

BOCAR AMADOU WANE

DISCRÉTISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT LINÉAIRES

Mémoire présenté
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval
dans le cadre du programme de maîtrise en mathématiques
pour l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc)

FACULTÉ DES SCIENCES ET GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

2008

© Bocar Amadou Wane, 2008

Résumé

Dans ce travail on s'intéresse à la résolution des équations de Saint-Venant par la méthode des éléments finis. Deux tests numériques sont présentés en utilisant deux paires d'éléments finis : $P_1^{NC} - P_1$ et $RT0 - P_0$. Lorsque le système d'équations de Saint-Venant admet une solution analytique, cette solution est comparée avec celle obtenue par la méthode numérique pour montrer la robustesse de ces éléments finis.

Abstract

In this work we are interested in solving shallow-water equations using the finite element method. Two numerical tests are presented using two pairs of finite element : $P_1^{NC} - P_1$ and $RT0 - P_0$. When the system of shallow-water equations admits an analytical solution, this solution is compared with that obtained by the numerical method to demonstrate the robustness of these finite elements.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de recherche, Robert Guénette, professeur au département de mathématiques et de statistique de l'Université Laval. Ses conseils judicieux, sa patience, sa disponibilité, son appui financier et la confiance qu'il m'a témoignée à mon arrivée à l'Université Laval m'ont été d'une aide précieuse et ont assuré la réussite de ce projet.

Je tiens également à remercier le Pr Roger Pierre non seulement pour son support moral mais aussi de m'avoir donné la chance d'enseigner au département de mathématiques et statistique de l'Université Laval. Un remerciement particulier à mes examinateurs le Pr Roger Pierre et le Pr Hassan Manouzi, pour avoir accepté d'allouer du temps estival à la lecture et à l'évaluation de ce travail. Vos suggestions et commentaires furent appréciés.

Je remercie aussi le Pr Daniel Le Roux pour m'avoir donné dès mon arrivée des paramètres pour valider mes calculs. Un merci spécial à tout le personnel du département de mathématiques et de statistique de l'Université Laval.

Un grand merci à mes collègues pour leur aide et les discussions intéressantes que nous avons pu partager, en particulier Benoit Pouliot.

Je ne saurais terminer sans remercier mes parents et ma famille qui m'ont toujours soutenu et accompagné tout au long de mes études.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé	ii
Abstract	iii
REMERCIEMENTS	iv
LISTE DES FIGURES	vii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I. Modèle mathématiques	5
1.1 Équation de Navier -Stokes	5
1.2 Force de Coriolis	8
1.2.1 Approximation de Boussinesq	10
1.2.2 Approximation hydrostatique	11
1.3 Équation de Saint-Venant	12
1.4 Les ondes barotropiques linéaires	17
1.4.1 Ondes de Kelvin	21
1.4.2 Ondes de Rossby	22
1.4.3 Ondes d'inertie-gravité	24
CHAPITRE II. Discrétisation de l'équation de Saint-Venant	26
2.1 Formulation variationnelle	27
2.2 Discrétisation en temps	29
2.3 Espaces d'éléments finis	32

2.4	Paires d'éléments finis	37
2.4.1	$\mathbf{P}_1^{\text{NC}} - \mathbf{P}_1$	38
2.4.2	Formulation variationnelle pour l'élément fini : $\mathbf{P}_1^{\text{NC}} - \mathbf{P}_1$	40
2.4.3	Résolution de l'équation de Saint-Venant discrète	41
2.4.4	$\mathbf{RT0} - \mathbf{P}_0$	42
2.4.5	Formulation variationnelle pour l'élément fini : $\mathbf{RT0} - \mathbf{P}_0$	42
CHAPITRE III. RÉSULTATS NUMÉRIQUES		44
3.1	Propagation des ondes de gravité dans un domaine circulaire	44
3.2	Propagation d'un tourbillon dans le golfe du Mexique	49
Conclusion et Perspectives		71
BIBLIOGRAPHIE		72

LISTE DES FIGURES

1.1	Modèle de Saint-Venant	14
2.2	Position des noeuds pour l'élément P_1	33
2.3	Position des noeuds pour l'élément P_1^{NC}	34
2.4	L'élément $RT0$	36
3.5	Maillage pour le problème des ondes de gravité.	47
3.6	Maillage pour le problème des ondes de Rossby	52
3.7	Onde de gravité à différents stades pour la paire $P_1^{NC} - P_1$	56
3.8	Isolignes de l'élévation de la surface à différents stades de propagation des ondes de gravité et de la dispersion pour la paire $P_1^{NC} - P_1$	58
3.9	Onde de gravité à différents stades pour la paire $RT0 - P_0$	60
3.10	Isolignes de l'élévation de la surface à différents stades de propagation des ondes de gravité et de la dispersion pour la paire $RT0 - P_0$	62
3.11	Isolignes de l'élévation de la surface à différentes semaines de propagation d'un tourbillon pour la paire $P_1^{NC} - P_1$	64
3.12	Isolignes de $\ \mathbf{u}\ $ à différentes semaines de propagation d'un tourbillon pour la paire $P_1^{NC} - P_1$	66
3.13	Isolignes de l'élévation de la surface à différentes semaines de propagation d'un tourbillon pour la paire $RT0 - P_0$	68
3.14	Isolignes de $\ \mathbf{u}\ $ à différentes semaines de propagation d'un tourbillon pour la paire $RT0 - P_0$	70

INTRODUCTION

Le réchauffement climatique, également appelé réchauffement planétaire ou réchauffement global, est un phénomène d'augmentation de la température moyenne des océans et de l'atmosphère à l'échelle mondiale et sur plusieurs années. Dans son acception commune, ce terme est appliqué au changement climatique observé depuis environ vingt-cinq ans, c'est-à-dire depuis la fin du XXe siècle. La plupart des scientifiques attribuent à ce réchauffement global une origine humaine. C'est le Groupe d'experts Intergouvernemental sur l'Évolution du Climat (GIEC) qui détermine ce consensus scientifique.

Le climat global de la Terre a de tout temps connu des modifications, suivant différents cycles climatiques de réchauffement puis de refroidissement, qui diffèrent par leur durée (de quelques milliers à plusieurs millions d'années), mais aussi par leur amplitude. Différentes données obtenues à l'aide de marégraphes et de satellites ont été étudiées. Leur analyse suggère que le niveau de la mer s'est élevé au cours du XXe siècle de plusieurs dizaines de centimètres, et qu'il continue à s'élever régulièrement. Cette élévation du niveau de la mer peut aussi être observée indirectement par ses conséquences sur l'environnement, comme c'est le cas au Nouveau-Brunswick.

La prévision par les scientifiques de l'évolution future du climat a été rendue possible par l'utilisation de modèles informatiques. Ces modèles, dits de circulation générale, simulent les déplacements et les températures des masses atmosphériques et océaniques. Les modèles utilisés pour prédire le réchauffement planétaire futur peuvent aussi être utilisés pour simuler les conséquences de ce réchauffement sur les autres paramètres physiques de la terre, comme les calottes de glace, les précipitations ou le niveau des mers.

Dans ce domaine, un certain nombre de conséquences du réchauffement climatique font l'objet d'un consensus parmi les climatologues.

Une des conséquences du réchauffement planétaire sur lesquelles s'accordent les scientifiques est une montée du niveau des océans. Deux phénomènes engendrent cette élévation :

- l'augmentation du volume de l'eau due à son réchauffement (dilatation thermique),
- et l'ajout d'eau supplémentaire provenant de la fonte des calottes glaciaires continentales.

C'est sous cet angle que nous considérons dans ce mémoire deux cas de tests idéalisés et représentant des éléments de la circulation océanique. Pour modéliser ces composantes d'écoulement, nous utilisons le modèle de Saint-Venant (shallow water equations). Celui-ci s'applique à des écoulements pour lesquels une des dimensions est nettement inférieure aux deux autres. Les océans correspondent assez bien à cette réalité puisque leur profondeur, qui est en moyenne d'environ 4 kilomètres, est bien inférieure à leur largeur qui se mesurent en millier de kilomètres.

L'avantage de ce modèle, c'est qu'il permet de passer d'un domaine spatial tridimensionnel à un domaine spatial bidimensionnel. Ceci représente un gain énorme en terme de coût de calculs. Ce gain a un prix, les phénomènes qui sont fondamentalement tridimensionnels ne peuvent pas être modélisés adéquatement. De plus, le choix d'une méthode numérique efficace et précise pour la résolution des équations de Saint-Venant n'est pas facile.

Dans le cas de la simulation des ondes de gravité, le système d'équations admet une solution exacte et le résultat obtenu est comparé avec le résultat

numérique. En général, les systèmes d'équations représentant les problèmes étudiés ne possèdent pas une solution analytique. Nous avons donc recours à des méthodes numériques pour résoudre les équations.

La méthode numérique que nous allons adopter est la méthode des éléments finis dans un repère eulérien. Mais il existe d'autres méthodes numériques utilisées, par exemple la méthode des différences finies. L'inconvénient de cette méthode est sa difficulté à travailler sur des domaines possédant des frontières irrégulières. Dans la modélisation océanique, les domaines sont en général irréguliers. D'autres façons de résoudre le problème sont possibles telles que l'utilisation d'une formulation semi-lagrangienne, les éléments spectraux, la méthode des volumes finis ou encore la transformation des équations en une équation des ondes.

Trouver une bonne paire pour résoudre les équations de Saint-Venant n'est pas un travail facile. En général, on note la présence de modes numériques mis en évidence par R. Walter et G. Carey [15]. En effet, il arrive au moment de la discrétisation des équations aux dérivées partielles d'introduire des anomalies qui n'ont rien de physique. Ces anomalies peuvent se manifester de diverses manières, soit par des oscillations dans la solution, des informations qui ne sont pas bien captées ou par une convergence moins rapide vers la solution.

Afin d'éliminer les modes numériques, plusieurs approches ont été considérées, par exemple transformer les équations en une équation d'ondes [13] ou décaler les variables sur la grille de calcul (maillage). Dans ce travail, on propose deux paires d'éléments finis qui représentent bien les solutions ; il s'agit de la paire $P_1^{NC} - P_1$ et de la paire $RT0 - P_0$. Ce mémoire comporte trois chapitres. Dans le premier chapitre, les équations de Saint-Venant sont

obtenues à partir des équations de Navier-Stokes. Dans le deuxième chapitre, les équations de Saint-Venant sont discrétisées en utilisant la méthode des éléments finis. Enfin dans le troisième chapitre, on présente les résultats numériques basés sur deux tests pour mettre en évidence la robustesse des deux paires d'éléments finis choisies. Une conclusion complète l'étude..

CHAPITRE I

Modèle mathématiques

Dans ce chapitre, on établit le modèle de Saint-Venant. Le modèle mathématique de Saint-Venant à deux dimensions (2 D) dans le plan horizontal découle de l'intégration verticale des équations de Navier-Stokes à trois dimensions (3 D) et en posant différentes hypothèses fondamentales dont celle de la pression hydrostatique.

1.1 Équation de Navier -Stokes

La mécanique des fluides est la branche de la physique qui étudie les écoulements de fluides, c'est-à-dire des liquides et des gaz lorsque ceux-ci subissent des forces ou des contraintes. Elle est actuellement étendue à des écoulements solides tels les glaciers. Le mouvement des liquides et des gaz est régi par les mêmes équations : les équations de Navier-Stokes mais à la différence qu'en général, les liquides sont considérés comme étant incompressibles et les gaz compressibles. La mécanique des fluides se compose de deux grandes sous-branches. Il y a la statique des fluides, ou hydrostatique qui étudie les fluides au repos. C'est historiquement le début de la mécanique des fluides, avec la poussée d'Archimède : l'étude de la pression. Ensuite, il y a la dynamique des fluides qui étudie les fluides en mouvement. Les fluides peuvent aussi se classer en deux familles relativement à leur viscosité, une

de leur caractéristique physico-chimique. La famille des fluides "newtoniens" (comme l'eau, l'air et la plupart des gaz) et celle des fluides "non newtoniens" (quasiment tout le reste : le sang, les gels, les boues, les polymères fondus, les suspensions, les émulsions...). Les fluides "newtoniens" ont une viscosité constante ou qui ne peut varier qu'en fonction de la température. Les fluides "non newtoniens" ont en plus, la particularité d'avoir leur viscosité qui varie en fonction de la vitesse et des contraintes qu'ils subissent lors de l'écoulement. Comme autres branches de la mécanique des fluides, on distingue l'hydraulique, l'hydrodynamique, l'aérodynamique, etc. Une nouvelle approche a vu le jour depuis quelques décennies : la mécanique des fluides numérique (CFD ou Computational Fluid Dynamics en anglais), qui simule l'écoulement des fluides en résolvant les équations qui les régissent à l'aide de l'ordinateur. La mécanique des fluides a de nombreuses applications dans divers domaines comme l'ingénierie navale, l'aéronautique, l'étude de l'écoulement du sang (hémodynamique), mais aussi la météorologie, la climatologie ou encore l'océanographie. Dans ce travail, nous ne nous intéresserons qu'à ce dernier point.

Afin de décrire un fluide dans un repère eulérien, les variables d'intérêt sont la vitesse $\mathbf{u} = (u, v, w)$, la pression p et la densité ρ d'une particule. Dans le contexte de la modélisation océanique, la salinité de l'eau de mer est probablement la plus importante étant donné son impact sur la densité et le point de congélation de l'eau. Une hypothèse importante est que les écoulements considérés sont **incompressibles**. En première approximation, la plupart des écoulements de liquides présentent un comportement incom-

pressible. Cette hypothèse permet de simplifier l'équation de continuité, aussi appelée équation de conservation de la masse.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.1)$$

Comme ρ est constant, on en déduit

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.2)$$

où

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

est le gradient et l'opérateur $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$ est la dérivée matérielle ou totale.

Pour avoir les trois équations de conservation de la quantité de mouvement, on applique la deuxième loi de Newton en coordonnées cartésiennes, pour obtenir

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \nabla \sigma, \quad (1.3)$$

où μ est la viscosité moléculaire du fluide considéré et σ est le potentiel qui correspond à l'ensemble des autres forces conservatrices agissant sur la particule de fluide. Ces hypothèses permettent de simplifier les équations complètes de Navier-Stokes puisque l'équation de continuité (1.2) et les équations de conservation de la quantité de mouvement (1.3) suffisent pour fermer le système. Ce système est bien posé avec les conditions initiales données et les conditions aux limites classiques ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$) et glissement tangentiel nul le long de la frontière ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 0$). La condition aux limites se résume donc à $\mathbf{u} = 0$ sur la frontière et s'applique à tout le fluide newtonien dans un domaine avec des murs fixes non poreux. Dans ce travail, on considèrera le potentiel gravitationnel et nous devons aussi tenir compte de la force de Coriolis.

1.2 Force de Coriolis

À la fin du XVIIIe siècle et au début du XIX siècle, la mécanique connut de grands développements théoriques. En tant qu'ingénieur, Coriolis s'intéressait à rendre la mécanique théorique applicable dans la compréhension et le développement de machines industrielles. C'est dans son article *Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps (1835)* que Coriolis décrit mathématiquement la force qui devait porter son nom. Dans cet article, la force de Coriolis apparaît comme une composante supplémentaire à la force centrifuge, ressentie par un corps en mouvement relativement à un référentiel en rotation, comme cela pourrait se produire par exemple dans les rouages d'une machine. L'argumentation de Coriolis était basée sur une analyse du travail et de l'énergie potentielle et cinétique dans les systèmes en rotation. De nos jours, la démonstration la plus utilisée pour enseigner la force de Coriolis utilise les outils de la cinématique. Ce n'est qu'à la fin du XIXe siècle que cette force fit son apparition dans la littérature météorologique et océanographique. Le terme force de Coriolis apparut au début du XXe siècle. Pour la plupart des applications en géophysique, il est plus naturel de considérer la terre comme fixe. Ceci nous force à passer d'un repère inertiel à un repère accéléré et nous amène à introduire de nouvelles forces pour tenir compte du changement de repère voir [8] pour cette étude.

Pour exprimer l'accélération de Coriolis sous une forme pratique, on doit faire quelques simplifications. Soit ϕ la latitude de l'origine du système de

référence, le vecteur de rotation peut s'exprimer comme suit

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega(\cos(\phi)\mathbf{i} + \sin(\phi)\mathbf{j}),$$

le terme de Coriolis s'écrit alors

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = 2\Omega((w\cos(\phi) - v\sin(\phi))\mathbf{i} + u\sin(\phi)\mathbf{j} - u\cos(\phi)\mathbf{k}),$$

où Ω est le module du vecteur de rotation $\boldsymbol{\Omega}$. En général pour les écoulements océaniques, la composante verticale de la vitesse w est très faible, donc avec

$$w \ll u \quad \text{et} \quad w \ll v,$$

on obtient une expression simplifiée suivante :

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = 2\Omega(-v\mathbf{i} + u\mathbf{j})\sin(\phi).$$

Si on fait des simulations dans des régions à grande échelle, une approximation β -plan est nécessaire pour tenir compte de la variation de $\sin(\phi)$ avec la latitude. Cette approximation est obtenue en faisant un développement de Taylor du premier ordre de $\sin(\phi)$ autour de la référence ϕ_0 . Comme le rayon terrestre $R = 6400$ km est généralement plus grand que y dans les domaines de calcul, il est raisonnable d'utiliser l'approximation du sinus pour les petits angles :

$$\phi - \phi_0 \approx \sin(\phi - \phi_0),$$

On en déduit que

$$\sin(\phi) \approx \sin(\phi_0) + (\phi - \phi_0)\cos(\phi_0)$$

$$\sin(\phi) \approx \sin(\phi_0) + \sin(\phi - \phi_0)\cos(\phi_0)$$

$$\sin(\phi) \approx \sin(\phi_0) + \frac{y}{R}\cos(\phi_0).$$

Ainsi, dans les calculs impliquant la force de Coriolis, nous avons utilisé l'approximation $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} \approx f\mathbf{k} \times \mathbf{u}$, où $f = f_0 + \beta y$ avec $f_0 = 2\Omega \sin(\phi_0)$ et $\beta = 2\Omega \cos(\phi_0)/R$.

