

EX-10522  
swg700

Série A, No. 3059  
No. d'ordre  
3931

CERN LIBRARIES, GENEVA



P00030721

T H E S E S  
\*\*\*\*\*

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITE DE PARIS

pour obtenir

le Grade de Docteur ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Roland OMNES

Thesis-1957-Omnès

- 1ère thèse : Equations intégrales non linéaires en théorie quantique  
des champs. Application à la production mésonique  
des mésons.
- 2ème thèse : Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 9 mai 1957 devant la Commission d'examen.

MM. L. de BROGLIE Président

LICHNEROWICZ

M. LEVY

Examineurs

CERN - BIBLIOTHÈQUE

ORGANISATION EUROPÉENNE  
POUR LA  
RECHERCHE NUCLÉAIRE

GENÈVE

---

N° d'acquisition

C 520/18

Cote

530.I4 OMV

Série A, No. 3059  
No. d'ordre  
3931

T H E S E S  
\*\*\*\*\*

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITE DE PARIS

pour obtenir

le Grade de Docteur ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Roland OMNES

1ère thèse : Equations intégrales non linéaires en théorie quantique  
des champs. Application à la production mésonique  
des mésons.

2ème thèse : Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 9 mai 1957 devant la Commission d'examen.

MM. L. de BROGLIE           Président

LICHNEROWICZ           Examineurs  
M. LEVY

---

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS  
\*\*\*\*\*

- PROFESSEURS -

Doyen ..... J. PERES

G. JULIA	T	Anal. sup. & Algèbre sup.
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique
FOCH	T	Méc. phys. et expérimentale
PAUTHENIER	T	Electrotechnique générale
DE BROGLIE	T	Théories physiques
JOB	T	Chimie générale
PRENANT	T	Anatomie & Histol. comparées
GARNIER	T	Géométrie supérieure
PERES	T	Mécanique des fluides & Applic.
LAUGIER	T	Physiologie générale
M. CURIE	T	Physique (P. C. B.)
BARRABE	T	Géol. struct. & Géol. appliquée
G. DARMOIS	T	Calc. des prob. & Phys. Math.
J. BOURCART	T	Géogr. Phys. & Géol. dynam.
PLANTEFOL	T	Botanique
GRASSE	T	Evol. des êtres organisés
PREVOST	T	Chimie organique
BOULIGAND	T	Appl. de l'analyse à la Géom.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée
WYART	T	Minéralogie
TEISSIER	T	Zoologie
MANGENOT	T	Biologie végétale
P. AUGER	T	Physique quantique & Relat.
MONNIER	T	Physiologie des fonctions
PIVETEAU	T	Géologie
ROCARD	T	Physique (E. N. S.)
H. CARTAN	T	Mathématiques (E. N. S.)
LAFFITTE	T	Chimie générale
FAVARD	T	Mécanique générale
COULOMB	T	Physique du Globe
Mle COUSIN	T	Biologie animale (P. C. B.)
CHRETIEN	T	Chimie minérale
P. DRACH	T	Zoologie
KASTLER	T	Physique
EPHRUSSI	T	Génétique
WURMSER	T	Biol. Physico-chimique
RIVIERE	T	Géologie (S. P. C. N.)
GAUTHERET	T	Biologie végétale (P. C. B.)
LUCAS	T	Recherches physiques
A. THOMAS	T	Biologie cellulaire
ARNULF	T	Optique appliquée
M. MORAND	T	Physique
SOLEILLET	T	Physique
FORTIER	T	Méc. expér. des fluides

./.

DANJON	T	Astronomie
FROMAGEOT	T	Chimie biologique
LAPORTE	T	Phys. génér. et radioactivité
JANET	T	Méc. anal. & Méc. céleste
PETIT	T	Biologie maritime
QUENEY	T	Météor. & dyn. atmosphér.
GALLIEN	T	Embryologie
EICHHORN	T	Biologie végétale (P. G. B.)
De CUGNAC	T	Biologie végétale (P. C. B.)
Mle CAUCHOIS	T	Chimie physique
THELLIER	T	Physique du globe
AUDUBERT	T	Electrochimie
L'HERITIER	T	Génétique
GRIVET	T	Radioélectricité
PONCIN	T	Mécanique des fluides
THIRY	T	Mécanique appliquée
DUBREIL	T	Arith. & théorie des nombres
QUELET	T	Chimie organique
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée
CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire
CUVILLIER	T	Géol. struct. & Géol. appl.
JUNG	T	Pétrographie
TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique
WIEMANN	T	Chimie organ. structurale
JACQUINOT	T	Spectrosc. et Phys. céleste
VASSY		Physique de l'atmosphère
DESTOUCHES		Théories physiques
M. PRUVOST	T	Géologie
AMIEL	T	Chimie (P. C. B.)
HOCART	T	Minéralogie
J. P. MATHIEU	T	Physique (P. C. B.)
COUTEAUX	T	Biologie animale (P. C. B.)
MAY	T	Biologie animale (P. C. B.)
CHOQUET	T	Calc. diff. & intégral
FELDMANN		Biologie (P. C. B.)
GUINIER	T	Physique (P. C. B.)
JOST	T	Biologie (P. C. B.)
FORTET	T	Calc. des probabilités
SCHWARTZ	T	Méth. Mathém. de la Phys.
CHOUARD	T	Physiologie végétale
MALAVARD	T	Aviation
BRELOT	T	Calcul différentiel
NORMANT	T	Chimie (P. C. B.)
BENARD	T	Chimie (P. C. B.)
BUVAT	T	Botanique (E. N. S.)
DUGUE	T	Statistiques mathématiques
GELOSO		Chimie (S. P. C. N.)
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie
ULRICH	T	Physiologie végétale
MARECHAL	T	Optique théor. et appl.

KIRRMANN	T Théories chimiques
CHADEFAUD	Botanique
DESTRIAU	T Physique (M. P. C.)
Mle LE BRETON	Physiologie générale
SALEM	T Mathématiques générales
LELONG	T Mathématiques générales
DEVILLERS	Anat. & Histol. comparées
EHRESMANN	T Topologie algébrique
FRANCON	Physique (M. P. C.)
GLANGEAUD	T Géographie physique et géologie dynamique
GODEMENT	T Mathématiques (M. P. C.)
PISOT	T Calcul des probabilités
ROCH (E.)	Géologie
SCHATZMANN	Astrophysique
TESSIER	T Paléontologie stratigraphique
ZAMANSKY	T Mathématiques générales
JOLIOT	T Physique nucléaire et radioactivité
LENNUIER	Physique (P. C. B.)
RISSET	Génétique
Mme TONNELAT	Théories physiques
DIXAIER	Mathématiques (N. P. C.)
SOUCHAY	Chimie (P. C. B.)
AIGRAIN	Physique (P. C. B.)
M. LEVY	Physique théorique
LENORMANT	Physiologie
Mme CHAIX	Chimie biologique
Mme HUREL-PY	Biologie végétale (P. C. B.)
PIAUX	Chimie (P. C. B.)
BRUN	Mécanique expérimentale des fluides
LEDERES	Chimie biologique
Mme DUBREIL-	
JACOTIN	Mathématiques
Mme LELONG-	
FERRAND	Mathématiques (E. N. S.)
BELLAIR	Géologie (S. P. C. N.)
COTTE	T Physique (N. P. C.)
DUBOIS J.	Chimie
LAMOTTE	Zoologie
Le ROLLAND	Mécanique des fluides
MICHEL	Chimie (P. C. B.)

SECRETAIRE GENERAL ..... C. MONIER

## INTRODUCTION

C'est en 1935 que Yukawa <sup>/1/</sup> suggéra la possibilité d'expliquer les forces nucléaires par un échange de particules entre les nucléons, très analogue à l'échange de photons entre particules chargées que décrivait l'électrodynamique quantique. La connaissance que l'on avait alors des forces nucléaires permettait même d'assigner à la masse de cette particule hypothétique une valeur de l'ordre de 300 me; l'indépendance de charge de ces forces s'expliquait elle-même aisément en supposant l'existence de trois états de charge du méson  $\pi$  à l'aide du formalisme du spin isobarique <sup>/2/</sup>.

En 1947, Lattes, Occhialini et Powell <sup>/3/</sup> découvraient parmi les rayons cosmiques une particule répondant à ces prévisions. Elle interagissait en effet fortement avec la matière nucléaire et les études aussitôt entreprises permirent de déterminer sa masse <sup>/4/</sup> (273.3 me pour les mésons chargés), son spin <sup>/5/</sup> et sa parité intrinsèque <sup>/6/</sup>. Bientôt il fut possible de créer artificiellement le méson  $\pi$  à l'aide d'accélérateurs et d'étudier de plus près ses propriétés, en particulier sa diffusion par les nucléons, la photoproduction et la production par choc de nucléons.

Connaissant toutes les propriétés élémentaires de cette nouvelle particule, il semblait facile de prévoir ou de vérifier par le calcul les résultats de ces expériences. Malheureusement, on obtenait un désaccord flagrant que l'on attribuait à une valeur si importante de la constante de couplage qu'elle proscrivait l'usage des méthodes habituelles de la théorie des perturbations (il semble maintenant que le couplage utilisé puisse lui-même être remis en question) <sup>/7/</sup>. M.M. Lévy <sup>/8/</sup>, en calculant en 1952 le potentiel nucléaire à l'aide de la méthode Tamm-Dancoff <sup>/9/</sup>, montra qu'il devait être possible d'obtenir un certain accord avec l'expérience en perfectionnant les méthodes de calcul et les adaptant à la valeur importante du couplage.

Les premiers succès importants dans l'étude de la diffusion du méson  $\pi$  par les nucléons furent obtenus par G. F. Chew <sup>/10/</sup>. Sa méthode que nous exposerons plus en détail au chapitre I.1, consiste à considérer le nucléon comme infiniment lourd par rapport au méson qui est lui-même traité de façon relativiste. Les principales conséquences de cette approximation sont donc de négliger totalement le recul des nucléons dans une réaction et, comme le formalisme le montre immédiatement, de ne permettre une interaction que lorsque le méson est dans un état P (moment angulaire relatif  $l = 1$ ) par rapport au nucléon; pour éviter d'obtenir des expressions infinies au cours des calculs, il est d'ailleurs nécessaire d'imposer une limite supérieure aux impulsions des mésons, ce qui équivaut à une extension finie du nucléon. Enfin, par la nature même de la théorie, il est nécessaire de limiter les prévisions au domaine où l'énergie des nucléons n'est pas relativiste. Chew réussit ainsi à expliquer la diffusion importante et la résonance dans l'état P de spin isobarique total  $3/2$  et de moment angulaire total  $3/2$  ainsi que la petitesse relative des déphasages de diffusion dans les autres états P.

La méthode de Chew fut modifiée et améliorée par Chew lui-même, F. E. Low <sup>/11/</sup> et G. C. Wick <sup>/12/</sup>. Ils purent établir une équation intégrale non-linéaire exprimant les éléments de la matrice T de réaction pour la diffusion en fonction des éléments de matrice de diffusion et de production, équation qui exprime uniquement les propriétés fondamentales de la théorie : unitarité, causalité et croisement. L'avantage d'une telle méthode est évidemment de respecter ces conditions à tous les stades du calcul, compte non tenu des clartés qu'elle peut fournir sur la structure de la théorie elle-même.

Deux méthodes d'approximation ont été utilisées pour résoudre l'équation ainsi obtenue <sup>/11/</sup>. La première consiste à limiter les éléments de matrice T qui y figurent à la seule diffusion et constitue "l'approximation à un méson". La seconde consiste à retrouver la forme de la solution que donnerait la méthode de portée effective de Schwinger <sup>/13/</sup> et d'obtenir ainsi des relations entre les paramètres qui y figurent. L'accord des résultats avec l'expérience est bon pour chacune de ces approximations et elles donnent en particulier convenablement le déphasage ( $3/2 \quad 3/2$ ).

La méthode a d'autre part été appliquée à d'autres problèmes : la photo-production des mésons a été étudiée par Chew et Low <sup>/11/</sup>, la diffusion radiative par Cutowsky et Bosco <sup>/14/</sup>, les forces nucléaires par S. Gartenhaus <sup>/15/</sup>, ainsi que par A. Klein et B. McCormick <sup>/16/</sup>.

Dans la première partie de ce travail, nous avons appliqué cette méthode à l'étude de la production d'un méson  $\pi$  par choc d'un nucléon et d'un méson. Pour pouvoir respecter les conditions de causalité, d'unitarité et de croisement, nous avons établi une équation ayant essentiellement les mêmes caractéristiques que celle de Low, valable pour les processus étudiés <sup>/17/</sup>. Cette équation a été simplifiée par une approximation à un méson et résolue sous cette dernière forme.

Au chapitre I nous rappelons les éléments essentiels de la théorie de Chew, Low, et Wick. Au passage nous démontrons un résultat nouveau à propos de cette théorie : en utilisant le fait que la résonance  $(3/2 \ 3/2)$  est unique, ce qui résulte à la fois de l'expérience et des calculs de Sjötzmann <sup>/18/</sup> sur l'équation de Chew et Low, nous montrons que la résonance observée correspond à la présence d'un pôle de la matrice  $S$  dans le demi-plan complexe inférieur des énergies. Ce résultat justifie l'application des méthodes d'étude des réactions nucléaires développées par Wigner et ses collaborateurs <sup>/19/</sup> à la résonance  $(3/2 \ 3/2)$  de l'interaction méson-nucléon, méthodes qui ont été utilisées à ce propos par Watson <sup>/20/</sup>. Nous vérifions par la suite que cette résonance se retrouve effectivement dans le canal de production. Nous avons établi, sans le démontrer ici, qu'elle se retrouve également dans le canal de diffusion radiative.

Le chapitre II est consacré à une étude théorique des éléments de matrice de production d'un méson.

Au paragraphe 1, nous établissons la forme que prennent ici les conditions de causalité, d'unitarité et de croisement et nous donnons un certain nombre de résultats relatifs à la structure des états physiques à plusieurs mésons. Les méthodes utilisées sont une extension directe de celles de G. C. Wick <sup>/12/</sup>.

Au paragraphe 2, nous établissons les équations fondamentales qui permettent d'exprimer les éléments de matrice de production sous une forme analogue à celle de Chew et Low. Nous vérifions que les conditions de causalité, d'unitarité et de croisement sont effectivement respectées par les équations.

Le paragraphe 3 généralise les résultats du paragraphe 2. Nous avons tenté d'obtenir un système complet d'équations intégrales non linéaires du type de Low exprimant les éléments de matrice de transition entre états à un nucléon et un nombre quelconque de mésons uniquement à l'aide de ces mêmes éléments. Le résultat est atteint et donné explicitement lorsque le nombre de mésons considéré, tant dans l'état initial que dans l'état final, est inférieur ou égal à 2<sup>/21/</sup>. La structure des équations devient trop compliquée pour être explicitement étudiée (ou même rigoureusement prouvée) dans les autres cas. Ce problème sera repris d'un point de vue plus général et résolu dans la seconde partie.

Le paragraphe 4 est consacré à l'approximation à un méson, sa justification et la réduction des équations qui prennent la forme d'un système intégral linéaire couplé.

Au paragraphe 5, ces équations sont étudiées en vue de leur résolution numérique. On constate que la méthode d'itérations successives ne converge pas et que la solution des équations est très différente en ordre de grandeur du terme inhomogène (terme dit de Born). C'est là un fait très important qui résulte de la singularité des noyaux rencontrés dans la théorie où figurent à la fois la fonction  $e^{-i\delta_3 \sin \delta_3}$ , rapidement variable au voisinage de la résonance, et un dénominateur singulier. Ce fait doit se retrouver dans d'autres applications de la théorie statique et mérite d'être nettement souligné. En fait, il est cause que nos résultats diffèrent, dans un sens compatible avec les premiers résultats expérimentaux<sup>/22/</sup>, de ceux obtenus dans le même temps par d'autres auteurs qui ont tous, explicitement ou non, supposé la convergence de la méthode d'itération et effectué des approximations fondées sur cette hypothèse. Finalement, l'équation la plus importante a été résolue sur machine par la méthode des différences finies.

Le paragraphe 6 est consacré à la comparaison de nos résultats avec ceux d'autres auteurs (la plupart parus postérieurement à nos premières communications).

Le chapitre III traite des applications :

Au paragraphe 1, nous montrons que la divergence de la méthode d'itération interdit une estimation des termes à deux mésons dans l'équation de Chew et Low, à moins de la résolution complète d'un système d'équations intégrales à deux paramètres. Les méthodes d'approximation utilisées jusqu'ici pour l'étude de ce problème ne nous paraissent pas en général justifiées. On peut donner des arguments en faveur de la petitesse de cette contribution mais il est difficile de l'estimer.

Au paragraphe 2, l'étude de la production de deux mésons positifs par choc d'un méson positif et d'un proton est introduite. Ce problème avait déjà été traité à l'aide de la méthode Tamm-Dancoff par B. d'Espagnat <sup>/23/</sup> et M. Nelkin <sup>/24/</sup>, mais le désaccord entre les résultats obtenus et les premières valeurs expérimentales était considérable.

Au paragraphe 3, on étudie la section expérimentale différentielle dont la forme caractéristique pourrait permettre de vérifier la validité de la méthode utilisée.

Le paragraphe 4 est consacré à l'étude de la section efficace totale de cette réaction. Pour les raisons déjà indiquées, nous obtenons des sections efficaces plus importantes que celles qui ont été calculées jusqu'ici, tant par la méthode Tamm-Dancoff que par la théorie de Chew et Low (compte tenu seulement des calculs où la condition de conservation de probabilité est considérée), de l'ordre de  $0.6 - 0.7 \text{ mb}$  à 400 Mev (énergie du méson dans le système du centre de masse). Toutes les approximations faites en cours de route ont été vérifiées et l'erreur commise estimée.

Le problème de l'établissement d'un système complet d'équations intégrales non linéaires du type de Low que nous avons rencontré en cours du chapitre II sans le résoudre complètement dans le contexte de la théorie du nucléon statique, fait l'objet de la seconde partie.

Ce problème peut être intéressant à plusieurs points de vue : il a des rapports très étroits avec la théorie de la dispersion et peut permettre des calculs du type de ceux de la première partie, comme aussi de mieux comprendre l'équation de Low elle-même et sa généralité.

L'équation de Low <sup>/25/</sup> avait été établie pour la première fois sur la forme relativiste en couplage pseudo-scalaire de l'interaction méson-nucléon. On a depuis démontré qu'elle résultait de la théorie des champs de Lehmann, Symanzick et Zimmermann <sup>/26/</sup> et possédait donc un caractère très général, indépendant d'un modèle particulier.

Pour établir un système complet d'équations du type de Low et mettre en évidence son caractère général, nous avons utilisé des éléments de la théorie des champs phénoménologique introduite par N. N. Bogolioubov <sup>/27/</sup> et ses collaborateurs pour démontrer les relations de dispersion. C'est là en fait une théorie de la matrice  $S$  où la condition de causalité microscopique est explicitée et soulignée. Elle semble offrir des promesses intéressantes de modification de la théorie des champs actuelle et fournit une base apparemment sûre pour établir des relations indépendantes de tout modèle explicite.

Au paragraphe 1, nous donnons les éléments essentiels de cette théorie et, en particulier la forme de la condition de causalité. Au passage, nous démontrons le théorème suivant; pour toute théorie hamiltonienne où l'hamiltonien a un sens physique selon une acceptation que nous précisons, la condition de causalité est vérifiée. Un cas particulier intéressant est celui de la théorie des champs habituelle sans états liés.

Au paragraphe 2, nous dérivons l'équation de Low proprement dite à l'aide des méthodes exposées. Cela nous permet de lever une ambiguïté que nous croyons avoir été toujours négligée dans la démonstration.

Le paragraphe 3 généralise le paragraphe 2. Nous montrons que tout élément de matrice de transition entre deux états constitués d'un nucléon et d'un nombre quelconque de mésons peut être mis sous forme d'expression intégrale quadratique où figurent les éléments de la matrice de transition  $T$  (sur et en dehors de la couche d'énergie)<sup>/28/</sup>. Les équations obtenues sont relativistes et indépendantes de tout modèle particulier.

**PREMIERE PARTIE**

\*

\*            \*

**TERMES A PLUSIEURS MESONS EN THEORIE DU NUCLEON STATIQUE  
PRODUCTION MESONIQUE DES MESONS**

## I. GENERALITES

### 1. Formalisme de l'interaction méson-nucléon. Hamiltonien. Notations.

On a montré expérimentalement que le spin des mésons chargés  $\pi^{\pm}$  est égal à zéro <sup>/5/</sup>. On peut prouver qu'il en est de même pour le méson neutre  $\pi^0$  par des arguments théoriques très simples fondés sur l'étude de sa désintégration. D'autre part, leur parité intrinsèque est négative <sup>/6/</sup>. Selon les principes généraux de la théorie des champs, on représentera donc le champ des mésons libres par un ensemble d'opérateurs pseudo-scalaires  $\phi(x)$  vérifiant l'équation de Klein-Gordon.

$$(\square - \mu^2) \phi(x) = 0 \qquad \square = -\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

où  $x = (x_0 = ct, x_1, x_2, x_3)$ ,

la masse réduite  $\mu$ , étant égale à  $mc/\hbar$ , où  $m$  figure la masse du méson.

Nous utiliserons toujours par la suite un système d'unité où  $\hbar = c = \mu = 1$ , négligeant ainsi la différence de masse des mésons chargés et neutres.

Cette équation peut être déduite du principe d'action de Schwinger <sup>/29/</sup> à l'aide de la densité de Lagrangien

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\phi^2 - \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi)$$

En représentation de Schrödinger où les opérateurs ne dépendent pas du temps, l'hamiltonien est donné par

$$H_0 = \frac{1}{2} \int_V d^3x \{ \pi^2(\vec{x}) + |\nabla \phi|^2 + \phi^2(\vec{x}) \}$$

où  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  et  $\Pi(\vec{x})$  est l'opérateur conjugué de  $\phi(\vec{x})$  vérifiant les relations de commutation

$$[\phi(\vec{x}), \Pi(\vec{x}')] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (1)$$

et où l'intégration a été limitée à un "volume de quantification"  $V$  aux bornes duquel les opérateurs de champ vérifient des conditions de périodicité. En prenant pour  $V$  un cube d'arrête  $L$ , on définit le développement de Fourier des opérateurs par

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} q_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ \Pi(\vec{x}) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} p_{\vec{k}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \end{aligned}$$

les composantes des vecteurs impulsions  $\vec{k}$  étant des multiples de  $2\pi/L$ . Les opérateurs création et annihilation  $a_{\vec{k}}^+$  et  $a_{\vec{k}}$  sont alors définis en fonction de  $q_{\vec{k}}$  et  $p_{\vec{k}}$  par

$$\begin{aligned} q_{\vec{k}} &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} (a_{\vec{k}} + a_{-\vec{k}}^+) \\ p_{\vec{k}} &= i\sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2}} (a_{\vec{k}}^+ - a_{-\vec{k}}) \end{aligned}$$

où nous avons désigné par  $\omega_{\vec{k}}$  l'énergie d'un méson d'impulsion  $\vec{k}$

$$\omega_{\vec{k}} = \sqrt{1 + k^2} \quad (2)$$

D'après l'équation (1) ces opérateurs vérifient les relations de commutation

$$\begin{aligned} [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] &= [a_{\vec{k}}^+, a_{\vec{k}'}^+] = 0 \\ [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^+] &= \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \end{aligned} \quad (3)$$

A ce stade, nous tiendrons compte des divers états de charge du méson en introduisant un indice de charge  $\lambda$  ( $\lambda = +1, 0, -1$ , pour  $\pi^+, \pi^0, \pi^-$ ) l'opérateur création d'un méson d'impulsion  $\vec{k}$  dans l'état de charge  $\lambda$  s'écrivant  $a_{\vec{k}\lambda}^+$ , ce que nous noterons plus simplement par  $a_{\vec{k}}^+$ .

En éliminant l'énergie du point zéro, on peut mettre l'hamiltonien sous la forme

$$H_0 = \sum_{\vec{k}} n_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}}$$

où  $n_{\vec{k}}$ , qui désigne le nombre de mésons dans l'état  $\vec{k}$ , est donné par

$$n_{\vec{k}} = a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}}$$

Considérons maintenant l'interaction avec les nucléons. On sait qu'un traitement complètement relativiste de cette interaction entraîne la possibilité de création de paires de nucléons et d'anti-nucléons, ce qui complique considérablement les calculs et les rend parfois fortement sujet à caution. Pour éliminer cet effet, et les difficultés de calcul inhérentes, on a été amené à traiter les nucléons comme des particules non relativistes, ce qui revient en fait à considérer leur masse comme infinie et leur position fixe, les mésons étant toujours traités de manière relativiste. La théorie résultante, dite du nucléon statique, a été créée par G. F. Chew <sup>/10/</sup> et développée principalement par Chew et Low <sup>/11/</sup> et Wick <sup>/12/</sup>. Elle peut être considérée comme limite de la théorie relativiste avec couplage pseudo-scalaire comme le montre le théorème de Dyson. Elle ne peut tenir compte du recul subi par un nucléon lors d'un choc avec un méson et n'est donc strictement applicable que pour des énergies mésoniques faibles devant l'énergie au repos du nucléon.

C'est par cette méthode que nous ferons les calculs de cette première partie. Mathématiquement, on représentera donc un nucléon par un spineur à deux composantes du type de Pauli. Sur un tel spineur pourront agir les opérateurs  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , ou  $\sigma_z$  que nous désignerons généralement par  $\sigma_i$ .

Pour tenir compte des deux états de charge du nucléon, proton et neutron, ainsi que de l'invariance de charge des forces nucléaires, on utilisera le formalisme du spin isobarique en représentant les nucléons comme des spineurs, dans un espace isobarique, dont les deux composantes correspondent respectivement au proton et au neutron et sur lesquels pourront agir des opérateurs  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$  analogues aux  $\sigma$ . Nous grouperons les indices de spin ordinaire et de charge en un seul nombre quantique  $\alpha$ , un nucléon libre sans interaction étant représenté par la notation  $|\alpha\rangle$ .

