



Modélisation de problèmes thermoélectriques non linéaires dans un milieu fissuré par la méthode XFEM

Thèse

Atmane Laouati

Doctorat en génie civil
Philosophiæ doctor (Ph.D.)

Québec, Canada

© Atmane Laouati, 2013

Résumé

L'objectif principal de cette thèse est le développement d'un outil numérique, en utilisant l'approche XFEM, permettant la simulation des problèmes transitoires non linéaires thermoélectriques dans un milieu fissuré en deux dimensions, avec prise en compte des échanges thermiques et électriques entre les lèvres de la fissure.

La simulation numérique de la propagation de fissures présente un grand intérêt pour de nombreux secteurs industriels (production d'aluminium, aéronautique, nucléaire, etc.). De plus, c'est un problème complexe sur le plan numérique. La méthode d'éléments finis classiques présentent des contraintes importantes de raffinement de maillage en fond de fissure, de remaillage pendant la propagation de la fissure avec la projection des champs, ce qui a pour effet d'augmenter le temps de calcul et de dégrader la précision des résultats.

D'autre part, la méthode des éléments finis étendue XFEM, a reçu un succès grandissant pour le traitement de problèmes avec fissures durant la dernière quinzaine d'années. Elle permet d'utiliser un maillage qui ne se conforme pas à la géométrie des fissures, ceci grâce à un enrichissement de l'approximation éléments finis.

Dans cette thèse, on s'intéresse à étendre le champ d'application de la méthode XFEM pour les problèmes non linéaires thermoélectriques avec fissures. En effet, le problème thermique transitoire est couplé avec le problème électrique par la génération de la chaleur dans le solide, et la génération de chaleur à la fissure à cause de la résistance de l'interface.

Les échanges thermiques et électriques entre les lèvres de la fissure sont aussi considérés, et dépendent, respectivement, du saut de la température et du potentiel électrique à la fissure. En raison de la génération de la chaleur dans le solide et aux lèvres

de la fissure à cause de la résistance de l'interface (effet Joule), et la dépendance des paramètres physiques du matériau à la température, le problème en question est non linéaire et couplé. Le système non linéaire discrétisé par la méthode XFEM, est résolu en utilisant l'algorithme de Newton-Raphson.

L'efficacité de la technique proposée est démontrée à travers la simulation de différents exemples dont les résultats sont en accord avec la solution analytique, ou avec la solution éléments finis en utilisant un maillage raffiné.

Abstract

The main objective of this thesis is the development of a numerical tool, using the XFEM approach, for the simulation of transient nonlinear thermoelectrical problems in fractured media in two dimensions, taking into account thermal and electrical exchanges between the crack's lips.

Numerical simulations of crack propagation are of great interest for many industrial sectors (aluminum production, aerospace, nuclear, etc.). In addition, this is a numerically complex problem.

The classical finite element method has important constraints of mesh refinement at the crack tip, remeshing during crack propagation and field projections, which has the effect of increasing the computation time and degrading the accuracy.

On the other hand, the eXtended Finite Element Method (XFEM), has received a growing success for the treatment of the problems containing cracks in the last fifteen years. It allows using a mesh that does not conform to the geometry of the crack; this is possible by the enrichment of the finite element approximation.

In this thesis, we are interested in extending application field of the XFEM method to the nonlinear thermoelectrical problems with cracks. Indeed, the transient thermal problem is coupled to the electrical problem by the heat generation in the solid, and the heat generation at the crack's lips due to the interface resistance.

The heat and electrical exchanges between the crack's lips are also considered, and depend, respectively, on the temperature and the voltage jump at the crack. Due to the heat generation in the solid and in crack's lips (Joule effect), and the temperature dependence of the physical parameters of the material, the problem is nonlinear and

fully coupled. The discretized nonlinear system by the XFEM method is solved using the Newton-Raphson algorithm.

The robustness of the proposed technique is demonstrated through the simulation of different examples, and the results shows an excellent agreement with the analytical solution, or with the finite element solution using a refined mesh.

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	v
Table des matières	vii
Liste des tableaux	ix
Liste des figures	xi
Remerciements	xix
Avant-propos	xxi
Introduction	1
0.1 Motivation	1
0.2 Contributions de la thèse et originalités	5
0.3 Organisation de la thèse	6
1 État de l'art sur XFEM	9
1.1 Introduction	9
1.2 Revue de la littérature sur les méthodes de la partition de l'unité	9
1.3 Revue de la littérature sur la méthode des éléments finis étendue	11
1.4 La méthode XFEM appliquée aux problèmes thermoélectriques	18
2 La méthode des éléments finis étendue XFEM	21
2.1 Introduction	21
2.2 La partition de l'unité : les éléments finis enrichis	21
2.3 Problème unidimensionnel avec un caractère local	23
2.4 XFEM standard	35
2.5 XFEM pour un problème thermique 1D avec fissure	42
2.6 La fonction <i>Level set</i>	49
2.7 XFEM Hansbo et Hansbo	55
2.8 Les éléments de transition	57
2.9 Conclusion	62

3	La méthode XFEM pour les problèmes thermiques transitoires	65
3.1	Abstract	65
3.2	Introduction	65
3.3	Governing equations	68
3.4	Variational formulation of the thermal problem with discontinuities inside the domain	70
3.5	XFEM discretization	71
3.6	Numerical integration	77
3.7	Numerical examples	79
3.8	Conclusion	87
4	XFEM pour les problèmes thermoélectriques non linéaires	91
4.1	Abstract	91
4.2	Introduction	92
4.3	Governing equations	94
4.4	Weak formulations	97
4.5	XFEM discretization	98
4.6	Non linear transient solution	101
4.7	Numerical examples	103
4.8	Conclusions	112
	Conclusion	117
A	Programme Matlab FEM et PUM en 1D	123
A.1	La méthode des éléments finis standard : FEM1d.m	123
A.2	La méthode des éléments finis enrichies : PUM1d.m	124
A.3	Routines1D	126
B	Programme Matlab XFEM en 1D	141
B.1	xfemMulticrack.m	141
B.2	plotShapesFunctions.m	143
B.3	XfemRoutine	145
C	Détails pour calculer la solution exacte	151
C.1	Calcul de la solution analytique pour le cas : $h \neq 0, g = 0, Q_v = 0$ et $Q_c = 0$	151
C.2	Calcul de la solution analytique pour le cas : $h = 0, g \neq 0, Q_v \neq 0$ et $Q_c \neq 0$	153
D	Intégration numérique	155
	Bibliographie	157

Liste des tableaux

2.1	Norme d'erreur L^2 pour trois discrétisations éléments finis	29
2.2	Norme d'erreur L^2 pour trois discrétisations éléments finis enrichie	35
2.3	Coordonnées des fissures et les coefficients d'échange thermique correspondants	48
4.1	Problem parameters	104
4.2	Geometrical dimension	111

Liste des figures

0.1	Schéma d'une cuve d'électrolyse, image tirée de Richard (2004)	2
0.2	Estimation des coûts en temps de calcul relative à chaque étape, de la création du modèle jusqu'au post-traitement des résultats, image tirée de Hughes et al. (2009)	3
2.1	Domaine Ω avec un maillage structuré avec un enrichissement local	22
2.2	Problème unidimensionnel d'une barre	24
2.3	Solution analytique du problème 1D	25
2.4	Maillage éléments finis en une dimension ; à droite un élément finis avec une numérotation locale	26
2.5	Fonctions de forme N_1 et N_2 de l'élément de référence	28
2.6	Solution analytique et par éléments finis	30
2.7	Tracé des fonctions de forme enrichies dans un l'espace paramétrique	32
2.8	Solution analytique et par éléments finis avec enrichissement local	34
2.9	Comparaison des résultats de convergence en norme L^2 entre la méthode des éléments finis standard et enrichie	34
2.10	Une barre fissurée	36
2.11	Une barre avec 3 éléments finis contenant une discontinuité à x_c ; en rouge les nœuds enrichis	37
2.12	Tracé de la fonction de forme standard N_1 et enrichie N_1^e dans un élément de référence avec une discontinuité forte	38
2.13	Tracé de la fonction de forme standard N_2 et enrichie N_2^e dans un élément de référence avec une discontinuité forte	38
2.14	Une barre bimatérielle, E est le module d'élasticité	39
2.15	Tracé des fonctions d'enrichissement ψ_j dans un élément de référence ($\xi \in [-1, 1]$) avec une discontinuité faible au point $\xi_c = -0.4$	40
2.16	Tracé de la fonction de forme standard N_1 et enrichie N_1^e dans un élément de référence avec une discontinuité faible	41
2.17	Tracé de la fonction de forme standard N_2 et enrichie N_2^e dans un élément de référence avec une discontinuité faible	42
2.18	Barre avec une fissure	42
2.19	élément de référence avec un fissure à ξ_c	44
2.20	Solution XFEM du problème thermique 1D avec une fissure	46
2.21	Solution XFEM du problème thermique 1D avec une fissure et un terme source	46

2.22	Solution XFEM du problème thermique 1D avec échange thermique entre les points de la fissure et un terme source	48
2.23	Solution XFEM du problème thermique 1D avec plusieurs fissures	49
2.24	Exemple de la fonction distance signée ϕ pour un domaine fermé	50
2.25	Exemple des fonctions distances signées pour le cas d'une fissure, la fissure est représentée en ligne continue rouge, le zéro de la fonction ϕ en ligne pointillée et le zéro de la fonction ψ en ligne hachurée	52
2.26	Coordonnées polaires à la pointe de la fissure	54
2.27	Utilisation des fonctions <i>Level set</i> ϕ et ψ pour calculer r et θ	55
2.28	XFEM standard vs XFEM Hansbo and Hansbo (2004) : les cercles en bleu dénotent des nœuds réels et les nœuds gris sont appelés nœuds fantômes	56
2.29	Discrétisation illustrant le domaine enrichie Ω^{enr} , le domaine de transition Ω^{bld} et le domaine standard Ω^{std} ; les nœuds rouges sont enrichis	58
2.30	Maillage élément finis 1D avec une discontinuité dans l'élément 0 ; en rouge les nœuds et les éléments enrichis, en gris les nœuds non enrichis, et les éléments en bleu sont les éléments de transition	59
2.31	Solution exacte	59
2.32	Approximation de la solution \mathbf{u}^h en ligne blue, la partie standard \mathbf{u}^{std} en ligne pointillée et la partie enrichie \mathbf{u}^{enr} en ligne en tirets	60
3.1	Body Ω with boundary conditions	68
3.2	Internal crack	69
3.3	An arbitrary crack line (red line) in a structured mesh. Nodes in sets \mathcal{I} and \mathcal{K} are denoted by blue squares and blue circles, respectively	72
3.4	Polar coordinate at crack tip	73
3.5	Real and parent elements	74
3.6	Elements divided completely or partially by the crack	78
3.7	Sub-triangles associated with elements crossed by the crack	78
3.8	Division of Γ_c^e to segments	78
3.9	Gauss points for one-dimensional segment	79
3.10	Square plate with a centered horizontal adiabatic crack	81
3.11	Temperature field and flux lines for a centered horizontal crack	82
3.12	Rectangular plate with an inclined adiabatic crack	82
3.13	Temperature field and flux lines for an adiabatic inclined crack	83
3.14	Plates with heat exchange between crack's lips	84
3.15	Temperature field for a square plate with heat exchange	85
3.16	Temperature field for a rectangular plate with heat exchange	85
3.17	The variation of temperature field across the path $x = 1.5$ and $y = 1.5$ in function of $\frac{h}{k}$	86
3.18	Temperature evolution in function of time for a centered crack with heat exchange	88
3.19	Comparison between ABAQUS and XFEM-UL convergence at many points near the crack tip	89
4.1	Thermoelectrical boundary conditions on the domain Ω	95

4.2	An arbitrary crack line (red line) in a structured mesh. Nodes in sets \mathcal{I} and \mathcal{K} are denoted by blue squares and blue circles, respectively	98
4.3	Polar coordinate at crack tip	99
4.4	Real and parent elements	100
4.5	Square plate with a crack at x_c	105
4.6	Exact and computed solutions of temperature field for $h = 1$	107
4.7	Exact and computed solutions of voltage field for $h = 1$	107
4.8	Exact and computed solutions of temperature field for $h = 1$	108
4.9	Square plate with a centre crack	109
4.10	Temperature field and flux lines	110
4.11	Electrical field	110
4.12	Comparison of temperature field on path $y = 1.03$	111
4.13	An electrolysis cell cathode with edge crack	112
4.14	Finite element mesh for the cathode problem, nodes with circles and rectangles are enriched by step and asymptotic functions, respectively	113
4.15	Temperature field in the cathode	113
4.16	Electrical field in the cathode	114
4.17	Comparison of temperature field on path $y = 0.246$	114
C.1	Solutions XFEM et exacte du champs de la température pour différentes valeurs de h	152
C.2	Solutions XFEM et exacte du champs de la température pour différentes valeurs de g	154
D.1	Éléments coupés par la fissure	155
D.2	Triangulation des éléments coupés par la fissure	156
D.3	Points d'intégration pour des éléments coupés par la fissure, 3 points d'intégration par triangle	156

*À mes parents
Pour votre amour
Pour tous vos sacrifices
Pour tous l'enseignement que
vous m'avez transmis
En témoignage de mon éternelle
reconnaissance ...*

*Nous élevons en rang
qui Nous voulons. Et
au-dessus de tout
homme détenant la
science il y a un
savant [plus docte
que lui]*

Coran : Sourate Yûsuf, ver.76

Remerciements

Ce travail s'est achevé dans une ambiance d'appui et de collaboration d'un certain nombre de personnes que j'aimerais remercier ici. En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse, le Professeur Mario Fafard, qui m'a accueilli dans son groupe de recherche et m'a stimulé dans la réalisation de cette recherche, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche. J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail.

Je souhaite également adresser mes remerciements au Professeur Abdelkader Baggag, qui a codirigé cette thèse en y apportant conseils et soutien. Je lui suis reconnaissant pour la confiance qu'il m'a témoignée, de son soutien moral dans les moments difficiles et l'expérience dont il m'a fait bénéficier. Je le remercie pour les longues heures de discussions scientifiques qu'il m'a consacrées, pour ses conseils et pour sa gentillesse. Ses qualités scientifiques n'ont rien à envier à ses qualités humaines. Je lui adresse mes sincères remerciements ainsi que mon plus profond respect.

Je suis reconnaissant au Professeur Hakim Naceur de l'Université de Valenciennes, ainsi qu'aux Professeurs Augustin Gakwaya et Luca Sorelli d'avoir accepté de prendre le temps de lire ce travail et d'être membre de mon jury de thèse.

Je tiens à remercier aussi mes collègues, les postdoctorants et les professionnels de recherche qui m'ont soutenu et aidé pour réaliser cette thèse.

Un grand merci à ma famille, en particulier ma bien-aimée mère et mon cher père, pour m'avoir toujours encouragée et s'être inquiétés du bon déroulement de mes études. Il m'est difficile d'exprimer en quelques mots ce que je dois à mes frères

et sœurs qui m'ont toujours respecté et soutenu mes choix, ainsi que pour leurs encouragements infaillibles. C'est en grande partie grâce à eux que je suis arrivé là.

Je tiens à remercier vivement Valérie Greffard, Fakhreddine Habib, Zahir Brighen, Abderrezak Akroune qui m'ont apporté leur aide, support et appuis durant ses dernières années.

Mes remerciements s'étendent à l'ensemble de collègues au REGAL ou au département génie civil, les présents comme ceux qui sont déjà partis, pour la convivialité et la bonne humeur. Il me faudrait plusieurs pages pour les citer tous mais j'aimerais mentionner spécialement : Reza, Hicham, Mathieu, Nousyste, Patrice, Olivier, Wadii, Frédérick, Donald, François, Guillaume, Sakineh, Stéphane, Pierre-Olivier, Femi, Min Li, Mahmoud, Aziz, Xavier, Thomas, Nicolas, Ali-Reza, Dave et sans oublier Lyne.

Une pensée à mes amis, je cite : Hamid, Youcef, Miloud, Imad, Rachid, Mouhamed, Yacine, Yassine, Farid, Mehdi, Badreddine, Samir, Karim, Adel, Akram, Nabil, Youcef, Oussama, Jamel, Fateh, Sami.

Merci enfin au lecteur qui par essence justifie la rédaction de ce document.

Avant-propos

Cette thèse est réalisée au département génie civil à l'Université Laval à Québec (Canada). Elle s'inscrit dans le contexte de la chaire de recherche industrielle du CRSNG sur la modélisation avancée des cuves d'électrolyse MACE³ dirigée par le Professeur Mario Fafard à l'Université Laval.

Ce travail s'articule autour de deux manuscrits rédigés sous formes d'articles scientifiques, soumis pour publication dans des journaux internationaux. Une introduction vient apporter la cohésion nécessaire à cette thèse de doctorat et souligner la contribution du présent travail au domaine. Ensuite, le Chapitre 1 et le Chapitre 2 présentent une revue de la littérature et une introduction de la méthode XFEM, respectivement

Le premier article présenté dans le Chapitre 3 dont je suis l'auteur principal, soumis pour publication dans le journal *Journal of Computational Physics*, est intitulé *Transient heat transfer in fractured media with heat exchange between the crack lips using XFEM*.

Le Chapitre 4 contient le deuxième article dont je suis l'auteur principal, soumis pour publication dans le journal *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, est intitulé *XFEM for nonlinear thermoelectrical problems in fractured media*. Enfin, une conclusion générale et des perspectives de ce travail de recherche sont présentées

Cette thèse est l'aboutissement de plus de quatre ans et demi de collaboration avec mon directeur de thèse Mario Fafard (Université Laval, Québec, QC, Canada) et mon co-directeur de thèse Abdelkader Baggag (Université Laval, Québec, QC, Canada). Ils sont d'ailleurs co-auteurs sur chacun des articles présentés dans cette thèse.

Introduction

0.1 Motivation

Industriellement l'aluminium est obtenu par réduction électrolytique de l'oxyde d'aluminium à l'aide d'un procédé inventé en 1886 indépendamment et simultanément par l'Américain Hall et le Français Héroult, dit Hall-Héroult. La production d'aluminium selon Hall-Héroult est un procédé électrochimique où l'alumine (Al_2O_3) est dissoute dans un électrolyte à environ 950 °C. Un courant continu d'une intensité élevée est utilisé pour transformer l'alumine en aluminium liquide (Al) et en dioxyde de carbone (CO_2). Environ 13 MWh par tonne d'aluminium est nécessaire pour effectuer la réaction (Keller and Sulger (2007)). L'application industrielle de ce procédé se fait dans les cuves d'électrolyse, la Figure 0.1 montre un schéma d'une cuve d'électrolyse d'aluminium.

Une expertise sur la simulation numérique des problèmes multiphysiques d'une cuve Hall-Héroult en opération s'est fortifiée au sein de l'université Laval durant les dernières années. En effet, un code de calcul orienté objet par la méthode des éléments finis, appelé FESh++, fut développé pour résoudre les problèmes thermoélectromécaniques spécifiques dans le domaine des cuves d'électrolyse d'aluminium. On trouve plus de détails sur ce procédé d'électrolyse dans les thèses de, Marceau (2001) qui porte sur la modélisation 3D du contact avec frottement, les aspects thermomécaniques du préchauffage d'une cuve ont été étudiés par Richard (2004) et la modélisation thermoélectromécanique du contact dans une cuve par Goulet (2004). De plus, une chaire de recherche (MACE³) sur la modélisation avancée des cuves d'électrolyse et l'efficacité énergétique a été lancée à l'université Laval depuis 2009, afin de modéliser les phénomènes complexes et leur implantation numérique.

La cathode est un composant important dans la cuve d'électrolyse (Figure 0.1), du

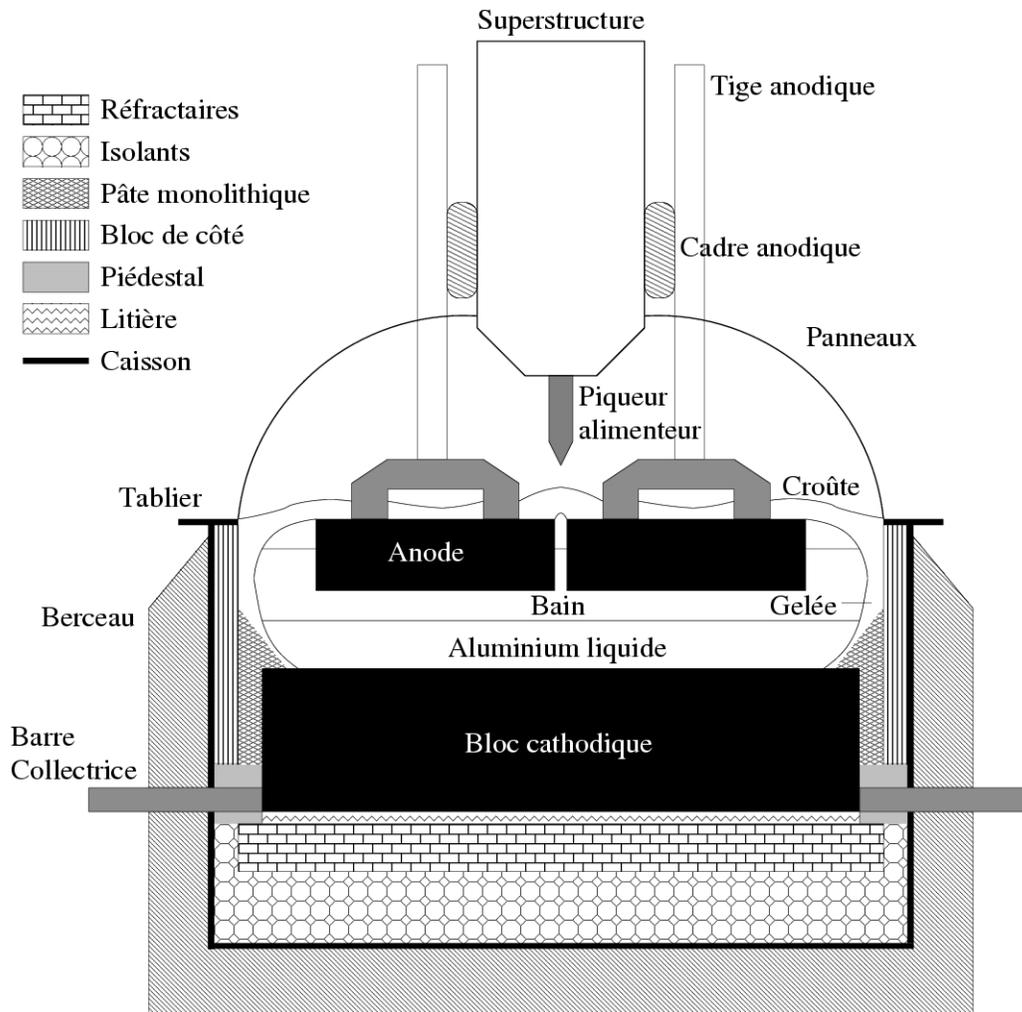


FIGURE 0.1 – Schéma d'une cuve d'électrolyse, image tirée de Richard (2004)

fait qu'elle est conteneur de l'électrolyte et du métal, et un conducteur de l'électricité. La formation des fissures dans la cathode est un point déterminant pour la durée de vie de la cuve comme il est présenté par Sørli and Øye (2010). En effet, les gradients thermiques élevés présents dans la cathode durant le préchauffage provoquent des chocs thermiques causent des fissures (Hale (1989)). Donc, l'étude du comportement des fissures dans une cathode, leurs initiations et propagations s'avère un problème très complexe due à son aspect multiphysique, et le couplage thermoélectromécanique.

Actuellement, la méthode des éléments finis est l'outil standard pour la simulation numérique dans l'industrie. La croissance des performances des ordinateurs, l'uti-

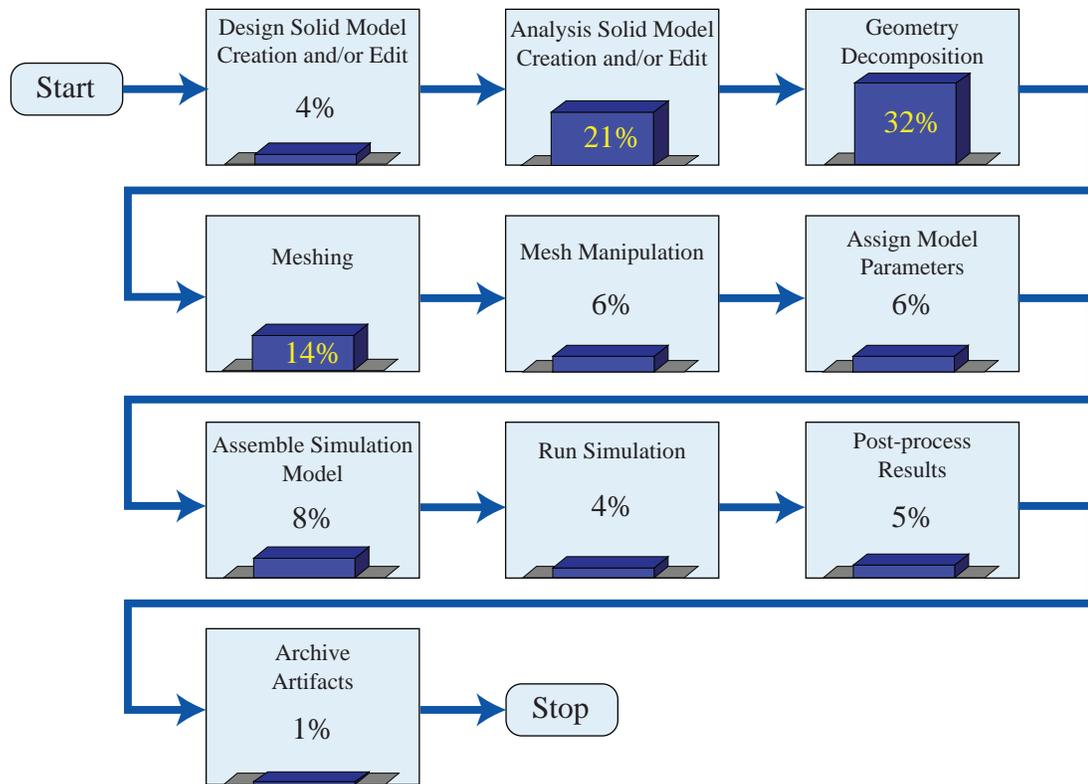


FIGURE 0.2 – Estimation des coûts en temps de calcul relative à chaque étape, de la création du modèle jusqu’au post-traitement des résultats, image tirée de Hughes et al. (2009)

lisation des architectures parallèles et l’amélioration des algorithmes de résolution a décru de plus en plus le temps de calcul d’une façon très remarquable (Moës and Belytschko (2002b)). Quant aux maillages, principalement en 3D, des avancées ont été réalisées mais pas suffisamment pour se libérer de l’intervention de l’utilisateur. En effet, des estimations de coût en temps de calcul ont été réalisées par *Sandia National Laboratories*, et ils ont trouvé que plus que 20% du temps dédié pour l’analyse d’un problème par la méthode des éléments finis est utilisé pour la génération du maillage (Hughes et al. (2009)) tandis que la création de la géométrie appropriée du modèle nécessite environ 60%, et seulement 20% du temps est consacrée au calcul et à la résolution, comme l’illustre la Figure 0.2.

La principale difficulté dans l’opération de la génération du maillage est la nécessité de respecter les surfaces extérieures, et les surfaces intérieures comme les fissures, les vides, les interfaces, etc. Par conséquent, pour le cas des fissures, la surface de la fissure ne peut pas couper un élément fini. Lorsque la fissure évolue en fonction du

temps, d'autres opérations supplémentaires sont nécessaires, comme le remaillage et la projection de la solution sur le nouveau maillage. D'autant plus, généralement un raffinement du maillage au front de la fissure est appliqué afin de réduire les erreurs dans cette zone, et avoir une meilleure approximation de la solution asymptotique à cette zone. En résumé, la simulation numérique du problème de la propagation de fissures par la méthode des éléments finis consiste à réaliser un maillage initial et aussi plusieurs opérations de remaillage. Donc, on peut dire que le remaillage est l'obstacle majeur pour la simulation des problèmes avec des discontinuités qui évoluent en fonction du temps.

Depuis les vingt dernières années, et dans l'optique de trouver un moyen pour éliminer le remaillage, les recherches sont orientées pour développer des méthodes où l'approximation ne repose pas sur un maillage, mais plutôt sur un ensemble de points. Ces méthodes sont appelées *Meshless* ou *Meshfree*. Parmi elles, on trouve les éléments diffus par Nayroles et al. (1992), la méthode EFG par Belytschko et al. (1994), la méthode RKPM par Liu et al. (1995). En effet, la présence de fissure est modélisée par des fonctions discontinues et l'opération du remaillage n'est plus nécessaire lors de la propagation de la fissure. Par contre, d'autres opérations additionnelles plus complexes sont nécessaires, comme la génération du diagramme de Voronoï, la triangulation de Delaunay et l'imposition des conditions de type Dirichlet n'est pas trivial.

Une alternative a été présentée pour résoudre ce problème de maillage. Cette approche est appelée la méthode des éléments finis étendus XFEM, et elle date d'une quinzaine d'année (Moës et al. (1999)). Elle est basée sur la méthode de la partition de l'unité (Babuška and Melenk (1997)). En comparaison avec la méthode des éléments finis classique, elle permet de relaxer les contraintes imposées au maillage, comme le cas de la propagation des fissures. Dans le cas de XFEM, la fissure n'est pas maillée, et l'approximation éléments finis standard est enrichie par des fonctions d'enrichissements pour modéliser la discontinuité à la fissure.

L'ambition constante qui distingue l'approche XFEM depuis ses débuts consiste à utiliser la partition de l'unité pour libérer le maillage de la contrainte de se conformer à la surface de la discontinuité, tout en conservant les mêmes performances que la méthode des éléments finis classique (optimalité de la convergence). La méthode XFEM a connu un succès fulgurant ces dernières années, et l'appliquer pour d'autres

types de problèmes était une suite logique comme pour les problèmes de fissures cohésives (Moës and Belytschko (2002a)), solidification (Chessa et al. (2002); Merle and Dolbow (2002)), contact et friction (Dolbow et al. (2001)), dislocations (Ventura et al. (2005)), interaction fluide-structure (Legay et al. (2006)), etc.

Dans cette thèse, le champ d'application de la méthode XFEM a été élargi pour les problèmes non linéaires thermoélectriques couplés avec fissure, avec prise en compte des échanges thermoélectriques entre les lèvres de la fissure.

0.2 Contributions de la thèse et originalités

Cette thèse contient les originalités suivantes :

- La simulation numérique des échanges thermiques entre les lèvres de la fissure dans le contexte XFEM, pour les problèmes thermiques stationnaires et transitoires avec fissures.
- La simulation numérique des échanges électriques entre les lèvres d'une fissure pour les problèmes électriques stationnaires avec fissures.
- La modélisation numérique des problèmes thermiques, stationnaires et transitoires non linéaires avec fissure par XFEM, quand les propriétés physiques du matériau dépendent de la température (la conductivité thermique $k(T)$, la capacité calorifique $c(T)$).
- La modélisation numérique des problèmes électriques stationnaires non linéaires (la conductivité électrique dépend de la température $\sigma(T)$).
- La modélisation numérique des problèmes thermoélectriques par XFEM, couplées à travers la génération de la chaleur par effet Joule dans le domaine.
- La simulation numérique des échanges thermoélectriques non linéaires (le coefficient d'échange thermique $h(T_m)$ et le coefficient d'échange électrique $g(T_m)$ dépendent de température moyenne entre les lèvres de la fissure T_m) entre les lèvres d'une fissure pour un problème thermoélectrique par XFEM, avec prise en compte du terme source sur les lèvres de la fissure, due à la génération de la chaleur à cause de la résistance d'interface.
- La modélisation numérique des problèmes thermoélectriques non linéaires avec fissure par XFEM.

0.3 Organisation de la thèse

Cette thèse est organisée dans 6 chapitres. Le Chapitre , est une introduction aux problèmes thermoélectriques avec fissures. Les motivations pour utiliser la méthode XFEM pour ce genre de problème, et les originalités apportées par cette thèse sont présentées.

Dans le Chapitre 1, une étude bibliographique sur les méthodes éléments finis enrichis basées sur la partition de l'unité a été rappelée. Ensuite, une revue de la littérature a été présentée sur la méthode XFEM et ses applications pour les différents types de problèmes. Les éléments bibliographiques pour les différents types de conditions aux limites aux lèvres d'une fissure avec XFEM sont ensuite passés en revue. Puis, nous proposons un modèle plus physique pour la modélisation des échanges thermiques et électriques à la fissure dans le contexte de XFEM.

Après, dans le Chapitre 2, la méthode des éléments finis enrichis par la partition de l'unité est présentée. Le concept d'enrichissement est illustré à travers un exemple d'élasticité unidimensionnel avec une solution à caractère local. Ensuite, les principes de base de la méthode XFEM sont introduits pour la modélisation des différents types de discontinuité. La résolution d'un problème thermique unidimensionnel avec fissure dans le contexte de XFEM est détaillée, ainsi que l'imposition de la condition d'échange thermique entre les points de la fissure. Puis, une présentation de la méthode *Level set* et de son couplage avec la méthode XFEM pour la modélisation des fissures en 2D. Les techniques du calcul des fonctions *Level set* tangentielles et orthogonales sont présentées, et par la suite, on détaille la façon d'évaluer les fonctions d'enrichissement à l'aide de fonctions *Level set*. Après, l'équivalence entre la méthode de XFEM de Hansbo et Hansbo et la méthode XFEM standard est montrée. Enfin, on met en évidence le problème des éléments de transition et son influence sur le taux de la convergence de la méthode XFEM.

Dans un deuxième temps, la modélisation des échanges thermiques entre les lèvres de la fissure, pour les problèmes thermiques transitoires dans le contexte de XFEM, est présentée dans le Chapitre 3. Le flux de chaleur à la surface de la fissure est défini par une loi de contact thermique, qui dépend du saut de la température à la fissure et d'un coefficient d'échange thermique. La validation du modèle est illustrée par des exemples numériques, ainsi que l'influence du coefficient d'échange thermique

sur la distribution de la température autour de la fissure.

Le Chapitre 4 est dédié à l'introduction d'une formulation XFEM pour la modélisation des problèmes non linéaires thermoélectriques. Les deux problèmes, thermique et électrique, sont fortement couplés par la génération de chaleur par effet Joule dans le domaine, et la génération de chaleur due à la résistance d'interface aux lèvres de la fissure. De plus, on considère que les propriétés physiques du matériau dépendent de la température. Les équations du problème thermique sont résolues en régime transitoire, et celles du problème électrique en régime stationnaire. On termine par la présentation des tests numériques pour la validation du modèle proposé.

Enfin, des conclusions et des perspectives sont présentées dans le Chapitre 4.

L'Annexe A contient un programme Matlab 1D pour le problème d'élasticité 1D traité dans la Section 2.3, par la méthode des éléments finis standard et enrichie. L'Annexe B présente un programme XFEM 1D, qui traite les problèmes thermiques stationnaires avec plusieurs fissures présentés dans la Section 2.5, avec prise en compte des échanges thermiques entre les points des fissures. Le dernier Annexe C contient les détails pour calculer la solution analytique stationnaire pour la température et le voltage avec échange thermique, électrique et la présence d'un terme source à la fissure.

Chapitre 1

État de l'art sur XFEM

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de détailler l'état de l'art de la méthode éléments finis étendue XFEM en général, et en particulier ses applications pour les problèmes thermoélectriques avec fissure.

Dans la Section 1.2, une revue générale de la littérature sur les méthodes éléments finis enrichies basées sur la partition de l'unité est détaillée. Ensuite, la Section 1.3 se concentre sur les motivations de la méthode XFEM, le début de la méthode XFEM, ainsi que les avancées de la méthode XFEM pour la résolution des problèmes de la mécanique de la rupture et ses applications pour d'autres type de problèmes. Enfin, la Section 1.4 détaille l'état de l'art sur la résolution des problèmes thermiques et thermoélastiques avec fissure dans le contexte de XFEM, et on propose à la fin une nouvelle approche pour traiter les échanges thermoélectriques entre les lèvres de la fissure.

1.2 Revue de la littérature sur les méthodes de la partition de l'unité

Pour améliorer la performance de la méthode des éléments finis pour représenter des singularités ou des gradients très élevés, l'enrichissement global de la base d'approximation éléments finis est utilisé. Le travail de Babuška et al. (1994) a proposé une méthode éléments finis spéciale pour résoudre les problèmes avec des coeffi-

cients hautement oscillatoires, en enrichissant l'espace éléments finis par des fonctions de forme spéciales. Ensuite, Melenk (1995) a montré pour l'équation de Helmholtz que si ces fonctions d'enrichissement ont le même comportement oscillatoire que la solution, la convergence de la méthode des éléments finis est meilleure. Par la suite, Duarte and Oden (1996) ont introduit la méthode *h-p Clouds* qui est une variante de la méthode *Meshless*, et ils ont reconnu que ces méthodes étaient en fait des cas particuliers de la partition de l'unité, permettant de développer plusieurs extensions de ces méthodes.

Les idées de base et les fondements mathématiques de la méthode de la partition de l'unité (PUM) sont introduites par Melenk and Babuška (1996) et Babuška and Melenk (1997). Ici les auteurs introduisent des fonctions arbitraires dans la base d'approximation par la partition de l'unité, ce qui permet de généraliser la méthode pour permettre à une approximation éléments finis de pouvoir reproduire des fonctions particulières. Cette technique permet d'enrichir une approximation éléments finis à l'aide de fonctions quelconques tout en préservant le caractère creux de la matrice éléments finis globale. Dans l'article Melenk and Babuška (1996) et les travaux de Strouboulis et al. (2000a) et Strouboulis et al. (2000b), la partition de l'unité est utilisée essentiellement afin d'améliorer la qualité de l'approximation éléments finis par l'ajout des solutions analytiques près des trous ou en pointe de fissure. La partition de l'unité a également été utilisée par Oden et al. (1998) pour générer aisément une approximation *h-p* non uniforme robuste vis-à-vis de la distorsion des éléments.

L'utilisation du concept de la partition de l'unité pour enrichir les espaces des solutions numériques pour les équations différentielles partielles est généralement attribuée à Melenk and Babuška (1996), où la méthode est appelée *La méthode de la partition de l'unité PUM (Partition of Unity Method)*. La méthode PUM est l'ancêtre à la fois de XFEM et GFEM (*Generalized Finite Element Method*), ainsi que d'autres méthodes développées ultérieurement comme la méthode de Hansbo and Hansbo (2004).

Le nom de *la méthode des éléments finis généralisée* GFEM (Melenk (1995); Melenk and Babuška (1996); Duarte and Oden (1996)) a été adopté par l'université de Texas dans les années 1995-1996. Les premiers travaux sur la méthode GFEM utilisent un enrichissement global de l'espace d'approximation. Mais, dès l'année 2000, un enrichissement local pour les singularités aux coins aigus ont également été développées

par Duarte et al. (2000). Le nom de *La méthode des éléments finis étendue XFEM* (Belytschko and Black (1999); Moës et al. (1999)) a été inventé par l'université du Northwestern dans l'année 1999, pour la modélisation de la propagation des fissures avec un enrichissement local sans remaillage.

Les méthodes GFEM et XFEM ne sont donc pas des méthodes fondamentalement différentes. La différence est essentiellement dans leurs motivations. La GFEM met l'accent sur la qualité de l'espace engendré par les fonctions d'enrichissement afin d'obtenir une convergence optimale. Alors, que la méthode XFEM a exploité la flexibilité offerte par la partition de l'unité dans la génération du maillage. Les développements de la méthode XFEM ont conduit à son introduction dans le milieu industriel. La technique *Level set* Osher and Sethian (1988) permet de faciliter son intégration en 2D comme en 3D dans les codes industriels (ABAQUS, ANSYS, Code_ASTER, etc.).

1.3 Revue de la littérature sur la méthode des éléments finis étendue

1.3.1 Le début de XFEM

Le premier développement de la méthode des éléments finis étendue commence en 1999, quand Belytschko and Black (1999) ont présenté une méthode éléments finis avec un remaillage minimum pour la modélisation de la propagation de fissure en deux dimension. Des fonctions d'enrichissement asymptotiques sont ajoutées à l'approximation éléments finis pour prendre en compte la présence de la fissure. Par contre, le remaillage est nécessaire pour les fissures très incurvées dans la partie de la fissure qui ne contient pas les pointes de la fissure.

Après, Moës et al. (1999) ont présenté une technique élégante en utilisant une fonction de saut pour modéliser la discontinuité à travers la fissure. Cette technique permet de modéliser la fissure indépendamment du maillage, et par conséquent l'opération de remaillage n'est plus nécessaire pour modéliser la propagation de la fissure. La nouvelle méthode est appelée la méthode des éléments finis étendue XFEM (*eXtended Finite Element Method*).

Une avancée considérable dans la méthode XFEM a été réalisé par Dolbow (1999)

avec sa thèse de doctorat. Son travail a abouti à un certain nombre d'articles sur la solution du problème de l'élasticité et sur les plaques Mindlin-Reissner, en utilisant une fonction de saut et des fonctions asymptotiques comme fonctions d'enrichissement dans le cadre de la méthode XFEM (voir Dolbow et al. (2000b) et Dolbow et al. (2000a)). Ensuite, La méthode XFEM a été appliquée dans Dolbow et al. (2001) au problème de la propagation des fissures avec contact frottant le long des surfaces de la fissure ; un schéma itératif est utilisé pour la détermination de la loi de contact. En parallèle, la simulation par la méthode XFEM des particules rigides soumises à un écoulement de Stokes a été réalisée dans Wagner et al. (2001).

Dans Sukumar et al. (2000) et Moës et al. (2000), une extension pour les problèmes en trois dimensions avec fissures de la méthode XFEM a été exposée. La modélisation des trous, le branchement et l'intersection des fissures, les fissures débouchantes des trous, a fait l'objet d'une autre étude faite par Daux et al. (2000) comme une généralisation de la méthode XFEM originale pour d'autres types et géométries de discontinuités.

Cependant, l'utilisation de la méthode *Level set* développée par Osher and Sethian (1988) couplée avec XFEM a beaucoup facilité le traitement des fissures en 2D. Initialement introduite par (Stolarska et al., 2001) pour la modélisation de la propagation des fissures, une généralisation de l'utilisation de la méthode *Level set* pour la représentation par éléments finis des discontinuités (discontinuité de la fonction ou celle de sa dérivée) indépendamment du maillage, a été exposée par Belytschko et al. (2001). L'approximation discontinue est construite à partir des termes de la fonction distance signée (fonction de niveau), cette fonction (la fonction *Level set*) est utilisée pour la mise à jour de la position des discontinuités.

Au même moment, la modélisation des trous, les inclusions et les interfaces par les fonctions de niveau dans la méthode des éléments finis étendue a été détaillée dans Sukumar et al. (2001). Une extension en 3D pour l'analyse des fissures de géométrie arbitraire dans les solides a été réalisée par Moës et al. (2002), en combinant la méthode XFEM et *Level set* pour la modélisation des discontinuités. La fissure est définie à travers deux fonctions de niveau orthogonale ; la première fonction de niveau modélise la fissure et la deuxième est utilisée pour capter la position de la pointe de fissure. Une équation de type Hamilton-Jacobi, dans Gravouil et al. (2002), est utilisée pour l'actualisation et la réinitialisation des deux fonctions de niveau dans un

sous-domaine autour de la fissure pour réduire le temps de calcul.

Une variante de la méthode XFEM a été proposée par Hansbo and Hansbo (2002) et Hansbo and Hansbo (2004), pour l'introduction des discontinuités fortes ou faibles dans le champ de déplacement avec un maillage non conforme. Pour le cas des fissures, deux éléments finis sont alors superposés sur l'élément contenant une fissure. Cette méthode a été appliquée à de nombreux problèmes, comme la fissuration 2D, inclusions matérielles 2D et contact 2D dans Hansbo and Hansbo (2004) ; fissuration cohésive 2D linéaire dans Mergheim et al. (2005), pour la propagation de fissures 2D en mécanique linéaire de la rupture dans Heintz (2006). L'approche de Hansbo et Hansbo est appliquée au problème de fracture dynamique en 2D et les plaques dans Song et al. (2006) et Song (2008). La méthode a été appelée par la suite *Phantom node method*.

La méthode des éléments finis étendue a obtenu des résultats prometteurs, et certains chercheurs ont immédiatement prévu des possibilités de l'application de XFEM à toutes sortes de problèmes dans lesquels les discontinuités et les frontières mobiles doivent être modélisées. Plusieurs articles ont fait l'objet d'une revue de littérature sur la méthode XFEM et ses applications pour des différents problèmes. Karihaloo and Xiao (2003) ont présenté une revue de la littérature sur la modélisation de la propagation des fissures dans le cadre des méthodes éléments finis sans remaillage basées sur la partition de l'unité, comme XFEM et GFEM. Ensuite, Babuška et al. (2004) présentent un aperçu des principales idées, les fondements mathématiques, les perspectives et le potentiel de la méthode des éléments finis généralisée GFEM.

Dans les articles de Abdelaziz and Hamouine (2008) et Abdelaziz et al. (2009), les auteurs ont exposé l'état de l'art de la méthode des éléments finis étendue pour la simulation du problème de la propagation des fissures. En même temps, deux livres ont été publiés sur la méthode XFEM. Le premier livre (Mohammadi (2008)) est une introduction de la méthode XFEM pour les problèmes de la rupture des structures, ainsi que la possibilité de l'utiliser pour d'autres problèmes d'ingénierie. Le deuxième livre (Mohammadi (2012)), se concentre sur l'application de XFEM pour la simulation de la rupture dans les composites.

D'autres travaux ont été faits sur la revue de littérature de la méthode XFEM et GFEM pour les problèmes avec des interfaces mobiles, les discontinuités faibles et

fortes par Belytschko et al. (2009) et Fries and Belytschko (2010). Enfin, Rabczuk et al. (2010) ont présenté une étude sur les différentes techniques de capture des fissures en trois dimensions par les méthodes de la partition de l'unité. La méthode XFEM a fait ses preuves comme une technique très robuste pour la modélisation des discontinuités qui évoluent avec le temps, et l'application à d'autres types de problèmes était une suite logique.

On présente par la suite une revue de la littérature sur l'application de la méthode XFEM pour le problème des fissures cohésives dans la Section 1.3.2. En effet, Dans le cas d'une fissure cohésive, la propagation est dirigée par une relation contrainte-déplacement entre les lèvres de la fissure au voisinage de la pointe de celle-ci. Ce problème a des similitudes avec celui qu'on veut traiter dans cette thèse, parce que les échanges thermiques et électriques sont aussi définis par une relation qui dépend du saut de température et du potentiel électrique à travers la fissure. Ensuite, dans la Section 1.3.3, une revue générale sur le potentiel de la méthode XFEM pour différents types de problèmes est présentée.

1.3.2 XFEM pour les fissures cohésives

Les fissures cohésives peuvent être traitées dans le contexte de XFEM. Wells (2001) et Wells and Sluys (2001) ont combiné la méthode XFEM avec un modèle de zone cohésive pour l'investigation de la rupture des matériaux de béton, et ils ont obtenu d'excellentes prédictions en comparaison avec les expériences. Moës and Belytschko (2002a) ont développé un enrichissement spécial pour la pointe de fissure pour améliorer la performance de la méthode.

Plus tard, Zi and Belytschko (2003) ont présenté un nouvel élément à la pointe de fissure pour les fissures cohésives basé sur la fonction signée (la fonction Heaviside généralisée). Mariani and Perego (2003) ont proposé une méthodologie pour la simulation de la propagation de fissures quasi-statiques pour les problèmes quasi-fragiles en deux dimensions. Remmers et al. (2003) ont proposé une méthode de segments cohésifs qui a permis la modélisation des fissures avec géométrie complexe et l'initiation des fissures. Dans le même esprit de ce travail, Song and Belytschko (2009) ont proposé une nouvelle méthode (*cracking node method*) pour la modélisation dynamique des problèmes des fissures.

Les fissures cohésives dans le contexte de XFEM/GFEM ont été discutées par De Borst et al. (2004a) et De Borst et al. (2004b). L'approche de Hansbo and Hansbo (2002) a été appliquée pour les fissures cohésives 2D linéaire dans Mergheim et al. (2005), fissures cohésives 2D non linéaire dans Mergheim and Steinmann (2006) et fissuration non linéaire cohésive 3D dans Mergheim et al. (2007).

Une application de la modélisation des fissures cohésives pour les matériaux FGM (functionally graded materials) est présentée par Comi and Mariani (2007), et pour le béton par Unger et al. (2007). Rabczuk et al. (2008) ont proposé un nouvel élément à la pointe de la fissure dans le cadre de *Phatom-nodes method* pour la simulation des fissures cohésives arbitraires.

1.3.3 XFEM pour d'autres type de problèmes

Contact et contact frottant

Le problème de contact unilatéral sans frottement présente une non-linéarité sur le bord correspondant à la non pénétration des matériaux sur la zone de contact. Le premier travail sur le traitement du contact dans le cadre de XFEM a commencé par la thèse de Dolbow (1999).

Dans Dolbow et al. (2001), ils étudient le problème d'une fissure en deux dimensions sous contact frottant en proposant une formulation pénalisée pour satisfaire à la fois les équations d'équilibre et les conditions de contact en utilisant un schéma itératif. Ce travail a été révisé plus tard par Belytschko et al. (2002) pour plusieurs types de contact en utilisant des fonctions de distance signées lissées ; les fonctions sont utilisées pour calculer l'écart entre les deux solides en contact.

Une étude des possibilités de la méthode XFEM pour la simulation numérique de la coupe lors du procédé de l'usinage est présentée par Guetari (2005) et Guetari et al. (2005), en proposant un algorithme outil-matière. Un nouveau modèle numérique de la fissuration XFEM quasi-statique avec contact et frottement dédié aux problèmes de fatigue de contact en 2D est proposé par Ribeaucourt (2006). Ce modèle est une suite du travail proposé par Dolbow et al. (2001), il prend en compte séparément les phénomènes ouverture-contact et glissement-adhérence (Ribeaucourt et al. (2007)).

Solidification

La thèse de Chessa (2003) traite en détails les problèmes de surface libre, solidification et les écoulements diphasiques dans le contexte de la méthode des éléments finis étendue. Dans Chessa et al. (2002), les auteurs ont creusé les possibilités d'appliquer la méthode XFEM pour le problème de solidification. L'interface est décrite par une fonction de niveau, et un schéma de stabilisation éléments finis est utilisé pour sa mise à jour. La discontinuité du flux de chaleur à l'interface est modélisée à l'aide du saut des fonctions de forme enrichies, et une méthode de pénalisation est utilisée pour imposer la condition de température à l'interface.