1.2.1 Approximation de Boussinesq

Joseph Valentin Boussinesq bouleversa la mécanique des solides, la thermodynamique et surtout la mécanique des fluides en 1903 avec son livre *Théorie analytique de la Chaleur*. Dans ce livre, il formula une hypothèse, l'approximation de Boussinesq, qui s'énonce de la manière suivante : *il faut savoir que dans la plupart des mouvements provoqués par la chaleur sur nos fluides pesants, les volumes ou les densités se conservent très peu, quoique la variation correspondante du poids de l'unité de volume soit justement la cause des phénomènes qu'il s'agit d'analyser*. De là résulte la possibilité de négliger les variations de la densité, là où elles ne sont pas multipliées par la gravité g , tout en conservant, dans les calculs, leur produit par celle-ci. Les équations qui régissent l'état de l'atmosphère telles que nous les connaissons aujourd'hui sont notamment dûes à la persévérance de Joseph Valentin Boussinesq. Mais la théorie de Boussinesq n'est pas valable dans tous les mouvements provoqués par la chaleur ; d'où la limite de l'approximation de Boussinesq. Il est approprié de représenter la densité comme la somme d'une valeur de référence constante ($\rho_0 = 1035 \text{ kg m}^{-3}$) et d'une petite perturbation en temps et en espace $\tilde{\rho}$. On a :

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0 + \tilde{\rho}(x, y, z, t) \quad (1.4)$$

L'approximation de Boussinesq consiste alors à remplacer ρ par ρ_0 partout excepté dans les termes contenant le champ de gravité $\mathbf{g} = g\mathbf{k}$, voir [8].

1.2.2 Approximation hydrostatique

La plupart des modèles de prévision actuels utilisent l'équation hydrostatique $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$, qui suppose un équilibre parfait à la verticale entre la force de pression et la force gravitationnelle. Néanmoins, si l'atmosphère était dans un état d'équilibre hydrostatique parfait, il n'y aurait ni déplacement vertical, ni nuages, ni précipitations. En utilisant les deux approximations précédentes, les équations se résument comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial z} - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial z} + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (1.8)$$

Le nombre de Rossby est la mesure de l'influence de la rotation sur un phénomène particulier. Soit L la longueur caractéristique du mouvement horizontal et U sa vitesse caractéristique. Une particule animée de cette vitesse parcourt une distance L en un temps $\frac{L}{U}$. Si cette période est beaucoup plus courte que la période de la rotation de la terre, la particule ressentira à peine l'effet de la rotation pendant l'échelle de temps du mouvement. On considère que cet effet se fait sentir dès que

$$\frac{U}{2\Omega L} \leq 1. \quad (1.9)$$

La paramètre sans dimension R_0 est appelé nombre de Rossby

$$R_0 = \frac{U}{2\Omega L}. \quad (1.10)$$

1.3 Équation de Saint-Venant

Dans cette section on présentera le modèle de Saint-Venant qui modélise les écoulements de faible profondeur. Ce qui veut dire que les phénomènes étudiés doivent avoir une longueur caractéristique verticale nettement inférieure à leur longueur caractéristique horizontale. La dimension du domaine n'est pas un facteur important. Par exemple, les orages violents et les ouragans sont les manifestations les plus importantes et les plus spectaculaires d'événements qui prouvent l'hypothèse de faible profondeur dans l'atmosphère. Une autre manière de voir l'hypothèse de faible profondeur dans le cas de la représentation d'une onde, est que la longueur d'onde doit être nettement supérieure à la profondeur du domaine. Une conséquence de ceci est que les vagues de surface ne peuvent généralement pas être représentées dans le modèle de Saint-Venant puisqu'il s'agit d'ondes courtes. L'hypothèse d'incompressibilité et celle de la réduction à un modèle bidimensionnel ne nous permettent pas de tenir compte simplement de la stratification qui est observée dans l'atmosphère et dans l'océan. Malgré ces restrictions, le modèle de Saint-Venant

est assez puissant pour représenter des phénomènes intéressants. Bien que le but de ce travail soit orienté vers la modélisation océanique, d'autres types de problèmes peuvent être abordés avec les équations de Saint-Venant, du moment que les hypothèses soient respectées. On considère les équations non-visqueuses de Navier-Stokes auxquelles on a ajouté la force de Coriolis et dans lesquelles la combinaison du potentiel gravitationnel et de la force centrifuge est donnée par $\sigma = -gz$:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\nabla z, \quad (1.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.12)$$

De manière analogue à ce que fait J.Pedlosky dans son livre [8], on applique une analyse d'ordre de grandeur des équations (1.11-1.12). Cette analyse nous mène à une simplification fondamentale des équations de Saint-Venant.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (1.13)$$

Cette relation est la balance hydrostatique. Elle ne signifie pas qu'il n'y a pas de mouvements verticaux mais simplement que la force verticale du gradient pression est en équilibre avec la gravité. Cette expression s'intègre exactement lorsque la densité est constante et donne

$$p(x, y, z, t) = -\rho g z + K(x, y, t). \quad (1.14)$$

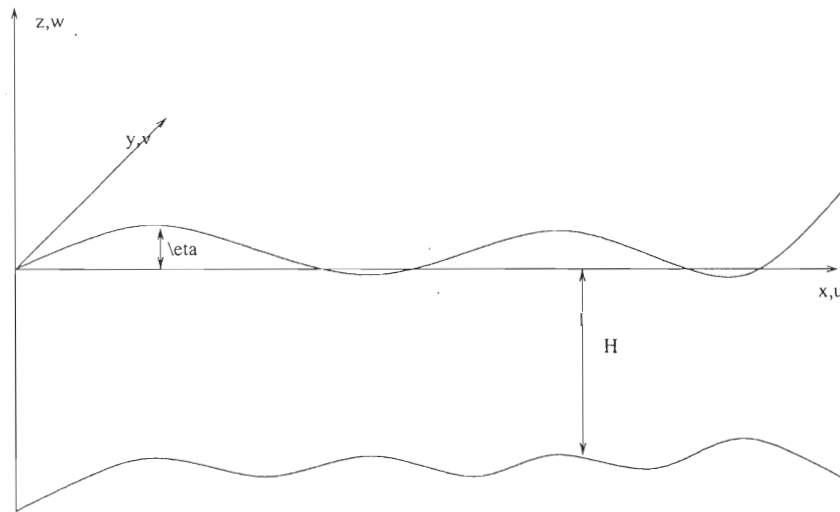


FIG. 1.1 – Modèle de Saint-Venant

Comme présenté à la figure 1.1, on introduit la variable η qui est la position de la surface libre par rapport à une hauteur de référence. On verra que l'élevation η correspond à la pression dans les équations de Navier-Stokes. H est la profondeur du bassin par rapport à cette même hauteur de référence. Bien que la profondeur soit constante dans tous les tests présentés dans ce travail, la réalité peut être plus complexe et le modèle de Saint-Venant permet d'en tenir compte tant que la bathymétrie variable n'induit pas des mouvements verticaux importants. À la surface, on a une pression de référence

constante $p(x, y, \eta(x, y, t), t) = p_0$ et donc

$$\int_z^\eta \frac{\partial p}{\partial z} dz = \int_z^\eta -\rho g dz \quad (1.15)$$

$$p(x, y, \eta(x, y)) - p(x, y, z) = -\rho g (\eta - z) \quad (1.16)$$

$$p_0 - p(x, y, z) = -\rho g (\eta - z) \quad (1.17)$$

$$p(x, y, z, t) = -\rho g z + \rho g \eta(x, y, t) + p_0 \quad (1.18)$$

$$= \rho g (\eta(x, y, t) - z) + p_0 \quad (1.19)$$

Ainsi, le gradient de pression se réexprime comme gradient de l'élévation

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (1.21)$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad \nabla p = g \rho \nabla \eta. \quad (1.22)$$

C'est ce gradient qui introduit le forçage dans le système et il est indépendant de z . En découplant les deux équations horizontales de quantité de mouvement de la dynamique verticale, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - 2\Omega \sin(\phi)v = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + 2\Omega \sin(\phi)u = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (1.24)$$

Les composantes de la vitesse u et v ne dépendant pas de z , il est facile d'intégrer verticalement l'équation de continuité (1.12). Calculons la composante verticale de la vitesse w à la surface et au fond du bassin. Ce fond est solide et la condition aux limites $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ doit être respectée. La position

du fond est définie par la surface $z = -H(x, y)$ et la normale est donnée par

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{\partial H}{\partial x}, -\frac{\partial H}{\partial y}, -1\right) \quad (1.25)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \iff w(x, y, -H(x, y), t) = -u \frac{\partial H}{\partial x} - v \frac{\partial H}{\partial y}. \quad (1.26)$$

À la surface du bassin, on a :

$$\frac{Dz}{Dt} = \frac{D\eta}{Dt}, \quad (1.27)$$

$$w(x, y, \eta(x, y, t), t) = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (1.28)$$

En intégrant (1.12) on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-H}^{\eta} \frac{\partial w}{\partial z} dz + \int_{-H}^{\eta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz \\ 0 &= w|_{-H}^{\eta} + (\eta + H) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ 0 &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \left(u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right) + (\eta + H) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ 0 &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(u \frac{\partial(\eta + H)}{\partial x} + v \frac{\partial(\eta + H)}{\partial y} \right) + (\eta + H) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ 0 &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot ((\eta + H)\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Dans la suite de ce document, la notation bidimensionnelle des opérateurs gradient, divergence et laplacien est utilisée. On utilise l'approximation β -plan afin de réécrire les équations (1.23-1.24)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (1.31)$$

Les équations (3.2) et (1.30-1.31) forment les équations de Saint-Venant. On constate qu'une des équations a été éliminée ainsi qu'une variable dépendante

(w) et une variable indépendante (z). Ceci constitue des avantages du modèle. Cette approche nous permet plus facilement de trouver les solutions analytiques dans certains cas particuliers. D'un point de vue numérique, la réduction d'une dimension du système et d'une moindre mesure l'élimination d'une inconnue (w) et de l'équation associée représentent un gain énorme en terme de coût de calcul. Pour des fins d'analyses théoriques et pour résoudre des problèmes simples, on utilise souvent les équations linéaires de Saint-Venant :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + f\mathbf{k} \times \mathbf{u} + g\nabla\eta = 0 \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (H\mathbf{u}) = 0 \quad (1.33)$$

Le modèle linéaire est valide si $\eta \ll H$ et que le terme d'advection est négligeable.

1.4 Les ondes barotropiques linéaires

Grace à la forme linéaire des équations de Saint-Venant, on peut étudier une large classe d'ondes qui sont importantes dans la dynamique des fluides géophysiques. Dans cette section, nous donnerons une description de trois familles d'ondes supportées par un fluide dans un repère en rotation. Les ondes d'inerties-gravité, les ondes de Kelvin et les ondes de Rossby. On a l'existence de solutions analytiques pour les familles d'ondes équatoriales, c'est-à-dire $f_0 = 0$. Le lecteur intéressé par les ondes de la dynamique aux latitudes moyennes, trouvera tous les détails à ce sujet dans les ouvrages de Bourgault et Sadourny [4] et Khanta et al [7]. Dans cette étude, nous

supposons que la hauteur H du fluide est constante et que l'approximation du β -plan est utilisée. Les équations linéaires de Saint-Venant s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad (1.35)$$

$$g \frac{\partial \eta}{\partial t} + C^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad (1.36)$$

avec $f = \beta y$ et $C^2 = gH$. Il s'agit d'un système d'équations aux dérivées partielles dont les coefficients dépendent de y . En utilisant les quantités normalisées par la vitesse des ondes de gravité C , le rayon de déformation de Rossby équatorial $a = (\frac{C}{\beta})^{\frac{1}{2}}$ et la période inertielle équatoriale $T = (\beta C)^{-\frac{1}{2}}$, on normalise les variables suivantes :

$$t = T t',$$

$$x = a x', y = a y',$$

$$\eta = H \eta',$$

$$u = C u', \quad (1.37)$$

$$v = C v'. \quad (1.38)$$

Soit k le nombre d'onde, $C_p = \frac{\omega}{k}$ la vitesse de phase, et $C_g = \frac{d\omega}{dk}$ la vitesse de groupe. Ici les apostrophes dénotent les quantités normalisées. On obtient, en omettant les apostrophes, les équations suivantes :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - yv + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + yu + \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0. \quad (1.41)$$

L'ensemble des solutions de ces équations forme une famille d'ondes dont l'étude est décisive pour la compréhension de la dynamique équatoriale. Pour alléger l'écriture, nous adopterons la notation f_t pour désigner la dérivée partielle de f par rapport à la variable t . En dérivant (1.41) deux fois par rapport au temps, on obtient

$$v_{ttt} + yu_{tt} + \eta_{tty} = 0. \quad (1.42)$$

Mais en dérivant (1.40) par rapport à t , on a

$$u_{tt} = yv_t - \eta_{xt}.$$

Si l'on dérive (1.39), d'abord par rapport à t et ensuite par rapport à y , on arrive à

$$\eta_{tty} = -(u_{xyt} + v_{yyt})$$

On en déduit que l'équation (1.42) peut se réécrire sous la forme

$$v_{ttt} + yu_{tt} + \eta_{tty} = v_{ttt} + y(yv_t - \eta_{xt}) - u_{xyt} - v_{yyt} = 0. \quad (1.43)$$

En dérivant (1.39) par rapport à x , on tire la valeur de $\eta_{tx} = -(u_{xx} + v_{xy})$.

En reportant cette valeur dans (1.43), on obtient

$$v_{ttt} + y^2v_t + y(u_{xx} + v_{xy}) - u_{xyt} - v_{yyt} = 0. \quad (1.44)$$

On dérive (1.40) par rapport à y et on obtient

$$u_{ty} - v - yv_y + \eta_{xy} = 0 \quad (1.45)$$

L'équation (1.41) est dérivée par rapport à x et on obtient

$$v_{tx} + yu_x + \eta_{xy} = 0. \quad (1.46)$$

En soustrayant les équations (1.45) et (1.46), on obtient

$$y(u_x + v_y) = u_{yt} - v_{xt} - v. \quad (1.47)$$

En dérivant (1.47) par rapport à x , on a

$$y(u_{xx} + v_{xy}) = u_{xyt} - v_{xxt} - v_x.$$

Si l'on reporte cette valeur dans (1.44) on obtient

$$(v_{xx} + v_{yy})_t + v_x - v_{ttt} - y^2v_t = 0. \quad (1.48)$$

Dans cette étude nous nous intéressons aux solutions de la forme

$v(x, y, t) = V(y)e^{i(kx - \omega t)}$. Pour que $v(x, y, t)$ soit solution, $V(y)$ doit vérifier

l'équation suivante :

$$V_{yy} + (\omega^2 - k^2 - \frac{k}{\omega} - y^2)V = 0 \quad (1.49)$$

Nous nous intéressons à la partie réelle de $v(x, y, t)$. Maintenant, nous cherchons les solutions qui satisfont $V \rightarrow 0$ lorsque $y \rightarrow \infty$. Ce type de solutions est étudiée dans *Khanta et al Numerical models of ocean* et se mettent sous la forme

$$V(y) = 2^{-\frac{m+1}{2}} H_{m+1}(y) e^{(\frac{-y^2}{2})} \quad (1.50)$$

où les H_{m+1} sont les polynômes d'Hermite d'ordre $m + 1$. Reportant cette valeur de V dans (1.48), on obtient la relation de dispersion

$$\omega^2 - k^2 - \frac{k}{\omega} = 2m + 1; \quad m = -1, 0, 1, 3, \dots \quad (1.51)$$

La valeur $m = -1$ correspond aux ondes de Kelvin, tandis que $m = 0$ donne les ondes de Yanai; pour $m = 1, 2, \dots$, on obtient les ondes de Rossby et de gravité. Les solutions $V(y)$ peuvent s'écrire en termes de fonctions d'Hermite définies par :

$$Y_{m+1}(y) = \frac{H_{m+1}(y)e^{(-\frac{y^2}{2})}}{(2^{m+1}(m+1)!\pi^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}, \quad m = -1, 0, 1, 2, \dots \quad (1.52)$$

Dans cette équation $H_m(y)$ sont les polynôme d'Hermite qui s'écrivent pour $m = 0, 1, 2, \dots$

$$H_0(y) = 1, \quad H_1(y) = 2y, \quad H_2(y) = 4y^2 - 2, \quad H_3(y) = 8y^3 - 12y.$$

1.4.1 Ondes de Kelvin

Ces ondes sont obtenues en posant $m = -1$, $\omega = k$. Pour ces valeurs, la relation de dispersion (1.51) est vérifiée. Comme l'onde se propage suivant la direction ox , on pose $v = 0$ en le reportant dans les équations (1.39-1.41). En utilisant quelques techniques de résolution, on en déduit que : $C_p = C_g = 1$ et

$$\eta = e^{(-\frac{y^2}{2})} \cos(kx - \omega t), \quad (1.53)$$

$$u = \eta, \quad (1.54)$$

$$v = 0. \quad (1.55)$$

Cette onde est appelée ondes de Kelvin. Une onde de Kelvin est une onde de gravité océanique de taille caractéristique assez grande pour que la force de Coriolis se fasse ressentir en présence d'une couche limite. Physiquement, c'est une onde de gravité (la marée par exemple) qui, à cause de la force de Coriolis, vient « s'écraser » contre une côte.