Considérons maintenant un nucléon fixé à l'origine des coordonnées, son interaction avec le champ mésonique sera nécessairement représenté par l'hamiltonien

$$H_I = (4\pi)^{\frac{1}{2}} f_0 \sum_{\lambda} \zeta_{\lambda} \int_V \rho(\vec{x}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \phi_{\lambda}(\vec{x}) d^3x$$

car  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})$  est le seul opérateur pseudo-scalaire que l'on puisse former à partir du spin du nucléon et  $\zeta_{\lambda} \phi_{\lambda}$  le seul scalaire isobarique. La fonction  $\rho(\vec{x})$  figure en fait une distribution non ponctuelle du nucléon. Fubini et Thirring ont montré qu'en donnant à  $\rho(\vec{x})$  la forme d'une fonction de Yukawa  $e^{-\mu r}/r$ , la théorie n'est compatible avec les faits expérimentaux que pour  $\mu = 4, 7$ ,  $f_0$  est la constante de couplage non rationalisée, non renormalisée, que l'on peut prendre égale à 0.20 (Chew et Low<sup>/11/</sup> Fubini et Thirring<sup>/30/</sup>).

Dans l'espace des moments,  $H_I$  prend la forme

$$\sum_k a_k V_k + a_k^{\dagger} V_k^{\dagger} \quad (4)$$

où l'on a posé

$$V_k = \frac{1}{\sqrt{V}} (4\pi)^{\frac{1}{2}} f_0 \zeta_{\lambda} i (\vec{k} \cdot \vec{\sigma}) v(\vec{k}) (2\omega_k)^{-\frac{1}{2}}$$

$v(\vec{k})$ , fonction de coupure étant la transformée de Fourier de la fonction de distribution

$$v(\vec{k}) = \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \rho(\vec{x}) d^3x$$

D'après Fubini et Thirring /30/

$$V(\vec{k}) = \frac{\mu^2}{\mu^2 + k^2} \quad \mu \neq 4, 7$$

D'après Chew et Low, le meilleur accord avec les expériences de diffusion aux basses énergies est obtenu en prenant  $\mu = 5.5$ .

Nous devons imposer à l'hamiltonien l'invariance par rotation, ce qui équivaut à considérer  $\rho(\vec{x})$  comme uniquement fonction de  $|\vec{x}|$  et par conséquent  $V(k)$  comme fonction de  $|\vec{k}|$ . Si donc nous développons  $\phi(\vec{x})$  en harmoniques sphériques, seuls les harmoniques d'ordre 1, correspondant à un moment angulaire  $\ell = 1$ , entreront en jeu dans  $H_I$  autrement dit, la théorie restreint l'interaction aux mésons dans un état P. Il y a donc intérêt à utiliser des coordonnées sphériques. N'ayant à faire qu'à des états P, nous pouvons éliminer l'indice inutile 1 et prendre simplement comme base s'harmoniques sphériques dans l'espace des moments les composantes de k

$$Y_{1i}(\vec{k}) \rightarrow \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} k_i k^{-1} \quad (5)$$

En désignant maintenant par l'indice générique k l'ensemble des nombres quantiques d'un méson  $\vec{k}, i, \lambda$  de telle sorte que  $a^+_{k\lambda}$ , par exemple, soit l'opérateur création d'un méson d'impulsion  $\vec{k}$ , de charge  $\lambda$  dans l'état de moment angulaire i, l'hamiltonien devient

$$H = H_0 + H_I$$

avec

$$H_I = \sum_k a_k V_k + a_k^+ V_k^+$$

$$V_k = V_{ki\lambda} = \frac{1}{\sqrt{V}} 3^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty k v(k) (2\omega_k)^{-\frac{1}{2}} (\sigma_i \tau_\lambda) \quad (6)$$

Pour simplifier ultérieurement les calculs, nous fixerons le volume de quantification  $V$  de façon que le nombre d'état d'un méson de moment angulaire et de charge déterminés, d'énergie comprise entre  $\omega$  et  $\omega + d\omega$ , soit précisément égal à  $d\omega$ <sup>/31/</sup>, soit :

$$\frac{2V}{\pi} k^2 dk = d\omega_k$$

ce qui entraîne

$$V_{ki\lambda} = \frac{1}{\sqrt{3\pi}} \int_0^k k'^{3/2} v(k') \sigma_i \sigma_\lambda \quad (7)$$

Le fait que le volume de quantification soit fonction de  $k$  dans cette normalisation n'entraîne aucune difficulté alors que les sommations sur les états sont nettement simplifiées.

Signalons enfin les relations de commutation importantes pour la suite.

$$\begin{aligned} [H_0, a_k] &= -\omega_k a_k & [H_I, a_k] &= -V_k^\dagger \\ [H_0, a_k^\dagger] &= \omega_k a_k^\dagger & [H_I, a_k^\dagger] &= V_k \end{aligned} \quad (8)$$

## 2. Rappel de la théorie de Chew, Low, Wick

Nous allons maintenant rappeler la dérivation de l'équation de Low, telle qu'elle a été développée par Wick<sup>/12/</sup>, Chew et Low<sup>/11/</sup>. Cela nous permettra de souligner certains des résultats et des techniques utiles pour la suite, tout en précisant les notations.

Nous désignerons par  $|\alpha\rangle$ , ou plus simplement  $|\rangle$ , l'état d'un nucléon physique, par  $|p\alpha\rangle$  ou  $|p\rangle$  l'état physique d'un nucléon et d'un méson  $p$  en précisant par  $|p\alpha+\rangle$  (resp.  $|p\alpha-\rangle$ ) l'état où l'onde mésonique est sortante (resp. entrante).

On fixera pour zéro de l'échelle d'énergie celle du nucléon physique, de sorte que

$$H|\alpha\rangle = 0 \quad (9)$$

L'équation de Schrödinger pour un état à un méson s'écrit

$$(H - \omega_q)|q-\rangle = 0 \quad (10)$$

et permet, à l'aide des relations de commutation (8) d'écrire  $|q-\rangle$  sous la forme

$$|q-\rangle = a_q^+ \rangle - (H - \omega_q + i\varepsilon)^{-1} V_q \rangle \quad (11)$$

$\varepsilon$  étant une quantité positive introduite afin que l'opérateur  $H_0 - \omega_q$  ait un inverse et que l'état correspondant soit à ondes entrantes, l'équation est entendue au sens de  $\varepsilon \rightarrow 0$

Considérons maintenant l'élément de matrice  $S$  entre un état initial à un méson  $q$  et un état final quelconque  $n$ . De façon générale on définira la matrice de collision  $T$  par

$$\langle \alpha | S | \beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} - 2\pi i \delta(E_\alpha - E_\beta) T_\beta(\alpha) \quad (12)$$

où  $S$  est défini par

$$\langle \alpha | S | \beta \rangle = \langle \alpha- | \beta+ \rangle \quad (13)$$

On voit que, d'après (11)

$$|q+\rangle = a_q^+ \rangle - (H - \omega_q - i\varepsilon)^{-1} V_q \rangle = |q-\rangle - 2\pi i \delta(H - E) V_q \rangle \quad (14)$$

où l'on a utilisé la relation

$$\frac{1}{H - E - i\varepsilon} = \pi i \delta(H - E) + \mathcal{P} \frac{1}{H - E} \quad (15)$$

(P signifie partie principale au sens de Cauchy). de (13) et (14) il résulte

$$\langle n- | q+ \rangle = \delta_{nq} - 2\pi i \delta(E_n - \omega_q) \langle n- | V_q \rangle \quad (16)$$

La comparaison de (12) et (16) montre que

$$T_q(n) = \langle n- | V_q \rangle \quad (17)$$

ce qui permet de définir très simplement  $T_q(n)$  en dehors de la couche d'énergie puisque l'on connaît explicitement la dépendance de  $V_q$  en fonction de  $q$ .

En utilisant l'expression explicite de  $\langle p- |$  donnée par l'équation analogue à (14) on dérive aisément de (17) l'équation de Low

$$T_q(p) = - \sum_n \left[ \frac{T_p^*(n) T_q(n)}{E_n - \omega_q - i\varepsilon} + \frac{T_q^*(n) T_p(n)}{E_n + \omega_q} \right] \quad (18)$$

Où  $n$  désigne un système complet d'états (on supposera qu'il n'existe pas d'état lié du méson et du nucléon).

Cette équation s'interprète simplement de la façon suivante :

a) le premier terme exprime l'unitarité de la matrice S, car il entraîne

$$T_q^*(p) - T_p(q) = 2\pi i \sum_n \delta(E_n - \omega_q) T_q^*(n) T_p(n)$$

équivalent à

$$\langle q | S S^\dagger | p \rangle = \langle q | 1 | p \rangle$$

de plus, le  $-i\varepsilon$  du dénominateur entraîne que, si l'on considère  $\omega_q$  comme complexe,  $T_q(p)$  est fonction holomorphe de  $\omega_q$  dans le demi-plan complexe supérieur, ce qui est la condition de causalité.

b) le second terme permet de vérifier le théorème de croisement de Gell-Mann et Goldberger sur lequel nous reviendrons.

L'approximation à un méson consiste à limiter la sommation dans (18) aux termes à zéro et un méson. On met alors en évidence le moment angulaire total  $J$  et le spin isobarique total  $I$  à l'aide de

$$T_q(p) = -v(p)v(q) \frac{4\pi}{(4\omega_q\omega_p)^{1/2}} \sum_{\alpha=1}^4 P_{\alpha}(p,q) h_{\alpha}(\omega_q) \quad (19)$$

où  $\alpha$  désigne l'ensemble des indices  $I$  et  $J$  et  $P_{\alpha}$  ( $P_{2I, 2J}$ ) l'opérateur projection sur le sous-espace caractérisé par  $I$  et  $J$ . On voit ainsi apparaître quatre fonctions  $h$  :  $h_{11}$ ,  $h_{13}$ ,  $h_{31}$ ,  $h_{33}$ . (En fait dans cette théorie, on vérifie que  $h_{13} = h_{31}$ , d'après la symétrie du rôle joué par les opérateurs  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{Z}$ ). En posant

$$\begin{aligned} h_{11} &= h_1 \\ h_{13} &= h_{31} = h_2 \\ h_{33} &= h_3 \end{aligned}$$

l'équation (18) prend finalement la forme

$$h_{\alpha}(\omega) = \frac{\lambda_{\alpha}}{\omega} + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} d\omega_p p^3 v^2(p) \left\{ \frac{|h_{\alpha}(\omega_p)|^2}{\omega_p - \omega - i\epsilon} + \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} \frac{|h_{\beta}(\omega_p)|^2}{\omega_p + \omega} \right\} \quad (20)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 1/9 & -8/9 & 16/9 \\ -2/9 & 7/9 & 4/9 \\ 4/9 & 4/9 & 1/9 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\alpha} = \frac{2}{3} f^2 \times \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$f$  étant maintenant la constante de couplage renormalisée.

La fonction  $h_{\alpha}(\omega)$  s'exprime simplement à l'aide des déphasages ("phase-shifts") de diffusion  $\delta_{2I, 2J}$  par

$$p^3 v^2(p) h(\omega) = e^{i\delta} \sin \delta \quad (22)$$

### 3. Etat isobarique et théorie des réactions nucléaires.

On sait que la théorie du nucléon statique de Chew et Low prédit une résonance de la section efficace de diffusion dans l'état  $(3/2, 3/2)$  au voisinage de l'énergie  $\omega_3 = 2.1$ .

L'étude des résonances dans les réactions nucléaires a été faite par Wigner et ses collaborateurs <sup>/19/</sup> qui ont montré que, moyennant certaines hypothèses de régularité, une résonance au sens conventionnel (pôle de la matrice réactance  $K$  sur l'axe réel des énergies) équivaut à la présence d'un pôle de la matrice  $S$  dans la partie inférieure du plan complexe. Cette propriété permet l'interprétation de la résonance par le modèle du noyau composé de Bohr : en effet, ce pôle est voisin de celui de  $K$ , la partie réelle de son affixe définit exactement le niveau correspondant du noyau composé et la valeur absolue de la partie imaginaire est égale à la largeur totale du niveau. L'une des principales conséquences de cette théorie est que la résonance observée doit se retrouver, en principe, dans tous les canaux de réaction ouverts.

Il est fréquent, en théorie du méson, d'utiliser le langage de la théorie des réactions nucléaires et de parler d'un état "isobarique" du nucléon et du méson de moment angulaire  $3/2$  et de spin isobarique  $3/2$ . Watson <sup>/20/</sup> a utilisé systématiquement cette analogie et, selon ses méthodes, on devrait s'attendre à observer une résonance dans les réactions de production, ayant la même largeur et se situant sensiblement à la même énergie que la résonance de la diffusion.

Il n'est pas clair que les approximations de la théorie de Wigner soient applicables au cas de l'interaction méson-nucléon et il importe donc de voir si les mêmes résultats peuvent être obtenus par la théorie des champs. Ce problème a été étudié par B. d'Espagnat<sup>/23/</sup> qui a montré l'existence de la résonance dans les canaux ouverts à l'aide de l'équation intégrale de Heitler. Malheureusement, ces résultats reposent sur un certain nombre d'hypothèses non démontrées relativement au comportement de la matrice K.

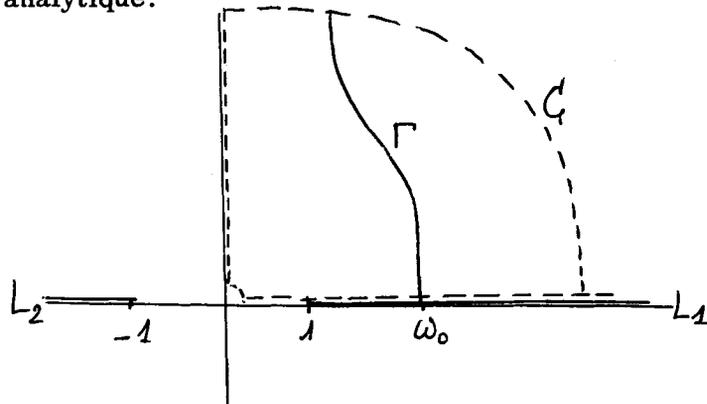
Le problème peut être résolu en théorie du nucléon statique à l'aide de certaines hypothèses simples et aisément vérifiables. Admettant, comme le suggèrent l'expérience et les calculs de Salzmann<sup>/18/</sup> que la résonance dans l'état  $(3/2 \quad 3/2)$  pour un méson P est unique, nous allons montrer l'existence d'un pôle de la matrice S qui se retrouve dans tous les canaux de réaction.

Définissons la fonction  $h_\alpha(z)$  dans le demi-plan complexe supérieur  $I^+$  par

$$h_\alpha(z) = \frac{\lambda_\alpha}{z} + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_p p^3 v^2(p) \left\{ \frac{|h_\alpha(\omega_p)|^2}{\omega_p - z - i\varepsilon} + \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} \frac{|h_\beta(\omega_p)|^2}{\omega_p + z} \right\} \quad (23)$$

elle est holomorphe dans  $I^+$  et tend vers zéro comme  $\frac{1}{|z|}$  quand  $z \rightarrow \infty$ . Elle est définie sur deux feuilletts de Riemann joints par des coupures  $L_1$  et  $L_2$  allant respectivement de 1 à  $+\infty$  et de  $-1$  à  $-\infty$ . Le passage du premier au second feuillet sera fait à travers  $L_1$  dans le sens  $I^+$  vers  $I^-$  par prolongement analytique.

Figure 1



Remarquons que (23) entraîne

$$\operatorname{Im} h_\alpha(\omega_p) = p^3 v^2(p) |h_\alpha(\omega_p)|^2 \quad \text{pour } \omega_p \text{ réel}$$

ce qui permet de poser

$$t_\alpha = p^3 v^2(p) h_\alpha(\omega_p) = e^{i\delta} \sin \delta \quad (22a)$$

Si  $\mathcal{U}(p)$  étant analytique comme transformée de Fourier d'une fonction à support compact,  $t_\alpha$  a donc les mêmes propriétés d'analyticité que  $h_\alpha$ . Posons

$$\mathcal{A} = 1 + 2it_3 \quad \left( = e^{2i\delta} \operatorname{sn} L_1 \right) \quad (24)$$

$\mathcal{A}$  est unimodulaire sur la coupure et doit donc, d'après le lemme de Schwartz, être prolongé selon

$$\mathcal{A}^*(z^*) = \mathcal{A}^{-1}(z) \quad (25)$$

Par conséquent, à tout pôle de  $s$  (ou de  $t$ ) dans le feuillet de Riemann inférieur correspond un zéro de  $s$  dans  $I+$  symétrique par rapport à l'axe réel. En ce point  $t = \frac{i}{2}$ .

D'après nos hypothèses, il existe un point  $\omega_0$  et un seul sur l'axe réel pour lequel  $\delta = \pi/2$ , ou  $t = i$ . Montrons que cela entraîne l'existence d'un pôle de  $s$  dans  $I-$  ou, ce qui revient au même, d'un point de  $I+$  pour lequel  $t = \frac{i}{2}$ .

La partie réelle  $f$  de  $h_3$  est donnée par

$$f(x, y) = \frac{\lambda_3 x}{x^2 + y^2} + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty d\omega_p p^3 v^2(p) \left[ \frac{(\omega_p - x) |h_3(\omega_p)|^2}{(\omega_p - x)^2 + y^2} + \sum_{\beta} A_{3\beta} \frac{(\omega_p + x) |h_\beta(\omega_p)|^2}{(\omega_p + x)^2 + y^2} \right]$$

en posant  $z = x + iy$ . On constate que  $f$  est positif pour  $x < 1$ , quel que soit  $y$  ( $A_{3\beta} > 0$ ).

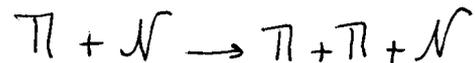
Définissons un contour  $C$  constitué par l'axe imaginaire positif, un grand quart de cercle et l'axe réel positif, évitant le pôle à l'origine. A l'intérieur de ce contour  $f$  est une fonction harmonique et ne s'annule sur  $C$  que pour  $z = \omega_0$  ou l'infini. Les lignes équipotentielles étant continues, il en existe une seule,  $\Gamma$ , correspondant à  $f = 0$ , qui joint  $\omega_0$  à l'infini (on peut d'ailleurs préciser que l'axe imaginaire est direction asymptotique de  $\Gamma$ ). Sur  $\Gamma$  la partie imaginaire de  $t$  est continue et passe de la valeur 1 pour  $z = \omega_0$  à zéro pour  $z = i$ , elle passe donc nécessairement par la valeur  $1/2$ . Ce qui montre qu'il existe au moins un point de  $I+$  pour lequel  $t = \frac{i}{2}$  ou  $s = 0$ , et donc un pôle de  $s$  dont l'affixe est complexe conjuguée de celle du zéro.

Nous vérifierons plus loin que ce pôle de  $S$  se retrouve dans les autres canaux de réaction.

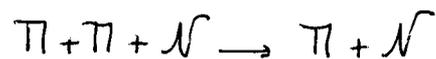
## II. ETUDE THEORIQUE DES TERMES A PLUSIEURS MESONS

### 1. Introduction à l'étude des termes à deux mésons

Notre but est d'étudier les réactions du type suivant : un méson  $q$  d'énergie  $\omega_q$  entre en interaction avec un nucléon et 2 mésons  $p_1$  et  $p_2$  d'énergies  $\omega_1$  et  $\omega_2$  émergent, soit



Nous aurons également à étudier la réaction inverse



Dans chaque cas, la matrice de collision  $T$  est définie par

$$\langle p, p_2 | S | q \rangle = 2\pi i \delta(\omega_q - \omega_1 - \omega_2) T_q(p, p_2)$$

$$\langle q | S | p, p_2 \rangle = 2\pi i \delta(\omega_q - \omega_1 - \omega_2) T_{p, p_2}(q)$$

Nous verrons que ces deux quantités sont intimement liées et qu'il est nécessaire de les considérer simultanément.

Nous nous proposons d'établir des équations intégrales du type de Low pour ces éléments de matrice, équations que nous généraliserons d'ailleurs ultérieurement à un nombre quelconque de mésons.

On sait combien il importe dans un calcul de maintenir à tous les stades certaines conditions générales, par exemple la covariance en électrodynamique. Comme l'ont montré Chew et Low, l'équation de Low elle-même n'est qu'une formulation des conditions d'unitarité et de croisement respectant la règle de causalité. Nous chercherons donc à mener les calculs de telle sorte que le résultat traduise également des faits très simples et généraux, bien que nous nous trouverons tributaires en certains points du modèle statique du nucléon (\*). Avant d'aborder le calcul proprement dit, nous préciserons les conditions à remplir : unitarité, croisement et causalité, et nous donnerons la dérivation systématique d'un certain nombre de formules utiles.

Conditions de causalité, de croisement et d'unitarité.

La condition d'unitarité de la matrice  $S$  à l'aide de  $T$  s'exprime par l'équation

$$T_{\alpha}^*(\beta) - T_{\beta}(\alpha) = 2\pi i \sum_n \delta(E_n - E) T_{\alpha}^*(n) T_{\beta}(n) \quad (26)$$

qui devient, pour les termes qui nous intéressent

$$T_{p_1 p_2}^*(q) - T_q(p_1 p_2) = 2\pi i \sum_n \delta(E_n - E) T_{p_1 p_2}^*(n) T_q(n) \quad (27)$$

La condition de causalité exprime qu'aucun signal ne peut se propager plus vite que la lumière, ce qui revient mathématiquement à imposer aux divers éléments de la matrice  $S$  (ou des propagateurs) d'être holomorphes dans le demi-plan complexe supérieur, la variable complexe étant l'énergie (voir Nambu <sup>/32/</sup>, Chew et Low <sup>/11/</sup>). Cette condition est réalisée dans l'équation de Chew et Low par la présence du terme infinitésimal  $-i\epsilon$ . Dans notre cas, elle correspondra également à de tels infinitésimaux imaginaires.

---

(\*) Une méthode de calcul qui ne respecte pas l'unitarité de la matrice  $S$  peut donner des résultats aberrants : par exemple, une section efficace de production supérieure à la limite permise par la conservation des probabilités.

Quant aux conditions de croisement, nous les établirons par la méthode de Feldman et Matthews<sup>/33/</sup>. Le propagateur d'un méson entre l'état initial  $(p \lambda)$  et l'état final  $(q \mu)$  du méson, le nucléon passant de l'état  $\alpha$  à l'état  $\beta$  peut s'écrire :

$$G_{\mu\lambda}(qp) = \int e^{i(qx - py)} \langle \beta | P(\phi_{\mu}(y) \phi_{\lambda}(x)) | \alpha \rangle d^4x d^4y$$

$x$  et  $y$  étant des variables muettes et les opérateurs de bosons étant commutables, on peut mettre ceci sous la forme

$$\int e^{-ipx + iqy} \langle \beta | P(\phi_{\lambda}(x) \phi_{\mu}(y)) | \alpha \rangle d^4x d^4y$$

d'où

$$G_{\mu\lambda}(qp) = G_{\lambda\mu}(-p, -q)$$

qui exprime le théorème de croisement de Gell-Mann et Goldberger, simple conséquence de la statistique de Bose. Par la même méthode, on montre aisément que le propagateur à trois mésons et, par suite les éléments de matrice  $T$  correspondants doivent vérifier

$$\begin{aligned} G_{i_1 i_2 j}(p_1 p_2 q) &= G_{j, i_1 i_2}(-q, -p_1, -p_2) \\ &= G_{i_1 j, i_2}(p_2 - q, -p_1) \\ &= G_{j i_2, i_1}(-q, p_2, -p_1) \end{aligned} \quad (28)$$

#### Formules utiles.

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'établir systématiquement toutes les formules qui nous seront nécessaires par la suite. Elles ont trait à des propriétés de commutation des opérateurs et de constitution des états physiques, leur dérivation est parfois ingrate et l'on pourra se reporter aux résultats dont la liste est établie à la fin du paragraphe.

1) Relations de commutation.

Soit  $x$  un nombre positif ou négatif pouvant avoir éventuellement une partie imaginaire infinitésimale, de sorte que tous les opérateurs inverses que nous écrirons aient un sens. On a la relation :

$$a_q \frac{1}{x+H} = \frac{1}{x+\omega_q+H} a_q - \frac{1}{x+\omega_q+H} V_q^* \frac{1}{x+H} \quad (29)$$

Cette relation a été établie par Wick <sup>/12/</sup> et est une conséquence immédiate de (II. 8). De même on a

$$\frac{1}{x+H} a_q^+ = a_q^+ \frac{1}{x+\omega_q+H} - \frac{1}{x+H} V_q \frac{1}{x+\omega_q+H} \quad (29b)$$

2) Action d'un opérateur création sur un état physique du système méson-nucléon.