Le problème de changement de phase avec des sources de chaleur en mouvement a été traité par Dolbow and Merle (2001) et Merle and Dolbow (2002) pour le cas 1D. Une méthode hybride XFEM/*Level set* est proposée par Ji et al. (2002) pour la modélisation des transformations de phase pour les problèmes deux dimensions. Dans ces travaux, une stratégie itérative est adoptée qui permet l'imposition des contraintes sur les interfaces arbitraires.

écoulements diphasiques

La méthode XFEM a été utilisée dans la mécanique des fluides. Chessa and Belytschko (2003a) et Chessa and Belytschko (2003b) ont appliqué XFEM pour l'écoulement de deux fluides avec et sans l'effet de tension de surface, en résolvant les équations de Navier-Stokes. La valeur absolue de la fonction *level set* est utilisée pour prendre en compte la discontinuité de champ de vitesse. Groß and Reusken (2007) ont enrichi la pression avec une fonction Heaviside pour les problèmes en trois dimensions pour l'écoulement de deux fluides.

Interaction fluide-structure

L'interaction fluide-structure (IFS) est l'interaction d'une structure en mouvement, rigide ou déformable avec l'écoulement d'un fluide qui l'entoure. Le problème d'interaction fluide-structure a été traité en premier par Legay et al. (2006) pour les fluides compressibles. Les auteurs ont utilisé un maillage eulérien pour le fluide, et un maillage lagrangien pour le solide.

Les méthodes de multiplicateur de Lagrange et les méthodes de pénalité sont utilisées pour coupler le fluide et le solide. Gerstenberger and Wall (2006) et Wall et al.

(2006) ont utilisé la méthode XFEM pour la modélisation des grandes déformations pour les problèmes d'interaction fluide-structure. Ensuite, Legay and Kölke (2007) ont proposé une extension pour les fluides incompressibles. Une étude détaillée du problème de l'interaction fluide-structure dans le contexte de XFEM est présentée dans la thèse de Gerstenberger (2010).

Imposition des conditions aux interfaces/discontinuités

L'imposition des conditions aux limites de type Neumann est simple dans le cadre de XFEM. Il se fait de manière similaire que pour la méthode des éléments finis classique, par l'évaluation des intégrales de la forme variationnelle le long de la frontière de Neumann. Cela nécessite un maillage du contour de la discontinuité ou de l'interface.

Cependant, dans le cas de l'utilisation d'un maillage non-conforme à la frontière, l'imposition des conditions de Dirichlet n'est pas aussi simple que dans le cadre des éléments finis classiques. Dans la littérature, plusieurs approches sont détaillées pour soulever cette difficulté dans Fries and Belytschko (2010).

D'autres problèmes ont été traités dans le contexte de XFEM. Le problème de bio-films a été étudié par Bordas (2003) dans sa thèse. Par la suite, d'autres travaux ont suivi comme Smith et al. (2007), Duddu et al. (2008) et Duddu et al. (2009).

La possibilité d'utiliser la partition de l'unité pour la modélisation des discontinuités a été discutée pour le problème de dislocation par Ventura et al. (2005). La majorité des travaux sur le problème de dislocation ont été fait dans le groupe de recherche de Belytschko. Dans la thèse de Gracie (2009), des modèles de type *Continuum-atomistic* sont utilisés pour la modélisation des dislocations par XFEM.

Les problèmes multiphysiques font l'objet de récentes applications de la méthode des éléments finis étendue. Watanabe et al. (2012), Mohammadnejad and Khoei (2012) et Mohammadnejad and Khoei (2013) ont exposé la capacité de XFEM pour la modélisation des fissures et l'écoulement de fluides dans les milieux poreux. Une approche XFEM pour les problèmes acoustiques des structures immergées est proposée par Legay (2013). Une autre application de XFEM pour les problèmes de rupture dynamique des matériaux piézoélectriques dans Nguyen-Vinh et al. (2012).

1.4 La méthode XFEM appliquée aux problèmes thermoélectriques

1.4.1 XFEM pour les problèmes thermiques

Le problème de solidification a fait l'objet des premiers travaux pour le traitement de l'équation de la chaleur dans le contexte de XFEM. Dans Merle and Dolbow (2002), le problème de changement de phase a été traité pour le cas unidimensionnel. L'équation de chaleur transitoire pour le solide et le fluide est couplée avec une condition à l'interface, et résolue avec un schéma itératif. Ensuite, Chessa et al. (2002) et Ji et al. (2002) ont utilisé la méthode XFEM couplée avec la méthode *Level set* pour la résolution des problèmes de solidification en deux dimensions. La fonction d'enrichissement est la valeur absolue de la fonction de niveau, ce qui permet d'introduire la discontinuité du gradient du champ de température à l'interface. Les problèmes en trois dimensions ont été traités par Zabarav et al. (2006), une formulation XFEM/*Level set* a été utilisée pour simuler l'évolution de la température. Enfin, la méthode XFEM a été appliquée pour le traitement du problème de bande de cisaillement avec effet thermique par Areias and Belytschko (2007), et pour les problèmes thermiques bimatérielles avec une résistance thermique de l'interface par Yvonnet et al. (2011).

1.4.2 XFEM pour les problèmes thermoélastiques avec fissures

Le premier travail sur la modélisation thermoélastique des fissures dans le contexte de XFEM a été présenté par Duflot (2008). Les équations constitutives de la thermoélasticité linéaire isotropique sont considérées, avec l'hypothèse des petites déformations. Le problème mécanique est résolu en statique et le problème thermique en régime stationnaire. Deux conditions aux limites imposées sur la fissure ont été étudiées.

En premier, il suppose que la fissure est adiabatique. c'est-à-dire le flux de chaleur \mathbf{q} est nul sur le contour de la fissure Γ_c :

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (1.1)$$

où \mathbf{n} est le vecteur normal unitaire. Ce cas est une extension direct de la méthode XFEM pour les problèmes d'élasticité (Belytschko and Black (1999); Moës et al. (1999)) aux problèmes thermiques. Une fonction Heaviside est utilisée pour modéliser la

discontinuité du champ de température. Par contre, au voisinage de la pointe de fissure, une seule fonction asymptotique est utilisée pour l'enrichissement du champ de la température (plus de détails sont donnés dans le chapitre 3).

Le deuxième cas se concentre sur la fissure isotherme. Par conséquent, la température est continue sur le contour de la fissure Γ_c mais sa dérivée est discontinue.

$$T = \bar{T} \quad \text{sur} \quad \Gamma_c \quad (1.2)$$

Une fonction d'enrichissement, similaire à celle introduite dans Belytschko et al. (2001) pour représenter les interfaces bimatérielles, est utilisée pour modéliser le saut du gradient de la température à la fissure. Une méthode de pénalisation est utilisée dans le contexte de XFEM pour imposer la température \bar{T} sur la fissure. L'intégration du terme de pénalisation nécessite un maillage du contour de la fissure.

Zamani et al. (2010) ont proposé un enrichissement d'ordre supérieur au voisinage de la pointe de fissure, avec l'hypothèse d'une fissure adiabatique. Ensuite, une extension est réalisée pour la résolution des problèmes thermoélastiques linéaires en fracture dynamique par Zamani and Eslami (2010).

1.4.3 Approche adoptée pour le traitement des problèmes thermoélectriques avec échange thermoélectrique entre les lèvres de la fissure

Admettre qu'une fissure est isotherme ou adiabatique n'a pas de sens physique, dû au fait qu'il y a des échanges thermiques entre les lèvres de la fissure. Spécialement, pour le cas des fissures qui sont présentes dans les composants d'une cuve d'électrolyse (comme l'anode ou la cathode). Cette hypothèse ne peut être valide pour les problèmes avec de grands gradients de température et de potentiel électrique, comme lors du préchauffage d'une cuve d'électrolyse. Une approche plus physique est de considérer un échange thermique entre les deux lèvres de la fissure, cela étant justifié par :

- Les lèvres de la fissure ont une géométrie identique ;
- La distance entre les lèvres de la fissure est négligeable ;
- Des phénomènes de convection, due à la circulation des gaz dans la fissure, et de rayonnement sont présents.

Alors, on définit le flux de chaleur par une loi de contact thermique comme présentée dans la thèse de [Goulet \(2004\)](#), dépendant du saut de champ de température et un coefficient de convection/radiation h .

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -h(T)[[T]] \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (1.3)$$

où $[[\cdot]]$ représente le saut de température à Γ_c .

En effet, aucun travail n'as pas été publié pour le traitement des problèmes thermiques non linéaires avec fissure, où les propriétés physiques du matériau, comme la conductivité thermique et la capacité calorifique, dépendent de la température. Le couplage entre le problème thermique et le problème électrique par la génération de chaleur avec l'effet Joule, ajoute une difficulté supplémentaire pour la résolution du problème. C'est l'objet principal de cette thèse.

Chapitre 2

La méthode des éléments finis étendue XFEM

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter la méthode des éléments finis étendue. Dans la Section 2.2, une présentation de la méthode éléments finis enrichie par la partition de l'unité est détaillée. Après, la Section 2.3 montre l'avantage de l'utilisation de l'enrichissement pour des problèmes où la solution analytique est connue a priori, avec un exemple 1D. Ensuite, la Section 2.4 est une introduction de la méthode XFEM pour les problèmes unidimensionnels avec des discontinuités fortes et faibles. Puis, un exemple thermique unidimensionnel avec fissure est détaillé dans la Section 2.5. L'utilisation de la méthode *Level set* pour le traitement de problèmes 2D avec fissure est présentée dans la Section 2.6. La Section 2.7 montre l'équivalence entre l'approche de Hansbo et Hansbo et l'approche de XFEM standard. Enfin, dans la Section 2.8, on met en évidence l'influence des éléments de transition sur le taux de convergence de la méthode XFEM, et on termine par une conclusion dans la Section 2.9 .

2.2 La partition de l'unité : les éléments finis enrichis

Le fondement de ces méthodes (PUM, XFEM, GFEM) se base sur le concept de la partition de l'unité pour enrichir l'approximation éléments finis avec les travaux de Duarte and Oden (1996) et Melenk and Babuška (1996). Considérons un domaine Ω discrétisé par un ensemble de nœuds \mathcal{I} illustré à la Figure (2.1a). Sur cet ensemble

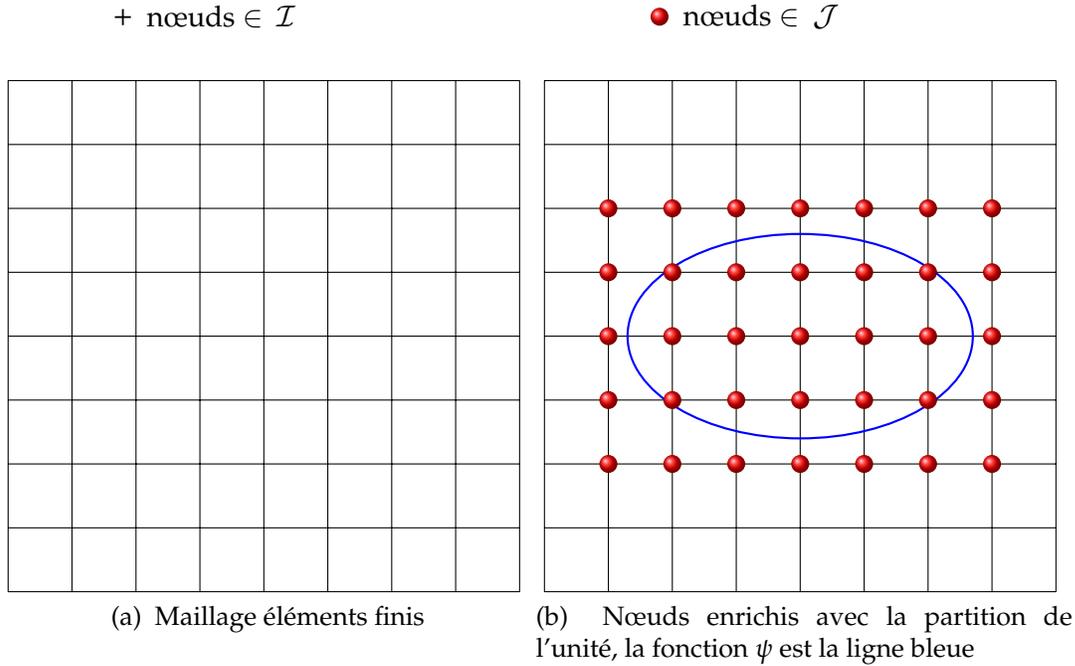


FIGURE 2.1 – Domaine Ω avec un maillage structuré avec un enrichissement local

de nœuds, l'approximation éléments finis classique u^h d'un champ u peut être écrite de la façon suivante :

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\mathbf{x}) u_i \quad (2.1)$$

où u_i sont les degrés de libertés nodaux et N_i l'ensemble des fonctions de forme pour $i \in \mathcal{J}$. Une partition de l'unité sur un domaine Ω , est un ensemble des fonctions $N_i(\mathbf{x})$ tel que :

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.2)$$

On note que l'équation (2.2) est toujours vérifiée pour la méthode des éléments finis. La propriété de la partition de l'unité exploitée dans XFEM/GFEM est que toute fonction $\psi(\mathbf{x})$ peut être reproduite par un produit des fonctions de la partition de l'unité avec $\psi(\mathbf{x})$. Alors, on peut enrichir l'approximation de u avec une fonction d'enrichissement $\psi(\mathbf{x})$ de la façon suivante :

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\mathbf{x}) u_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) a_j \quad (2.3)$$

où \mathcal{J} représente l'ensemble des nœuds auxquels on ajoute les degrés de liberté enrichis a_j comme le montre la Figure (2.1b).

Pour illustrer ce concept, on considère que l'ensemble de nœuds enrichis \mathcal{J} est l'ensemble de tous les nœuds du domaine Ω , i.e $\mathcal{J} \leftarrow \mathcal{I}$. Ensuite on suppose que tous les degrés de libertés u_i sont égaux à zéro, et enfin on considère que tous les degrés de liberté enrichis sont égaux à un,

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\mathbf{x}) u_i^0 + \sum_{j \in \mathcal{I}} N_j(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) a_j^1 \quad (2.4)$$

Sous ces hypothèses l'approximation de u reproduit exactement la fonction $\psi(\mathbf{x})$ dans tout le domaine Ω , c'est-à-dire

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) \quad (2.5)$$

On peut ainsi choisir la fonction d'enrichissement de manière à capter plus efficacement la solution du problème (Strouboulis et al. (2000a); Strouboulis et al. (2000b)). Selon le problème traité, on peut introduire des discontinuités fortes (Moës et al. (1999)) comme pour le cas d'une fissure, un vide ou des inclusions à l'intérieur du domaine (Sukumar et al. (2001)). On peut également introduire des discontinuités faibles (Belytschko et al. (2001)) comme le problème de changement de phase (Chessa et al. (2002)) et les interfaces bimatérielles (Sukumar et al. (2004)). Si une seule fonction d'enrichissement ne permet pas de capter parfaitement la discontinuité, il est possible d'utiliser plusieurs fonctions d'enrichissement (la pointe de la fissure pour modéliser la solution asymptotique Belytschko and Black (1999)).

2.3 Problème unidimensionnel avec un caractère local

2.3.1 Généralité

Dans cette section, on présente un problème unidimensionnel avec un caractère local au milieu de la barre. Les équations du problème et la forme variationnelle sont présentées dans les Sections 2.3.3 et 2.3.4. La méthode des éléments finis standard est présentée, avec une étude de sa convergence pour ce type de problème dans les Sections 2.3.5 et 2.3.6. Enfin, on montre l'avantage d'enrichir l'approximation éléments finis localement pour ce type de problème dans la Section 2.3.7, ainsi qu'une analyse d'erreur pour les deux méthodes.

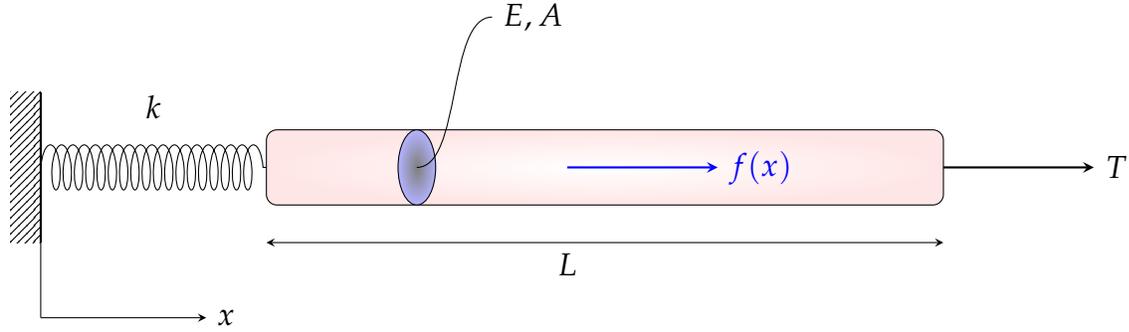


FIGURE 2.2 – Problème unidimensionnel d'une barre

2.3.2 équations du problème

On considère le problème d'élasticité linéaire unidimensionnel d'une barre de longueur L , comme dans Dolbow (1999), soumise à une force volumique $f(x)$, et la traction T à $x = L$ comme le montre la Figure 2.11. La barre est contrainte à l'extrémité gauche ($x = 0$) par un ressort linéaire de raideur k . Pour simplifier, on considère le cas où la surface de la section A et le module de Young E sont constants dans le domaine, et prennent la valeur de l'unité. Les équations du problème qui décrivent le déplacement $u(x)$ de la barre sont données par :

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} = f & \text{dans } \Omega = (0, L) \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} -ku(0) = -\frac{du(0)}{dx} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \frac{du(L)}{dx} = T \end{cases} \quad (2.8)$$

On s'intéresse au problème avec un caractère local. Pour cela on considère le choix suivant de la force volumique f :

$$f(x) = 6x + \left(\frac{2}{\alpha^2} - \left(\frac{L-2x}{\alpha^2} \right)^2 \right) e^{-\left(\frac{x-\frac{L}{2}}{\alpha} \right)^2} \quad (2.9)$$

où le paramètre α est très petit en comparaison de la longueur de la barre L ($\frac{\alpha}{L} = 0.01$). En négligeant la contribution du terme exponentiel aux frontières, la solution analytique du problème est donnée par :

$$u(x) = (T + 3L^2) \left(\frac{1}{k} + x \right) - x^3 + e^{-\left(\frac{x-\frac{L}{2}}{\alpha} \right)^2} \quad (2.10)$$

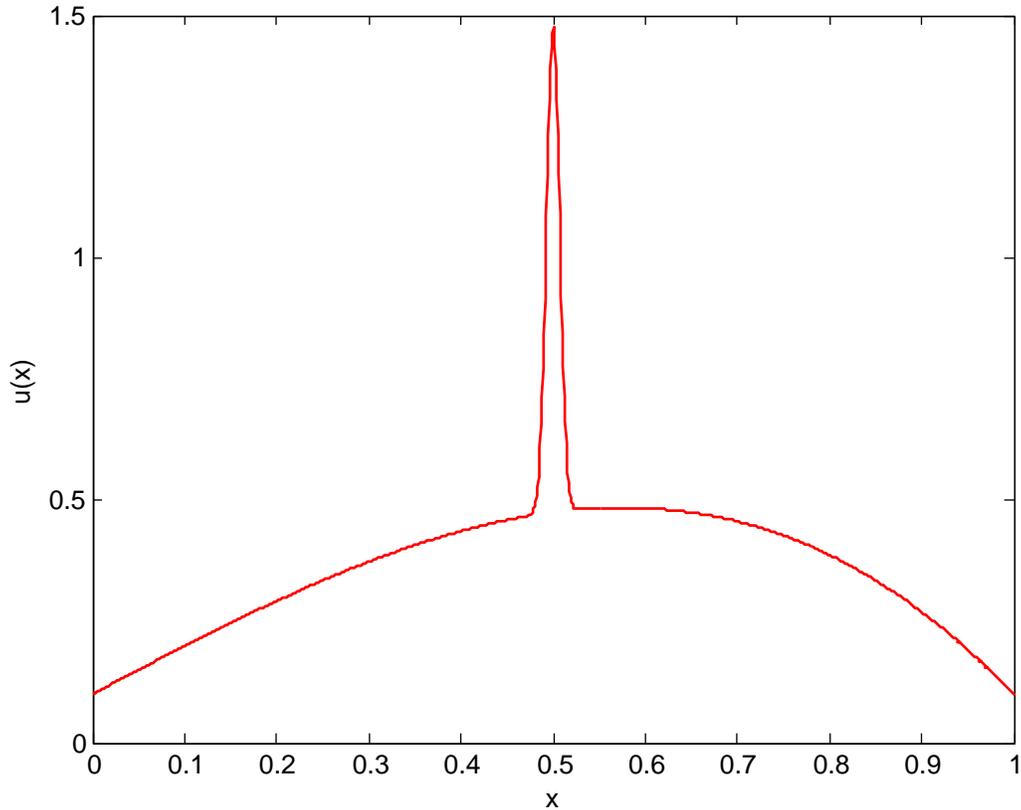


FIGURE 2.3 – Solution analytique du problème 1D

Pour $T = -2$, $L = 1$ et $k = 10$, la solution analytique est montrée sur la Figure (2.3). On remarque que la solution a un caractère local au voisinage du centre de la barre dû au terme exponentiel de la force volumique.

2.3.3 Forme variationnelle

Pour obtenir la forme variationnelle, on multiplie l'équation (2.1) par une fonction test u^* et on l'intègre sur le domaine Ω

$$-\int_0^L u^* \frac{d^2 u}{dx^2} dx = \int_0^L u^* f dx \quad (2.11)$$

Si on utilise le théorème de la divergence, l'équation (2.11) devient :

$$\int_0^L \frac{du^*}{dx} \frac{du}{dx} dx - \left[u^* \frac{du}{dx} \right]_0^L = \int_0^L u^* f dx \quad (2.12)$$

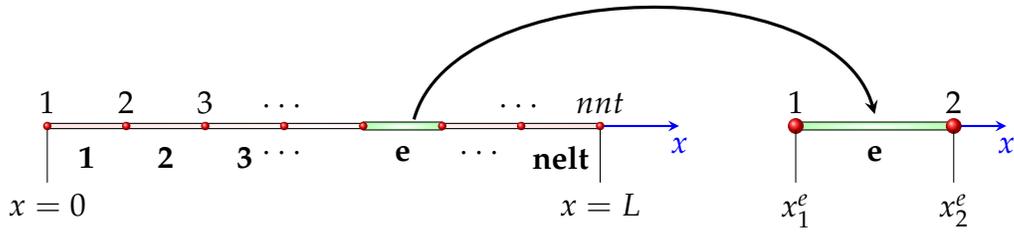


FIGURE 2.4 – Maillage éléments finis en une dimension; à droite un élément finis avec une numérotation locale

Notons qu'en intégrant à l'aide du théorème de divergence, nous avons fait apparaître le terme $\left[u^* \frac{du}{dx} \right]_0^L$ dans l'équation (2.12) relatif aux conditions aux limites de Neumann (souvent appelé les conditions aux limites naturelles). En utilisant les termes de frontière définis par les équations (2.7) et (2.8), le réarrangement des termes de l'équation (2.12) donne :

$$\int_0^L \frac{du^*}{dx} \frac{du}{dx} dx = u^* \left. \frac{du}{dx} \right|_L^T - u^* \left. \frac{du}{dx} \right|_0^{ku(0)} + \int_0^L u^* f dx \quad (2.13)$$

Alors la forme faible W devient

$$W = \int_0^L \frac{du^*}{dx} \frac{du}{dx} dx + u^* ku(0) - u^* T - \int_0^L u^* f dx = 0 \quad (2.14)$$

2.3.4 Discrétisation du domaine

Le domaine Ω du problème étudié correspond à une ligne droite le long de l'axe x qui s'étend de $x = 0$ à $x = L$. Comme le montre la Figure (2.4), le domaine est subdivisé à $nelt$ sous-domaines Ω^e (segments) appelés *éléments finis*. Ces éléments constituent le maillage éléments finis. Les nœuds et les éléments dans la Figure (2.4) sont numérotés d'une façon séquentielle. Ensuite, la formulation des équations éléments finis à partir de la forme variationnelle consiste à diviser l'intégration sur le domaine Ω à une intégrale sur chaque élément finis Ω^e . Par conséquent l'intégrale sur l'ensemble du domaine Ω peut alors être écrite comme la somme des intégrales sur les

éléments finis Ω^e , i.e. nous pouvons remplacer l'intégrale dans l'équation (2.14) par

$$W = \sum_{e=1}^{nelt} W^e + W_{CL} \quad (2.15)$$

$$W^e = \int_{\Omega^e} \frac{du^*}{dx} \frac{du}{dx} dx - \int_{\Omega^e} u^* f dx \quad (2.16)$$

$$W_{CL} = u^* k u(0) - u^* T \quad (2.17)$$

où $nelt$ désigne le nombre d'éléments, W^e est la forme variationnelle élémentaire et W_{CL} , le terme lié aux conditions aux limites.

2.3.5 Les fonctions de forme standards

La solution approchée u^h obtenue à partir de la formulation faible du problème sur le domaine discrétisé, est représentée à l'intérieur d'un élément par un ensemble de fonctions d'interpolation, autrement appelées *fonctions de forme*. Pour un élément fini de référence linéaire unidimensionnel défini dans le domaine $[-1, 1]$, les fonctions de forme sont définies par l'équation suivante :

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (2.18)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (2.19)$$

où ξ est la coordonnée paramétrique dans l'élément de référence. Le tracé de ces fonctions de forme est illustré dans la Figure 2.5.

2.3.6 La méthode éléments finis standard

Dans la méthode Bubnov-Galerkin, la fonction test u^* est interpolée par les mêmes fonctions d'approximation que la fonction u . L'approximation de u pour un élément e est donnée par l'équation suivante :

$$u^h(x) = \langle N_1(x) \quad N_2(x) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \langle \mathbf{N}_{std}^e \rangle \{ \mathbf{u}^e \} \quad (2.20)$$

tel que $\langle \mathbf{N}_{std}^e \rangle$ est le vecteur des fonctions de forme standards élémentaires et $\{ \mathbf{u}^e \}$ est le vecteur élémentaire des degrés de liberté nodaux. Alors, on peut écrire l'approximation de la fonction test de la façon suivante :

$$u^{*h}(x) = \langle \mathbf{N}_{std}^e \rangle \{ \mathbf{u}^{*e} \} \quad (2.21)$$

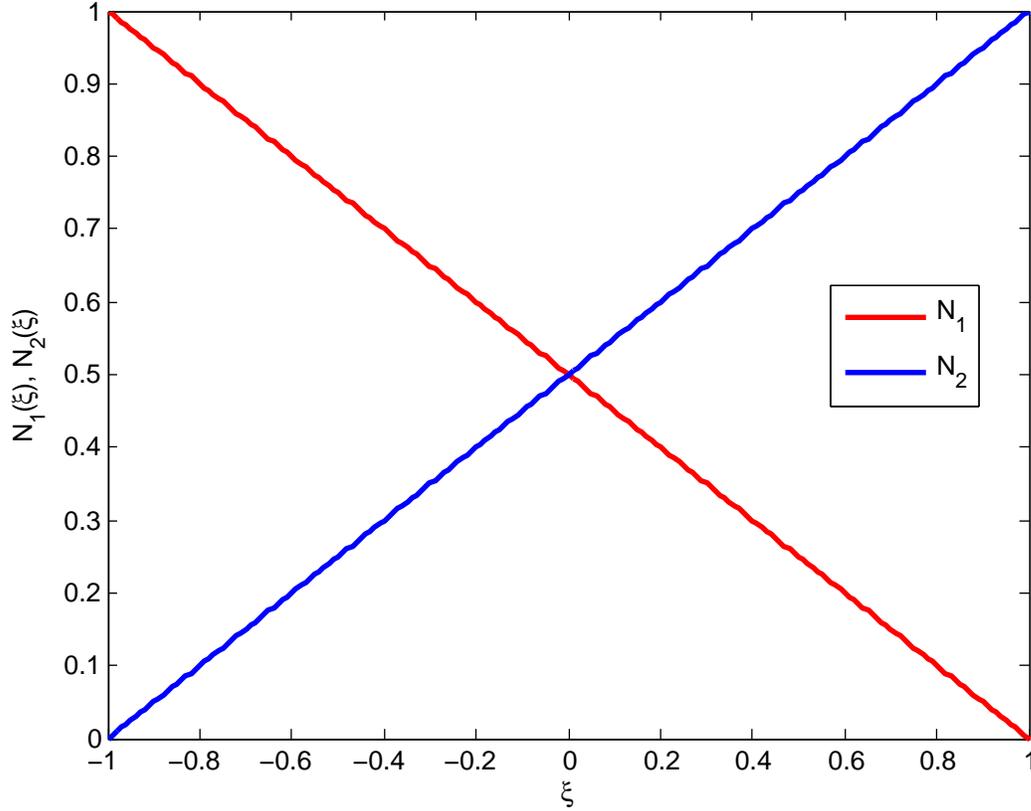


FIGURE 2.5 – Fonctions de forme N_1 et N_2 de l'élément de référence

En définit l'opérateur gradient $[\mathbf{B}_{std}^e]$:

$$\nabla u^h(x) = \langle N_{1,x} \quad N_{2,x} \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}_{std}^e] \{\mathbf{u}^e\} \quad (2.22)$$

En remplaçant l'approximation de ∇u , ∇u^* et u^* dans l'équation (2.16), on trouve :

$$W^e = \int_{\Omega^e} \langle \mathbf{u}^{*e} \rangle [\mathbf{B}_{std}^e]^T [\mathbf{B}_{std}^e] \{\mathbf{u}^e\} dx - \int_{\Omega^e} \langle \mathbf{u}^{*e} \rangle \{\mathbf{N}_{std}^e\} f dx. \quad (2.23)$$

Alors, $\forall \langle \mathbf{u}^* \rangle$ la forme intégrale élémentaire peut s'écrire sous la forme :

$$W^e = \langle \mathbf{u}^{*e} \rangle \left(\underbrace{\int_{\Omega^e} [\mathbf{B}_{std}^e]^T [\mathbf{B}_{std}^e] dx}_{[\mathbf{K}^e]} \{\mathbf{u}^e\} - \underbrace{\int_{\Omega^e} \{\mathbf{N}_{std}^e\} f dx}_{\{\mathbf{f}^e\}} \right) \quad (2.24)$$

$$= \langle \mathbf{u}^{*e} \rangle ([\mathbf{K}^e] \{\mathbf{u}^e\} - \{\mathbf{f}^e\}) \quad (2.25)$$

$[\mathbf{K}^e]$ représente la matrice de rigidité élémentaire et $\{\mathbf{f}^e\}$ le vecteur de force élémentaire. Après l'assemblage des équations éléments finis et l'introduction des condi-

TABLE 2.1 – Norme d’erreur L^2 pour trois discrétisations éléments finis

$nelt$	longueur de l’élément h	norme L^2
19	0.0526	0.1120
38	0.0263	0.0473
39	0.0256	0.0856

tions aux limites (2.17), on obtient le système :

$$[\mathbf{K}] \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\}. \quad (2.26)$$

Dans l’équation (2.26), $[\mathbf{K}]$ est la matrice de rigidité globale, $\{\mathbf{F}\}$ est le vecteur de sollicitation global et $\{\mathbf{U}\}$ est le vecteur qui contient des degrés de liberté nodaux.

Dans la Figure 2.6, une comparaison entre la solution obtenue par la méthode de éléments finis avec la solution analytique est illustrée.

Pour le calcul FEM, un nombre d’éléments total $nelt = 19$ est utilisé, $T = -2$ et $L = 1$ et 10 points d’intégration par élément. On remarque sur la Figure (2.6) que l’approximation éléments finis est incapable de capter le comportement de la solution au voisinage de point $x = 0.5$, ce qui n’est pas surprenant parce que le caractère local de la solution est contenu dans un seul élément. Une façon de faire pour améliorer la qualité de la solution, consiste à raffiner le maillage, ce qui entraîne l’ajout de nouveaux éléments et nœuds. Cette opération de raffinement de maillage est simple pour le cas unidimensionnel, mais elle devient plus compliquée et couteuse pour les problèmes 2D et 3D. Dans les sections suivantes, on utilise le norme d’erreur L^2 :

$$\|u - u^h\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} (u - u^h)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.27)$$

Le Tableau 2.1 résume les résultats de trois discrétisations éléments finis. On remarque que l’erreur ne diminue pas nécessairement quand on augmente le nombre d’éléments. Une comparaison de la convergence entre un maillage de 38 et 39 éléments montre que l’erreur est plus grande pour un maillage de 39 éléments. L’explication est que pour un maillage de 38 éléments le point $x = 0.5$ coïncide à un nœud du maillage, mais pour l’autre maillage (39 éléments), le point $x = 0.5$ se trouve au centre d’un élément. Dans l’annexe A.1, on donne code Matlab 1D pour la résolution par éléments finis classique de cet exemple.

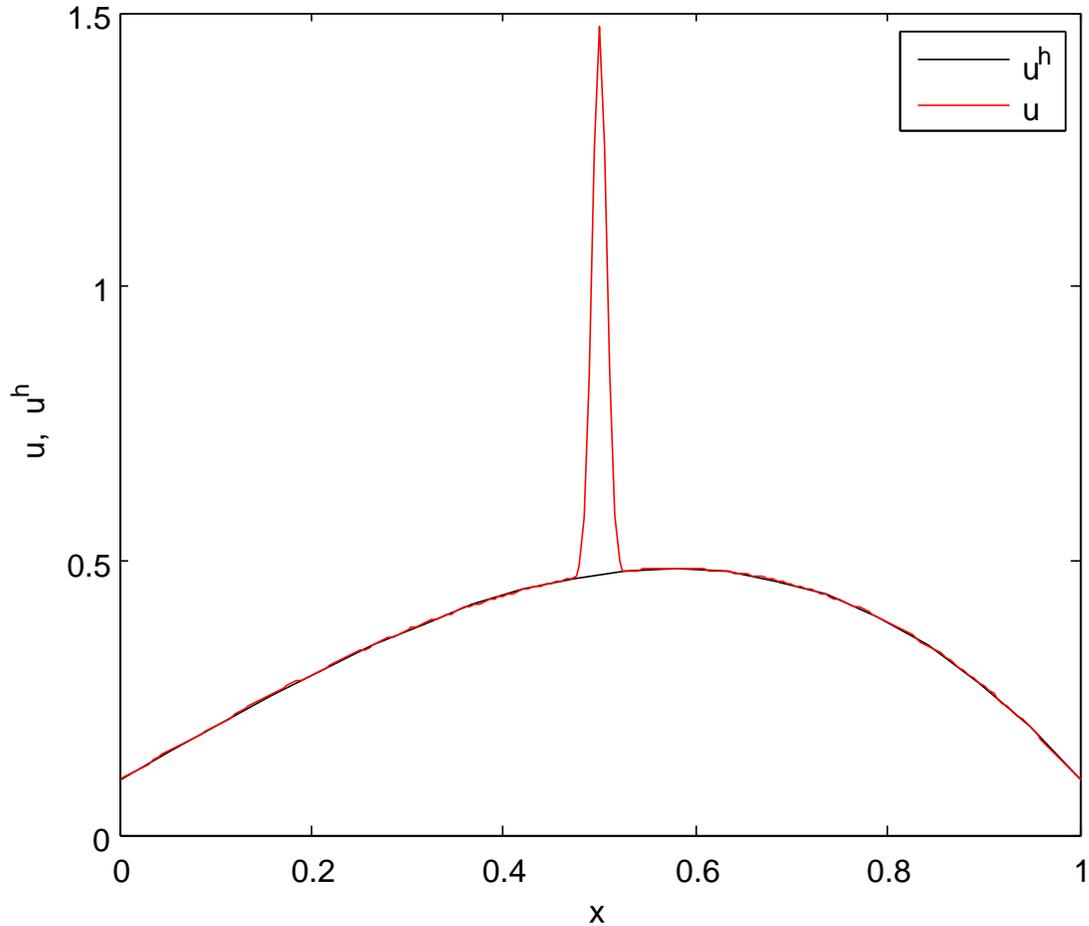


FIGURE 2.6 – Solution analytique et par éléments finis

2.3.7 La méthode éléments finis avec enrichissement local

En utilisant le principe de la partition de l'unité (2.2), l'approximation éléments finis standard est enrichie par une fonction g multipliée par les fonctions de forme standards. Le choix de la fonction d'enrichissement g doit être approprié au caractère local de la solution. Dans l'exemple de la barre unidimensionnel présenté dans la sous-section 2.3.3, en analysant la force volumique $f(x)$, on remarque que celle-ci tend vers zéro rapidement quand on s'éloigne du centre de la barre. Par conséquent, on doit enrichir seulement les nœuds au milieu de la barre avec la fonction définie par l'équation (2.28) en utilisant la fonction $g(x)$ suivante :

$$g(x) = e^{-\left(\frac{x-\frac{L}{2}}{\alpha}\right)^2} \quad (2.28)$$

Dans ce cas là, l'approximation éléments finis enrichie s'écrit :

$$u^h(x) = \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(x) u_i}_{u^{std}} + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(x) g(x) a_j}_{u^{enr}} \quad (2.29)$$

où u^{std} représente la partie éléments finis standard et u^{enr} la partie enrichie de l'approximation. Comme le déplacement nodal u^h est maintenant une fonction à la fois des degrés de liberté traditionnels et les degrés de liberté enrichis, l'approximation de u aux nœuds i n'est plus égale au déplacement nodal u_i . Pour conserver cette propriété importante de la méthode des éléments finis, on utilise des fonctions d'enrichissement décalées ψ_i (*shifted enriched functions*) telles que ces fonctions enrichies s'annulent aux nœuds comme le montre la Figure 2.7. Les fonctions d'enrichissement décalées sont construites par une simple soustraction de la fonction $g(x)$ et ses valeurs au nœuds, i.e,

$$\psi_j(x) = g(x) - g(x_j) \quad (2.30)$$

où $g(x_j)$ est la valeur de $g(x)$ au nœud j . Alors, l'approximation éléments finis enrichie devient :

$$u^h(x) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(x) u_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(x) \psi_j(x) a_j \quad (2.31)$$

Le produit $N_j(x) \psi_j(x)$ représente *les fonctions de forme enrichies*. La Figure 2.7 montre le tracé des fonctions de forme enrichies dans un élément fini se trouvant au milieu de la barre pour un maillage régulier de 19 éléments. **Remarque** : dans l'approximation éléments finis enrichie définie à l'équation (2.29), si on remplace x par x_i , on obtient :

$$\begin{aligned} u^h(x_i) &= \cancel{N_i(x_i)} \overset{1}{u_i} + \cancel{N_i(x_i)} \overset{1}{g(x)} a_i \\ &= u_i + g(x) a_i \end{aligned}$$

Il est clair que $u^h(x_i) \neq u_i$. Par contre, si on regarde l'approximation de u enrichie par des fonctions décalées définies par l'équation (2.31), on peut écrire :

$$\begin{aligned} u^h(x_i) &= \cancel{N_i(x_i)} \overset{1}{u_i} + [\cancel{N_i(x_i)} \overset{0}{-N_i(x_i)}] g(x) a_i \\ &= u_i \end{aligned}$$

On obtient donc $u^h(x_i) = u_i$. Comme la fonction d'enrichissement décalée prend maintenant une valeur de zéro à tous les nœuds, la solution du système d'équations résultant satisfait $u^h(x_i) = u_i$, et les degrés de liberté enrichis a_j peuvent être utilisés pour traiter les discontinuités fortes et faibles.

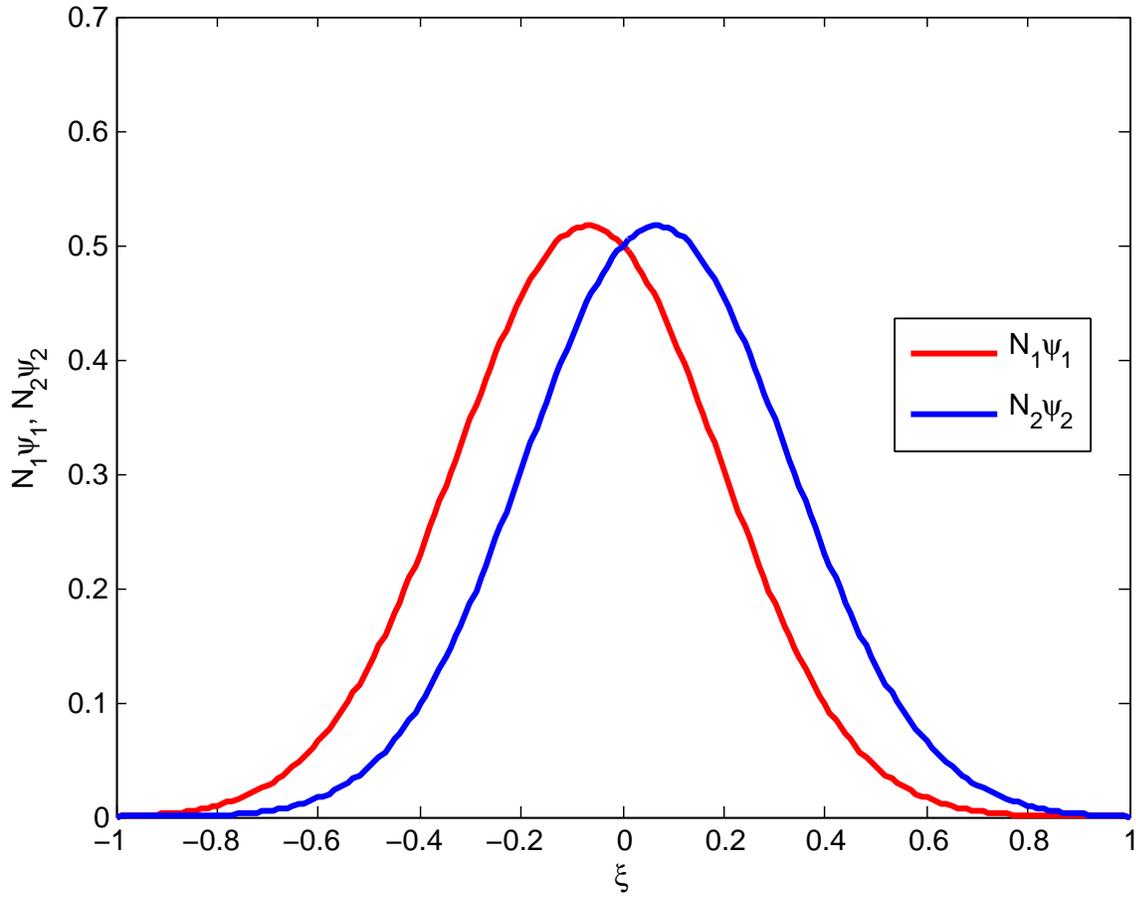


FIGURE 2.7 – Tracé des fonctions de forme enrichies dans un l'espace paramétrique

Pour cet exemple, on définit l'ensemble J des nœuds enrichis comme l'ensemble des nœuds tel que :

$$J = \{j \in I : 0.45L \leq x_j \leq 0.55L\}$$

On utilise la même procédure pour la construction du système matriciel à résoudre, comme dans l'approximation éléments finis standard (voir la section 2.3.6). Certaines précautions doivent être prises pour intégrer la contribution des fonctions enrichies spécialement parce qu'elles ne sont pas des fonctions polynomiales.

Pour un élément complètement enrichi, l'approximation éléments finis enrichie est :

$$u^h(x) = N_1(x)u_1^e + N_2(x)u_2^e + N_1(x)\psi_1(x)a_1^e + N_2(x)\psi_2(x)a_2^e \quad (2.32)$$

$$= \underbrace{\langle N_1 \ N_2 \rangle}_{\langle \mathbf{N}_{std}^e \rangle} \{ \mathbf{u}^e \} + \underbrace{\langle N_1\psi_1 \ N_2\psi_2 \rangle}_{\langle \mathbf{N}_{enr}^e \rangle} \{ \mathbf{a}^e \} \quad (2.33)$$

où $\langle \mathbf{N}_{enr}^e \rangle$ est la partie enrichie du vecteur des fonctions de forme élémentaire

$\langle \mathbf{N}^e \rangle$ et $\{\mathbf{U}^e\}$ est le vecteur des degrés de liberté standards et enrichies. L'équation (2.33) peut être écrite sous la forme condensée qui suit :

$$u^h(x) = \underbrace{\langle \mathbf{N}_{std}^e \quad \mathbf{N}_{enr}^e \rangle}_{\langle \mathbf{N}^e \rangle} \underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{a}^e \end{Bmatrix}}_{\mathbf{U}^e} = \langle \mathbf{N}^e \rangle \{\mathbf{U}^e\} \quad (2.34)$$

L'opérateur gradient pour l'approximation éléments finis enrichie $\langle \mathbf{B}^e \rangle$, peut être calculé à partir de l'équation (2.34)

$$\nabla u^h(x) = [\mathbf{B}_{std}^e \quad \mathbf{B}_{enr}^e] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{a}^e \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}^e] \{\mathbf{U}^e\} \quad (2.35)$$

où $[\mathbf{B}_{enr}^e] = [\nabla \mathbf{N}_{enr}^e]$ est la partie enrichie de l'opérateur gradient. La matrice de rigidité élémentaire et le vecteur force élémentaire pour un élément enrichi est comme suit :

$$[\mathbf{K}^e] = \int_{\Omega^e} [\mathbf{B}^e]^T [\mathbf{B}^e] dx = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_{std}^e]^T [\mathbf{B}_{std}^e] & [\mathbf{B}_{std}^e]^T [\mathbf{B}_{enr}^e] \\ [\mathbf{B}_{enr}^e]^T [\mathbf{B}_{std}^e] & [\mathbf{B}_{enr}^e]^T [\mathbf{B}_{enr}^e] \end{bmatrix} dx \quad (2.36)$$

$$\{\mathbf{f}^e\} = \int_{\Omega^e} \{\mathbf{N}^e\} f(x) dx = \int_{\Omega^e} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_{std}^e \\ \mathbf{N}_{enr}^e \end{Bmatrix} f(x) dx \quad (2.37)$$

Après l'assemblage, on trouve un système d'équations semblable à celui de l'équation (2.26) avec un nombre de degrés de liberté (ddl) global plus grand en comparaison avec la méthode FEM classique pour la même densité de maillage. Dans la Figure 2.8, il est clair qu'on arrive à capturer la solution au milieu de la barre, ce qui est attendu parce qu'on a inclus la solution dans l'approximation éléments finis.

Le Tableau 2.2 montre quelques résultats pour différent nombre d'éléments. On remarque qu'il n'y a pas de dépendance au maillage comme ce fut observé dans le cas de la méthode FEM standard. La comparaison des résultats de convergence, illustrés dans la Figure 2.9, entre la méthode éléments finis standard et enrichie montre un meilleur taux de convergence quand l'approximation éléments finis est enrichie.

Dans l'annexe A.2, un code Matlab 1D est présenté, pour la résolution de cet exemple par éléments finis enrichis.

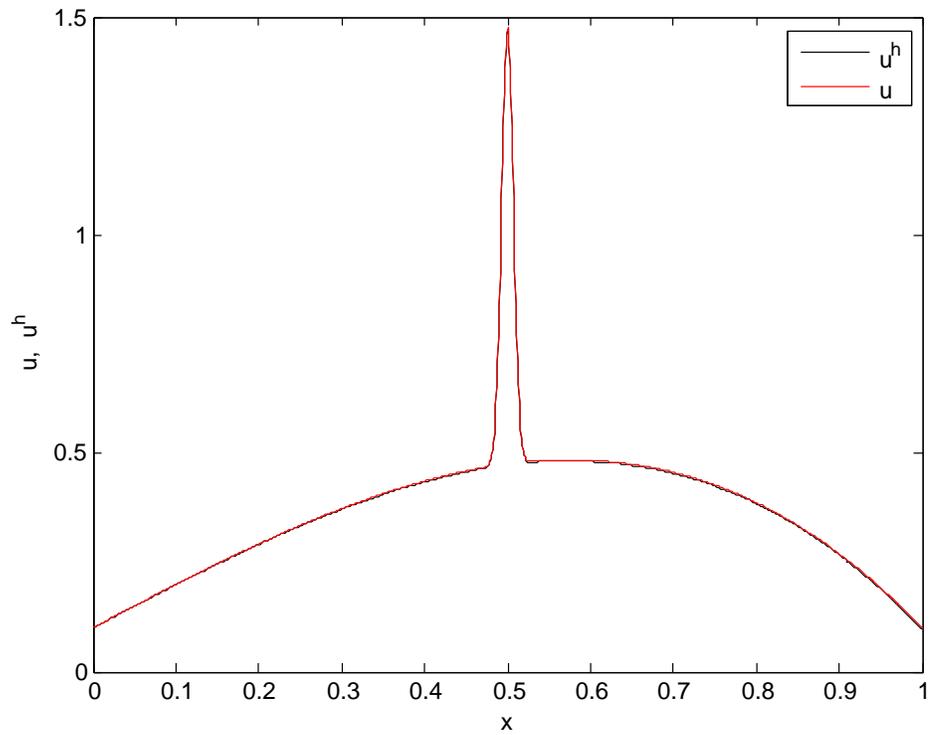


FIGURE 2.8 – Solution analytique et par éléments finis avec enrichissement local

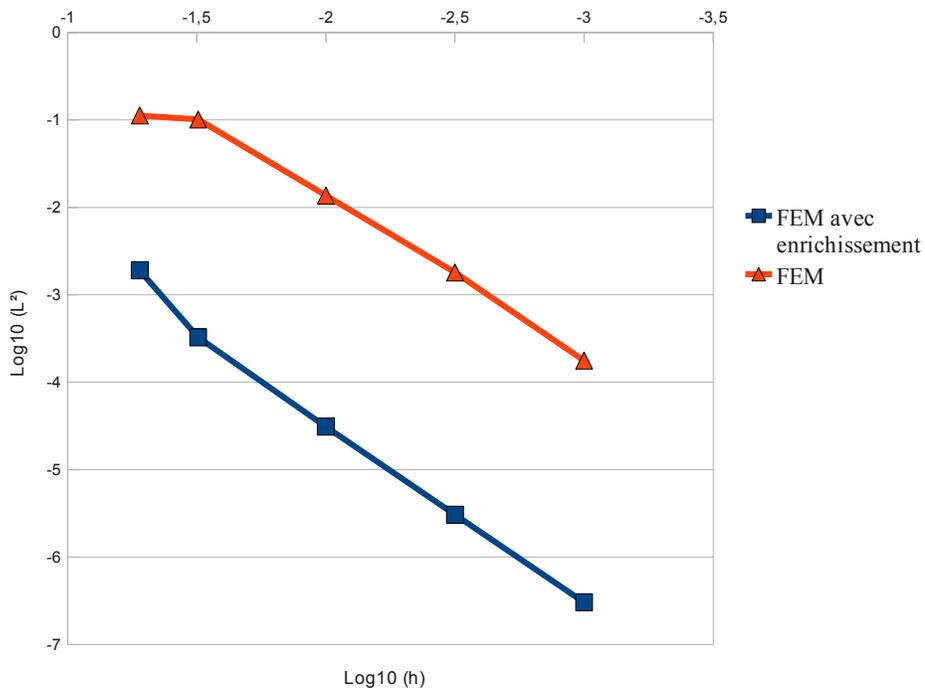


FIGURE 2.9 – Comparaison des résultats de convergence en norme L^2 entre la méthode des éléments finis standard et enrichie

TABLE 2.2 – Norme d’erreur L^2 pour trois discrétisations éléments finis enrichie

$nelt$	ddl	longueur de l’élément h	norme L^2
19	22	0.0526	1.90 E-3
38	42	0.0263	2.23 E-4
39	44	0.0256	2.06 E-4

2.4 XFEM standard

2.4.1 Définition

La méthode XFEM est basée sur une partition de l’unité locale. Elle utilise un enrichissement extrinsèque pour modéliser les discontinuités fortes, comme les fissures ou les vides, et les discontinuités faibles, comme les interfaces entre deux fluides ou les interfaces bimatérielles. L’approximation XFEM peut se décomposer en une partie *standard* et une autre *enrichie*

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{k \in \mathcal{E}} \sum_{j \in \mathcal{J}} \hat{N}_j^k(\mathbf{x}) \psi^k(\mathbf{x}) \mathbf{a}_j^k \quad (2.38)$$

où le premier terme du second membre de l’équation (2.38) est l’approximation éléments finis standard et le deuxième terme est l’enrichissement. \mathcal{I} est l’ensemble des nœuds du maillage et \mathcal{J} est le sous-ensemble des nœuds enrichis qui sont influencés par la discontinuité ; N_i et \hat{N}_j^k sont les fonctions de forme (généralement différentes fonctions de forme peuvent être utilisées pour la partie standard et pour l’enrichissement) ; $\psi(\mathbf{x})$ est la fonction d’enrichissement qui est choisie en relation avec le problème étudié ; \mathbf{a}_j sont les degrés de liberté ajoutés dans la formulation variationnelle. L’ensemble \mathcal{E} est le nombre de discontinuité (par exemple, nombre de fissures ou d’interfaces). Si on a qu’une seule discontinuité, alors la première sommation dans le deuxième terme du second membre de l’Equation (2.38) peut être omise (ainsi que l’exposant k).