Ces ondes décrivent assez bien un certain nombre d'aspects de la marée. En présence d'une côte située sur la droite de l'onde (dans l'hémisphère Nord), une onde de Kelvin se forme et on observe une décroissance exponentielle de l'amplitude de l'onde lorsque l'on s'éloigne de la côte. La longueur caractéristique \sqrt{gH}/f est appelée rayon de Rossby ρ_R qui, comparée à l'échelle caractéristique de l'écoulement, donne l'importance relative de la force de Coriolis. L'existence de ces ondes dépendent de la présence de la rotation terrestre. Ces ondes ont une vitesse indépendante de la rotation terrestre, elles sont non dispersives. Ces ondes se propagent vers l'Est en suivant la côte à la droite (respectivement gauche) dans l'hémisphère Nord (respectivement Sud).

1.4.2 Ondes de Rossby

Dans ce cas de figure, $m \geq 1$ et $\omega \leq 1$, les fréquences sont plus petites que la fréquence inertielle équatoriale. Dans ce cas, on peut négliger le ω^2 dans la relation de dispersion (1.51). On obtient pour $m = 1, 2, \dots$:

$$\omega = \frac{-k}{k^2 + (2m + 1)}; \quad (1.56)$$

$$C_p = \frac{-1}{k^2 + (2m + 1)}$$

$$C_g = \frac{k^2 - (2m + 1)}{(k^2 + (2m + 1))^2}$$

$$\eta_m = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2m}Y_{m-1}(y)}{\omega + k} - \frac{\sqrt{(2m+2)}Y_{m+1}(y)}{\omega - k} \right) \sin(kx - \omega t) \quad (1.57)$$

$$u_m = -\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2m}Y_{m-1}(y)}{\omega + k} + \frac{\sqrt{(2m+2)}Y_{m+1}(y)}{\omega - k} \right) \sin(kx - \omega t)$$

$$v_m = Y_m(y) \cos(kx - \omega t) \quad (1.58)$$

On trouve des modes numériques lorsque $m = 1, 2, 3, 4, \dots$. Pour un mode donné, $C_g < 0$, l'énergie se propage vers l'Ouest. Ceci correspond à des valeurs de $|k| < \sqrt{(2m + 1)}$. Dans le cas contraire, c'est-à-dire pour $C_g > 0$, l'énergie se propage vers l'Est. Pour les valeurs de $|k| > \sqrt{(2m + 1)}$, on remarque que C_p est toujours négative. Les ondes de Rossby ou ondes planétaires sont des mouvements ondulatoires de la circulation atmosphérique ou océanique de grande longueur d'onde dont la présence est due à la variation de la force de Coriolis selon la latitude. Elles sont un sous-ensemble des ondes inertielles, identifiées en 1939 par Carl-Gustaf Rossby dans l'atmosphère. Ce dernier travailla la théorie pour les expliquer. Ces ondes ont généralement de faibles fréquences et se propagent très lentement dans les bassins océaniques. Elles se propagent dans la direction Ouest, et prennent des mois voire des années pour traverser les bassins océaniques. Malgré le fait qu'elles sont très lentes, les ondes planétaires ont des effets majeurs sur la circulation globale ainsi que sur le temps et le climat.

1.4.3 Ondes d'inertie-gravité

Les ondes d'inertie-gravité sont présentes partout dans l'atmosphère, elles ont une période proche de la durée du jour. Comme elles évoluent rapidement et ont une longueur d'onde verticale très courte, les modèles de prévision du temps et du climat ne peuvent pas les résoudre explicitement. Bien comprendre l'origine et la structure de ces ondes est donc fondamental. La théorie la plus fréquente explique l'origine de ces ondes par un phénomène d'ajustement dynamique se produisant lorsqu'un équilibre dynamique de grande échelle entre les forces de pression et l'accélération de Coriolis n'est plus satisfait. Selon cette théorie, lorsque cet équilibre est brisé, l'atmosphère tend à y retourner en émettant des ondes d'inertie-gravité; on parle d'ajustement géostrophique. Dans la réalité, ce déséquilibre n'apparaît pas de façon spontanée. Il varie dans le temps et cette variation temporelle a une influence importante sur l'amplitude des ondes générées. Ainsi, si l'agéostrophisme se développe lentement, et se traduit par une accélération F (appelée forçage) dans une direction x donnée, l'atmosphère peut compenser cette accélération par un transfert de quantité de mouvement angulaire dans la direction perpendiculaire à F sans émettre d'ondes d'inertie-gravité. Pour avoir la solution analytique de ces ondes, soit $m \geq 1$, $\omega > 1$ autrement dit la fréquence est plus grande que la fréquence inertielle équatoriale, on peut négliger le terme $\frac{-k}{\omega}$ dans la relation de dispersion (1.51). Ces ondes autrement appelées ondes de Poincaré ne sont pas influencées par la rotation de la terre. On déduit leur structure par :

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= k^2 + (2m + 1); \\
C_p &= \pm \sqrt{\left(1 + \frac{(2m + 1)}{k^2}\right)} \\
C_g &= \frac{\pm 1}{\sqrt{\left(1 + \frac{(2m+1)}{k^2}\right)}} \\
\eta_m &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{(2m)}Y_{m-1}(y)}{\omega + k} - \frac{\sqrt{(2m + 2)}Y_{m+1}(y)}{\omega - k} \right) \sin(kx - \omega t) \quad (1.59) \\
u_m &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{(2m)}Y_{m-1}(y)}{\omega + k} + \frac{\sqrt{(2m + 2)}Y_{m+1}(y)}{\omega - k} \right) \sin(kx - \omega t) \\
v_m &= Y_m(y) \cos(kx - \omega t). \quad (1.60)
\end{aligned}$$

Pour $m = 1, 2, \dots$

CHAPITRE II

Discrétisation de l'équation de Saint-Venant

Une question essentielle pour l'application de la méthode des éléments finis en océanographie est celle de trouver une paire d'éléments finis pour la vitesse et pour l'élévation de surface. Ce couple doit représenter correctement les flux géophysiques et ne pas permettre l'existence de modes numériques. Il doit permettre de respecter la conservation de la masse pour une longue période de simulation.

Les travaux sur l'analyse des éléments finis en matière de modélisation des océans et leur impact sur les modes numériques peuvent être trouvés dans (Walters et Carey et al. 1994 ; Westerink et coll 1994). L'origine de ces modes numériques réside dans le couplage de la dynamique et des équations de continuité. Ces modes ont été étudiés par Sani et al. (1981) pour les équations de Navier-Stokes incompressibles. On constate que l'ampleur des oscillations non physiques dépend de l'emplacement de la vitesse, de l'élévation de surface et du choix des fonctions de base pour les systèmes d'éléments finis. Quand un système numérique engendre un mode, on perd l'unicité de la solution. On retrouve aussi dans la littérature la méthode des différences finies pour la résolution des problèmes océaniques. Les méthodes utilisées sont les grilles d'Arakawa A, B, C, D et E (Arakawa, 1966) ainsi que la grille de CD (Adcroft et coll., 1999).

Dans ce travail, nous ne nous intéressons qu'à la méthode des éléments finis pour résoudre les équations de Saint-Venant linéaires dans le cas non visqueux. Grâce à leur simplicité inhérente, ces équations peuvent représenter un modèle océanique. Les équations de Saint-Venant sont aussi les plus simples modèles géophysiques permettant l'existence des ondes de gravité et de Rossby. Les ondes de Rossby sont beaucoup plus importantes pour les applications à grande échelle et devraient donc être bien représentées. On trouvera les détails de cette méthode dans les ouvrages F. Brezzi et M. Fortin [6].

Nous présenterons en premier la discrétisation en espace des équations de Saint-Venant ainsi que les espaces fonctionnels considérés. Ensuite, la discrétisation temporelle et enfin les espaces d'éléments finis vous seront présentés.

2.1 Formulation variationnelle

Dans cette section, nous considérons les équations de Saint-Venant linéaires :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} + g \nabla \eta = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (H \mathbf{u}) = 0, \quad (2.2)$$

sur un domaine physique Ω , qui est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 . On note par $\Gamma = \partial\Omega$ sa frontière. Pour commencer la discrétisation des équations de Saint-Venant par la méthode des éléments finis, on partitionne notre domaine Ω en sous-domaines formé de triangles. Cette triangulation est appelée maillage.

Les triangles sont plus flexibles que les quadrangles lorsqu'on veut représenter un domaine possédant une géométrie complexe ou raffiner le maillage là où la physique du problème doit être considérée plus précisément.

Soit τ_h la partition du domaine Ω en triangles de grandeur caractéristique h . D'une manière plus précise, cette partition est appelée un maillage si elle respecte les conditions suivantes :

- La partition couvre le domaine : $\Omega = \cup_{K \in \tau_h} K$.
- Les intérieurs de deux éléments distincts sont disjoints.
- Les triangles K ne sont pas dégénérés : $Aire(K) \neq 0$.
- L'intersection de deux éléments distincts est une arête complète ou un sommet.

On introduit les espaces fonctionnels que nous allons utiliser dans la suite :

$$L^2(\Omega) = \left\{ \phi \mid \int_{\Omega} \phi^2 d\Omega < \infty \right\}, \quad (2.3)$$

$$H^1(\Omega) = \left\{ \phi \mid \phi \in L^2(\Omega) \text{ et } \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \in L^2(\Omega) \right\}, \quad (2.4)$$

$$H(div, \Omega) = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2 \text{ et } \nabla \cdot \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \right\} \quad (2.5)$$

On définit l'espace des fonctions constantes par élément :

$$P_0 = \{ \varphi \mid \varphi|_K = cte, cte \in \mathbf{R} \forall K \in \tau_h \}. \quad (2.6)$$

Et on définit un produit scalaire au sens de $L^2(\Omega)$ par :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2. \quad (2.7)$$

Comme la frontière de Ω est un ensemble de mesure nulle dans \mathbb{R}^2 , l'imposition des conditions aux limites n'est pas à priori bien définie. Pour

réglé ce problème, on doit introduire le concept de trace au bord d'une fonction. Le résultat fondamental à connaître dans ce travail est que l'injection continue de $H^1(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$ permet de définir la trace et donne un sens aux intégrales des frontières. Comme la théorie relative à cet aspect est délicate, on se contente de référer le lecteur intéressé à l'ouvrage sur les espaces de Sobolev[11]. Faisons quelques hypothèses concernant les coefficients g , f_0 , et β qui sont des constantes positives. La bathymétrie H est choisie dans $H^1(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ et bornée. Soit $V \subset (H^1(\Omega))^2$ l'espace fonctionnel dans lequel est définie la vitesse \mathbf{u} et $Q \subset H^1(\Omega)$ celui dans lequel est définie l'élévation η . La formulation variationnelle des équations (2.1-2.2) est donnée par :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx + \int_{\Omega} f \mathbf{k} \times \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx + \int_{\Omega} g \nabla \eta \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in V, \quad (2.8)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \eta}{\partial t} \psi \, dx + \int_{\Omega} \nabla \cdot (H \mathbf{u}) \psi \, dx = 0 \quad \forall \psi \in Q. \quad (2.9)$$

2.2 Discrétisation en temps

Faisons quelques rappels sur les schémas numériques temporels utilisés en analyse numérique. Généralement, la discrétisation en temps est réalisée à l'aide de la méthode des différences finies. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{du}{dt} = f(u(t), t). \quad (2.10)$$

Pour discrétiser cette équation, on peut estimer la dérivée temporelle de diverses manières. On considère les plus simples formules, il s'agit de celles

d'Euler explicite et implicite :

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{t_{n+1} - t_n} = f(u_n, t_n), \quad (2.11)$$

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{t_{n+1} - t_n} = f(u_{n+1}, t_{n+1}) \quad (2.12)$$

où, par convention, u_n dénote l'approximation de $u(t_n)$ au temps $t_n = n\Delta t$ avec Δt le pas de temps. On obtient le θ -schéma obtenu par une combinaison convexe des schémas d'Euler explicite et implicite, ce qui donne :

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} = \theta f(u_{n+1}, t_{n+1}) + (1 - \theta) f(u_n, t_n). \quad (2.13)$$

L'intérêt du θ -schéma est de nous permettre d'exprimer le système des équations à discrétiser dans un cadre plus général pour avoir une certaine flexibilité au moment de la discrétisation en temps. Nous nous intéressons aux trois choix de θ -schéma :

- Le choix de $\theta = 0$ correspond au schéma d'**Euler explicite**. Ce schéma d'ordre 1 présente une importante limitation. En effet, il doit respecter la condition CFL (Courant-Friedrich-Lévy) qui impose le choix d'un pas de temps relativement petit. En contrepartie, il s'agit d'une formulation explicite. Elle est donc moins coûteuse numériquement. En réalité, la plupart des discrétisations par éléments finis mènent à la résolution d'un système linéaire non trivial même dans le cas explicite et le gain réalisé n'est pas suffisant pour compenser le plus grand nombre de pas de temps nécessaire.
- Le choix $\theta = 1$ donne le schéma d'Euler implicite. Ce schéma est stable et peu donc être utilisé avec d'assez longs pas de temps. C'est aussi un schéma d'ordre 1. Il faut noter le caractère diffusif de ce schéma.

Dans certaines situations, cette propriété est souhaitable et permet d'atténuer d'éventuelles oscillations numériques. Dans plusieurs autres situations, le caractère diffusif nuit à la représentation du phénomène physique considéré.

- Le choix $\theta = \frac{1}{2}$ conduit au schéma du trapèze ou de **Crank-Nicholson**. Ce schéma est bien connu par les numériciens, il s'agit d'un schéma d'ordre 2 qui est inconditionnellement stable. Ainsi le choix du pas de temps n'est guidé que par la physique du problème et la précision désirée, ce schéma est dispersif.

La discrétisation temporelle des équations de Saint-Venant linéaires non visqueux s'écrit alors :

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \gamma f \mathbf{k} \times \mathbf{u}^{n+1} + (1 - \gamma) f \mathbf{k} \times \mathbf{u}^n + \gamma g \nabla \eta^{n+1} + (1 - \gamma) g \nabla \eta^n = 0, \quad (2.14)$$

$$\frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{\Delta t} + \alpha \nabla \cdot (H \mathbf{u}^{n+1}) + (1 - \alpha) \nabla \cdot (H \mathbf{u}^n) = 0. \quad (2.15)$$

En posant $\gamma = \alpha = 0; \frac{1}{2}, 1$, nous avons respectivement les schémas d'Euler explicite, de Crank-Nilcholson et d'Euler implicite. Dans tous les cas, nous avons utilisé celui de Crank-Nicholson ($\alpha = \gamma = \frac{1}{2}$). Pour quelques problèmes, nous avons choisi le paramètre θ de chaque terme afin de répondre à des conditions particulières. En utilisant un θ -schéma, la forme variationnelle des équations linéaires de Saint-Venant non visqueux sans friction lorsque $V \subset (H^1(\Omega))^2$ et $Q \subset H^1(\Omega)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1}}{\Delta t} + \gamma f \mathbf{k} \times \mathbf{u}^{n+1} + \alpha g \nabla \eta^{n+1} \right) \cdot \varphi \, d\Omega \quad (2.16) \\ & = \int_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{u}^n}{\Delta t} - (1 - \gamma) f \mathbf{k} \times \mathbf{u}^n - (1 - \alpha) g \nabla \eta^n \right) \cdot \varphi \, d\Omega, \forall \varphi \in V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\eta^{n+1}}{\Delta t} \psi + \alpha \nabla \cdot (H \mathbf{u}^{n+1}) \psi \, d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \frac{\eta^n}{\Delta t} \psi - (1 - \alpha) \nabla \cdot (H \mathbf{u}^n) \psi \, d\Omega, \forall \psi \in Q
\end{aligned} \tag{2.17}$$

2.3 Espaces d'éléments finis

Dans cette section, on présente les paires d'éléments finis utilisées pour discrétiser les équations de Saint-Venant. Avant d'introduire les espaces d'éléments finis, faisons un petit rappel sur les techniques basées sur le passage d'un élément quelconque à un élément de référence.

On appelle élément de référence, le triangle unité dont les sommets sont les points $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. On définit la transformation affine qui lie le triangle de référence à l'élément courant par :

$$\mathbf{x} = (1 - (\hat{x} + \hat{y}))\mathbf{a}_1 + \hat{x}\mathbf{a}_2 + \hat{y}\mathbf{a}_3 \tag{2.18}$$

où \mathbf{a}_i , $i = 1, 2, 3$ sont les coordonnées des sommets du triangle considéré et \hat{x} , \hat{y} sont les coordonnées du triangle de référence.