On a vu que, d'après l'équation de Schrödinger,

$$a_q^+ | \rangle = |q^+ \rangle + \frac{1}{H - \omega_q - i\varepsilon} V_q | \rangle$$

De façon générale, on a de même

$$a_q^+ |n^+ \rangle = |q n^+ \rangle + \frac{1}{H - \omega_q - E_n - i\varepsilon} V_q |n^+ \rangle \quad (30)$$

où  $|n^+ \rangle$  représente un état à  $n$  mésons sortants d'énergie totale  $E_n$

Pour démontrer (30) nous poserons

$$|q n^+ \rangle = a_q^+ |n^+ \rangle + \chi^{(+)}$$

portant ceci dans l'équation de Schrödinger

$$H |q n^+ \rangle = (E_n + \omega_q) |q n^+ \rangle$$

il vient

$$(H - \omega_q - E_n) \chi^{(+)} = -(H - \omega_q - E_n) a_q^+ |n+\rangle$$

mais

$$\cancel{(H - \omega_q - E_n)} H a_q^+ |n+\rangle = \{[H, a_q^+] + a_q^+ H\} |n+\rangle = \{(\omega_q + E_n) a_q^+ + V_q\} |n+\rangle$$

d'où

$$(H - \omega_q - E_n) \chi^{(+)} = -(H - \omega_q - E_n) a_q^+ |n+\rangle = V_q |n+\rangle$$

On en déduit

$$\chi^{(+)} = |L\rangle - \frac{1}{H - \omega_q - E_n - i\epsilon} V_q |n+\rangle$$

$|L\rangle$  étant une solution inconnue de l'équation

$$(H - \omega_q - E_n) |L\rangle = 0$$

Nous allons maintenant montrer que  $|L\rangle = 0$ , autrement dit que l'état

$$|q_n\rangle = a_q^+ |n+\rangle - \frac{1}{H - \omega_q - E_n - i\epsilon} V_q |n+\rangle$$

est à ondes purement sortantes. Considérons pour cela un paquet d'ondes formé à l'aide de tels états

$$\Psi(t) = \sum_p c(q_p, n_p) e^{-iE_p t} |q_p, n_p\rangle$$

où le coefficient  $c$  n'est différent de zéro que dans un intervalle aussi petit que l'on veut. Il nous faut montrer que

$$\Psi(t) - \phi(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0$$

$\phi(t)$  étant le paquet d'ondes

$$\phi(t) = \sum_p c(q_p, n_p) e^{-iE_p t} |q_p, n_p\rangle$$

On admet que la propriété est vraie pour un état à  $n$  mésons (elle l'est pour un état à 1 méson, cf. Wick), il s'agit de la démontrer pour un état à  $n+1$  mésons. Par hypothèse

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \sum_p c(q_p, n_p) a_{q_p}^+ |n_p+\rangle e^{-iE_p t} - \phi(t) = 0$$

il reste donc à démontrer que

$$|A\rangle = \lim_{t \rightarrow -\infty} \sum_p c(q_p, n_p) \frac{1}{H - \omega_q - E_n - i\varepsilon} e^{-iE_p t} V_{q_p} |n_p+\rangle = 0$$

en projetant cette dernière quantité sur un système complet d'états  $|v\rangle$  correspondant à des valeurs propres de l'énergie  $E_v$ , il vient

$$\langle v|A\rangle = \lim_{t \rightarrow -\infty} \sum_p c(q_p, n_p) \frac{1}{E_v - E_p - i\varepsilon} e^{-iE_p t} \langle v|V_{q_p}|n_p+\rangle$$

on peut, dans la sommation, séparer l'intégration par rapport à  $E_p$  de la sommation par rapport aux autres variables. En tenant compte du fait que  $c(q_p, n_p)$  est nul en dehors d'un petit intervalle de  $E_p$ , l'intégration par résidus donne

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int dE_p c(\dots E_p) \frac{1}{E_v - E_p - i\varepsilon} e^{-iE_p t} = 0$$

C. Q. F. D.

NOTA : On peut démontrer par la même méthode classique que

$$|p_1, p_2, \dots, p_s+\rangle = a_1^+ a_2^+ \dots a_s^+ | \rangle - \frac{1}{H - E - i\varepsilon} \left( \sum_1^s a_1^+ \dots a_{i-1}^+ V_i a_{i+1}^+ \dots a_s^+ \right) | \rangle \quad (31)$$

Action d'un opérateur annihilation sur un état physique du système mésons-nucléon.

Nous nous proposons d'étudier l'action d'un opérateur annihilation  $a_p$  sur un état à  $n$  mésons sortants. D'après les équations (II. 8), on peut écrire

$$\begin{aligned} [H, a_p] |n+\rangle &= (-\omega_p a_p - V_p^+) |n+\rangle \\ &= H a_p |n+\rangle - a_p E_n |n+\rangle \end{aligned}$$

d'où

$$(H + \omega_p - E_n) a_p |n+\rangle = -V_p^+ |n+\rangle \quad (32)$$

Pour  $n = 0$ , l'opérateur de gauche a un inverse puisque  $H$  est défini positif, on en déduit donc

$$a_p | \rangle = - \frac{1}{H + \omega_p} V_p^+ | \rangle \quad (33)$$

mais il est impossible de résoudre directement l'équation opératoire (32) lorsque  $\omega_p < E$ .

Nous allons montrer que, de façon générale,

$$a_p |n+\rangle = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \delta_{p p_\lambda} |n_\lambda+\rangle - \frac{1}{H + \omega_p - E_n - i\varepsilon} V_p^+ |n+\rangle \quad (34)$$

dans cette équation  $p_1, p_2, p_\lambda, \dots, p_n$ , représentent les divers mésons constituant  $|n+\rangle$ , et  $|n_\lambda+\rangle$  figure l'état d'ondes sortantes composé des mêmes mésons que l'état  $n$ , à l'exception du méson  $p_\lambda$ . L'équation est exacte pour  $n = 0$ , nous admettrons qu'elle est vraie pour  $n$  et la démontrerons par récurrence pour  $n+1$ . D'après (30)

$$a_p |q n+\rangle = a_p a_q^+ |n+\rangle - a_p \frac{1}{H + \omega_q - E_n - i\varepsilon} V_q |n+\rangle \quad (35)$$

le premier terme de (35) s'écrit encore

$$a_p a_q^+ |n+\rangle = ([a_p, a_q^+] + a_q^+ a_p) |n+\rangle = (\delta_{qp} + a_q^+ a_p) |n+\rangle$$

mais d'après (32) valable pour  $n$  mésons

$$a_q^+ a_p |n+\rangle = \sum_{\lambda} \delta_{p\lambda} a_q^+ |n\lambda+\rangle - a_q^+ \frac{1}{H + \omega_p - E_n - i\epsilon} V_p^+ |n+\rangle$$

en utilisant l'équation (29 b), on a

$$- a_q^+ \frac{1}{H + \omega_p - E_n - i\epsilon} V_p^+ |n+\rangle = - \frac{1}{H + \omega_p - \omega_q - E_n - i\epsilon} V_p^+ a_q^+ |n+\rangle - \frac{1}{H + \omega_p - \omega_q - E_n - i\epsilon} V_q \frac{1}{H - \omega_q - E_n - i\epsilon} V_p^+ |n+\rangle$$

à l'aide de (30) le premier terme du second membre devient

$$- \frac{1}{H + \omega_p - \omega_q - E_n - i\epsilon} V_p^+ |q n+\rangle - \frac{1}{H + \omega_p - \omega_q - E_n - i\epsilon} V_p^+ \frac{1}{H - \omega_q - E_n - i\epsilon} V_q |n+\rangle$$

passant au second terme de (35) il devient d'après (29a) et (30)

$$- \frac{1}{H + \omega_p - \omega_q - E_n - i\epsilon} V_q a_p |n+\rangle + \frac{1}{H + \omega_p - \omega_q - E_n - i\epsilon} V_p^+ \frac{1}{H - \omega_q - E_n - i\epsilon} V_q |n+\rangle$$

mais, par hypothèse, le premier terme s'écrit

$$\frac{1}{H + \omega_p - \omega_q - E_n - i\epsilon} V_q \left[ \sum_{\lambda} \delta_{p\lambda} |n\lambda+\rangle + \frac{1}{H + \omega_p - E_n - i\epsilon} V_p^+ |n+\rangle \right]$$

si l'on regroupe, il vient

$$a_p |q n+\rangle = \delta_{pq} |n+\rangle + \sum_{\lambda} \delta_{p\lambda} \left[ a_q^+ - \frac{1}{H + \omega_p - \omega_q - E_n - i\epsilon} V_q \right] |n\lambda+\rangle - \frac{1}{H + \omega_p - \omega_q - E_n - i\epsilon} V_p^+ |n+\rangle$$

la parenthèse peut être regroupée sous la forme  $|q n + \rangle$  d'après la condition  $\omega_p = \omega_{p\lambda}$  ou  $E_n - \omega_p = E_{n\lambda}$  valable pour ce terme.

Finalement

$$a_p |q n + \rangle = \sum_{\lambda} \delta_{pp\lambda} |q n_{\lambda} + \rangle + \delta_{pq} |n + \rangle - \frac{1}{H + \omega_p - \omega_q - E_n - i\epsilon} V_p^+ |q n + \rangle$$

C. Q. F. D.

### Résumé

Nous transcrivons ici toutes les formules dont nous aurons à faire usage dans la suite

$$a_q \frac{1}{x + H} = \frac{1}{x + \omega_q + H} a_q - \frac{1}{x + \omega_q + H} V_q^+ \frac{1}{x + H} \quad (29)$$

$$a_q^+ |n + \rangle = |q n + \rangle + \frac{1}{H - \omega_q - E_n - i\epsilon} V_q |n + \rangle \quad (30)$$

$$a_p |\alpha \rangle = - \frac{1}{H + \omega_p} V_p^+ |\alpha \rangle \quad (33)$$

$$a_p |n + \rangle = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \delta_{pp\lambda} |n_{\lambda} + \rangle - \frac{1}{H + \omega_p - E_n - i\epsilon} V_p^+ |n + \rangle \quad (34)$$

Dans toutes ces formules, on peut remplacer les états à ondes sortantes par des états à ondes entrantes avec la seule modification de  $-i\epsilon$  en  $+i\epsilon$ .

## 2. Equations fondamentales pour les termes à 2 mésons.

Nous nous proposons d'exprimer l'élément de matrice de production  $T_q(p_1, p_2)$  sous une forme analogue à l'équation de Low <sup>(18)</sup>

Partant pour cela de

$$\Gamma_q(p_1, p_2) = \langle p_1 p_2 - | V_q \rangle \quad (17a)$$

$$| p_1 p_2 - \rangle = a_{p_1}^+ a_{p_2}^+ | \rangle - \frac{1}{H - E + i\epsilon} (a_2^+ V_1 + a_1^+ V_2) | \rangle \quad (31a)$$

il vient

$$\Gamma_q(p_1, p_2) = \langle | a_1 a_2 V_q - (a_1 V_2^+ + a_2 V_1^+) \frac{1}{H - E - i\epsilon} V_q | \rangle$$

Ceci peut être développé à l'aide des équations (29) et (34)

en donnant

$$\begin{aligned} \Gamma_q(p_1, p_2) = & \langle | V_q (H + \omega_q)^{-1} V_2 (H + \omega_1)^{-1} V_1^+ | \rangle \\ & + \langle | V_1^+ (H + \omega_1 - i\epsilon)^{-1} V_q (H + \omega_2)^{-1} V_2^+ | \rangle \\ & + \langle | V_1^+ (H + \omega_1 - i\epsilon)^{-1} V_2^+ (H - \omega_q - i\epsilon)^{-1} V_q | \rangle + \text{Perm}(1, 2) \end{aligned} \quad (36)$$

Perm. (1 - 2) signifie qu'il faut ajouter à l'expression donnée les termes obtenus par permutation des indices 1 et 2.

Les divers termes de (36) s'expriment aisément à l'aide de graphiques de Feynmann, correspondant dans l'ordre aux graphiques ( $\alpha$ ) ( $\beta$ ) ( $\gamma$ )

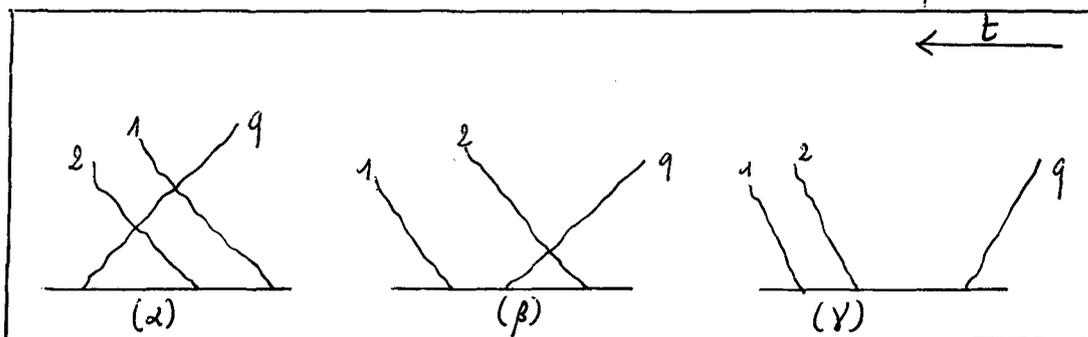


Figure 2.

Il est possible de déterminer directement  $T_{p_1 p_2}(q)$  à partir de  $T_q(p_1 p_2)$  par une simple inversion de sens du temps. Cependant cette méthode oblige à considérer des énergies de mésons négatives dont l'interprétation dans les opérateurs  $V$  n'est pas évidente. Nous dériverons donc ce nouvel élément de matrice directement. Partons pour cela de

$$\langle n | S | p_1 p_2 \rangle = -2\pi i \delta(E_n - \omega_1 - \omega_2) T_{p_1 p_2}(q) = \langle n-1 | p_1 p_2^+ \rangle$$

où  $n$  est un état quelconque. L'équation (31) permet d'écrire

$$| p_1 p_2^+ \rangle = | p_1 p_2^- \rangle - 2\pi i \delta(H - E) (a_2^+ V_1 + a_1^+ V_2) | \rangle$$

d'où l'on déduit généralement

$$T_{p_1 p_2}(n) = \langle n-1 | a_1^+ V_2 + a_2^+ V_1 | \rangle \quad (37)$$

Il en résulte, d'après (29) et (34)

$$\begin{aligned} T_{p_1 p_2}(q) = & \langle | V_1 | \rangle \delta_{p_2 q} + \langle | V_2 (H + \omega_2)^{-1} V_1 (H + \omega_q)^{-1} V_q^+ | \rangle \\ & + \langle | V_2 (H + \omega_2)^{-1} V_q^+ (H - \omega_1 - i\varepsilon)^{-1} V_1 | \rangle \\ & + \langle | V_q^+ (H - \omega_q - i\varepsilon)^{-1} V_2 (H - \omega_1 - i\varepsilon)^{-1} V_1 | \rangle \\ & + \text{Perm}(1, 2) \end{aligned} \quad (38)$$

En fait, les termes en  $\delta_{qp_2}$ ,  $\delta_{qp_1}$ , sont nuls sur la couche d'énergie car, dans ce cas, on a nécessairement  $\omega_q \geq \omega_1 + 1, \omega_2 + 1$ . Nous les avons cependant écrits pour référence future car nous aurons à utiliser des éléments de matrice de ce type en dehors de la couche d'énergie.

Pour des processus réels, on a donc :

$$\begin{aligned} T_{p_1 p_2}(q) = & \langle | V_2 (H + \omega_2)^{-1} V_1 (H + \omega_q)^{-1} V_q^+ | \rangle \\ & + \langle | V_2 (H + \omega_2)^{-1} V_q^+ (H - \omega_1 - i\varepsilon)^{-1} V_1 | \rangle \\ & + \langle | V_q^+ (H - \omega_q - i\varepsilon)^{-1} V_2 (H - \omega_1 - i\varepsilon)^{-1} V_1 | \rangle \\ & + \text{Perm}(1, 2) \end{aligned} \quad (39)$$

Par comparaison de (36) et (39) nous constatons que les diverses conditions de croisement (28) sont effectivement vérifiées. Il nous reste à vérifier les conditions d'unitarité et de causalité qui nous conduiront d'ailleurs à une forme nouvelle de nos équations

Considérons l'expression

$$\sum_n \frac{T_{p_1 p_2}^*(n) T_q(n)}{E_n - \omega_q - i\varepsilon} \quad (40)$$

que nous étudions par analogie avec le terme  $\sum_n \delta(E_n - E) T_{p_1 p_2}^*(n) T_q(n)$  qui figure dans la relation d'unitarité (27). (40) peut s'écrire, en effectuant la sommation à l'aide de (37) et (17)

$$\left\langle \left( a_2^+ V_1 + a_1^+ V_2 \right) \frac{1}{H - \omega_q - i\varepsilon} V_q \right\rangle$$

soit, d'après (29) et (34)

$$- \left\langle \left| V_1^+ (H - \omega_1 - i\varepsilon)^{-1} V_q (H + \omega_2)^{-1} V_2^+ + V_1^+ (H - \omega_1 - i\varepsilon)^{-1} V_2^+ (H - \omega_q - i\varepsilon)^{-1} V_q \right| \right\rangle$$

Il en résulte les nouvelles expressions pour  $T_q(p_1, p_2)$  et  $T_{p_1, p_2}(q)$

$$T_q(p_1, p_2) = G \left( - \sum_n \frac{T_{p_1 p_2}^*(n) T_q(n)}{E_n - \omega_q - i\varepsilon} \right) \quad (41a)$$

$$T_{p_1 p_2}(q) = G^* - \sum_n \frac{T_q^*(n) T_{p_1 p_2}(n)}{E_n - \omega_q - i\varepsilon} \quad (41b)$$

où l'on a posé

$$G = \left\langle \left| V_q (H + \omega_q)^{-1} V_2^+ (H + \omega_1)^{-1} V_1^+ \right| \right\rangle + \text{Perm}(1, 2) \quad (42)$$

On vérifie immédiatement les conditions de causalité et d'unitarité sur ces équations. En particulier la condition d'unitarité (27) résulte de (15).

Structure du terme C.

Nous allons utiliser les propriétés de dépendance explicite de  $V_q$  en fonction de l'impulsion  $q$  pour donner au terme  $C$  une forme plus maniable et l'exprimer uniquement à l'aide de la matrice  $T$ .

Appliquant l'équation (34) à la relation (37) on peut écrire une expression générale de  $T_{p_1 p_2}(n)$ , soit

$$T_{p_1 p_2}(n) = \sum_{\lambda=1}^m \delta_{p_1 p_\lambda} \langle n_\lambda - | V_2 | \rangle = \langle n - | V_1 \frac{1}{H + \omega_1 - E_n - i\varepsilon} V_2 | \rangle + \text{Perm}(1,2) \quad (43)$$

D'autre part, en développant l'expression (42) de  $C$  à l'aide d'un système complet d'états

$$C = \sum_n \langle V_q | n - \rangle \frac{1}{E_n + \omega_q} \langle n - | V_1^+ \frac{1}{H + \omega_2} V_2^+ | \rangle + \text{Perm}(1,2) \quad (44)$$

Dans cette expression  $\langle V_q | n - \rangle$  est égal à  $T_q(n)$  (dans la représentation en états propres du moment angulaire que nous utilisons  $V_q = V_q^*$ ).

Il nous faut donc exprimer le second facteur en fonction des éléments de matrice de  $T$  et, pour cela, nous utiliserons la dépendance explicite de  $V_k$  en fonction de l'impulsion  $k$ . Introduisons en effet deux mésons  $p'_1$  et  $p'_2$  ayant respectivement les mêmes polarisations et les mêmes charges que  $p_1$  et  $p_2$  et n'en différant que par la valeur absolue des moments. Dans ces conditions nous avons, compte tenu de (7)

$$V_{1'} = \frac{1}{\sqrt{3\pi}} \int_0^{p_1} p_1^{1/2} v(p_1') \sigma_i \tau_\lambda = V_1 \frac{p_1'^{3/2} v(p_1')}{p_1^{3/2} v(p_1)}$$

Si nous posons

$$\Omega(p) = p^{3/2} v(p)$$

il vient

$$\langle n - | V_1^+ \frac{1}{H + \omega_2} V_2^+ | \rangle = \langle n - | V_1 \frac{1}{H + \omega_2} V_2 | \rangle = \langle n - | V_{1'} \frac{1}{H + \omega_2} V_{2'} | \rangle \frac{\Omega(p_1) \Omega(p_2)}{\Omega(p_1') \Omega(p_2')} \quad (46)$$

Dans le dernier membre de (46), le premier facteur pourra être identifié avec le terme analogue qui, d'après (43), doit figurer dans  $T_{p'_1 p'_2}(n)$ .

Il suffit pour cela de choisir convenablement les valeurs des énergies  $\omega'_1$  et  $\omega'_2$  en posant

$$\omega'_1 = \omega_2 + E_n \quad \omega'_2 = \omega_2 + E_n \quad (47)$$

ce qui donne

$$T_{p'_2 p'_2}^{(n)} = - \langle n-1 | V_1' \frac{1}{H + \omega_2} V_2' | \Delta \rangle + P_{\text{erm}}(1,2)$$

(On peut noter que les termes en  $\delta_{p'_2 p_\lambda}$  de (43) ne donnent aucune contribution à cette dernière expression car, d'après (47), l'énergie du méson  $p'_1$  est strictement supérieur à  $E_n$ , quantité elle-même supérieure à l'énergie du méson  $p_\lambda$ ). Finalement, on a pour C l'expression suivante

$$C = - \sum_n \frac{T_q^*(n) T_{p'_1 p'_2}^{(n)}}{E_n + \omega_q} \frac{\Omega(p_2) \Omega(p_2)}{\Omega(p'_1) \Omega(p'_2)} \quad (48)$$

Et, en récapitulant les équations que nous avons obtenues /17/ :

$$T_q(p_1 p_2) = - \sum_n \left[ \frac{T_q^*(n) T_{p'_1 p'_2}^{(n)}}{E_n + E} \frac{\Omega(p_1) \Omega(p_2)}{\Omega(p'_1) \Omega(p'_2)} + \frac{T_{p_1 p_2}^*(n) T_q(n)}{E_n - \omega_q - i\varepsilon} \right] \quad (49a)$$

$$T_{p_1 p_2}(q) = - \sum_n \left[ \frac{T_{p'_1 p'_2}^*(n) T_q(n)}{E_n + E} \frac{\Omega(p_1) \Omega(p_2)}{\Omega(p'_1) \Omega(p'_2)} + \frac{T_q^*(n) T_{p_1 p_2}(n)}{E_n - E - i\varepsilon} \right] \quad (49b)$$

Ces équations présentent une certaine analogie avec l'équation de Low pour la diffusion. Le second terme traduit l'unitarité et la causalité de la théorie tout comme le terme correspondant de l'équation de Low. Le premier terme n'a pu être mis sous cette forme simple que grâce à des propriétés spécifiques du modèle, notre écriture ayant l'inconvénient de voiler les propriétés de croisement des équations initiales mais l'avantage de permettre des calculs notablement simplifiés.

Nous donnons dans l'appendice I la démonstration d'une formule analogue à (49) pour l'élément de matrice de transition  $T_{p_1 p_2}(q_1 q_2)$  de deux mésons sans création ni destruction.

### 3. Système complet d'équations intégrales du type de Low.

Nous nous proposons à présent, de généraliser les résultats du paragraphe précédent et d'établir un système complet d'équations intégrales pour les éléments de matrice de  $T$  entre états à un nombre quelconque de mésons. Ces équations seront quadratiques, la première d'entre elles, coïncidant avec l'équation de Low (18), les deux suivantes avec nos équations (49)

Nous utiliserons pour démontrer ces équations une méthode graphique analogue à celle établie par Feynmann pour représenter la théorie des perturbations. Les règles de ce calcul graphique sont les suivantes :

- a) Un opérateur  $Vq^*$  représente l'émission d'un méson  $q$
- b) Un opérateur  $Vq$  représente l'absorption d'un méson  $q$
- c) Le propagateur du système méson-nucléon entre deux opérateurs vertex  $V$  s'écrit  $(E-H)^{-1}$ ,  $E$  étant l'énergie totale émise antérieurement par le nucléon. (Dans tous nos graphiques, le sens du temps sera de la droite vers la gauche).
- d) Un opérateur  $a_q$  sera représenté par une ligne de méson venant de la gauche ( $t = -\infty$ ), un opérateur  $a_q^+$  par une ligne venant de la droite ( $t = +\infty$ ).

Ces conventions sont représentées dans la figure (4) par les graphiques (a), (b), (c), (d) et (d').

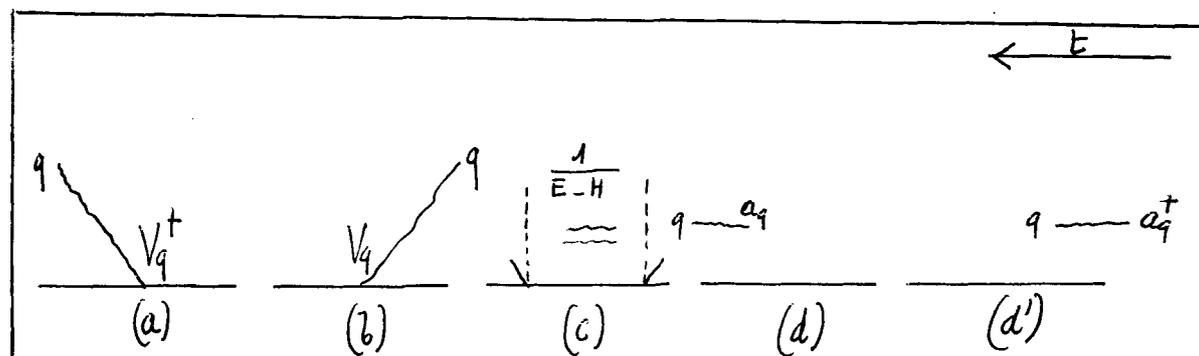


Figure 4.

On peut vérifier la cohérence de ces conventions sur la formule (29a); elle correspond en effet à l'égalité graphique donnée par la figure 3.

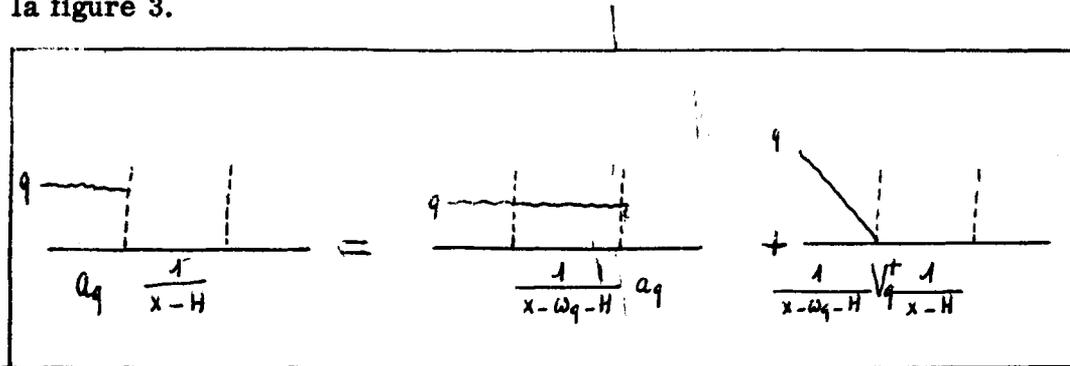


Figure 3.