On considère dans les sections suivantes l’enrichissement XFEM avec $N_j = \hat{N}_j$ dans le cas unidimensionnel.

2.4.2 Discontinuité forte

Les discontinuités fortes sont des discontinuités matérielles ; elles concernent la variable solution du problème en question. Dans les solides, la variable solution est généralement le déplacement u . Alors les discontinuités fortes sont des sauts de déplacement, comme exemple les fissure et les vides, comme le montre la Figure 2.10.

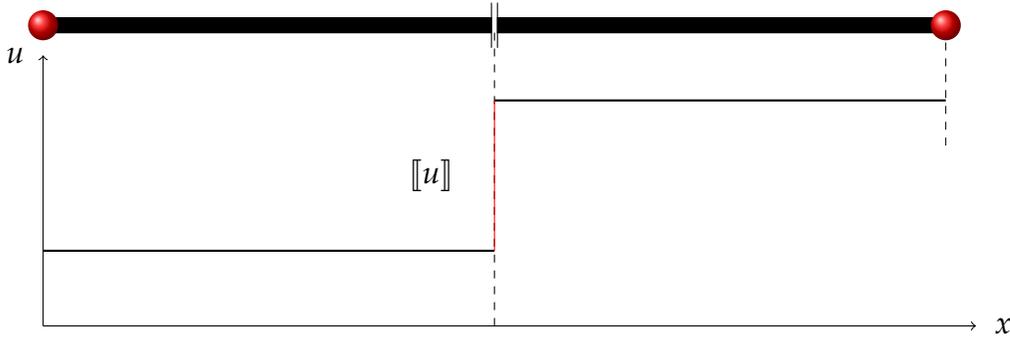


FIGURE 2.10 – Une barre fissurée

Pour la modélisation des fissures , Moës et al. (1999) ont utilisé une fonction signée pour enrichir le champ de déplacement. Cette fonction d'enrichissement $H(x)$, appelée aussi fonction Heaviside généralisée, est définie :

$$H(\xi) = \begin{cases} 1 & \forall \xi > 0 \\ -1 & \forall \xi < 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

La fissure est définie par une fonction *Level set* ϕ (plus de détails sur la fonction *Level set* dans la Section 2.6) tel que :

$$\phi(x) = x - x_c \Rightarrow \begin{cases} \phi(x) = 0 & x = x_c \\ \phi(x) < 0 & x < x_c \\ \phi(x) > 0 & x > x_c \end{cases} \quad (2.40)$$

On considère un maillage composé de trois éléments finis comme le montre la Figure 2.11. Les nœuds sont numérotés d'une façon croissante de 1 à 4. L'élément au milieu contient une fissure située à x_c , sa coordonnée est arbitraire entre le nœud 2 et 3. Par conséquent les nœuds 2 et 3 sont enrichis. Les nœuds 1 et 4 ne sont pas enrichis puisqu'ils ne sont pas influencés par la fissure. Comme $x_2 < x_c$ et $x_3 > x_c$, il en résulte que $H(\phi(x_2)) = -1$ et $H(\phi(x_3)) = 1$

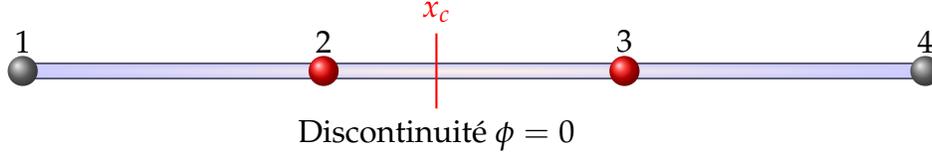


FIGURE 2.11 – Une barre avec 3 éléments finis contenant une discontinuité à x_c ; en rouge les nœuds enrichis

L'approximation (2.38) peut s'écrire en utilisant les fonctions d'enrichissements décalées :

$$u^h(x) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(x) u_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} \underbrace{N_j(x) (H(\phi(x)) - H(\phi(x_j)))}_{N_j^e(x)} a_j \quad (2.41)$$

où N_j^e sont les fonctions de forme enrichies. Dans les Figures 2.12 et 2.13, le tracé des fonctions de forme standards et enrichies dans un élément de référence linéaire est montré. On remarque que les fonctions de forme enrichies ne sont actives que dans un coté de la fissure, et de l'autre coté s'annulent. Cette caractéristique permet de modéliser la saut dans le champs u à la fissure.

Le saut de u^h à la discontinuité x_c est calculé comme suit :

$$\begin{aligned} \llbracket u^h(x_c) \rrbracket &= u^h(x_c^+) - u^h(x_c^-) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(x_c^+) u_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(x_c^+) (H(\phi(x_c^+)) - H(\phi(x_j))) a_j \\ &\quad - \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(x_c^-) u_i - \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(x_c^-) (H(\phi(x_c^-)) - H(\phi(x_j))) a_j \end{aligned} \quad (2.42)$$

En utilisant la continuité des fonctions de forme standards à travers la discontinuité, c'est-à-dire $N_i(x_c^+) = N_i(x_c^-) = N_i(x_c)$ alors on trouve :

$$\llbracket u^h(x) \rrbracket = \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(x_c) (H(\phi(x_c^+)) - H(\phi(x_c^-))) a_j \quad (2.43)$$

puisque $(H(\phi(x_c^+)) - H(\phi(x_c^-))) = 2$, l'expression du saut du champ u^h devient :

$$\llbracket u^h(x) \rrbracket = 2 \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(x_c) a_j \quad (2.44)$$

On remarque que le saut est seulement modélisé en fonction des degrés de liberté enrichies.

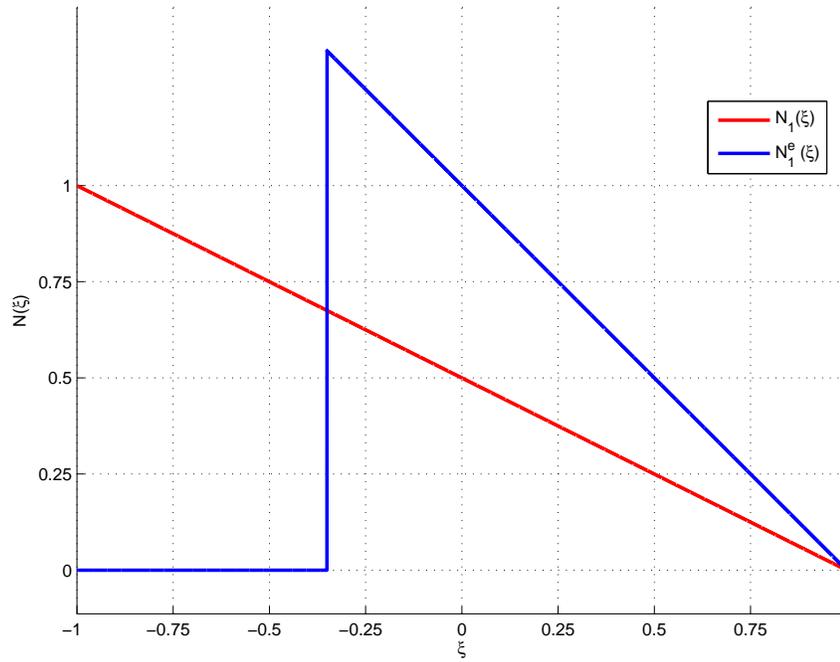


FIGURE 2.12 – Tracé de la fonction de forme standard N_1 et enrichie N_1^e dans un élément de référence avec une discontinuité forte

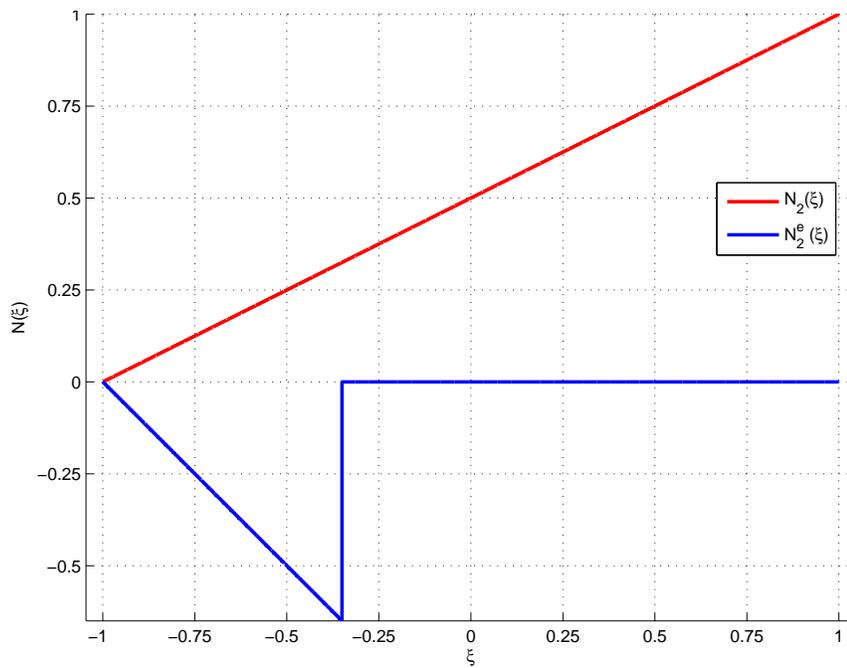


FIGURE 2.13 – Tracé de la fonction de forme standard N_2 et enrichie N_2^e dans un élément de référence avec une discontinuité forte

2.4.3 Discontinuité faible

Les discontinuités faibles sont des discontinuités dans la dérivée de la variable solution. On trouve ce genre de discontinuités pour le cas des interfaces bimatérielles, où le déplacement u est continu mais le gradient du champ de déplacement est discontinu, comme le montre la Figure 2.14.

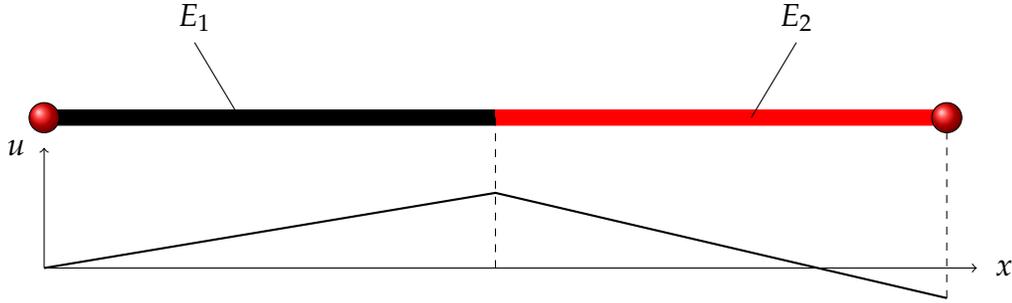


FIGURE 2.14 – Une barre bimatérielle, E est le module d'élasticité

Aussi, dans le problème de solidification, la conductivité thermique est discontinue sur le front et conduit à un champ de température à dérivée discontinue. Les travaux de Ji et al. (2002) et Chessa et al. (2002) utilisent XFEM pour modéliser cette discontinuité et la méthode *Level set* pour propager le front.

La fonction d'enrichissement ψ dans ce cas est la valeur absolue de la fonction *Level set* ϕ :

$$\psi_j(x, t) = |\phi(x, t)| - |\phi(x_j, t)| \quad (2.45)$$

On remarque que les fonctions ψ_j sont continues à l'interface comme l'illustre la Figure 2.15. Alors, l'approximation (2.38) devient :

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(x) u_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} \underbrace{N_j(x) \psi_j(x, t)}_{N_j^e(x)} a_j \quad (2.46)$$

L'ensemble \mathcal{J} représente les nœuds enrichis influencés par l'interface, qui sont montrés dans la Figure 2.11. Dans les Figures 2.16 et 2.17, on remarque que les fonctions de forme enrichies N_j^e sont continues à l'interface, mais pas leurs dérivées.

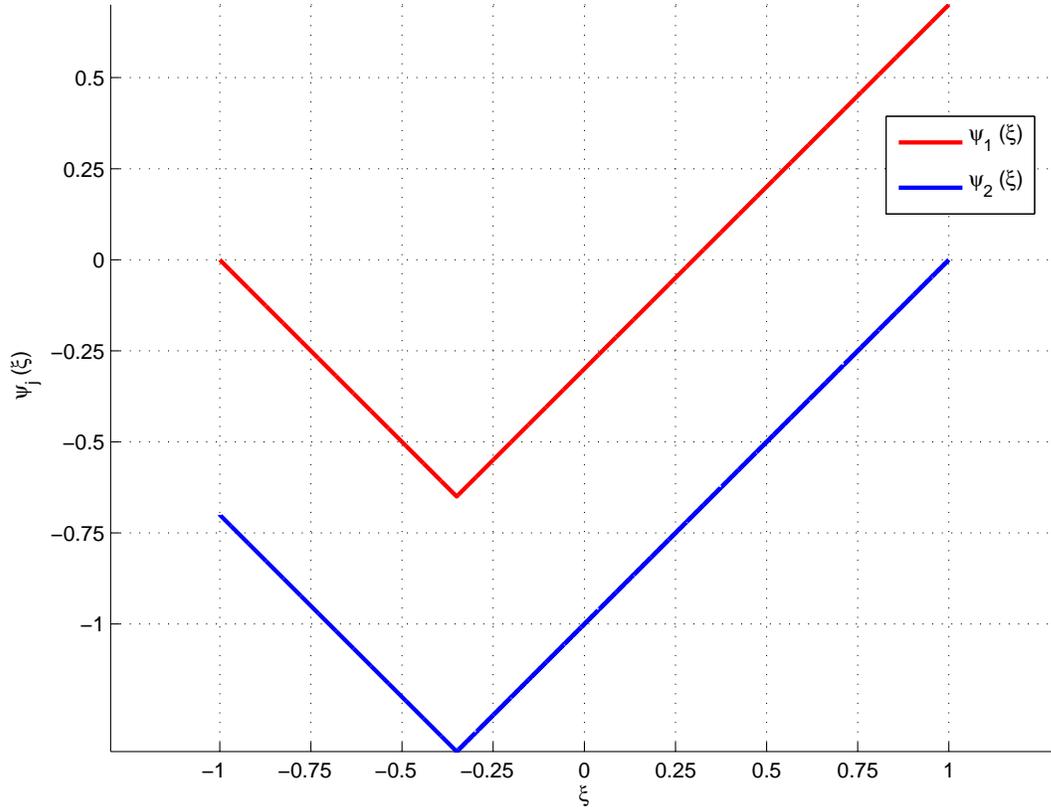


FIGURE 2.15 – Tracé des fonctions d’enrichissement ψ_j dans un élément de référence ($\xi \in [-1, 1]$) avec une discontinuité faible au point $\xi_c = -0.4$

Le gradient de u^h est obtenu par la différenciation de l’équation (2.46) :

$$\nabla u^h(x) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \nabla N_i(x) u_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} \{ \nabla N_j(x) \psi_j(x, t) + N_j(x) \nabla \psi_j(x, t) \} a_j \quad (2.47)$$

avec

$$\begin{aligned} \nabla \psi_j(x, t) &= \nabla [|\phi(x, t)| - |\phi(x_j, t)|] \\ &= \nabla |\phi(x, t)| \\ &= \mathbf{sign}(\phi(x, t)) \underbrace{\nabla \phi(x, t)}_{\mathbf{n}_{\text{interface}}} \end{aligned}$$

où \mathbf{sign} est la fonction signe, et $\mathbf{n}_{\text{interface}}$ est la normale à l’interface définie par le gradient de la fonction *Level set*. Donc, on peut écrire l’expression du gradient de ψ_j :

$$\nabla \psi_j(x, t) = \mathbf{sign}(\phi(x, t)) \mathbf{n}_{\text{interface}} \quad (2.48)$$

Le seul terme qui peut causer le saut du gradient de u^h est $\nabla \psi_j(x, t)$. D’une façon similaire pour calculer le saut du champ u^h présenté dans l’équation (2.42), on calcule

le saut du gradient de u^h :

$$\begin{aligned}
\llbracket \nabla u^h(x_c) \rrbracket &= \sum_{i \in \mathcal{I}} [\nabla N_i(x_c^+) - \nabla N_i(x_c^-)] u_i \\
&+ \sum_{j \in \mathcal{J}} [\nabla N_j(x_c^+) \psi_j(x_c^+, t) - \nabla N_j(x_c^-) \psi_j(x_c^-, t)] a_j \\
&+ \sum_{j \in \mathcal{J}} \underbrace{[N_j(x_c^+) \nabla \psi_j(x_c^+, t) - N_j(x_c^-) \nabla \psi_j(x_c^-, t)]}_{2N_j(x_c) \mathbf{n}_{\text{interface}}} a_j
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Le deux premiers termes du second membre de l'équation (2.49) sont nuls, à cause de la continuité des fonctions de forme standards N_i et les fonctions d'enrichissement ψ_j à l'interface. Enfin, l'expression du saut du gradient de u^h est :

$$\llbracket \nabla u^h(x_c) \rrbracket = \sum_{j \in \mathcal{J}} 2N_j(x_c) a_j \mathbf{n}_{\text{interface}} \tag{2.50}$$

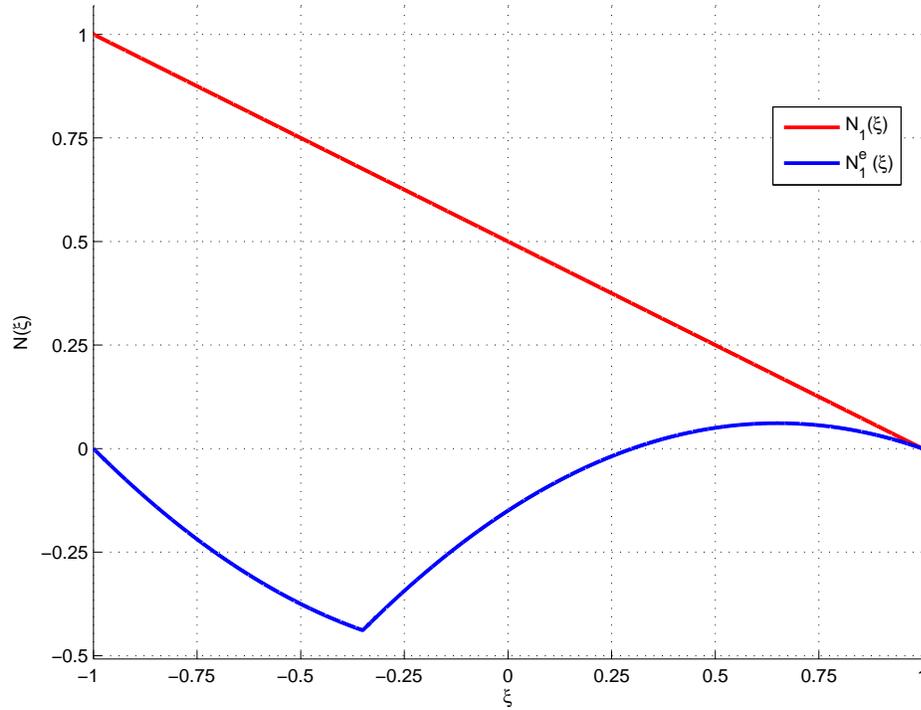


FIGURE 2.16 – Tracé de la fonction de forme standard N_1 et enrichie N_1^e dans un élément de référence avec une discontinuité faible

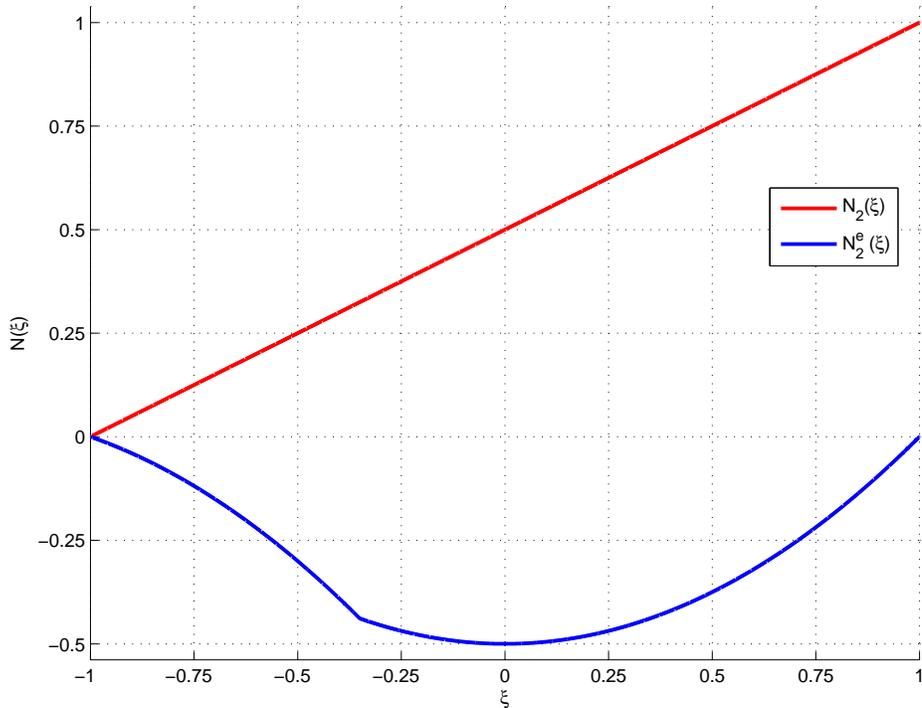


FIGURE 2.17 – Tracé de la fonction de forme standard N_2 et enrichie N_2^e dans un élément de référence avec une discontinuité faible

2.5 XFEM pour un problème thermique 1D avec fissure

2.5.1 équations du problème

On considère un problème thermique stationnaire unidimensionnel linéaire d'une barre de longueur L , soumise à deux conditions aux limites, de type Dirichlet et contenant une fissure à x_c , comme le montre la Figure 2.18.

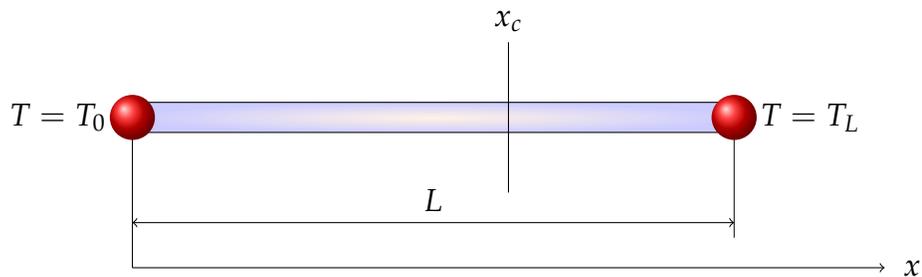


FIGURE 2.18 – Barre avec une fissure

La température le long de la barre est régie par l'équation de la chaleur suivante :

$$-k \frac{d^2 T}{dx^2} = f \quad \forall x \in [0, L] \quad (2.51)$$

où k est la conductivité thermique et f un terme source, avec les conditions aux limites,

$$\begin{cases} T(x=0) = T_0 \\ T(x=L) = T_L \end{cases} \quad (2.52)$$

$$(2.53)$$

2.5.2 Forme variationnelle

D'une façon similaire à l'exemple présenté dans la section 2.3.3, on peut trouver la forme variationnelle en multipliant l'équation 2.51 par une fonction test T^* et en l'intégrant sur le domaine :

$$W = \int_0^L \frac{dT^*}{dx} k \frac{dT}{dx} dx - \int_0^L T^* f dx - \left[T^* k \frac{dT}{dx} \right]_0^L = 0 \quad (2.54)$$

2.5.3 Discrétisation du domaine

En divisant le domaine en nel éléments, on peut écrire la forme variationnelle élémentaire comme dans la section 2.3.4.

$$x \in [x_i, x_{i+1}] \Rightarrow \zeta \in [-1, 1] \quad \text{tel que } L_e = x_{i+1} - x_i \quad (2.55)$$

où ζ est la coordonnée paramétrique dans l'élément de référence et L_e la longueur de l'élément. La discrétisation de l'équation 2.54 donne :

$$W = \sum_{i=1}^{nel} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dT^*}{dx} k \frac{dT}{dx} dx - \sum_{i=1}^{nel} \int_{x_i}^{x_{i+1}} T^* f dx - \left[T^* k \frac{dT}{dx} \right]_0^L = 0 \quad (2.56)$$

Le champ de température et la fonction test sont approchés par les fonctions de forme linéaires présentées dans les équations (2.18) et (2.19). La fonction d'enrichissement pour modéliser la discontinuité de la température à la fissure est la fonction Heaviside généralisée définie par l'équation (2.39).

2.5.4 Calcul des matrices de rigidité et des vecteurs forces élémentaires

On considère ici deux types d'éléments : soit l'élément finis standard et celui enrichi. Dans le premier cas, on utilise l'approximation éléments finis standard :

$$T^h(x) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(x) T_i \quad (2.57)$$

Donc, la matrice de rigidité et le vecteur de force élémentaire sont calculés comme suit :

$$\mathbf{K}_{std}^e = \frac{2}{L_e} \int_{-1}^1 [\mathbf{B}_{std}]^T k [\mathbf{B}_{std}] d\zeta \quad (2.58)$$

$$\mathbf{f}_{std}^e = \frac{L_e}{2} \int_{-1}^1 \{\mathbf{N}_{std}\} f d\zeta \quad (2.59)$$

où $\{\mathbf{N}_{std}\}$ et $[\mathbf{B}_{std}]$ sont les vecteurs de fonctions de forme et l'opérateur gradient en coordonnée paramétrique ζ , respectivement :

$$\{\mathbf{N}_{std}\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \zeta) \\ \frac{1}{2}(1 + \zeta) \end{Bmatrix} \quad (2.60)$$

$$[\mathbf{B}_{std}] = [N_{1,\zeta}(\zeta) \quad N_{2,\zeta}(\zeta)] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

L'approximation XFEM de la température pour un élément enrichi est :

$$T^h(x) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(x) T_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(x) (H(\phi(x)) - H(\phi(x_j))) a_j \quad (2.62)$$

Alors, l'expression de la matrice de rigidité et le vecteur de force élémentaires enrichies s'écrivent d'une façon similaire à l'équation (2.36) :

$$\mathbf{K}_{enr}^e = \frac{2}{L_e} \int_{-1}^1 [\mathbf{B}]^T k [\mathbf{B}] d\zeta \quad (2.63)$$

$$\mathbf{f}_{enr}^e = \frac{L_e}{2} \int_{-1}^1 \{\mathbf{N}\} f d\zeta \quad (2.64)$$



FIGURE 2.19 – élément de référence avec un fissure à ζ_c

où $\{\mathbf{N}\}$ et $[\mathbf{B}]$ sont les vecteurs de fonctions de forme enrichies et l'opérateur gradient enrichi en coordonnée paramétrique ξ . Dans l'élément de référence montré dans la Figure 2.19, la coordonnée paramétrique de la fissure est notée ξ_c . Sachant que $H(\xi = -1) = -1$ et $H(\xi = 1) = 1$, alors on peut simplifier l'expression de $\{\mathbf{N}\}$ et $[\mathbf{B}]$:

$$\{\mathbf{N}\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_1[H(\xi) + 1] \\ N_2[H(\xi) - 1] \end{Bmatrix} \quad (2.65)$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & (N_1[H(\xi) + 1])_{,\xi} & (N_2[H(\xi) - 1])_{,\xi} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Les fonctions de forme standards sont continues dans un élément enrichi, mais pas la fonction d'enrichissement. Par conséquent, pour intégrer correctement les termes dans l'équation (2.56), on divise le domaine d'intégration comme suit :

$$\int_{-1}^1 (\dots) d\xi = \int_{-1}^{\xi_c} (\dots) d\xi + \int_{\xi_c}^1 (\dots) d\xi \quad (2.67)$$

Utilisant les équations (2.67), (2.63) et (2.66) pour trouver l'expression analytique de la matrice de rigidité élémentaire d'un élément enrichi :

$$\mathbf{K}_{enr}^e = \begin{bmatrix} K_{TT} & K_{Ta} \\ K_{Ta}^T & K_{aa} \end{bmatrix} = \frac{k}{L_e} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 - \xi_c & 1 + \xi_c \\ -1 & 1 & -(1 - \xi_c) & -(1 + \xi_c) \\ \hline 1 - \xi_c & -(1 - \xi_c) & 2(1 - \xi_c) & 0 \\ 1 + \xi_c & -(1 + \xi_c) & 0 & 2(1 + \xi_c) \end{array} \right] \quad (2.68)$$

On remarque que cette matrice peut être décomposée à 4 sous-matrices. La matrice K_{TT} représente la matrice de rigidité classique, la matrice K_{aa} est la matrice de rigidité enrichie, et K_{Ta} le couplage entre les termes standards et enrichis. Dans l'expression de la matrice de rigidité élémentaire enrichie, on constate que les termes enrichis dépendent seulement de la position de la fissure ξ_c . Cette caractéristique facilite la modélisation de plusieurs fissures sans avoir la contrainte du maillage qui doit se conformer avec la géométrie de la fissure.

2.5.5 Résolution du problème

Après l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires et les vecteurs des forces élémentaire, on trouve un système d'équations linéaires de type :

$$[\mathbf{K}] \{\mathbf{T}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (2.69)$$

où $[K]$ et $\{F\}$ sont la matrice de rigidité globale et le vecteur des forces global, composés d'une partie standard et une partie enrichie. $\{T\}$ est le vecteur des degrés de libertés standards et enrichies. Enfin, on introduit les conditions aux limites et on résout le système d'équations présenté dans (2.69).

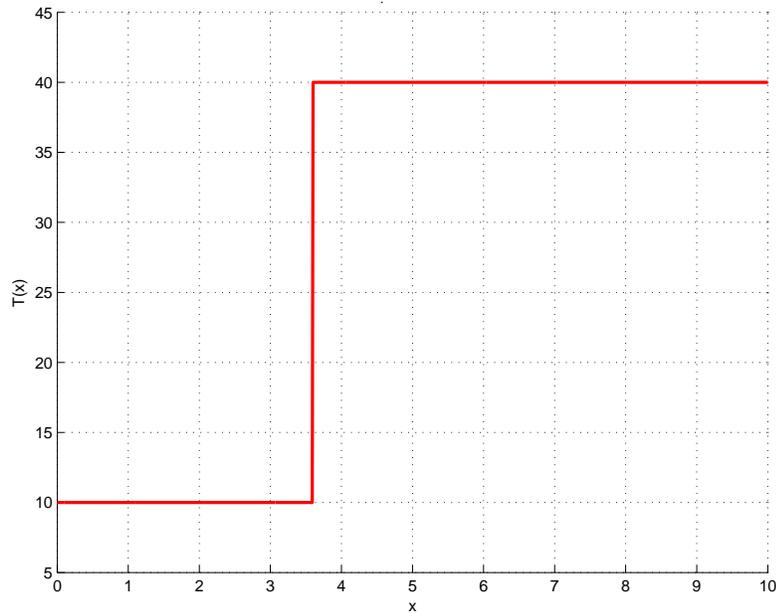


FIGURE 2.20 – Solution XFEM du problème thermique 1D avec une fissure

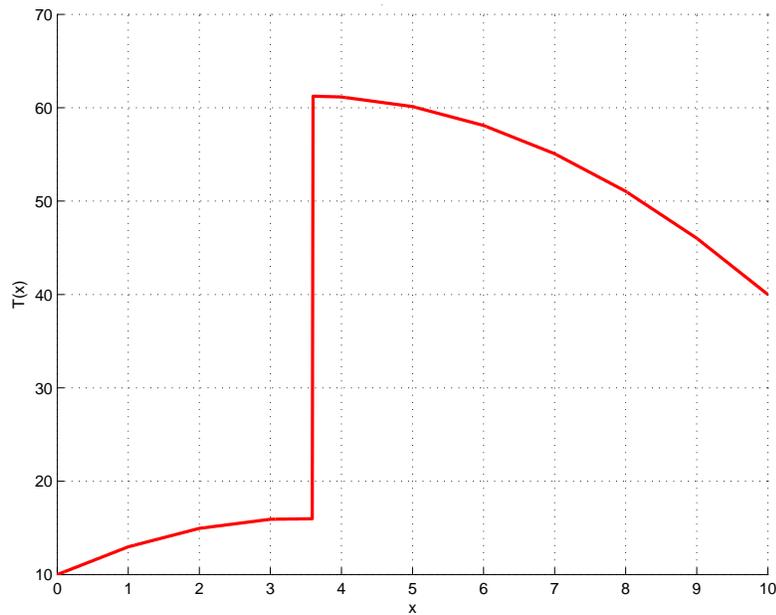


FIGURE 2.21 – Solution XFEM du problème thermique 1D avec une fissure et un terme source

Pour $L = 10, k = 1, T_0 = 10, T_L = 40, x_c = 3.6$ et un maillage de 10 éléments. La solution XFEM est présentée dans la Figure 2.20 sans terme source, et dans la Figure 2.21 avec terme source $f = 1$. On remarque que XFEM réussit à capter la discontinuité du champ de température à la fissure, et la solution dans les deux parties de la barre, à droite de la fissure et à gauche, est complètement indépendante.

2.5.6 échange thermique entre les points de la fissure

On considère un échange thermique entre les points de la fissure, qui dépend du saut de température à la fissure et d'un coefficient d'échange thermique h , défini par l'équation :

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = q_c = -h[[T]] \quad \text{pour } x = x_c \quad (2.70)$$

Si on reprend le dernier terme du second membre de l'équation (2.54), et on introduit la condition d'échange thermique, on trouve :

$$\begin{aligned} -[T^* q]_0^L &= -[T^* q]_0^{x_c^-} - [T^* q]_{x_c^+}^L \\ &= -[T^*(x_c^+) - T^*(x_c^-)] q_c \\ &= [[T^*]] h [[T]] \end{aligned} \quad (2.71)$$

Ensuite, on utilise l'expression du saut de température dans le contexte de XFEM, donnée par l'équation (2.44), pour calculer la matrice d'échange thermique $[K_{ech}^e]$:

$$[[T^*]] h [[T]] = \langle a_1^* \quad a_2^* \rangle 4h \underbrace{\begin{bmatrix} N_1(\xi_c)N_1(\xi_c) & N_1(\xi_c)N_2(\xi_c) \\ N_2(\xi_c)N_1(\xi_c) & N_2(\xi_c)N_2(\xi_c) \end{bmatrix}}_{[K_{ech}^e]} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

On remarque que la matrice d'échange thermique $[K_{ech}^e]$ a un effet seulement sur les degrés de liberté enrichis a_j . Alors, on peut l'écrire sous la forme analytique :

$$[K_{ech}^e] = h \begin{bmatrix} (1 - \xi_c)^2 & (1 - \xi_c^2) \\ (1 - \xi_c^2) & (1 + \xi_c)^2 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Dans La Figure 2.22, la solution $T(x)$ dans la barre fissurée est présentée pour $h = 0.3$. On remarque que la température à la fissure est discontinue mais le flux de chaleur est continu, à cause de l'échange de chaleur entre les points de fissure, comme le définit l'Équation (2.70).

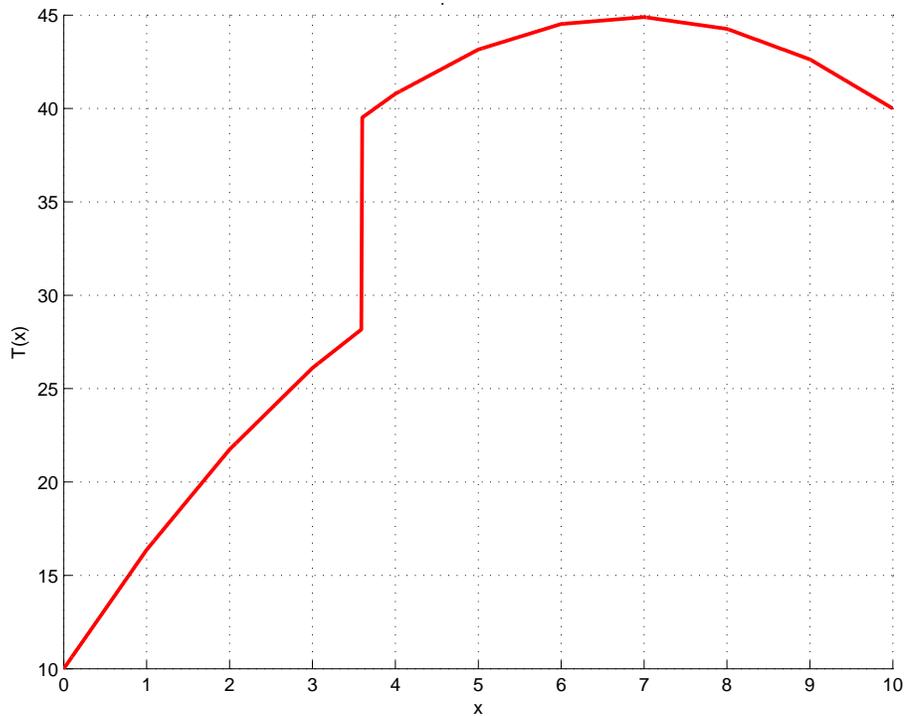


FIGURE 2.22 – Solution XFEM du problème thermique 1D avec échange thermique entre les points de la fissure et un terme source

2.5.7 Plusieurs fissures

Il est facile de modéliser plusieurs fissures dans le contexte de XFEM. Il suffit de capturer les discontinuités à l'aide de plusieurs fonctions *Level set* ϕ . La Figure 2.23 montre un problème thermique 1D avec 5 fissures et différents coefficients d'échange thermique pour chaque fissure, données au Tableau 2.3. Les mêmes valeurs de k , L , f , T_0 et T_L de la Section 2.5.5 sont utilisées pour cette exemple.

TABLE 2.3 – Coordonnées des fissures et les coefficients d'échange thermique correspondants

Fissure	Coordonnée x_c	Coefficients d'échange thermique h
1	0.3	0.5
2	2.2	0.3
3	4.1	0.9
4	6.7	1000
5	8.1	0.1

Un programme Matlab pour la résolution des problèmes thermiques stationnaires en 1D avec plusieurs fissures, est présenté dans l'Annexe B.

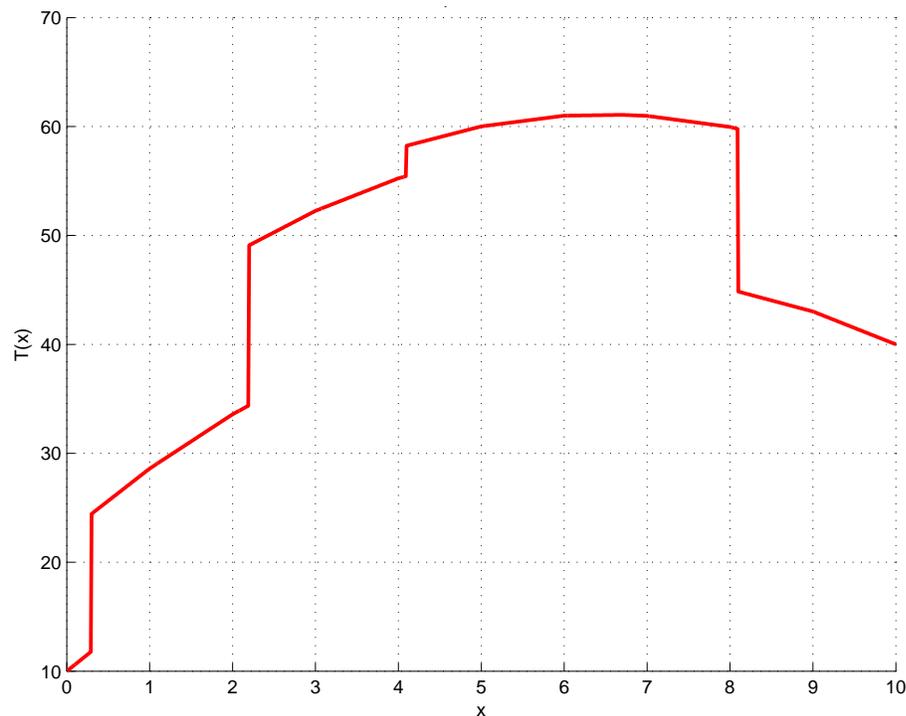


FIGURE 2.23 – Solution XFEM du problème thermique 1D avec plusieurs fissures

2.6 La fonction *Level set*

2.6.1 Définition

La méthode *Level set* a été introduite par Osher and Sethian (1988) comme une méthode numérique pour capturer l'évolution des interfaces. La méthode est basée sur l'évolution d'une interface soumise à une vitesse de front donnée par la physique du problème qui est en cours de modélisation. Les méthodes *Level set* ont été utilisés dans une large applications d'ingénierie, sur des sujets comme les fluides compressibles et incompressibles par Mulder et al. (1992) et Sussman et al. (1994), les procédés de fabrication dans Adalsteinsson and Sethian (1995a,b, 1997), le mouvement des surfaces dynamiques implicites dans Osher and Fedkiw (2002), le traitement d'image dans Osher and Paragios (2003), et l'optimisation de forme des structures dans Wang and Wang (2006) et Wang et al. (2007).

La méthode *Level set* est utilisée pour discrétiser un domaine Ω à des points discrets.

À chacun de ces points est attribué une valeur de distance signée entre ce point et l'intersection la plus proche de l'interface dénotée Γ tel que montré dans la Figure 2.24. Une fonction *Level set* continue $\phi(\mathbf{x})$ est introduite dans laquelle \mathbf{x} est un point du domaine Ω . Elle peut être caractérisée comme une fonction du domaine avec une composante de temps t tel que :

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \pm \min_{\mathbf{x}_\Gamma \in \Gamma} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\Gamma\| \quad (2.74)$$

où \mathbf{x}_Γ est le point de l'interface Γ le plus proche au point \mathbf{x} .

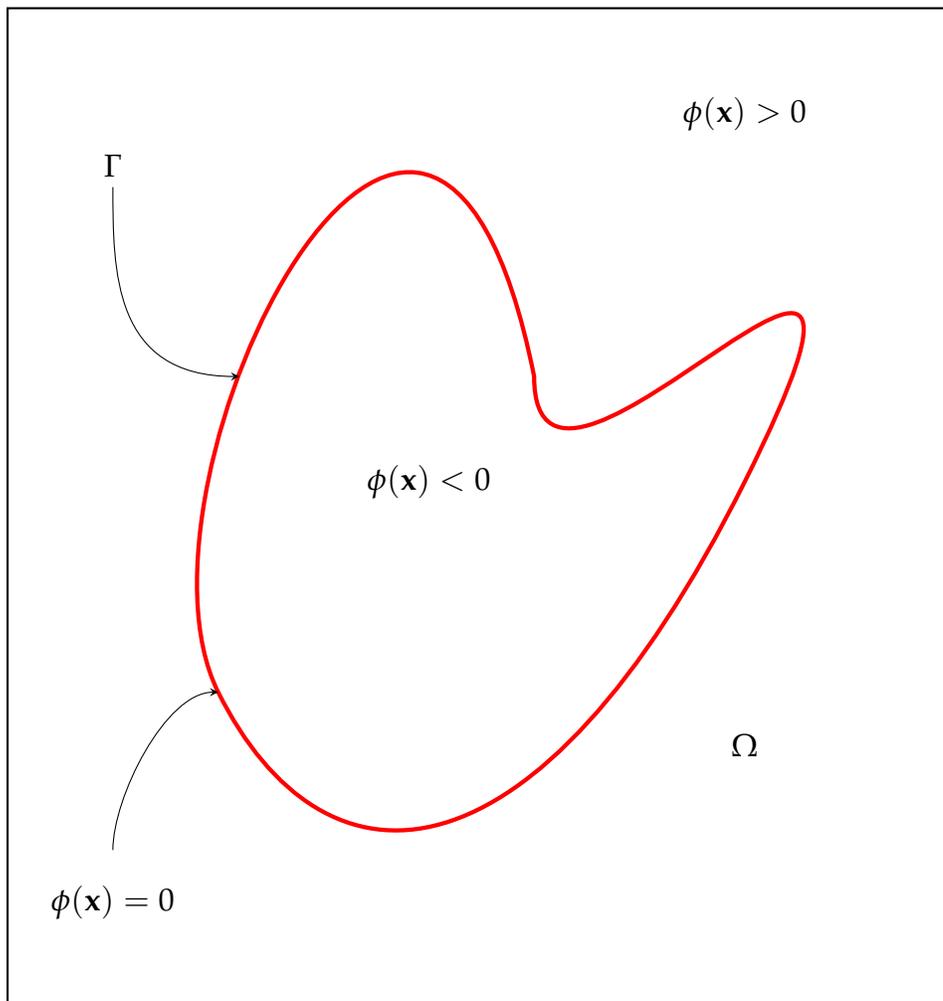


FIGURE 2.24 – Exemple de la fonction distance signée ϕ pour un domaine fermé

Il en découle une propriété importante de la fonction *Level set*, qu'elle est toujours nulle à l'interface Γ .

$$\phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.75)$$

On note qu'à tout instant t la position de l'interface Γ peut être trouvée juste par le calcul de l'Équation (2.75). L'évolution de la fonction *Level set* est généralement calculée par la résolution d'une équation de transport de type Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (2.76)$$

où \mathbf{v} est la vitesse de propagation de l'interface Γ et $\nabla \phi$ est le gradient spatial de la fonction *Level set*. Dans cette thèse la propagation de la fissure en fonction de temps n'est pas considérée. Pour plus de détails sur l'évolution de la fonction *Level set* en fonction de temps, les techniques d'actualisation et d'orthogonalisation, une étude détaillée est présentée dans Dufлот (2007).

Cette version de la méthode *Level set* présentée précédemment n'est valable que pour la simulation des interfaces fermées. Pour une interface ouverte, par exemple une fissure, les notions d'intérieur, extérieur et interface telles que définie par l'Équation (2.75) et la Figure 2.24 n'ont plus de sens physique. Stolarska et al. (2001) ont introduit une version modifiée de la méthode *Level set* qui permet le suivi des interfaces ouvertes par l'utilisation de plusieurs fonctions *Level set*.