Ceci a pour avantage de permettre d'exprimer les fonctions de base d'une manière standard et de réaliser facilement l'intégration numérique. On a ainsi

$$\int_K f(\mathbf{x}) dK = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}} f(\mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}})) \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right| d\hat{y} d\hat{x} \tag{2.19}$$

où

$$\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right| = |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

est le jacobien de la transformation. Les dérivées partielles sont obtenues à

l'aide de la matrice jacobienne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial f}{\partial \hat{y}} \end{pmatrix}$$

Une famille de polynôme ϕ_i respecte la propriété de Lagrange si pour tous les points associés à \mathbf{a}_j on a

$$\phi_i(\mathbf{a}_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.20)$$

Les éléments finis qui respectent cette propriété sont dits élément finis de Lagrange. Dans ce travail nous utiliserons un élément qui respectera cette propriété.

Soit $\mathcal{P}_k(K)$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k dans l'élément K . On définit les espaces de polynômes de degré m par :

$$P_m = \{ \phi | \phi|_K \in \mathcal{P}_m(K), \forall K \in \tau_h \text{ et } \phi \in C^0(\overline{\Omega}) \} \quad m \geq 1. \quad (2.21)$$

On représente les noeuds pour l'élément P_1 par :

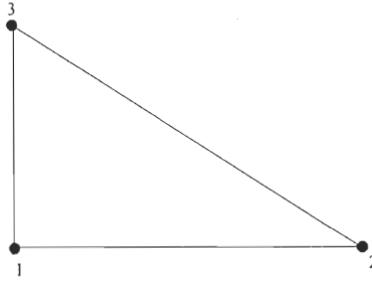


FIG. 2.2 – Position des noeuds pour l'élément P_1 .

La position des degrés de liberté est choisie de sorte que les polynômes respectent la continuité aux interfaces et la propriété de Lagrange. Les degrés de liberté de P_1 sont situés aux sommets de chaque triangle. On définit ces fonctions de base sur le triangle de référence par :

$$\hat{\varphi}_1(\mathbf{x}) = 1 - (\hat{x} + \hat{y}),$$

$$\hat{\varphi}_2(\mathbf{x}) = \hat{x},$$

$$\hat{\varphi}_3(\mathbf{x}) = \hat{y}.$$

On définit les positions des noeuds pour l'élément P_1^{NC} par :

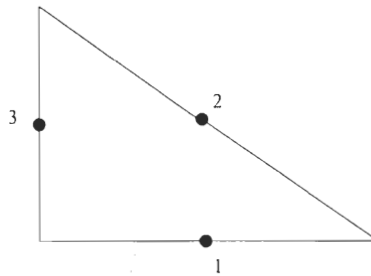


FIG. 2.3 – Position des noeuds pour l'élément P_1^{NC} .

Les fonctions de base de P_1^{NC} sur l'élément de référence sont :

$$\hat{\phi}_1(\mathbf{x}) = 1 - 2\hat{y},$$

$$\hat{\phi}_2(\mathbf{x}) = 2(\hat{x} + \hat{y}) - 1,$$

$$\hat{\phi}_3(\mathbf{x}) = 1 - 2\hat{x}.$$

Nous considérons un espace de fonctions non conformes :

$$P_1^{NC} = \{\phi | \phi|_K \in \mathcal{P}_1(K), \forall K \in \tau_h, \text{ et } \phi \text{ est continue au milieu des arêtes}\}.$$

Cet espace est dit non conforme car contrairement au P_1 , la fonction ϕ est généralement discontinue. En effet, les noeuds de P_1 étant situés aux sommets, il y a deux noeuds par arête et la continuité est assurée. Par contre pour le P_1^{NC} , il y a un noeud au milieu de chaque arête et la continuité n'est respectée qu'en ce point. La fonction de base liée à une arête vaut 1 sur toute l'arête, -1 aux sommets opposés de chacun des deux éléments voisins et 0 au milieu des autres arêtes. Une propriété fondamentale de P_1^{NC} est que ses fonctions de base sont orthogonales au sens du produit scalaire de L^2 . Ainsi, on a pour K un élément dans le support de $\varphi_i \in P_1^{NC}$ tels que :

$$\int_K \varphi_i \varphi_j dK = \begin{cases} \frac{\text{Aire}(K)}{3} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.22)$$

Cette propriété est très utile pour construire un modèle efficace. Dans certaines conditions, elle fournit une matrice masse en vitesse diagonale qui facilite la résolution numérique. Ceci implique un norme gain de calcul. Pour représenter une fonction vectorielle comme la vitesse, on va assigner deux degrés de liberté à chaque noeud

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j \in N_{\tau_h}} \mathbf{u}_j \varphi_j(\mathbf{x}), \quad (2.23)$$

où N_{τ_h} est l'ensemble des noeuds sur le maillage pour l'espace d'éléments finis considéré. $\mathbf{u}_j = (u_j, v_j)$ est le vecteur contenant les deux degrés de liberté au noeud j et φ_j est la fonction de base associée. De ceci, on déduit que la formulation variationnelle doit être respectée pour toute fonction φ de la forme $\varphi = (\varphi, 0)$ ou $\varphi = (0, \varphi)$.

On présente enfin l'élément de Raviart et Thomas de degré minimal, noté $RT0$. Ses fonctions de base ont été construites de manière à former une base de $H(\text{div}, \Omega)$. Pour ce faire, les fonctions de base de $RT0$ sont vectorielles par construction. La vitesse s'écrit donc

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j \in \mathbf{N}} \sigma_j \varphi_j(\mathbf{x}) \quad (2.24)$$

où φ_j est la fonction de base de l'espace $RT0$ au noeud j et σ_j l'unique degré de liberté de ce noeud.

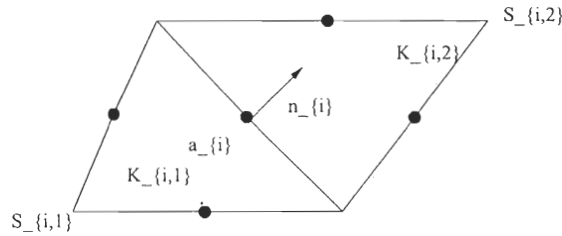


FIG. 2.4 - L'élément $RT0$

Les degrés de liberté de $RT0$ sont situés sur les arêtes et les fonctions de base ont le même support que P_1^{NC} . La différence est qu'il n'y a qu'un seul degré de liberté en vitesse par arête pour $RT0$. Ce degré de liberté est donné par :

$$\sigma_i = \frac{1}{|a_i|} \int_{a_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_i ds, \quad (2.25)$$

où \mathbf{n}_i est la normale associée à l'arête a_i et $|a_i|$ sa longueur, (voir [6]). La direction de cette normale doit être fixée au début de la simulation. Nous avons considéré ici la normale extérieure à l'élément $K_{i,1}$.

Soient $K_{i,1}$ et $K_{i,2}$ deux éléments de la table de connectivité arête-élément de l'arête a_i , $\mathbf{s}_{i,1}$ et $\mathbf{s}_{i,2}$ les coordonnées des sommets opposés à l'arête a_i . La fonction de base associée à une arête a_i est donnée par

$$\varphi_i = \begin{cases} \frac{1}{2\text{Aire}(K_{i,1})}(\mathbf{x} - \mathbf{s}_{i,1}) & \text{si } \mathbf{x} \in K_{i,1} \\ \frac{-1}{2\text{Aire}(K_{i,2})}(\mathbf{x} - \mathbf{s}_{i,2}) & \text{si } \mathbf{x} \in K_{i,2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et sa divergence s'écrit

$$\nabla \cdot \varphi_i = \begin{cases} \frac{1}{2\text{Aire}(K_{i,1})} & \text{si } \mathbf{x} \in K_{i,1} \\ \frac{-1}{2\text{Aire}(K_{i,2})} & \text{si } \mathbf{x} \in K_{i,2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.26)$$

On utilise directement cette fonction de base dans la formulation variationnelle. Bien que les fonctions de base de $RT0$ soient discontinues aux interfaces, le produit scalaire de la fonction de base par la normale à une arête est continu le long de cette arête.

2.4 Paires d'éléments finis

Le choix d'une paire d'espaces d'éléments finis adéquate pour discrétiser les équations de Saint-Venant est un problème délicat. En effet, tous les choix considérés présentent des inconvénients. Un des plus remarquables est l'existence de modes numériques. Ces modes parasites sont des anomalies à petite échelle introduites par le schéma de discrétisation spatiale et sont pris au piège dans le maillage.

Comme une grande variété de paires peuvent être considérées, on pose des critères pour restreindre les choix possibles. D'abord, on se limite à des polynômes de bas degrés. De tels polynômes peuvent être intégrés exactement à un coût de calcul raisonnable et ils ne sont pas aussi vulnérables à la formation d'oscillations que les polynômes de haut degré [2].

L'autre critère important est le rapport du nombre d'équations de quantité de mouvement par rapport aux équations de continuité discrètes. Il est souhaitable que ce rapport respecte celui des équations continues. La façon la plus simple d'arriver au meilleur rapport est de prendre le même espace d'approximation pour la pression et la vitesse. Malheureusement, il a été démontré qu'une telle paire peut présenter des modes numériques dans le champ d'élévation. Ce type de modes numériques est bien connu et se rencontre à la fois dans les formulations de Navier-Stokes et de Saint-Venant [12]. Selon ces critères, on considère les 2 paires d'éléments finis suivantes : $P_1^{NC} - P_1$ et $RT0 - P_0$.

2.4.1 $P_1^{NC} - P_1$

Pour la paire de l'élément de $P_1^{NC} - P_1$ les champs d'élévation et de vitesse sont approximés par des fonctions de base linéaires, continues pour l'élévation et discontinues pour la vitesse. Les degrés de liberté pour la pression sont localisés aux sommets des triangles tandis que les noeuds des variables vitesse sont situés au milieu des arêtes. La discontinuité des fonctions P_1^{NC} représentant la vitesse nous conduit à intégrer par parties le terme de divergence dans l'équation de continuité.

Cette paire présente une propriété très intéressante : l'orthogonalité des fonctions de base en vitesse. Il est ainsi facile de faire une substitution des valeurs discrètes de la vitesse dans l'équation de continuité. Ceci permet de réduire la taille du système discret global. Ainsi, la paire $P_1^{NC} - P_1$ a un coût de calcul très compétitif par rapport aux autres méthodes d'éléments finis. Afin qu'il soit possible de faire la substitution lorsque la force de Coriolis est présente, il est nécessaire de faire une légère simplification. On remarque que la fonction $f = f_0 + \beta y$ qui définit le β -plan, varie très graduellement. Aussi on pose

$$f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{a_i} f_i \mathbf{u}_i \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (2.27)$$

où f_i est la valeur de f évaluée au milieu de l'arête a_i . En faisant cette interpolation linéaire du produit $f\mathbf{u}$, on conserve l'orthogonalité des fonctions de base et donc la structure de la matrice qui permet de faire la substitution. D'après nos calculs, cette interpolation est valable seulement pour la paire $P_1^{NC} - P_1$, et non pour la paire $RT0 - P_0$.

Un autre avantage de la paire $P_1^{NC} - P_1$ est que la direction de la normale à une arête est définie de manière unique et donc la condition aux limites $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ s'impose sans difficulté.

2.4.2 Formulation variationnelle pour l'élément fini :

$$\mathbf{P}_1^{\text{NC}} - \mathbf{P}_1$$

Soient η appartenant à Q et $\mathbf{u} \in V$ une fonction vectorielle régulière telle que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ . On notera par Q_h l'espace discret lié à la discrétisation de l'élevation η par des éléments \mathcal{P}_1 continus. De même, on notera V_h l'espace discret en vitesse résultant d'une discrétisation par l'élément non conforme $\mathcal{P}_1^{\text{NC}}$. La formulation faible de (2.14) et (2.15) s'écrit $\forall \varphi \in V_h$ et $\forall \psi \in Q_h$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \cdot \varphi \, dx + \Delta t \int_{\Omega} f \mathbf{k} \times (\gamma \mathbf{u}^{n+1} + (1 - \gamma) \mathbf{u}^n) \cdot \varphi \, dx & \quad (2.28) \\ + g \Delta t \int_{\Omega} (\gamma \nabla \eta^{n+1} + (1 - \gamma) \nabla \eta^n) \cdot \varphi \, dx & = 0, \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} (\eta^{n+1} - \eta^n) \psi \, dx + H \Delta t \int_{\Omega} (\alpha \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} + (1 - \alpha) \nabla \cdot \mathbf{u}^n) \psi \, dx = 0. \quad (2.29)$$

Pour éviter de calculer les dérivées de \mathbf{u} , les termes $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}$ et $\nabla \cdot \mathbf{u}^n$ apparaissant dans (2.29) sont intégrés par partie en utilisant le théorème de Green. De cette manière, seulement les dérivées de ψ sont nécessaires et non les dérivées de φ . Les dérivées sont bien définies car ψ appartient à Q . L'intégrale de frontière s'annule en appliquant la condition aux limites $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ et (2.29) se réécrit comme :

$$\int_{\Omega} (\eta^{n+1} - \eta^n) \psi \, dx - H \Delta t \int_{\Omega} (\alpha \mathbf{u}^{n+1} + (1 - \alpha) \mathbf{u}^n) \cdot \nabla \psi \, dx = 0 \quad (2.30)$$

2.4.3 Résolution de l'équation de Saint-Venant discrète

L'équation de Saint-Venant discrète peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$M^u \mathbf{u}_i^{n+1} + \alpha g \Delta t G \eta_s^{n+1} = M^u \mathbf{u}_i^n - (1 - \alpha) g \Delta t G \eta_s^n \equiv R^u, \quad (2.31)$$

$$M^\eta \eta_s^{n+1} - \alpha H \Delta t G^t \mathbf{u}_i^{n+1} = M^\eta \eta_s^n + (1 - \alpha) H \Delta t G^t \mathbf{u}_i^n \equiv R^\eta, \quad (2.32)$$

pour $1 \leq i \leq N_u$ et $1 \leq s \leq N_\eta$, où N_u et N_η sont les nombres de degrés de liberté en vitesse et en pression. Dans les équations (2.31) et (2.32), M^u et M^η sont les matrices masse vitesse (incluant les termes de Coriolis) et en pression, G est la matrice du gradient et R^u et R^η sont les seconds membres. En raison de la propriété d'orthogonalité des fonctions de base du P_1^{NC} [9], M^u est une matrice diagonale par bloc 2×2 le long de la diagonale. L'équation (2.31) est réécrite comme suit

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = -\alpha g \Delta t (M^u)^{-1} G \eta_s^{n+1} + (M^u)^{-1} R^u, \quad (2.33)$$

et (2.33) est alors utilisé pour éliminer la valeur de \mathbf{u}_i^{n+1} , pour $1 \leq p \leq N_u$, de (2.32). En substituant la valeur de \mathbf{u}_i^{n+1} dans (2.32), nous avons l'équation suivante

$$(M^\eta + \alpha^2 g H (\Delta t)^2 G^t (M^u)^{-1} G) \eta_s^{n+1} = R^\eta + \alpha H \Delta t G^t (M^u)^{-1} R^u. \quad (2.34)$$

L'élimination de \mathbf{u}_i^{n+1} conduit à N_η équations de Helmholtz discrètes en η et par conséquent, on résoud un système linéaire $N_\eta \times N_\eta$ pour la pression seulement, où N_η est le nombre de sommets du maillage, ce qui améliore le coût de calcul.

Pour la plupart des discrétisations en éléments finis, la matrice M^u n'est pas diagonale. Et donc la procédure qui a abouti à la substitution dans (2.33) nécessite un calcul pour une matrice pleine de $(M^u)^{-1}$. Le système (2.33) est alors trop grand pour être stocké et manipulé. La propriété d'orthogonalité des fonctions de base P_1^{NC} , conduisant à la matrice diagonale M^u , implique un énorme gain dans les coûts de calcul.

2.4.4 RT0 – P₀

Enfin, on présente l'élément de Raviart et Thomas de degré minimal. Il est formé des fonctions de base $RT0 - P_0$ pour la vitesse et d'une élévation constante par triangle. Le gradient d'élévation est intégré par parties dans l'équation de quantité de mouvement. En appliquant la condition $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, l'intégrale sur la frontière s'annule.

Grâce aux propriétés de $RT0 - P_0$, il est nécessaire et suffisant de poser à 0 les degrés de liberté sur la frontière afin d'imposer la condition aux limites $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$.