A l'aide de l'équation de Schrödinger, des relations de commutation (8) et de considérations semblables à celles qui ont permis de démontrer l'équation (30), on établit la formule générale suivante, donnant l'expression de l'état  $|p_1 p_2 \dots p_s + \rangle$  à  $s$  mésons sortants

$$|p_1 p_2 \dots p_s + \rangle = a_1^+ \dots a_s^+ | \rangle + \chi^{(+)} \quad (50)$$

où

$$\chi^{(+)} = \frac{1}{E - H + i\epsilon} \left( \sum_{i=1}^s (a_1^+ \dots a_{i-1}^+ V_i a_{i+1}^+ \dots a_s^+) \right) | \rangle \quad (51)$$

Par suite

$$|p_1 p_2 \dots p_s + \rangle = |p_1 p_2 \dots p_s - \rangle - 2\pi i \delta(H - E) \left( \sum_{i=1}^s a_1^+ \dots V_i \dots a_s^+ \right) | \rangle \quad (52)$$

et, en portant ceci dans l'équation (12) qui définit  $T$ , il vient

$$T_{p_1 p_2 \dots p_s (n)} = \langle n - | \sum_{i=1}^s a_1^+ \dots V_i \dots a_s^+ | \rangle \quad (53)$$

Dans le cas où  $n$  est un état à  $r$  mésons  $q_1, q_2, \dots, q_r$ , on peut développer  $\langle q_1 \dots q_r - |$  à l'aide de la formule correspondant à (51) pour obtenir

$$T_{p_1 p_2 \dots p_s}(q_1, q_2, \dots, q_r) = \left\langle \left[ a_{1'} \dots a_{r'} + \sum_{j=1}^r (a_{1'} \dots V_j^{\dagger} \dots a_{r'}) \frac{1}{E - H - i\varepsilon} \right] \left( \sum_{i=1}^s a_i^{\dagger} \dots V_i \dots a_i^{\dagger} \right) \right\rangle \quad (54)$$

( $a_j^{\dagger}$ , désigne l'opérateur annihilation de  $q_j$ )

Cette dernière équation correspond à la figure (5).

A l'aide des formules graphiques correspondant à (29) et (33), on voit que  $T_{p_1 \dots p_s}(q_1, \dots, q_r)$  pourra être développée en une somme de plusieurs termes, chacun d'eux étant la valeur moyenne entre les états physiques du nucléon initial et du nucléon final d'un produit d'opérateurs vertex  $V$  et de propagateurs. A ces expressions correspondent à l'aide des règles a) b) et c) tous les graphiques dont on tiendrait compte dans la théorie des perturbations au premier ordre (fig. 6, graphiques  $\alpha$ ). Dans le cas où des mésons appartenant respectivement au système incident et au système émergent seraient identiques, la commutation des opérateurs annihilation et création correspondants donnera lieu à des termes représentés par les graphiques du type ( $\beta$ ) où un (ou plusieurs) méson se propage sans interagir. Notons que les graphiques du type où un seul méson interagit ( $\gamma$ ) donnent une contribution nulle à cause de la condition de conservation de l'énergie.

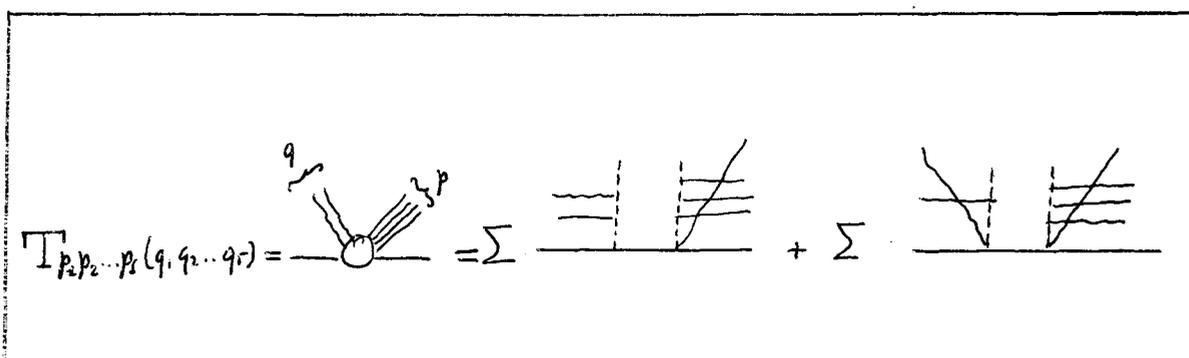
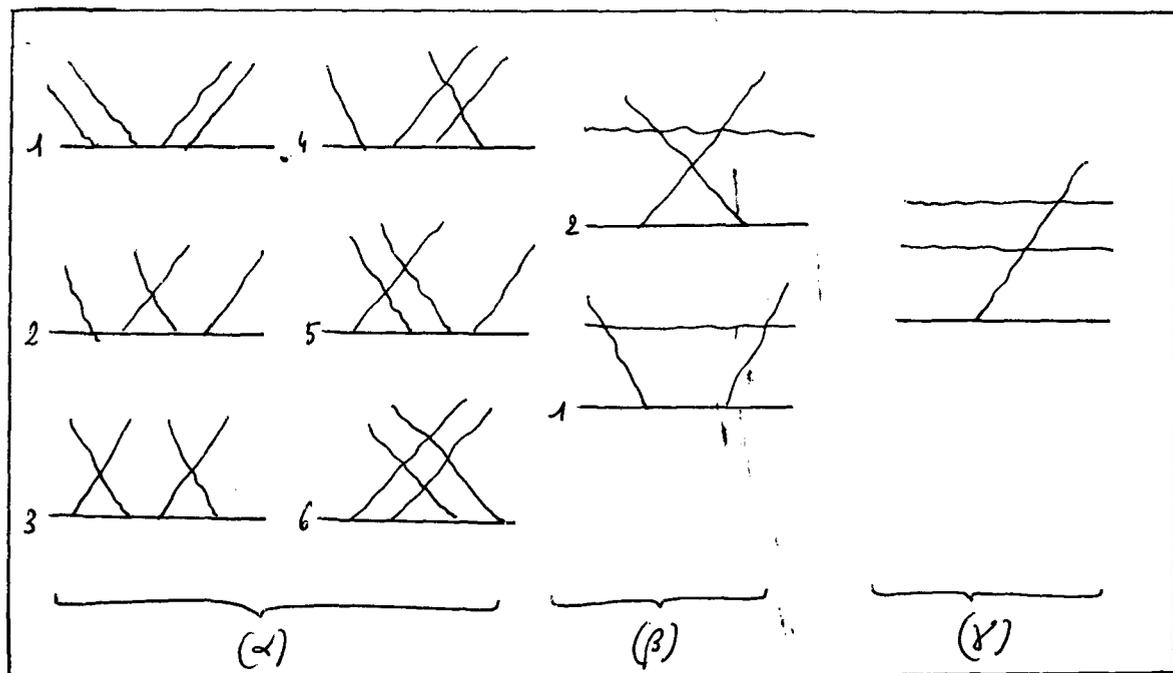


Figure 5.

**NOTA :** On pourra comparer le raisonnement qui suit (54) et qui est essentiellement graphique au cas particulier  $r = s = 2$  qui est traité analytiquement dans l'appendice I et montre bien les caractéristiques essentielles du cas général.



Nota : pour  $(\alpha)$  et  $(\beta)$   $r = 2, s = 2$ , pour  $(\gamma)$   $r = 2, s = 3$ .

Figure 6.

On a vu précédemment dans un cas particulier, qu'il était possible de rendre compte d'un certain nombre de termes à l'aide de la somme  $\sum_n \frac{T_{q_1 \dots q_r}^* T_{p_1 \dots p_s}(\eta)}{E_n - E_n - i\varepsilon}$  dont on attend également la présence pour réaliser d'unitarité de la matrice S. En fait, en tenant compte de (53), l'expression (54) de T prend immédiatement la forme

$$T_{p_1 p_2 \dots p_r}(q_1 \dots q_r) = C + \sum_n \frac{T_{q_1 \dots q_r}^* T_{p_1 \dots p_s}(\eta)}{E_n - E_n - i\varepsilon} \quad (55)$$

où l'on a posé

$$C = \langle | (a_{s'} \dots a_{r'}) (\sum_1^s a_s^+ \dots V_i \dots a_s^+) | \rangle \quad (56)$$

On constate aisément que C correspond aux graphiques où toutes les lignes mésoniques sont croisées (fig. 7) et, dans le cas général où l'état initial et l'état final ne contiennent pas deux mésons identiques,

C a la forme

$$\langle V_1^\dagger (H + \omega_1)^{-1} V_2^\dagger (H + \omega_1 + \omega_2)^{-1} \dots V_r^\dagger (H + E)^{-1} V_s (H + E - \omega_s)^{-1} \dots V_2 (H + \omega_1)^{-1} V_1 \rangle \quad (57)$$

On voit immédiatement sur cette forme, les propriétés essentielles de C ;

$$a) G(p_1 \dots p_s; q_1 \dots q_r) = G^*(q_1 \dots q_r; p_1 \dots p_s) \quad (58)$$

b) Lorsque l'énergie E est considérée comme complexe, C est une fonction de E holomorphe sur la partie positive de l'axe réelle ainsi que dans le demi-plan complexe supérieur. De ces propriétés découlent les propriétés d'unitarité et de causalité pour la matrice T

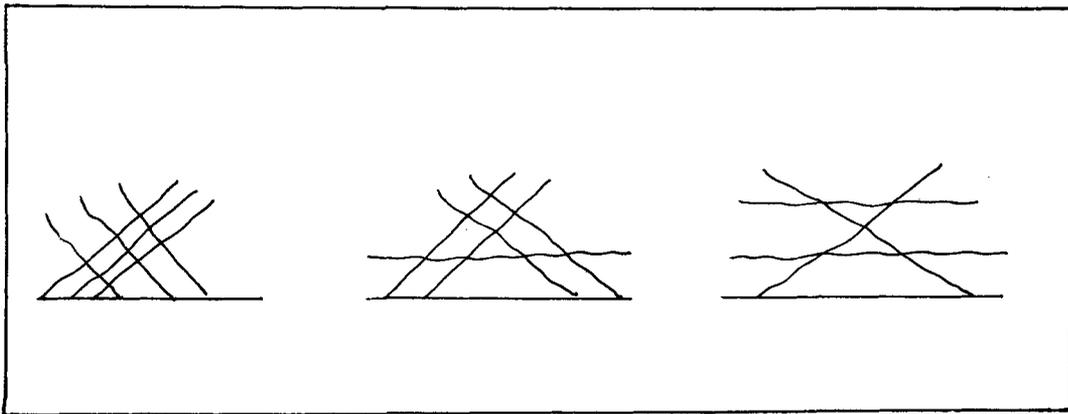


Figure 7.

Dans le cas où il n'y a pas plus de 2 mésons dans chacun des états, il est possible en utilisant la dépendance explicite des vertex V en fonction de l'énergie, de donner une forme simple à C. La méthode est celle que nous avons donnée au paragraphe précédent et à l'appendice I et donne

$$G(p, q) = - \sum_n \frac{T_{p^{(n)}}^* T_{q^{(n)}}}{E_n + E}$$

$$G(p_1 p_2; q) = - \sum_n \frac{T_{p_1' p_2' (n)}^* T_{q(n)}}{E_n + E} \rho(p_1 p_2') \rho(p_2 p_2')$$

$$G(q; p_1 p_2) = - \sum_n \frac{T_{q(n)}^* T_{p_1' p_2' (n)}}{E_n + E} \rho(p_1 p_2') \rho(p_2 p_2')$$

$$G(p_1 p_2; q_1 q_2) = - \sum_n \frac{T_{p_1' p_2' (n)}^* T_{q_1 q_2 (n)}}{E_n + E} \rho(p_1 p_2') \rho(p_2 p_2') \rho(q_1 q_2') \rho(q_2 q_2')$$

$$\rho(p p') = \left(\frac{p}{p'}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{v(p)}{v(p')}$$

Lorsqu'il y a plus de 2 mésons mis en jeu dans un des états, il est encore théoriquement possible d'obtenir par la même méthode un système d'équations où ne figurent que des éléments de matrice  $T$  mais la structure du terme  $C$  est alors extrêmement compliquée. Dans la seconde partie de ce travail, nous indiquerons comment il est possible d'établir un système complet d'équations du type de Low relativistes et indépendantes d'un modèle dont la limite non relativiste permet de compléter les équations obtenues ici.

#### 4. Approximation à un méson.

Si, dans l'équation de Low <sup>/18/</sup>, dans les équations (49) donnant  $Tq(p_1 p_2)$  et  $Tp_1 p_2(q)$  ( $A_1$  10) donnent  $Tp_1 p_2(q_1 q_2)$ , on limite les sommations aux états intermédiaires à 0, 1 ou 2 mésons, on obtient un système d'équations intégrales non linéaires couplées. La résolution d'un tel système serait extrêmement difficile, aussi limiterons-nous les sommations à des états intermédiaires à 0 et 1 méson. Dans ce cas, l'équation (18) prend la forme bien connue de Chew-Low et Wick (20) où n'apparaissent que des éléments de matrice de diffusion et l'on peut utiliser la solution numérique de cette équation par Saltzmann. Les équations (49) deviennent elles-mêmes des équations linéaires pour les éléments de matrice de production dont le noyau dépend des déphasages de diffusion, que nous proposons de résoudre. Enfin, la connaissance des éléments de matrice de production permet en principe, de déterminer l'importance

des termes à deux mésons dans l'équation de Chew et Low et la valeur approximative des éléments de matrice de transition de 2 à 2 mésons par (A<sub>1</sub> 10) et de vérifier ainsi la consistance de nos approximations.

Pour former explicitement les équations qui nous intéressent, nous procéderons par étapes en séparant successivement leur dépendance en fonction de l'énergie, du spin isobarique et du moment angulaire. Pour cela nous mettrons en évidence les indices de charge et de polarisation de  $p_1$ ,  $p_2$  et  $q$ , soit :

$$\begin{aligned} p_1 &\rightarrow p_1 \lambda_1 m_1 \\ p_2 &\rightarrow p_2 \lambda_2 m_2 \\ q &\rightarrow q \mu m \end{aligned}$$

ainsi que les indices ( $\alpha$  a), ( $\beta$  b) etc. de charge et de spin du nucléon.

a) Séparation de la dépendance en énergie.

Nous poserons

$$T_{q(o)} = q^{3/2} v(q) T_{\mu m \beta b}(\alpha a) \quad (59a)$$

$$T_{q(p)} = -(qp)^{3/2} v(p)v(q) T_{\mu m \beta b}(\lambda m' \alpha a) \quad (59b)$$

$$T_{p_1 p_2 (q)} = -(p_1 p_2)^{3/2} v(p_1)v(p_2) T_{\lambda_1 \lambda_2 m_1 m_2 \beta b}(\alpha a) \quad (59c)$$

$$T_{q(p_1 p_2)} = -(p_1 p_2 q)^{3/2} v(p_1)v(p_2)v(q) T_{\mu m \beta b}(\lambda_1 \lambda_2 m_1 m_2 \alpha a) \quad (59d)$$

$$T_{p_1 p_2 (q)} = -(p_1 p_2 q)^{3/2} v(p_1)v(p_2)v(q) T_{\lambda_1 \lambda_2 m_1 m_2 \beta b}(\mu m \alpha a) \quad (59e)$$

Les quantités T au second membre sont encore fonction de  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_q$  ce que nous ne soulignons pas pour ne pas surcharger outre mesure les notations.

b) Séparation en termes de spin isobarique.

Le spin isobarique total du système étant conservé dans la réaction, nous le ferons apparaître explicitement. Les deux mésons du système nucléon + 2 mésons peuvent se coupler pour donner un spin isobarique  $t$  égal à 0, 1 ou 2, lequel se couple à son tour avec le spin isobarique du nucléon pour donner un spin isobarique total  $I = 1/2$  ou  $3/2$  (le spin  $5/2$  étant interdit dans l'état initial). Les éléments de matrice réduits dépendront donc des 2 paramètres  $I$  et  $t$  et nous poserons

$$T_{\mu m \beta \delta}(\alpha a) = C_{1/2}(\frac{1}{2} \alpha | \mu \beta) T_{m \delta}^0(a) \quad (60a)$$

$$T_{\mu m \beta \delta}(\lambda m' \alpha a) = \sum_{IN} C_{1/2}(IN | \mu \beta) C_{1/2}(IN | m' \alpha) T_{m \delta}^I(m' a) \quad (60b)$$

$$T_{\lambda, \lambda_2 m, m_2 \beta \delta}(\alpha a) = \sum_{t_3} C_{1/2}(t_3 | \lambda, \lambda_2) C_{t_3}(\frac{1}{2} \alpha | \mu \beta) T_{m, m_2}^t(a) \quad (60c)$$

$$T_{\mu m \beta \delta}(\lambda, \lambda_2 m, m_2 \alpha a) = \sum_{IN t_3} C_{1/2}(t_3 | \lambda, \lambda_2) C_{t_3}(\frac{1}{2} (IN | t_3 \alpha) C_{1/2}(IN | \mu \beta) \times \overline{T}_{m \delta}^{It}(m, m_2 a) \quad (60d)$$

$$T_{\lambda, \lambda_2 m, m_2 \beta \delta}(\mu m \alpha a) = \sum_{IN t_3} C_{1/2}(t_3 | \lambda, \lambda_2) C_{t_3}(\frac{1}{2} (IN | t_3 \beta) C_{1/2}(IN | \mu \alpha) \times \overline{T}_{m, m_2}^{It}(m \delta) \quad (60e)$$

c) Séparation en termes de moment angulaire.

La situation est tout-à-fait semblable à celle du spin isobarique, là encore les moments angulaires des mésons dans l'état final se coupleront pour former un moment angulaire  $L = 0, 1, 2$  lequel se couplera avec le spin du nucléon pour former le moment angulaire total  $J = 1/2, 3/2$ .

On écrira donc pour le moment angulaire des équations absolument semblables à (60), faisant ainsi apparaître les éléments de matrice réduits (au sens du théorème de Wigner-Ekhardt) de  $T$ . Ainsi :

- à $T_0(0)$ (transition de O à O méson) correspondra	$T^0$	
- à $T_1(1)$ (	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & \end{pmatrix}$	$T_J^I$ que nous noterons $T_J$ pour simplifier.
- à $T_2(0)$ (	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ & \end{pmatrix}$	$T_L^t$ $T_L$
- à $T_1(2)$ (	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ & \end{pmatrix}$	$\overline{T}_{JL}^{It}$ $\overline{T}_{JL}$
- à $T_2(1)$ (	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & \end{pmatrix}$	$T_{JL}^{It}$ $T_{JL}$

En introduisant ces définitions dans (18) et (49) et effectuant les sommations sur les nombres quantiques magnétiques à l'aide des techniques de Racah<sup>/34/</sup>, nous obtiendrons des équations reliant les divers éléments de matrice réduits de  $T$ .

Le calcul de  $T^0$  est immédiat, on a en effet, par définition

$$\begin{aligned} T_{\mu m \beta b}(\alpha a) &= C_{1 \frac{1}{2}}(\frac{1}{2} \alpha | \mu \beta) C_{1 \frac{1}{2}}(\frac{1}{2} a | m \beta) T^0 \\ &= \langle \alpha a | \sigma_m \tau_\mu | \beta b \rangle \frac{1}{\sqrt{3\pi}} f_0 \end{aligned}$$

Si l'on introduit des états de nucléons libres désignés par  $|\alpha a\rangle$  et  $|b \beta\rangle$  respectivement, on sait (cf. Wick<sup>/12/</sup>) que

$$\langle \alpha a | \sigma_m \tau_\mu | \beta b \rangle f_0 = (\alpha a | \sigma_m \tau_\mu | \beta b) f \quad (61)$$

où  $f$  est la constante de couplage renormalisée.

Or

$$\begin{aligned} (\alpha a | \sigma_m \tau_\mu | \beta b) &= (a | \sigma_m | b) (\alpha | \tau_\mu | \beta) \\ &= C_{1 \frac{1}{2}}(\frac{1}{2} a | m \beta) C_{1 \frac{1}{2}}(\frac{1}{2} \alpha | \mu \beta) t^0 \end{aligned}$$

$t^0$  étant le produit des éléments de matrice réduits des opérateurs tensoriels  $\sigma$  et  $\tau$ , soit  $t^0 = 3$ . En conclusion

$$T^0 = \sqrt{\frac{3}{\pi}} f \quad (62)$$

On détermine  $T_J$  en réduisant l'équation de Chew et Low (20) ce qui donne

$$T_{\sigma}^I = \frac{1}{\pi} h_{2I, 2\sigma} \quad (63)$$

Nous allons maintenant effectuer systématiquement le calcul des termes qui interviennent dans l'expression de  $T_{JL}$  et  $T_{JL}^*$ , d'après (49)

### Termes à O méson

Dans l'équation donnant  $T_{\lambda, \lambda_2, m, m_2, \alpha, \beta}(\mu, m, \beta, \beta)$  apparaîtront des termes relatifs à un état intermédiaire  $(c\gamma)$  où figure un seul nucléon, soit (\*)

$$- \sum_{c\gamma} \frac{T_{\lambda, \lambda_2, m, m_2, \beta, \beta}^*(c\gamma) T_{\mu, m, \alpha, \alpha}(c\gamma) - T_{\mu, m, \beta, \beta}^*(c\gamma) T_{m, m_2, \lambda, \lambda_2, \alpha, \alpha}(c\gamma)}{\omega_q}$$

ce qui donne, d'après (27) dans l'équation pour  $T_{JL}$

$$\left(T_{JL}\right)_{\beta} = \frac{4 \delta_{I \frac{1}{2}} \delta_{J \frac{1}{2}} T_0 T_L}{\omega_q} - A_{JL} A_{IL} \frac{T_0 T_L^*}{\omega_q} \quad (64)$$

où  $A_{\frac{1}{2} 0} = \frac{2}{3}$ ,  $A_{\frac{1}{2} 1} = \frac{10}{9}$ ,  $A_{\frac{3}{2} 1} = \frac{8}{9}$ , toutes les autres combinaisons

d'indices donnant zéro. (Ces termes A sont en fait, des combinaisons de coefficients de Racah que nous avons calculées explicitement)

(\*) Le premier terme de cette équation figure la somme sur les états intermédiaires à O méson du premier terme de (49b) pour lesquels  $E_{n=0} \Omega(p_2) = \Omega(p_1)$

$$\Omega(p_2) = \Omega(p_1)$$

Nous pouvons exprimer  $T_L$  en fonction des sections efficaces de diffusion. Pour cela, écrivons

$$\begin{aligned} T_{\beta_1 \beta_2}^{\alpha_1 \alpha_2} &= \langle \alpha_1 | a_1^\dagger V_2 + a_2^\dagger V_1 | \beta_2 \rangle \\ &= - \langle \alpha_1 | V_1 \frac{1}{H + \omega_1} V_2 | \beta_2 \rangle + \text{Perm}(1,2) \\ &= - \sum_n \langle \alpha_1 | V_1 | n \rangle \frac{1}{E_n + \omega_1} \langle n | V_2 | \beta_2 \rangle + \text{Perm}(1,2) \end{aligned}$$

et utilisons à nouveau l'approximation à 1 méson dans la sommation, nous verrons ainsi apparaître des termes à 0 méson intermédiaire qui s'exprimeront numériquement à l'aide de la constante de couplage renormalisée et des termes à 1 méson intermédiaire qui s'exprimeront à l'aide des sections de diffusion.

La contribution à  $T_{m_1 m_2 \lambda_1 \lambda_2}^{\alpha_1 \alpha_2}$  des termes à 0 méson est

$$\sum_{c\gamma} \frac{f^2}{3\pi} \frac{(\alpha_1 | \sigma_{m_1} \tau_{\lambda_1} | c\gamma)(c\gamma | \sigma_{m_2} \tau_{\lambda_2} | \beta_2)}{\omega_1} + \text{Perm}(1,2)$$

soit, après sommation sur les coefficients de Clebsh-Gordan, une contribution à  $T_L^t$  égale à

$$\left( T_L^t \right)_0 = \frac{3f^2}{\pi} \left( \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right) \frac{2^3}{[(2L+1)(2t+1)]^{1/2}} W\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | L, \frac{1}{2}\right) W\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | t, \frac{1}{2}\right) \quad (65)$$

De la même façon on trouve pour la contribution des termes à 1 méson :

$$\begin{aligned} \left( T_L^t \right)_1 &= \sum_{IJ} (-)^{I+J+1} 2(2J+1)(2I+1) W\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 | L, J\right) \\ &\quad \times W\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 | t, I\right) B_L B_t \int_0^\infty k^2 v^2(k) d\omega_k \left| \Gamma_I^J \right|^2 \left\{ \frac{1}{\omega_k + \omega_1} + \frac{1}{\omega_k + \omega_2} \right\} \end{aligned} \quad (66)$$

avec  $B_0 = \frac{1}{3}$        $B_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Les coefficients de Racah figurant dans (65) et (66) s'annulent lorsque  $t$  ou  $L$  est égal à 2. Cela tient physiquement à l'impossibilité de la transition du système d'un nucléon et d'un couple de mésons dans l'état de spin isobarique 2 (ou de moment angulaire 2) vers un nucléon seul.

Finalement

$$T_L = (T_L)_0 + (T_L)_2$$

Les termes à 0 méson que nous venons de calculer donneront lieu à un terme inhomogène dans l'équation pour  $T_{JL}$ , analogue au terme correspondant de l'équation de Chew et Low.

#### Termes à 1 méson.

Notons tout d'abord que dans la sommation du second membre de (49) figurent des éléments de la matrice de réaction, extérieurs à la couche d'énergie. Revenant à l'expression de  $T_{p_1 p_2}(n)$  donnée par (37), nous voyons que

$$T_{p_1 p_2}(n) = \sum_{\lambda} \delta_{p_1 p_2 \lambda} \langle n_{\lambda} | V_2 \rangle + \sum_{\lambda} \delta_{p_2 p_1 \lambda} \langle n_{\lambda} | V_2 \rangle + T_{p_1 p_2}(n)^{\text{analytique}} \quad (67)$$

où le 1er terme peut s'écrire  $\sum_{p_1 p_2 \lambda} T_{p_2}(n_{\lambda})$ , le second,  $T$  analytique, étant le prolongement de la matrice définie sur la couche d'énergie en dehors de cette couche.