Une fissure, comme le montre la Figure 2.25, peut être décrite par deux *Level set* $\phi(\mathbf{x})$ et $\psi(\mathbf{x})$. La fissure est définie comme l'intersection de $\phi(\mathbf{x})$ et $\psi(\mathbf{x})$ tel que :

$$\phi(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(\mathbf{x}) < 0 \quad (2.77)$$

on peut noter que :

- La fonction *Level set* normale ϕ représente la distance signée de la fissure et son extension tangentielle au points de fissure.
- La fonction *Level set* tangentielle ψ représente la distance signée aux pointes de la fissure.
- Les pointes de fissure sont définies par l'intersection des deux fonctions *Level set* ϕ et ψ

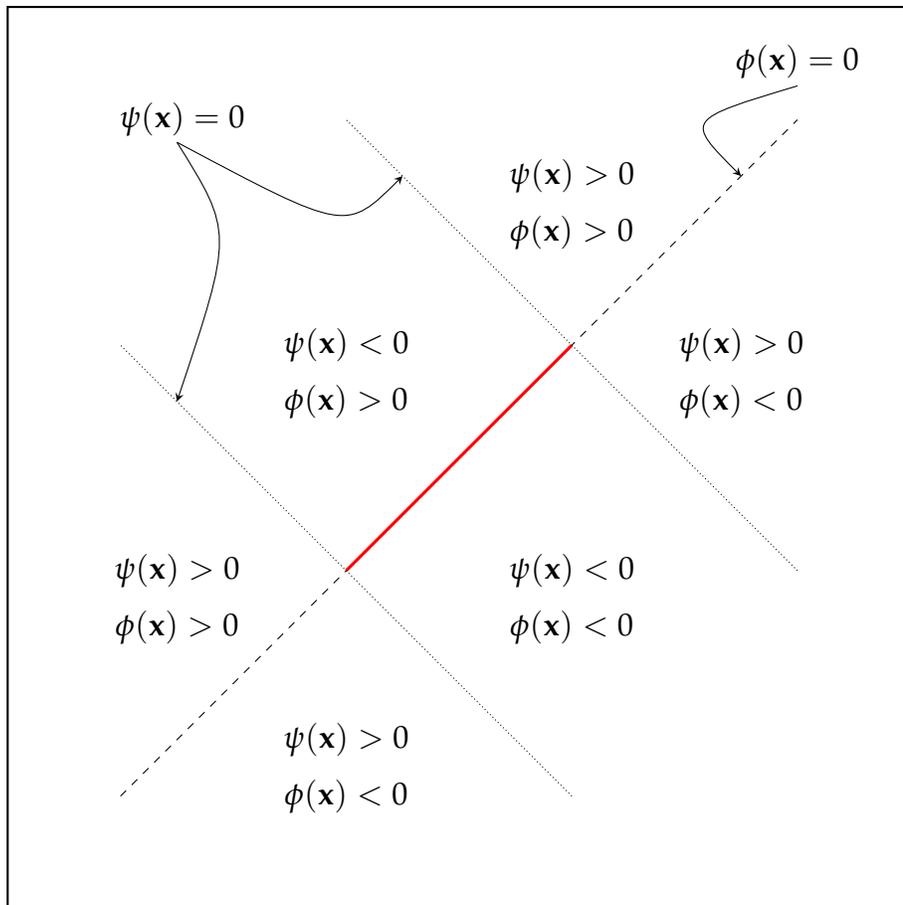


FIGURE 2.25 – Exemple des fonctions distances signées pour le cas d’une fissure, la fissure est représentée en ligne continue rouge, le zéro de la fonction ϕ en ligne pointillée et le zéro de la fonction ψ en ligne hachurée

2.6.2 Utilisation de la fonction *Level set* pour représenter le saut du déplacement

Le champ de déplacement (de même pour le champ thermique et électrique) dans un solide qui contient une fissure est discontinu. Pour obtenir une solution précise, il est indispensable de prendre en compte cette discontinuité dans l’approximation du champ de déplacement. Dans le cas de la méthode XFEM, le maillage n’est pas conforme à la géométrie de la fissure, et des degrés de liberté sont ajoutés pour chaque nœud pour lequel le support est coupé par la fissure. L’approximation de

champ \mathbf{u} dans un élément complètement coupé par une fissure s'écrit :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{a}_j \quad (2.78)$$

où \mathbf{a}_j sont les degrés de liberté enrichis, \mathcal{I} est l'ensemble de nœuds du maillage et \mathcal{J} est l'ensemble des nœuds enrichis par la fonction de saut. On peut exprimer facilement la fonction de saut $H(\mathbf{x})$ comme

$$H(\mathbf{x}) = \mathbf{sign}(\phi(\mathbf{x})), \quad (2.79)$$

tel que \mathbf{sign} est la fonction signe définie par :

$$\mathbf{sign}(s) = \begin{cases} +1 & s > 0 \\ -1 & s < 0 \end{cases} \quad (2.80)$$

Les fonctions *Level set* permettent aussi de classer les éléments. Un élément est coupé par la fissure si et seulement si les valeurs nodales de la fonction *Level set* tangentielle ψ sont négatives pour tous les nœuds de l'élément, et pas toutes les valeurs nodales de la fonction *Level set* normale ϕ qui ont le même signe.

2.6.3 Utilisation des fonctions *Level set* pour le calcul des fonctions asymptotiques à la pointe de la fissure

Dans le contexte de XFEM, Belytschko and Black (1999) ont proposé un enrichissement éléments finis basé sur la partition de l'unité par les fonctions F_l asymptotiques suivantes aux nœuds autour de la pointe de fissure :

$$\{F_l(r, \theta)\} = \begin{pmatrix} \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos \theta \\ \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

Alors l'approximation XFEM du déplacement \mathbf{u} pour un éléments qui contient la pointe de fissure s'écrit :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{k \in \mathcal{K}} N_k(\mathbf{x}) \sum_{l=1}^4 F_l(r, \theta) \mathbf{b}_{kl} \quad (2.82)$$

où \mathbf{b}_{kl} sont les degrés de liberté enrichis, \mathcal{K} est l'ensemble des nœuds enrichis par les fonctions asymptotiques. On remarque que les fonctions d'enrichissement F_l dépendent du rayon r et l'angle θ qui sont les coordonnées polaires dans la base locale au fond de la fissure, comme le montre la Figure 2.26.

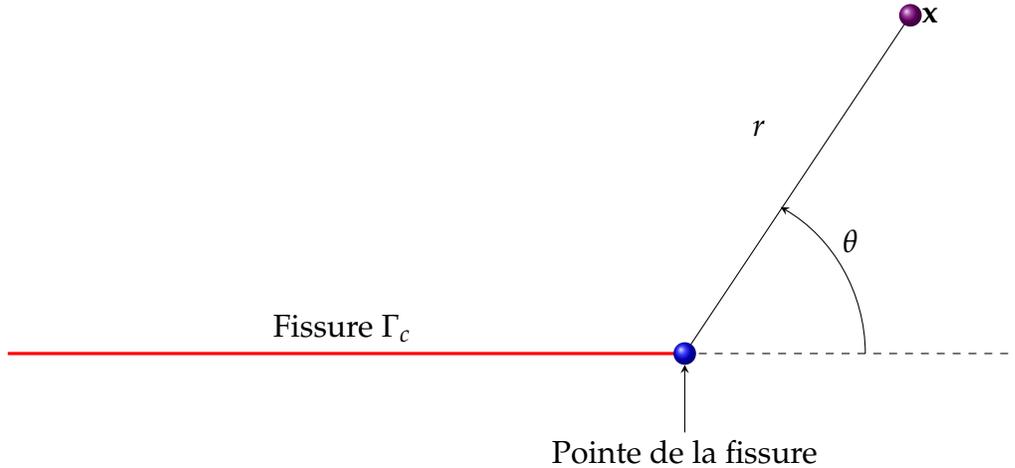


FIGURE 2.26 – Coordonnées polaires à la pointe de la fissure

Stolarska et al. (2001) ont proposé une expression des coordonnées polaires à la pointe de la fissure r et θ en fonction de ϕ et ψ comme suit

$$r = \sqrt{\phi^2 + \psi^2} \quad (2.83)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\phi}{\psi}\right) \quad (2.84)$$

l'Équation (2.84) garantit que $\theta = \pm\pi$ aux lèvres de la fissure (parce que aux lèvres de la fissure $\phi = 0$ et $\psi < 0$) quand le saut dans le terme $\sin(\frac{\theta}{2})$ se produit. La Figure 2.27 illustre comment les fonctions *Level set* peuvent être utilisées pour calculé r et θ .

Les travaux récents de Laborde et al. (2005) et Béchet et al. (2005) ont démontré que pour garder le même taux de convergence de XFEM que celui de FEM, la taille de la zone d'enrichissement par les fonctions asymptotiques doit rester constante quand le maillage devient raffiné à la pointe de la fissure. Ça veut dire qu'il n'est pas suffisant d'enrichir seulement les nœuds des éléments qui contiennent la pointe de fissure.

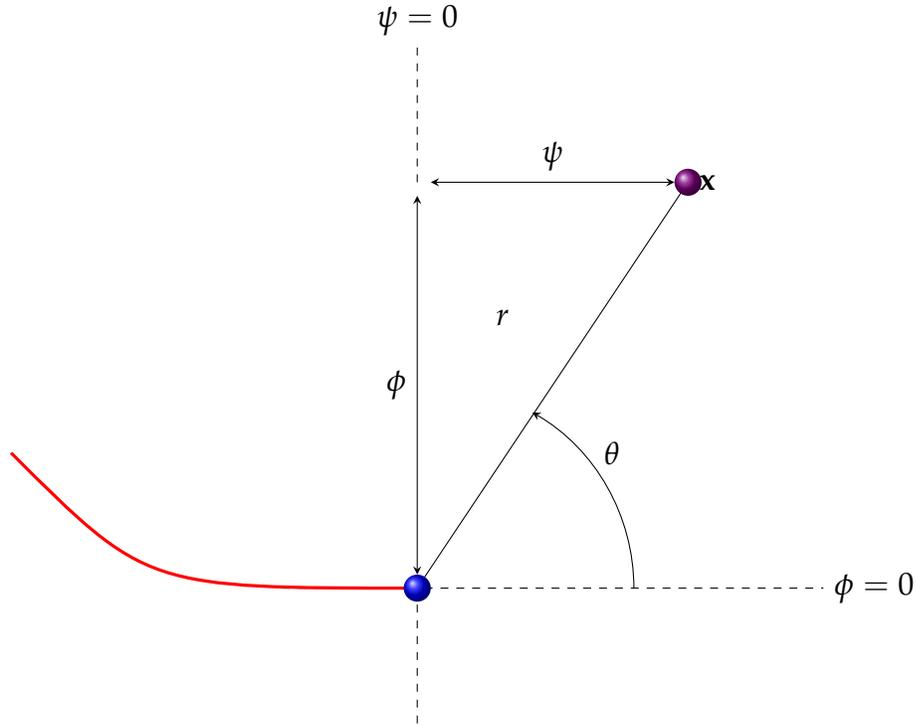


FIGURE 2.27 – Utilisation des fonctions *Level set* ϕ et ψ pour calculer r et θ

2.7 XFEM Hansbo et Hansbo

Une alternative à la méthode XFEM standard pour les discontinuités fortes et faibles est proposée par Hansbo and Hansbo (2004). L'effet de la fissure n'est pas modéliser à travers l'ajout des degrés de liberté, mais par la superposition des éléments, comme le montre la Figure 2.28. Dans cette méthode, quand une discontinuité coupe la surface d'un élément e , un élément \bar{e} est superposé et l'approximation élément finis d'un champ \mathbf{u} est remplacé par :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in e} N_i^e(\mathbf{x}) H(\phi(\mathbf{x})) \mathbf{q}_i^e + \sum_{j \in \bar{e}} N_j^{\bar{e}}(\mathbf{x}) (1 - H(\phi(\mathbf{x}))) \mathbf{q}_j^{\bar{e}} \quad (2.85)$$

où N_i sont les fonctions de forme éléments finis standard, H est la fonction Heaviside standard (ou une fonction de saut) et \mathbf{q}_i et \mathbf{q}_j sont les variables nodales associées aux nœuds i et j , respectivement.

Areias and Belytschko (2006) ont montré que la base d'approximation de Hansbo et Hansbo est une combinaison linéaire de la base d'approximation XFEM standard.

Considérons l'approximation XFEM standard d'un champ de déplacement discontinue pour un élément fini unidimensionnel linéaire :

$$\begin{aligned}
 u^h(x) &= \sum_{i=1}^2 N_i(x) [u_i + a_i (H(x - x_c) - H(x_i - x_c))] \\
 &= u_1 N_1 + u_2 N_2 + a_1 N_1 H(x - x_c) + a_2 N_2 [H(x - x_c) - 1] \quad (2.86)
 \end{aligned}$$

où H est la fonction Heaviside ($H(x > 0) = 1$ sinon 0). Avec $N_i = N_i H(x - x_c) + N_i(1 - H(x - x_c))$, $i = 1, 2$, on peut réécrire l'équation (2.86) :

$$\begin{aligned}
 u^h(x) &= (u_1 + a_1) N_1 H(x - x_c) + u_1 N_1 (1 - H(x - x_c)) \\
 &\quad + (u_2 - a_2) N_2 (1 - H(x - x_c)) + u_2 N_2 H(x - x_c) \quad (2.87)
 \end{aligned}$$

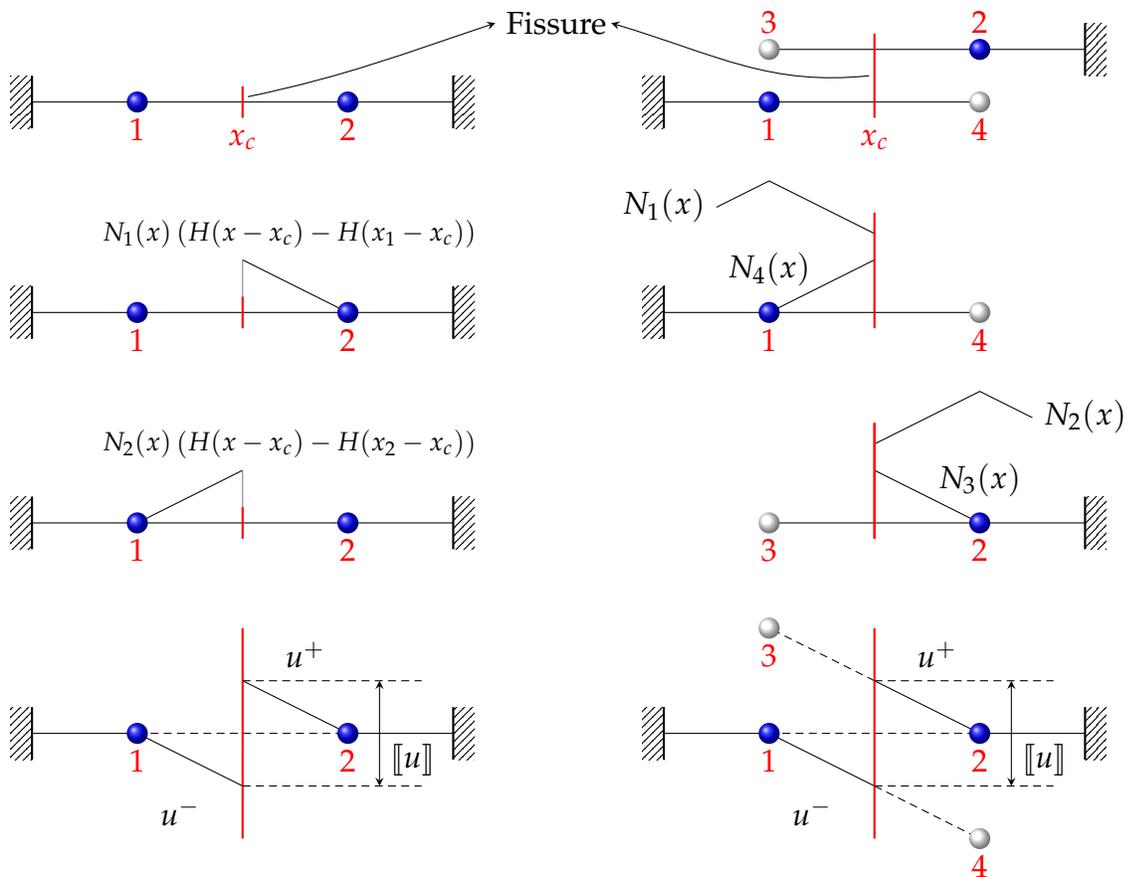


FIGURE 2.28 – XFEM standard vs XFEM Hansbo and Hansbo (2004) : les cercles en bleu dénotent des nœuds réels et les nœuds gris sont appelés nœuds fantômes

Si on définit :

$$\text{élément 1} \begin{cases} q_1^1 = u_1 & (2.88) \\ q_2^1 = u_2 - a_2 & (2.89) \end{cases}$$

$$\text{élément 2} \begin{cases} q_1^2 = u_1 + a_1 & (2.90) \\ q_2^2 = u_2 & (2.91) \end{cases}$$

où les exposants et les indices dénotent les numéros d'élément et de nœud, respectivement, alors, l'équation (2.87) peut être réécrite comme suit :

$$u^h(x) = q_1^1 N_1(1 - H(x - x_c)) + q_2^1 N_1(1 - H(x - x_c)) + q_1^2 N_2 H(x - x_c) + q_2^2 N_2 H(x - x_c) \quad (2.92)$$

Donc, on considère que le champ de déplacement se compose du déplacement de deux éléments :

- élément 1, qui n'est actif que pour $x < x_c$ due au terme $(1 - H(x - x_c))$
- élément 2, qui n'est actif que pour $x > x_c$ due au terme $H(x - x_c)$

De l'équation (2.85), on peut voir que le champ discontinu peut être construit par l'ajout d'un élément extra, dans ce cas l'élément 2, comme le montre la Figure 2.28. Puis, deux nœuds additionnels sont ajoutés (q_2^1 et q_1^2). Les deux parties du modèle sont complètement disjointes.

2.8 Les éléments de transition

Les éléments finis partiellement enrichis sont appelés les éléments de transition (*Blending elements*). La partition de l'unité est satisfaite dans les éléments finis standards et complètement enrichis, mais elle n'est pas satisfaite dans les éléments de transition. L'approximation dans un élément linéaire en 2D à quatre-nœuds qui a moins de quatre nœuds enrichies, par exemple 3, est

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^4 N_i(\mathbf{x})u_i + \sum_{j=1}^3 N_j(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})a_j \quad (2.93)$$

Dans cet élément la fonction $\psi(\mathbf{x})$ ne peut pas être reproduite en prenant $u_i = 0$ et $a_j = 1$ parce que (N_1, N_2, N_3) ne constituent plus une partition de l'unité, autrement dit,

$$\sum_{j=1}^3 N_j(\mathbf{x}) \neq 1. \quad (2.94)$$

La partition du domaine Ω à un sous-domaine non enrichi et un sous-domaine enrichi est montrée dans la Figure 2.29. Dans ce schéma d'enrichissement local, on peut distinguer trois types d'élément. Le premier type sont les éléments finis classiques, où aucun nœud n'est enrichi, ces éléments sont groupés dans Ω^{std} . Le deuxième type sont les éléments complètement enrichis, c'est-à-dire tous les nœuds sont enrichis. Ces éléments sont dénotés par Ω^{enr} . Le dernier type d'éléments qui sont partiellement enrichis est groupé dans Ω^{bld} . Si on suppose que $\mathbf{u}_i = 0$ et $\mathbf{a}_j = 1$; dans les éléments finis enrichis, l'approximation XFEM s'écrit :

$$\mathbf{u}^h(x) = \sum_{j \in \mathcal{J}} \begin{cases} N_j(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Omega^{enr} & (2.95) \\ N_j(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) \neq \psi(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Omega^{bld} & (2.96) \\ N_j(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^{std} & (2.97) \end{cases}$$

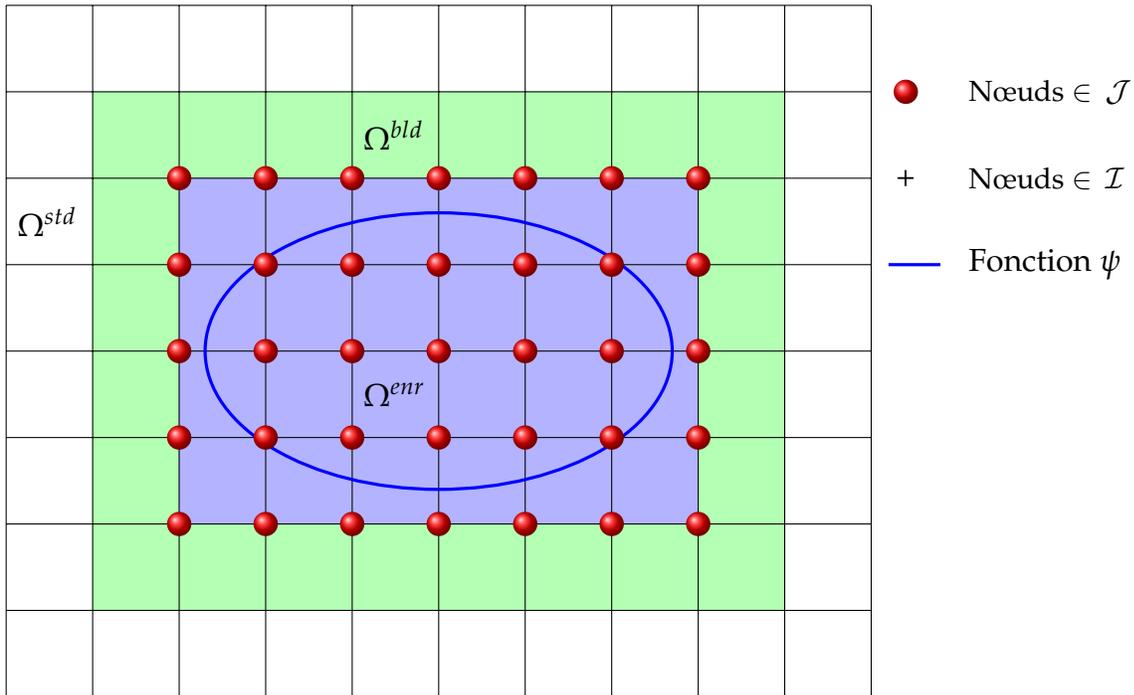


FIGURE 2.29 – Discretisation illustrant le domaine enrichi Ω^{enr} , le domaine de transition Ω^{bld} et le domaine standard Ω^{std} ; les nœuds rouges sont enrichis

Donc, l'approximation peut reproduire l'enrichissement dans Ω^{enr} et s'annule dans Ω^{std} . Cependant, dans le domaine de transition, elle consiste à un produit d'un sous-ensemble des fonctions de forme et la fonction d'enrichissement ψ . Par conséquent, la fonction d'enrichissement ne peut être reproduite.

Les éléments de transition conduisent à un plus faible taux de convergence pour la méthode des éléments finis enrichis en comparaison avec les méthodes des éléments finis standards. L'exemple suivant, extrait de Chessa et al. (2003), montre la raison.

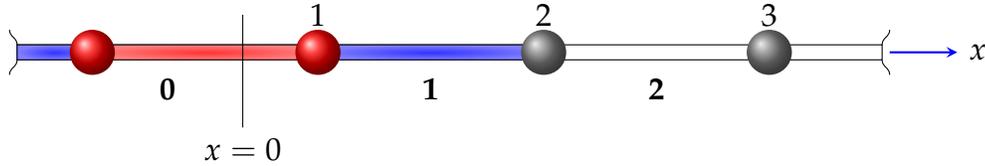


FIGURE 2.30 – Maillage élément finis 1D avec une discontinuité dans l'élément 0 ; en rouge les nœuds et les éléments enrichis, en gris les nœuds non enrichis, et les éléments en bleu sont les éléments de transition

On considère un maillage unidimensionnel comme le montre la Figure 2.30 avec une discontinuité dans la dérivée dans l'élément 0. La fonction d'enrichissement est :

$$\psi(x) = xH(x) \quad (2.98)$$

où H est la fonction Heaviside. L'enrichissement introduit une discontinuité dans la dérivée de l'approximation à $x = 0$. L'élément 0 est un élément complètement enrichi et l'élément 1 est un élément de transition à sa droite.

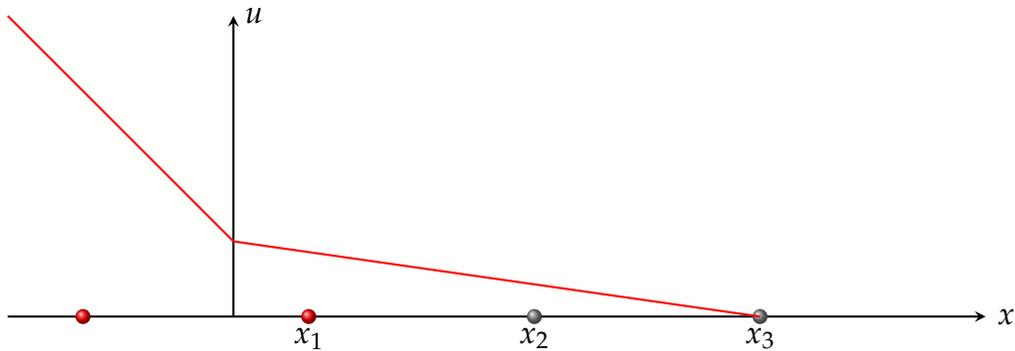


FIGURE 2.31 – Solution exacte

L'approximation XFEM de \mathbf{u} dans l'élément 1 est :

$$\mathbf{u}^h(x) = \sum_{i=1}^2 N_i(x)u_i + N_1(x) (\psi(x) - \psi(x_1)) a_1 \quad (2.99)$$

Si on définit

$$\zeta = \frac{x - x_1}{h}, \quad N_1 = 1 - \zeta, \quad N_2 = \zeta, \quad (2.100)$$

où h est la longueur de l'élément 1. à partir des équations (2.99) et (2.100), on trouve :

$$\mathbf{u}^h(x) = u_1(1 - \zeta) + u_2\zeta + a_1\zeta h(1 - \zeta) \quad (2.101)$$

On remarque dans l'équation (2.101) que l'enrichissement ajoute un terme quadratique dans les éléments de transition. Alors, si la solution consiste à un champ linéaire par morceau comme le montre la Figure 2.31, l'approximation dans les éléments de transition introduit toujours des termes quadratiques indésirables illustrés dans la Figure 2.32.

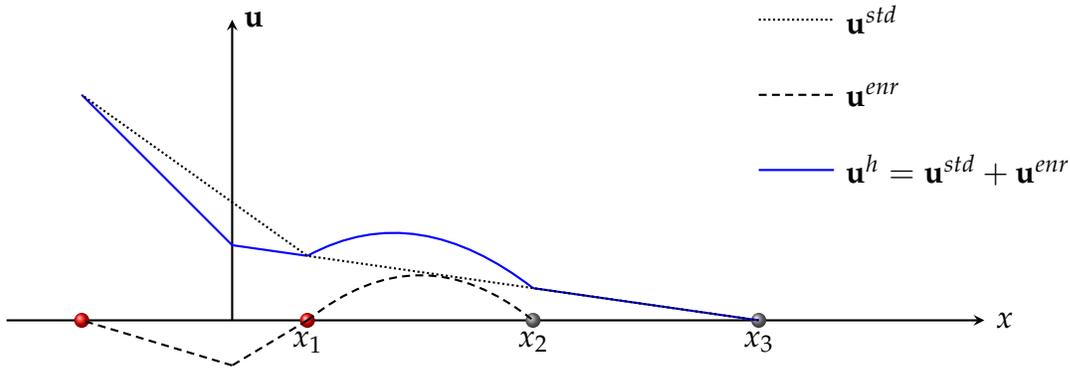


FIGURE 2.32 – Approximation de la solution \mathbf{u}^h en ligne blue, la partie standard \mathbf{u}^{std} en ligne pointillée et la partie enrichie \mathbf{u}^{enr} en ligne en tirets

L'effet de ce terme apparaît plus clairement en analysant les propriétés de l'interpolation XFEM. Si on dénote l'erreur dans l'interpolation par δ , alors

$$\delta = \mathbf{u} - \mathbf{u}^h \quad (2.102)$$

L'erreur maximale a lieu au point \bar{x} où

$$\delta_{,x|\bar{x}} \equiv \frac{d}{dx}\delta(\bar{x}) = 0 \quad (2.103)$$

Le développement en série de Taylor de $\delta(x)$ au voisinage de \bar{x} donne

$$\delta(x) = \delta(\bar{x}) + \delta_{,x|\bar{x}}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}\delta_{,xx|\bar{x}}(x - \bar{x})^2 + O(h^3) \quad (2.104)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à 2, et on remplace l'équation (2.103) dans (2.104), on peut écrire l'expression de $\delta(x)$ comme suivant :

$$\delta(x) = \delta(\bar{x}) + \frac{1}{2}\delta_{,xx|\bar{x}}(x - \bar{x})^2 \quad (2.105)$$

où $x_1 \leq \bar{x} \leq x_2$. Si $x = x_1$, alors $\delta(x_1) = 0$, puisque \mathbf{u}^h est l'interpolation éléments finis de \mathbf{u} (c'est-à-dire, $\mathbf{u}^h(x_i) = \mathbf{u}(x_i)$). Par conséquent, à partir de l'équation (2.105) on obtient :

$$\delta(\bar{x}) = -\frac{1}{2}\delta_{,xx|\bar{x}}(x_1 - \bar{x})^2 \quad (2.106)$$

alors

$$\delta(\bar{x}) \leq \left| \frac{1}{2}(x_1 - \bar{x})^2 \delta_{,xx|\bar{x}} \right| \quad (2.107)$$

On dérive l'équation (2.102) deux fois, et en utilisant dans (2.103)

$$\delta_{,xx} = \mathbf{u}_{,xx} + \frac{2a_1}{h} \quad (2.108)$$

voir Strang and Fix (1973) pour plus de détails sur l'équation (2.109), Puisque

$$\frac{1}{2}(x_1 - \bar{x})^2 \leq \frac{1}{8}h^2, \quad (2.109)$$

alors on trouve :

$$\delta(\bar{x}) \leq \frac{1}{8}h^2 \max \left| \mathbf{u}_{,xx} + \frac{2a_1}{h} \right| \quad (2.110)$$

Le dernier terme $\frac{2a_1}{h}$ n'apparait pas pour la méthode des éléments finis standard. Il augmente l'erreur d'interpolation dans l'élément de transition de l'ordre h^2 à l'ordre h . Bien que cela se produit dans seulement quelques éléments, l'effet est de réduire le taux de convergence de l'approximation entière (Chessa et al. (2003) et Laborde et al. (2005)).

Remarque :

Quand la fonction d'enrichissement est une fonction polynomiale d'ordre n (c-à-d, ζ^n), alors pour $n > 1$ l'erreur de l'interpolation dans les éléments de transition augmente encore. Si on fait les mêmes étapes précédentes pour calculer l'erreur dans l'élément de transition, de l'Équation (2.98) à (2.110), mais avec une fonction d'enrichissement ψ d'ordre n , on trouve que :

$$\delta(\bar{x}) \leq \frac{1}{8}h^2 \max \left| \mathbf{u}_{,xx} + \frac{2a_1}{h^n} \right| \quad (2.111)$$

Le problème causé par les éléments de transition a déjà été étudié en détail dans la littérature ; plusieurs approches sont proposées pour y remédier, comme :

- L'utilisation d'une formulation *enhanced-strain* pour les éléments de transition par Chessa et al. (2003) et pour l'enrichissement de la pointe de fissure par Gracie et al. (2008).
- Des fonctions de forme hiérarchiques sont proposées par Tarancón et al. (2009), qui permet la compensation des termes indésirables dans l'interpolation XFEM.
- XFEM corrigé ou pondéré (*Corrected/Weighted XFEM*) a été suggéré par Fries (2007), en multipliant la fonction d'enrichissement par une fonction rampe (*ramp function*). La fonction rampe égale à 1 pour les éléments complètement enrichis, et décroît jusqu'à zéro dans les éléments de transition.
- Gracie et al. (2008) ont proposé un couplage direct entre les régions standards et enrichies à l'aide de la méthode de Galerkin discontinue. La continuité entre les éléments standards et enrichis est imposée par une méthode de pénalisation, ou le long d'une interface, par le multiplicateur de Lagrange dans Chahine et al. (2011).
- Ventura et al. (2009) ont présenté une forme non linéaire de la fonction rampe pour le problème des éléments de transition.

2.9 Conclusion

Au travers ce chapitre, la méthode des éléments finis enrichis par la partition de l'unité a tout d'abord été présentée. Ensuite, nous avons montré l'avantage des méthodes éléments finis enrichis par rapport aux méthodes éléments finis standards avec un exemple 1D.

Puis, une introduction à la méthode des éléments finis étendue pour la modélisation des discontinuités fortes et faibles, a été présentée. La méthode XFEM utilise principalement la fonction Heaviside pour modéliser les fissures, ce qui permet de se débarrasser de la contrainte du maillage. Ensuite, une présentation de la méthode *Level set* et son utilisation pour l'évaluation des fonctions d'enrichissement est présentée. Après, la différence entre la méthode XFEM standard et la méthode de Hansbo and Hansbo (2004) a été mise en évidence. Enfin, le problème des éléments de transition et de son influence sur la convergence de la méthode XFEM a été illustré.

La capacité de la méthode XFEM a été exploré pour la modélisation des fissures pour un problème thermique unidimensionnel. En utilisant l'expression du saut de

la température dans le contexte de XFEM, on est capable d'imposer une condition d'échange de chaleur à la fissure sans avoir recours au maillage de la fissure. Une extension vers les problèmes thermiques transitoires en 2D avec échange thermique entre les lèvres de la fissure sera présentée au Chapitre 3 et pour les problèmes thermoélectriques non linéaires avec des échanges thermoélectriques au Chapitre 4.

Chapitre 3

La méthode XFEM pour les problèmes thermiques transitoires avec échange thermiques entre les lèvres de la fissure : Article 1

3.1 Abstract

This paper presents a numerical method for solving the heat equation in a domain containing a crack with the eXtended Finite Element Method (XFEM), and deals with the energy transfer between the crack's lips. The original contribution is essentially to propose and validate a more physical heat exchange law between the crack's lips. This heat exchange is proportional to the temperature jump between the crack's lips, and a conductive/radiative heat transfer coefficient. A new feature of the temperature jump at the crack tip in the XFEM context is presented. The accuracy and efficiency of the proposed XFEM model is demonstrated with numerical examples, and validated using standard finite element method with very dense meshes. The effect of the heat exchange coefficient between the crack's lips is also studied.

3.2 Introduction

Many engineering problems require multiphysics modelling. The crack growth regimes is a typical thermo-mechanical problem in the field of aeronautics, and civil engi-

neering such as the construction of dams for the generation of hydroelectric power. Another engineering field is the aluminium production based on the so called Hall-Héroult electrolysis process (Sørli and Øye (2010)). This process uses aluminium cell in which a high intensity current, typically 350 000 amperes, passes through an electrolyte liquid at 960 °C and in which alumina (Al_2O_3) is dissolved to produce aluminium.

In the cell, many physical and chemical phenomena take place: solid mechanic, including crack formation and propagation, fluid mechanic, magneto-hydrodynamics, mass transport, heat exchange with phase change, and their physical interactions and couplings. During the start-up of a new electrolysis cell, the cathode block is exposed to high-level stress, strains and high temperature gradients. These stresses may lead to cracking of the cathode thus affecting the distribution of thermal and electric fields and reducing the lifetime of the electrolytic cell, see e.g. Richard et al. (2006); Jensen et al. (2011); Richard (2004); Picard (2007). Thus, it is necessary to study the coupled thermo-mechanical and the thermo-electro-mechanical problems associated with the preheating of the cathode blocks Richard et al. (2006).

In the case of thermal transient problems in a solid including a crack, physically there is an energy exchange between the lips of the crack. A closer look demonstrates that a heat exchange at the crack, happens by conduction/convection and by radiation. If the gap opening is small, and if the temperature is high, the radiation heat exchange would be predominant. Thus, in the case of crack propagation in a thermo-mechanical problem, we must take into account this heat exchange. This problem is similar to contact problems between two bodies. The heat exchange is driven by a heat coefficient exchange, which is a function of the temperature, the gap, etc., and the temperature difference between the crack's lips, see e.g., Goulet (2004), Lambert and Fletcher (1997) and Savija et al. (2003). Thus, we need to define properly a numerical technique able to manage this heat exchange.

For the analysis of a thermo-mechanical problem, or other problems with strong and weak discontinuities, the eXtended Finite Element Method (XFEM) is well suited. This method has been used successfully in the last decade in elastic fracture mechanics Belytschko and Black (1999); Moës et al. (1999), is based on the partition of unity Melenk and Babuška (1996), and uses local enrichments of the solution. It has been extended to the three-dimensional case in Sukumar et al. (2000), using

the representation of the crack independently of the mesh, as in Moës et al. (1999). For more details about XFEM for fracture mechanics, see Abdelaziz et al. (2009) and Karihaloo and Xiao (2003). XFEM has also been applied with success in several other types of problems, such as fluid-structure interaction (Legay et al. (2006)), two-fluid flows (Chessa and Belytschko (2003a); Groß and Reusken (2007)) and solidification (Chessa et al. (2002)). Some problems with a thermal component were treated by Merle and Dolbow (2002) and the problem of thermo-elastoplasticity with formation of shear bands was addressed by Areias and Belytschko (2007). The problem of thermo-elastic fracture has been studied in detail by Duflot (2008), where two different types of boundary conditions on the lips of the crack have been considered, namely *isothermal* and *adiabatic* cases. In the former case, the heat flux is discontinuous and the latter case, the temperature of the crack's lips is discontinuous. Similarly, in Zamani et al. (2010); Zamani and Eslami (2010), the authors present an enrichment in the vicinity of the crack with a higher order in dynamic thermo-elasticity. They used the adiabatic boundary condition on the crack's lips as in Duflot (2008).

In previous works, the crack is considered to be isothermal or adiabatic, which is not physical since there is an energy exchange at the crack's lips, especially at a very high temperature. In this paper, we propose to consider the heat exchange between the lips of the cracks using XFEM. This heat exchange depends on the temperature jump at the crack and the heat exchange coefficient, which is determined by experimental test. We study the influence of the heat transfer coefficient on the solution and compare the XFEM solutions to the solutions obtained by the standard finite element method, with a very high mesh density. The results are validated with steady and unsteady cases.

In this paper, the study is restricted to 2D problems with a single stationary crack, since the aim is to show the importance of the heat exchange phenomena between crack's lips, and its influence on the temperature field around the crack. However, the same ideas can be extended to 3D and eventually coupled with crack propagation. This becomes more critical in thermo-electro-mechanical problems, where the Joule heating effect in the domain is very important. This will be of particular interest in the case of cathode blocks preheating in electrolysis cells Arkhipov and Pingin (2002), where there is a very high temperature gradient at the crack tip, and hence it may influence significantly the crack propagation path and the lifetime of the cathode.

This article is organized as follows. In the next section, the problem to be solved is introduced and the governing equations are given. In sections 3.4 and 3.5, the temperature field approximation using XFEM is described and the treatment of the heat exchange condition in the weak formulation is presented. And the XFEM resulting matrices are detailed. In section 3.6, the numerical integration for XFEM is presented including the contour integral to take into account the heat exchange at the crack's lips and we present the time discretization based on Crank-Nicolson scheme. In section 3.7, we present and discuss several numerical examples. Finally, in section 3.8 a summary and some concluding remarks are presented.

3.3 Governing equations

Consider an isotropic homogeneous continuum Ω bounded by the boundary Γ . The domain includes a crack Γ_c , as shown in Figure (3.1). The equation for transient heat transfer is defined by:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div } \mathbf{q} = R, \quad (3.1)$$

where the heat flux vector \mathbf{q} is related to the temperature gradient by Fourier's law:

$$\mathbf{q} = -k \nabla T, \quad (3.2)$$

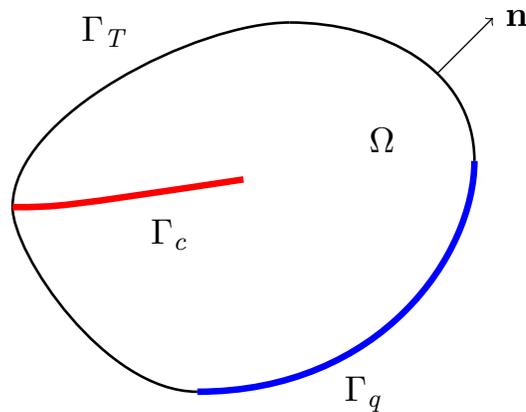


FIGURE 3.1 – Body Ω with boundary conditions

where, T is the temperature, ρ is the density, c is the specific heat capacity, k is the thermal conductivity and R is a heat source. The boundary and initial conditions are

as follows:

$$\begin{cases} T = \bar{T} & \text{on } \Gamma_T, & (3.3) \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \bar{q} & \text{on } \Gamma_q, & (3.4) \\ T(t = 0) = T_0. & & (3.5) \end{cases}$$

We assume a stationary crack, Γ_c , located inside the domain Ω , and we define the heat flux as follows:

$$\begin{cases} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}^+ = q_c^+ & \text{on } \Gamma_c^+, \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}^- = q_c^- & \text{on } \Gamma_c^-, \\ \Gamma_c^- \cup \Gamma_c^+ = \Gamma_c, \end{cases}$$

where q_c^+ and q_c^- are the heat fluxes acting over the crack surfaces Γ_c^+ and Γ_c^- respectively; \mathbf{n}^+ and \mathbf{n}^- are the outward normals to the crack faces at Γ_c^+ and Γ_c^- respectively. Furthermore, knowing that $\mathbf{n}^- = -\mathbf{n}^+$, we can write (Figure (3.2)):

$$-q_c^- = q_c^+ = q_c \quad \text{on } \Gamma_c^+ \quad (3.6)$$

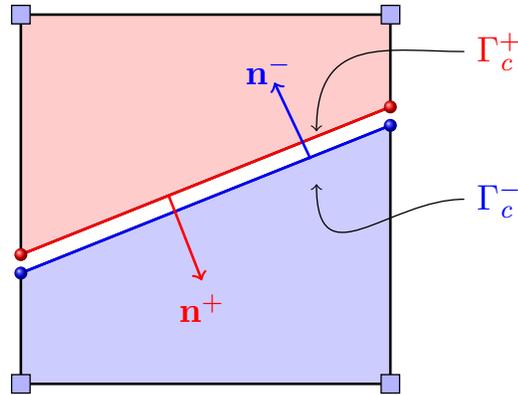


FIGURE 3.2 – Internal crack

Remarque:

We distinguish two types of heat exchange at the crack surfaces: convection exchange q_{conv} and radiation exchange q_{rad} , defined as follows:

$$\begin{cases} q_{conv} = h_{conv} (T - T_\infty), \\ q_{rad} = h_{rad} (T - T_r), \end{cases}$$

where h_{conv} is the convection coefficient, T_∞ is the temperature of gas inside the crack, T_r is the temperature of radiation source and h_{rad} depends on the emissivity ϵ of the crack surface and the temperature. This h_{rad} coefficient is given by the

following equation, where σ_{rad} is the Stefan-Boltzmann constant:

$$h_{rad}(T) = \epsilon\sigma_{rad}(T + T_r)(T^2 + T_r^2).$$

In this paper, we assume, for the sake of simplicity, that the heat exchange coefficient is constant. This coefficient could be identified using appropriate laboratory tests as proposed in Kandeve et al. (2011).

Therefore, the main idea of this paper, is to consider that the heat exchange between the crack's lips depends on the temperature jump between those lips, i.e.,

$$q_c = -h \llbracket T(\mathbf{x}) \rrbracket \quad \text{on } \Gamma_c^+, \quad (3.7)$$

where h is the heat exchange coefficient, $\llbracket T(\mathbf{x}) \rrbracket$ is the temperature field jump between the crack's lips which is defined as follow Figure (3.2) :

$$\llbracket T(\mathbf{x}) \rrbracket = T(\mathbf{x}^+) - T(\mathbf{x}^-). \quad (3.8)$$

Thus, if h is zero, it represents a crack with adiabatic boundary condition, i.e. the crack's lips, cannot exchange energy and the temperature field would be discontinuous. If h goes to infinity, it is similar to not having a crack inside the domain, and the temperature field would be continuous.

In the next section we present the variational formulation based on the standard Galerkin method, with the additional term which is associated with the discontinuity Γ_c inside the domain.

3.4 Variational formulation of the thermal problem with discontinuities inside the domain

We define the space of admissible temperature field by:

$$T \in \left\{ T \in H_1(\Omega) : T = \bar{T} \quad \text{on } \Gamma_T \quad \text{and } T \text{ discontinuous on } \Gamma_c \right\}, \quad (3.9)$$

and the test function field is given by:

$$T^* \in \left\{ T^* \in H_1^0(\Omega) : T^* = 0 \quad \text{on } \Gamma_T \quad \text{and } T^* \text{ discontinuous on } \Gamma_c \right\}. \quad (3.10)$$

We multiply Equation (3.1) by a test function T^* , and integrate over the domain Ω to obtain the weak form of the transient thermal problem:

$$\int_{\Omega} \rho c T^* \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} T^* \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla T^*) \cdot \mathbf{q} d\Omega = \int_{\Omega} T^* R d\Omega, \quad (3.11)$$

where $\Gamma = \Gamma_T \cup \Gamma_q \cup \Gamma_c$. The contour term is decomposed as:

$$\int_{\Gamma} T^* \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_T} T^* \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_q} T^* \bar{q} d\Gamma + \int_{\Gamma_c} T^* \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \quad (3.12)$$

Using Equations (3.6) and (3.7), it can be shown that the integral over Γ_c is:

$$\int_{\Gamma_c} T^* \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_c^+} \llbracket T^* \rrbracket h \llbracket T \rrbracket d\Gamma, \quad (3.13)$$

where $\llbracket T^* \rrbracket$ is the jump of the test function over the crack. The weak form is therefore:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho c T^* \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla T^*) \cdot (k \nabla T) d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_c^+} \llbracket T^* \rrbracket h \llbracket T \rrbracket d\Gamma = \int_{\Omega} T^* R d\Omega - \int_{\Gamma_q} T^* \bar{q} d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.14)$$

From Equation (3.14), it is apparent that to take into account the presence of the stationary crack in the domain Ω , the classical weak variational form must include an additional term for the heat exchange between the crack's lips. This additional term makes mandatory a mesh generation of the crack's lips to be able to perform the integration over Γ_c^+ .

In the next section, we present the XFEM discretization of Equation (3.14).

3.5 XFEM discretization

3.5.1 Definition of the extended functions

Based on the work of Belytschko and Black (1999) and Moës et al. (1999), the XFEM formulation is based on a standard finite element approximation, and a locally en-

riched approximation around the crack:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = & \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(\mathbf{x}) [H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_j)] \mathbf{a}_j \\ & + \sum_{k \in \mathcal{K}} N_k(\mathbf{x}) \sum_{m=1}^M [F_m(\mathbf{x}) - F_m(\mathbf{x}_j)] \mathbf{b}_{km}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

where \mathcal{I} is the set of all nodes in the mesh; \mathbf{u}_i is the classical degrees of freedom at node i ; N_i is the finite element shape function associated with node i ; $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ is the subset of nodes enriched at crack discontinuity; \mathbf{a}_j are the additional degrees of freedom for the discontinuous field along the crack; $\mathcal{K} \subset \mathcal{I}$ is the subset of nodes that are enriched at the crack tips and \mathbf{b}_{km} are the additional degrees of freedom associated with the crack's tips enrichment (see Figure (3.3)).

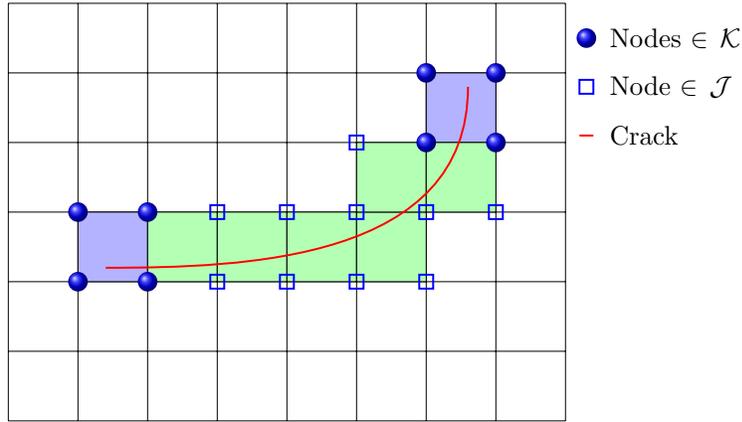


FIGURE 3.3 – An arbitrary crack line (red line) in a structured mesh. Nodes in sets \mathcal{I} and \mathcal{K} are denoted by blue squares and blue circles, respectively

The function $H(\mathbf{x})$ is a generalised Heaviside function. The discontinuity is aligned with the surface Γ_c . Given a point \mathbf{x} in the domain, we denote by $\bar{\mathbf{x}}$ the closest point on Γ_c to \mathbf{x} . At $\bar{\mathbf{x}}$, we construct a tangential and normal vector to the crack surface, \mathbf{e}_t and \mathbf{e}_n . The function $H(\mathbf{x})$ is defined as follow:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{for } (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{e}_n > 0, \\ -1 & \text{for } (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{e}_n < 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

The set of near-tip functions $F_m(r, \theta)$ in the Equation (3.15) is a set of functions which span the exact asymptotic crack-tip displacement field for a linear elastic material

Williams (1957) :

$$\{F_m(r, \theta)\} = \begin{Bmatrix} \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\theta \\ \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\theta \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

where the terms r and θ are defined in Figure (3.4). The leading term of the asymptotic field for the temperature of an adiabatic crack can be written as proposed by Dufloot (2008):

$$T = \left(-\frac{K_T}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) F_1(r, \theta). \quad (3.18)$$

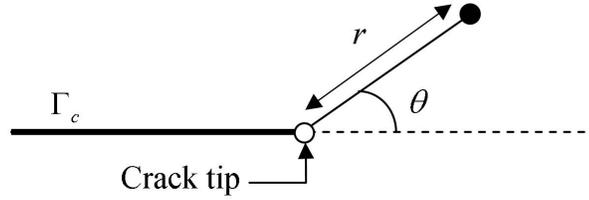


FIGURE 3.4 – Polar coordinate at crack tip

The temperature field is discretized using only the first branch function F_1 from Equation (3.18). Let's denote the shifted terms as follows:

$$\begin{cases} \psi_j(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_j), \\ \gamma_k(r, \theta) = F_1(r, \theta) - F_1(r_k, \theta_k). \end{cases} \quad (3.19)$$

Thus, using Equation (3.15), we write the approximation of $T(\mathbf{x})$ as follow:

$$T^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\mathbf{x}) T_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(\mathbf{x}) \psi_j(\mathbf{x}) a_j + \sum_{k \in \mathcal{K}} N_k(\mathbf{x}) \gamma_k(r, \theta) b_k. \quad (3.20)$$

The test function approximation is written in a similar way.

The temperature field jump between the crack's lips, is given by (for clarity, the superscript h is omitted):

$$\begin{aligned} \llbracket T(\mathbf{x}) \rrbracket &= \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(\mathbf{x}) [\psi_j(\mathbf{x}^+) - \psi_j(\mathbf{x}^-)] a_j \\ &+ \sum_{k \in \mathcal{K}} N_k(\mathbf{x}) [\gamma_k(r, \theta^+) - \gamma_k(r, \theta^-)] b_k. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Here, we have used the continuity of the shape functions across the crack, i.e. $N_j(\mathbf{x}^+) = N_j(\mathbf{x}^-) = N_j(\mathbf{x})$. For the other terms of Equation (3.21), it can easily be shown that:

$$\begin{aligned} \llbracket \psi_j(\mathbf{x}) \rrbracket &= 2, \\ \llbracket \gamma_k(\mathbf{x}) \rrbracket &= 2\sqrt{r}. \end{aligned}$$

Thus, the temperature field jump, at the crack's lips, is defined as follows:

$$\llbracket T \rrbracket = \sum_{j \in \mathcal{J}} 2N_j(\mathbf{x}) a_j + \sum_{k \in \mathcal{K}} 2\sqrt{r}N_k(\mathbf{x}) b_k \quad (3.22)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2\mathbf{N}_{1 \times n_j} & 2\sqrt{r}\mathbf{N}_{1 \times n_k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix}.$$

3.5.2 The shape functions

In this paper, we present the implementation of XFEM using 4-node quadrilateral element based on linear shape functions (Figure (3.5)).