2.4.5 Formulation variationnelle pour l'élément fini : RT0 – P₀

On prendra Q_h l'espace discret lié aux fonctions η discrétisé par l'élément fini P_0 . Pour la vitesse, on notera par V_h l'espace discret discrétisé par l'élément fini $RT0$. La formulation faible de (2.14) et (2.15) s'écrit :

$\forall \varphi \in V_h$ et $\forall \psi \in Q_h$ tel que :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \cdot \varphi \, dx + \Delta t \int_{\Omega} f \mathbf{k} \times (\gamma \mathbf{u}^{n+1} + (1 - \gamma) \mathbf{u}^n) \cdot \varphi \, dx \quad (2.35)$$

$$+ g \Delta t \int_{\Omega} (\alpha \nabla \eta^{n+1} + (1 - \alpha) \nabla \eta^n) \cdot \varphi \, dx = 0,$$

$$\int_{\Omega} (\eta^{n+1} - \eta^n) \psi \, dx + H \Delta t \int_{\Omega} (\alpha \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} + (1 - \alpha) \nabla \cdot \mathbf{u}^n) \psi \, dx = 0. \quad (2.36)$$

Pour éviter de calculer les dérivées de η , les termes $\nabla \eta^{n+1}$ et $\nabla \eta^n$ apparaissant dans (2.35) sont intégrés par parties en utilisant le théorème de Green. De cette manière, seulement les dérivées de φ sont nécessaires, et non les dérivées de ψ . L'intégrale frontière s'annule en appliquant $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ et (2.35) se réécrit comme :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \cdot \varphi \, dx + \Delta t \int_{\Omega} f \mathbf{k} \times (\gamma \mathbf{u}^{n+1} + (1 - \gamma) \mathbf{u}^n) \cdot \varphi \, dx \quad (2.37)$$

$$- g \Delta t \int_{\Omega} (\gamma \eta^{n+1} + (1 - \gamma) \eta^n) \nabla \cdot \varphi \, dx = 0.$$

L'équation de conservation de la masse reste identique à (2.36). Le système linéaire obtenu est résolu par l'algorithme GMRES avec un préconditionneur diagonal (Jacobi).

CHAPITRE III

RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Dans le but de montrer la robustesse des paires d'éléments finis présentées au chapitre II, nous avons retenu deux problèmes modèles. Le premier est un problème sur la propagation des ondes de gravité dans un domaine circulaire, pour lequel une solution analytique peut être obtenue. Le second est un problème test sur les ondes de Rossby fort utilisé en simulation océanique.

3.1 Propagation des ondes de gravité dans un domaine circulaire

Dans cette section, nous étudions la propagation des ondes de gravité dans un domaine circulaire. Comme premier test, nous allons considérer les équations linéaires de Saint-Venant pour des fluides non visqueux qui s'écrivent sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} + g \nabla \eta = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.2)$$

Pour mieux voir l'effet des ondes de gravité, posons la force de Coriolis f égale à zéro et prenons une profondeur moyenne H constante. Initialement, la

vitesse est nulle et l'élévation a la forme d'une Gaussienne bidimensionnelle.

Le problème aux conditions initiales s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + g \nabla \eta = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.4)$$

$$\eta(x, y, 0) = \eta_0(x, y) = \alpha \exp(-\beta_1 r^2), \quad (3.5)$$

$$\mathbf{u}(x, y, 0) = \mathbf{0}, \quad (3.6)$$

où r représente la distance d'un point (x, y) par rapport au centre de la fonction gaussienne (que l'on fait coïncider avec le centre du disque), alors que α et β_1 sont des paramètres qui affectent la forme de la concentration. Pour les conditions aux limites, on impose une condition de flux nul partout sur la frontière du disque, c'est-à-dire

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (3.7)$$

Le terme de Coriolis étant absent, la solution devrait présenter une symétrie circulaire sur le domaine en tout temps. L'intérêt de ces hypothèses est qu'elles permettent de ramener le problème à l'équation des ondes. En effet, en dérivant (3.4) par rapport à t , on tire

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + H \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0. \quad (3.8)$$

Si maintenant, on utilise (3.3) pour remplacer $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ dans l'équation obtenue, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - H \nabla \cdot (g \nabla \eta) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= H g \Delta \eta. \end{aligned}$$

La prise en compte de la condition initiale $\mathbf{u}(x, y, 0) = 0$, dans l'équation (3.4), conduit à $\frac{\partial \eta(x, y, 0)}{\partial t} = 0$ alors que l'application de la condition au bord $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ à (3.3) donne $\nabla \eta \cdot \mathbf{n} = 0$. Ainsi, le problème linéaire considéré est équivalent à

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - H g \Delta \eta = 0, \quad (3.9)$$

$$\eta(x, y, 0) = \eta_0(x, y), \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \eta(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (3.12)$$

On trouve dans [1] la solution analytique sous forme d'un développement en série de fonctions de Bessel de première espèce. C'est la série obtenue que nous appellerons solution exacte. Les solutions numériques sont obtenues en résolvant les équations 3.3 - 3.7. La discrétisation en temps est faite à l'aide d'un schéma de Crank-Nicholson. Les résultats numériques présentés ont été obtenus en prenant un pas de temps Δt égale à 20 secondes.

Le domaine circulaire a un rayon R de 1 000 km et est discrétisé en utilisant un pas de discrétisation de 25 km et un maillage non structuré; on suppose un fond plat et une profondeur moyenne $H = 2 000$ m, avec $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ conduisant à une vitesse de phase $c = \sqrt{gH} \approx 140 \text{ m s}^{-1}$. Les paramètres de la distribution gaussienne qui définissent l'état initial sont fixés à $\alpha = 100$ m et $\beta_1 = 6.4 \times 10^{-11} \text{ m}^{-2}$. On rappelle que $\eta(x, y, t)$ donne le déplacement de la surface libre par rapport à la hauteur H . Le maillage utilisé pour les calculs numériques est présenté à la figure 3.5. Le domaine circulaire est découpé en 6260 éléments.

Stade		Initiale	1	2	3	4	5	6	7
Pas de temps		1	179	357	536	683	1430	2113	2860
Analytique	max	99.55	14.84	18.53	18.12	80.76	3.40	4.26	95.91
	min	0.00	-9.47	-3.33	-4.66	-3.58	-95.57	-83.57	-1.33
$P_1^{NC} - P_1$	max	99.44	14.94	18.64	18.23	80.79	3.45	4.16	94.23
	min	0.00	-9.50	-3.36	-4.67	-3.56	-94.61	-84.76	-1.43
$RT0 - P_0$	max	99.00	14.82	18.65	18.06	79.64	3.49	4.48	95.45
	min	0.00	-9.50	-3.45	-4.67	-3.65	-94.88	-82.076	-1.41

TAB. 3.1 – Les résultat numériques et analytiques pour les ondes de gravité.

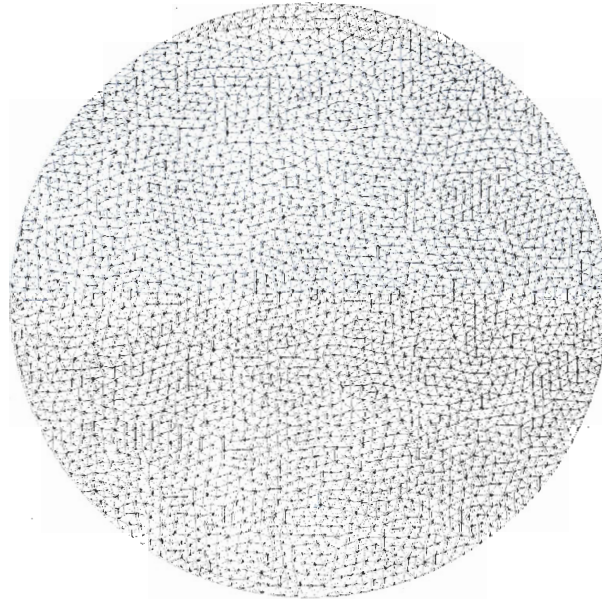


FIG. 3.5 – Maillage pour le problème des ondes de gravité.

On présente dans le tableau 3.1, les valeurs maximales (max) et minimales (min) de la solution analytique et numérique pour la pression et cela pour les paires $P_1^{NC} - P_1$ et $RT0 - P_0$ à différents stades correspondants à des temps précis indiqués en terme de nombre de pas de temps. Les solutions correspondantes à ces stades sont représentées aux figures 3.7 - 3.10. Ici, on considère un problème bidimensionnel et on laisse l'onde se réfléchir à la frontière. On considère la propagation de l'onde aux sept étapes présentées aux figures 3.7 - 3.8 pour la paire $P_1^{NC} - P_1$ et aux figures 3.9 - 3.10 pour la paire $RT0 - P_0$. L'étape 2 correspond à la première réflexion au bord, les étapes 4, 5, 6 et 7 correspondent respectivement au premier, second, troisième et quatrième retour de l'onde au centre du domaine. Dans le cas bidimensionnel, les harmoniques de la solution exacte ont des vitesses de phase différentes. Il est donc beaucoup moins facile de distinguer quelles paires présentent une dispersion numérique importante. C'est d'ailleurs cette dispersion naturelle qui explique que l'élévation n'atteigne pas l'amplitude initiale aux étapes 4 et 7. On observe que les deux paires d'éléments finis présentent une solution lisse pour l'élévation, contrairement aux paires $P_1 - P_0$ et $P_1 - P_1$ on peut retrouver ces résultats dans [5] pour lesquelles l'élévation est bruitée.

Une bonne approximation est obtenue entre la solution analytique et la solution numérique calculée pour les paires $P_1^{NC} - P_1$ et $RT0 - P_0$ comme indiqué dans le tableau 3.1. Pour la discrétisation de $P_1^{NC} - P_1$, il est possible d'appliquer la condition limite fortement ou faiblement. Il semble qu'une forte mise en oeuvre des conditions aux limites donne des meilleurs résultats parce que dans ce cas, la vitesse a un nombre de degrés de liberté plus petit que la pression. Pour ce problème, il est bien connu que la méthode la plus efficace

est obtenue en sélectionnant le plus petit espace fonctionnel pour la vitesse qui assure la stabilité on pourra consulter [6]. Un comportement semblable est observé pour le problème suivant : en diminuant la taille de l'espace fonctionnel en vitesse, on observe une augmentation de la précision. Il y a une grande différence entre la solution numérique obtenue par $P_1 - P_0$ et $P_1 - P_1$ et la solution analytique [5]. Cela est dû en partie à un calcul inexact de la normale à la frontière du domaine.

On peut observer aux figures 3.8 et 3.10 une différence au stade 3. Cette différence est donnée par l'approximation de l'élévation η par P_0 pour l'élément $RT0 - P_0$ et par P_1 pour celle de $P_1^{NC} - P_1$. Ce même problème d'approximation se fait sentir pour les stades 1, 2 et 3 aux figures 3.7 et 3.9 dans lesquelles on observe une différence sur les coupes verticales de l'onde. On remarque dans le tableau 3.1 que les valeurs numériques obtenues par les paires $P_1^{NC} - P_1$ et $RT0 - P_0$ sont proches. Toutefois, l'élément $P_1^{NC} - P_1$ donne les valeurs les plus proches de la valeur analytique contrairement aux valeurs obtenues par $P_1 - P_0$ et $P_1 - P_1$ [5].

3.2 Propagation d'un tourbillon dans le golfe du Mexique

Le golfe du Mexique est un golfe de l'océan Atlantique situé au sud-est de l'Amérique du Nord. Il s'étend sur une superficie de 1 550 000 km². Les principaux pays ou îles qui bordent le golfe du Mexique sont :

- le Mexique à l'ouest et au sud,

- Cuba au sud-est,
- les États-Unis au nord-est et au nord.

Le golfe du Mexique communique au sud-est avec la mer des Caraïbes par le canal du Yucatan et à l'est avec l'océan Atlantique par le détroit de Floride. Une application importante des modèles océaniques réside dans la prévision de l'état passé, présent et futur de l'océan. La précision de ces prévisions est cruciale pour les besoins humains dans les mers côtières et fermées comme le golfe du Mexique et la Mer Rouge. Le golfe du Mexique constitue un vaste champ d'extraction de pétrole en grande profondeur et un terrain d'évaluation pour les nombreux modèles numériques opérationnels mis en oeuvre dans cette région. Dans cette région de l'Atlantique Nord, les eaux chaudes des tropiques montent vers le Nord en longeant les côtes du Brésil et du Venezuela, passent tout d'abord à travers l'arc des îles des Antilles, pénètrent en mer des Caraïbes, pour être ensuite canalisées vers le détroit de Yucatan. La seule possibilité de sortie de cette énorme quantité d'eau chaude est de bifurquer vers l'Est, et de passer entre Cuba et la Floride, pour former le Gulf Stream. Lors de cette bifurcation, des instabilités se forment et parfois, un énorme tourbillon chaud se détache et se déplace vers l'ouest, au centre du Golfe du Mexique [7]. Le golfe du Mexique représente donc un domaine avec une géométrie réaliste pour tester le modèle.

Dans cette seconde expérience, on s'intéresse à la propagation d'une onde de Rossby. On modélise la propagation d'un tourbillon anti-cyclonique en équilibre géostrophique, c'est-à-dire tel que la balance des forces est réalisée approximativement entre les forces de Coriolis et le gradient pression. On

résoud donc les équations linéaires non visqueuses de Saint-Venant (3.1-3.2) avec une gravité réduite $g' = 1.37 \cdot 10^{-1} \text{ m s}^{-1}$, et la profondeur moyenne $H = 100 \text{ m}$. Ces valeurs conduisent à une vitesse de phase moyenne des ondes de gravité de $V = \sqrt{g'h} \approx 3.7 \text{ m s}^{-1}$. Le rayon de déformation de Rossby au milieu du bassin est $R_d = \frac{V}{f_0}$. L'élévation initiale est une distribution Gaussienne donnée par :

$$\eta(x, y, 0) = C \exp(-D(x^2 + y^2)), \quad (3.13)$$

La vitesse initiale est donnée par l'équilibre géostrophique :

$$f \mathbf{k} \times \mathbf{u} + g \nabla \eta = 0.$$

Soit

$$u(x, y, 0) = 2 \frac{g'}{f} C D y \exp(-D(x^2 + y^2)), \quad (3.14)$$

$$v(x, y, 0) = -2 \frac{g'}{f} C D x \exp(-D(x^2 + y^2)). \quad (3.15)$$

où $C = 68.2 \text{ m}$ et $D = 5.92 \times 10^{-11} \text{ m}^{-2}$. Ces paramètres ont été choisis de manière que le module de la vitesse soit égal à 1. On utilise l'approximation β -plan, i.e $f = f_0 + \beta y$ où f_0 et β sont évalués à 25° ($f_0 = 6.16 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ et $\beta = 2.07 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$). Avec une telle solution initiale, la simulation doit s'ajuster (ajustement géostrophique) pour que le tourbillon atteigne sa position d'équilibre quasi-géostrophique. On remarque durant cette étape d'ajustement une chute d'environ de 10% de l'amplitude de l'élévation.

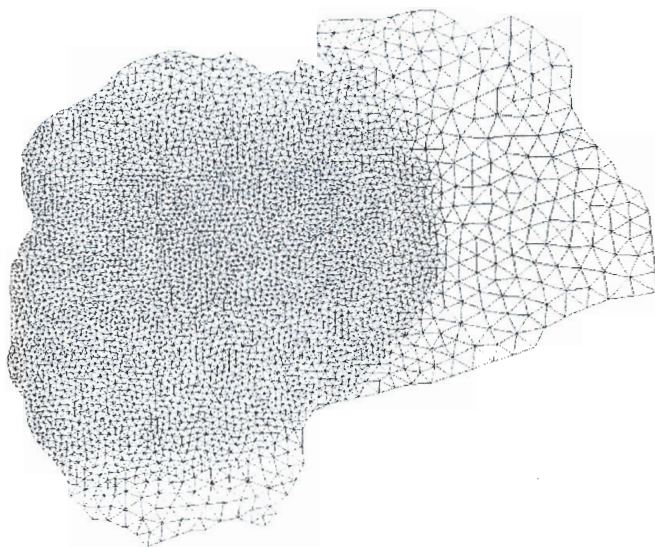


FIG. 3.6 – Maillage pour le problème des ondes de Rossby

Semaine		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Pas de temps		336	672	1008	1344	1680	2016	2352	2688	3024
η	max	68.02	67.18	65.95	64.40	62.45	60.09	57.75	55.75	55.34
$\ \mathbf{u}\ $	max	1.09	1.15	1.16	1.19	1.20	1.20	1.19	1.16	1.13

TAB. 3.2 – Valeurs maximales de η et $\|\mathbf{u}\|$, pour la paire $P_1^{NC} - P_1$.

Semaine		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Pas de temps		336	672	1008	1344	1680	2016	2352	2688	3024
η	max	67.31	66.63	65.95	63.55	61.95	59.61	57.29	54.81	52.12
$\ \mathbf{u}\ $	max	1.081	1.13	1.17	1.21	1.21	1.19	1.18	1.16	1.13

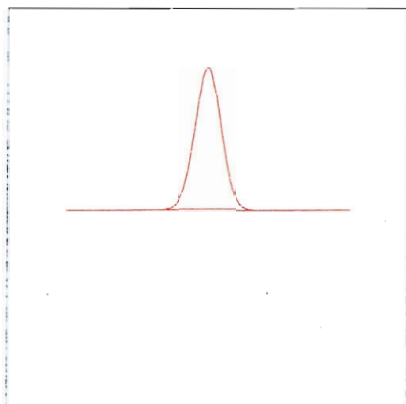
TAB. 3.3 – Valeurs maximales de η et $\|\mathbf{u}\|$, pour la paire $RT0 - P_0$.