Graphiquement, ces deux quantités correspondent aux éléments ( $\alpha$ ) et ( $\beta$ ) de la figure 7.

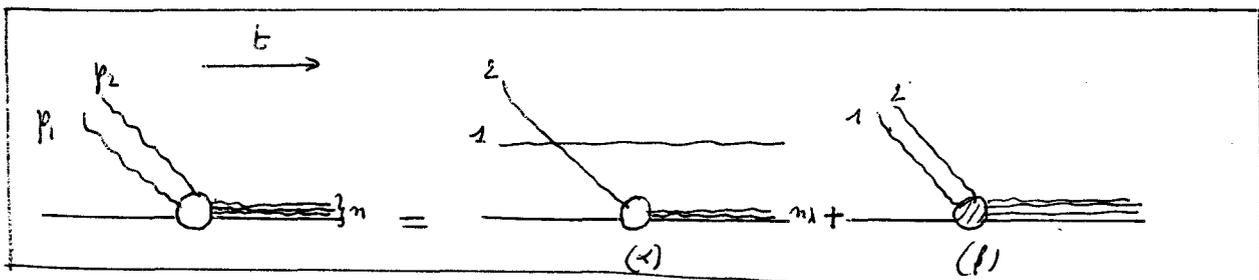


Figure 7.

En approximation de couplage faible, la première contribution au 1er terme de (67) est en  $f_0^n$ , celle du 2ème terme en  $f_0^{n+2}$ . On peut également considérer que si ces quantités sont exprimées comme valeurs moyennes entre états de 2 nucléons physiques d'un certain opérateur  $O$ ,  $O_\alpha$  contiendra  $n$  opérateurs vertex  $V$  alors que  $O_\beta$  en comportera  $n+2$ . Si donc l'on veut effectuer une approximation à 1 méson cohérente, sur les équations fondamentales, il faudra retenir des termes correspondants à l'échange réel d'un méson par l'intermédiaire de  $(\alpha)$  ce qui correspond à des états  $n$  à 2 mésons.

Nous voyons ainsi apparaître des termes provenant d'états intermédiaires à 1 méson identique à  $p_1$  ou  $p_2$  qui donneront lieu à un terme  $(T_{JL})_\alpha$  analogue à l'élément à 0 méson  $(T_{JL})_\beta$ , égal, toutes réductions faites, à

$$\begin{aligned} (T_{JL})_\alpha &= (-)^{L+t} \left\{ (2L+1)(2t+1) \right\}^{-\frac{1}{2}} (2I+1)(2J+1) \\ &\times W\left(\frac{1}{2} J 1 L \mid 1 \frac{1}{2}\right) W\left(\frac{1}{2} I 1 t \mid 1 \frac{1}{2}\right) T^0 T_{J(\omega_q)}^* \left( \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right) \end{aligned} \quad (68)$$

La réduction de la somme sur les états intermédiaires à un méson dans le second terme de (49b) provenant de l'extension analytique de  $T$  est immédiate et donne une contribution à  $T_{JL}$  de la forme

$$\int_1^\infty k^3 v^4(k) \frac{T_{JL} T_J^*(\omega_k)}{\omega_k - \omega_q - i\varepsilon} d\omega_k \quad (69)$$

Cette quantité est à rapprocher de l'expression analogue qui figure dans l'équation de Chew et Low. On voit déjà sur cette forme intégrale qu'elle aura tendance à donner une valeur relativement importante à l'élément de matrice réduit de production, lorsque l'énergie totale est égale à l'énergie de résonance. Cependant, la section efficace étant très faible à ces énergies voisines du seuil, cet effet ne pourra être décelable.

Quant aux termes à un méson intermédiaire du type  $(\alpha)$ , ils donnent, toutes réductions faites, une contribution à  $T_{JL}$  de la forme

$$\sum_{I' J' L'} A_{JL J'L'}^{I t I' t'} \int_1^\infty k^3 v^4(k) d\omega_k \left( \overline{T_{JL'}}^* T_{J'} \right)_k \left[ \frac{1}{\omega_k - \omega_1 - i\varepsilon} + \frac{1}{\omega_k - \omega_2 - i\varepsilon} \right] \quad (70)$$

où

$$A_{\substack{I'k \\ I'k}}^{\substack{I't \\ I't'}} = (-)^{L+L'+t+t'} \left\{ (2L+1)(2L'+1)(2t+1)(2t'+1) \right\}^{\frac{1}{2}} (2J+1)(2I'+1) \\ \times W(1LJ'J | 1 \frac{1}{2}) W(1tI'I | 1 \frac{1}{2}) W(1L'J'J | 1 \frac{1}{2}) W(1t'I'I | 1 \frac{1}{2}) \quad (71)$$

On peut noter que l'effet de ces termes sera vraisemblablement d'augmenter la section efficace de production lorsque l'énergie de l'un des mésons produits est celle de la résonance.

#### Elimination de certains termes.

Nous n'avons pas cherché à évaluer la contribution due aux états intermédiaires à 1 méson dans le premier terme de (49b). En fait, on peut montrer qu'elle est complètement négligeable.

Ces termes donneront en effet naissance à une intégrale sur l'énergie du méson intermédiaire dont la forme sera analogue à (69), le dénominateur  $\omega_k - \omega_q - i\epsilon$  étant remplacé par  $\omega_k + \omega_q$ . L'effet global de ce dénominateur sera donc de diminuer l'intégrale correspondante par rapport à (69). D'autre part le facteur  $P(p, p', p_2, p_2') = \Omega(p, p_2) / \Omega(p_2', p_2)$  qui le multiplie reste toujours très petit. En effet, pour  $\omega_k$  petit,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  restant de l'ordre de 2 ou inférieur à 2, on a

$$v(k) \approx v(p_2') \approx v(p_2) \approx 1$$

et pour les valeurs qui nous intéresseront on a, en posant  $f(\omega_k) = \left( \frac{p_1 p_2}{p_1' p_2'} \right)^{\frac{3}{2}}$  le tableau suivant :

a) $\omega_1 = 1$	$\omega_2 = 1$	$f = 0$			
b) $\omega_1 = 1$	$\omega_2 = 2$	$f = 0$			
c) $\omega_1 = 2$	$\omega_2 = 2$				
$\omega_k$	4	2	3	5	10
$f$	$7 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$

Tableau I

Pour  $\omega_k$  grand, le fait que  $f$  contienne la coupure au dénominateur peut causer des difficultés. Cependant on peut vérifier qu'en admettant une coupure à compartiment asymptotique algébrique ou exponentiel et en tenant compte de la décroissance en  $\frac{1}{\omega_k}$  de  $T_{JL}^{II}$  et  $T_J^I$  quand  $\omega_q$  tend vers l'infini (propriété qui résulte immédiatement de l'étude analytique de (49) cet effet ne peut avoir d'importance.

Nous négligerons donc complètement ces termes par la suite.

### Equations finales.

Nous obtenons donc les équations /17/

$$T_{JL} = (T_{JL})_\alpha + (T_{JL})_\beta + \int_1^\infty k^3 v^2(k) d\omega_k \left[ \frac{(T_{JL} T_J^*)_k}{\omega_k - \omega_q - i\varepsilon} \right. \quad (72a)$$

$$\left. + \sum_{I'J'L'} A_{JLJ'L'} (\overline{T_{JL'}}^* T_{J'}^*)_k \left( \frac{1}{\omega_k - \omega_1 - i\varepsilon} + \frac{1}{\omega_k - \omega_2 - i\varepsilon} \right) \right]$$

$$\overline{T_{JL}} = (\overline{T_{JL}})_\alpha^* + (\overline{T_{JL}})_\beta^* + \int_1^\infty k^3 v^2(k) d\omega_k \left[ \frac{(\overline{T_{JL}}^* T_J)_k}{\omega_k - \omega_q - i\varepsilon} \right. \quad (72b)$$

$$\left. + \sum_{I'J'L'} A_{JLJ'L'} (\overline{T_{JL'}} T_{J'}^*)_k \left( \frac{1}{\omega_k - \omega_1 - i\varepsilon} + \frac{1}{\omega_k - \omega_2 - i\varepsilon} \right) \right]$$

où  $(T_{JL})_\alpha$  et  $(T_{JL})_\beta$  sont donnés par (68) et (64)

En utilisant la formule (15) pour éliminer  $\varepsilon$  et l'expression explicite de  $T_J$  en fonction du déphasage de diffusion

$$T_J^I = \frac{e^{i\delta_{I\sigma}} \sin \delta_{I\sigma}}{\pi p^3 v^2(p)} \quad (73)$$

on peut ramener ce système à un couple d'équations intégrales et algébriques où les seuls paramètres sont les déphasages, soit :

$$\begin{aligned}
 T_{JL} = & (T_{JL})_\alpha + (T_{JL})_\beta + i \left\{ (T_{JL} e^{-i\delta_J \sin \delta_J})_q \right. \\
 & \left. + \sum A_{JL}^{J'L'} [(\overline{T}_{JL}^* e^{i\delta_{J'} \sin \delta_{J'}})_{p_2} + \text{Perm}(1,2)] \right\} \quad (74a) \\
 & + \frac{1}{\pi} P \int_1^\infty d\omega_k \left[ \frac{T_{JL} e^{-i\delta_J \sin \delta_J}}{\omega_k - \omega_q} + \sum A_{JL}^{J'L'} \right. \\
 & \left. \times (\overline{T}_{JL}^* e^{i\delta_{J'} \sin \delta_{J'}})_k \left[ \frac{1}{\omega_k - \omega_1} + \frac{1}{\omega_k - \omega_2} \right] \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{T}_{JL} = & T_{JL}^* + 2i \left\{ (T_{JL}^* e^{i\delta_J \sin \delta_J})_q \right. \\
 & \left. + \sum A_{JL}^{J'L'} [(\overline{T}_{JL}^* e^{-i\delta_{J'} \sin \delta_{J'}})_{p_2} + \text{Perm}(1,2)] \right\} \quad (74b)
 \end{aligned}$$

Dans ces équations, nous avons écrit  $A_{JL}^{J'L'}$  pour  $A_{JL}^{i t i t' j' l'}$  et  $(f)p_1$  pour la valeur d'une fonction  $f(p)$  au point  $p_1$ .

### Comparaison avec la théorie des réactions nucléaires

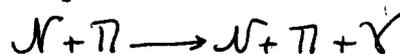
Dans le terme inhomogène  $(T)_{JL}$  des équations (72), figure l'élément de matrice de diffusion réduit  $h(\omega)$ . Or, nous avons vu que  $h_{33}$  doit avoir un pôle dans le demi-plan complexe inférieur, on doit donc avoir la même propriété pour les éléments de matrice  $T_{\frac{3}{2}L}$ . Nous pouvons écrire  $h_{33}(\omega)$  sous la forme  $f(\omega)/\omega - \omega_p$  la fonction  $f(\omega)$  étant holomorphe au voisinage du pôle  $\omega_p = \omega_R - i\Gamma$  ( $\Gamma > 0$ ). Si l'on néglige la variation de  $f(\omega)$  et qu'on identifie cette fonction à  $f(\omega_p)$  au voisinage du pôle, la section efficace prendra la forme

$$\sigma \sim \frac{|f(\omega_p)|^2}{(\omega - \omega_R)^2 + \Gamma^2}$$

qui correspond à la formule de Breit et Wigner à un niveau. Opérant de même avec  $T$ , on obtiendra

$$\sigma_{\text{creation}} \sim \frac{|t(\omega_p)|^2}{(\omega - \omega_R)^2 + \Gamma^2}$$

ce qui justifie l'interprétation du pôle de la matrice  $S$  comme un état isobarique virtuel du système  $\pi$ -nucléon donnant lieu à des réactions qui peuvent être étudiées par des méthodes analogues à la méthode du noyau composé de Bohr<sup>/20/</sup>. On vérifie également que ce pôle se retrouve dans le canal de diffusion radiative<sup>/14/</sup>



(Nous ne le ferons pas ici car il s'agit d'un calcul extrêmement différent).

##### 5. Résolution numérique des équations .

Le système (72) se présente comme un système d'équations intégrales couplées dont les noyaux sont fonction des déphasages de diffusion. La méthode que nous avons suivie pour les dériver suggérerait d'utiliser une solution numérique des équations de Chew et Low pour les déphasages. Cependant, une telle solution dépend du choix de la fonction de coupure et nous avons préféré nous appuyer sur l'absence de cette fonction dans les noyaux et introduire directement les déphasages expérimentaux.

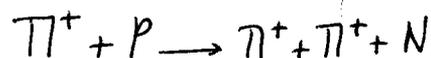
Actuellement, seul le déphasage  $\delta_3$  est bien connu expérimentalement et les seuls éléments de matrice réduits que nous pourrions calculer sans avoir besoin de  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont donc  $T_{3/2,2}$  et  $T_{3/2,1}$ ; la connaissance de ces éléments de matrice ne suffit pas pour estimer complètement la contribution des termes à 2 mésons dans les équations de Chew et Low, aussi la seule application que nous pourrions traiter sera-t-elle le calcul de la section efficace de production de 2 mésons dans un état de spin isobarique et de moment angulaire totaux  $3/2$ .

Considérons maintenant le terme inhomogène qui figure dans nos équations pour les cas intéressants. En se reportant aux expressions (68) et (64) de  $(T)_\alpha$  et  $(T)_\beta$ , on constate que la dépendance de  $(T)_\alpha$  en fonction des énergies est factorisable alors que celle de  $(T)_\beta$  ne l'est pas. Si donc

nous voulons calculer un processus auquel  $(T)_\beta$  contribue, il nous faudra à priori résoudre une équation intégrale pour chaque couple de valeurs des énergies finales  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , ce qui rend le calcul rigoureux d'une section efficace totale long et difficile. D'autre part, le calcul pratique montre que la solution des équations est sensible au terme inhomogène et qu'il faut donc prendre de grandes précautions dans les approximations que l'on peut effectuer.

Une caractéristique intéressante du terme  $(T)_\beta$  est son annulation lorsque  $t$  ou  $L = 2$ . Physiquement cela ressort de la figure 2;  $(T)_\beta$  correspond en effet au calcul par perturbation des éléments de matrice décrits par les graphiques  $(\alpha)$  et  $(\beta)$ , effectué à l'aide de la constante de couplage renormalisée : il est donc clair que le résultat est nul dans le cas considéré par suite de la conservation du moment angulaire et du spin isobarique.

On pourra donc faire le calcul complet de  $T_{3/2,2}$  par résolution d'une seule équation intégrale et c'est là précisément la seule quantité qui intervienne dans l'étude de la réaction



elle-même facilement observable expérimentalement.

Cependant  $T_{3/2,2}$  est couplé aux autres éléments  $T$  par l'intermédiaire des termes croisés en  $A_{J'L, J'L}$  : Ceux-ci s'annulent, sauf pour  $J' = 3/2$ ,  $L' = 1$  ou  $2$  où ils prennent des valeurs très petites (de l'ordre de  $10^{-3}$ ) et on les négligera. Nous avons d'ailleurs vérifié, après avoir résolu les équations ainsi obtenues que ces termes étaient effectivement petits et n'avaient pas d'influence sur la section efficace totale.

L'équation que nous avons résolue est donc

$$T(\omega_1, \omega_2, \omega_q) = \text{constante } h^*(\omega_q) \left( \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right) + \int_0^\infty \frac{(\Gamma T^* h)_k}{\omega_k - \omega_q - i\epsilon} k^3 v^2(k) d\omega_k$$

puisqu'elle est linéaire, on peut poser

$$T(\omega_1, \omega_2, \omega_q) = \text{constante} \left( \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right) t(\omega_q)$$

où  $t(\omega)$  est solution de

$$t(\omega) = h^*(\omega) + \int_1^\infty \frac{t(\omega') h^*(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} \rho^{1/3} \sigma^2(k') d\omega' \quad (75)$$

L'étude de cette dernière équation est particulièrement intéressante et présente des particularités qui peuvent être instructives dans de nombreux autres cas. On constate tout d'abord que la méthode de résolution par itérations successives ne converge pas, ce qui rend immédiatement douteux tout calcul fondé, explicitement ou implicitement, sur cette méthode. Nous avons donc remplacé l'intégrale par une somme, utilisant la méthode des différences finies, et le système linéaire obtenu a été résolu sur machine, nous avons pris les déphasages expérimentaux et une coupure à 5.5.

Trois constatations principales se dégagent des résultats obtenus :

- 1) La solution est nettement sensible aux variations du terme inhomogène, surtout dans la région des hautes énergies.
- 2) Elle est stable pour des variations faibles du noyau, ainsi avons-nous vérifié qu'il était légitime de négliger les termes croisés.
- 3) La solution diffère sensiblement du terme inhomogène, ce qui a une répercussion nette sur le calcul des sections efficaces. Cette différence est mise en évidence sur le graphique 1 de l'appendice III où nous avons porté pour comparaison le carré du module de l'élément de matrice de production  $|T|^2$  et ce que donnerait le terme inhomogène  $|T(B)|^2$ . On s'explique ainsi que les calculs faits jusqu'ici aient toujours donné des sections efficaces de production petites par rapport aux premiers résultats expérimentaux. Toutes les méthodes utilisées à notre connaissance (à partir de théories respectant l'unitarité) supposaient en effet sous quelque forme la convergence de la méthode itérative et donnaient des résultats trop faibles, peu éloignés de l'approximation de Born.

La raison de ces difficultés d'ordre numérique semble demeurer dans la forte singularité de la distribution  $\rho h(\omega)/\omega - \omega$  due à la fois au dénominateur et à la forte variation du numérateur.

Malgré son caractère aléatoire, nous avons tenté un calcul approché de la section efficace de production dans un état de spin isobarique 1 pour les deux mésons émergents ( $T_{3/2, 1}$ ) de la façon suivante :

On néglige le terme ( $T$ ) $_{\alpha}$  devant ( $T$ ) $_{\beta}$  qui a la forme  $\lambda/\omega_q$ . Négligeant ensuite les termes croisés dans (72) on obtient une équation pour  $T_{3/2, 1}$  de la forme

$$T(\omega) = \lambda/\omega_q + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{\infty} \frac{T(\omega') h_3^*(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} k'^3 v^2(k') d\omega'$$

En comparant cette équation à celle de Chew et Low, où les termes croisés ont été négligés, soit

$$h_3(\omega) = \frac{\lambda_3}{\omega} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{\infty} \frac{|h_3(\omega')|^2}{\omega' - \omega - i\varepsilon} k'^3 v^2(k') d\omega'$$

on a la solution immédiate

$$T(\omega) = \frac{\lambda}{\lambda_3} h_3(\omega)$$

Cette méthode est évidemment sujette à de nombreuses critiques et, en particulier, elle s'appuie implicitement sur la convergence de la méthode d'itération. Aussi ne la considérerons-nous que comme donnant une orientation.

## 6. Comparaison avec les résultats d'autres auteurs.

D'autres auteurs se sont intéressés au même problème ou à certains de ses aspects et nous citons ici leurs résultats pour comparaison. L'étude de la production de deux mésons en théorie statique du nucléon a été faite par S. Barshay<sup>/35/</sup>, J. Franklin et L. S. Rodberg<sup>/37/</sup>. Ce problème a été également traité par N. Fukuda et J. S. Kovacs en connexion avec la recherche d'un système complet d'équations intégrales non linéaires pour la diffusion et la production, question qui a été d'autre part étudiée par R. Haag<sup>/38/</sup>. Hormis l'article de S. Barshay, nous n'avons eu connaissance de ces travaux qu'après l'achèvement de celui-ci.

La méthode de S. Barshay consiste à partir de l'équation <sup>/36/</sup>.  
 Introduisant un système complet d'états, il écrit le premier terme de (13), par exemple, sous la forme

$$\sum_{n m} \langle n | V_q | n \rangle \frac{1}{E_n + \omega_q} \langle n | V_2 | m \rangle \frac{1}{E_m + \omega_q} \langle m | V_1 | \rangle$$

et limite la sommation aux états à 1 méson. Cette sommation est encore réduite en négligeant les éléments de matrice du vertex intermédiaire entre deux états à 1 méson, de façon à ne plus faire apparaître que des termes du type  $\langle 0 | V | 1 \rangle$  proportionnels à  $h(\omega)$ . Les sections efficaces de production sont alors immédiatement obtenues par intégration.

Cette méthode à plusieurs désavantages : tout d'abord, elle ne constitue pas une approximation à 1 méson consistante. En fait, elle revient à ne considérer dans l'équation (72) qu'une partie des termes inhomogènes  $(T)_\alpha$  et  $(T)_\beta$  et à négliger complètement l'intégrale. Les calculs numériques montrent que l'erreur ainsi commise peut être considérable. D'autre part, le fait que la condition d'unitarité soit complètement violée dans ces calculs entraîne que la section efficace de production de deux mésons par une méthode légèrement différente de la nôtre. Elle consiste à établir une équation du type de (36) ne contenant que des produits de deux vertex grâce à la relation

$$\langle q | V_k | s \rangle = \delta_{sq} \langle 0 | V_k | 0 \rangle - \langle -sq | V_k | 0 \rangle$$

où  $-s$  désigne le renversement de la direction de l'impulsion ainsi que le changement de signe de la charge et de l'énergie. Il peut ainsi faire apparaître clairement la symétrie de croisement alors que l'unitarité est moins apparente, bien que réalisée. Cette méthode est difficilement généralisable. D'autre part, la méthode de calcul consiste à utiliser systématiquement le biais dont nous nous sommes servis pour estimer  $T_{3/2,1}$ , ce qui est extrêmement sujet à caution comme nous l'avons montré plus haut. Enfin, Rodberg étend ses résultats jusqu'à la région du BeV où ses méthodes sont particulièrement inapplicables (la sensibilité de la solution est très forte au voisinage de la coupure) et où la théorie statique du nucléon semble difficilement justifiable.

N. Fukuda et J. Kovacs ont établi un système complet d'équations intégrales du type de Low en introduisant, outre la matrice de production  $T$  définie par l'équation (53) une matrice, dite  $S$ , définie de façon analogue par

$$S_{p_1 p_2 \dots p_n}(n) = \langle n-1 | \sum_1^S (a_1 \dots V_i^+ \dots a_S) | \rangle$$

Ils obtiennent ainsi un système d'équations intégrales couplées non linéaires en  $T$  et  $S$ , vérifiant les conditions d'unitarité et de croisement. Ces équations ont l'inconvénient de contenir la matrice  $S$  dont le sens physique n'est pas clair mais ont l'avantage d'être maniables dans le cas de l'étude de la production de 2 mésons (elles ne diffèrent d'ailleurs pas sensiblement de nos équations (49) hormis la structure du terme  $C$ ). Cependant, l'une de leurs approximations numériques est sujette à caution. Elle revient en fait à négliger l'intégrale de (72 a) en conservant celle de (72 b). Là encore, la sensibilité de la solution des équations aux termes inhomogènes peut entraîner une erreur sur les sections efficaces de l'ordre de 4 à 10 sur les sections efficaces de production.

Enfin, R. Haag a établi un système complet d'équations de Low dont nous reparlerons plus loin. Ce système n'est pas utilisable dans le cas qui nous intéresse ici car il relie les divers éléments d'une matrice (désignée par  $T$ ) dont la connexion avec la matrice de réaction est obscure dès que le nombre de mésons mis en jeu est supérieur à 1.

### III. APPLICATIONS

#### 1. Estimations des termes à plusieurs mésons dans l'équation de Chew et Low.

On pourrait songer à résoudre les équations (74) pour estimer les termes à deux mésons dans l'équation de Chew et Low (18). En fait un tel projet est irréalisable pour plusieurs raisons :

a) On ne connaît convenablement que le déphasage de l'état 33 et l'on n'est donc capable d'obtenir que les termes à deux mésons correspondants, à l'aide des équations (74). En fait, on peut s'attendre à ce que l'importance des termes à plusieurs mésons soit surtout sensible dans les équations relatives aux petits déphasages, celles précisément où il est totalement impossible de les estimer.

b) Les termes à plusieurs mésons dans l'équation relative à l'état 33 s'exprimeront à l'aide de  $T_{3/2\ 2}$  et  $T_{3/2\ 1}$ . Il est possible, comme nous l'avons fait, d'estimer  $T_{3/2\ 2}$  par résolution d'une seule équation intégrale et ceci pour toutes les valeurs de l'énergie. Par contre, le calcul de  $T_{3/2\ 1}$  exige la résolution d'un système de deux équations intégrales couplées pour chaque couple de valeurs des énergies des mésons intermédiaires.

c) A cause de la difficulté précédente, on pourrait songer à ne retenir dans les équations (74) que le terme inhomogène qui correspond à un calcul de perturbation au premier ordre effectué avec la constante de couplage renormalisée, plus certaines corrections. Malheureusement, la résolution explicite de l'équation pour  $T_{3/2\ 2}$  montre que cette approximation n'a pas de sens.

d) On peut noter, en relation avec la remarque précédente, que la solution de l'équation intégrale sera d'autant plus différente du terme inhomogène que l'énergie sera plus grande. Cependant, à cause des facteurs  $(p_1 \times p_2)^3$ , l'importance de la région des hautes énergies dans les termes à plusieurs mésons de (II. 17) doit être notable.

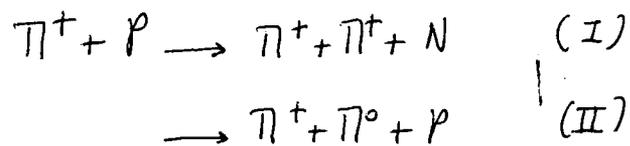
e) Enfin, la question de la valeur de la coupure qu'il faut choisir reste encore ouverte. Doit-on adopter la valeur 5,5 qui, d'après Chew et Low <sup>/11/</sup> rend le mieux compte du comportement de  $\delta_{33}$  aux basses énergies dans l'approximation de portée effective ? Ou doit-on prendre la valeur 4,7 qui, d'après Fubini et Thirring est la seule qui vérifie toutes les conditions restrictives imposables physiquement à la théorie (en particulier, valeur minimale de la self-énergie du nucléon) ? Il est clair que la valeur de Fubini et Thirring doit entraîner une beaucoup plus faible importance des termes à plusieurs mésons que la valeur de Chew et Low.