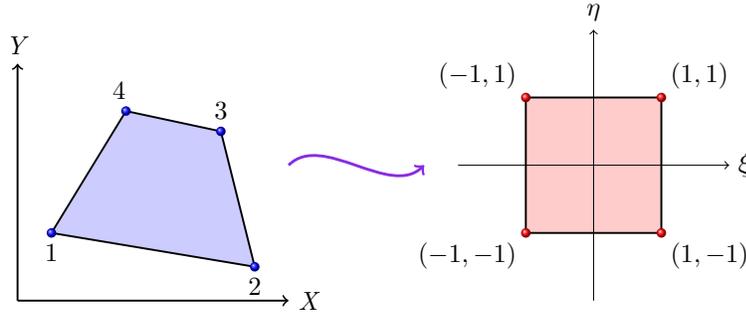


FIGURE 3.5 – Real and parent elements

The shape functions are given by :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta), \\ N_2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta), \\ N_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta), \\ N_4 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta), \end{aligned} \quad (3.23)$$

where ξ and η are scaled coordinates in the parent element. The extended finite element approximation of the temperature field, for an element that is fully enriched,

is:

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{x}) = & \underbrace{\langle N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \rangle}_{\langle \mathbf{N}^{std} \rangle} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} \\
& + \underbrace{\langle N_1\psi_1 \ N_2\psi_2 \ N_3\psi_3 \ N_4\psi_4 \rangle}_{\langle \mathbf{N}^\psi \rangle} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \\
& + \underbrace{\langle N_1\gamma_1 \ N_2\gamma_2 \ N_3\gamma_3 \ N_4\gamma_4 \rangle}_{\langle \mathbf{N}^\gamma \rangle} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

We can write Equation (3.24) in a condensed form as follow:

$$T(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{N}^{std} \ \mathbf{N}^\psi \ \mathbf{N}^\gamma \rangle \begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix}. \tag{3.25}$$

3.5.3 The gradient operator $[\mathbf{B}]$

To define the discrete form of the thermal problem, we need to define the gradient of the temperature field:

$$\nabla T(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{B}^{std} \ \mathbf{B}^\psi \ \mathbf{B}^\gamma \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix}, \tag{3.26}$$

where $[\mathbf{B}^{std}]$ is the discret gradient operator equal to :

$$[\mathbf{B}^{std}] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} \end{bmatrix}, \tag{3.27}$$

$[\mathbf{B}^\psi]$ is the gradient operator for the discontinuous enriched part by ψ_j :

$$[\mathbf{B}^\psi] = \begin{bmatrix} (N_1\psi_1)_{,x} & (N_2\psi_2)_{,x} & (N_3\psi_3)_{,x} & (N_4\psi_4)_{,x} \\ (N_1\psi_1)_{,y} & (N_2\psi_2)_{,y} & (N_3\psi_3)_{,y} & (N_4\psi_4)_{,y} \end{bmatrix}, \tag{3.28}$$

and $[\mathbf{B}^\gamma]$ is the gradient operator for the asymptotic enriched part by γ_k :

$$[\mathbf{B}^\gamma] = \begin{bmatrix} (N_1\gamma_1)_{,x} & (N_2\gamma_2)_{,x} & (N_3\gamma_3)_{,x} & (N_4\gamma_4)_{,x} \\ (N_1\gamma_1)_{,y} & (N_2\gamma_2)_{,y} & (N_3\gamma_3)_{,y} & (N_4\gamma_4)_{,y} \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

3.5.4 The XFEM algebraic system

We discretize the domain Ω into *nelmt* elements Ω_e , so that:

$$\int_{\Omega} (...) d\Omega = \sum_{nelmt} \int_{\Omega_e} (...) d\Omega. \quad (3.30)$$

The expression of the capacity matrix for an enriched element is as follows:

$$\int_{\Omega_e} \rho c T^* \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = \langle \mathbf{T}^* \quad \mathbf{a}^* \quad \mathbf{b}^* \rangle [\mathbf{C}^e] \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{T}} \\ \dot{\mathbf{a}} \\ \dot{\mathbf{b}} \end{Bmatrix}, \quad (3.31)$$

where the capacity matrix $[\mathbf{C}^e]$ is defined as:

$$[\mathbf{C}^e] = \int_{\Omega_e} \rho c \langle \mathbf{N}^{std} \quad \mathbf{N}^\psi \quad \mathbf{N}^\gamma \rangle^T \langle \mathbf{N}^{std} \quad \mathbf{N}^\psi \quad \mathbf{N}^\gamma \rangle d\Omega. \quad (3.32)$$

In the LHS of Equation (3.14), two integrals remain. One is the standard XFEM stiffness matrix and the other one is a contour integral over the crack boundary Γ_c to take into account the heat exchange between the crack's lips:

$$[\mathbf{K}^e] = [\mathbf{K}_\Omega^e] + [\mathbf{K}_{\Gamma_c}^e], \quad (3.33)$$

where the enriched stiffness matrix is:

$$\int_{\Omega_e} (\nabla T^*) \cdot (k \nabla T) d\Omega = \langle \mathbf{T}^* \quad \mathbf{a}^* \quad \mathbf{b}^* \rangle [\mathbf{K}_\Omega^e] \begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix}, \quad (3.34)$$

$$[\mathbf{K}_{\Gamma_c}^e] = \int_{\Omega_e} \left[\mathbf{B}^{std} \quad \mathbf{B}^\psi \quad \mathbf{B}^\gamma \right]^T k \left[\mathbf{B}^{std} \quad \mathbf{B}^\psi \quad \mathbf{B}^\gamma \right] d\Omega. \quad (3.35)$$

To calculate the heat exchange term in Equation (3.14), we need to mesh Γ_c over the set of *m* elements Ω_e that are traversed by the crack:

$$\int_{\Gamma_c^+} (...) d\Gamma = \sum_{e=1}^m \int_{\Gamma_c^e} (...) d\Gamma. \quad (3.36)$$

Hence, the expression for $[\mathbf{K}_{\Gamma_c}^e]$ is:

$$\int_{\Gamma_c^e} h \llbracket T^* \rrbracket \llbracket T \rrbracket d\Gamma = \langle \mathbf{T}^* \quad \mathbf{a}^* \quad \mathbf{B}^* \rangle [\mathbf{K}_{\Gamma_c}^e] \begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix}, \quad (3.37)$$

$$[\mathbf{K}_{\Gamma_c}^e] = \int_{\Gamma_c^e} 4h \langle 0 \quad \mathbf{N}^{std} \quad (\sqrt{r}\mathbf{N}^{std}) \rangle >^T \langle 0 \quad \mathbf{N}^{std} \quad (\sqrt{r}\mathbf{N}^{std}) \rangle d\Gamma. \quad (3.38)$$

The expression of the load vector corresponding to the RHS of Equation (3.14) is defined as follows:

$$\{\mathbf{f}^e\} = \int_{\Omega_e} R \begin{Bmatrix} \mathbf{N}^{std} \\ \mathbf{N}^\psi \\ \mathbf{N}^\gamma \end{Bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \bar{q} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}^{std} \\ \mathbf{N}^\psi \\ \mathbf{N}^\gamma \end{Bmatrix} d\Gamma. \quad (3.39)$$

After assembling of all elementary matrices and vectors, the global semi-discretized system is defined as follow:

$$[C] \{\dot{T}\} + [K] \{T\} = \{F\}. \quad (3.40)$$

where $\{T\}$ is the vector of unknowns T_i, a_j and b_k , $[C]$ is the capacity matrix, $[K]$ is the stiffness (or conductivity) matrix and $\{F\}$ is the loading vector.

3.6 Numerical integration

3.6.1 Spatial integration

The numerical integration is a very important step in XFEM because the enhancement functions at the crack tip and gradients are not polynomial functions and they have a singular behavior when r tends to 0 (Figure (3.6)). For the elements that are not crossed by the crack, an integration scheme with the classical Gaussian quadrature is used. Dolbow (1999) has proposed a splitting of the element into sub-triangles so that the sides of the triangles are adapted to the geometry of the crack to perform numerical integration for elements crossed by the crack. For a Q_4 element crossed by a crack as shown in Figure (3.7), we subdivide it into a set of m_T sub-triangles:

$$\int_{Q_4} f(x) d\Omega = \sum_{j=1}^{m_T} \int_{T_3} f(x) d\Omega = \sum_{j=1}^{m_T} \sum_{ip=1}^{nip} w_{ip} f(x(\xi_{ip}, \eta_{ip})) \det J(\xi_{ip}, \eta_{ip}), \quad (3.41)$$

where w_{ip} is the weight associated with the Hammer integration point (ξ_{ip}, η_{ip}) ,

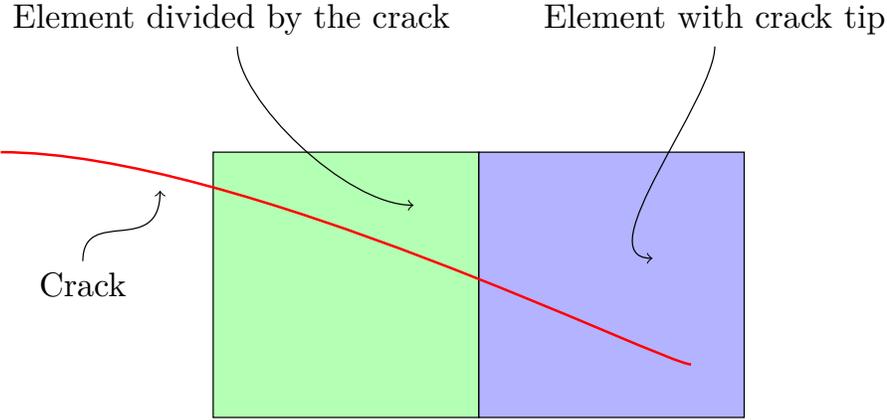


FIGURE 3.6 – Elements divided completely or partially by the crack

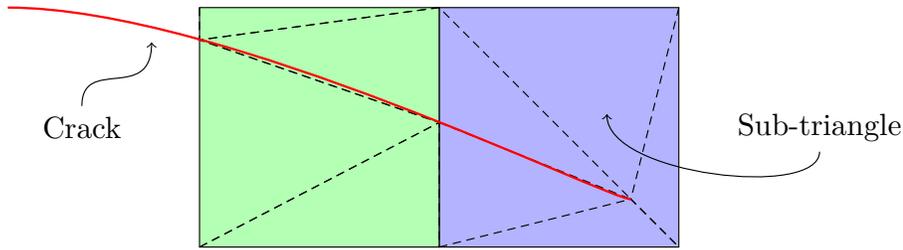


FIGURE 3.7 – Sub-triangles associated with elements crossed by the crack

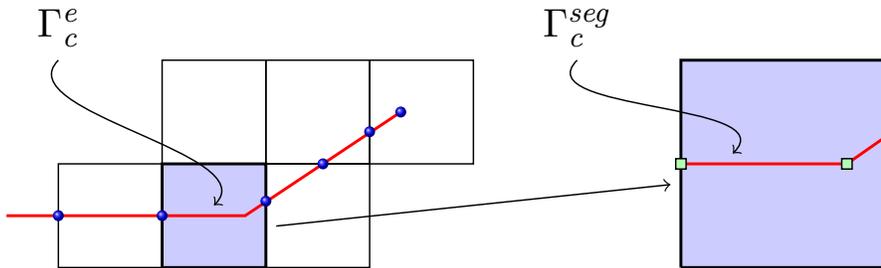


FIGURE 3.8 – Division of Γ_c^e to segments

n_{ip} is the total number of integration points in the triangle T_3 , and $J(\xi_{ip}, \eta_{ip})$ is the Jacobian matrix between the real and parent elements. To evaluate the integral over Γ_c^e defined in Equation (3.36), we divide Γ_c^e into segments as illustrated in Figure (3.8):

$$\int_{\Gamma_c^e} g(x) d\Gamma = \sum_{nSeg} \int_{\Gamma_c^{seg}} g(x) d\Gamma = \sum_{j=1}^{nSeg} \sum_{ip=1}^{ngp} w_{ip} g(x(\xi_{ip})) \det J(\xi_{ip}), \quad (3.42)$$

where ngp is the total number of Gauss integration points of the corresponding segment, see Figure (3.9).

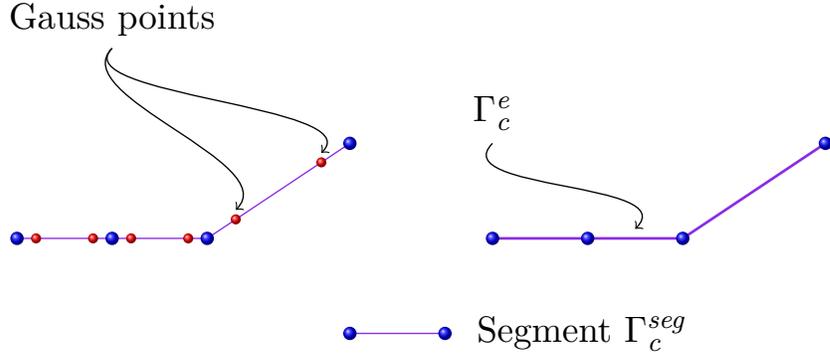


FIGURE 3.9 – Gauss points for one-dimensional segment

3.6.2 Temporal integration

We consider the solution on the time interval $[0, t_f]$. At time $t + \alpha\Delta t$, with $0 \leq \alpha \leq 1$, we write $\{\dot{T}\}$ as:

$$\{\dot{T}\}_{t+\alpha\Delta t} = \frac{\{T\}_{t+\Delta t} - \{T\}_t}{\Delta t}. \quad (3.43)$$

Using a semi-implicit scheme, we have:

$$\{T\}_{t+\alpha\Delta t} = \alpha \{T\}_{t+\Delta t} + (1 - \alpha) \{T\}_t. \quad (3.44)$$

For $\alpha = \frac{1}{2}$, this corresponds to a Crank-Nicolson scheme, which is unconditionally stable and does not introduce numerical dissipation into the solution Dhatt et al. (2005). The discrete system to be solved is therefore:

$$[\bar{K}] \{T\}_{t+\Delta t} = \{\bar{R}\}_{t+\Delta t}, \quad (3.45)$$

where

$$[\bar{K}] = [C] + \alpha\Delta t [K], \quad (3.46)$$

$$\{\bar{R}\}_{t+\Delta t} = \Delta t (\{F\} - (1 - \alpha) [K] \{T\}_t) + [C] \{T\}_t. \quad (3.47)$$

3.7 Numerical examples

Five numerical examples are presented in this section to validate and investigate the extended finite element method for transient thermal problems with and without heat exchange between crack's lips.

In the first two examples, we attempted to reproduce the results published by Duflot (2008) for modelling adiabatic cracks. In the third example, we validate the model

proposed in this paper by comparing the results obtained by ABAQUS for a thermal problem with the use of heat exchange between crack's lips. The fourth example has brought to light the influence of the heat transfer coefficient on the temperature field in the vicinity of the crack. The last example is a convergence analysis for a transient thermal problem with heat exchange between the crack's lips.

In all examples we used 6 integration points in each sub-triangle, and 5 integration points on each segment for the contour integral. We have developed an in-house Matlab code, named XFEM-UL, based on the FEM code published by Dhatt et al. in Dhatt et al. (2005). XFEM-UL is interfaced with GID software GID (2011) for pre- and post-processing. In all examples, it is assumed that there is no heat source term.

3.7.1 Square plate with a centered adiabatic crack

We consider a square plate of size $2L \times 2L$ with a centered crack of length $2a$, as shown in Figure (3.10). The analysis corresponds to a stationary case. The dimensions of the problem are $L = 1$ and $a = 0.3$. The thermal conductivity $k = 1$, and the Dirichlet boundary conditions are $T = \Theta = 10$ on the top line and $T = -\Theta$ on bottom line of the square plate. The sides of the plate are perfectly insulated. The domain is discretized with a structured mesh of quadrilateral elements. The element characteristic length is $\ell = 0.039$ (2601 elements). For the crack tip enrichment, we extend the domain to a radius to 0.1, i.e., that all elements included in this radius are enriched. For the problem solved using ABAQUS, we use finite element method with 9438 quadrilateral elements with quadratic interpolation (P2). The temperature field distribution using XFEM-UL (Figure (3.11c)) is compared qualitatively to the results published by Duflot (2008) (Figure (3.11a)), and quantitatively, to the results obtained using ABAQUS (Figure (3.11b)).

We observe that we obtain the same results as Duflot (2008), and we see that the shape of the isothermal lines are similar. Note that the flux lines shown on Figure (3.11c), don't cross the crack because the heat fluxes imposed on the crack's lips are equal to zero. Of course, all flux lines are perpendicular to the isothermal lines. We also observe that the results of ABAQUS are the same as those obtained from XFEM-UL.

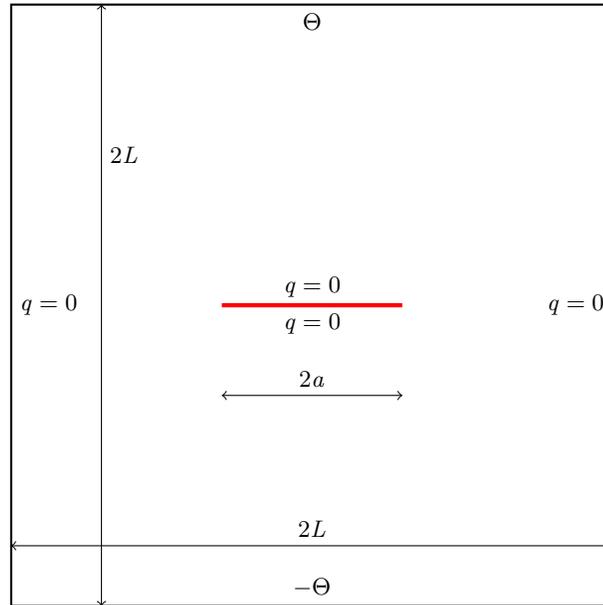
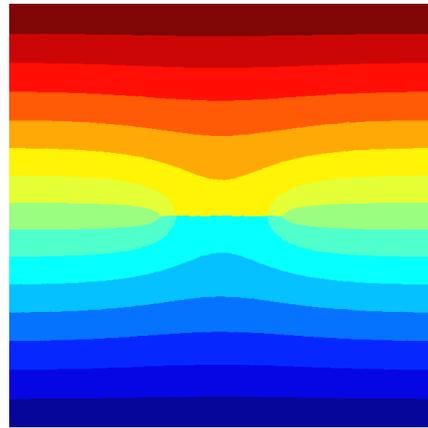


FIGURE 3.10 – Square plate with a centered horizontal adiabatic crack

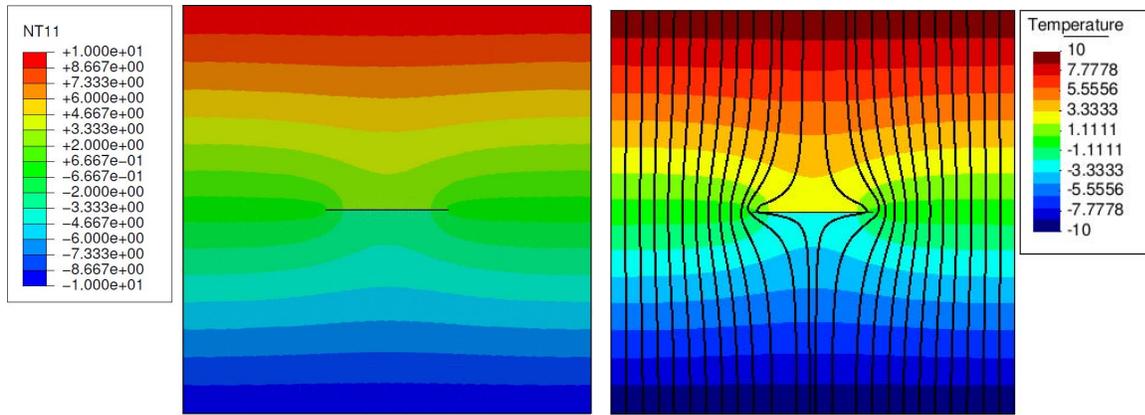
3.7.2 Plate with an inclined adiabatic crack

Next, we consider a rectangular plate of size $2L \times 2W$ with an inclined crack of length $2a$ and $\beta = 30^\circ$, as published in DufLOT (2008). The dimensions of the problem are $L = 1$, $W = 2$ and $a = 0.3$. The thermal conductivity is $k = 1$, and the Dirichlet boundary conditions are $T = \Theta = 10$ on the top line and $T = -\Theta$ on bottom line of the square plate. The sides of the plate are perfectly insulated. The characteristic length for the mesh of XFEM-UL is $\ell = 0.016$ (6372 elements) and the radius of the domain enriched by the asymptotic function is 0.1. We use 9092 quadratic elements for the analysis using ABAQUS, with a mesh refinement at the crack tip. The temperature field distribution using XFEM-UL (Figure (3.12)) is compared qualitatively to the results published by DufLOT (2008), and quantitatively, to the results obtained using ABAQUS. Once again, we observe that we obtain the same results as DufLOT (2008) and the flux lines shown on Figure (3.12) do not cross the crack. All flux lines are perpendicular to the isothermal lines. We also observe that the results of ABAQUS are the same as those obtained from XFEM-UL.

In the following examples, we will compare the XFEM-UL results to those obtained from ABAQUS because we have clearly shown that those results are similar.



(a) Duflo (2008)



(b) ABAQUS

(c) XFEM-UL

FIGURE 3.11 – Temperature field and flux lines for a centered horizontal crack

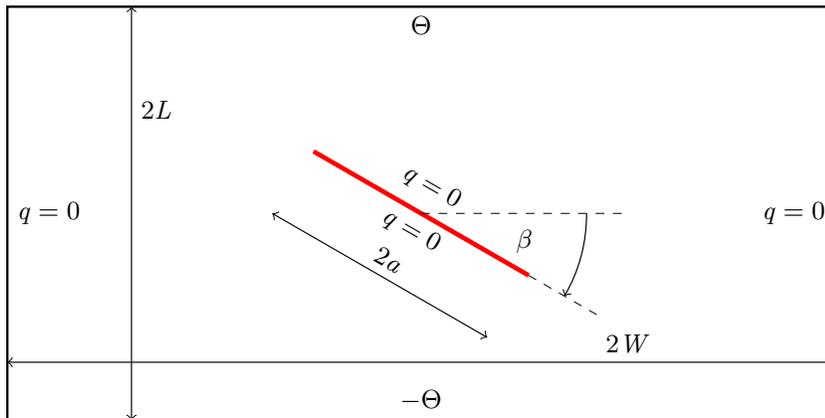
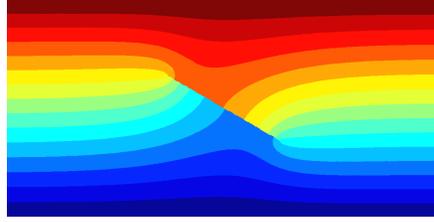


FIGURE 3.12 – Rectangular plate with an inclined adiabatic crack



(a) Dufлот (2008)

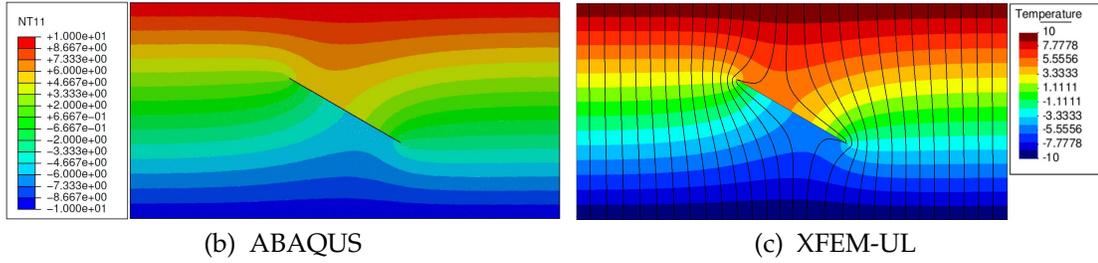
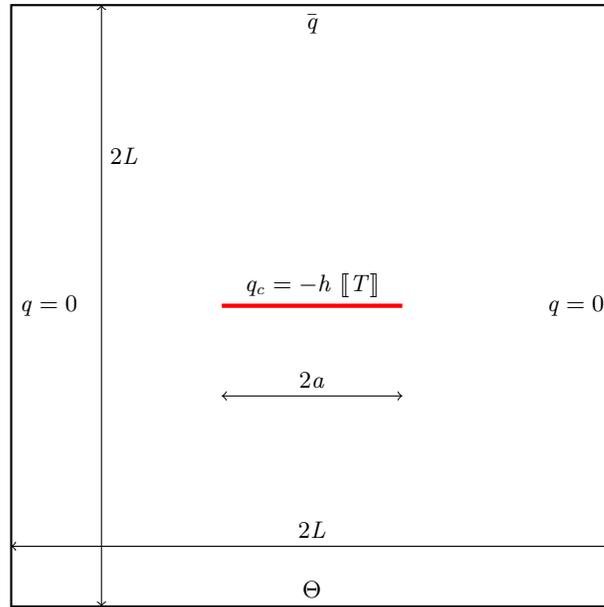


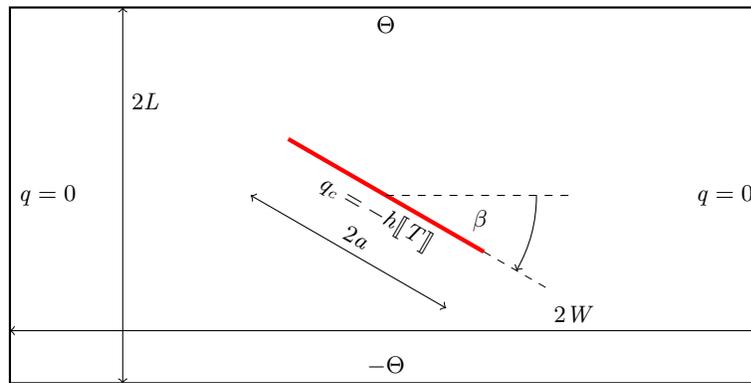
FIGURE 3.13 – Temperature field and flux lines for an adiabatic inclined crack

3.7.3 Plates with thermal exchange between crack's lips

In this example, we consider a square plate with internal crack as shown in Figure (3.14a) which has the same dimension as the plate in sub-section 3.7.1. The boundary conditions are $T = \Theta = 10$ on the bottom line and $\bar{q} = 50$ on the top line of the square plate. The sides of the plate are perfectly insulated. The heat exchange coefficient between crack's lips is $h = 0.5$ and the thermal conductivity is $k = 1$. We also consider a rectangular plate with an inclined crack as shown in Figure (3.14b) with the same dimensions and, the same boundary conditions as in sub-section 3.7.2 but with an heat exchange between crack's lips with $h = 0.5$. For ABAQUS simulations, we consider a thermal contact *surface-to-surface* between the crack's lips using the same meshes as presented previously. The temperature field is illustrated on Figures (3.15) and (3.16). We observe that the heat flux lines cross the crack because, here, the heat flux is continuous as defined in Equations (3.6–3.7). Also, the isothermal lines are not perpendicular to the crack indicating that there is a flux crossing the crack. There is no significant difference between the maximum temperature obtained by XFEM-UL and that obtained by ABAQUS. A careful examination of the results for XFEM-UL and ABAQUS on Figure (3.16), shows that the isothermal lines are practically the same. We therefore conclude that results are the same using XFEM and FEM, and it is possible to simulate realistic heat exchange between the crack's lips.



(a) Centered crack



(b) Inclined crack

FIGURE 3.14 – Plates with heat exchange between crack's lips

3.7.4 Influence of heat exchange coefficient h on the temperature field

In this example, we consider a square plate with a centered crack with length $2L \times 2L$ and width $L = 1.5$ as shown in Figure (3.14a). The crack length is $2a = 1$ and the conductivity coefficient is $k = 1$.

A uniform mesh of 31×31 bilinear elements is used. The boundary conditions are a Dirichlet condition $T = \Theta = 10$ on the bottom line of the square plate and a Neumann condition above the plate $\bar{q} = 50$.

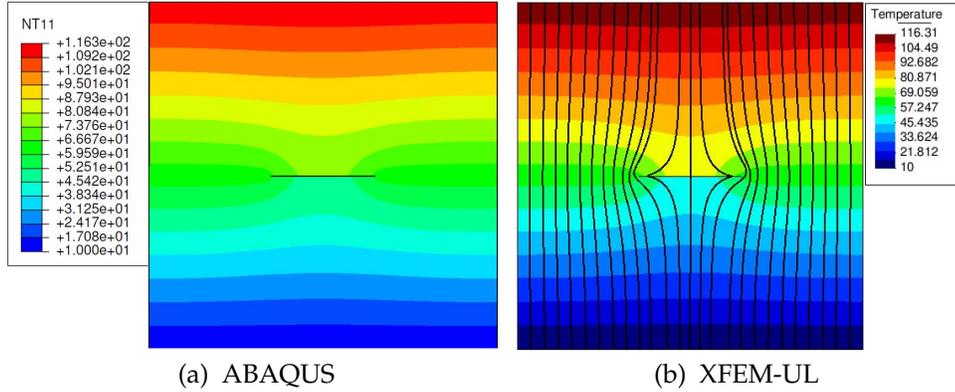


FIGURE 3.15 – Temperature field for a square plate with heat exchange

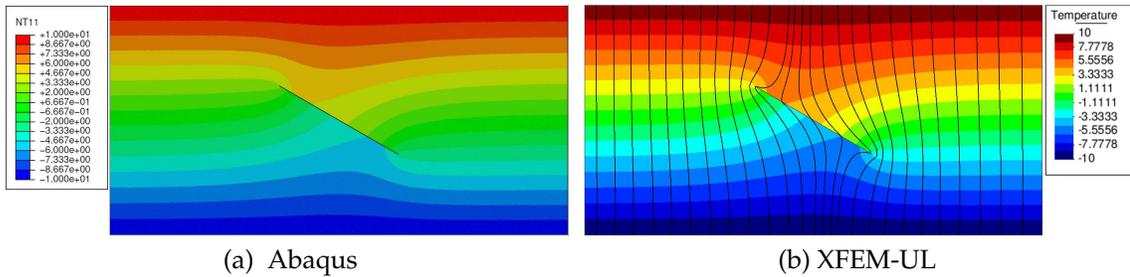


FIGURE 3.16 – Temperature field for a rectangular plate with heat exchange

In Figures (3.17), we show the variation of temperature field along the path located at $x = 1.5$, Figure (3.17a), and a path located at $y = 1.5$, Figure (3.17b), for h taking values between $[10^{-2}, 10^4]$.

We see that when $\frac{h}{k}$ is small, the heat exchange between crack's lips is negligible and the crack behaves as an adiabatic crack. On the other hand, when $\frac{h}{k}$ is very large, the heat flux is continuous over the crack and the temperature jump between the crack's lips goes to zero. It is similar to a thermal problem without crack. It is important to mention that the value of h has been changed without changing the XFEM interpolation and the mesh size.

3.7.5 Convergence analysis for the transient thermal problem

This last example is presented to validate the model with heat exchange between crack's lips in a transient heat transfer problem. The domain is a square plate with an internal horizontal crack as presented on Figure (3.14a). The dimension is $L = 1$

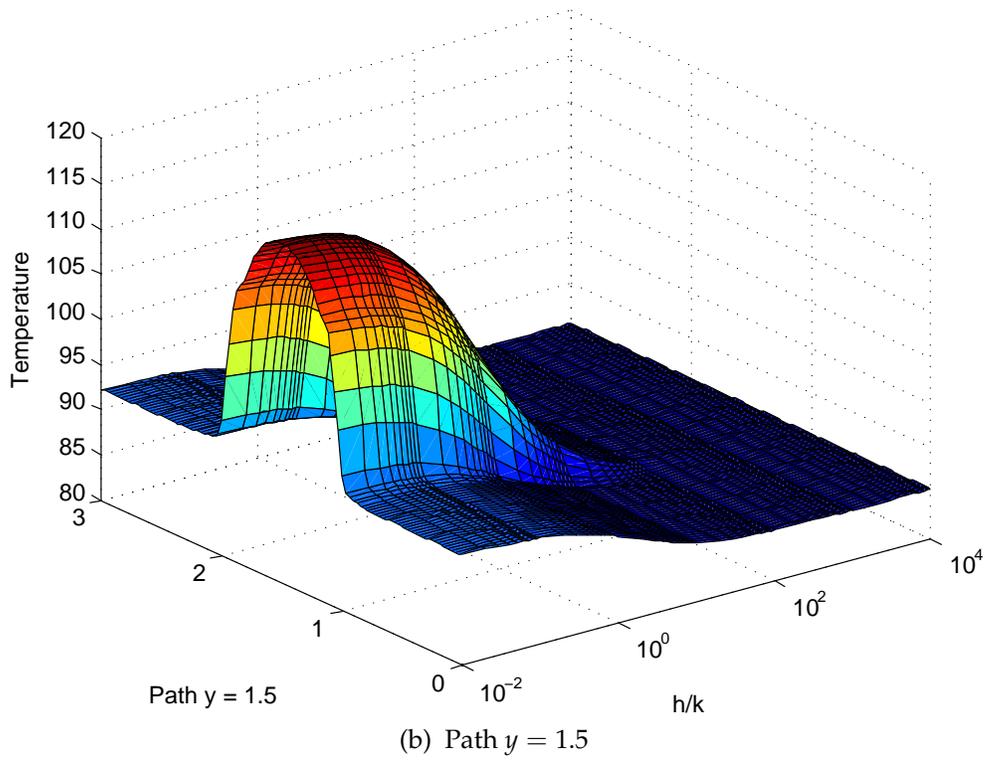
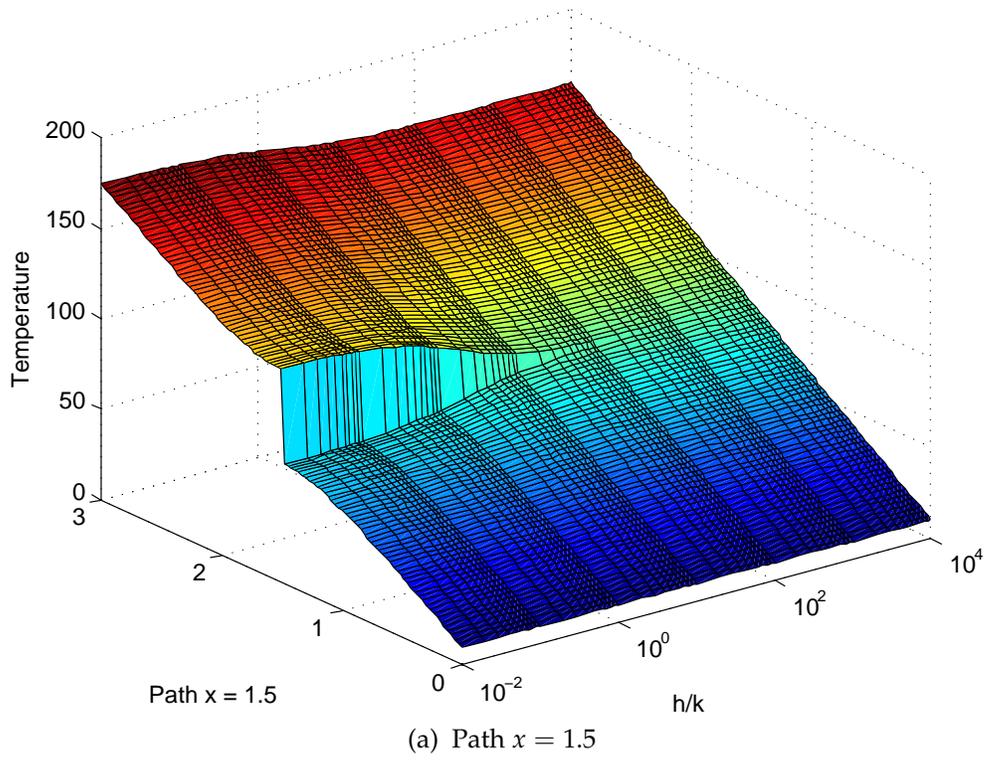


FIGURE 3.17 – The variation of temperature field across the path $x = 1.5$ and $y = 1.5$ in function of $\frac{h}{k}$

and $a = 0.3$. The thermal conductivity $k = 1$, the density $\rho = 1$ and the specific heat capacity $c = 1$. The heat exchange coefficient is $h = 0.5$, the time step $\Delta t = 0.2$ and the number of time steps is 100. At $t = 0$, the initial condition of temperature field was $T = 0$.

The evolution of the temperature field along the path $x = L$ and $y = L$ are illustrated in Figures (3.18a–3.18b). We observe that, with time, the temperature jump increases at the crack's lips and the solution reaches stationary state. We compare the solution of transient analysis at the end of the analysis, to the steady state analysis and the results are the same.

The Figure (3.19) shows a comparison of the convergence between XFEM-UL and ABAQUS versus time at several points with different distances from the crack tip. We clearly see that XFEM has the same convergence rate as FEM. Also, XFEM displays a better approximation of the solution near the crack tip due to the singular enrichment used there.

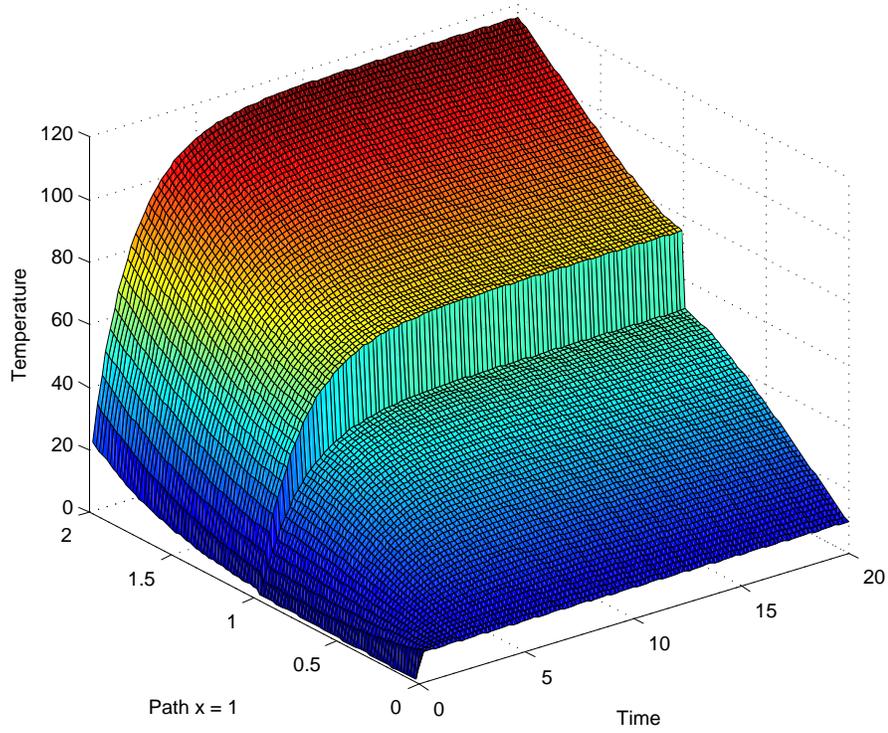
3.8 Conclusion

The extended finite element method was applied for steady state and transient heat transfer problems with and without heat exchange between crack's lips. The temperature finite element approximation was enriched by a step function to model the discontinuity of temperature field in elements completely crossed by a crack and an asymptotic enrichment in crack tip to be able to represent the heat flux singularity.

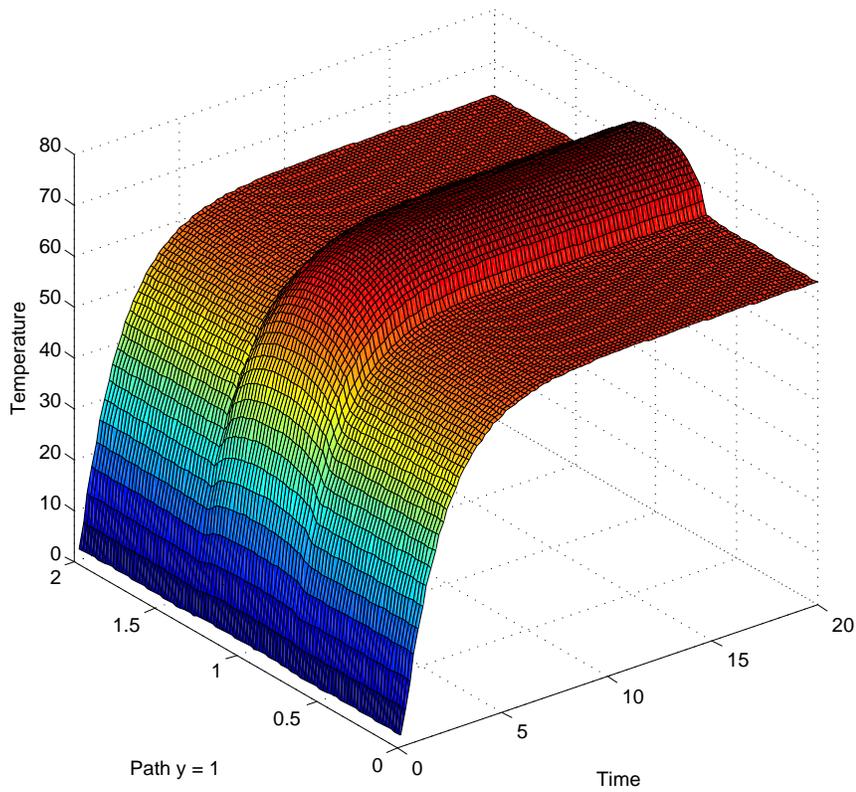
A heat exchange between crack's lips is considered which depends on temperature jump at the crack and a heat exchange coefficient h . A contour integral was developed in order to calculate the contribution of the heat exchange term at the singularity, in the numerical system.

Several numerical examples illustrate the accuracy of the method for two dimensional problems with a comparison with ABAQUS. As well, we showed the effect of the heat exchange coefficient on the temperature distribution.

The approach outlined in this paper is more general and has a physical meaning compared to the case where the temperature is fixed on the crack's lips or the adia-



(a) Path $x = L$



(b) Path $y = L$

FIGURE 3.18 – Temperature evolution in function of time for a centered crack with heat exchange

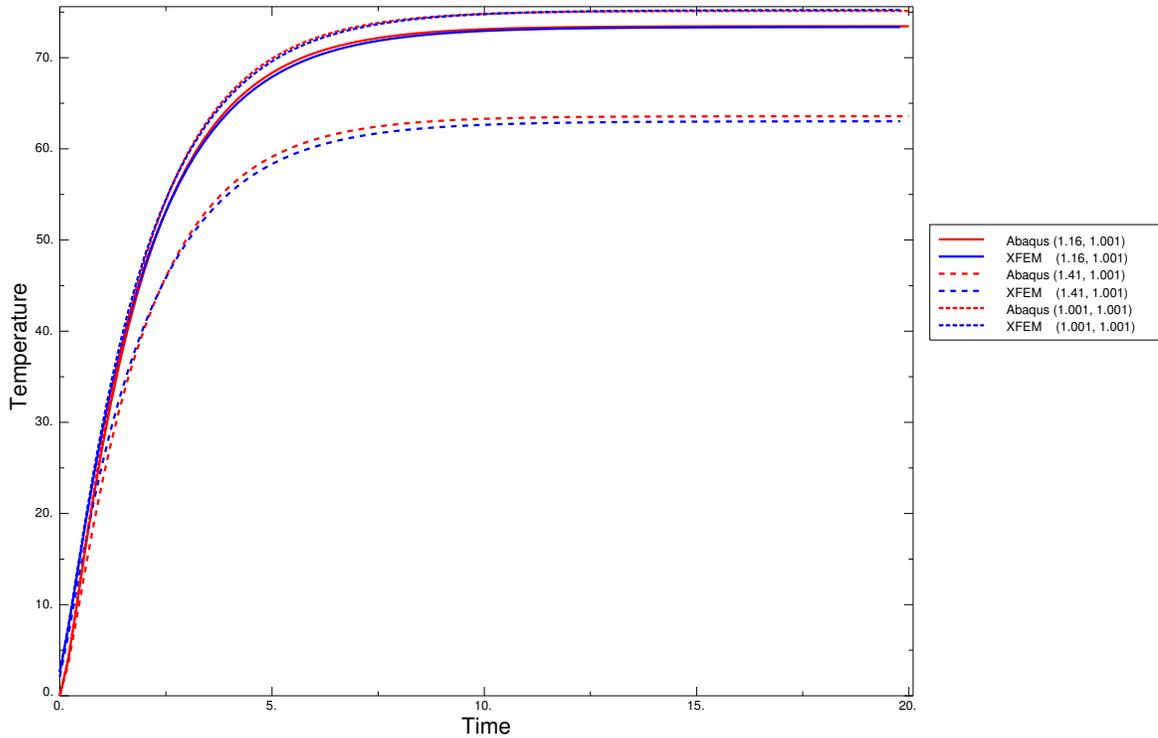


FIGURE 3.19 – Comparison between ABAQUS and XFEM-UL convergence at many points near the crack tip

batic case. If the value of the heat exchange coefficient h goes to zero, we reach the adiabatic case. In contrary, if the value of h goes to infinity, it is similar to the problem without any crack.

The next extension of the proposed numerical method consists in applying the same approach to thermo-electrical problems, for stationary cracks taking into account the Joule heating effect inside the domain Ω and on the cracked boundary Γ_c , and to the crack propagation case with the stress intensity factor computation.

Acknowledgments

The authors gratefully acknowledge the financial support provided by Alcoa Inc. and the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada. A part of the research presented in this paper was financed by the Fonds de Recherche du Québec - Nature et technologies by the intermediary of the Aluminium Research Centre - REGAL.

Chapitre 4

La méthode XFEM pour les problèmes thermoélectriques non linéaires avec échanges thermiques et électriques entre les lèvres de la fissure : Article 2

4.1 Abstract

Thermoelectrical problems in a fractured media, arise in many types of engineering problems like in the carbon electrodes in a Hall-Héroult cell. To solve this problem, it is useful to take into account this crack by using the eXtended Finite Element Method (XFEM). The present paper deals with transient and nonlinear problems to estimate thermoelectrical field distributions in cracked medium.

The finite element approximation is enriched in order to take into account the crack discontinuities due to the jump and the asymptotic near-tip function, using the partition of unity.

Thermal and electrical exchanges between crack's lips are, respectively, considered as a function of temperature jump and voltage jump at the crack. Due to the heat generation in the solid and between crack's lips induced by the interface resistance, the problem is coupled.

The nonlinear XFEM discretized system, due to the temperature dependence of materials properties and Joule effect, is solved using the Newton-Raphson algorithm. A validation test of the thermal and electrical exchange laws with the exact solution is presented. The results obtained are compared to classical finite elements analysis with very fine meshes to represent the crack, and show excellent agreement with the proposed XFEM model proposed in this paper.

4.2 Introduction

Many engineering problems require a multiphysics modeling approach and, thus, are generating coupled problems. The crack growth regimes is a typical thermomechanical problem in the field of aircraft engines and nuclear plants, etc. Another engineering field is the aluminium production based on the so called Hall-Héroult electrolysis process Sørli and Øye (2010). In an electrolysis cell, many physical and chemical phenomena take place: solid mechanics, including crack formation and propagation, fluid mechanic, mass transport, heat exchange with phase change, electrical and magnetic phenomena and their physical interactions. During the start-up of a new electrolysis cell, consisting of preheating this one using electrical resistance heating, the carbon cathode is exposed to high stress and strain levels, induced by high temperature gradients Goulet (2004). These stresses may lead to cracking of the cathode thus affecting the distribution of thermal and electric fields in the cell and reducing its lifetime, Richard et al. (2006); Jensen et al. (2011).

This problem has been solved in Goulet (2004); Fafard et al. (2007); Desilets et al. (2003); Richard et al. (2006) based on classical finite element method (FEM) where the interfaces between materials have been taken into account using contact elements Goulet (2004). At those interfaces, the problem is highly nonlinear because the mechanical contact status affects the thermoelectrical behavior of the interface. The electrical and thermal fluxes at those interfaces are functions of temperature and normal stress level using a constitutive law which links the flux at the interface, to the temperature jump between the surface in contact, for the thermal part or to the voltage jump, for the electrical problem Goulet (2004). The parameters of the constitutive law must be identified using appropriate laboratory apparatus Fortin et al. (2013); Kandeve et al. (2011).

In all those applications, it was assumed that the mechanical behaviour of the cath-

ode has an equivalent elastoplastic behaviour, without any coupling with the thermal or electrical problem. It is well known that this assumption is not valid due to cracks formation inside the cathode block inside the cell. Those cracks appear mainly, during the electrical preheating of the cell but also during the lifespan of the cell due to chemical reactions inside the carbon blocks. Thus, the present paper presents a approach based on the eXtended finite element method (XFEM) to solve the coupled thermoelectric problem taking into account the presence of a stationary crack.

XFEM is well suited for problems with strong or/and weak discontinuities. This method, based on the partition of unity method Melenk and Babuška (1996), has been used successfully in the last decade in elastic fracture mechanics Belytschko and Black (1999); Moës et al. (1999), using local enrichments of the solution. The method has been used very successfully to model a variety of fracture problems in two Stolarska et al. (2001) and three dimensions in Sukumar et al. (2000), Moës et al. (2002), Gravouil et al. (2002) and Sukumar et al. (2003), and for cohesive cracks by Moës and Belytschko (2002a). For more details about XFEM in fracture mechanics, see Abdelaziz et al. (2009) , Karihaloo and Xiao (2003) and Belytschko et al. (2009).

XFEM has also been applied with success in several other types of problems, such as fluid-structure interaction Legay et al. (2006), two-fluid flows Chessa and Belytschko (2003b); Groß and Reusken (2007), solidification Chessa et al. (2002); Ji et al. (2002) and biofilms growth Duddu et al. (2008, 2009). Some problems with a thermal component were treated in Merle and Dolbow (2002); Chessa et al. (2002) for solidification problem, and the problem of thermo-elastoplasticity with formation of shear bands was addressed in Areias and Belytschko (2007). The problem of thermo-elastic fracture has been studied in detail by Dufloc Dufloc (2008), where two different types of boundary conditions on the lips of the crack have been considered, namely isothermal and adiabatic cases. In the former case, the heat flux is discontinuous and the latter case, the temperature of the crack's lips is discontinuous. Similarly, in Zamani et al. Zamani et al. (2010); Zamani and Eslami (2010), the authors present an enrichment in the vicinity of the adiabatic crack with a higher order in dynamic thermo-elasticity. Application of XFEM for problems with electrical components was addressed in Béchet et al. (2009) and Nguyen-Vinh et al. (2012) for piezo-electric materials.

Unlike Duflot Duflot (2008), where the boundary conditions are limited to an adiabatic case on the crack's lips or to an imposed temperature condition on both side of the crack, this paper proposes a more physical approach to manage the energy exchange (electrical and thermal) between the lips of the crack. The energy exchange between the crack's lips is driven by a constitutive law similar to the one proposed in Fafard et al. (2007) where the thermal/electrical exchanges between the crack's lips depend on the temperature/voltage jump between those lips and of a coefficient, for each type of problems, to be identified in a laboratory. Due to electrical resistance between the lips, heat generation at the interface must be taken into account. The non-linearities induced by this Joule effect, the temperature dependence of material properties and the thermoelectrical coupling between electrical and thermal problems, are solved using Newton-Raphson algorithm.

