuarial Journal 1: 1-20.

[23] Lundberg F. (1903) Approximations of the Probability Function/Reinsurance of Collective Risks.

[24] Muet P. A (1979) Revue économique intitulée « Les modèles « néoclassiques » et l'impact du taux d'intérêt sur l'investissement : un essai de synthèse » Revue économique. Volume 30, 2: 244-280.

[25] Neuts, M.F. (1981) Matrix-geometric Solution in Stochastic Models an Algorithmic Approach. The John Hopkin University Press, Baltimore and London.

[26] Oksendal B. (1992) Stochastic Differential Equation (3rd ed.), Springer Verlag : New-York.

[27] Panjer, H.H. (1981) Recursive evaluation of a family of compound distributions. ASTIN Bulletin, 12: 22-26.

[28] Rolski, T. Schmidli, H. Schmidt, V. and Teugels J. (1999) Stochastics Processes for Insurance and Finance. Chichester, UK: Wiley.

[29] Sundt, B. and Teugels, J. (1995) Ruin estimate under interest force. Insurance: Mathematics and Economics, 16: 7–22.

[30] Taylor G. C. (1979) Probability of ruin under inflationary conditions or under experience rating. Astin Bulletin; 10: 149–162.

[31] Waters H. (1989) Probability of ruin with claims cost inflation. Scandinavian Actuarial Journal: 148–164.

[32] Willmot G. E. (1989) The total claims distribution under inflationary conditions. Scandinavian Actuarial Journal, 10: 1–12.