Ces considérations nous ont parues suffisantes pour ne pas entreprendre l'estimation des termes à plusieurs mésons dans l'équation de Chew et Low.

## 2. Etude d'une réaction spécifique.

Nous étudierons les réactions de production qui peuvent se produire lors de la collision d'un méson  $\pi$  positif et d'un proton, l'énergie du méson étant légèrement supérieure au seuil de production. Nous pouvons escompter que la théorie de Chew et Low est utilisable à ces énergies de l'ordre de 2 à 4, et qu'elle nous donnera au moins un ordre de grandeur des sections efficaces meilleur que celui que peut fournir la méthode Tamm-Dancoff. Ces réactions ont été étudiées de façon générale par B. d'Espagnat <sup>/23/</sup> qui a cherché à déterminer des propriétés des sections efficaces et, en particulier, la forme des sections efficaces différentielles indépendamment de toute approximation. La méthode Tamm-Dancoff a été appliquée au même problème par M. Nelkin <sup>/24/</sup> et également par d'Espagnat. (loc. cit). La comparaison avec les premiers résultats expérimentaux est mauvaise, les sections efficaces totales théorique et expérimentale étant dans un rapport de l'ordre de  $10^{-2}$  (On ne possède à l'heure actuelle aucune précision sur les sections efficaces différentielles).

La réaction considérée présente deux canaux, outre la diffusion simple



Les équations (74) relient les éléments de matrice de production à ceux de diffusion. Dans l'état actuel de connaissance de la diffusion  $\pi$ -nucléon, on peut admettre que seule la fonction  $\mathcal{H}_3$  contribue de façon notable à ces équations,  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  étant pratiquement nulles. En conséquence, nous n'aurons à considérer les réactions (I) et (II) que dans le cas où le spin isotopique total et le moment angulaire total sont égaux à  $3/2$ . Dans la réaction (I) les deux mésons émergents sont dans un état de spin isotopique  $t = 2$ , et d'après la statistique de Bose, leur fonction d'onde doit être symétrique par rapport aux positions des particules. Comme les deux mésons dans l'état P sont pairs, cette fonction d'onde d'espace est également paire. On peut en conclure que leur moment angulaire est pair, d'où  $L = 2$  ( $L = 0$  ne pouvant donner lieu à  $J = 3/2$ ). Par le même raisonnement appliqué à la réaction (II) on montre que les 2 mésons émergents correspondent nécessairement aux deux couplages

$$\begin{cases} t = 1 \\ L = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} t = 2 \\ L = 2 \end{cases}$$

Il suffira donc en fait de calculer  $T_{3/2 \ 2}$  et  $T_{\frac{3}{2} \ 1}$  pour posséder toute information sur les deux réactions.

Nous avons exposé au paragraphe III. 4. la méthode utilisée pour un calcul de  $T_{3/2 \ 2}$  que nous supposons correct et un calcul très approché de  $T_{3/2 \ 1}$ . Nous allons maintenant passer à l'étude des sections efficaces de production correspondantes.

3. Forme de la section efficace différentielle de la réaction  $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^+ N$

Nous allons étudier à présent de façon formelle la section efficace de la réaction de production de deux mésons positifs. Pour cela nous poserons

$$T_{JL}^{++} = C_{11} (22 | 11) C_{2\frac{1}{2}} (\frac{3}{2} \frac{3}{2} | 2 -\frac{1}{2}) \overline{T}_{JL}^{\frac{3}{2} 2} \quad (76)$$

Afin de passer de la description des sections efficaces en termes de moments angulaires à la description en impulsion, définissons

$$y_{JL\frac{1}{2}}^M(\vec{n}, m) = \sum_{\nu\nu'} C_{l\frac{1}{2}}(JM | \nu\nu') Y_{l\nu}^{\nu}(\vec{n}) Y_{\frac{1}{2}}^{\nu'}(m) \quad (77)$$

où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire,  $m = \pm 1/2$  la composante du spin du nucléon sur un axe déterminé, on a d'ailleurs

$$y_{\frac{1}{2}}^{\nu'}(m) = \delta_{\nu'm}$$

Notons la relation d'orthogonalité

$$\sum_m \int d\Omega y_{JL\frac{1}{2}}^{M*}(\vec{n}, m) y_{J'L'\frac{1}{2}}^{M'}(\vec{n}, m) = \delta_{JJ'} \delta_{LL'} \delta_{MM'} \quad (78)$$

dans la suite nous n'aurons affaire qu'à  $l = 1$ , aussi simplifierons-nous l'écriture en posant

$$y_{J1\frac{1}{2}}^M(\vec{n}, m) = y_J^M(\vec{n}, m)$$

De même, définissons

$$\Phi_{l_1 l_2(L)J}^M(\vec{n}_1, \vec{n}_2, m) = \sum_{m_1 m_2 L_3 \nu} C_{L\frac{1}{2}}(JM | L_3 \nu) C_{l_1 l_2(L L_3 | m_1 m_2)} Y_{l_1}^{m_1}(\vec{n}_1) Y_{l_2}^{m_2}(\vec{n}_2) Y_{\nu}^{\frac{1}{2}}(m) \quad (79)$$

avec la relation d'orthogonalité

$$\sum_m \int d\Omega_1 d\Omega_2 \Phi_{l_1 l_2 (L) J}^{m*}(\vec{n}_1, \vec{n}_2, m) \Phi_{l'_1 l'_2 (L') J'}^m = \delta_{l'_1 l_1} \delta_{l'_2 l_2} \delta_{LL'} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (80)$$

nous ne considérerons d'ailleurs que le cas  $l_1 = l_2 = 1$  et poserons

$$\Phi_{11(L)J}^M = \Phi_{JL}^M$$

A l'aide de ces notations nous pouvons définir l'élément de la matrice de réaction relatif à la production de 2 mésons positifs d'énergies  $\omega_1$  et  $\omega_2$  émergents dans les directions  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  à partir d'un méson positif d'énergie  $\omega_q$  venant de la direction  $\vec{n}$ , le spin du nucléon passant de  $m_i$  à  $m_f$ . Il s'écrit

$$T_{\vec{n} m_i(\vec{n}_1, \vec{n}_2, m_f)}^{++} = T_{\frac{3}{2}, 2}^{++}(\omega_1, \omega_2) \sum_M \Phi_{\frac{3}{2}, 2}^M(\vec{n}_1, \vec{n}_2, m_f) Y_{\frac{3}{2}}^{M*}(\vec{n}, m_i) \quad (81)$$

La section différentielle, l'énergie du premier méson étant fixée entre  $\omega_1$  et  $\omega_1 + d\omega_1$  est donnée par

$$d\sigma = \frac{2\pi V}{v_q} \left( \frac{1}{2} \sum_{\substack{m_i \\ m_f}} |T_{\vec{p} m_i(\vec{p}_1, \vec{p}_2, m_f)}^{++}|^2 \right) \rho_{12} V^2 d\Omega_1 d\Omega_2 d\omega_1 \quad (82)$$

où  $\rho_{12}^2$  est la densité d'états finaux,  $v_q = \frac{q}{m_q}$  la vitesse du méson initial. Nous avons abandonné à ce stade la normalisation adoptée dans l'équation (7) et considéré un volume de quantification arbitraire  $V$ , de sorte qu'en tenant compte de (81) et (82) on doit avoir :

$$|T_{\vec{p} m_i(\vec{p}_1, \vec{p}_2, m_f)}^{++}|^2 = \frac{1}{V^3} |T_{\vec{n} m_i(\vec{n}_1, \vec{n}_2, m_f)}^{++}|^2 \frac{\pi^3}{2^3} \frac{(p_1 p_2 q)^2}{\omega_1 \omega_2 \omega_q} [v_{q_1} v_{q_2} v_{q_3}]^2$$

En tenant compte du fait que la masse du nucléon est très grande, on peut restreindre la conservation de l'impulsion au seul nucléon <sup>/39/</sup> et écrire

$$p_{12} \sim p_1 p_2 \omega_1 \omega_2 \quad (83)$$

soit,

$$d\sigma \sim \sum_{m_i, m_f} \left| T_{\vec{n}_i, m_i(\vec{n}_i, \vec{n}_2, m_f)}^{++} \right|^2 d\Omega_1 d\Omega_2 \quad (84)$$

il vient (à l'aide des formules de l'appendice II)

$$d\sigma \sim \left| T_{\frac{3}{2}, 2}^{++} \right|^2 \left| 3 \vec{n}_2 (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}) + 3 \vec{n}_1 (\vec{n}_2 \cdot \vec{n}) - 2 \vec{n} (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) \right|^2 d\Omega_1 d\Omega_2 \quad (85)$$

Nous avons utilisé cette méthode de calcul parce qu'elle permet d'effectuer simplement les sommations sur les spins et donne les résultats sous la forme simple que fournirait un calcul de perturbation au 1er ordre.

La distribution angulaire donnée par (85) est proportionnelle à

$$\left| \vec{n}_2 (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}) + \vec{n}_1 (\vec{n}_2 \cdot \vec{n}) - \vec{n} (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) \right|^2 \quad (86)$$

Ce résultat a été obtenu précédemment par B. d'Espagnat<sup>/23/</sup> qui montrait à l'aide d'une analogie avec les réactions nucléaires que seul l'élément  $T_{\frac{3}{2}, 2}^{3/2, 2}$  doit apparaître dans la réaction sur les déphasages autres que  ${}_{33}$  sont négligeables. Cependant, en théorie du nucléon statique, le système du centre de masse et celui du laboratoire coïncident par suite de la masse infinie du nucléon et pour une énergie déterminée, cette distribution angulaire n'est pas définie dans un système bien précis. Pour comparer la théorie avec l'expérience, on pourrait donc établir la distribution donnée par (86) dans le système du laboratoire et passer au système du c. d. m. La distribution angulaire observée, devrait en principe, se situer entre les deux courbes ainsi obtenues. En fait, il est peu vraisemblable que la précision expérimentale que l'on peut espérer sur la réaction étudiée exige de tels raffinements et nous considérerons que la distribution (86) est valable dans le système du c. d. m. La distribution angulaire jouit d'un certain nombre de propriétés intéressantes (\*) :

---

(\*) B. d'Espagnat (loc. cit.)

a) Elle admet un centre de symétrie (changer  $\vec{n}_1$  en  $-\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$  en  $-\vec{n}_2$ ) et est donc aussi symétrique par rapport au plan perpendiculaire à la direction du méson incident. On peut s'attendre à ce que cette propriété soit valable dans le système du c.d.m.

b) La distribution d'un méson émergent, celle de l'autre étant fixée, possède également la propriété a) (changer  $\vec{n}_1$  en  $-\vec{n}_1$ )

c) Les mésons ont une tendance à être émis dans une direction colinéaire à celle du méson incident ( $+\vec{n}_1 = +\vec{n}_2 = \vec{n}$ ). On peut en effet montrer, par un calcul simple d'analyse vectorielle, que la distribution est maxima dans ce cas.

En désignant par  $\theta_1$  et  $\theta_2$  les angles de  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  avec  $\vec{n}$ , on détermine aisément la probabilité relative pour que  $\theta_1$  soit compris entre  $\theta_1$  et  $\theta_1 + d\theta_1$ ,  $\theta_2$  entre  $\theta_2$  et  $\theta_2 + d\theta_2$ . Elle est égale à

$$P_r(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \left[ 1 + \frac{7}{2} (\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2) \right] \sin \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 \quad (87)$$

et la distribution angulaire d'un méson, compte non tenu de celle du second, sera

$$P_r(\theta) d\theta = (13 + 21 \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \quad (88)$$

Notons que ces distributions peuvent être modifiées par un certain nombre de facteurs

a) Nous n'avons tenu compte que du moment angulaire  $J = 3/2$ . Cette approximation ne doit pas donner lieu à des difficultés car on voit aisément sur l'équation intégrale (74) que les éléments de matrice correspondant à  $J = 1/2$  doivent être très petits, le petit déphasage ne pouvant contribuer aux intégrales que là où les facteurs de forme sont déjà petits.

b) A ces énergies l'émission d'un méson  $\pi$  dans un état S peut être notable et modifierait la distribution. En principe il serait possible de traiter cette émission par les méthodes que nous avons utilisées pour la production dans l'état P en utilisant la théorie de Drell Friedman et Zachariensen<sup>/40/</sup>. La production dans un état D, par contre, doit être totalement négligeable.

La production dans l'état S se traduirait surtout par la présence de termes linéaires en  $\omega_1 \theta_1$  et  $\omega_2 \theta_2$  dans  $\text{Pr}(\theta_1 \theta_2)$  ou en dans  $\text{Pr}(\theta)$  (termes d'interférence P-S)

c) Enfin, rappelons que la théorie du nucléon statique ne donne pas de résultats dans un système de référence bien défini. Sous ce rapport le meilleur test devrait être la vérification des relations de symétrie signalées plus haut.

#### 4. Etude des sections efficaces totales.

Section efficace totale de la réaction  $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^+ N$

Nous ferons le calcul en représentation du moment angulaire de telle sorte que

$$\sigma = \frac{2\pi V}{v_q} \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \frac{1}{6} \sum_m \sum_{m_1, m_2, \beta} |\overline{T}_{q\alpha(p_1, p_2, \beta)}^{++}|^2 \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_q) \quad (89)$$

La sommation sur les composantes de moment angulaire donne

$$\frac{2\pi V}{v_q} \frac{2J+1}{6} |\overline{T}_q(p_1, p_2)^{++}|^2 \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_q) \quad (90)$$

en passant à un volume de quantification unique et tenant compte de (6) et ceci donne

$$\frac{2\pi V}{v_q} \frac{2J+1}{6} \frac{\pi^3(p_1, p_2, q)^2}{V^3(8\omega_1 \omega_2 \omega_q)} (v(p_1) v(p_2) v(q))^2 |\overline{T}^{++}|^2 \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_q) \quad (91)$$

La densité d'états finaux est donnée par

$$\frac{4V^2}{\pi^2} p_1^2 p_2^2 dp_1 dp_2 = \frac{4V^2}{\pi^2} p_1 p_2 \omega_1 \omega_2 d\omega_1 d\omega_2 \quad (92)$$

soit, finalement, en tenant compte de  $\omega_q = q / \omega_q$ , une section efficace totale

$$\sigma = \frac{(2J+1)}{6} \left[ C_{2\frac{1}{2}} \left( \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \middle| 2, -\frac{1}{2} \right) \right]^2 \pi^2 q v^2(q) \int_1^{\omega_q-1} p_1^2 p_2^3 |\overline{T}|^2 d\omega_1 [v(p_1) v(p_2)]^2 \quad (93)$$

où  $\bar{T}$  est maintenant la solution de l'équation (74).

Nous donnons dans la table 1 et le graphique 2 de l'appendice III les valeurs de cette section efficace, la coupure étant fixée à 5.5 soit

$$v(p) = \frac{(5.5)^2}{(5.5)^2 + p^2}$$

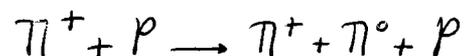
La dépendance en fonction de la coupure choisie est faible pour des énergies allant de 2 à 3.5. Cependant, elle devient importante pour des énergies supérieures, ce qui pourrait éventuellement permettre une précision expérimentale sur la coupure.

On notera que les sections efficaces obtenues ici sont sensiblement supérieures à celles que donnent des méthodes s'appuyant, explicitement ou non, sur une méthode d'itération, pour les raisons que nous avons signalées plus haut. Les premiers résultats expérimentaux semblent indiquer que l'on doit effectivement s'attendre à une production importante.

Nous avons estimé les erreurs commises comme inférieures à 50% et très certainement de l'ordre de 20%.

#### Section efficace totale de production.

En utilisant le calcul grossier dont nous avons donné le principe plus haut, on peut également estimer la section efficace de la réaction



Le résultat est donné par le graphique 3 mais il n'y a pas d'illusions à se faire sur sa validité.

Effet de la résonance dans l'état final.

Nous avons systématiquement négligé les termes croisés dans le calcul et montré que le résultat ne pouvait en être affecté. En fait, lorsque l'énergie de l'un des mésons produits est voisine de celle de la résonance dans l'état  $3/2$ ,  $3/2$ , ces termes peuvent avoir une influence dans l'analyse de la section efficace de production en fonction de l'énergie de l'un des mésons sortants, pour une énergie totale déterminée. L'effet est faible et ne peut affecter la section efficace totale, cependant, il peut, dans une telle analyse, donner lieu à des modifications vraisemblablement en dehors des possibilités actuelles de l'expérience (voir la forme du graphique 4)

DEUXIEME PARTIE

\*

\*

\*

SYSTEME COMPLET D'EQUATIONS RELATIVISTES DU TYPE DE LOW

## 1. Introduction.

Dans cette seconde partie, nous nous proposons d'établir un système complet d'équations intégrales non linéaires du type de Low pour les processus de diffusion et de collision, problème que nous avons rencontré dans la première partie sans lui donner de solution complètement satisfaisante. Le résultat obtenu dépasse nettement le cadre de l'approximation non relativiste avec source étendue où nous nous étions jusqu'ici limités puisque les équations obtenues seront relativistes et indépendantes d'un modèle particulier.

Pour nous affranchir du modèle, nous avons adopté la théorie des champs développée par N. N. Bogolioubov<sup>/27/, /41/</sup>, qui a déjà permis une démonstration rigoureuse et brillante des relations de dispersion<sup>/27/</sup>.

Dans le premier paragraphe, nous donnons les éléments de cette théorie nécessaire à notre démonstration et, en particulier, la condition de causalité que nous justifions pour une classe étendue de modèles. Au paragraphe 2, nous montrons comment l'équation de Low peut être établie par ces méthodes, ce qui met en évidence son caractère général d'ailleurs connu depuis le travail de Lehmann, Symanzick et Zimmermann<sup>/26/, /42/</sup>, et nous permet de lever un point délicat de la démonstration habituellement négligé. Enfin, dans le paragraphe 3, nous généralisons le résultat à la transition d'un état à un nucléon et un nombre quelconque de mésons à un état de même type, ce qui permet, en principe une nouvelle méthode d'étude du processus de production.

## 2. Eléments de la théorie de Bogolioubov.

La théorie des champs édiflée par N. N. Bogolioubov et ses collaborateurs est une théorie de la matrice  $S$ . Elle repose donc sur un nombre minima de postulats que l'on suppose vérifiés par toute théorie ayant un sens physique et, en particulier, la condition de causalité en est un principe fondamental. Nous donnerons successivement les propriétés générales et les postulats particuliers de cette théorie.

### 1. Propriétés générales.

1. On admet l'existence d'états asymptotiques sans interaction mutuelle. Cependant, pour éviter les difficultés dues à la formation possible d'états liés et à la renormalisation, les états seront répartis en plusieurs classes.

- a) les états correspondants à une particule élémentaire (par exemple, méson, nucléon) l'ensemble des vecteurs d'états qui leur correspondent sous-tendant un espace vectoriel  $R_1$ .
- b) les états liés de deux particules élémentaires qui sont stables et présentent un certain degré de localisabilité (cf. Haag <sup>/44/</sup>) sous-tendant un espace vectoriel  $R_2$ . De même les états liés de trois particules élémentaires correspondant à un espace  $R_3$ , etc.
- c) les états asymptotiques correspondants à un certain nombre de particules élémentaires complexes, incidentes ou émergentes et qui appartient à l'un des produits tensoriels de  $R_1, R_2, R_3, \dots$  chacun de ces espaces pouvant figurer plusieurs fois.

Ce traitement des états liés permet d'appliquer sans complication la méthode adiabatique, l'interaction entre les états asymptotiques étant nulle et les masses de particules introduites étant les masses physiquement observables.

2. Sous l'action des éléments d'un certain groupe  $G$ , les vecteurs d'états se transforment selon une représentation unitaire de  $G$  dont les éléments seront représentés par  $\mathcal{U}$ . Ce groupe comprend comme sous-groupe le groupe de Lorentz et, par exemple, les transformations de jauge généralisées et le groupe isobarique.

3. Si, un état  $|p\rangle$  est vecteur propre de l'impulsion-énergie, la translation  $x \rightarrow x+a$  sera représentée par  $\mathcal{U}_a$  agissant sur  $|p\rangle$  selon

$$\mathcal{U}_a |p\rangle = e^{-ipa} |p\rangle \quad (1)$$

et il existe un état du vide  $|0\rangle$  tel que

$$\mathcal{U}_a |0\rangle = |0\rangle \quad (2)$$

des propriétés analogues peuvent être données pour d'autres sous-groupes de  $G$ , par exemple pour les représentations liées au moment angulaire.

4. Il existe un système complet d'états propres de l'impulsion-énergie, correspondant à des valeurs positives de l'énergie, de telle sorte que

$$\langle \alpha | AB | \beta \rangle = \langle \alpha | A | 0 \rangle \langle 0 | B | \beta \rangle + \frac{1}{(2\pi)^{3n}} \sum_{\mathbf{k}} \langle \alpha | A | n\mathbf{k} \rangle \langle n\mathbf{k} | B | \beta \rangle \quad (3)$$

où  $n$  désigne l'ensemble de tous les nombres quantiques qui, avec  $\mathbf{k}$ , caractérisent complètement l'état.

5. A toute transition entre deux états  $\alpha$  et  $\beta$  correspond une amplitude de probabilité qui peut être exprimée à l'aide d'une matrice unitaire  $S$

$$S S^\dagger = 1 \quad (4)$$

6. Comme l'on considère que les états à une particule (élémentaire ou complexe) représentent les particules réelles, ils doivent être stables ainsi que le vide. Autrement dit

$$S |\alpha\rangle = |\alpha\rangle \quad (5)$$

$|\alpha\rangle$  désignant le vide ou un état à une particule.

Ces propriétés entraînent un certain nombre de conséquences :

On peut définir un état comprenant un nombre déterminé de particules de type  $\alpha_i$  et de moments  $\bar{p}_i$  en introduisant des opérateurs création et annihilation  $A_{\alpha_i}^+(\bar{p}_i)$  et les faisant agir sur le vide de telle sorte que

$$|\alpha_1 \bar{p}_1 \dots \alpha_n \bar{p}_n\rangle = A_{\alpha_1}^{(+)}(\bar{p}_1) \dots A_{\alpha_n}^{(+)}(\bar{p}_n) |0\rangle \quad (6)$$

et, puisque ces particules n'interagissent pas, les opérateurs  $A$  vérifient les lois de commutation usuelles.

$$\begin{aligned} [A_{\alpha}^{(+)}(\bar{p}), A_{\alpha'}^{(+)}(\bar{p}')] &= [A_{\alpha}^{(-)}(\bar{p}), A_{\alpha'}^{(-)}(\bar{p}')] = 0 \\ [A_{\alpha}^{(-)}(\bar{p}), A_{\alpha'}^{(+)}(\bar{p}')] &= \delta_{\alpha\alpha'} \delta(\bar{p} - \bar{p}') \end{aligned} \quad (7)$$

Dans le cas des particules élémentaires, on pourra introduire des opérateurs localisés dans l'espace-temps en posant, comme à l'ordinaire

$$\phi_p(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\bar{k}}{\sqrt{2k^0}} \left\{ e^{ikx} A_p^{(+)}(\bar{k}) + e^{-ikx} A_p^{(-)}(\bar{k}) \right\} \quad (8)$$

$$k^0 = (k^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

(où nous nous restreignons au cas des bosons pour plus de clarté)

il est important de noter que ces opérateurs vérifient l'équation de Klein-Gordon pour des champs libres

$$(\square - m^2) \phi(x) = 0 \quad (10)$$

La matrice  $S$  peut toujours être écrite comme une série de produits d'opérateurs création et annihilation, soit

$$S = \sum_{l,m=0}^{\infty} \int d\bar{k}_1 \dots d\bar{k}_l d\bar{k}'_1 \dots d\bar{k}'_m f^{l,m}(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}'_m) A_{(\bar{k}_1)}^{(-)} \dots A_{(\bar{k}_l)}^{(-)} A_{(\bar{k}'_1)}^{(+)} \dots A_{(\bar{k}'_m)}^{(+)} \quad (11)$$

ce qui, à l'aide de (8) permet de mettre la restriction de la matrice  $S$  aux produits tensoriels de  $R_0$  et  $R_1$ , mis sous forme d'une série de produits normaux d'opérateurs  $\phi$  de la forme (\*)

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \int dx_1 \dots dx_n F_{(x_1 \dots x_n)}^{(n)} : \phi(x_1) \dots \phi(x_n) : \quad (12)$$

Sur cette forme de  $S$ , la dérivée fonctionnelle de  $S$  par rapport à  $\phi(x)$   $\delta S / \delta \phi(x)$  peut être définie simplement par la règle suivante : supprimer de l'expression de  $S$  un opérateur  $\phi(x_i)$  de toutes les façons possibles et le remplacer par  $\delta(x-x_i)$ . Cette dérivation fonctionnelle va permettre de donner aux divers éléments de matrice de  $S$  une forme intéressante pour la suite.