The outline of the article is as follows. In the next section, the problem to be solved is introduced and the governing equations are given. In sections 4.4 and 4.5, the weak formulation of the thermoelectrical problem is presented, and the temperature and electric fields approximation using XFEM, is described. The treatment of the thermoelectrical exchange condition in the weak formulation is presented in details. In section 4.6, the Newton-Raphson algorithm, including the details about tangential matrices, is presented for the resolution of the thermoelectrical problem. Based on several numerical examples, the validation of the proposed approach is presented in section 4.7. Finally, in section 4.8 a summary and some concluding remarks are presented.

4.3 Governing equations

Consider, here, an isotropic homogeneous continuum Ω bounded by the boundary Γ and assume that the domain contains a crack Γ_c , as shown in Figure (4.1) . The basic equation to calculate the electric potential and current density is based on the electric charge conservation equation given by:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (4.1)$$

where \mathbf{j} is the electric current density vector which is related to the electric potential gradient V by:

$$\mathbf{j} = -\sigma(T) \nabla V, \quad (4.2)$$

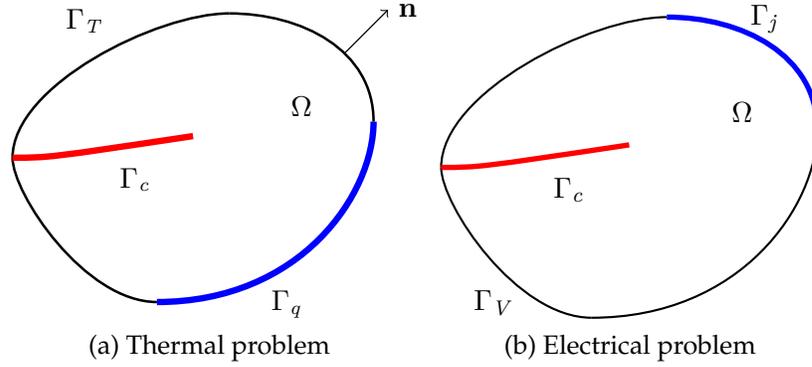


FIGURE 4.1 – Thermoelectrical boundary conditions on the domain Ω

where σ denotes the electrical conductivity assumed to be dependent on the temperature. It is assumed that the transient part of the electrical charge conservation is sufficiently fast compared to the heat transfer problem and negligible (no charges accumulation).

On the other hand, the heat transfer equation is given by :

$$\rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = Q_v(T, V), \quad (4.3)$$

where the heat flux vector \mathbf{q} is related to the temperature gradient by Fourier's law :

$$\mathbf{q} = -k(T) \nabla T, \quad (4.4)$$

where, ρ is the density, c is the specific heat capacity which depends on the temperature, k is the thermal conductivity that depends also on the temperature and t denotes time. The heat generated in the volume Q_v is due to the loss of the electric power by Joule effect, and is defined as follows Holm (1967):

$$Q_v(T, V) = (\nabla V)^T \sigma(T) \nabla V. \quad (4.5)$$

The governing equations are completed by Dirichlet (on Γ_T, Γ_V) and Neumann (on Γ_q, Γ_j) boundary conditions for electric and thermal fields, and initial conditions for T :

$$\left\{ \begin{array}{ll} T(t=0) = T_0, & \\ T = \bar{T} & \text{on } \Gamma_T, \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \bar{q} & \text{on } \Gamma_q, \\ V = \bar{V} & \text{on } \Gamma_V, \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = \bar{j} & \text{on } \Gamma_j, \end{array} \right.$$

where \bar{T} , \bar{V} , \bar{q} and \bar{j} are known temperature, voltage, thermal flux and current density, respectively. T_0 is the initial temperature, and the outward normal unit vector is denoted by \mathbf{n} .

Assuming a stationary crack, Γ_c , located inside the domain Ω , the heat flux and electric flux on Γ_c are defined as follows:

$$\begin{cases} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = q_c & \text{on } \Gamma_c, \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = j_c & \text{on } \Gamma_c, \end{cases} \quad (4.6)$$

$$(4.7)$$

where q_c and j_c are the heat exchange and the electric exchange between the crack's lips Goulet (2004); Fafard et al. (2007), defined by:

$$q_c = -h(T_m) \llbracket T \rrbracket, \quad (4.8)$$

$$j_c = -g(T_m) \llbracket V \rrbracket, \quad (4.9)$$

where h and g are the heat and the electric exchange coefficients, respectively, which depend on the temperature average T_m between the crack surfaces, defined by:

$$T_m = \frac{1}{2}(T^+ + T^-)$$

where T^+ and T^- are the temperature of each lip of the crack, and $\llbracket \dots \rrbracket$ is the jump symbol, i.e, $\llbracket \beta \rrbracket = \beta^+ - \beta^-$. Due to the electrical resistance between the lips of the crack, there will be a heat generation $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = Q_c$ at Γ_c defined as follows Richard et al. (2003):

$$Q_c = \frac{1}{2}g(T_m) \llbracket V \rrbracket^2 \quad \text{on } \Gamma_c. \quad (4.10)$$

Here, the $\frac{1}{2}$ in Equation (4.10) means that the heat generated at the interface is distributed half and half on the both sides of the interface, and has been demonstrated in Goulet (2004) the validity of this equation. Thus, this surface heat source must be transferred on each side of the crack using $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = j_c$ on Γ_c . Given the presence of the Joule effect, expressed in Equations (4.5) and (4.10), and that the material properties are temperature-dependent, the model must be analyzed as a thermoelectric coupled problem.

The next section presents the weak forms based on the standard Galerkin method, with the additional terms associated with the discontinuity Γ_c inside the domain.

4.4 Weak formulations

According to standard variational methods [Dhatt et al. \(2005\)](#), the weak forms are obtained by multiplying Equations (4.1) and (4.3) by test functions V^* and T^* respectively, and integrating over Ω , i.e,

$$-\int_{\Omega} V^* \nabla \cdot (\sigma(T) \nabla V) d\Omega = 0, \quad (4.11)$$

$$\int_{\Omega} \rho c(T) T^* \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} T^* \nabla \cdot \mathbf{q} d\Omega - \int_{\Omega} T^* \sigma(T) \|\nabla V\|^2 d\Omega = 0. \quad (4.12)$$

Using the divergence theorem, the weak forms are rewritten as follows:

$$W_V(T, V) = \int_{\Omega} (\nabla V^*) \cdot (\sigma(T) \nabla V) d\Omega + \int_{\Gamma} V^* \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} W_T(T, V) = & \int_{\Omega} \rho c(T) T^* \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla T^*) \cdot (k(T) \nabla T) d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} T^* \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} T^* \sigma(T) \|\nabla V\|^2 d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

where boundary parts satisfy $\Gamma = \Gamma_T \cup \Gamma_q \cup \Gamma_c$ and $\Gamma = \Gamma_V \cup \Gamma_j \cup \Gamma_c$. The contour term in Equation (4.13) is decomposed as follows:

$$\int_{\Gamma} V^* \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_j} V^* \bar{j} d\Gamma - \int_{\Gamma_c} V^* j_c d\Gamma, \quad (4.15)$$

It has been shown in [Laouati et al. \(2012\)](#) and [Laouati \(2013\)](#), that integral over Γ_c can be written as follows using $\Gamma_c = \Gamma_c^+ \cup \Gamma_c^-$:

$$\int_{\Gamma_c} V^* j_c d\Gamma = - \int_{\Gamma_c^+} \llbracket V^* \rrbracket j_c d\Gamma \quad (4.16)$$

where Γ_c^+ is one of the crack surfaces with the normal \mathbf{n} and $\llbracket V^* \rrbracket$ is the test function jump over the crack. The last term in RHS of Equation (4.15) represents the electrical exchange between the crack's lips [Goulet \(2004\)](#). By the same way, the contour term in Equation (4.14) is written as follows [Laouati et al. \(2012\)](#) :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} T^* \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = & \int_{\Gamma_q} T^* \bar{q} d\Gamma - \int_{\Gamma_c^+} \llbracket T^* \rrbracket q_c d\Gamma \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c^+} (T^*(\mathbf{x}^+) + T^*(\mathbf{x}^-)) g(T_m) \llbracket V \rrbracket^2 d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.17)$$

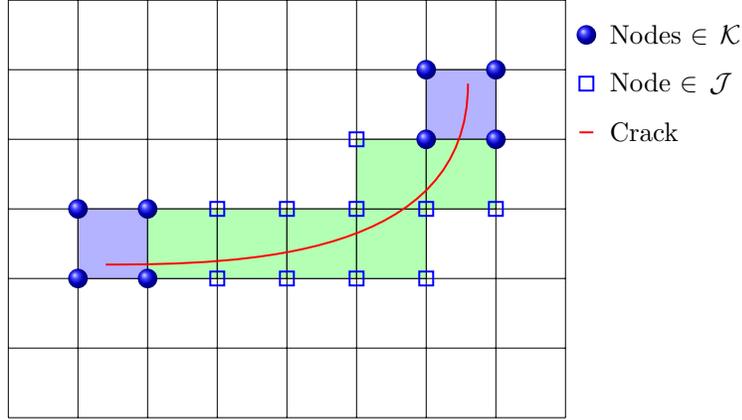


FIGURE 4.2 – An arbitrary crack line (red line) in a structured mesh. Nodes in sets \mathcal{I} and \mathcal{K} are denoted by blue squares and blue circles, respectively

In summary, the integral form of the fully coupled thermoelectric problem, to be discretized, is written as follows:

$$W(T, V) = W_T(T, V) + W_V(T, V) = 0 \quad (4.18)$$

4.5 XFEM discretization

Based on the work of Belytschko and Black Belytschko and Black (1999) and Moës et al. Moës et al. (1999), the XFEM formulation for temperature field is based on a standard finite element approximation, and a locally enriched approximation around the crack.

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) = & \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\mathbf{x}) T_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(\mathbf{x}) [H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_j)] a_j \\ & + \sum_{k \in \mathcal{K}} N_k(\mathbf{x}) [F_1(\mathbf{x}) - F_1(\mathbf{x}_j)] b_k, \end{aligned} \quad (4.19)$$

where \mathcal{I} is the set of all nodes in the mesh, T_i is the temperature at node i , N_i is the finite element shape function associated with node i , $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ is the subset of nodes enriched at crack discontinuity, a_j are the additional degrees of freedom for the discontinuous field along the crack, $\mathcal{K} \subset \mathcal{I}$ is the subset of nodes that are enriched at the crack tips and b_k are the additional degrees of freedom associated with the crack's tips enrichment (see Figure (4.2)). The Heaviside function $H(\mathbf{x})$ takes the values $+1$ above the crack and -1 otherwise. The near-tip function $F_1(r, \theta) = \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ in the Equation (4.19) is the first function in the set of functions which span the exact asymptotic crack-tip displacement field for a linear elastic material Williams (1957),

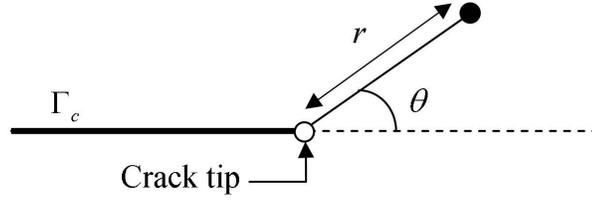


FIGURE 4.3 – Polar coordinate at crack tip

for which the terms r and θ are defined in Figure (4.3). The singularity of the heat flux and current density distributions in the vicinity of the crack tip can be derived from the analogy with anti-plane shear mode distribution of singular stress Sih (1962); Yagawa and Horie (1982). The thermal and electrical field solutions at the crack tip can be written as proposed by Dufloot in Dufloot (2008):

$$T = \left(-\frac{K_T}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) F_1(r, \theta); \quad V = \left(-\frac{K_V}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) F_1(r, \theta), \quad (4.20)$$

where K_T and K_V are parameters that represent the concentration of the heat flux and current density respectively. These parameters are analogous to the stress intensity factor in linear fracture mechanics.

Using the following definitions for the shifted terms:

$$\begin{cases} \psi_j(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_j), \\ \gamma_k(r, \theta) = F_1(r, \theta) - F_1(r_k, \theta_k), \end{cases} \quad (4.21)$$

and using Equation (4.19), the approximation of $T(\mathbf{x})$ is written as follows:

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\mathbf{x}) T_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(\mathbf{x}) \psi_j(\mathbf{x}) a_j + \sum_{k \in \mathcal{K}} N_k(\mathbf{x}) \gamma_k(r, \theta) b_k. \quad (4.22)$$

In this paper, the implementation of XFEM is performed using a 4-node quadrilateral element based on linear shape functions (Figure (4.4)). Therefore, the XFEM approximation of the temperature field, for a fully enriched element, can be written in a compact way as follows :

$$T(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{N}^{std} \quad \mathbf{N}^\psi \quad \mathbf{N}^\gamma \rangle \begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \langle \mathbf{N}_e \rangle \{ \mathbf{T}_e \}, \quad (4.23)$$

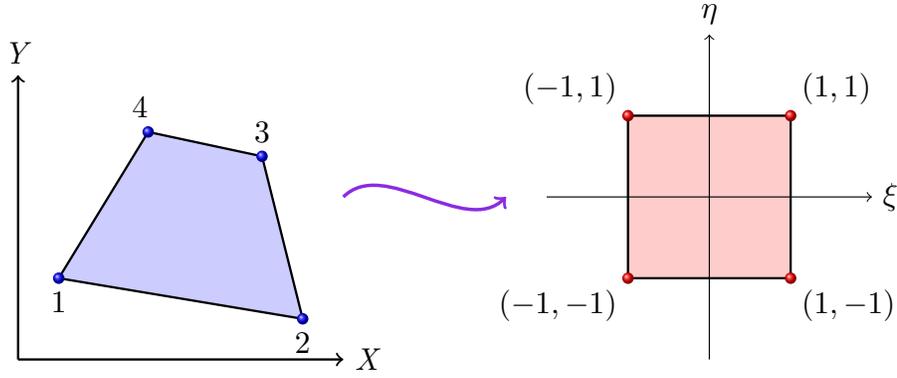


FIGURE 4.4 – Real and parent elements

where $\langle \mathbf{N}_e \rangle$ is the elementary vector of standard and enriched shape functions and $\{\mathbf{T}_e\}$ is the elementary vector of standard and enriched degrees of freedom. Similar XFEM expressions can be written for \dot{T} , T^* , V , V^* , δT and δV as follows:

$$\begin{aligned}\dot{T}(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{N}_e \rangle \{\dot{\mathbf{T}}_e\}; & V(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{N}_e \rangle \{\mathbf{V}_e\}; \\ T^*(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{N}_e \rangle \{\mathbf{T}_e^*\}; & V^*(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{N}_e \rangle \{\mathbf{V}_e^*\}; \\ \delta T(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{N}_e \rangle \{\delta \mathbf{T}_e\}; & \delta V(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{N}_e \rangle \{\delta \mathbf{V}_e\};\end{aligned}$$

where δT and δV are incremental corrections of the thermal and electrical fields of the Newton-Raphson problem. The jump of the temperature field between the crack's lips, is given by, see Laouati et al. (2012) :

$$\llbracket T(\mathbf{x}) \rrbracket = \langle 0 \quad 2\mathbf{N}_{1 \times n_j} \quad 2\sqrt{r}\mathbf{N}_{1 \times n_k} \rangle \begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \langle \llbracket \mathbf{N}_e \rrbracket \rangle \{\mathbf{T}_e\}. \quad (4.24)$$

where $\langle \llbracket \mathbf{N}_e \rrbracket \rangle$ is the vector of shape functions jump on the crack's lips. The temperature average on the crack's lips, is given by :

$$T_m(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{N} \quad -H(\mathbf{x}_j)\mathbf{N}_{1 \times n_j} \quad -F_1(\mathbf{x}_k)\mathbf{N}_{1 \times n_k} \rangle \begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \langle \tilde{\mathbf{N}}_e \rangle \{\mathbf{T}_e\}, \quad (4.25)$$

where $\langle \tilde{\mathbf{N}}_e \rangle$ is the vector of the shape functions average at Γ_c . Here, the continuity of the shape functions across the crack has been used, i.e. $N_j(\mathbf{x}^+) = N_j(\mathbf{x}^-) = N_j(\mathbf{x})$. The approximations of T^* , V and V^* can be developed in a similar way.

To define the discrete form of the thermal problem (electrical problem), the gradient

of the temperature (electrical potential) field must be defined, i.e.,

$$\nabla T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{std} & \mathbf{B}^\psi & \mathbf{B}^\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}_e] \{\mathbf{T}_e\}, \quad (4.26)$$

where $[\mathbf{B}_e]$ is the gradient operator which contains the standard part $[\mathbf{B}^{std}]$ and the enriched parts $[\mathbf{B}^\psi]$ and $[\mathbf{B}^\gamma]$, defined as follows:

$$[\mathbf{B}^{std}] = \begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{B}_j^\psi] = \begin{bmatrix} (N_j\psi_j)_{,x} \\ (N_j\psi_j)_{,y} \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{B}_k^\gamma] = \begin{bmatrix} (N_k\gamma_k)_{,x} \\ (N_k\gamma_k)_{,y} \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

The numerical integration is an important issue in XFEM, for the elements that are cut by the crack; a modified integration scheme is performed. These elements are divided into a set of sub-triangles with boundaries on the crack faces. Then, the Hammer quadrature formula is implemented for each of these sub-triangle as in Moës et al. (1999). Special care must be paid to the integration over the lip of the crack defined in Equations (4.16) for the electrical problem and in (4.17) for the thermal problem. The thermal/electrical exchange coefficients use the mean temperature T_m which must be evaluated at the integration point located at the crack surface.

4.6 Non linear transient solution

A non linear transient thermoelectrical problem was presented in the previous sections using XFEM for the space discretization. As mentioned above, several nonlinearities are present in this problem, and the transient part is present only for the thermal field. The resolution of the nonlinear transient problem will be performed based on a backward finite difference method for the time discretization and the nonlinear algebraic system, for each time increment, is solved using Newton-Raphson algorithm. The approximation of the integral form $W(T, V)$ at iteration $(k + 1)$ is defined as follows:

$$W^{k+1} = W^k + \delta W^k, \quad (4.28)$$

where

$$\delta W^k = \delta W_T^k + \delta W_V^k, \quad (4.29)$$

$$\delta W_T^k = \frac{\partial W_T^k}{\partial T} \delta T + \frac{\partial W_T^k}{\partial V} \delta V \quad (4.30)$$

$$\delta W_V^k = \frac{\partial W_V^k}{\partial T} \delta T + \frac{\partial W_V^k}{\partial V} \delta V$$

The terms δT and δV are the corrections obtained from the Newton-Raphson procedure. From Equations (4.9), (4.13) and (4.15), the expression of δW_V^k is written as follows:

$$\begin{aligned} \delta W_V^k &= \int_{\Omega} (\nabla V^*) \cdot \sigma(T) \nabla (\delta V) d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla V^*) \cdot \frac{\partial \sigma(T)}{\partial T} \nabla V (\delta T) d\Omega \quad (4.31) \\ &+ \int_{\Gamma_c^+} \llbracket V^* \rrbracket g(T_m) \llbracket \delta V \rrbracket d\Gamma + \int_{\Gamma_c^+} \llbracket V^* \rrbracket \frac{\partial g(T_m)}{\partial T} \llbracket V \rrbracket (\delta T_m) d\Gamma, \end{aligned}$$

where $\delta T_m = \frac{1}{2} (\delta T^+ + \delta T^-)$. From Equations (4.8), (4.14) and (4.17), the expression of δW_T^k is defined by:

$$\begin{aligned} \delta W_T^k &= \int_{\Omega} T^* \rho c(T) (\delta \dot{T}) d\Omega + \int_{\Omega} T^* \rho \frac{\partial c(T)}{\partial T} \dot{T} (\delta T) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} (\nabla T^*) \cdot k(T) \nabla (\delta T) d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla T^*) \cdot \frac{\partial k(T)}{\partial T} \nabla T (\delta T) d\Omega \\ &- \int_{\Omega} T^* \frac{\partial \sigma(T)}{\partial T} \|\nabla V\|^2 (\delta T) d\Omega - \int_{\Omega} 2T^* \sigma(T) (\nabla V) \cdot \nabla (\delta V) d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_c^+} \llbracket T^* \rrbracket h(T_m) \llbracket \delta T \rrbracket d\Gamma + \int_{\Gamma_c^+} \llbracket T^* \rrbracket \frac{\partial h(T_m)}{\partial T} \llbracket T \rrbracket (\delta T_m) d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma_c^+} T_m^* \frac{\partial g(T_m)}{\partial T} \llbracket V \rrbracket^2 (\delta T_m) d\Gamma - \int_{\Gamma_c^+} 2T_m^* g(T_m) \llbracket V \rrbracket \llbracket (\delta V) \rrbracket d\Gamma, \quad (4.32) \end{aligned}$$

where $\delta \dot{T}$ is defined as follows, using an implicit Euler time integration scheme:

$$\delta \dot{T} = \frac{1}{\Delta t} \delta T. \quad (4.33)$$

The domain Ω is discretized into $nelmt$ elements Ω_e :

$$W(T, V) = \sum_{nelmt} W^e(T, V), \quad (4.34)$$

Introducing XFEM approximation into the weak forms defined by Equations (4.13) and (4.14), the nonlinear discretized variational equation is defined as follows:

$$W^e = \left\langle \mathbf{T}_e^* \quad \mathbf{V}_e^* \right\rangle \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{R}_T^e \\ \mathbf{R}_V^e \end{array} \right\} = \langle \mathbf{U}_e^* \rangle \{ \mathbf{R}^e \} \quad (4.35)$$

where $\{\mathbf{R}_T^e\}$ and $\{\mathbf{R}_V^e\}$ are the elementary residual vectors for the thermal and the electrical problems respectively. Using Equations (4.35) and (4.30), we can write the Equation (4.28) as :

$$\mathbf{W}^{k+1} \approx \langle \mathbf{U}^* \rangle \left[\{\mathbf{R}^k\} + \mathbf{K}_T(\mathbf{U}^k) \{\delta \mathbf{U}^k\} \right] \rightarrow 0. \quad (4.36)$$

where \mathbf{K}_T is the global tangential matrix obtained by classical assemblage of the elementary matrix. This elementary tangent matrix \mathbf{K}^e for a fully enriched element will have four sub-matrices, as derived in the Appendix:

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{TT} & \mathbf{K}^{TV} \\ \mathbf{K}^{VT} & \mathbf{K}^{VV} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

The linear equations system to be solved for each iteration k can be expressed as follows:

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{U}^k) \{\delta \mathbf{U}^k\} = - \{\mathbf{R}^k\}. \quad (4.38)$$

The solution is updated using :

$$\{\mathbf{U}^{k+1}\} = \{\mathbf{U}^k\} + \{\delta \mathbf{U}^k\} \quad (4.39)$$

This iterative procedure continues until convergence is reached based on a specified tolerance.

4.7 Numerical examples

In this section, numerical examples are presented and discussed to show the accuracy of the extended finite elements method applied to thermoelectrical problems as well as the effects of the thermal and electrical exchanges between crack's lips. In all examples, six integration points were used at each sub-triangle of Ω^e and 21 integration points for contour line integral over Γ_c^+ . The in-house code, XFEM-UL, is interfaced with GID software GID (2011) for the visualization of results. We validate the thermoelectrical exchange laws by comparing the computed solution to the analytical solution for several cases in sub-section 4.7.1. After that, we presented two examples with increasing complexity where the XFEM solution are compared to the ones obtain from ANSYS or from the FESh++ code Fafard et al. (2007).

4.7.1 Plate divided completely by a crack with thermoelectrical exchanges at the crack

In the first example, we propose to validate the thermal and electrical exchange laws between the crack's lips by comparing the XFEM computed solution to the analytical solution through two cases tests. For this end, we consider the steady state heat transfer equation and, due to the difficulty in developing analytical solutions, the temperature-dependence of materials properties is not taken into account.

For all the cases, we study the problem of a square plate divided into two parts by a crack located at x_c . The geometry and the mesh are illustrated in the Figure 4.5. The boundary conditions are :

$$\begin{cases} T(x=0) = T_0 & T(x=L) = T_L \\ V(x=0) = V_0 & V(x=L) = V_L \end{cases} \quad (4.40)$$

$$\begin{cases} T(x=0) = T_0 & T(x=L) = T_L \\ V(x=0) = V_0 & V(x=L) = V_L \end{cases} \quad (4.41)$$

where the geometrical dimensions, materials parameters and boundary conditions values are reported in the Table 4.1.

TABLE 4.1 – Problem parameters

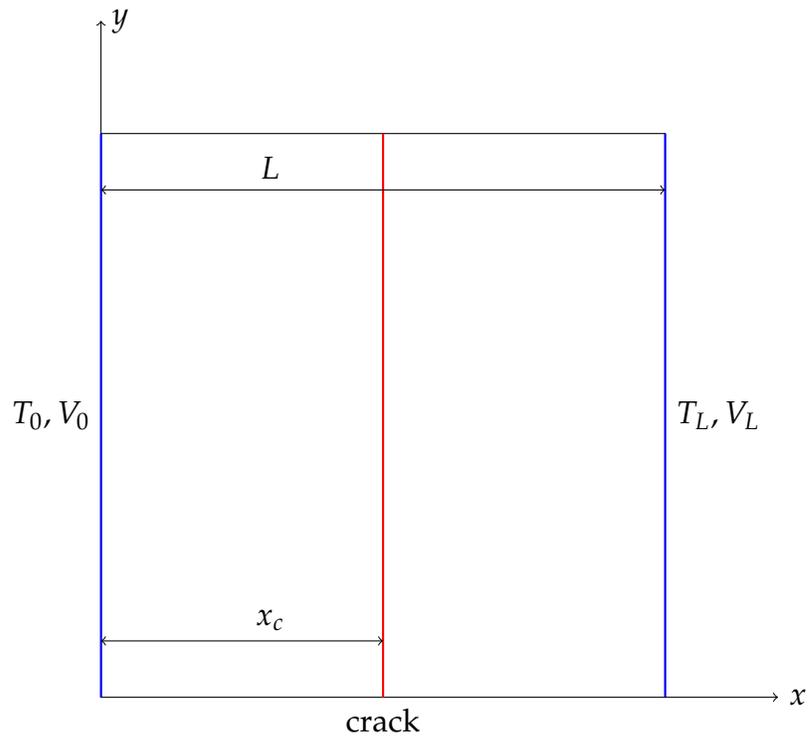
L	x_c	k	σ	T_0	T_L	V_0	V_L
1	0.5	1	10	10	40	0	5

Case I: $h \neq 0, g \neq 0, Q_v \neq 0$ and $Q_c = 0$

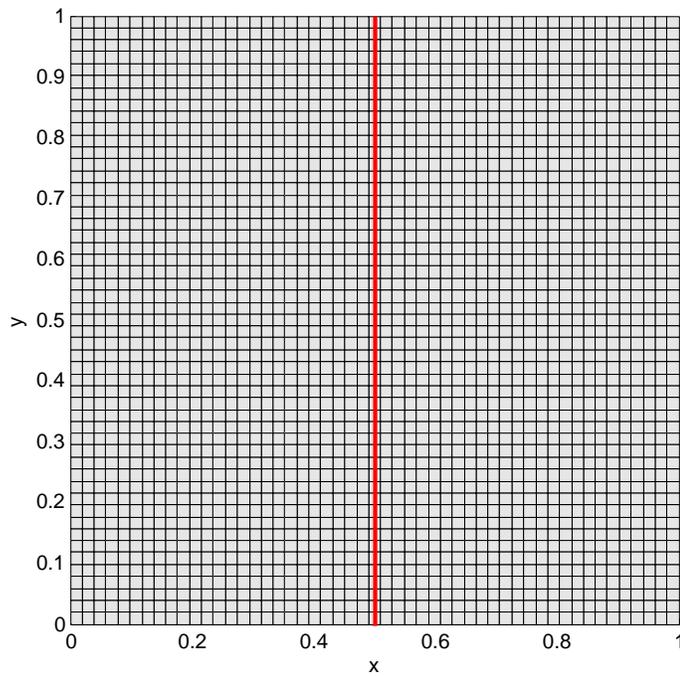
In the first test case, we are interested in the validation of the thermal and electrical exchanges laws defined by Equations 4.8 and 4.9. The heat flux and the electric current density are continuous over the crack since they depend on the temperature and voltage jumps, respectively. For a coupled thermoelectrical problem, by Joule effect in the domain, the exact temperature solution is given as follows Laouati (2013):

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}fx^2 + Cx + T_0 & \forall x \in [0, x_c[, \\ \frac{1}{2}fx^2 + Cx + D & \forall x \in]x_c, L] , \end{cases} \quad (4.42)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}fx^2 + Cx + T_0 & \forall x \in [0, x_c[, \\ \frac{1}{2}fx^2 + Cx + D & \forall x \in]x_c, L] , \end{cases} \quad (4.43)$$



(a) Geometry and the boundary conditions



(b) Mesh 51×51

FIGURE 4.5 – Square plate with a crack at x_c

and the exact solution of the electrical potential field is :

$$V(x) = \begin{cases} ax + V_0 & \forall x \in [0, x_c[, \\ ax + b & \forall x \in]x_c, L], \end{cases} \quad (4.44)$$

with

$$\begin{cases} a = \frac{g}{\sigma} (b - V_0), \quad b = \frac{\frac{gL}{\sigma} V_0 + V_L}{\frac{gL}{\sigma} + 1}, \quad f = \frac{a^2}{\sigma k'}, \\ C = \frac{1}{k + hL} \left[-(hT_0 + kfx_c) + h(T_L - \frac{1}{2}fL^2) \right], \\ D = T_L - \frac{1}{2}fL^2 - LC. \end{cases}$$

Figures 4.6 and 4.7 show the temperature and the voltage distributions along x direction. The coefficient of heat exchange is considered constant ($h = 1$); on the other hand we varied the coefficient of electrical exchange value from $g = 0.001$ (no electrical exchange at crack's lips) to $g = 10000$ (equivalent to uncracked medium). In these figures, the XFEM computed solution and the exact solution are presented. We observe that the voltage distributions are linear since this is a Laplace partial differential equation. However, the temperature distributions are quadratic functions due to the heat source induced by the Joule effect. As expected for this case, the agreement between analytical and XFEM distributions is excellent.

Case II: $h \neq 0, g \neq 0, Q_v \neq 0$ and $Q_c \neq 0$

In addition to thermal and electrical exchanges as presented before, we impose a heat generation due to the electrical resistance at the crack's lips, defined by the Equation 4.10. The exact temperature distribution is Laouati (2013):

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}fx^2 + C_3x + T_0 & \forall x \in [0, x_c[, \\ \frac{1}{2}fx^2 + C_4x + D_4 & \forall x \in]x_c, L], \end{cases} \quad (4.46)$$

where

$$\begin{cases} Q_c = \frac{g}{2}(b - V_0)^2, \\ C_3 = \frac{1}{2k(k + hL)} \left[4hQ_c(L - x_c) + 2kh(T_L - T_0) - khfL^2 - 2fx_c k^2 + 2kQ_c \right], \\ C_4 = \frac{1}{2k(k + hL)} \left[2kh(T_0 - T_L) + 2kQ_c + 2fx_c k^2 + khfL^2 + 4hx_c Q_c \right], \\ D_4 = \frac{1}{2k(k + hL)} \left[2k^2 T_L - k^2 fL^2 + 2LkhT_0 + 2LkQ_c + 2Lfx_c k^2 + 4Lhx_c Q_c \right]. \end{cases}$$

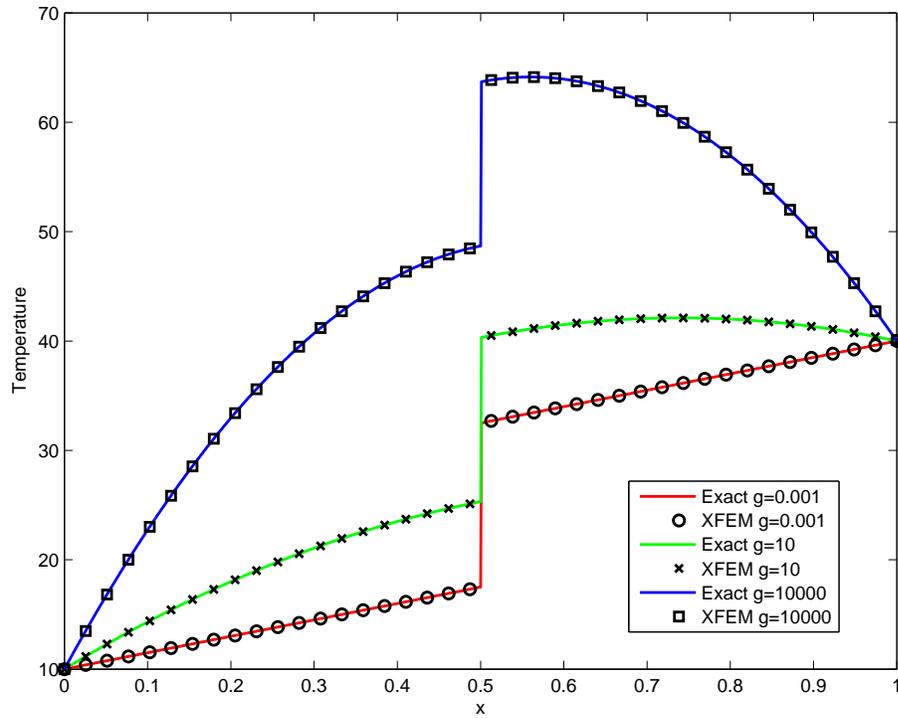


FIGURE 4.6 – Exact and computed solutions of temperature field for $h = 1$

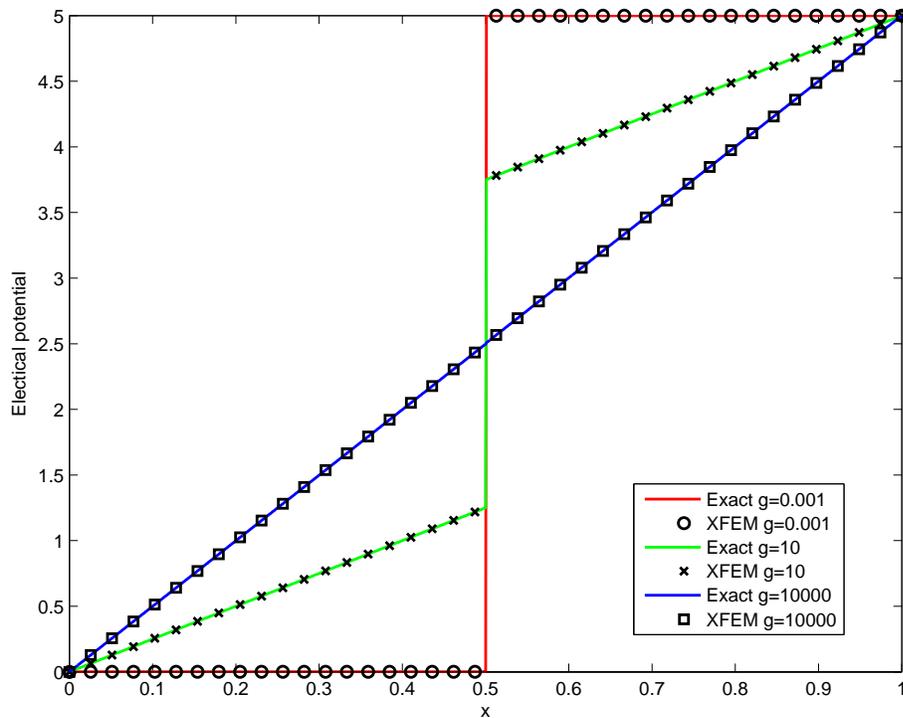


FIGURE 4.7 – Exact and computed solutions of voltage field for $h = 1$

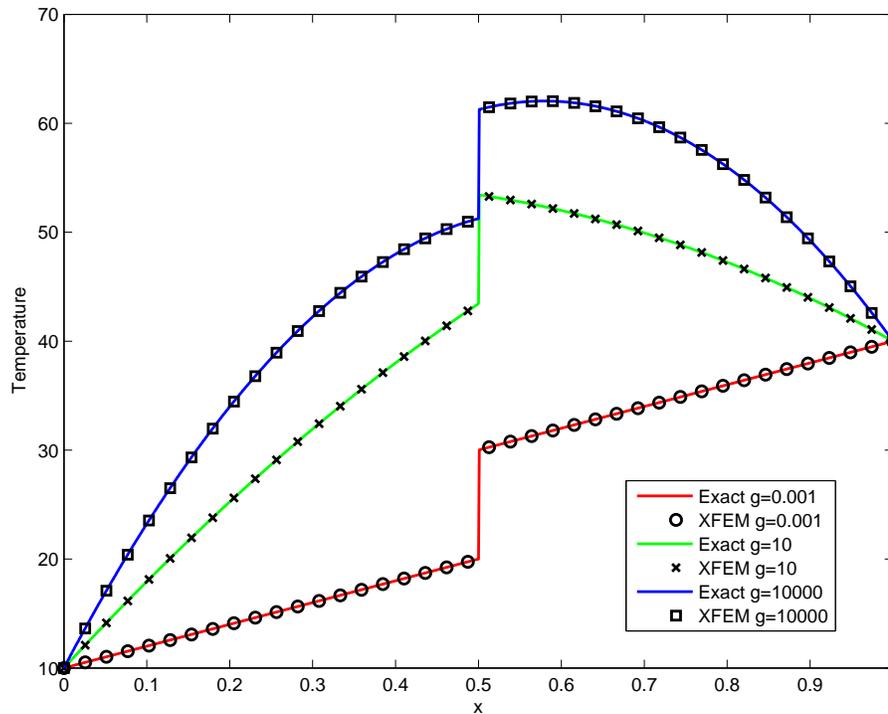


FIGURE 4.8 – Exact and computed solutions of temperature field for $h = 1$

The analytical solution of the voltage field is the same as defined in Equations 4.44 and 4.45 since it is the same governing equation and boundary conditions as the previous case.

The Figure 4.8 shows the exact and computed XFEM temperature distributions in x direction. It is clear that we can accurately model the heat generation in the crack's lips with XFEM. We can see that the heat flux in each side of the crack is not the same due the presence of the heat generation term at the interface. Notice in the curve for $g = 10$ the temperature distribution near the crack's lips is more important than the previous case. That shows how much it is important to take into account the interface resistance to have a realistic estimation of the temperature, especially for problems with high voltage gradients.

4.7.2 Square plate with a centre crack

Consider square plate of a size $2L \times 2L$ with a centre crack of length $2a$, as shown in Figure 4.9. The dimensions of the problem are $L = 1$ and $a = 0.3$. The material

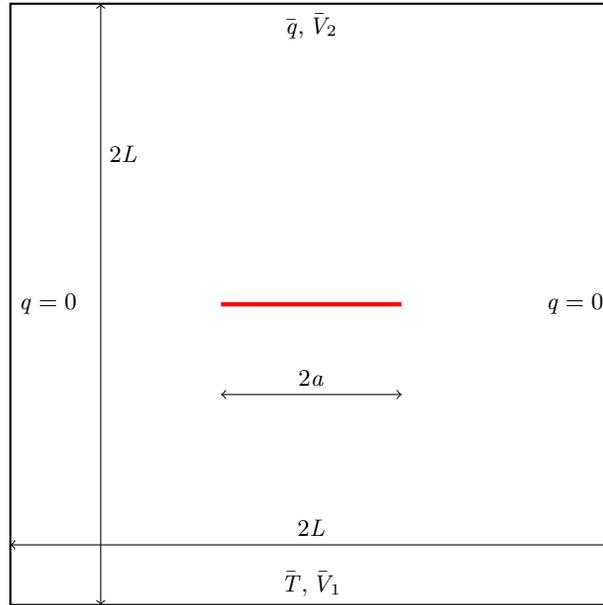


FIGURE 4.9 – Square plate with a centre crack

properties are defined using a linear function of T as follows :

$$k(T) = 1 + 0.001 \times T,$$

$$\sigma(T) = 0.02 + 0.0001 \times T,$$

$$c(T) = 1 + 0.001 \times T,$$

$$h = 0.5, \quad g = 0.01.$$

The Dirichlet boundary conditions are $\bar{T} = 10$ and $\bar{V}_1 = 0$ on the bottom line, and $\bar{V}_2 = 100$ on the top line of the square. A heat flux $\bar{q} = 50$ is applied on the top line of the square and the other sides of the plate are perfectly insulated. The domain is discretized with structured mesh of quadrilateral elements. The characteristic length is $l = 0.039$ (2601 elements) and the radius of the enriched domain by the asymptotic function is settled to 0.1. On the other hand, we used ANSYS software capabilities for modelling the same thermoelectrical problem. For ANSYS simulation, the problem was discretized using classical finite elements method with very fine mesh of 34742 quadrilateral elements (PLANE223) with refinement at crack's tip, and contact element (CONTA172) with closed gap for modelling the thermoelectrical exchanges between crack's lips. The same time step and simulation time were used for both simulations: $\Delta t = 0.5, t = 25s$. A comparison of temperature and voltage fields obtained by XFEM-UL and ANSYS softwares, are illustrated in Figures 4.10 and 4.11. The solutions are very close. The heat flux and current lines pass through the crack

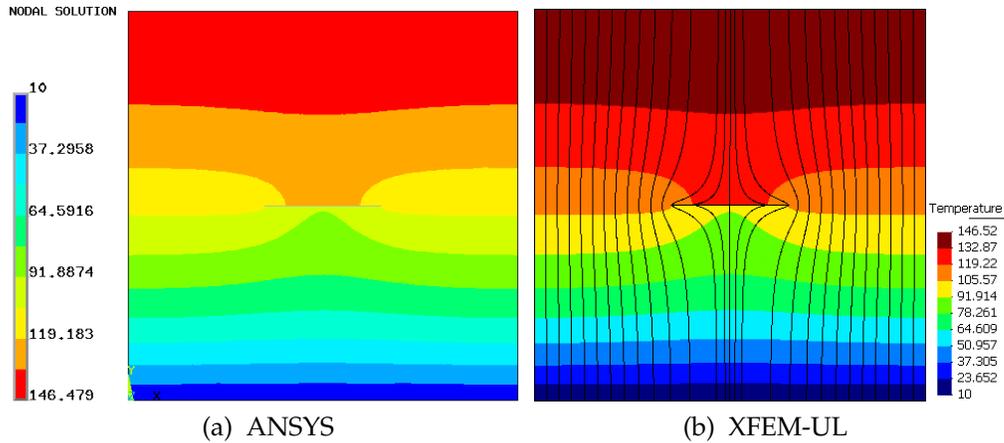


FIGURE 4.10 – Temperature field and flux lines

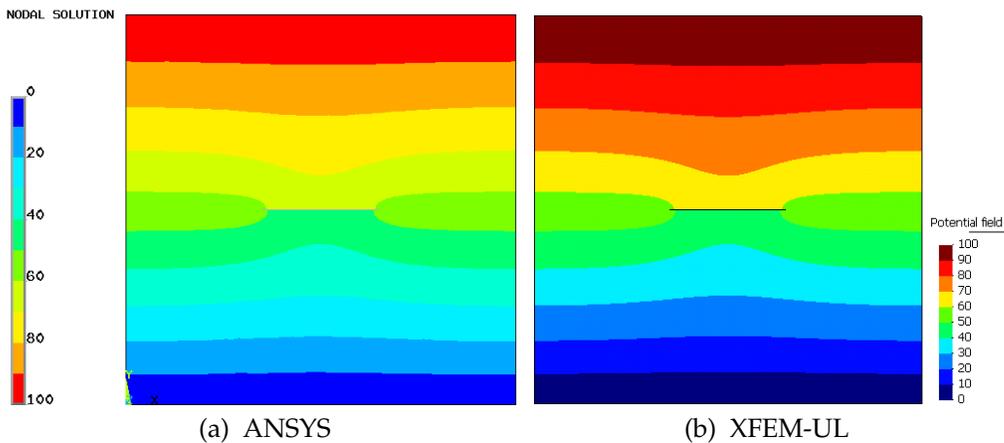


FIGURE 4.11 – Electrical field

because it exists a thermoelectrical exchange condition between the crack's lips. A comparison of the temperature field at crack's lips, is shown in Figure 4.12, where the temperature field was plotted on path $y = 1.03$ for two mesh densities for XFEM. No difference is observable allowing the conclusion that the proposed approach in this paper is valid.

4.7.3 An electrolysis cell cathode with edge crack

In this example, a real size cathode of an electrolysis cell with a crack of length a is considered (Figure 4.13). The geometrical dimensions are given in table 4.2.

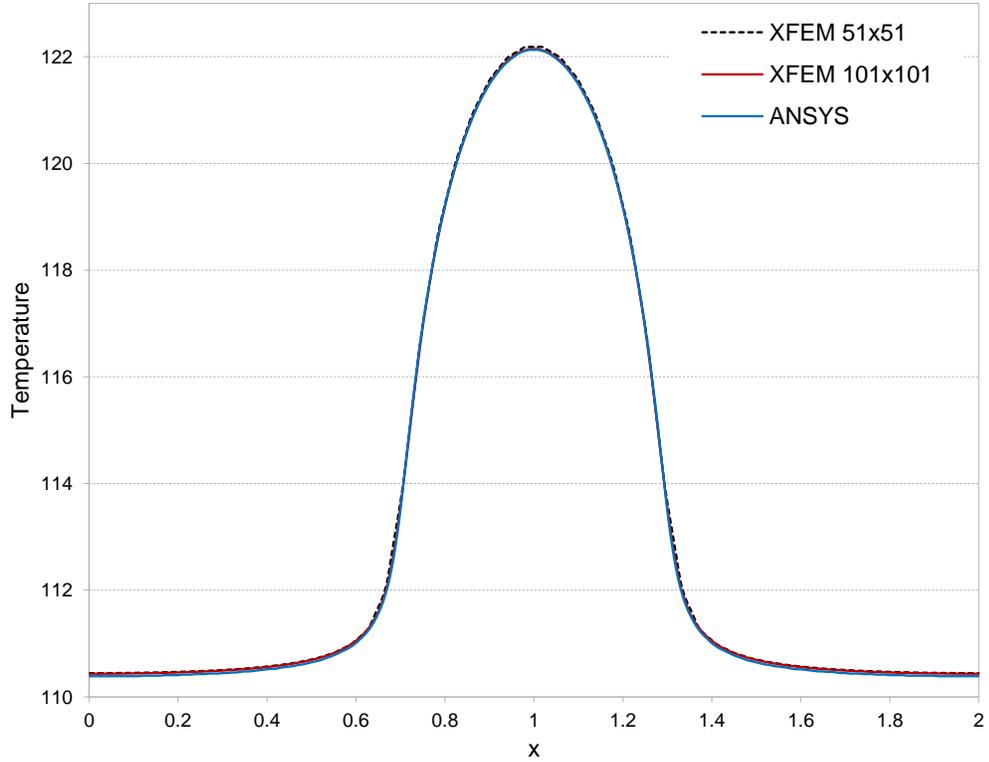


FIGURE 4.12 – Comparison of temperature field on path $y = 1.03$

TABLE 4.2 – Geometrical dimension

a	b	c	d	e	L	W
0.2	0.085	0.186	0.245	0.0965	0.65	0.49

During the electrolysis cell operation, the cathode is subjected to an electrical current on the bottom (red lines) $\bar{j} = 12321$ and a temperature $\bar{T}_1 = 800$ (blue lines). On the top line the Dirichlet conditions $\bar{T}_2 = 950, \bar{V} = 0$ are imposed as shown in Figure 4.13 The material properties are defined by a linear function of T as follows, including the exchange parameters at the crack's lips:

$$\begin{aligned}
 k(T) &= 3 + 0.0015 \times T, \\
 \sigma(T) &= 2.E4 + 9 \times T, \\
 c(T) &= 900 + 1.3 \times T, \\
 h(T_m) &= 0.002 \times T_m, \\
 g(T_m) &= 10 \times T_m.
 \end{aligned}$$

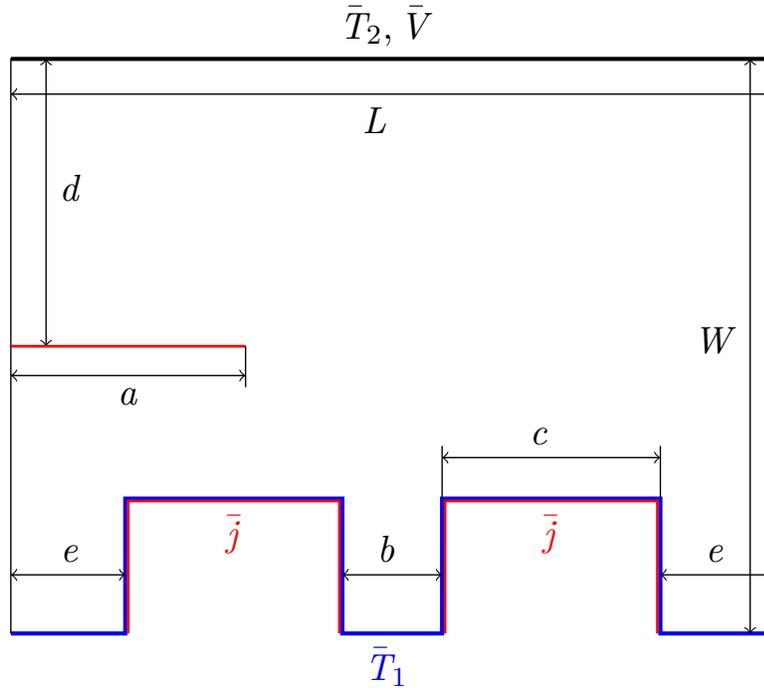


FIGURE 4.13 – An electrolysis cell cathode with edge crack

For XFEM problem, a mesh of 7678 structured quadrilateral element is used where $h = 0.006$, see Figure 4.14. In the other hand, we used a 18078 quadrilateral element for the finite element problem with a refinement mesh at crack faces and crack tip.

The XFEM temperature and voltage fields for a stationary problem are compared to the numerical results obtained from FESh++ software on Figures 4.15 and 4.16. No notable difference can be observed on those thermal and electric fields obtained from FEM and XFEM. A strong disturbance of those fields can be observed due the presence of the crack. A comparison between the two solutions are shown in Figure 4.17 on path $y = 0.246$ for the thermal field along the path of the crack. Here again, we obtained a good agreement between the FEM and XFEM analysis.