L'expérience se concentre principalement sur la partie ouest du domaine où on observe la propagation des tourbillons et de leur interaction avec la frontière. C'est pour cela que le maillage non structuré présenté à la figure 3.6 possède une résolution plus élevée dans la partie ouest du domaine. Il y a 8001 éléments et 4092 noeuds. Dans la présente simulation, nous ignorons l'écoulement entrant et sortant à travers les détroits de Yucatan et de Floride, et nous supposons que le domaine est fermé. Le domaine a pour dimensions 1800 km \times 1350 km et la résolution du maillage est de 20 km à l'est et 60 km à l'ouest. La discrétisation en temps est faite sur des périodes en semaines avec un pas de temps égal à 1800 s. Le schéma de Crank-Nicholson est utilisé pour discrétiser le temps. Les simulations ayant mené aux graphes des figures 3.11 - 3.14 ont été réalisées à l'aide du maillage de la figure 3.6

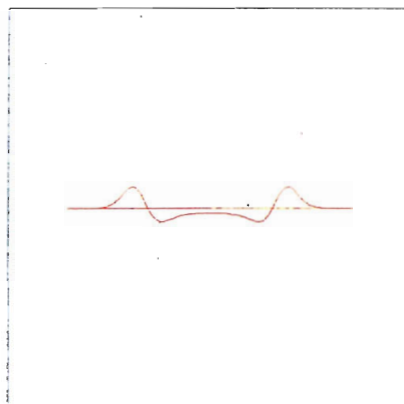
dans lesquelles on présente le tourbillon et le module de la vitesse pour les deux paires d'éléments finis.

Les paires qui représentent très bien le tourbillon dans ce travail sont $RT0 - P_0$ et $P_1^{NC} - P_1$. L'amplitude du tourbillon est assez bien conservée, elle se propage à la bonne vitesse et dans la bonne direction. Les paires $P_1 - P_0$ et $P_2 - P_0$ donnent de très mauvais résultats, en plus de cela on observe des oscillations sévères en élévation et en vitesse on pourra retrouver ces résultats dans [3], on observe que le module de la vitesse est totalement loin de 1 contrairement aux paires $RT0 - P_0$ et $P_1^{NC} - P_1$ qui donnent de bonnes valeurs présentées dans les tableaux 3.2 et 3.3.

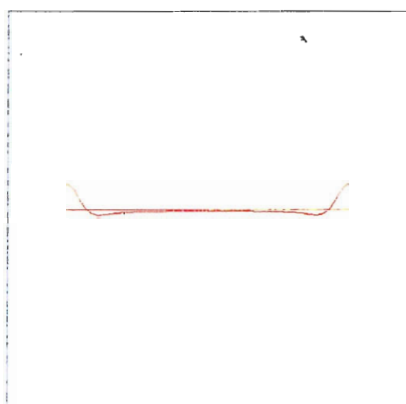
Solution initiale



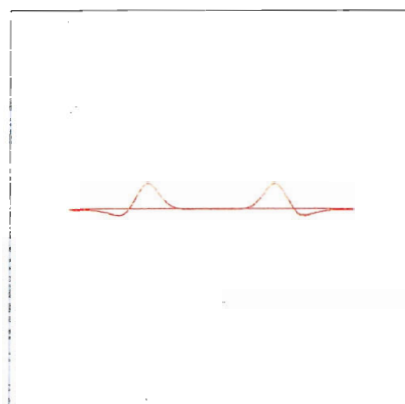
stade 1



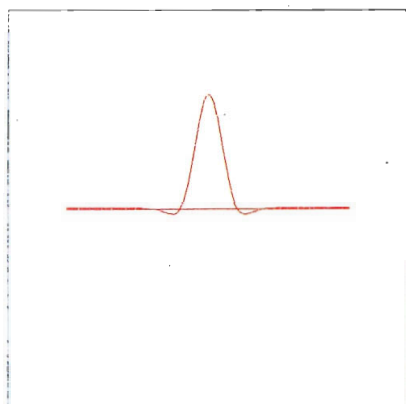
stade 2



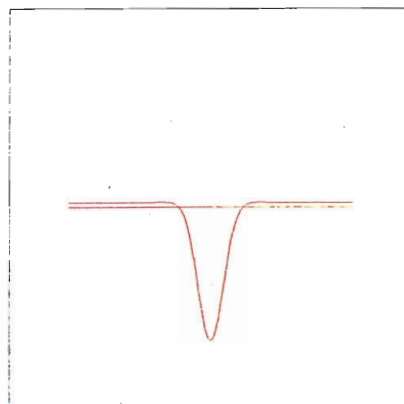
stade 3



stade 4



stade 5



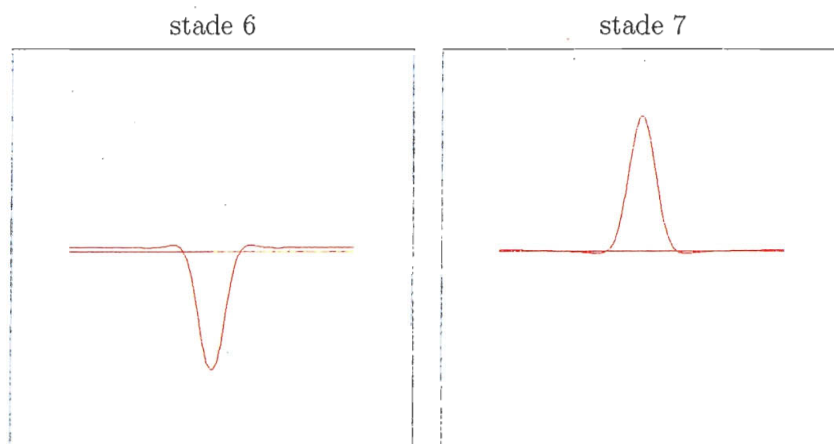
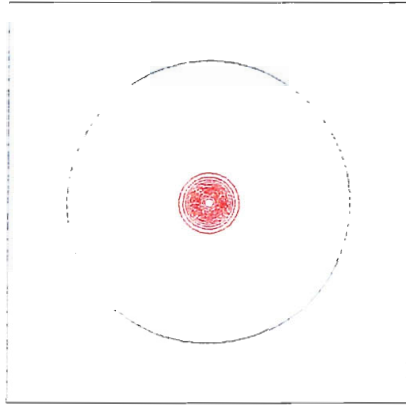
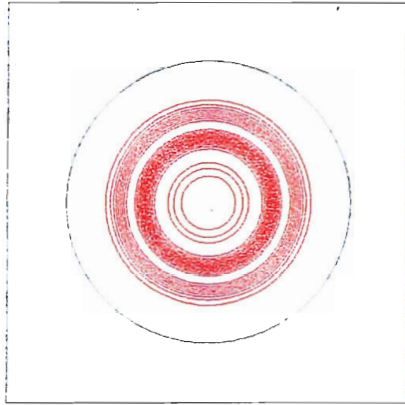


FIG. 3.7 – Onde de gravité à différents stades pour la paire $P_1^{NC} - P_1$.

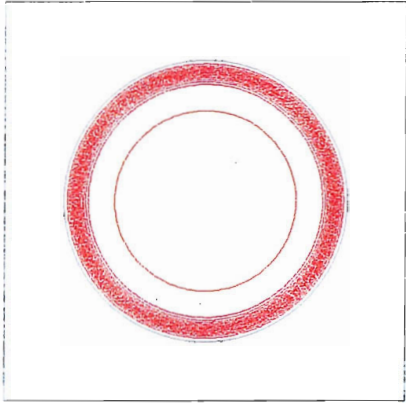
Solution initiale



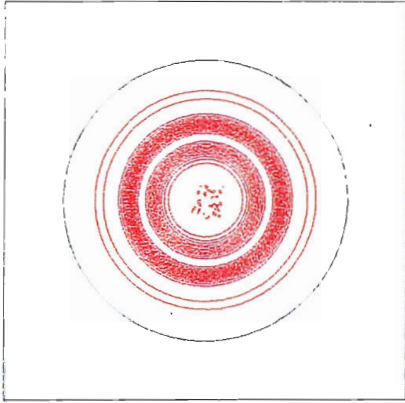
stade 1



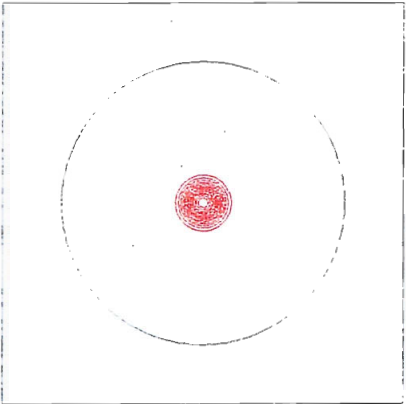
stade 2



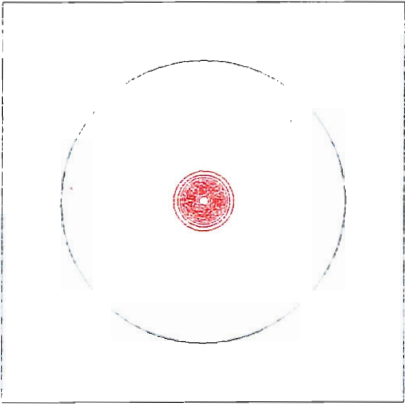
stade 3



stade 4



stade 5



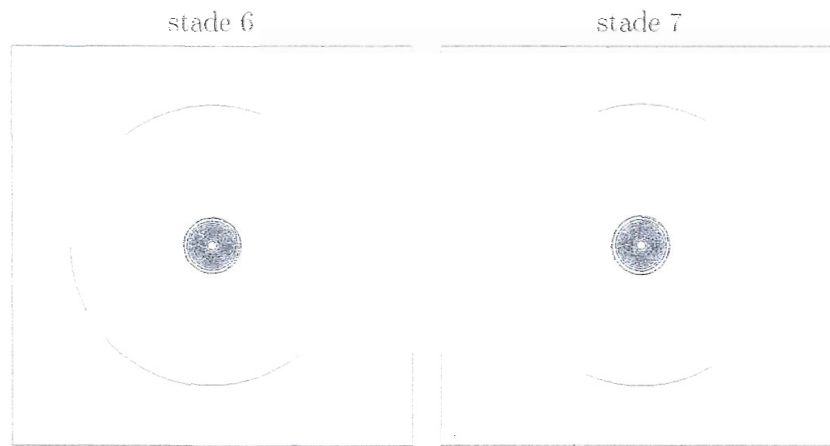
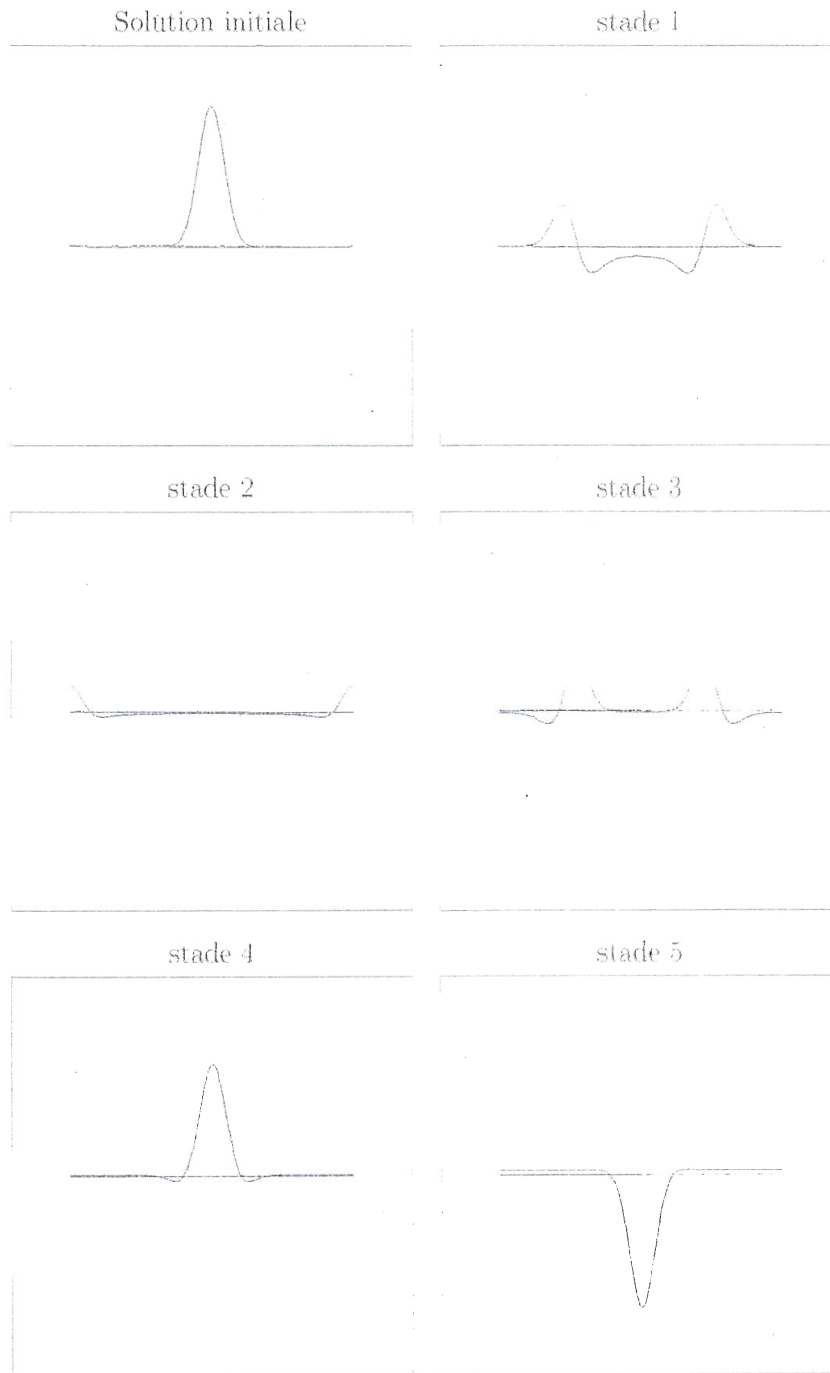
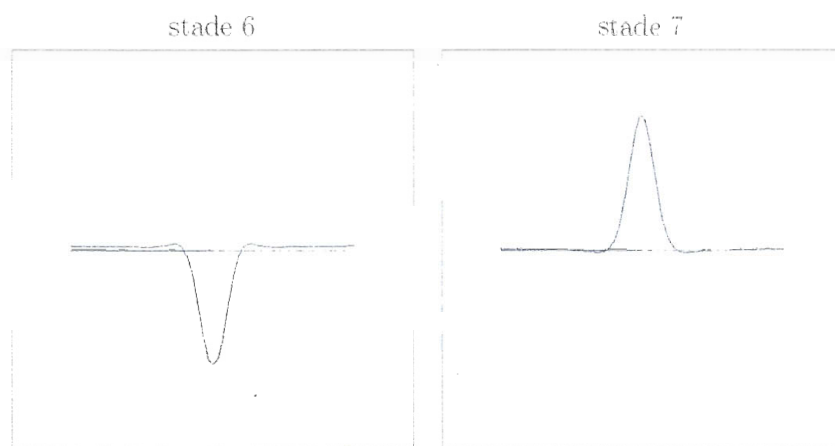
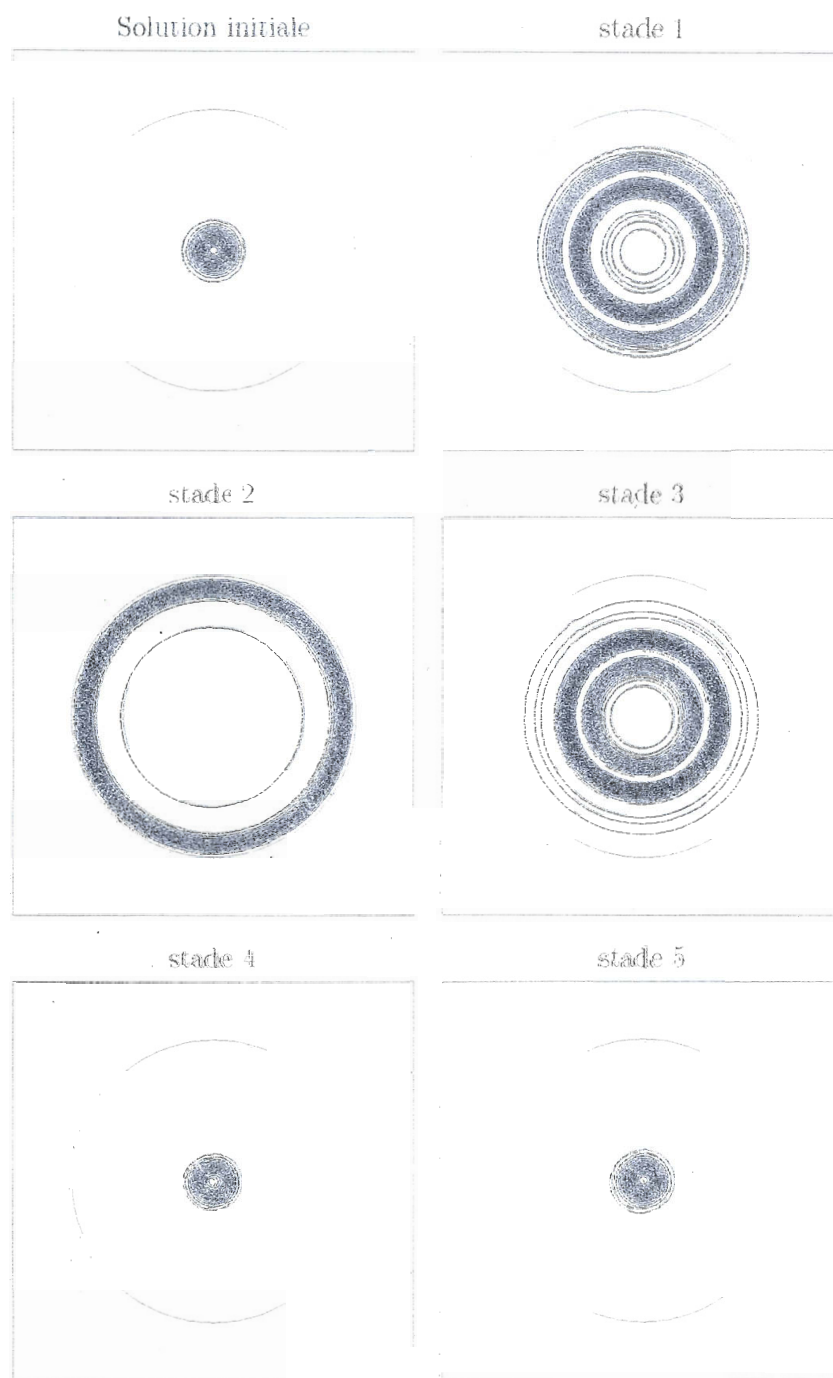


FIG. 3.8 – Isolignes de l'élévation de la surface à différents stades de propagation des ondes de gravité et de la dispersion pour la paire $P_1^{NC} - P_1$.