Notons que, de (7) et (8) résultent les relations de commutation entre  $A$  et  $\phi$

$$[A_p^{(+)}(\bar{p}), \phi_{p'}(x)] = \frac{\delta_{pp'}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2p^0}} \quad (13a)$$

$$[A_p^{(-)}(\bar{p}), \phi_{p'}(x)] = \frac{\delta_{pp'}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{ipx'}}{\sqrt{2p^0}} \quad (13b)$$

---

(\*) N.B. - En fait, il n'est pas possible de définir les opérateurs  $A$  en fonction des  $\phi(x)$  en résolvant directement (8) à cause de (10) et, par suite, le passage de (11) à (12) ne peut être aussi direct. Cette difficulté ne se présente pas dans la méthode plus élaborée donnée par Bogolioubov et Shirkov<sup>/41/</sup> et peut être levée rigoureusement.

d'où se déduisent immédiatement les relations de commutation d'un opérateur A avec S (\*)

$$[A_p^{(+)}(\bar{p}), S] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dx \frac{\delta S}{\delta \phi_p(x)} \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2p^0}} \quad (14a)$$

$$[A_p^{(-)}(\bar{p}), S] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dx \frac{\delta S}{\delta \phi_p(x)} \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2p^0}} \quad (14b)$$

Considérons alors un élément de matrice de S

$$S_{\omega'\omega} = \langle \alpha'_1 \bar{p}'_1 \dots \alpha'_r \bar{p}'_r | S | \alpha_1 \bar{p}_1 \dots \alpha_s \bar{p}_s \rangle$$

d'après (6), il peut s'écrire

$$\langle 0 | A_{\alpha'_1}^{(-)}(\bar{p}'_1) \dots A_{\alpha'_r}^{(-)}(\bar{p}'_r) S A_{\alpha_1}^{(+)}(\bar{p}_1) \dots A_{\alpha_s}^{(+)}(\bar{p}_s) | 0 \rangle$$

On peut amener les opérateurs création à gauche et les opérateurs destruction à droite en utilisant les règles de commutation (14) (nous supposons qu'il n'y a pas deux particules identiques dans l'état initial et l'état final, ce qui donnerait naissance à des termes analogues mais de moindre degré), ce qui donne

$$S_{\omega'\omega} = \frac{(-1)^S}{(2\pi)^{3\frac{r+s}{2}}} \int dx'_1 \dots dx'_r dx_1 \dots dx_s \frac{e^{i(\sum_{k=1}^r p'_k x'_k - \sum_{l=1}^s p_l x_l)}}{2^{\frac{r+s}{2}} \sqrt{p'_1{}^0 \dots p'_r{}^0 p_1{}^0 \dots p_s{}^0}} \times \langle 0 | \frac{\delta^{r+s} S}{\delta \phi_{\alpha'_1}(x'_1) \dots \delta \phi_{\alpha'_r}(x'_r) \delta \phi_{\alpha_1}(x_1) \dots \delta \phi_{\alpha_s}(x_s)} | 0 \rangle \quad (15)$$

(\*) N. B. - Il s'agit bien là de relations de commutation de S et non de la restriction de S aux puissances tensorielles de  $R_1$  comme on s'en convainc par un raisonnement du type de celui par lequel nous justifions la condition de causalité (cf. plus bas)

où l'on a tenu compte de la relation

$$\langle 0 | \delta^n S / \delta \phi^n | 0 \rangle = \langle 0 | \delta^n S^+ / \delta \phi^n S^+ | 0 \rangle$$

qui résulte de la stabilité du vide.

Bogolioubov et Shirkov ont appelé "opérateurs radiation" les opérateurs qui figurent dans (15). On peut donc énoncer le théorème : Tout élément de matrice de  $S$  peut être exprimé à l'aide de la valeur moyenne dans le vide d'un opérateur radiation.

## 2. Propriétés locales.

1. Les particules élémentaires sont caractérisées par des champs locaux de fermions ou de bosons avec les propriétés de transformations habituelles des champs libres. L'opérateur  $S$  possède des dérivées variationnelles de tout ordre par rapport à ces champs. Les opérateurs radiations et leurs produits avec des arguments indépendants appartiennent à une puissance tensorielle d'un espace  $D(q, r)$  des distributions construites sur l'espace  $E(q, r)$  des fonctions  $f$  qui vérifient

$$\| |x|^s f^{(p)}(x) \| < \infty \quad -\infty \leq x \leq \infty \quad (16)$$

$$s = 0, 1 \dots r$$

$$p = 0, 1 \dots q$$

2. On a la condition de causalité microscopique sous la forme

$$\frac{\delta}{\delta \phi(x)} \left[ \frac{\delta S}{\delta \phi(y)} S^+ \right] = 0 \quad \text{pour } x \not\sim y \quad (17)$$

où la notation signifie, soit que  $x$  est strictement antérieur à  $y$ , soit que le quadrivecteur  $x - y$  est du genre espace, la coïncidence  $x = y$  étant exclue.

Définissons un opérateur de courant  $j(x)$  (à ne pas confondre avec l'opérateur courant habituel  $(\square - m^2)\phi(x)$  où  $\phi(x)$  est un opérateur de Heisenberg) à l'aide de

$$j(x) = i \frac{\delta S}{\delta \phi_p(x)} S^\dagger \quad (18)$$

- Noter que l'unitarité de  $S$  entraîne l'hermiticité de  $j(x)$  - A l'aide de cet opérateur la condition (17) prend la forme

$$\frac{\delta}{\delta \phi_p(x)} j_{p'}(y) = 0 \quad \text{pour } x \lesssim y \quad (19)$$

On montre aisément d'après (17) que  $j(x)$  vérifie une relation de causalité du type habituel, autrement dit que

$$[j(x), j(y)] = 0 \quad \text{pour } x \sim y \quad \text{i.e. } (x-y)^2 < 0 \quad (20)$$

Pour cela il suffit de considérer l'opérateur radiation de second ordre

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 S}{\delta \phi_p(x) \delta \phi_{p'}(y)} S^\dagger &= -j_p(y) j_{p'}(x) - i \frac{\delta j_{p'}(x)}{\delta \phi_p(x)} = -j_p(y) j_{p'}(x) \quad \text{si } x \sim y \\ &= -j_{p'}(x) j_p(y) - i \frac{\delta j_{p'}(y)}{\delta \phi_p(x)} = -j_{p'}(x) j_p(y) \quad \text{si } x \sim y \end{aligned}$$

d'où résulte immédiatement (20).

On voit que la différence avec la condition de causalité communément admise réside en deux points :

- 1) l'opérateur courant n'a pas la même définition,
- 2) la condition (19) est plus restrictive que (20).

L'importance de cette condition qui constitue la clé de voute de la théorie mérite une étude plus attentive. Nous allons donc montrer qu'elle est vérifiée lorsque existe un hamiltonien total ayant un sens physique (nous précisons au cours de la démonstration ce qu'il faut entendre par un tel opérateur) et, en particulier, pour la théorie des champs habituelle sans états liés.

Considérons donc un hamiltonien  $H$ . Introduisons les espaces  $R_0$  ou  $R_1, R_2$ , etc., définis plus haut, et plaçons-nous dans une représentation des opérateurs création et annihilation admettant un état à zéro particule. On sait qu'une telle représentation existe et est unique à une transformation unitaire près. Wightman et Schweber ont montré que si l'on prend une telle représentation pour les champs libres non renormalisés, il est en général impossible de faire de même pour les états en interaction; cette difficulté ne se présentera pas ici car nous resterons toujours dans la même représentation. On peut alors définir un opérateur nombre de particules

$$N_{\alpha_i}(\bar{k}) = A_{\alpha_i}^{(+)}(\bar{k}) A_{\alpha_i(+\bar{k})}^{(-)} \quad (21)$$

Nous supposons la connection habituelle entre spin et statistique, autrement dit les opérateurs de création et d'annihilation correspondants à des particules de types différents commuteront ou anticommeront selon leur spin. On peut alors introduire simplement un opérateur  $H_0$  dont les valeurs propres sont les énergies des états asymptotiques, à l'aide de

$$H_0 = \sum_{\alpha_i} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\bar{k} N_{\alpha_i}(\bar{k}) \quad (22)$$

Cet opérateur jouera le rôle de l'hamiltonien de champ libre habituel, en notant cependant qu'il comprend déjà les self-énergies et les énergies de liaison des particules complexes, ce qui permet d'appliquer sans précautions particulières la méthode d'élimination adiabatique et l'interaction. L'hamiltonien d'interaction  $H_I$  est alors défini par

$$H_I = H - H_0 \quad (23)$$

A l'aide de ces opérateurs, un calcul classique montre que la matrice  $S$  peut être mise sous la forme

$$S = P e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} H_I(t) dt} \quad (24)$$

où

$$H_I(t) = e^{-iH_0 t} H_I e^{iH_0 t} \quad (25)$$

D'après la complétude des espaces  $R_0, R_1, R_2$ , et la représentation choisie pour les  $A$ , nous admettrons que tout opérateur ayant un sens physique peut être mis sous la forme

$$\sum_{l,m} f_{\alpha_1 \dots \alpha_l \alpha'_1 \dots \alpha'_m} (\xi_1 \dots \xi_r; \bar{k}_1 \dots \bar{k}_l \bar{k}'_1 \dots \bar{k}'_m) A_{\alpha_1(k_1)}^{(+)} \dots A_{\alpha_m(\bar{k}_m)}^{(+)} A_{\alpha'_1(k'_1)}^{(-)} \dots A_{\alpha'_m(\bar{k}'_m)}^{(-)} \quad (26)$$

où les  $\alpha$  figurent des variables supplémentaires dont l'opérateur peut dépendre ou sur lesquelles la sommation porte également. Cette définition d'un opérateur physique nous semble nécessaire dans le formalisme adopté et elle pourrait conduire éventuellement à de nouvelles considérations sur la théorie de la mesure.

Nous supposons par hypothèse que  $H$  est un tel opérateur; par définition il en est de même de  $H_0$  et donc de  $H_1$ . Dans l'expression du type (26) pour  $H_1$  nous séparerons les opérateurs correspondants à des particules élémentaires et complexes en deux groupes distincts en écrivant

$$H_I = H_I^0 + \sum_{\alpha} f_{\alpha} O_{\alpha} T_{\alpha} \quad (27)$$

où  $H_I^0$  figure la partie de  $H_1$  qui ne contient que des opérateurs de particules élémentaires (restrictions de  $H_1$  aux puissances tensorielles de  $R_1$ ). Chacun des autres termes étant scindé en trois facteurs.  $O_{\alpha}$  qui ne contient que les opérateurs de particules complexes,  $T_{\alpha}$  que des opérateurs de particules élémentaires et la fonction élément de matrice  $f_{\alpha}$ .  $\alpha$  représente tous les nombres quantiques nécessaires à une définition complète du terme correspondant. En utilisant la commutabilité des opérateurs nombre de particules avec les opérateurs création et annihilation dans les espaces orthogonaux, on peut mettre  $H_1(t)$  sous forme d'une somme de produits locaux d'opérateurs locaux correspondants à un même temps  $t$ , soit

$$H_I^0(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \int h(x_1 \dots x_m; \xi) : \phi(x_1, t) \dots \phi(x_m, t) : dx_1 \dots dx_m \quad (28)$$

De même, le second terme de (27) donnera une contribution à  $H_1(t)$

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha} O_{\alpha}(t) T_{\alpha}(t) \quad (29)$$

où  $T_{\alpha}(t)$  a une forme analogue à  $H_1^0(t)$ . Ici encore nous n'avons écrit que des opérateurs  $\emptyset$  et non  $\psi$  pour alléger l'écriture.

Considérons maintenant deux points de l'espace-temps  $x, y$  tels que

$$y \prec x$$

On peut toujours trouver un système de référence de référence où  $t_y < t_x$   
 Dans un tel système on peut trouver un temps  $t_0$  tel que

$$t_y < t_0 < t_x$$

ce qui permet de mettre  $S$  sous la forme

$$S = S_1 S_2 \quad (30)$$

où

$$S_1 = P e^{-i \int_{t_0}^{\infty} H_I(t) dt} \quad S_2 = P e^{-i \int_{-\infty}^{t_0} H_I(t) dt} \quad (31)$$

$S_1$  et  $S_2$  sont des opérateurs unitaires et en particulier

$$S_2 S_2^{\dagger} = 1 \quad (32)$$

D'après (28) (29) et (31) l'opérateur  $\emptyset(x)$  ne pourra figurer dans  $S$  que par l'intermédiaire de  $S_1$  et l'on aura

$$\frac{\delta S}{\delta \phi(x)} = \frac{\delta S_1}{\delta \phi(x)} S_2 \quad (33)$$

d'où, d'après (30) et (32)

$$\frac{\delta S}{\delta \phi(x)} S^{\dagger} = \frac{\delta S_1}{\delta \phi(x)} S_2 S_2^{\dagger} S_1^{\dagger} = \frac{\delta S_1}{\delta \phi(x)} S_1^{\dagger}$$

d'où résulte immédiatement

$$\frac{\delta}{\delta\phi(y)} \left[ \frac{\delta S}{\delta\phi(x)} S^\dagger \right] = 0 \quad (17')$$

C. Q. F. D.

On voit que (17) n'est pas la seule forme possible de la condition de causalité et qu'en particulier on aurait pu l'écrire

$$\frac{\delta}{\delta\phi(y)} \left[ S^\dagger \frac{\delta S}{\delta\phi(x)} \right] = 0 \quad \text{pour } y \succ x \quad (34)$$

Dans le cas d'un hamiltonien local habituel ou l'interaction ne conduit pas à des états liés, on peut faire exactement le même raisonnement sans les difficultés qui leur sont dues.

On peut dans ce cas prendre pour  $0(x)$  les opérateurs de la représentation d'interaction qui vérifient les bonnes règles de commutation.

Cette démonstration semble recouvrir un ensemble assez vaste de cas. Cependant, avec Bogolioubov nous considérons la condition de causalité (17) comme un postulat supplémentaire de la théorie.

Ces postulats ont permis à Bogolioubov, Medvedev et Polivanov de démontrer rigoureusement les relations de dispersion <sup>/27/</sup>. Nous nous proposons dans ce qui suit d'établir à l'aide des mêmes méthodes l'équation de Low pour la diffusion méson-nucléon et de la généraliser aux processus de production. Le résultat obtenu sera évidemment indépendant d'un modèle particulier d'interaction et automatiquement relativiste.

### 3, Etablissement de l'équation de Low.

Nous dériverons d'abord l'équation de Low proprement dite<sup>/25/</sup>.  
 Considérons pour cela l'élément de matrice de  $S$  entre un état initial  $\alpha$   
 constitué d'un nucléon et d'un méson d'impulsions respectives  $p, q$ , et un  
 état final analogue  $\omega, p', q'$ . L'équation (15), donne dans ce cas

$$S(\alpha p q, \omega p' q') = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int dx dy \frac{e^{iq'x - iqy}}{\sqrt{4q^0 q'^0}} \langle p' | \frac{\delta^2 S}{\delta \phi_{p'(x)} \delta \phi_{p(y)}} S^\dagger | \alpha \rangle \quad (35)$$

or

$$\frac{\delta^2 S}{\delta \phi_{p(x)} \delta \phi_{p'(y)}} S^\dagger = \frac{\delta}{\delta \phi_{p'(x)}} \left( \frac{\delta S}{\delta \phi_{p(x)}} S^\dagger \right) - \frac{\delta S}{\delta \phi_{p'(y)}} \frac{\delta S}{\delta \phi_{p(x)}}$$

pour  $x \leq y$ , ceci devient

$$- \frac{\delta S}{\delta \phi_{p'(y)}} \frac{\delta S^\dagger}{\delta \phi_{p(x)}} = -j_p(y) j_{p'(x)}$$

et, plus généralement

$$- P [j_{p'}(x), j_p(y)] \quad (36)$$

où  $P$  désigne l'opérateur d'ordonnement dans le temps de Wick. Notons que  
 cette équation étant valable quand  $x-y$  est du genre espace, il en résulte à  
 nouveau

$$[j(x), j(y)] = 0 \quad (x-y)^2 < 0$$

(La dernière inégalité étant entendue au sens strict)

et la seule ambiguïté qui puisse apparaître dans (36) sera pour  $x = y$ .

On peut développer le produit ordonné sous la forme

$$\theta(x-y) j_{p'}(x) j_p(y) + \theta(y-x) j_p(y) j_{p'}(x) \quad (37)$$

où la fonction  $\theta(x)$  est définie par

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (38)$$

En portant cette expression dans l'équation (35), on pourra utiliser la formule (3) et poser

$$\begin{aligned} \langle p | j_{p'}(x) j_p(y) | 0 \rangle &= \langle p' | j_{p'}(x) | 0 \rangle \langle 0 | j_p(y) | 0 \rangle \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_n \int d^3k \langle p' | j_{p'}(x) | n, \bar{k} \rangle \langle n, \bar{k} | j_p(y) | p \rangle \end{aligned} \quad (39)$$

Notons que ne doivent apparaître parmi ces états intermédiaires que des états contenant un baryon (charge nucléonique 1). Cela se voit simplement par la relation entre  $j$  et  $S$  d'une part, en supposant d'autre part que dans le groupe  $G$  sont incluses les transformations de phase liées à la conservation de la charge nucléonique. En particulier, le premier terme de la somme figurant dans (39) est nul, et, si l'on suppose qu'il n'existe pas d'états liés du nucléon et du méson de masse inférieure à celle du nucléon, les premiers états intermédiaires qui contribueront à cette somme seront les états à un nucléon.

Tenant compte de l'invariance par translation, on peut poser, si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des états propres de l'impulsion énergie

$$\langle \alpha | j(x) | \beta \rangle = e^{i(p_\alpha - p_\beta)x} \langle \alpha | j(0) | \beta \rangle \quad (40)$$

On peut alors grouper (35) (36) (37) (39) et (40) pour obtenir, après avoir effectué les intégrations (\*)

$$S(\alpha p q; \omega p' q') = \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^3} \frac{\delta(p' + q' - p - q)}{\sqrt{4q^0 q'^0}} \sum_n \left[ \frac{\langle p' | j_p(\omega) | n\bar{k} \rangle \langle n\bar{k} | j_p(\omega) | p \rangle}{E - E_n + i\varepsilon} \right]_{\substack{\bar{k} \\ \bar{p} + \bar{q}}} + \frac{\langle p' | j_p(\omega) | n\bar{k} \rangle \langle n\bar{k} | j_p(\omega) | p \rangle}{-E + p^0 - p'^0 - E_n + i\varepsilon} \Big|_{\bar{k} = \bar{p} - \bar{q}} \quad (41)$$

où E désigne l'énergie du système.

Il nous reste maintenant à relier les éléments de matrice  $\langle p | j(\omega) | n\bar{k} \rangle$  à la matrice S lorsque nk et p sont sur la couche d'énergie. Pour cela, considérons

$$S(\alpha p q; nk) = \langle n\bar{k} | S | \alpha p q \rangle = \langle n\bar{k} | S A_p^{(+)}(\bar{q}) | p \rangle \quad (42)$$

où

$$S A_p^{(+)}(\bar{q}) = [S, A_p^{(+)}(\bar{q})] + A_p^{(+)}(\bar{q}) S \quad (43)$$

En agissant sur  $| p \rangle$  le second terme de (43) donne

$$A_p^{(+)}(\bar{q}) S | p \rangle = A_p^{(+)}(\bar{q}) | p \rangle = | \alpha p q \rangle$$

où la première égalité résulte de la stabilité de l'état p.

D'après (42), on aura donc

$$S(\alpha p q; nk) = \delta_{n\bar{k}, p q \alpha} - \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{dx}{\sqrt{2q^0}} e^{-iqx} \langle n | \frac{\delta S}{\delta \phi_p(x)} S^+ | p \rangle \quad (44)$$

---

(\*) Noter que, dans le produit ordonné (36), les équations sont mal définies pour  $x = y$  (il n'y a pas de difficultés pour  $(x-y)^2 < 0$  à cause de la commutabilité des opérateurs courants). Nous donnons plus loin la solution de cette difficulté.

où nous avons utilisé la relation  $|p\rangle = S^\dagger |p\rangle$  qui résulte de l'unitarité de  $S$  et de la stabilité de  $p$ . Ceci peut encore s'écrire

$$\delta_{m\bar{k}, p q \omega} + \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{dx}{\sqrt{2q^0}} e^{-iqx} \langle m\bar{k} | j_p^j(\omega) | p \rangle \quad (45)$$

et si nous définissons la matrice de collision  $T$  par

$$S_{\omega\omega'} = \delta_{\omega\omega'} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\omega - p_{\omega'}) T_{\omega\omega'} \quad (46)$$

il vient

$$T_{(\alpha p q, m\bar{k})} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\langle m\bar{k} | j_p^j(\omega) | p \rangle}{\sqrt{2q^0}} \quad (47)$$

Si nous utilisons cette équation comme définition de l'extension de  $T$  en dehors de la couche d'énergie (ce qui correspond à l'extension utilisée en théorie statique), nous voyons que l'équation (41) donne une relation intégrale non linéaire entre les divers éléments de matrice de  $T$ . Cette équation est identique à l'équation classique de Low. On notera cependant que la dérivation classique de cette équation par les méthodes habituelles de la théorie des champs fait apparaître un terme de la forme

$$-i\lambda \int \frac{e^{i(q'-q)x}}{\sqrt{4q^0 q'^0}} \langle p' | \delta_{pp'} \phi_\sigma(x) \phi_\sigma(x) + 2 \phi_\rho(x) \phi_{\rho'}(x) | p \rangle$$

où les  $\phi$  sont des opérateurs de champ renormalisés en représentation de Heisenberg. Ce terme provient alors de la renormalisation de l'interaction méson-méson et n'apparaît pas de façon explicite dans notre formulation, comme l'on pouvait s'y attendre puisque cette théorie est complètement renormalisée. Ce n'est qu'en développant le terme dit de Born dans notre équation qu'on le verra apparaître car il est en fait inclus potentiellement dans  $j(x)$ .

Revenons maintenant à la difficulté signalée en note : nous avons utilisé une forme de  $S$  comme valeur moyenne de produit ordonné sans tenir compte du fait que celui-ci est mal défini lorsque  $x = y$ . Cette difficulté est habituellement négligée dans les dérivations de l'équation de Low. On peut montrer qu'elle n'a aucune influence sur le résultat final à l'aide d'un argument qui utilise des résultats de N. N. Bogolioubov et dont nous donnons le schéma :

En tenant compte de l'invariance par translation, on peut poser

$$\langle p' | \frac{\delta^2 S}{\delta \phi_{p'}(x) \delta \phi_{p'}(y)} S^\dagger | p \rangle = i e^{i \frac{p'-p}{2}(x+y)} F_{\alpha\omega}^{(-)}(x-y) \quad (48)$$

$$\langle p' | \frac{\delta j_{p'}(y)}{\delta \phi_{p'}(x)} | p \rangle = - e^{i \frac{p'-p}{2}(x+y)} F_{\alpha\omega}^{ret}(x-y) \quad (49)$$

$$\langle p' | j_{p'}(x) j_{p'}(y) | p \rangle = - i e^{i \frac{p'-p}{2}(x+y)} F_{\alpha\omega}^{(-)}(x-y) \quad (50)$$

où  $F^{(-)}$  est liée à l'élément de matrice  $S$  qui nous intéresse et  $F^{ret}$  est directement calculable sans ambiguïté à l'aide des éléments de matrice du courant. Introduisant une matrice  $H$  définie à l'aide de  $F^{ret}$  comme  $S$  l'est à l'aide de  $F$ , on peut mettre  $S - H$  sous une forme ne contenant que  $F$ , en utilisant l'équation (3) et l'on montre alors que  $S - H$  est nul pour des processus physiques (entre états à énergie positive et masse positive). Enfin, on peut exprimer  $H$  à l'aide de  $F$  et retrouver ainsi une équation qui coïncide exactement avec (41) pour les processus physiques. Nous considérerons donc cette dérivation de l'équation de Low comme complète.

4. Extension à la transition de un à deux mésons. Cas général.

Nous voulons maintenant dériver, par les mêmes méthodes que ci-dessus, une équation de Low pour la transition d'un état composé d'un nucléon et d'un méson d'impulsions  $p$  et  $q$  à un état comprenant un nucléon et deux mésons d'impulsions  $p'$ ,  $q'_1$ , et  $q'_2$ . L'énergie totale de chacun de ces états sera désignée par  $E$ .

D'après (15) on a

$$S(pq; p'q'_1q'_2) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dx dy_1 dy_2 \frac{e^{i(q'_1 y_1 + q'_2 y_2 - qx)}}{\sqrt{\delta q^0 q'_1{}^0 q'_2{}^0}} \times \langle p' | \frac{\delta^3 S}{\delta \phi_p(x) \delta \phi_{p'_1}(y_1) \delta \phi_{p'_2}(y_2)} S^+ | p \rangle \quad (51)$$

Considérons l'opérateur radiation qui apparaît dans (51). On peut l'écrire

$$\begin{aligned} \frac{\delta^3 S}{\delta \phi(x) \delta \phi(y_1) \delta \phi(y_2)} S^+ &= \frac{\delta}{\delta \phi(y_2)} \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \left[ \frac{\delta S}{\delta \phi(y_2)} S^+ \right] \\ &- \left[ \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \left( \frac{\delta S}{\delta \phi(y_2)} S^+ \right) \right] S \frac{\delta S^+}{\delta \phi(y_2)} \\ &- \left[ \frac{\delta S}{\delta \phi(y_2)} S^+ \right] \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \left( S \frac{\delta S^+}{\delta \phi(y_2)} \right) \\ &- \frac{\delta^2 S}{\delta \phi(y_2) \delta \phi(y_2)} \frac{\delta S^+}{\delta \phi(x)} \end{aligned} \quad (52)$$

Dans le cas où  $x = y_1, y_2$  tous les termes du second membre, sauf le dernier, s'annule par suite de la condition de causalité (17). Généralisant ce résultat, on voit que l'opérateur radiation peut s'écrire

$$\begin{aligned}
& - \theta(y_2 - x) \theta(y_2 - x) \frac{\delta^2 S}{\delta \phi(y_2) \delta \phi(y_2)} \frac{\delta S^+}{\delta \phi(x)} \\
& - \theta(y_2 - y_1) \theta(x - y_1) \frac{\delta^2 S}{\delta \phi(y_2) \delta \phi(x)} \frac{\delta S^+}{\delta \phi(y_1)} \\
& - \theta(x - y_1) \theta(y_1 - y_2) \frac{\delta^2 S}{\delta \phi(x) \delta \phi(y_2)} \frac{\delta S^+}{\delta \phi(y_1)}
\end{aligned} \tag{53}$$

Notons d'ailleurs pour la suite que si l'on utilise l'expression (36) de  $\frac{\delta^2 S}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} S^+$ , ceci peut encore s'écrire

$$-i \theta(y_2 - x) \theta(y_2 - x) \theta(y_2 - y_1) j(y_2) j(y_1) j(x) + \text{Perm}(x, y_1, y_2) \tag{54}$$

Ce qui montre que des singularités de l'expression peuvent seulement apparaître lorsque deux des points  $x, y_1, y_2$ , coïncident.