4.8 Conclusions

The eXtended Finite Elements Method was applied to the transient nonlinear thermoelectric problems with crack. The finite elements approximation of thermal and electrical field was enriched by a step function to model the discontinuity of primary field in elements completely cut by the crack, and an asymptotic enrichment in crack

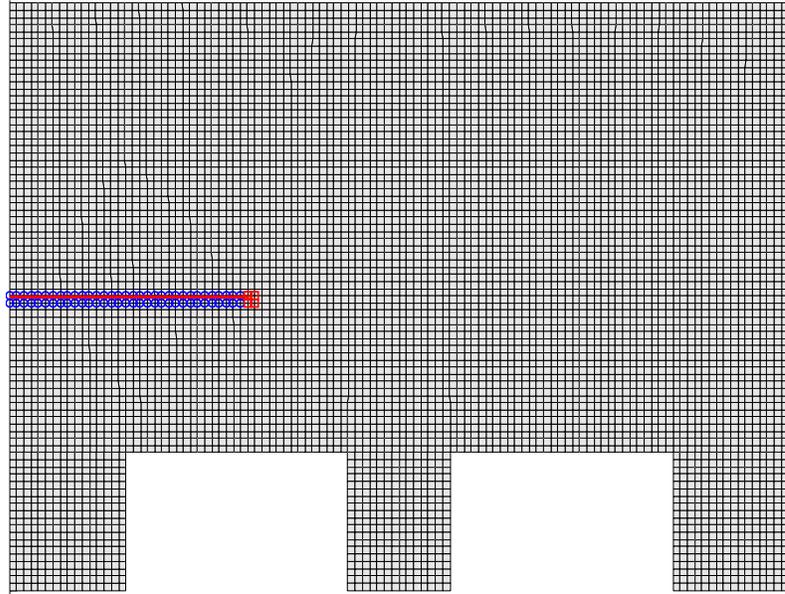


FIGURE 4.14 – Finite element mesh for the cathode problem, nodes with circles and rectangles are enriched by step and asymptotic functions, respectively

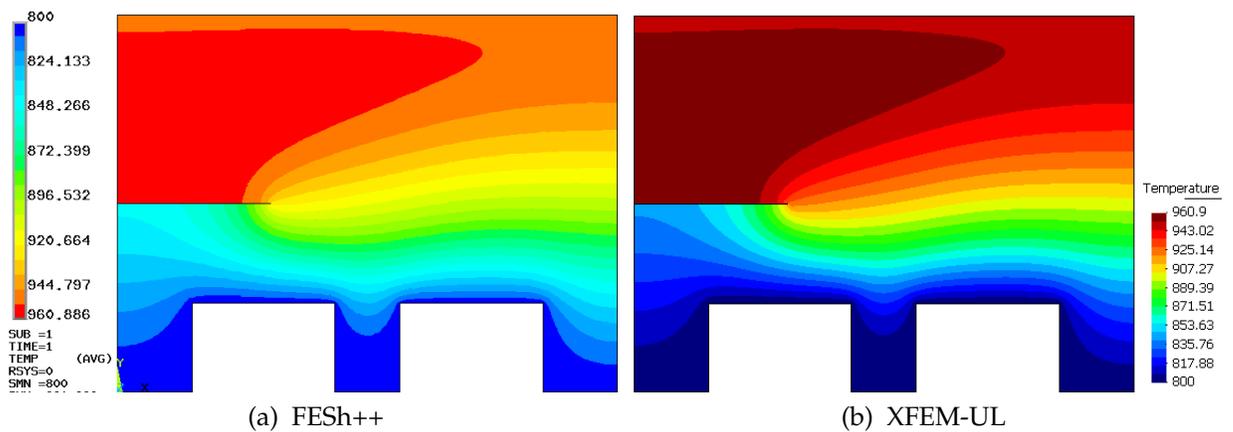


FIGURE 4.15 – Temperature field in the cathode

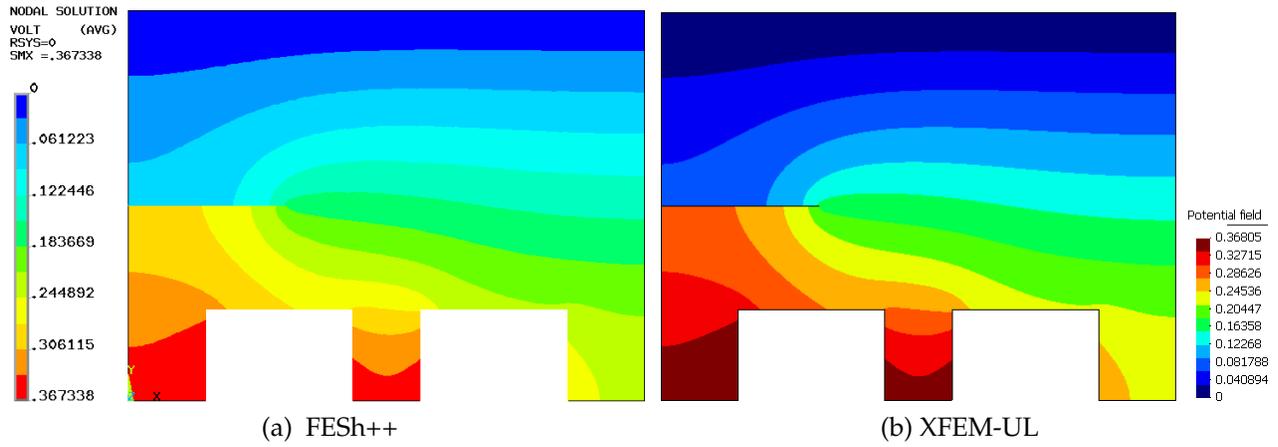


FIGURE 4.16 – Electrical field in the cathode

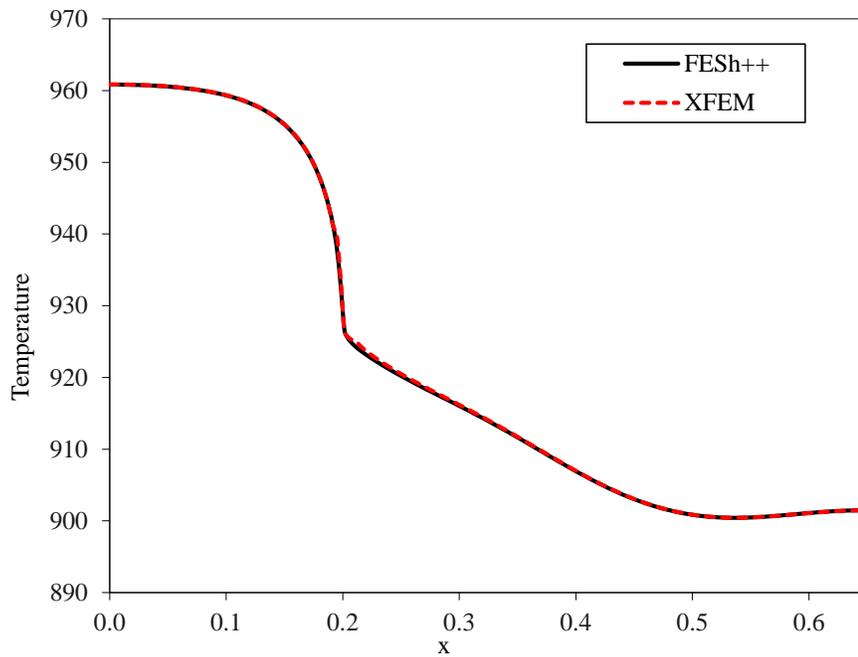


FIGURE 4.17 – Comparison of temperature field on path $y = 0.246$

tip to be able to represent the heat flux and electrical current at the singularities, respectively. Instead of using adiabatic condition or imposed temperature (or voltage) on the two lips, a physical condition was applied. Thermal and electrical exchanges between crack's lips, which depend on temperature jump and electrical jump, respectively, were considered, inducing a strong coupling between these two problems. The heat generation at the crack's lips due to the interface resistance by Joule effect along with the Joule effect inside the medium were also considered. Thus, the discretization of the weak forms using XFEM, generates a fully coupled nonlinear problem who can be solved using Newton-Raphson method.

XFEM results were compared to simple analytical solution and numerical examples were simulated using FEM with a very refined mesh around the crack and XFEM with a coarser mesh but with special enrichment to taking into account the discontinuities at the crack's lips.

We showed that the proposed model converges to the analytical solution for simple cases. The numerical results shown that the nonlinear thermoelectrical problem, including a strong discontinuity, can be solved using XFEM. Also, the use of constitutive laws for the management of the energy exchange between the lips of the crack has a physical meaning and the parameters of this law could be identified in a laboratory. The next step consists to couple the crack growth from the mechanical problem to the thermoelectric problem with strong coupling at the crack's lips.

Acknowledgments

The authors gratefully acknowledge the financial support provided by Alcoa Inc. and the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada. A part of the research presented in this paper was financed by the Fonds Québécois de Recherche - Nature et Technologies by the intermediary of the Aluminium Research Centre REGAL.

We also thank Partice Goulet, from the NSERC/Alcoa Industrial Research Chair, for his help for the simulation with ANSYS and FESh++.

Appendix

The residual elementary vectors for thermal and electrical problems R_T^e and R_V^e , respectively, define as follows where $\{\dot{\mathbf{T}}_e\} = \frac{\{\mathbf{T}_e\} - \{\mathbf{T}_e\}_t}{\Delta t}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_T^e &= \int_{\Omega_e} \{\mathbf{N}_e\} \rho c(T) \langle \mathbf{N}_e \rangle \{\dot{\mathbf{T}}_e\} d\Omega + \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}_e]^T \cdot k(T) [\mathbf{B}_e] \{\mathbf{T}_e\} d\Omega \\
&+ \int_{\Gamma_c^+} \{[\mathbf{N}_e]\} h(T_m) \langle [\mathbf{N}_e] \rangle \{\mathbf{T}_e\} d\Gamma + \int_{\Gamma_q^e} \{\mathbf{N}_e\} \bar{q} d\Gamma \\
&- \int_{\Gamma_c^+} \{\bar{\mathbf{N}}_e\} (\langle \mathbf{V}_e \rangle \{[\mathbf{N}_e]\} g(T_m) \langle [\mathbf{N}_e] \rangle \{\mathbf{V}_e\}) d\Gamma \\
&- \int_{\Omega_e} \{\mathbf{N}_e\} (\langle \mathbf{V}_e \rangle [\mathbf{B}_e]^T \sigma(T) [\mathbf{B}_e] \{\mathbf{V}_e\}) d\Gamma, \\
\mathbf{R}_V^e &= \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}_e]^T \cdot \sigma(T) [\mathbf{B}_e] \{\mathbf{V}_e\} d\Omega + \int_{\Gamma_c^+} \{[\mathbf{N}_e]\} g(T_m) \langle [\mathbf{N}_e] \rangle d\Gamma \{\mathbf{V}_e\} - \int_{\Gamma_j^e} \{\mathbf{N}_e\} \bar{j} d\Gamma
\end{aligned}$$

The sub-matrices of the elementary tangent matrix \mathbf{K}^e for an fully enriched element for $\alpha = 1$ are given as follows:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^{TT} &= -\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_e} \{\mathbf{N}_e\} \rho c \langle \mathbf{N}_e \rangle d\Omega - \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}_e]^T \cdot k [\mathbf{B}_e] d\Omega - \int_{\Gamma_c^+} \{[\mathbf{N}_e]\} h(T_m) \langle [\mathbf{N}_e] \rangle d\Gamma \\
&- \int_{\Omega_e} \{\mathbf{N}_e\} \rho \frac{\partial c}{\partial T} \langle \mathbf{N}_e \rangle \{\dot{\mathbf{T}}_e\} \langle \mathbf{N}_e \rangle d\Omega - \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}_e]^T \cdot \frac{\partial k}{\partial T} \cdot [\mathbf{B}_e] \{\mathbf{T}_e\} \langle \mathbf{N}_e \rangle d\Omega \\
&- \int_{\Gamma_c^+} \{[\mathbf{N}_e]\} \frac{\partial h}{\partial T} \langle [\mathbf{N}_e] \rangle \{\mathbf{T}_e\} \langle \bar{\mathbf{N}}_e \rangle d\Gamma + \int_{\Omega_e} \{\mathbf{N}_e\} (\langle \mathbf{V}_e \rangle [\mathbf{B}_e]^T \frac{\partial \sigma}{\partial T} [\mathbf{B}_e] \{\mathbf{V}_e\}) \langle \mathbf{N}_e \rangle d\Gamma \\
&+ \int_{\Gamma_c^+} \{\bar{\mathbf{N}}_e\} (\langle \mathbf{V}_e \rangle \{[\mathbf{N}_e]\} \frac{\partial g}{\partial T} \langle [\mathbf{N}_e] \rangle \{\mathbf{V}_e\}) \langle \bar{\mathbf{N}}_e \rangle d\Gamma \\
\mathbf{K}^{TV} &= \int_{\Omega_e} 2 \{\mathbf{N}_e\} (\langle \mathbf{V}_e \rangle [\mathbf{B}_e]^T) \sigma [\mathbf{B}_e] d\Gamma + \int_{\Gamma_c^+} 2 \{\bar{\mathbf{N}}_e\} (\langle \mathbf{V}_e \rangle \{[\mathbf{N}_e]\}) g \langle [\mathbf{N}_e] \rangle d\Gamma \\
\mathbf{K}^{VT} &= - \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}_e]^T \frac{\partial \sigma}{\partial T} [\mathbf{B}_e] \{\mathbf{V}_e\} \langle \mathbf{N}_e \rangle d\Omega - \int_{\Gamma_c^+} \{[\mathbf{N}_e]\} \frac{\partial g}{\partial T} (\langle [\mathbf{N}_e] \rangle \{\mathbf{V}_e\}) \langle \bar{\mathbf{N}}_e \rangle d\Gamma \\
\mathbf{K}^{VV} &= - \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}_e]^T \sigma [\mathbf{B}_e] d\Omega - \int_{\Gamma_c^+} \{[\mathbf{N}_e]\} g \langle [\mathbf{N}_e] \rangle d\Gamma
\end{aligned}$$

Conclusion

Conclusions

L'objectif principal de cette thèse était le développement d'un modèle numérique pour la simulation des problèmes non linéaires thermoélectriques avec fissures. On s'est donc intéressé à l'approche XFEM, qui est une alternative permettant de ne pas mailler les discontinuités. On a d'une part développé une formulation XFEM pour les problèmes non linéaires thermoélectriques avec fissures et d'autre part la modélisation des échanges thermoélectriques qui se passent entre les lèvres de la fissure.

Le champ d'application de l'approche XFEM a ainsi été élargi à la modélisation de problèmes thermoélectriques avec fissures, avec la prise en compte des échanges thermoélectriques entre les lèvres de la fissure, la non-linéarité du problème et le couplage fort entre le problème thermique et électrique.

Après avoir fait une introduction dans le Chapitre sur l'importance d'étudier les problèmes thermoélectriques avec fissure, essentiellement pour simuler le problème de fissuration des cathodes d'une cuve d'électrolyse, nous avons présenté les motivations et les avantages de la méthode XFEM pour traiter ce genre problème.

Une revue de la littérature sur la méthodes des éléments finis enrichis et la méthode XFEM est présentée dans le Chapitre 1. La méthode XFEM semble être très efficace pour la simulation des discontinuités sans avoir la contrainte de la conformité du maillage éléments finis avec la géométrie de la discontinuité. Les travaux antérieurs sur la modélisation des problèmes thermiques et thermoélastiques avec fissures par la méthode XFEM ont été discutés en détail. Après avoir présenté les différents types de conditions aux limites considérées dans la littérature, il s'avère qu'elles ne sont

pas applicables aux problèmes de fissuration des cathodes des cuve d'électrolyse d'aluminium. Une nouvelle approche qui correspond mieux à ce genre de problème est présentée.

Ensuite, une introduction à la méthode XFEM pour la modélisation des discontinuités fortes et faibles est présentée dans le Chapitre 2. Quelques exemples unidimensionnels ont été étudiés pour expliquer les principes de la méthode. La flexibilité qu'offre la méthode XFEM a été exploitée pour prendre en compte la loi d'échange thermique entre les lèvres de la fissure, cette loi a été validée avec quelques exemples numériques. On présente aussi quelques notions fondamentales de la méthode *Level set* et de son utilisation pour évaluer les fonctions d'enrichissement. On termine le chapitre par une démonstration de l'équivalence entre la méthode XFEM de Hansbo et Hansbo et la méthode XFEM standard, et l'explication du problème engendré par les éléments de transition.

L'application de la méthode des éléments finis étendue pour la simulation des problèmes thermiques transitoires avec fissures est présentée dans le Chapitre 3. Une loi d'échange thermique permettant de définir le flux de chaleur aux lèvres de la fissure par une relation qui dépend du saut de température et d'un coefficient d'échange thermique est introduite. La formulation XFEM du modèle a été modifiée afin de prendre en compte les échanges thermiques qui se passe entre les lèvres de la fissure. Nous avons généré un maillage de contour de la fissure afin d'évaluer le terme d'échange thermique. Le nouveau modèle a été validé en comparant les résultats obtenus avec celles dans la littérature, et avec le logiciel de calcul éléments finis Abaqus.

Le Chapitre 4 est une extension et une généralisation du modèle présenté dans le chapitre précédent pour traiter les problèmes non linéaires thermoélectriques avec fissures. Une loi d'échange électrique est considérée, qui dépend du saut du voltage entre les lèvres de la fissure et un coefficient d'échange électrique, d'une façon similaire à la loi d'échange thermique. Les coefficients d'échange thermiques et électriques sont définis par des équations linéaires en fonction de la température moyenne entre les deux lèvres de la fissure. La génération de la chaleur dans le domaine et la génération de la chaleur sur le contour de la fissure sont aussi considérées. Après une mise en équation des phénomènes physiques, la discrétisation en éléments finis des équations aux dérivées partielles est présentée. Le problème mo-

déliné est non linéaire et fortement couplé. Il conduit à une matrice tangente non symétrique. Pour ce problème non linéaire, un algorithme de Newton-Raphson est utilisé pour la résolution. On termine le chapitre par une validation du modèle proposé avec le logiciel de calcul éléments finis FESh++.

Durant cette thèse, un programme Matlab a été développé pour la simulation de problèmes non linéaires thermoélectriques 2D par la méthode XFEM. Le programme est interfacé avec le logiciel de pré-postprocesseur GID, ce dernier permet de créer la géométrie, imposer les conditions aux limites du problème et la visualisation des résultats. Ce programme permet de modéliser :

- Les problèmes thermiques stationnaires et transitoires avec fissure
- Les problèmes électriques stationnaires avec fissure.
- Les problèmes thermoélectriques stationnaires et transitoires avec fissure.
- Les problèmes thermoélectriques avec génération de la chaleur par effet Joule dans le domaine.
- Les échanges thermiques et électriques entre les lèvres de la fissure, où les coefficients d'échange thermiques et électrique peuvent dépendre de la température moyenne entre les lèvres de la fissure.
- La génération de la chaleur au contour de la fissure due à la résistance d'interface.
- La non-linéarité due à la dépendance à la température des propriétés physiques du matériau, comme la conductivité thermique, la conductivité électrique et la capacité calorifique.

Dans les travaux réalisés durant cette thèse, la résolution des problèmes non-linéaires thermoélectriques avec fissure par la méthode des éléments finis étendue a été développé. De plus, une nouvelle approche plus physique pour la gestion des échanges thermiques et électrique dans le contexte de la méthode des éléments finis étendue a été proposé. Les différents exemples étudiés dans les chapitres précédents démontrent et valident la modèle numérique proposé, en comparaison avec la solution analytique ou par des simulation par éléments finis avec un maillage raffiné. Enfin, on présente dans la section suivante les perspectives aux travaux réalisés dans cette thèse.

Perspectives et pistes de recherche

Les problèmes thermoélectromécaniques avec fissures

La majorité des travaux sur la méthode XFEM ont traité le problème de rupture et la propagation des fissures. Alors, une suite logique de ce travail est de développer un modèle thermoélectromécanique pour la simulation de la propagation des fissures par la méthode des éléments finis étendus. Le couplage entre le problème thermique et mécanique est définie comme suit :

$$\begin{aligned}\epsilon &= \nabla_s u \\ \epsilon_T &= \alpha(T - T_0)I \\ \sigma &= \mathbf{C} : (\epsilon - \epsilon_T)\end{aligned}$$

où ϵ est le tenseur de déformation, u est le déplacement, σ est le tenseur de contrainte, ϵ_T est l'expansion thermique, T est la température, T_0 est la température de référence, α le coefficient d'expansion thermique du matériau, I est le tenseur identité de deuxième ordre, ∇_s est l'opérateur gradient symétrique et C est le tenseur de Hooke isotrope d'ordre 4.

Plusieurs travaux dans la littérature ont étudié la modélisation de la propagation des fissures en élasticité linéaire, par exemple Moës et al. (1999), Sukumar et al. (2000), Stolarska et al. (2001), Gravouil et al. (2002) et Moës et al. (2002). Cependant, il n'y a que quelques travaux qui traitent les problèmes thermomécaniques avec fissures (Duflot (2008), Zamani et al. (2010) et Zamani and Eslami (2010)). L'extension vers un modèle thermoélectromécanique est très important, surtout pour le problème de fissuration des cathodes dans une cuve d'électrolyse. En effet, la température du bloc cathodique doit être suffisamment haute pour minimiser les grands gradients thermiques, qui causent des fissures dans la cathode (Richard et al. (2006)). La simulation de la propagation des fissures dans la cathode est d'une grande importance pour prédire la durée de vie des cathodes lors de son opération (Zolochovsky et al. (2003)).

D'autre part, quand une plaque conductrice fissurée est soumise à un grand courant électrique, la forte concentration de densité de courant à la pointe de la fissure peut induire une zone locale de température très élevée par effet Joule, qui peut induire des contraintes locales thermoélastiques de compression et une zone de fusion à la pointe de la fissure pour arrêter la propagation de la fissure (Liu (2008) et Liu

(2011)). Il serait intéressant de développer un modèle pour la prise en compte de ce phénomène dans le cadre de XFEM.

Extension aux problèmes 3D

La modélisation 3D des fissures par la méthode XFEM a été étudié au début par Sukumar et al. (2000). Par après, un couplage avec la méthode *Level set* pour la modélisation des fissures non planaires a été réalisé dans Gravouil et al. (2002) et Moës et al. (2002). La grande difficulté pour le traitement 3D réside dans le calcul des fonctions *Level set*, ses mise-à-jours pour suivre la géométrie de la fissure et l'actualisation de ses fonctions, comme il est illustré dans Duflot (2007).

Un autre point primordial, pour la modélisation robuste des fissures en 3D, est l'évaluation des intégrales de la forme variationnelle dans les éléments traversés par la fissure. Des travaux récents ont proposé des techniques intéressantes pour surmonter ces difficultés, comme dans Areias and Belytschko (2005), Bordas et al. (2008), Baydoun and Fries (2012) et Minnebo (2012).

Modélisation des matériaux thermoélectriques avec fissures

Les matériaux thermoélectriques couplent les énergies électriques et thermiques au moyen de trois effets séparés de transport : Seebeck, Peltier et Thomson. Ils sont utilisés comme des pompes à chaleur (chauffage et refroidissement) et des générateurs (Riffat and Ma (2003)). Ces effets ajoutent une non-linéarité et un couplage supplémentaire pour le problème thermoélectrique en question. Le problème électrique devient un problème transitoire, ce qui conduit un couplage très forts des deux problèmes, thermique et électrique.

Dans Palma et al. (2011), les auteurs présentent une formulation 3D, dynamique et non linéaire pour la simulation des matériaux thermoélectriques, avec prise en compte de tout les phénomènes de transport d'énergie. L'extension du modèle actuel développé lors cette thèse, pour le traitement de ce type de matériaux sera fort intéressant.

Calcul des facteurs d'intensité de contrainte

Les facteurs d'intensité de contrainte FIC sont extraits à partir de la solution XFEM avec l'aide de l'intégrale J , introduite par Rice (1968), pour les problèmes thermiques par Wilson and Yu (1979) et les problèmes électriques par Yagawa and Horie (1982). Le calcul des FIC dans XFEM est proposé dès les premières publications en élasticité linéaire (Moës et al. (1999)). Une autre formulation de le calcul des FIC pour les problèmes thermoélastiques est proposé par Duflo (2008) à partir de la solution XFEM, et pour les problèmes de fracture des matériaux piézoélectriques par Béchet et al. (2009) et Nguyen-Vinh et al. (2012).

Le calcul des facteur d'intensité de contrainte est important, d'un côté pour pouvoir comparer la qualité de la solution au voisinage de la pointe de fissure avec la solution analytique, et d'un autre côté pour déterminer les paramètres qui régissent la propagation de la fissure. L'implémentation du calcul des facteurs d'intensité de contrainte, les facteurs d'intensités thermiques et les facteurs d'intensité électriques est un point clé pour la simulation robuste de la propagation des fissures pour les problèmes thermoélectromécaniques.

Annexe A

Code Matlab 1D pour résoudre l'exemple de la section 2.3 par la méthode des éléments finis classiques et enrichies

Dans la Section A.1, un programme MATLAB pour la résolution par la méthode des éléments finis classique de l'exemple présenté dans la Section 2.3 . Ensuite dans la Section A.2, un programme Matlab par la méthode des éléments finis enrichies par la partition de l'unité est présenté. Enfin, dans la Section A.3 l'ensemble des autres fonctions du programme sont regroupées dans le dossier *Routines1D*.

A.1 La méthode des éléments finis standard : FEM1d.m

```
1 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Université Laval
2 % Programme FEM 1D traite l'exemple de la section 3.3.6
3
4 clc; clear all; close all;
5 addpath Routines1D
6
7 nQ = 12; % Points d'integration de Gauss ( 2 a 11 possible).
8
9 %% Definition des parametres
10 L      = 1. ; % longueur de la barre
11 E      = 1. ; % module de Young
```

```

12 A      = 1. ; % section
13 T      = -2 ; % force
14 k      = 10 ; % module de l'elasticite du ressort
15 alpha  = L*0.01; % constante alpha
16
17 %% Definition du maillage
18 nn      = 20;
19 x      = linspace(0, L, nn);
20 nnt     = length(x); % nombre des noeuds
21 kconec  = [ [1:1:nnt-1]', [2:1:nnt]' ]; % connctivite
22 nelt    = nnt-1; % nombre des elements
23
24 % Assemblage
25 [vkg, vfg, FonctionFormData ] = Assemblage(nnt, kconec, x, nQ, E, A);
26
27 % Conditions au limites : Neuman
28 vkg(1,1) = vkg(1,1) + k;
29 vfg(nnt) = vfg(nnt) + T;
30
31 % Resolution
32 vsol = vkg\vfg;
33
34 % Solution exact
35 y     = 0:0.001:1;
36 u     = solution_exacte(y) ;
37
38 % tracer de la solution
39 plotSolution(x, vsol, y, u)
40
41 % Erreur L2
42 [L2Norm] = L2NormFEM(nelt, kconec, FonctionFormData, vsol)
43 %plotFonctionFormFEM

```

A.2 La méthode des éléments finis enrichies :

PUM1d.m

```

1 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval
2 % Programme PUFEM 1D traite l'exemple de la section 3.3.7
3
4 clc; clear all; close all;
5 addpath Routines1D

```

```

6
7 nQ = 12; % Points d'integration de Gauss ( 2 a 11 possible).
8
9 %% Definition des parametres
10 L      = 1. ; % longueur de la barre
11 E      = 1. ; % module de Young
12 A      = 1. ; % section
13 T      = -2 ; % force
14 k      = 10 ; % module de l'elasticite du ressort
15 alpha  = L*0.01; % constante alpha
16
17 %% Definition du maillage
18 nn     = 20;
19 x      = linspace(0, L, nn);
20 nnt    = length(x); % nombre des noeuds
21 kconec = [ [1:1:nnt-1]', [2:1:nnt]' ]; % connctivite
22 nelt   = nnt-1; % nombre des elements
23
24 %% Selection des noeuds enrichi
25 [DOF, NODES] = noeudEnrichi( x , kconec, nelt, nnt);
26
27 % Assemblage
28 [vkg, vfg, FonctionFormData ] = AssemblagePUM(DOF, NODES, nnt, ...
        kconec, x, nQ, E, A);
29
30 % Conditions au limites : Neuman
31 vkg(1,1) = vkg(1,1) + k;
32 vfg(nnt) = vfg(nnt) + T;
33
34 % Resolution
35 vsol = vkg\vfg;
36
37 % Solution exact
38 y = 0:0.001:1;
39 u = solution_exacte(y) ;
40 uh = solution_PUM(y, x, nelt, NODES, kconec, vsol);
41
42 % tracer de la solution
43 plotSolution(y, uh, y, u)
44
45 % Erreur L2
46 [L2Norm] = L2NormPUM(nelt, kconec, FonctionFormData, vsol, NODES)
47 %plotFonctionFormFEM

```

```
48 %plotFonctionFormPUM(10, kconec, x, NODES)
```

A.3 Routines1D

A.3.1 Assemblage.m

```
1 function [vkg, vfg, FonctionFormData ] = Assemblage(nnt, kconec, ...
    x, nQ, E, A)
2 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval
3 % Assemblage des matrices et des vecteurs elementaires
4
5 nelt = length(kconec(:,1));
6
7 vkg = zeros(nnt,nnt); % iniatialisat[i]on de K globale
8 vfg = zeros(nnt,1); % iniatialisat[i]on du F global
9 % Boucle sur les elements
10 for ie=1:nelt
11
12     conec = kconec(ie,:);
13     vcore = x(conec);
14     [xIntRef, wIntRef] = IntPoints1DGauss(nQ);
15     [N, dNdx, xInt, wInt] = FonctionsForme(vcore, xIntRef, ...
        wIntRef, nQ) ;
16
17     % Calcul de Ke et fe
18     [vke, vfe] = el_ke_fe(N, dNdx, xInt,wInt, nQ, E, A);
19
20     % Assemblage
21     vkg(conec,conec) = vkg(conec,conec) + vke;
22     vfg(conec) = vfg(conec) + vfe;
23
24     % Data pour calculer l'erreur
25     FonctionFormData(ie).xInt = xInt;
26     FonctionFormData(ie).wInt = wInt;
27     FonctionFormData(ie).nQ = nQ;
28     FonctionFormData(ie).N = N;
29 end
```

A.3.2 AssemblagePUM.m

```

1 function [vkg, vfg, FonctionFormData ] = AssemblagePUM(DOF, NODES, ...
    nnt, kconec, x, nQ, E, A)
2 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval
3 % Assemblage des matrices et vecteurs elementaires enrichies
4
5 nelt = length(kconec(:,1));
6
7 vkg      = zeros(DOF, DOF); % iniatialisation de K globale
8 vfg      = zeros(DOF,1);   % iniatialisation du F global
9 % Boucle sur les elements
10 for ie=1:nelt
11
12     conec          = kconec (ie,:);
13     vcore          = x(conec);
14     [xIntRef, wIntRef] = IntPoints1DGauss(nQ);
15     NEN            = NODES (conec(1),2) + NODES (conec(2),2) ;
16
17     % Calcul de Ke et fe
18     if NEN == 2
19         [N, dNdx, M, dMdx, xInt, wInt, conec] = ...
            FonctionsFormeEnrichi(NODES, conec,vcore, xIntRef, ...
            wIntRef, nQ) ;
20         [vke, vfe]          = el_ke_fe_Enrichi(N, dNdx, M, ...
            dMdx, xInt, wInt, nQ, E, A);
21         FonctionFormData(ie).M      = M;
22     else
23         [N, dNdx, xInt, wInt] = FonctionsForme( vcore, xIntRef, ...
            wIntRef, nQ) ;
24         [vke, vfe]          = el_ke_fe(N, dNdx, xInt,wInt, nQ, ...
            E, A);
25     end
26
27     % Assemblage
28     vkg(conec,conec) = vkg(conec,conec) + vke;
29     vfg(conec)      = vfg(conec)      + vfe;
30
31     % Data pour calculer l'erreur
32     FonctionFormData(ie).xInt = xInt;
33     FonctionFormData(ie).wInt = wInt;
34     FonctionFormData(ie).nQ   = nQ;
35     FonctionFormData(ie).N    = N;
36
37 end

```

A.3.3 el_ke_fe.m

```
1
2 function [vke, vfe] = el_ke_fe(N, dNdx, xInt, wInt, nQ, E, A)
3 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval
4 % vke : Matrice de rigidite elementaire
5 % vfe : Vecteur force elementaire
6
7 vke = zeros(2 , 2);
8 vfe = zeros(2 , 1);
9
10 for i=1:nQ
11     f = force (xInt(i));
12     B = dNdx(:,i)';
13     vke = vke + wInt(i) * E * A * ( B' * B ) ;
14     vfe = vfe + wInt(i) * N(:,i) * f ;
15 end
```

A.3.4 el_ke_fe_Enrichi.m

```
1 function [vke, vfe] = el_ke_fe_Enrichi(N, dNdx, M, dMdx, xInt, ...
2     wInt, nQ, E, A)
3 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval
4 % vke : Matrice de rigidite elementaire enrichie
5 % vfe : Vecteur force elementaire enrichi
6
7 vke = zeros(4 , 4);
8 vfe = zeros(4 , 1);
9
10 Ne = [N ; M] ;
11 Be = [dNdx ; dMdx] ;
12
13 for i=1:nQ
14     f = force (xInt(i));
15     B = Be(:,i)';
16     vke = vke + wInt(i) * E * A * ( B' * B ) ;
17     vfe = vfe + wInt(i) * Ne(:,i) * f ;
18 end
```

A.3.5 fonctionEnrichie.m

```

1 function [g, dgdx] = fonctionEnrichie(y)
2 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval
3 L = 1;
4 a = L*0.01;
5 for i=1:length(y)
6     x          = y(i) ;
7     g(i)       = exp(-( (x- (L/2)) /a )^2);
8     dgdx(i)    = -(2 /a)*( (x- (L/2)) /a ) * exp(-( (x- (L/2)) ...
9                 /a )^2);
9 end

```

A.3.6 FonctionsForme.m

```

1 function [N, dNdx, xInt, wInt] = FonctionsForme(xElem, xIntRef, ...
2         wIntRef, nQ)
3 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval
4 % Calcul des fonctions de forme standards
5 % nQ : nombre de points d'integration par element
6
7 N      = zeros(2, nQ);
8 dNdx  = zeros(2, nQ);
9
10 xInt  = zeros(1, nQ);
11 wInt  = zeros(1, nQ);
12
13 % Definir N, dNdxsi au point d'integration dans l'element de ...
14     reference
15 N1 = 0.5*(1-xIntRef);
16 N2 = 0.5*(1+xIntRef);
17 dN1dxsi = -0.5 * ones(size(xIntRef));
18 dN2dxsi = +0.5 * ones(size(xIntRef));
19
20 NN      = [ N1 ; N2 ];
21 dNNDxsi = [dN1dxsi; dN2dxsi];
22
23 % Definir N, dNdx au point d'integration dans l'element reel
24 N = NN;
25
26 for i = 1 : nQ

```

```

27     dxdxsi      = xElem*dNNdxsi(:, i);
28     detJ        = dxdxsi;
29     wInt(i)     = wIntRef(i) * detJ;
30     dNdx(:, i) = dNNdxsi(:, i) / detJ;
31 end
32
33 % Transformation des points d'integration de l'element
34 % de reference a l'element de reel
35
36 xInt = xElem * NN;

```

A.3.7 FonctionsFormeEnrichi.m

```

1 function [N, dNdx, M, dMdx, xInt, wInt, conec] = ...
    FonctionsFormeEnrichi(NODES, conec, vcore, xIntRef, wIntRef, nQ)
2 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval
3 % Calcul des fonctions de forme enrichies
4 % nQ : nombre de points d'integration par element
5
6 M      = zeros(2, nQ);
7 dMdx   = zeros(2, nQ);
8
9 [N, dNdx, xInt, wInt] = FonctionsForme(vcore, xIntRef, wIntRef, ...
    nQ) ;
10
11 % calcul des fonction enrichi
12 [g, dgdx] = fonctionEnrichie(xInt);
13
14 % Fonction enrichie shiftee
15 Psi      = zeros(2, nQ);
16 Psi(1,:) = g - NODES(conec(1),4) ;
17 Psi(2,:) = g - NODES (conec(2),4) ;
18
19 % gradient enrichie shifte
20 dPsidx   = zeros(2, nQ);
21 dPsidx(1,:) = dgdx ;
22 dPsidx(2,:) = dgdx ;
23
24 % Definir N, dNdx au point d'integration dans l'element reel N = NN;
25
26 for i = 1 : nQ
27     % Strd. FEM shape fcts. at int. point.

```

```

28     NInt      = N(:, i);
29     NxInt     = dNdx(:, i);
30     PsiInt    = Psi(:, i);
31     PsixInt   = dPsidx(:, i);
32     % Fonction de forme enrichi au point d'integration.
33     for j=1:2
34         M(j, i)      = NInt(j)*PsiInt(j);
35         dMdx(j, i)  = NxInt(j)*PsiInt(j) + NInt(j)*PsixInt(j);
36     end
37     % plot(xxInt(i), PsiMod, 'k*')
38 end
39
40 loc  = NODES(conec,3);
41 conec = [conec loc'];

```

A.3.8 force.m

```

1 function f = force(x)
2 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval
3 L = 1;
4 a = L*0.01;
5 t = exp(-( (x- (L/2)) /a )^2);
6 f = 6*(x) + ( 2/a^2 - ((L-2*x)/a^2)^2) *t ;

```

A.3.9 IntPoints1DGauss.m

```

1 function [xIntRef, wIntRef] = IntPoints1DGauss(nQ)
2
3 % Points de Gauss dans un element reference 1D [-1, 1].
4
5 if nQ == 1
6     pQ = [...
7         0.0000000000000000e+000  2.0000000000000000e+000
8         ];
9 elseif nQ == 2
10    pQ = [...
11        -5.7735026918962573e-001  1.0000000000000000e+000
12        5.7735026918962573e-001  1.0000000000000000e+000
13        ];
14 elseif nQ == 3
15    pQ = [...

```

```

16      -7.7459666924148340e-001  5.555555555555558e-001
17      0.0000000000000000e+000  8.888888888888884e-001
18      7.7459666924148340e-001  5.555555555555558e-001
19      ];
20  elseif nQ == 4
21      pQ = [...
22          -8.6113631159405257e-001  3.4785484513745385e-001
23          -3.3998104358485626e-001  6.5214515486254609e-001
24          3.3998104358485626e-001  6.5214515486254609e-001
25          8.6113631159405257e-001  3.4785484513745385e-001
26      ];
27  elseif nQ == 5
28      pQ = [...
29          -9.0617984593866396e-001  2.3692688505618908e-001
30          -5.3846931010568311e-001  4.7862867049936647e-001
31          0.0000000000000000e+000  5.688888888888889e-001
32          5.3846931010568311e-001  4.7862867049936647e-001
33          9.0617984593866396e-001  2.3692688505618908e-001
34      ];
35  elseif nQ == 6
36      pQ = [...
37          -9.3246951420315205e-001  1.7132449237917036e-001
38          -6.6120938646626448e-001  3.6076157304813861e-001
39          -2.3861918608319688e-001  4.6791393457269104e-001
40          2.3861918608319688e-001  4.6791393457269104e-001
41          6.6120938646626448e-001  3.6076157304813861e-001
42          9.3246951420315205e-001  1.7132449237917036e-001
43      ];
44  elseif nQ == 7
45      pQ = [...
46          -9.4910791234275849e-001  1.2948496616886970e-001
47          -7.4153118559939446e-001  2.7970539148927664e-001
48          -4.0584515137739718e-001  3.8183005050511892e-001
49          0.0000000000000000e+000  4.1795918367346940e-001
50          4.0584515137739718e-001  3.8183005050511892e-001
51          7.4153118559939446e-001  2.7970539148927664e-001
52          9.4910791234275849e-001  1.2948496616886970e-001
53      ];
54  elseif nQ == 8
55      pQ = [...
56          -9.6028985649753618e-001  1.0122853629037626e-001
57          -7.9666647741362673e-001  2.2238103445337448e-001
58          -5.2553240991632899e-001  3.1370664587788727e-001

```

```

59         -1.8343464249564978e-001  3.6268378337836199e-001
60         1.8343464249564978e-001  3.6268378337836199e-001
61         5.2553240991632899e-001  3.1370664587788727e-001
62         7.9666647741362673e-001  2.2238103445337448e-001
63         9.6028985649753618e-001  1.0122853629037626e-001
64     ];
65     elseif nQ == 9
66         pQ = [...
67             -9.6816023950762609e-001  8.1274388361574412e-002
68             -8.3603110732663577e-001  1.8064816069485740e-001
69             -6.1337143270059036e-001  2.6061069640293544e-001
70             -3.2425342340380892e-001  3.1234707704000286e-001
71             0.0000000000000000e+000  3.3023935500125978e-001
72             3.2425342340380892e-001  3.1234707704000286e-001
73             6.1337143270059036e-001  2.6061069640293544e-001
74             8.3603110732663577e-001  1.8064816069485740e-001
75             9.6816023950762609e-001  8.1274388361574412e-002
76         ];
77     elseif nQ == 10
78         pQ = [...
79             -9.7390652851717174e-001  6.6671344308688138e-002
80             -8.6506336668898454e-001  1.4945134915058059e-001
81             -6.7940956829902444e-001  2.1908636251598204e-001
82             -4.3339539412924721e-001  2.6926671930999635e-001
83             -1.4887433898163116e-001  2.9552422471475287e-001
84             1.4887433898163116e-001  2.9552422471475287e-001
85             4.3339539412924721e-001  2.6926671930999635e-001
86             6.7940956829902444e-001  2.1908636251598204e-001
87             8.6506336668898454e-001  1.4945134915058059e-001
88             9.7390652851717174e-001  6.6671344308688138e-002
89         ];
90     else
91         error(['Le nombre ' num2str(nQ) ' n est pas implimente.'])
92     end
93
94     xIntRef = pQ(:, 1)';
95     wIntRef = pQ(:, 2)';

```

A.3.10 L2NormFEM.m

```

1 function [L2Norm] = L2NormFEM(nelt, kconec, FonctionFormData, vsol)
2 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval

```

```

3 % Calcul de la norm L2
4
5 L2Norm = 0;
6
7 for ie = 1 : nelt % Boucle sur les elements
8
9     conec = kconec(ie, :);
10    xInt  = FonctionFormData(ie).xInt;
11    wInt  = FonctionFormData(ie).wInt;
12    NN    = FonctionFormData(ie).N;
13    nQ    = FonctionFormData(ie).nQ;
14
15    for i = 1 : nQ % Boucle sur les points d'integration
16
17        N      = NN(:, i);
18        uh     = N' * vsol(conec);
19        u      = solution_exacte(xInt(i));
20        Error  = (u - uh) * (u - uh);
21        L2Norm = L2Norm + wInt(i) * Error;
22        %plot(xInt(i), uh, 'g*')
23        %plot(xInt(i), u , 'b*')
24    end
25 end
26
27 L2Norm = sqrt( L2Norm );

```

A.3.11 L2NormPUM.m

```

1 function [L2Norm] = L2NormPUM(nelt, kconec, FonctionFormData, ...
    vsol, NODES)
2 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval
3 % Calcul de la norm L2
4
5 L2Norm = 0;
6
7 for ie = 1 : nelt % Boucle sur les elements
8
9     conec = kconec(ie, :);
10    NEN   = NODES (conec(1),2) + NODES (conec(2),2) ;
11    xInt  = FonctionFormData(ie).xInt;
12    wInt  = FonctionFormData(ie).wInt;
13    NN    = FonctionFormData(ie).N;

```

```

14     nQ     = FonctionFormData(ie).nQ;
15
16     if NEN ==2
17         MM     = FonctionFormData(ie).M;
18     end
19
20     for i = 1 : nQ % Boucle sur les points d'integration
21
22         N     = NN(:, i);
23         u     = solution_exacte(xInt(i));
24
25         if NEN == 2
26             M     = MM(:, i);
27             uh    = N' * vsol(conec) + M' * vsol(NODES(conec,3)) ;
28         else
29             uh    = N' * vsol(conec);
30         end
31         Error    = (u - uh) * (u - uh);
32         L2Norm   = L2Norm + wInt(i) * Error;
33         %plot(xInt(i), uh, 'g*')
34         %plot(xInt(i), u , 'b*')
35     end
36 end
37
38 L2Norm = sqrt( L2Norm );

```

A.3.12 noeudEnrichi.m

```

1 function [DOF, NODES ]= noeudEnrichi(x , kconec, nelt, nnt)
2 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval
3
4 NODES     = zeros (nnt, 4) ;
5 NODES(:,1) = 1:1:nnt ;
6 DOF       = nnt;
7
8 % interval d'enrichissement
9 Xmin = 0.45;
10 Xmax = 0.55;
11
12 for ie=1:nelt
13     conec = kconec(ie,:);
14     x1    = x(conec(1));

```

```

15     x2     = x(conec(2));
16     if x2 ≤ Xmax && x1 ≥ Xmin
17         for j=1:2
18             node           = conec(j);
19             DOF            = DOF +1 ;
20             [gi, dgdx]     = fonctionEnrichie(x(node));
21             NODES(node, 2) = 1;
22             NODES(node, 3) = DOF ;
23             NODES(node, 4) = gi ;
24
25         end
26     end
27 end
28 end

```

A.3.13 plotFonctionFormFEM.m

```

1 function plotFonctionFormFEM
2 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval
3
4 xIntRef = -1:0.01:1;
5
6 N1 = 0.5*(1-xIntRef);
7 N2 = 0.5*(1+xIntRef);
8
9 figure1 = figure;
10
11 % axes
12 axes1 = axes('Parent',figure1);
13 box(axes1,'on');
14 hold(axes1,'all');
15
16 plot(xIntRef, N1,'r','DisplayName','N_1','LineWidth',2);
17 hold on
18 plot(xIntRef, N2,'b','DisplayName','N_2','LineWidth',2);
19
20 xlabel({'\xi'});
21 ylabel({'N_1(\xi), N_2(\xi)'});
22 legend1 = legend(axes1,'show');
23 set(legend1,'Position',[0.75 0.5 0.1 0.1]);

```

A.3.14 plotFonctionFormPUM.m

```
1 function plotFonctionFormPUM(ie, kconec, x, NODES)
2 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval
3 % Tracer les fonctions de forme enrichie dans l'element
4
5 xIntRef = -1:0.01:1;
6 nn      = length(xIntRef);
7 xInt    = zeros (nn, 1) ;
8 conec   = kconec(ie,:);
9 Le      = x(conec(2)) - x(conec(1));
10 xi     = x(conec(1));
11
12 for i=1:nn
13     xsi    = xIntRef(i);
14     xInt(i) = xi + (xsi +1)/2 * Le ;
15 end
16 % fonction de forme std.
17 N1 = 0.5*(1-xIntRef);
18 N2 = 0.5*(1+xIntRef);
19 % fonction de forme enrichis.
20
21 Psi      = zeros(2, nn);
22 [g, dgdx] = fonctionEnrichie(xInt);
23
24 Psi(1,:) = g - NODES(conec(1),4) ;
25 Psi(2,:) = g - NODES (conec(2),4) ;
26
27 for i=1:nn
28     M1(i) = N1(i) * Psi(1,i);
29     M2(i) = N2(i) * Psi(2,i);
30 end
31
32 figure1 = figure;
33
34 % Create axes
35 axes1 = axes('Parent',figure1);
36 box(axes1,'on');
37 hold(axes1,'all');
38
39 plot(xIntRef, M1, 'r', 'DisplayName', 'N_1\psi_1', 'LineWidth',2);
40 hold on
41 plot(xIntRef, M2, 'b', 'DisplayName', 'N_2\psi_2', 'LineWidth',2);
```

```

42
43 xlabel({'\xi'});
44 ylabel({'N_1\psi_1, N_2\psi_2'});
45 legend1 = legend(axes1, 'show');
46 set(legend1, 'Position', [0.75 0.5 0.1 0.1]);

```

A.3.15 plotSolution.m

```

1 function plotSolution(X1, Y1, X2, Y2)
2 %CREATEFIGURE (X1,Y1,X2,Y2)
3
4 % Create figure
5 figure1 = figure;
6
7 % Create axes
8 axes1 = axes('Parent', figure1);
9 box(axes1, 'on');
10 hold(axes1, 'all');
11
12 % Create plot
13 plot(X1,Y1, 'Parent', axes1, 'DisplayName', 'u^h', 'Color', [0 0 0]);
14
15 % Create plot
16 plot(X2,Y2, 'Parent', axes1, 'Color', [1 0 0], 'DisplayName', 'u');
17
18 % Create xlabel
19 xlabel({'x'});
20
21 % Create ylabel
22 ylabel({'u, u^h'});
23
24 % Create legend
25 legend(axes1, 'show');

```

A.3.16 solution_exacte.m

```

1 function [u] = solution_exacte (x)
2 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval
3 % Calcul de u
4 T      = -2 ;
5 L      = 1;

```

```

6 k      = 10;
7 alpha = L * 0.01 ;
8
9 for i=1:length(x)
10     u(i) = (T + 3 * L^2 )*(1/k + x(i)) - x(i)^3 + exp( - ( (x(i) - ...
        L/2)/ alpha )^2 ) ;
11 end

```

A.3.17 solution_PUM.m

```

1 function [uh] = solution_PUM (y, x, nelt, NODES, kconec, vsol)
2 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval
3 % Calcul de uh avec l'approx. enrichie
4
5 for i =1:length(y)
6     Me=[0 0]; ae= [0 ; 0];
7     for ie = 1:nelt
8         if x(ie) ≤ y(i) && x(ie+1) ≥ y(i)
9             break;
10        end
11    end
12    conec = kconec (ie,:);
13    NEN = NODES (conec(1),2) + NODES (conec(2),2) ;
14    x1 = x(conec(1));
15    x2 = x(conec(2));
16    Le = x2 - x1;
17    xsi = -1 + (2/Le) * (y(i) - x1);
18    N1 = 1/2 * (1 - xsi);
19    N2 = 1/2 * (1 + xsi);
20    Ne = [N1 N2];
21    ue = vsol(conec);
22
23    if NEN ==2
24
25        gi      = NODES (conec, 4);
26        [g , dgdx] = fonctionEnrichie(y(i));
27        Psi      = g - gi ;
28        Me      = [N1*Psi(1) N2*Psi(2)];
29        ae      = vsol (NODES (conec,3));
30    end
31    uh(i) = Ne * ue + Me * ae ;
32 end

```


Annexe B

Programme Matlab XFEM 1D pour les problèmes thermiques stationnaires avec fissures présentés dans la Section 2.5

Dans la Section B.1, le programme XFEM est présenté. Ensuite dans la Section B.2 un programme pour tracer les fonctions de forme standards et enrichies pour le cas d'une discontinuité forte et faible est présenté. Enfin dans la Section B.3, l'ensemble des autres fonctions est regroupé dans le dossier *XfemRoutine*