FIG. 3.9 - Onde de gravité à différents stades pour la paire $R10 - P_0$.



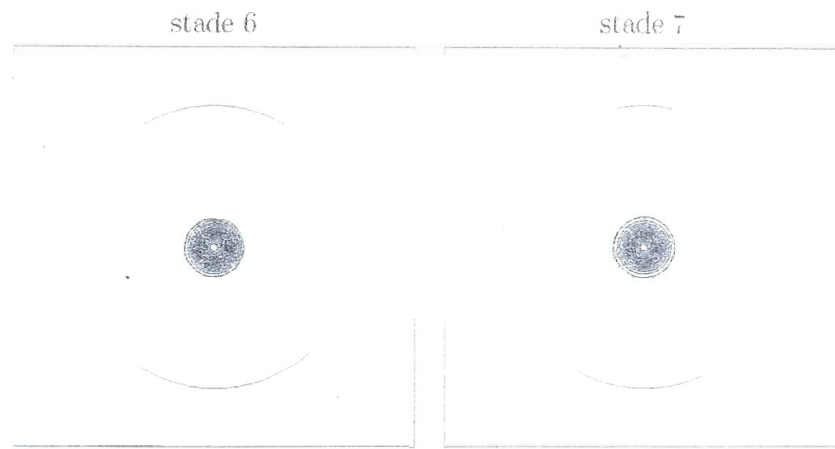
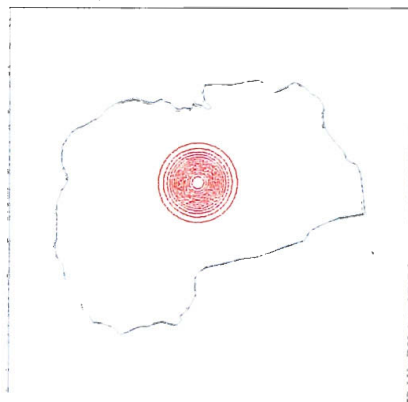
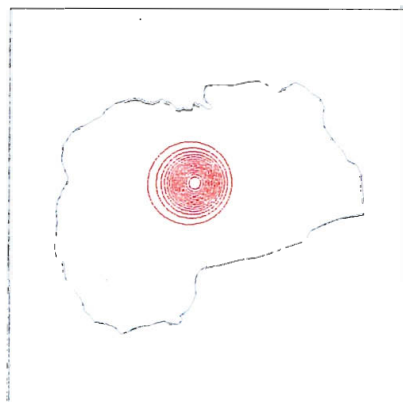


FIG. 3.10 - Isolignes de l'élévation de la surface à différents stades de propagation des ondes de gravité et de la dispersion pour la paire $RT0 - P_0$.

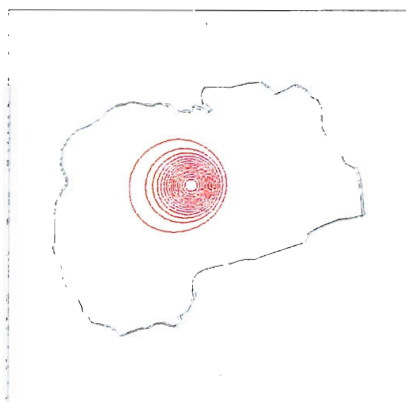
Solution initiale



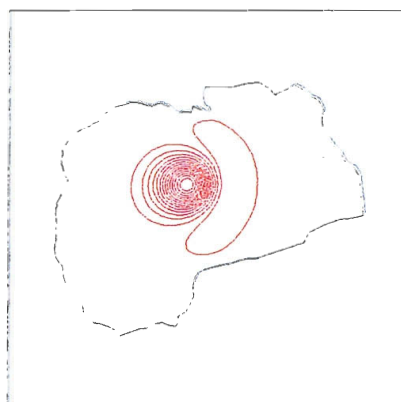
Semaine 1



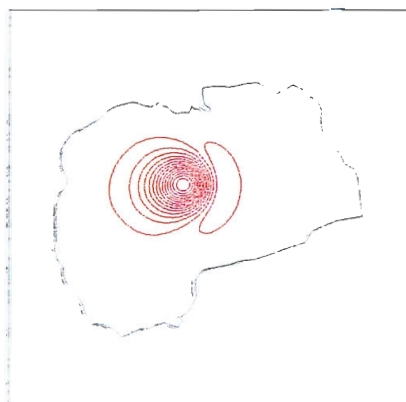
Semaine 2



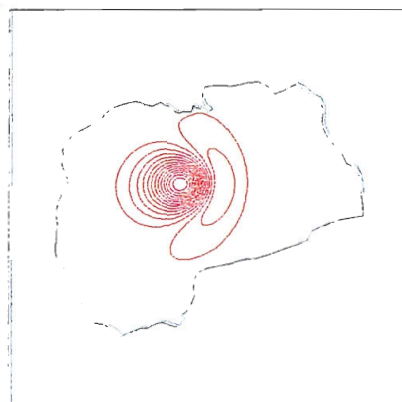
Semaine 3



Semaine 4



Semaine 5



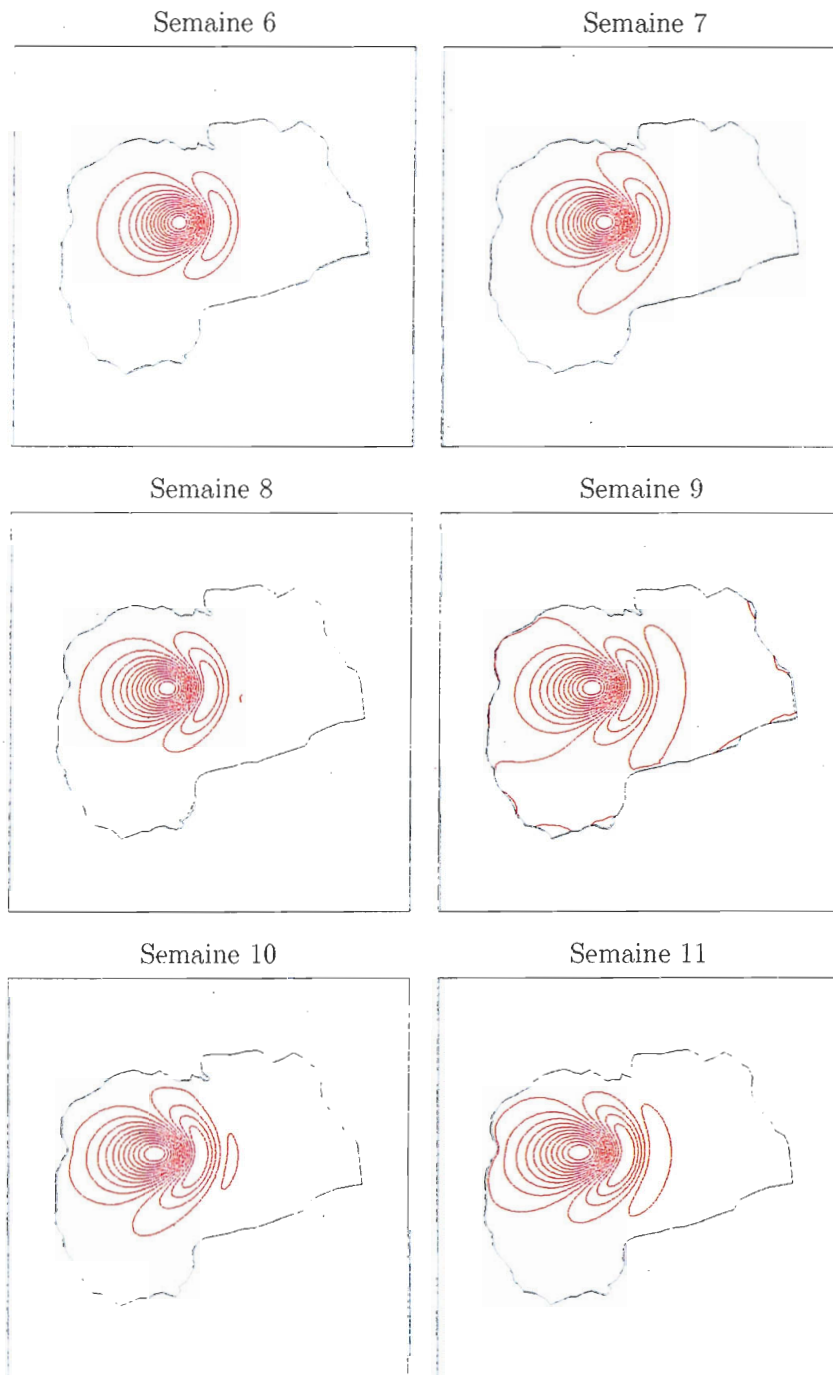
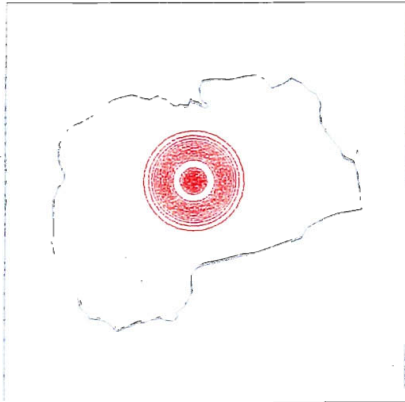
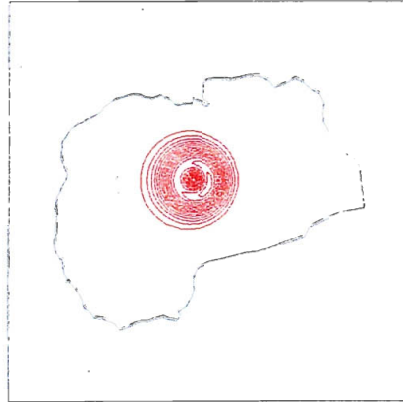


FIG. 3.11 – Isolignes de l'élévation de la surface à différentes semaines de propagation d'un tourbillon pour la paire $P_1^{NC} - P_1$.

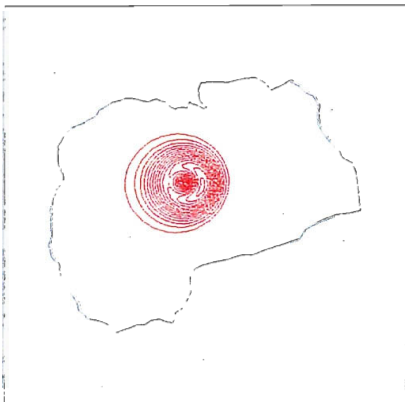
Solution initiale



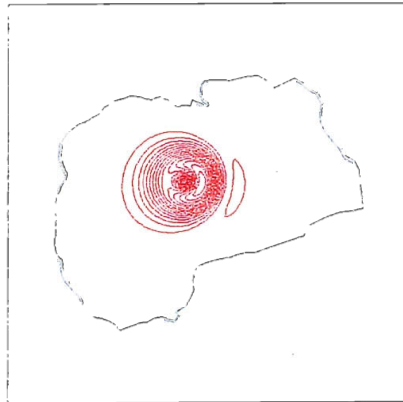
Semaine 1



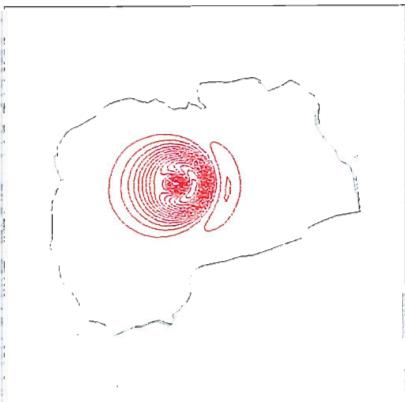
Semaine 2



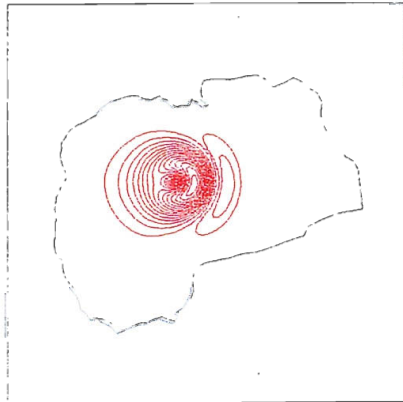
Semaine 3



Semaine 4



Semaine 5



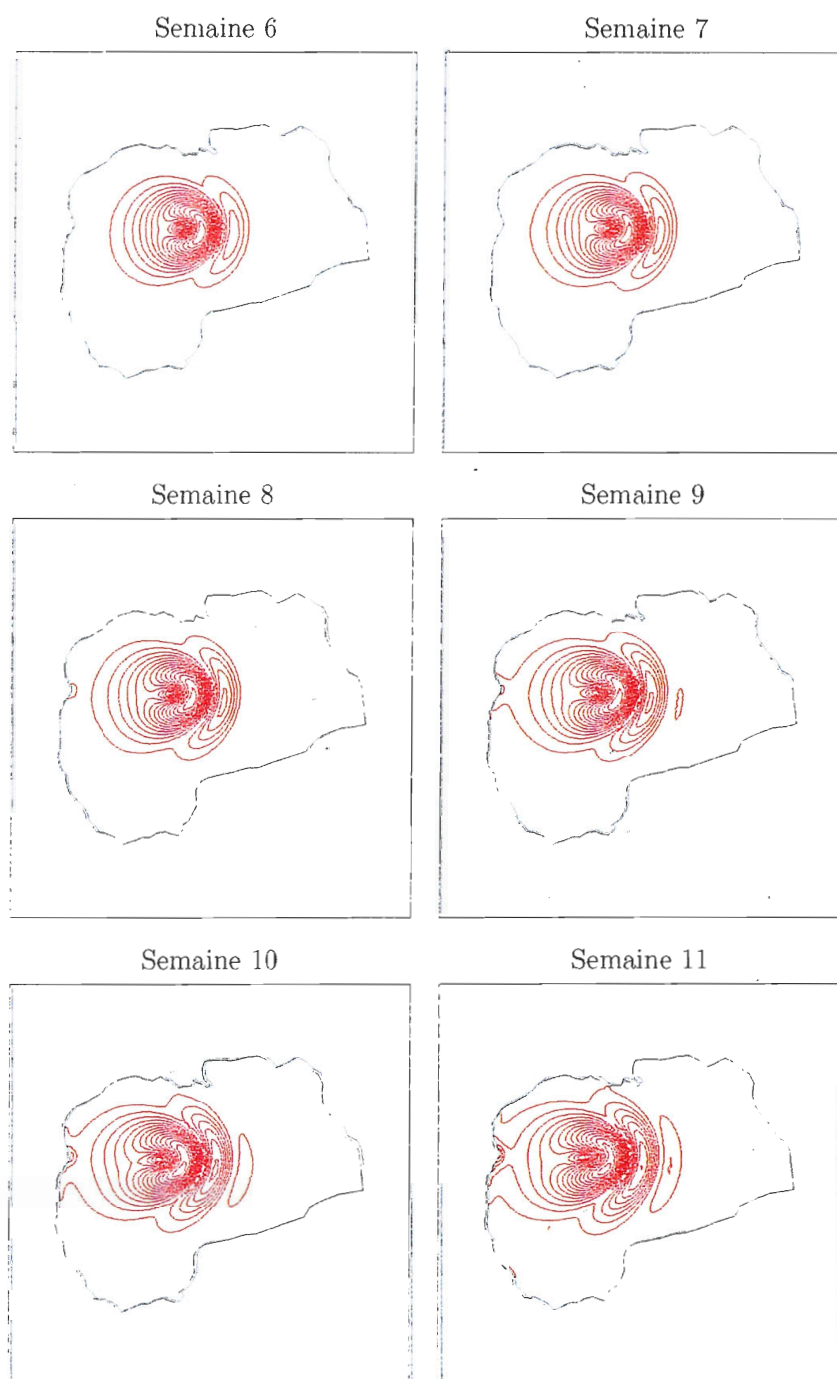
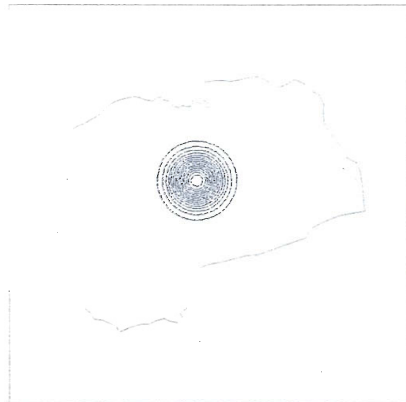
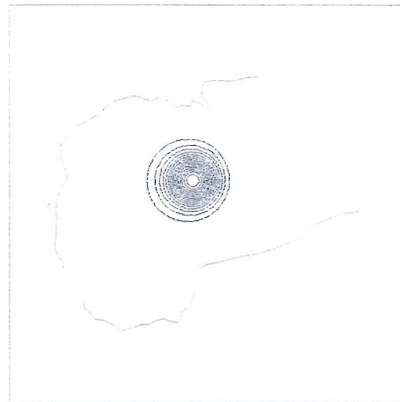


FIG. 3.12 – Isolignes de $\|\mathbf{u}\|$ à différentes semaines de propagation d'un tourbillon pour la paire $P_1^{NC} - P_1$.

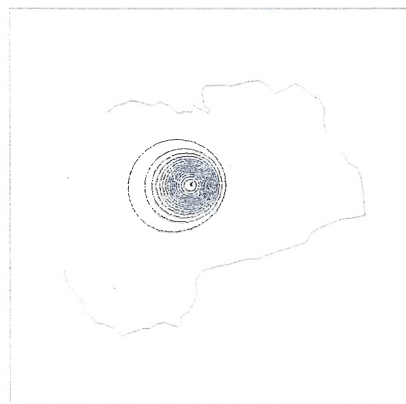
Solution initiale



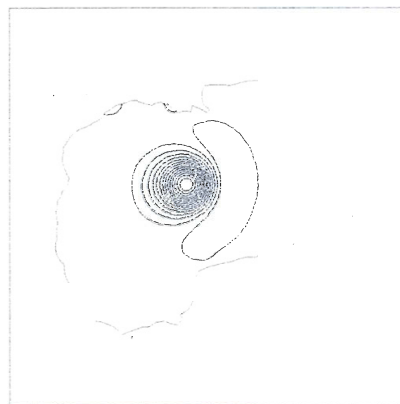
Semaine 1



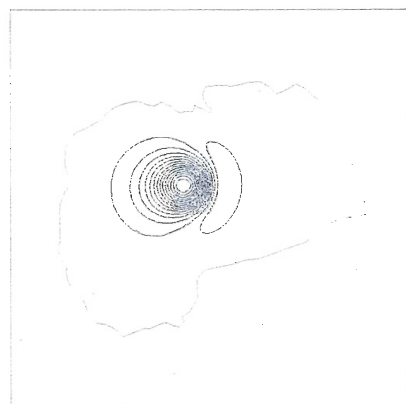
Semaine 2



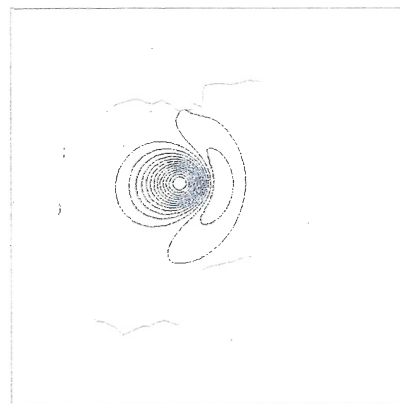
Semaine 3



Semaine 4



Semaine 5



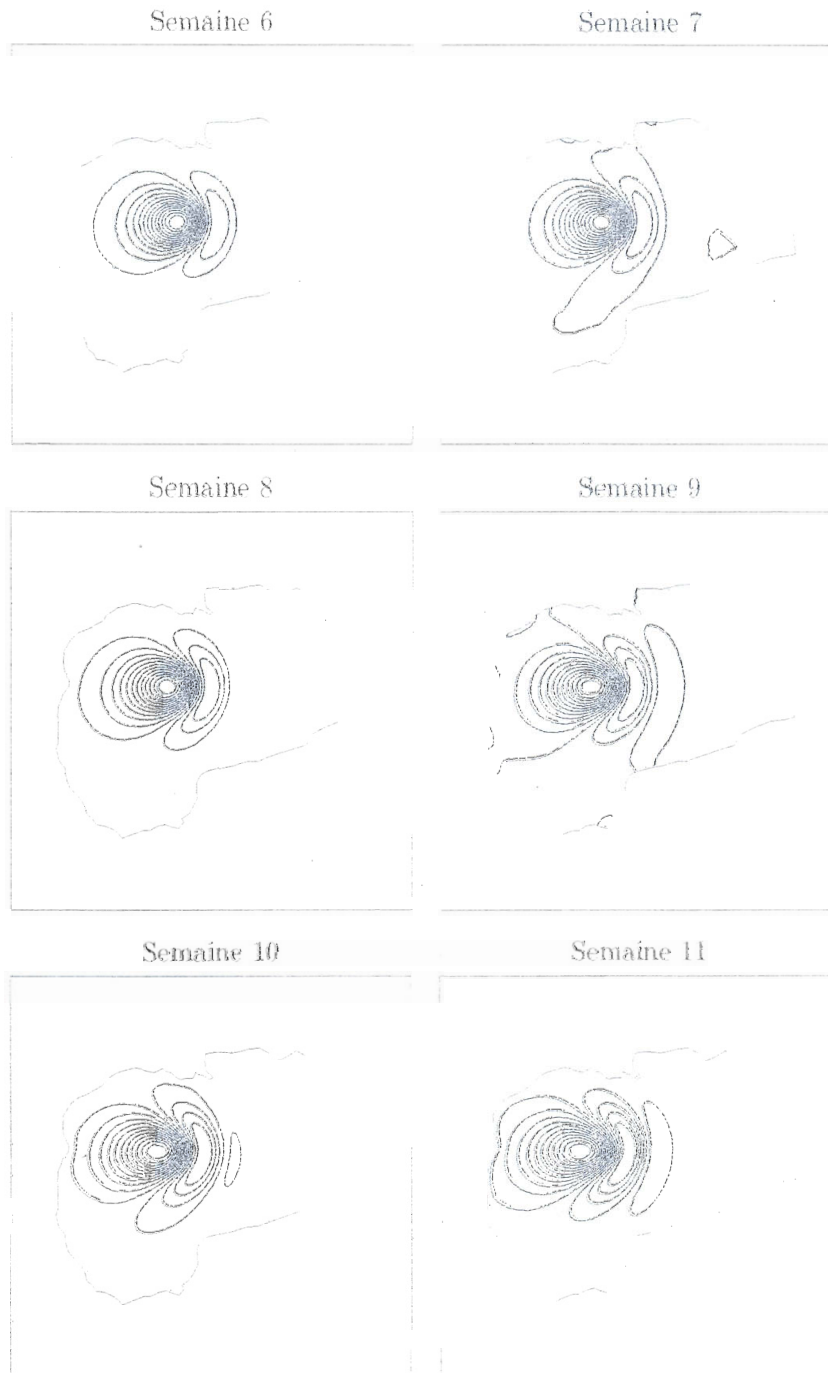
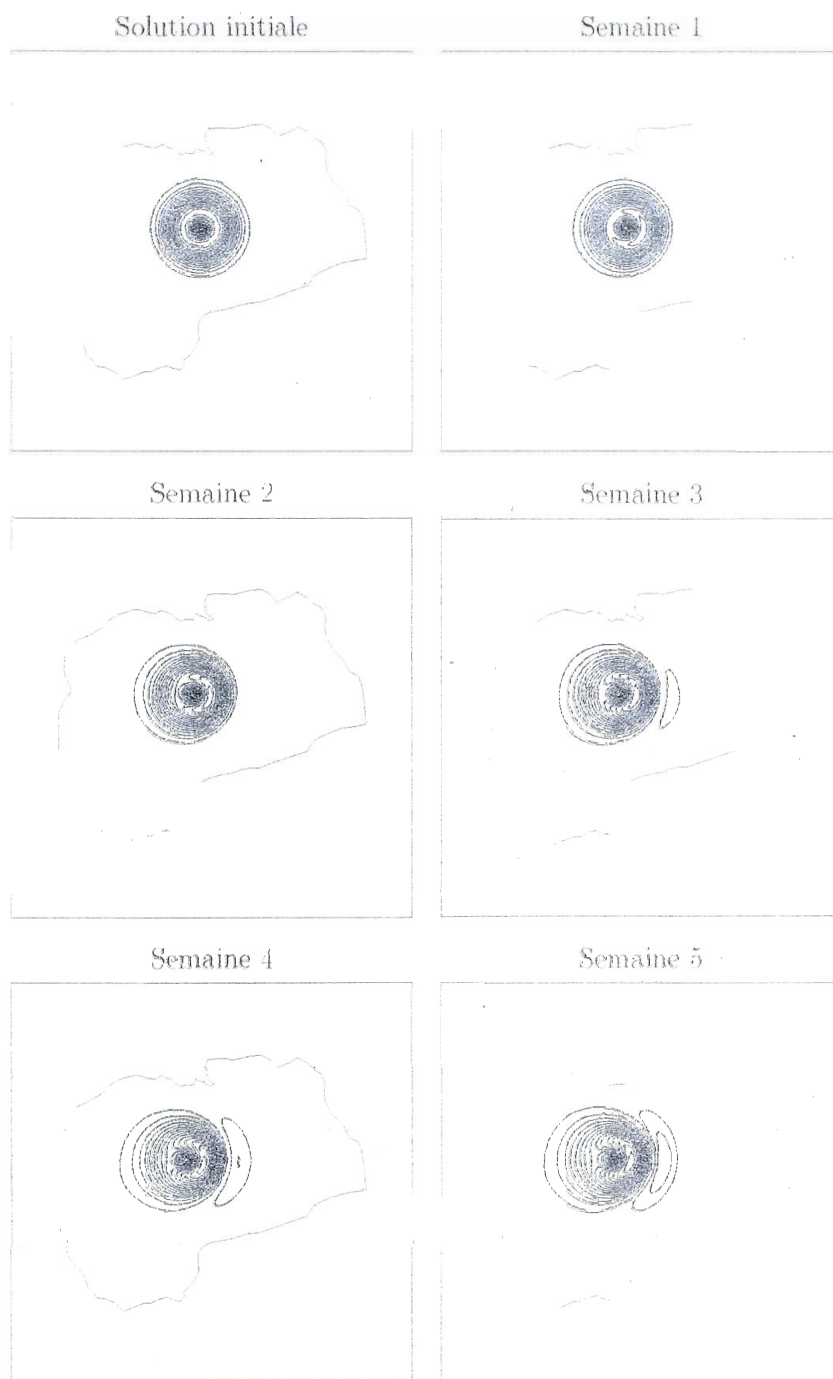


FIG. 3.13 -- Isolignes de l'élevation de la surface à différentes semaines de propagation d'un tourbillon pour la paire $RT0 - P_0$.



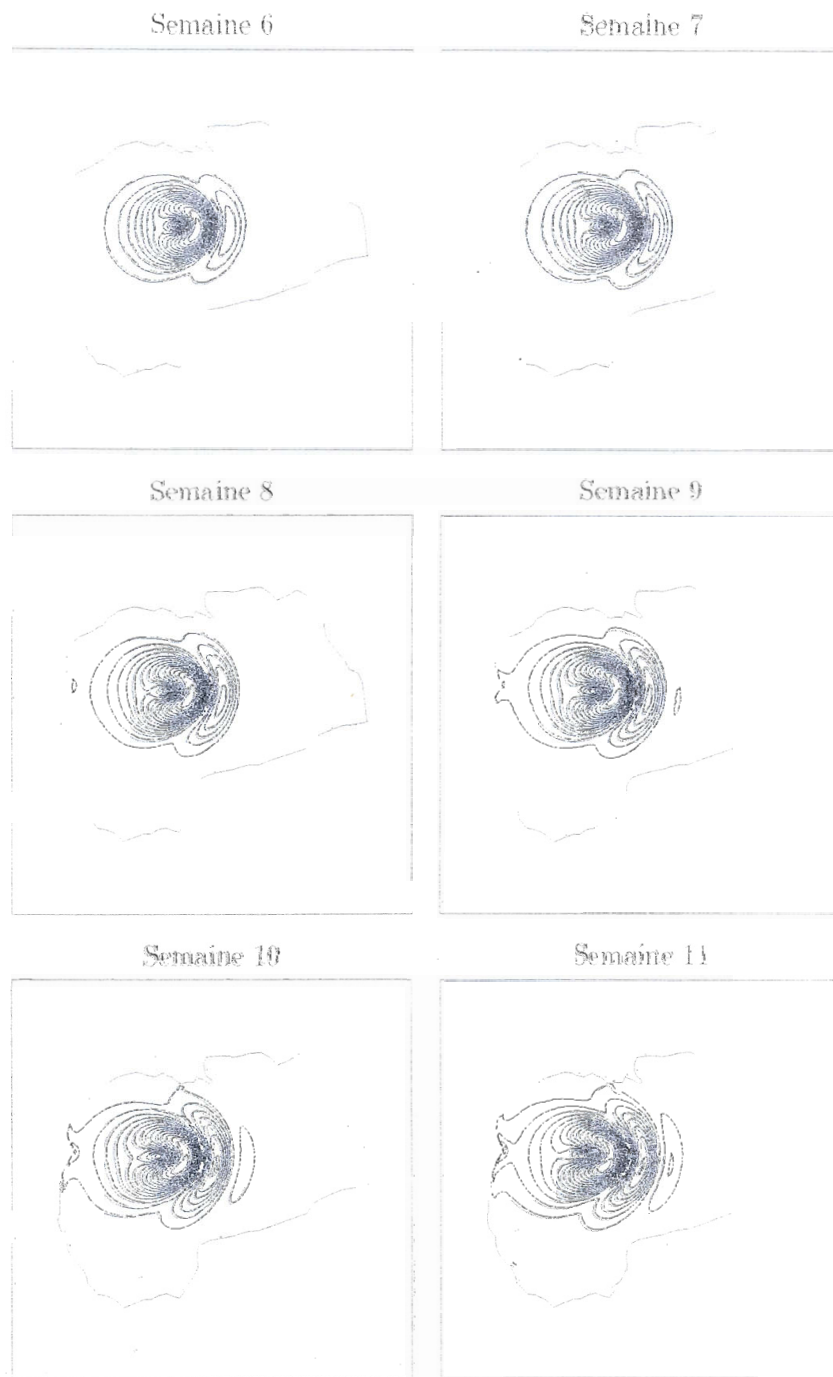


FIG. 3.14 - Isolignes de $\|\mathbf{u}\|$ à différentes semaines de propagation d'un tourbillon pour la paire $R_{10} - P_0$.

Conclusion

La discrétisation des équations de Saint-Venant linéaires par la méthode des éléments finis n'est pas un travail facile, sans parler des équations de Saint-Venant non-linéaires. Dans ce travail nous avons présenté deux paires d'éléments finis qui discrétisent bien les équations de Saint-Venant linéaires et qui donnent de bons résultats numériques.

Si un schéma de discrétisation ne fonctionne pas pour l'équation linéaire de Saint-Venant, il n'y a alors aucune chance pour qu'il s'applique pour les équations non-linéaires. Au vu des résultats obtenus dans ce travail, il est envisageable d'appliquer les schémas de discrétisations $P_1^{NC} - P_1$ et $RT0 - P_0$ dans les travaux futures pour discrétiser les équations de Saint-Venant non-linéaires.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Annie De Montigny-Leboeuf. *Application de la méthode des éléments finis aux équations de Saint-Venant*. Mémoire de maîtrise, Université Laval, 2000.
- [2] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri *Numerical mathematics*. Springer, 2000.
- [3] Benoit Pouliot. *Analyse de relation de dispersion*, mémoire de maîtrise, Université Laval, 2005.
- [4] P. Bourgault and R. Sadourny, *Dynamique de l'atmosphère et de l'océan*. Les Éditions de l'École polytechnique, 2001.
- [5] Emmanuel Harnet. *Towards a finite element ocean circulation model* thèse de doctorat, Université catholique de Louvain, 2004.
- [6] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, 1991.
- [7] L. H. Khanta, C. A. Clayson *Numerical models of ocean and oceanic processes*. International Geostrophycs Series. Academic Press, 2000.
- [8] J. Pedlosky. *Geophysical Fluid Dynamics, edition 1987*.
- [9] F. Thomasset. *Implementation of finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer-Verlag, Berlin 1981.
- [10] Daniel Le Roux. *Dispersion Relation Analysis of the $P_1^{NC} - P_1$ Finite-Element pair in Shallow-water Models*. SIAM J. Sci. comput 27(2) : 394 – 414, 2005.

- [11] R. Adams *Sobolev spaces*. Academic press, New York, 1975.
- [12] R.A. Walter, G.F. Carey. *Analysis of spurious oscillation modes for the Shallow water and Navier-stokes equation*. Computer and fluids, 11 : 51-68, 1983.
- [13] D.R. Lynch and W.G. Gray. *A wave Equation Model for finite Tidal computations*. Computer and fluids, 7 : 207-228, 1979.
- [14] R. Adams. *Sobolev spaces*. Academic press, New York, 1975.
- [15] R.A. Walters. *Numerically Induced Oscillations in finite Element approximations to the Shallow water Equations*. International Journal for numerical methods in fluids, 3 :591-604, 1983.
- [16] V. Girault, P-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithm*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.