B.1 xfemMulticrack.m

```
1 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval
2 % Programme XFEM 1D traite l'exemple de la section 3.5
3 % pour resoudre un probleme thermique 1D stationnaire
4 % avec plusieurs fissures
5
6 clc; clear all; close all;
7 addpath XfemRoutine
8
9 k = 1;           % Conductivite thermique
10 L = 10;        % Longueur de element
11
12 cracks = [0.3; 2.2; 4.1; 6.7; 8.1]; % Positions des fissures
```

```

13 h          = [0.5; 0.3; 0.9 ; 1000; 0.1];          % Coefficient d ...
    echange thermique
14 %cracks    = [3.6];
15 %h         = [0.3];
16
17 nnt  = 11;          % Nombre de noeuds
18 nelt  = nnt - 1;    % Nombre elements
19 Le    = L / nelt;   % Longueur element
20
21 % Conditions aux limites
22 T0    = 10 ;
23 TL    = 40 ;
24 f     = 1 ;        % Terme source
25
26 for i=1:nnt
27     x(i) = (i-1)*Le;
28 end
29
30 %% Determiner les elements qui contient les fissures
31 [jelem] = elementCrack(cracks, x);
32
33 nenrich = 2*length(jelem); % Nombre des noeuds enrichies
34 nntg     = nnt + nenrich;   % Nombre des degres de libertes ...
    global
35
36 K      = zeros(nntg);      % Matrice de rigidite globale
37 rhs    = zeros(nntg,1);   % Vecteur force global
38
39 %% Assemblage
40 [K, rhs] = assembly(nntg, k, h, cracks, jelem, nelt, Le, f);
41
42 %% Application des contiditions aux limites
43 rhs     = rhs - K(:,1)* T0 ;
44 K(1, :) = zeros(1, nntg);
45 K(:,1)  = zeros(nntg,1);
46 K(1,1)  = 1;
47 rhs(1)  = T0;
48
49 rhs     = rhs - K(:,nnt)* TL ;
50 K(nnt, :) = zeros(1, nntg);
51 K(:,nnt)  = zeros(nntg,1);
52 K(nnt,nnt) = 1;
53 rhs(nnt)  = TL;

```

```

54
55 %% Resolution du systeme d'equations lineaire
56 solution = K\rhs;
57
58 %% Trace de la solutions T(x)
59 plot_solution( cracks, jelem, Le, solution, nnt,L)

```

B.2 plotShapesFunctions.m

```

1 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval
2 % Programme XFEM 1D traite l'exemple de la section 3.5
3
4 close all
5 clc;
6 addpath XfemRoutine
7
8 xi    =-1:0.0001:1;
9 xi_c = -0.35;
10
11 for i=1:length(xi)
12     [N1(i), N2(i), N1e(i), N2e(i)] = shapefunctions(xi(i), xi_c);
13     [N11(i), N22(i), N11e(i), N22e(i), psi1(i), psi2(i)] = ...
14         shapeFunctionsWeak(xi(i), xi_c);
15 end
16 %% Plot enrichied shapes functions : Strong discontinuity
17 %% Plot N1
18 fig1 = figure;
19 hold on;
20 p1 = plot(xi, N1);
21 ple = plot(xi, N1e);
22 legend1 = legend('N_1(\xi)', 'N_1^e (\xi)');
23 set(legend1, 'position',[0.8 0.7 0.05 0.1]);
24 set(p1, 'color', 'red', 'linewidth',2)
25 set(ple, 'color', 'blue', 'linewidth',2)
26 set(gca, 'XTick', -1.0:0.25:+1.0)
27 set(gca, 'YTick', -1.0:0.25:+1.0)
28 grid
29 axis equal;
30 xlabel('\xi')
31 ylabel('N(\xi)')

```

```

32 title('Shape Functions')
33 print(fig1, '-dpdf', './figures_matlab/shape_function_N1.pdf');
34
35 %% Plot N2
36 fig2 = figure;
37 hold on;
38 p2 = plot(xi, N2);
39 p2e = plot(xi, N2e);
40 legend2 = legend('N_2(\xi)', 'N_2^e(\xi)');
41 set(legend2, 'position', [0.8 0.6 0.05 0.1]);
42 set(p2, 'color', 'red', 'linewidth', 2)
43 set(p2e, 'color', 'blue', 'linewidth', 2)
44 set(gca, 'XTick', -1.0:0.25:+1.0)
45 set(gca, 'YTick', -1.0:0.25:+1.0)
46 grid
47 axis equal
48 xlabel('\xi')
49 ylabel('N(\xi)')
50 title('Shape Functions')
51 print(fig2, '-dpdf', './figures_matlab/shape_function_N2.pdf');
52
53 %% Plot enriched shapes functions: Weak Discontinuity
54
55 %% Plot N1e
56 fig3 = figure;
57 hold on;
58 p3 = plot(xi, N11);
59 p3e = plot(xi, N11e);
60 legend3 = legend('N_1(\xi)', 'N_1^e(\xi)');
61 set(legend3, 'position', [0.8 0.7 0.05 0.1]);
62 set(p3, 'color', 'red', 'linewidth', 2)
63 set(p3e, 'color', 'blue', 'linewidth', 2)
64 set(gca, 'XTick', -1.0:0.25:+1.0)
65 set(gca, 'YTick', -1.0:0.25:+1.0)
66 grid
67 axis equal;
68 xlabel('\xi')
69 ylabel('N(\xi)')
70 title('Shape Functions')
71 print(fig3, '-dpdf', './figures_matlab/shape_function_N1_weak.pdf');
72
73 %% Plot N2e
74 fig4 = figure;

```

```

75 hold on;
76 p4 = plot(xi, N22);
77 p4e = plot(xi, N22e);
78 legend4 = legend('N_2(\xi)', 'N_2^e (\xi)');
79 set(legend4, 'position', [0.8 0.6 0.05 0.1]);
80 set(p4, 'color', 'red', 'linewidth', 2)
81 set(p4e, 'color', 'blue', 'linewidth', 2)
82 set(gca, 'XTick', -1.0:0.25:+1.0)
83 set(gca, 'YTick', -1.0:0.25:+1.0)
84 grid
85 axis equal;
86 xlabel('\xi')
87 ylabel('N(\xi)')
88 title('Shape Functions')
89 print(fig4, '-dpdf', './figures_matlab/shape_function_N2_weak.pdf');
90
91 %% Plot enrichment function psi
92 fig3 = figure;
93 hold on;
94 p3 = plot(xi, psi1);
95 p3e = plot(xi, psi2);
96 legend3 = legend( '\psi_1 (\xi)', '\psi_2 (\xi)');
97 set(legend3, 'position', [0.8 0.7 0.05 0.1]);
98 set(p3, 'color', 'red', 'linewidth', 2)
99 set(p3e, 'color', 'blue', 'linewidth', 2)
100 set(gca, 'XTick', -1.0:0.25:+1.0)
101 set(gca, 'YTick', -1.0:0.25:+1.0)
102 grid
103 axis equal;
104 xlabel('\xi')
105 ylabel(' \psi (\xi)')
106 title('Enrichment Functions for weak discontinuities')
107 print(fig3, '-dpdf', './figures_matlab/enrichment_function_weak.pdf');

```

B.3 XfemRoutine

B.3.1 elementCrack.m

```

1 function [jelem] = elementCrack(cracks, x)
2 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval
3

```

```

4 ncracks = length(cracks);      % number of cracks
5 n       = length(x);
6
7 k = 1;
8 for i = 1:ncracks
9     xc = cracks(i);
10    for j = 1:n-1
11        if (xc > x(j)) && (xc < x(j+1))
12            jelem(k) = j;
13            k        = k+1;
14        end
15        if (xc == x(j)) || (xc == x(j+1))
16            jelem(k) = j;
17            k        = k+1;
18        end
19    end
20 end
21
22 jelem = unique(jelem);

```

B.3.2 assembly.m

```

1 function [K,rhs] = assembly(nntg, kappa, h, cracks, jelem, nelt, Le,f)
2 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval
3
4 K   = zeros(nntg);           % global stiffness matrix
5 rhs = zeros(nntg,1);       % global force vector
6 nnt = nelt + 1;
7
8 %% Assembling procedure
9 for ie=1:nelt
10    m=0;
11
12    for j = 1:length(jelem)
13        if ie==jelem(j)     % enriched element
14            k= 2*(j-1)+1;
15            [Ke_enrich, fe_enrich] = element_enrich(kappa, Le, ...
16                cracks,j,ie,f);
17            [Ke_ex, fe_ex]         = thermal_exchange( h(j), ...
18                cracks, Le, j, ie);

```

```

18     K([ie ie+1],[ie ie+1]) = K([ie ie+1],[ie ie+1])+ ...
        Ke_enrich([1 2],[1 2]);
19     K([ie ie+1],[nnt+k nnt+(k+1)]) = K([ie ie+1],[nnt+k ...
        nnt+(k+1)]) + Ke_enrich([1 2],[3 4]);
20     K([nnt+k nnt+(k+1)],[ie ie+1]) = K([nnt+k ...
        nnt+(k+1)],[ie ie+1]) + Ke_enrich([3 4],[1 2]);
21     K([nnt+k nnt+(k+1)],[nnt+k nnt+(k+1)]) = K([nnt+k ...
        nnt+(k+1)],[nnt+k nnt+(k+1)]) + Ke_enrich([3 4],[3 4]);
22
23     rhs([ie ie+1]) = rhs([ie ie+1]) + fe_enrich([1 2]);
24     rhs([nnt+k nnt+(k+1)]) = rhs([nnt+k nnt+(k+1)])+ ...
        fe_enrich ([3 4]);
25
26     K([nnt+k nnt+(k+1)],[nnt+k nnt+(k+1)]) = K([nnt+k ...
        nnt+(k+1)],[nnt+k nnt+(k+1)]) + Ke_ex;
27     m=1;
28     end
29 end
30 if m==0 % standard element
31     [Ke_std, fe_std] = element_std(kappa, Le, f);
32     K([ie ie+1],[ie ie+1]) = K([ie ie+1],[ie ie+1])+ Ke_std;
33     rhs([ie ie+1]) = rhs([ie ie+1]) + fe_std;
34 end
35 end

```

B.3.3 element_enrich.m

```

1 function [Ke, fe] = element_enrich(kappa, Le, cracks, ic, ie, f)
2 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval
3
4 xc = cracks(ic);
5 xj = Le*(ie-1);
6 xi_c = (2/Le)*(xc - xj) - 1;
7
8 Ke = (kappa/Le)*[ 1, -1, (1-xi_c), (1+xi_c);
9 -1, 1, -(1-xi_c), -(1+xi_c);
10 (1-xi_c), -(1-xi_c), 2*(1-xi_c), 0;
11 (1+xi_c), -(1+xi_c), 0, 2*(1+xi_c) ];
12
13 a1 = 1/2 - xi_c*(1-xi_c);
14 a2 = -xi_c*(1+xi_c);
15

```

```
16 fe = f*(Le/2)*[1; 1; a1 ; a2];
```

B.3.4 element_std.m

```
1 function [Ke, fe] = element_std(kappa, Le, f)
2 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval
3
4 Ke = (kappa/Le)*[1, -1; -1, 1];    %elementary matrix
5 fe =      f*(Le/2) * [1; 1];
```

B.3.5 thermal_exchange.m

```
1 function [Ke, fe] = thermal_exchange( h, cracks, Le, ic, ie)
2 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval
3
4 xc    = cracks(ic);
5 xj    = Le*(ie-1);
6 xi_c  = (2/Le)*(xc    - xj) - 1;
7
8 [N1, N2, N1e, N2e] = shapefunctions(xi_c, xi_c);
9
10 Ke          = 4*h* [N1*N1, N1*N2;
11                   N2*N1, N2*N2];
12
13 fe = [0; 0; 0; 0];
```

B.3.6 plot_solution.m

```
1 function [] = plot_solution( cracks, jelem, Le, solution, nnt, L)
2 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval
3
4 z = 0:0.01:L;
5 vsol = zeros(length(z),1);
6
7 for i=1:length(z)
8     distance = floor( z(i)/Le );
9     Nelt     = distance + 1;
10    xxi      = distance*Le;
11    xi       = (2/Le)*(z(i) - xxi) - 1;
```

```

12     m=0;
13
14     if i== 14
15         jj=14;
16     end
17     for j=1:length(jelem)           % solution xfem
18         if Nelt == jelem(j)
19             k= 2*(j-1)+1;
20             xc = (2/Le)*( cracks(j) - xxi) - 1;
21             [N1, N2, N1e, N2e] = shapefunctions(xi, xc);
22             vsol(i) = N1*solution(Nelt) + N2*solution(Nelt+1)+ ...
                N1e*solution(nnt+k) + N2e*solution(nnt+k+1);
23             m=m+1;
24         end
25     end
26
27     if m== 0 % solution FEM
28         [N1, N2, N1e, N2e] = shapefunctions(xi, cracks(1));
29         vsol(i) = N1*solution(Nelt) + N2*solution(Nelt+1);
30     end
31 end
32
33 %===== plot the temperature field
34 fig1 = figure;
35 % Create axes
36 axes1 = axes('Parent',fig1);
37 grid(axes1,'on');
38 hold(axes1,'all');
39
40 p1 = plot(z, vsol);
41 %legend1 = legend('x','T(x)');
42 set(p1,'color','red','linewidth',2)
43
44 %axis equal;
45 %ylim(axes1,[0 40]);
46 xlabel('x')
47 ylabel('T(x)')
48 title('Temperature Field')
49 print(fig1, '-dpdf', './figures_matlab/multi_cracks.pdf');

```

B.3.7 shapefunctions.m

```

1 function [N1, N2, N1e, N2e] = shapefunctions(xi, xi_c)
2 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval
3
4 N1    = (1 - xi)/2;
5 N2    = (1 + xi)/2;
6 if xi < xi_c
7     N1e = 0;
8     N2e = - 2*N2;
9 else
10    N1e = 2*N1;
11    N2e = 0;
12 end

```

B.3.8 shapeFunctionsWeak.m

```

1 function [N1, N2, N1e, N2e, psi1, psi2] = shapeFunctionsWeak(xi, xi_c)
2 % Copyright (c) 2012, Atmane Laouati, Universite Laval
3
4 N1    = (1 - xi)/2;
5 N2    = (1 + xi)/2;
6
7 phi   = xi - xi_c;
8 phi1  = -1 - xi_c;
9 phi2  = 1 - xi_c;
10
11 psi1  = abs( phi ) - abs( phi1 );
12 psi2  = abs( phi ) - abs( phi2 );
13
14 N1e   = N1 * psi1;
15 N2e   = N2 * psi2;

```

Annexe C

Détails sur le calcul de la solution exacte pour un problème 1D thermoélectrique stationnaire avec fissure

On présente ici les détails pour trouver la solution analytique utilisée dans la Section 4.7.1 pour la validation numérique.

C.1 Calcul de la solution analytique pour le cas :

$$h \neq 0, g = 0, Q_v = 0 \text{ et } Q_c = 0$$

Dans ce cas l'équation de la chaleur devient une équation de Laplace,

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \tag{C.1}$$

en effectuant une double intégration, on trouve la solution analytique générale :

$$T(x) = \frac{a}{k}x + b \tag{C.2}$$

Puisque la fissure divise la plaque en deux parties distinctes, on suppose que l'expression de la température dans chaque coté de la fissure à $x = x_x$ est indépendante

de l'autre coté,

$$T(x) = \begin{cases} \frac{a_1}{k}x + b_1 & \forall x \in [0, x_c[, \\ \frac{a_2}{k}x + b_2 & \forall x \in]x_c, L], \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

$$T(x) = \begin{cases} \frac{a_1}{k}x + b_1 & \forall x \in [0, x_c[, \\ \frac{a_2}{k}x + b_2 & \forall x \in]x_c, L], \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

utilisant la continuité du flux thermique à la fissure, c'est-à-dire que $-k\frac{dT(x_c^-)}{dx} = -k\frac{dT(x_c^+)}{dx}$, alors on trouve que $a_1 = a_2 = a$. Maintenant, on applique les conditions aux limites définis par les équations 4.40.

$$T(x = 0) = T_0 \longrightarrow b_1 = T_0 \quad (\text{C.5})$$

$$T(x = L) = T_L \longrightarrow \frac{a}{k}L + b_2 = T_L \quad (\text{C.6})$$

le flux thermique à la fissure est défini comme suivant :

$$-k\frac{dT(x_c)}{dx} = -a = -h(T(x_c^+) - T(x_c^-)) = -(b_2 - T_0) \quad (\text{C.7})$$

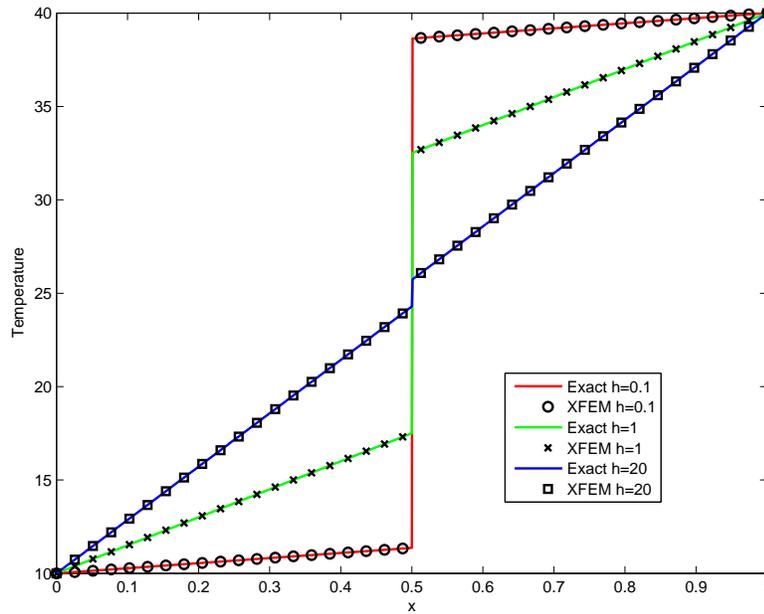


FIGURE C.1 – Solutions XFEM et exacte du champ de la température pour différentes valeurs de h

utilisant l'équation C.6 et C.7, on peut trouver a, b_2 . Enfin, on peut écrire l'expression de la solution exacte sous la forme suivante

$$T(x) = \begin{cases} mx + T_0 & \forall x \in [0, x_c[, \\ mx + n & \forall x \in]x_c, L], \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

avec

$$m = \frac{h}{k} (n - T_0), \quad n = \frac{\frac{hL}{k} T_0 + T_L}{\frac{hL}{k} + 1}$$

La distribution de la température pour la solution XFEM et la solution exacte est présentée dans la Figure C.1 pour différentes valeurs du coefficient d'échange thermique à la fissure h

La comparaison montre que la méthode XFEM fournit de très bons résultats en comparaison avec la solution analytique

C.2 Calcul de la solution analytique pour le cas :

$$h = 0, g \neq 0, Q_v \neq 0 \text{ et } Q_c \neq 0$$

Dans cette section, les échanges thermiques entre les lèvres de la fissures q_c sont nulles. Par contre, la génération de chaleur aux lèvres de la fissure à cause de la résistance de l'interface est considérée. Alors, l'équation du problème thermique devient

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = f \quad (\text{C.10})$$

La solution analytique dans le cas générale s'écrit sous la forme

$$T(x) = \frac{1}{2} f x^2 + Cx + D \quad (\text{C.11})$$

d'une manière similaire au cas présenté précédemment, la distribution de température dans chaque côté de la fissure est :

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f x^2 + C_1 x + D_1 & \forall x \in [0, x_c[, \\ \frac{1}{2} f x^2 + C_2 x + D_2 & \forall x \in]x_c, L], \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

$$(\text{C.13})$$

on rappelle ici que la distribution du potentiel électrique s'écrit sous la forme

$$V(x) = \begin{cases} ax + V_0 & \forall x \in [0, x_c[, \\ ax + b & \forall x \in]x_c, L], \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

$$(\text{C.15})$$

où

$$a = \frac{g}{\sigma} (b - V_0), \quad b = \frac{\frac{gL}{\sigma} V_0 + V_L}{\frac{gL}{\sigma} + 1},$$

utilisant la conditions aux limites du terme source à la fissure pour calculé les constante de l'équation C.12 et C.13. dans ce cas, le flux de chaleur à la fissure est défini comme suit :

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}|_{x_c^-} = \frac{1}{2}g[V]^2 \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}|_{x_c^+} = -\frac{1}{2}g[V]^2$$

Enfin, on trouve la solution exacte suivante :

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}fx^2 + C_1x + T_0 & \forall x \in [0, x_c[, \\ \frac{1}{2}fx^2 + C_2x + D_2 & \forall x \in]x_c, L], \end{cases} \quad (\text{C.16})$$

$$\quad \quad \quad (\text{C.17})$$

tel que :

$$\begin{cases} Q_c = \frac{g}{2}(b - V_0)^2, \\ C_1 = \frac{Q_c}{k}, \quad C_2 = -\frac{Q_c}{k}, \\ D_2 = T_L - \frac{1}{2}fL^2 - LC_2. \end{cases}$$

on remarque que le flux de chaleur a un signe différent à chaque coté de la fissure, comme l'illustre la Figure C.2.

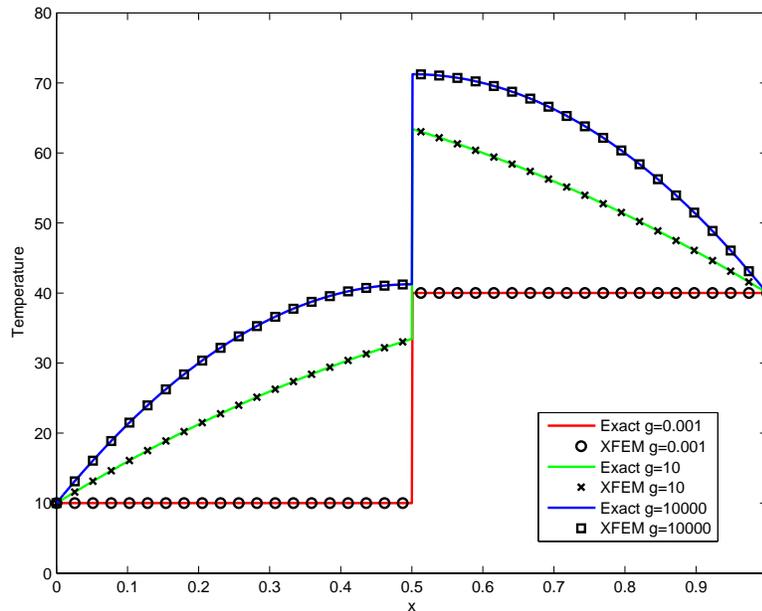


FIGURE C.2 – Solutions XFEM et exacte du champs de la température pour différentes valeurs de g

Annexe D

Intégration numérique dans les éléments coupés par la fissure

L'intégration directe dans les éléments discontinus n'est pas faisable (Moës et al. (1999), Belytschko et al. (2001), Sukumar and Prevost (2003)), comme le montre la Figure D.1.

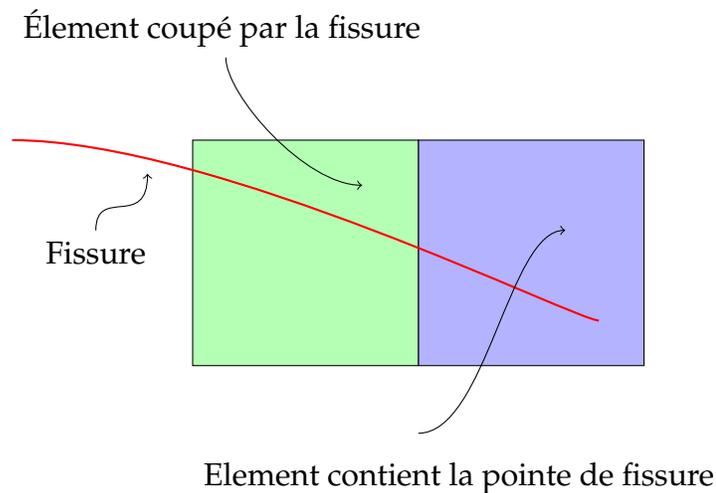


FIGURE D.1 – Éléments coupés par la fissure

La sous-triangulation des éléments coupés par la fissure est la méthode la plus utilisée dans le contexte de XFEM pour l'évaluation des intégrales (Figure D.2). Il consiste à diviser les éléments traversés par la fissure en plusieurs triangles ou tétraèdres plus

petits, en 2D et 3D respectivement, comme le montre la Figure D.2, et appliquer les règles d'intégration de classiques de type Hammer pour chaque triangle. Le poids de chaque point de Hammer est une fonction de la surface de chaque sous-triangle.

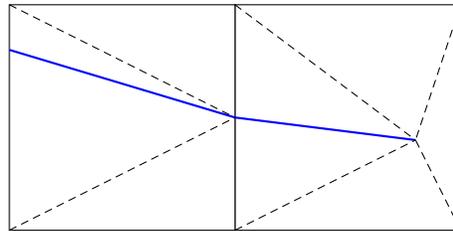


FIGURE D.2 – Triangulation des éléments coupés par la fissure

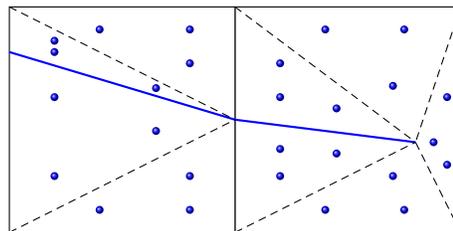


FIGURE D.3 – Points d'intégration pour des éléments coupés par la fissure, 3 points d'intégration par triangle

La procédure complète utilisée pour obtenir la position des points de Hammer pour un éléments quadrilatéral traversé par une fissure en 2D est illustrée dans la Figure D.3. Cette méthodologie a comme avantage que la localisation des points d'intégration est conforme à la configuration de la fissure dans l'élément. Il est également facile d'implémenter la division des éléments en utilisant une triangulation de Delaunay Guibas et al. (1992)

Le processus de division des éléments est différent à celui du remaillage parce que les triangles sont utilisés uniquement pour déterminer les coordonnées des points d'intégration. Par conséquent, la localisation des des points doit être recalculée pour chaque nouvelle position de la fissure dans l'élément, comme pour le cas la propagation de fissures.

Bibliographie

- Abdelaziz, Y., Abdelkader, N., and Abdelmadjid, H. (2009). A state-of-the-art review of the X-FEM for computational fracture mechanics. *Applied Mathematical Modelling*, 33(12) :4269–4282.
- Abdelaziz, Y. and Hamouine, A. (2008). A survey of the extended finite element. *Computers & Structures*, 86(11-12) :1141–1151.
- Adalsteinsson, D. and Sethian, J. A. (1995a). A level set approach to a unified model for etching, deposition, and lithography I : algorithms and two-dimensional simulations. *Journal of Computational Physics*, 120(1) :124–144.
- Adalsteinsson, D. and Sethian, J. A. (1995b). A level set approach to a unified model for etching, deposition, and lithography II : Three-dimensional simulations. *Journal of computational physics*, 122(2) :348–366.
- Adalsteinsson, D. and Sethian, J. A. (1997). A level set approach to a unified model for etching, deposition, and lithography III : redeposition, reemission, surface diffusion, and complex simulations. *Journal of Computational Physics*, 138(1) :193–223.
- Areias, P. M. a. and Belytschko, T. (2005). Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63(5) :760–788.
- Areias, P. M. A. and Belytschko, T. (2006). A comment on the article : A finite element method for simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics, by A. Hansbo and P. Hansbo [Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 193 (2004) 3523–3540]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(9-12) :1275–1276.

- Areias, P. M. A. and Belytschko, T. (2007). Two-scale method for shear bands : thermal effects and variable bandwidth. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 72(6) :658–696.
- Arhipov, G. and Pingin, V. (2002). Investigating thermoelectric fields and cathode bottom integrity during cell preheating, start-up and initial operating period. *Light Metals 2002*.
- Babuška, I., Caloz, G., and Osborn, J. (1994). Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 31(4) :945–981.
- Babuška, I. and Melenk, J. M. (1997). The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(4) :727–758.
- Babuška, I., Banerjee, U., and Osborn, J. E. (2004). Generalized finite element methods-main ideas, results and perspective. *International Journal of Computational Methods*, 1(1) :67–103.
- Baydoun, M. and Fries, T. P. (2012). Crack propagation criteria in three dimensions using the XFEM and an explicit-implicit crack description. *International Journal of Fracture*, 178(1-2) :51–70.
- Béchet, E., Minnebo, H., Moës, N., and Burgardt, B. (2005). Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(8) :1033–1056.
- Béchet, E., Scherzer, M., and Kuna, M. (2009). Application of the X-FEM to the fracture of piezoelectric materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(11) :1535–1565.
- Belytschko, T. and Black, T. (1999). Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(5) :601–620.
- Belytschko, T., Daniel, W. J. T., and Ventura, G. (2002). A monolithic smoothing-gap algorithm for contact-impact based on the signed distance function. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55(1) :101–125.
- Belytschko, T., Gracie, R., and Ventura, G. (2009). A Review of Extended/Generalized Finite Element Methods for Material Modelling. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 17(4) :043001.

- Belytschko, T., Lu, Y. Y., and Gu, L. (1994). Element-free Galerkin methods. *International journal for numerical methods in engineering*, 37(2) :229–256.
- Belytschko, T., Moës, N., Usui, S., and Parimi, C. (2001). Arbitrary discontinuities in finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(4) :993–1013.
- Bordas, S. (2003). *Extended finite element and level set methods with applications to growth of cracks and biofilms*. PhD thesis, Northwestern University.
- Bordas, S., Rabczuk, T., and Zi, G. (2008). Three-dimensional crack initiation, propagation, branching and junction in non-linear materials by an extended meshfree method without asymptotic enrichment. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(5) :943–960.
- Chahine, E., Laborde, P., and Renard, Y. (2011). A non-conformal eXtended Finite Element approach : Integral matching XFEM. *Applied Numerical Mathematics*, 61(3) :322–343.
- Chessa, J. (2003). *The Extended Finite Element Method for Free Surface and Two Phase Flow Problems*. PhD thesis, Northwestern university.
- Chessa, J. and Belytschko, T. (2003a). An enriched finite element method and level sets for axisymmetric two-phase flow with surface tension. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(13) :2041–2064.
- Chessa, J. and Belytschko, T. (2003b). An extended finite element method for two-phase fluids : flow simulation and modeling. *Journal of Applied Mechanics*, 70(1) :10–17.
- Chessa, J., Smolinski, P., and Belytschko, T. (2002). The extended finite element method (XFEM) for solidification problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(8) :1959–1977.
- Chessa, J., Wang, H., and Belytschko, T. (2003). On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(7) :1015–1038.
- Comi, C. and Mariani, S. (2007). Extended finite element simulation of quasi-brittle fracture in functionally graded materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(41-44) :4013–4026.

- Daux, C., Moës, N., Dolbow, J., Sukumar, N., and Belytschko, T. (2000). Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(12) :1741–1760.
- De Borst, R., Gutiérrez, M. a., Wells, G. N., Remmers, J. J. C., and Askes, H. (2004a). Cohesive-zone models, higher-order continuum theories and reliability methods for computational failure analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(1) :289–315.
- De Borst, R., Remmers, J. J. C., Needleman, A., and Abellan, M.-A. (2004b). Discrete vs smeared crack models for concrete fracture : bridging the gap. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28(78) :583–607.
- Desilets, M., Marceau, D., and Fafard, M. (2003). START-Cuve : Thermo-electro-mechanical transient simulation applied to electrical preheating of a Hall-Héroult cell. In *LIGHT METALS 2003*, pages 247–254. TMS.
- Dhatt, G., Touzot, G., and Lefrançois, E. (2005). *Méthode des éléments finis*. Lavoisier.
- Dolbow, J. (1999). *An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics*. PhD thesis, Northwestern university.
- Dolbow, J. and Merle, R. (2001). Modeling dendritic solidification with the extended finite element method. In *Proceedings of the First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, pages 1135–1138. Boston, Elsevier, New York.
- Dolbow, J., Moës, N., and Belytschko, T. (2000a). Modeling fracture in Mindlin–Reissner plates with the extended finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 37(48) :7161–7183.
- Dolbow, J., Moes, N., and Belytschko, T. (2001). An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(51) :6825–6846.
- Dolbow, J. E., Moës, N., and Belytschko, T. (2000b). Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 36(3-4) :235–260.
- Duarte, C., Babuška, I., and Oden, J. (2000). Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. *Computers & Structures*, 77(2) :215–232.

- Duarte, C. and Oden, J. (1996). An h-p adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4) :237–262.
- Duddu, R., Bordas, S., Chopp, D. L., and Moran, B. (2008). A combined extended finite element and level set method for biofilm growth. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 74(5) :848–870.
- Duddu, R., Chopp, D. L., and Moran, B. (2009). A two-dimensional continuum model of biofilm growth incorporating fluid flow and shear stress based detachment. *Biotechnology and Bioengineering*, 103(1) :92–104.
- Duflot, M. (2007). A study of the representation of cracks with level sets. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 70(November 2006) :1261–1302.
- Duflot, M. (2008). The extended finite element method in thermoelastic fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 74(5) :827–847.
- Fafard, M., Marceau, D., D'amour, G., Goulet, P., and Richard, D. (2007). Modélisation du comportement thermo-électromécanique des cuves de Hall-Héroult. In Breitskopf, P. and Knopf-Lenoir, C., editors, *Modélisation numérique : défis et perspective*, chapter 2. Hermès - Lavoisier, 2 edition.
- Fortin, H., Martin, M.-H., Kandev, N., Gauvin, G., Ziegler, D., and Fafard, M. (2013). Thermo-electro-mechanical characterization of anode interfaces at operating conditions. In *LIGHT METALS 2013*.
- Fries, T.-P. (2007). A corrected XFEM approximation without problems in blending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75(5) :503–532.
- Fries, T.-P. and Belytschko, T. (2010). The extended/generalized finite element method : An overview of the method and its applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84(3) :253–304.
- Gerstenberger, A. (2010). *An XFEM based fixed-grid approach to fluid-structure interaction*. PhD thesis, Technical University Munich.
- Gerstenberger, A. and Wall, W. A. (2006). An extended finite element method based approach for large deformation fluid-structure interaction. *European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD*.

- GID (2011). The personal pre and postprocessor, International Center for Numerical Methods in Engineering CIMNE, url = www.gidhome.com.
- Goulet, P. (2004). *Modélisation du comportement thermo-électro-mécanique des interfaces de contact d'une cuve de Hall-Héroult*. PhD thesis, Laval university.
- Gracie, R. (2009). *Continuum and Continuum-atomistic Models of Dislocations and Cracks Using the Extended Finite Element Method*. PhD thesis, Northwestern University.
- Gracie, R., Wang, H., and Belytschko, T. (2008). Blending in the extended finite element method by discontinuous Galerkin and assumed strain methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 74(11) :1645–1669.
- Gravouil, A., Moës, N., and Belytschko, T. (2002). Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets Part II. Level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(11) :2569–2586.
- Groß, S. and Reusken, A. (2007). An extended pressure finite element space for two-phase incompressible flows with surface tension. *Journal of Computational Physics*, 224(1) :40–58.
- Guetari, Y. (2005). *Vers une meilleure compréhension de la coupe : aspects rhéologiques et simulation numérique par l'approche X-FEM*. PhD thesis, École Centrale de Nantes.
- Guetari, Y., Corre, S. L., and Moës, N. (2005). Étude des possibilités de la méthode X-FEM pour la simulation numérique de la coupe. *Mécanique et Industrie*, 6(3) :315–319.
- Guibas, L., Knuth, D., and Sharir, M. (1992). Randomized incremental construction of Delaunay and Voronoi diagrams. *Algorithmica*, 7(1-6) :381–413.
- Hale, W. (1989). Improving the useful life of aluminum industry cathodes. *JOM Journal of the Minerals, Metals and Materials*, 41(11) :20–25.
- Hansbo, A. and Hansbo, P. (2002). An unfitted finite element method, based on Nitsche's method, for elliptic interface problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(47-48) :5537–5552.
- Hansbo, A. and Hansbo, P. (2004). A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(33-35) :3523–3540.

- Heintz, P. (2006). On the numerical modelling of quasi-static crack growth in linear elastic fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65(2) :174–189.
- Holm, R. (1967). *Electric Contacts. Theory and Application. 4.ed.* Springer.
- Hughes, T., Cottrell, J. A., and Bazilevs, Y. (2009). *Isogeometric analysis : toward unification of CAD & FEA.* John Wiley & Sons, Ltd., West Sussex.
- Jensen, E. A., Bjørnstad, H. P., and Hansen, J. D. (2011). Preheating Collector Bars and Cathode Blocks Prior to Rodding with Cast Iron by Passing an AC Current Through the Collector Bars. *Light Metals 2011*, pages 1015–1022.
- Ji, H., Chopp, D., and Dolbow, J. (2002). A hybrid extended finite element/level set method for modeling phase transformations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54(8) :1209–1233.
- Kandev, N., Fortin, H., Chénard, S., Gauvin, G., Martin, M.-H., and Fafard, M. (2011). New Apparatus for Characterizing Electrical Contact Resistance and Thermal Contact Conductance. *Light Metals 2011*, pages 1003–1008.
- Karihaloo, B. and Xiao, Q. (2003). Modelling of stationary and growing cracks in FE framework without remeshing : a state-of-the-art review. *Computers & Structures*, 81(3) :119–129.
- Keller, F. and Sulger, P. (2007). *Anode Baking : Baking of anodes for the aluminium industry.* R & D Carbon.
- Laborde, P., Pommier, J., Renard, Y., and Salaün, M. (2005). High-order extended finite element method for cracked domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(3) :354–381.
- Lambert, M. and Fletcher, L. (1997). Review of models for thermal contact conductance of metals. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 11(2) :129–140.
- Laouati, A. (2013). *Modélisation de problèmes thermoélectriques non linéaires dans un milieu fissuré par XFEM.* PhD thesis, Université Laval.
- Laouati, A., Baggag, A., and Fafard, M. (2012). Transient heat transfer in fractured media with heat exchange between the crack lips using XFEM . *Journal of Computational Physics*. Submitted for publication.

- Legay, A. (2013). An extended finite element method approach for structural-acoustic problems involving immersed structures at arbitrary positions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 93(4) :376–399.
- Legay, A., Chessa, J., and Belytschko, T. (2006). An Eulerian-Lagrangian method for fluid-structure interaction based on level sets. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(17-18) :2070–2087.
- Legay, A. and Kölke, A. (2007). Éléments finis enrichis espace-temps pour l’interaction fluide-structure mince. In *8e Colloque National en Calcul des Structures*, volume 8, pages 1–15.
- Liu, T. (2008). Thermo-electro-structural coupled analyses of crack arrest by Joule heating. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 49(2) :171–184.
- Liu, T. J. C. (2011). Finite element modeling of melting crack tip under thermo-electric Joule heating. *Engineering Fracture Mechanics*, 78(4) :666–684.
- Liu, W., Jun, S., and Zhang, Y. (1995). Reproducing kernel particle methods. *International journal for numerical methods in fluids*, 20(8-9) :1081–1106.
- Marceau, D. (2001). *Modélisation du contact tridimensionnel avec frottement en grandes transformations et son application à l’étude des dispositifs d’ancrages multitorons*. PhD thesis, Université Laval.
- Mariani, S. and Perego, U. (2003). Extended finite element method for quasi-brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(1) :103–126.
- Melenk, J. (1995). *On generalized finite element methods*. PhD thesis, The University of Maryland.
- Melenk, J. M. and Babuška, I. (1996). The partition of unity finite element method : basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4) :289–314.
- Mergheim, J., Kuhl, D. E., and Steinmann, P. (2005). A finite element method for the computational modelling of cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63(2) :276–289.
- Mergheim, J., Kuhl, D. E., and Steinmann, P. (2007). Towards the algorithmic treatment of 3D strong discontinuities. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 23(2) :97–108.

- Mergheim, J. and Steinmann, P. (2006). A geometrically nonlinear FE approach for the simulation of strong and weak discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(37-40) :5037–5052.
- Merle, R. and Dolbow, J. (2002). Solving thermal and phase change problems with the extended finite element method. *Computational Mechanics*, 28(5) :339–350.
- Minnebo, H. (2012). Three-dimensional integration strategies of singular functions introduced by the XFEM in the LEFM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 92(13) :1117–1138.
- Moës, N. and Belytschko, T. (2002a). Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(7) :813–833.
- Moës, N. and Belytschko, T. (2002b). X-FEM, de nouvelles frontières pour les éléments finis. *Revue Européenne des Eléments*, 11(2-4) :305–318.
- Moës, N., Dolbow, J. E., and Belytschko, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1) :131–150.
- Moës, N., Gravouil, A., and Belytschko, T. (2002). Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets Part I. Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(11) :2549–2568.
- Moës, N., Sukumar, N., Moran, B., and Belytschko, T. (2000). An extended finite element method (X-FEM) for two- and three-dimensional crack modeling. In *EC-COMAS 2000*, pages 11–14, Barcelona.
- Mohammadi, S. (2008). *Extended Finite Element Method : for Fracture Analysis of Structures*. John Wiley & Sons.
- Mohammadi, S. (2012). *XFEM Fracture Analysis of Composites*. Wiley.
- Mohammadnejad, T. and Khoei, A. (2012). Hydro-mechanical modeling of cohesive crack propagation in multiphase porous media using the extended finite element method. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*.
- Mohammadnejad, T. and Khoei, A. (2013). An extended finite element method for fluid flow in partially saturated porous media with weak discontinuities ; the convergence analysis of local enrichment strategies. *Computational Mechanics*, 51(3) :327–345.

- Mulder, W., Osher, S., and Sethian, J. A. (1992). Computing interface motion in compressible gas dynamics. *Journal of Computational Physics*, 100(2) :209–228.
- Nayroles, B., Touzot, G., and Villon, P. (1992). Generalizing the finite element method : diffuse approximation and diffuse elements. *Computational mechanics*, 10(5) :307–318.
- Nguyen-Vinh, H., Bakar, I., Msekh, M. A., Song, J. H., Muthu, J., Zi, G., Le, P., Bordas, S., Simpson, R., Natararajan, S., Lahmer, T., Rabczuk, T., Natarajan, S., Lahmer, T., and Rabczuk, T. (2012). Extended finite element method for dynamic fracture of piezo-electric materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 92 :19–31.
- Oden, J., Duarte, C., and Zienkiewicz, O. (1998). A New Cloud-Based. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 153(1-2) :117–126.
- Osher, S. and Fedkiw, R. (2002). *Level set methods and dynamic implicit surfaces*, volume 153. Springer.
- Osher, S. and Paragios, N. (2003). *Geometric level set methods in imaging, vision, and graphics*. Springer.
- Osher, S. and Sethian, J. (1988). Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79(1) :12–49.
- Palma, R., Pérez Aparicio, J., and Taylor, R. (2011). Non-linear Finite Element Formulation Applied to Thermoelectric Materials under Hyperbolic Heat Conduction Model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 213-216 :93–103.
- Picard, D. (2007). *Modélisation et caractérisation du fluage/relaxation de matériaux à base de carbone présents dans les revêtements cathodiques des cuves d'électrolyse de l'aluminium*. PhD thesis, Laval university.
- Rabczuk, T., Bordas, S., and Zi, G. (2010). On three-dimensional modelling of crack growth using partition of unity methods. *Computers & Structures*, 88(23-24) :1391–1411.
- Rabczuk, T., Zi, G., Gerstenberger, A., and Wall, W. (2008). A new crack tip element for the phantom-node method with arbitrary cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75(5) :577–599.

- Remmers, J. J. C., De Borst, R. D., and Needleman, A. (2003). A cohesive segments method for the simulation of crack growth. *Computational Mechanics*, 31(1-2) :69–77.
- Ribeaucourt, R. (2006). *Gestion du contact avec frottement le long des faces de fissures dans le cadre de la méthode X-FEM. Application à la fatigue tribologique*. PhD thesis, INSA de Lyon.
- Ribeaucourt, R., Baietto-Dubourg, M.-C., and Gravouil, A. (2007). A new fatigue frictional contact crack propagation model with the coupled X-FEM/LATIN method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(33-34) :3230–3247.
- Rice, J. (1968). A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35(2) :379.
- Richard, D. (2004). *Aspects thermomécaniques de la modélisation par éléments finis du préchauffage électrique d'une cuve de Hall-Héroult : Lois constitutives, conception orientée-objet et validation*. PhD thesis, Laval university.
- Richard, D., Fafard, M., Lacroix, R., Cléry, P., and Maltais, Y. (2003). Carbon to cast iron electrical contact resistance constitutive model for finite element analysis. *Journal of materials processing technology*, 132(1) :119–131.
- Richard, D., Goulet, P., Dupuis, M., Bédard, M. D. J., and Fafard, M. (2006). Thermo-Electro-Mechanical Modeling of a Hall-Héroult Cell Coke-Bed Preheating. In Dufour, G., Paray, F., and Tessier, J., editors, *COM-2006 45 Annual Conference of Metallurgists of CIM*, pages 525–542, Montreal. Aluminium 2006.
- Riffat, S. and Ma, X. (2003). Thermoelectrics : a review of present and potential applications. *Applied Thermal Engineering*, 23(8) :913–935.
- Savija, I., Culham, J., Yovanovich, M., and Marotta, E. (2003). Review of thermal conductance models for joints incorporating enhancement materials. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 17(1) :43–52.
- Sih, G. (1962). On the singular character of thermal stresses near a crack tip. *Journal of Applied Mechanics*, 29 :587.
- Smith, B. G., Vaughan, B. L., and Chopp, D. L. (2007). The extended finite element method for boundary layer problems in biofilm growth. *Communications in Applied Mathematics and Computational Science*, 2(1) :35–56.

- Song, J., Areias, P. M. A., and Belytschko, T. (2006). A method for dynamic crack and shear band propagation with phantom nodes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67(6) :868–893.
- Song, J. H. (2008). *Computations of the Dynamic Fracture of Quasi-brittle Plane and Shell Structures by the Extended Finite Element Method*. PhD thesis, Northwestern University.
- Song, J.-H. and Belytschko, T. (2009). Cracking node method for dynamic fracture with finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(3) :360–385.
- Sørliie, M. and Øye, H. A. (2010). *Cathodes in aluminium electrolysis*. 3rd Aluminium-Verlag, Germany.
- Stolarska, M., Chopp, D., Moës, N., and Belytschko, T. (2001). Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51(8) :943–960.
- Strang, W. G. and Fix, G. J. (1973). *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall series in automatic computation. Prentice-Hall.
- Strouboulis, T., Babuška, I., and Copps, K. (2000a). The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181(1) :43–69.
- Strouboulis, T., Copps, K., and Babuska, I. (2000b). The generalized finite element method : an example of its implementation and illustration of its performance. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(8) :1401–1417.
- Sukumar, N., Chopp, D., Moës, N., and Belytschko, T. (2001). Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(46-47) :6183–6200.
- Sukumar, N., Chopp, D. L., and Moran, B. (2003). Extended finite element method and fast marching method for three dimensional fatigue crack propagation. *Engineering Fracture Mechanics*, 70 :29–40.
- Sukumar, N., Huang, Z., Prévost, J., and Suo, Z. (2004). Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59(8) :1075–1102.

- Sukumar, N., Moës, N., Moran, B., and Belytschko, T. (2000). Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(11) :1549–1570.
- Sukumar, N. and Prevost, J.-H. (2003). Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method. part i : Computer implementation. *International Journal of Solids and Structures*, 40 :7513–7537.
- Sussman, M., Smereka, P., and Osher, S. (1994). A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 14 :146–159.
- Tarancón, J., Vercher, A., Giner, E., and Fuenmayor, F. (2009). Enhanced blending elements for XFEM applied to linear elastic fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(1) :126–148.
- Unger, J. F., Eckardt, S., and Könke, C. (2007). Modelling of cohesive crack growth in concrete structures with the extended finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(41-44) :4087–4100.
- Ventura, G., Gracie, R., and Belytschko, T. (2009). Fast integration and weight function blending in the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(1) :1–29.
- Ventura, G., Moran, B., and Belytschko, T. (2005). Dislocations by partition of unity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(11) :1463–1487.
- Wagner, G., Moës, N., Liu, W., and Belytschko, T. (2001). The extended finite element method for rigid particles in stokes flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51(3) :293–313.
- Wall, W. A., Gerstenberger, A., Gamnitzer, P., Förster, C., and Ramm, E. (2006). Large Deformation Fluid-Structure Interaction - Advances in ALE Methods and New Fixed Grid Approaches. In Bungartz, H.-J. and Schäfer, M., editors, *Fluid-Structure Interaction*, volume 53 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, pages 195–232. Springer Berlin Heidelberg.
- Wang, S., Lim, K., Khoo, B., and Wang, M. (2007). An extended level set method for shape and topology optimization. *Journal of Computational Physics*, 221(1) :395–421.

- Wang, S. and Wang, M. Y. (2006). Radial basis functions and level set method for structural topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65(12) :2060–2090.
- Watanabe, N., Wang, W., Taron, J., and Kolditz, O. (2012). Lower-dimensional interface elements with local enrichment : application to coupled hydro-mechanical problems in discretely fractured porous media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 90(8) :1010–1034.
- Wells, G. N. (2001). *Discontinuous modelling of strain localisation and failure*. PhD thesis, Delft University of Technology.
- Wells, G. N. and Sluys, L. J. (2001). A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(12) :2667–2682.
- Williams, M. (1957). On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*, 24 :109–114.
- Wilson, W. and Yu, I. (1979). The use of the J-integral in thermal stress crack problems. *International Journal of Fracture*, 15(4) :377–387.
- Yagawa, G. and Horie, T. (1982). Cracked beam under influence of dynamic electromagnetic force. *Nuclear Engineering and Design*, 69(1) :49–55.
- Yvonnet, J., He, Q.-C., Zhu, Q.-Z., and Shao, J.-F. (2011). A general and efficient computational procedure for modelling the Kapitza thermal resistance based on XFEM. *Computational Materials Science*, 50(4) :1220–1224.
- Zabaras, N., Ganapathysubramanian, B., and Tan, L. (2006). Modelling dendritic solidification with melt convection using the extended finite element method. *Journal of Computational Physics*, 218(1) :200–227.
- Zamani, A. and Eslami, M. R. (2010). Implementation of the extended finite element method for dynamic thermoelastic fracture initiation. *International Journal of Solids and Structures*, 47(10) :1392–1404.
- Zamani, A., Gracie, R., and Eslami, M. R. (2010). Higher order tip enrichment of eXtended Finite Element Method in thermoelasticity. *Computational Mechanics*, 46(6) :851–866.

Zi, G. and Belytschko, T. (2003). New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(15) :2221–2240.

Zolochovsky, A., Hop, J., Servant, G., Foosnaes, T., and Oye, H. A. (2003). Creep and sodium expansion in a semigraphitic cathode carbon. *LIGHT METALS- 2003*, pages 595–602.