Appliquons maintenant à (51) les méthodes du paragraphe précédent. Pour cela nous poserons, par exemple

$$\begin{aligned}
\left\langle p' \left| \frac{\delta^2 S}{\delta \phi(y_2) \delta \phi(y_2)} \frac{\delta S^+}{\delta \phi(x)} \right| p \right\rangle &= \sum_n \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\bar{k} \left\langle p' \left| \frac{\delta^2 S}{\delta \phi(y_1) \delta \phi(y_2)} S^+ \right| n\bar{k} \right\rangle \\
&\quad \times \left\langle n\bar{k} \left| \frac{\delta S^+}{\delta \phi(x)} \right| p \right\rangle
\end{aligned} \tag{55}$$

et nous définirons

$$\left\langle p' \left| \frac{\delta^2 S}{\delta \phi(y_2) \delta \phi(y_2)} \right| n\bar{k} \right\rangle = (2\pi)^3 e^{i \frac{p-k}{2} (x+y)} F_{p', p_2, n\bar{k}}(x-y) \tag{56}$$

$$\left\langle p \left| \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} \right| n\bar{k} \right\rangle = i (2\pi)^{3/2} e^{i(p-k)x} \Gamma_{p, n\bar{k}} \tag{57}$$

Introduisons la transformée de Fourier de  $F$  par

$$\overline{F}_{p'p_2, n\bar{k}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk' e^{-ik'x} T_{p'p_2, n\bar{k}}(k') \quad (59)$$

L'équation (51) prend alors la forme

$$\langle p' q'_2 q'_2 | S | pq \rangle = \frac{\delta(q'_2 + q'_2 + p' - q - p)}{\sqrt{8q^0 q'_2{}^0 q'_2{}^0}} (A_1 + A_2 + A_3) \quad (60)$$

$$A_1 = \sum_n \int \frac{T_{p'p'_2, n\bar{k}}(k') T_{pp_2, n\bar{k}}^* \left| \begin{array}{l} \bar{k} = \frac{p' + q'_2 + q'_2}{2} \\ \bar{k}' = \frac{q'_2 - q'_2}{2} \end{array} \right.}{\left( q'_2{}^0 + \frac{p^0 - E_n(\bar{k})}{2} - k'^0 + i\varepsilon \right) \left( q'_2{}^0 + \frac{p^0 - E_n(\bar{k})}{2} + k'^0 + i\varepsilon \right)} dk'_0 \quad (61a)$$

$$A_2 = \sum_n \int \frac{T_{p'p'_2, n\bar{k}}(k') T_{pp_2, n\bar{k}}^* \left| \begin{array}{l} \bar{k} = \frac{p' + q'_2 - q}{2} \\ \bar{k}' = \frac{q + q'_2}{2} \end{array} \right.}{\left( -q^0 + \frac{p^0 - E_n(\bar{k})}{2} + k'^0 + i\varepsilon \right) \left( q'_2{}^0 + \frac{p^0 - E_n(\bar{k})}{2} - k'^0 + i\varepsilon \right)} dk'_0 \quad (61b)$$

et où  $A_3$  se déduit de  $A_2$  par échange de  $q'_1$  et  $q'_2$

Il nous faut maintenant interpréter ces coefficients  $T$  au moyen des éléments de matrice de  $S$ , dans le cas particulier où  $n\bar{k}$  est sur la couche d'énergie. Pour cela, étudions l'élément de matrice de  $S$  entre un état initial arbitraire  $n\bar{k}$  et un état final composé d'un nucléon  $p$  et d'un méson  $q$ . Il s'écrit, d'après (6)

$$\begin{aligned}
\langle pq | S | n\bar{k} \rangle &= \langle p | A_{\rho(\bar{q})}^{(-)} S | n\bar{k} \rangle \\
&= \delta_{pq, n\bar{k}} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dx \frac{e^{iqx}}{\sqrt{2q^0}} \langle p | \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} | n\bar{k} \rangle \\
&= \delta_{pq, n\bar{k}} + \frac{i(2\pi)^4}{\sqrt{2q^0}} \delta^{(4)}(p+q-k) \Gamma_{p\rho; n\bar{k}} \quad (62)
\end{aligned}$$

Pour l'élément de matrice de S entre un état  $n\bar{k}$  et un état composé d'un nucléon  $p'$  et de deux mésons  $q'_1, q'_2$ , on a (en supposant que l'état  $n\bar{k}$  ne contienne pas les mésons  $q'_1$  ou  $q'_2$ , ce qui donnerait éventuellement des termes du même type et de moindre degré que nous négligeons pour plus de clarté)

$$\langle p'q'_1q'_2 | S | n\bar{k} \rangle = \langle p' | A_{\rho'_1(\bar{q}'_1)}^{(-)} A_{\rho'_2(\bar{q}'_2)}^{(-)} S | n\bar{k} \rangle$$

A l'aide des équations (14) et (6), ceci peut s'écrire

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle p' | \frac{\delta^2 S}{\delta \phi_{\rho'_1}(x_1) \delta \phi_{\rho'_2}(x_2)} | n\bar{k} \rangle \frac{e^{i(q'_1x_1 + q'_2x_2)}}{\sqrt{4q'_1{}^0 q'_2{}^0}} dx_1 dx_2$$

ce qui, d'après (56) et (59) est identique à

$$i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'+q'_1+q'_2-k) \frac{\Gamma_{p\rho'_1\rho'_2; n\bar{k}}(\frac{\bar{q}'_1 - \bar{q}'_2}{2})}{\sqrt{4q'_1{}^0 q'_2{}^0}} \quad (63)$$

Si l'on utilise les expressions (62) et (63) comme définition de la matrice T en dehors de la couche d'énergie, on voit que les quantités figurant dans (61) sont bien des éléments de cette matrice.

Il est clair maintenant que cette méthode peut être utilisée pour dériver un ensemble complet d'équations relativistes du type de Low. Tout élément de la matrice de transition entre un état à un nucléon et  $r$  mésons et un second état à un nucléon et  $s$  mésons pourra être mis sous une forme analogue à (60). La dérivée variationnelle d'ordre  $r + s$  ainsi mise en évidence sera mise sous forme d'un produit ordonné de deux autres dérivées variationnelles, l'une d'ordre un, l'autre d'ordre  $r + s - 1$ . On obtiendra ainsi une expression de l'élément de matrice de  $T$  comme somme de  $r + s$  termes, chacun d'eux comprenant au numérateur le produit de deux éléments de matrice de  $T$  (étendue en dehors de la couche d'énergie), l'une entre un état constitué du nucléon initial et l'un des mésons, d'une part, un état  $nk$ , d'autre part, l'autre entre  $nk$  d'une part, le nucléon final et les autres mésons d'autre part. Au dénominateur de ces termes figurera un produit de  $r + s - 1$  expressions de la forme  $(E' - E_n + i\epsilon)$  où  $E'$  est une énergie.

Notons qu'en principe peuvent figurer dans les états intermédiaires des paires de nucléons et d'antinuécléons, ou même des hyperons (à condition que la charge nucléonique et l'étrangeté soient conservées) et qu'il semble difficile d'établir des équations du même type pour ces états. En ce sens, le système considéré n'est pas complet. Un aspect délicat de ces équations est qu'elles contiennent des éléments de matrice entre l'état arbitraire  $nk$  et l'état initial ou final étudié, mais on peut aisément éliminer cet effet en utilisant l'invariance des interactions fortes par renversement de sens du temps.

La forme de ces équations met simplement en évidence les relations de croisement (I. 28) ainsi que l'unitarité de la matrice  $S$  qui résulte immédiatement de (60) lorsque l'impulsion relative des deux nucléons qui y figurent dans le système du centre de masse est suffisamment petite.

Relation avec les méthodes de la première partie.

Si l'on applique les méthodes du paragraphe précédent à l'expression (54) on peut donner une nouvelle forme à l'élément de matrice de production où  $\langle p'q'_2q'_1 | S | pq \rangle$  sera constitué d'une somme de termes du type

$$\sum_{nm} \frac{\langle p' | j_{p'_1}(\omega) | n\bar{k} \rangle \langle n\bar{k} | j_{p'_2}(\omega) | m\bar{k}' \rangle \langle m\bar{k}' | j_p(\omega) | p \rangle}{(E_n - q'_2\omega - p'_1\omega - i\varepsilon)(E_m - q'_2\omega - q'_1\omega - p\omega - i\varepsilon)} \left| \begin{array}{l} \bar{k} = \bar{p}' + \bar{q}'_2 \\ \bar{k}' = \bar{k} + \bar{q}'_1 \end{array} \right. \quad (64)$$

En passant à la limite non relativiste et introduisant la fonction de coupure dans l'expression obtenue, on retrouve l'équation (38) de la première partie.

Il est également possible de passer à la limite non-relativiste sur (60) mais il est plus avantageux d'utiliser les équations (49) de la première partie pour le calcul des sections efficaces de production. Nous n'avons pu obtenir l'équation correspondante par la théorie de Chew, Low et Wick, et rien ne prouve que cela soit possible car il n'est pas évident que cette théorie vérifie les postulats posés, à cause vraisemblablement

- a) de son caractère non relativiste
- b) de sa mauvaise représentation des processus de haute énergie.

Relation avec les résultats d'autres auteurs.

Il est certainement possible d'obtenir un système d'équations analogue par les méthodes de Lehmann, Symanzick et Zimmerman, et l'équation de Low pour la diffusion a en effet, été ainsi retrouvée par Feenberg, Duimio, Gulmanelli et Scotti,<sup>/42/</sup>; cependant, à notre connaissance, l'étude des processus d'ordre supérieur n'a pas été faite.

Haag<sup>/38/</sup> a établi un système général qui présente une forme nettement plus simple que la nôtre car il donne une relation pour une matrice  $T'$ , de forme analogue à l'équation de Low (quadratique en  $T'$ , dénominateur linéaire en énergies) quels que soient les états considérés.

Malheureusement, un terme supplémentaire dépend du modèle particulier que l'on veut considérer et la matrice  $T'$  n'est reliée de façon explicite à la matrice  $S$  que dans le cas de la diffusion. Les équations de Haag sont donc intéressantes du point de vue de la théorie mais ne sauraient permettre une étude numérique et conduisent difficilement des conclusions précises.

## REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ici ma reconnaissance au Professeur C. J. Bakker pour l'hospitalité qui m'a été accordée au Centre Européen de Recherches Nucléaires où ce travail a été effectué. J'ai profité de discussions avec tous les membres de la section théorique du CERN et remercie particulièrement le Professeur B. Ferretti, directeur de cette section, pour l'intérêt qu'il a pris à ce travail et ses remarques avisées sur la seconde partie. La première partie de cette thèse m'a été suggérée par Messieurs B. d'Espagnat et J. Prentki et je suis heureux de pouvoir leur dire ici combien leur amitié et leurs conseils m'ont été précieux.

La programmation des calculs numériques a été faite par Monsieur H. H. Robertson et je le remercie de son aide inestimable ainsi que tous les membres du CERN, secrétaires et calculatrices, qui ont participé à la mise au point de ce travail.

Je dois beaucoup au Professeur C. G. Wick pour des conversations relatives à la théorie du nucléon statique dont il est l'un des principaux artisans, ainsi qu'à des sujets connexes.

Je remercie vivement Monsieur le Haut-Commissaire Francis Perrin et le Commissariat à l'Energie Atomique pour le soutien financier qui m'a été accordé pendant ce stage à Genève, et je tiens à marquer plus particulièrement ma reconnaissance à Monsieur J. Yvon, Directeur du Département d'Etude des Piles, et Messieurs J. Horowitz et A. Abragam, respectivement Chefs des Services de Physique Mathématique et de Résonance Nucléaire, pour le soutien scientifique et moral qu'ils m'ont apporté.

Je tiens à remercier Monsieur A. Lichnérowitz, Professeur au Collège de France, à qui je dois à la fois le goût de la Physique Théorique et les premiers encouragements, bien que ce travail soit un médiocre hommage à ses leçons.

Monsieur M. Lévy, Maître de Conférences à la Sorbonne, a bien voulu patronner ce travail; ses conseils et ses critiques m'ont été fort précieux. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance et de mes remerciements.

## APPENDICE I

Dans cet appendice, nous nous proposons de vérifier la formule fondamentale (III. 53) pour la transition de 2 mésons à 2 mésons ( $r=s=2$ ). En fait les diverses étapes de ce calcul correspondent exactement à celles de la méthode graphique exposée au chapitre III. 4 et peuvent préciser certains points de celle-ci.

On a (III. 46)

$$T_{p_1 p_2}(q_1, q_2) = \left\langle \left[ a_1' a_2' - (a_2' V_2^\dagger + a_1' V_2^\dagger) \frac{1}{H-E-i\epsilon} \right] (a_1^\dagger V_2 + a_2^\dagger V_2) \right\rangle \quad (\text{A. 1})$$

Notons que

$$-\sum_n \frac{T_{q_1 q_2}^* T_{p_1 p_2}}{E_n - E - i\epsilon} = - \left\langle \left| (a_2' V_2^\dagger + a_1' V_2^\dagger) \frac{1}{H-E-i\epsilon} (a_1^\dagger V_2 + a_2^\dagger V_2) \right| \right\rangle \quad (\text{A. 2})$$

Il reste donc à calculer des termes de la forme

$$\left\langle \left| a_1' a_2' \frac{1}{H-E-i\epsilon} (a_1^\dagger V_2 + a_2^\dagger V_2) \right| \right\rangle \quad (\text{A. 3})$$

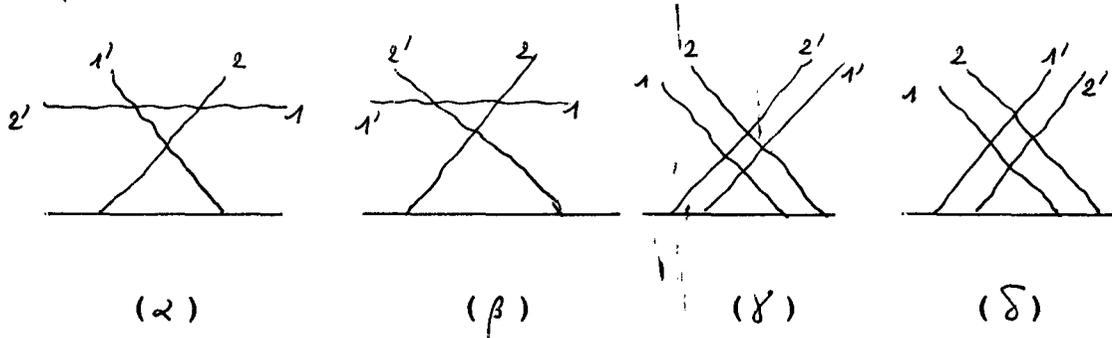
qui, après développement, donnent

$$\begin{aligned} & \delta_{12'} \langle a_1' V_2 \rangle + \delta_{11'} \langle a_2' V_2 \rangle - \left\langle \left| V_2 (H+\omega_1)^{-1} V_2 (H+E)^{-1} V_2^\dagger \right. \right. \\ & \left. \left. \times (H+\omega_2')^{-1} V_1^\dagger + V_2 (H+\omega_1)^{-1} V_2 (H+E)^{-1} V_2^\dagger (H+\omega_2')^{-1} V_2^\dagger \right| \right\rangle \quad (\text{A. 4}) \end{aligned}$$

avec

$$\langle a_1' V_2 \rangle = - \left\langle V_2 \frac{1}{H+\omega_2'} V_1^\dagger \right\rangle \quad (\text{A. 5})$$

Ces différents termes correspondent, dans l'ordre, aux graphiques ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ), ( $\gamma$ ) et ( $\delta$ )



Etudions maintenant la quantité 
$$- \frac{\Gamma_{p'_1 p'_2}^* \Gamma_{q'_1 q'_2}(n)}{E_n + E}$$

où  $p'_1, p'_2, q'_1, q'_2$ , sont des mésons ayant respectivement même polarisation et même charge que  $p_1, p_2, q_1, q_2$ , mais de nouvelles énergies  $\omega_{p'_1}, \omega_{p'_2}, \omega_{q'_1}, \omega_{q'_2}$ , que nous ne précisons pas pour l'instant.

On a

$$- \frac{\Gamma_{p'_1 p'_2}^* \Gamma_{q'_1 q'_2}(n)}{E_n + E} = - \langle [a_{p'_2} V_{p'_1}^+ + a_{p'_1} V_{p'_2}^+] | n- \rangle \frac{1}{E_n + E} \langle n- | a_{q'_1}^+ V_{q'_2} + a_{q'_2}^+ V_{q'_1} | \rangle$$

soit, à l'aide de la formule (III. 11)

$$- \left[ \sum_{\lambda} \delta_{p'_2 p_{\lambda}} \langle V_{p'_2}^+ | n_{\lambda}- \rangle + \langle V_{p'_2}^+ \frac{1}{H + \omega_{p'_1} - E_n + i\varepsilon} V_{p'_1}^+ | n- \rangle \frac{1}{E_n + E} \right. \\ \left. \times \left[ \sum_{\mu} \delta_{q'_2 p_{\mu}} \langle n_{\mu}- | V_{q'_2} \rangle + \langle n- | V_{q'_2} \frac{1}{H + \omega_{q'_2} - E_n - i\varepsilon} V_{q'_1} \rangle + \text{Perm}(1,2) \text{Perm}(1',2') \right] \right] \quad (\text{A. 6})$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} \omega_{p'_1} &= E_n + \omega_{p_1} & \omega_{q'_1} &= E_n + \omega_{q_1} \\ \omega_{p'_2} &= E_n + \omega_{p_2} & \omega_{q'_2} &= E_n + \omega_{q_2} \end{aligned} \quad (\text{A. 7})$$

on voit que

$$\langle V_{p'_2}^+ (H + \omega_{p'_1} - E_n - i\varepsilon)^{-1} V_{p'_1}^+ | n- \rangle (E_n + E)^{-1} \langle n- | V_{q'_2} (H + \omega_{q'_2} - E_n - i\varepsilon)^{-1} V_{q'_1} \rangle = \\ \langle V_{p'_2}^+ (H + \omega_{p_2})^{-1} V_{p_1}^+ | n- \rangle (E_n - E)^{-1} \langle n- | V_{q_2} (H + \omega_{q_1})^{-1} V_{q_1} \rangle \frac{1}{\rho(p_1 p_2) \dots \rho(q_1 q_2)}$$

D'autre part, les termes en  $\delta_{p'p\lambda}$  dans (A. 6) disparaissent par suite de

$$\omega_\lambda \ll E_n \quad \omega' > E_n$$

et il vient

$$\begin{aligned} & - \langle V_{p_2}^+ (H + \omega_{p_2})^{-1} V_{p_1}^+ (H + E)^{-1} V_{q_2} (H + \omega_{q_1})^{-1} V_{q_1} \rangle + \text{Perm} (1, 2) (1', 2') \\ & = - \sum_n \frac{T_{p_1' p_2}^* (n) T_{q_1' q_2} (n)}{E_n + E} \rho(p_1 p_1') \rho(p_2 p_2') \rho(q_1 q_1') \rho(q_2 q_2') \end{aligned} \quad (\text{A. 9})$$

On peut traiter de la même façon (A. 5) pour obtenir

$$- \delta_{p_1 q_2} \langle V_{p_2} \frac{1}{H + \omega_{q_1}} V_{q_1}^+ \rangle = - \sum_n \frac{T_{p_2}^* (n) T_{q_2} (n)}{E_n + \omega_{p_2}} \delta_{p_1 q_2}$$

Notons que, comme nous l'avons signalé, il n'apparaît pas de coefficients  $\rho$  dans un terme correspondant à l'interaction d'un seul méson de l'état initial ou final.

Nous avons donc établi que

$$\begin{aligned} T_{p_1 p_2} (q_1, q_2) = & - \sum_n \left[ \frac{T_{q_1 q_2}^* (n) T_{p_1 p_2} (n)}{E_n - E - i\varepsilon} + \frac{T_{p_1 p_2}^* (n) T_{q_1 q_2} (n)}{E_n + E} \rho(p_1 p_1') \dots \rho(q_2 q_2') \right] \\ & - \sum_{n ij} \delta_{p_1 q_j} \frac{T_{p_2}^* (n) T_{q_2} (n)}{E_n + \omega_k} \end{aligned} \quad (\text{A. 10})$$

Cette équation justifie la forme donnée à  $C(p_1, p_2, q_1, q_2)$  dans l'équation (50) et pourrait compléter les équations (25) dans une approximation à deux mésons consistante.

APPENDICE II

Nous nous proposons de calculer la somme

$$\sum_{m_f} (u_f | \vec{\sigma} \cdot \vec{n}_2 | u_c) Y_{\vec{\sigma}}^M(\vec{n}_2, m_c) \quad (A_2^1)$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} (u_f | \vec{\sigma} \cdot \vec{n}_2 | u_c) &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sum_{m_2} (u_f | \sigma_{-m_2} | u_c) (-)^{m_2} Y_1^{m_2}(\vec{n}_2) \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sum_{m_2} C_{1\frac{1}{2}}(\frac{1}{2} m_f | -m_2 m_c) (-)^{m_2} Y_1^{m_2}(\vec{n}_2) \end{aligned} \quad (A_2^2)$$

(A<sub>2</sub><sup>1</sup>) s'écrit, en utilisant une formule classique sur la somme de produits de deux coefficients de Clebsh Gordan (voir par exemple Horowitz et Messiah (43) p. 23.)

$$[8\pi(2L+1)]^{\frac{1}{2}} \sum_{L_3 m_1 m_2} (-)^L C_{11}(L L_3 | m_2 m_1) C_{11}(\vec{\sigma} M | L_3 m_f) W(1\frac{1}{2} 1 \sigma | \frac{1}{2} L) Y_1^{m_1}(\vec{n}_1) Y_L^{m_2}(\vec{n}_2)$$

Pour  $J = 3/2$ , on peut éliminer les termes correspondants à  $L = 1$  dans cette dernière formule en symétrisant (A<sub>2</sub><sup>1</sup>) et remarquant que

$$\begin{aligned} C_{11}(2L_3 | m_1 m_2) &= C_{11}(2L_3 | m_2 m_1) \\ C_{11}(1L_3 | m_1 m_2) &= -C_{11}(1L_3 | m_2 m_1) \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \sum_{m_c} (u_f | \vec{\sigma} \cdot \vec{n}_2 | u_c) Y_{\vec{\sigma}}^M(\vec{n}_2, m_c) + \text{Termes sym}(1,2) &= \\ 2 [8\pi(2L+1)]^{\frac{1}{2}} \sum_{L_3 m_1 m_2} C_{11}(2L_3 | m_1 m_2) C_{2\frac{1}{2}}(\frac{3}{2} M | L_3 m_f) W(1\frac{1}{2} 1 \frac{3}{2} | \frac{1}{2} 2) & \\ \times Y_1^{m_1}(\vec{n}_1) Y_2^{m_2}(\vec{n}_2) & \quad (A_2^3) \end{aligned}$$

Considérons maintenant la quantité

$$(u_c | (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}_1)(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) | u_i) \quad (A_2^4)$$

On peut l'écrire, à l'aide de la même relation sur les coefficients de Clebsh-Gordan

$$8\pi \sum_{JM m_1 m_2} C_{1\frac{1}{2}}(JM | m_1 m_2) C_{1\frac{1}{2}}(JM | m m_c) W(\psi \frac{1}{2} \frac{1}{2} 1 | \frac{1}{2} J) Y_1^{m_1}(\vec{n}_1) Y_1^{m^*}(\vec{n})$$

on peut éliminer les coefficients de Clebsh-Gordan relatifs à  $J = 1/2$  à l'aide de la relation d'orthogonalité

$$\sum_{n=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} C_{1\frac{1}{2}}(\frac{1}{2} M | m m_c) C_{1\frac{1}{2}}(\frac{1}{2} M | m_1 m_2) + \sum_{M=-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} C_{1\frac{1}{2}}(\frac{1}{2} M | m m_1) C_{1\frac{1}{2}}(\frac{1}{2} M | m_2 m_c) = \delta_{m m_2} \delta_{m_1 m_c}$$

Finalement, en tenant compte des relations

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}_1)(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) + (\vec{\sigma} \cdot \vec{n})(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}_1) = 2(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) \quad (A_2^5)$$

$$W(1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} 1 | \frac{1}{2} \frac{3}{2}) = -2 W(1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} 1 | \frac{1}{2} \frac{1}{2}) = \frac{1}{3} \quad (A_2^6)$$

et en posant

$$C = (8\pi)^{\frac{3}{2}} (2L+1)^{\frac{1}{2}} W(1 \frac{1}{2} 1 \frac{3}{2} | \frac{1}{2} 2) \quad (A_2^7)$$

il vient

$$\sum_M \Phi_{2\frac{3}{2}}^M(\vec{n}_1, \vec{n}_2, m_f) Y_{\frac{3}{2}}^{M^*}(\vec{n}, m_c) = \frac{1}{C} (u_f | 3(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}_2)(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}) - (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}_2)(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}_1)(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) | u_i) \quad (A_2^8)$$

+ Termes symétriques (1 - 2)

En utilisant (A<sub>2</sub><sup>5</sup>) ceci peut encore s'écrire

$$\frac{1}{C} (u_f | 3(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}_2)(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}) + 3(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}_1)(\vec{n}_2 \cdot \vec{n}) - 2(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) | u_i) \quad (A_2^9)$$

APPENDICE III

## TABLE ET GRAPHIQUES

Section efficace de production de deux mésons positifs par un méson positif  
et un proton

Energie en unité $\hbar = c = p = 1$		$\sigma$ (millibarns)
$\omega_q =$	2	0
	2.2	$6,7 \cdot 10^{-4}$
	2.4	$7,7 \cdot 10^{-3}$
	2.6	$2,4 \cdot 10^{-2}$
	2.8	$7,5 \cdot 10^{-2}$
	3.	0.122
	3.5	0.428
	4.	0.708
	4.5	0.900

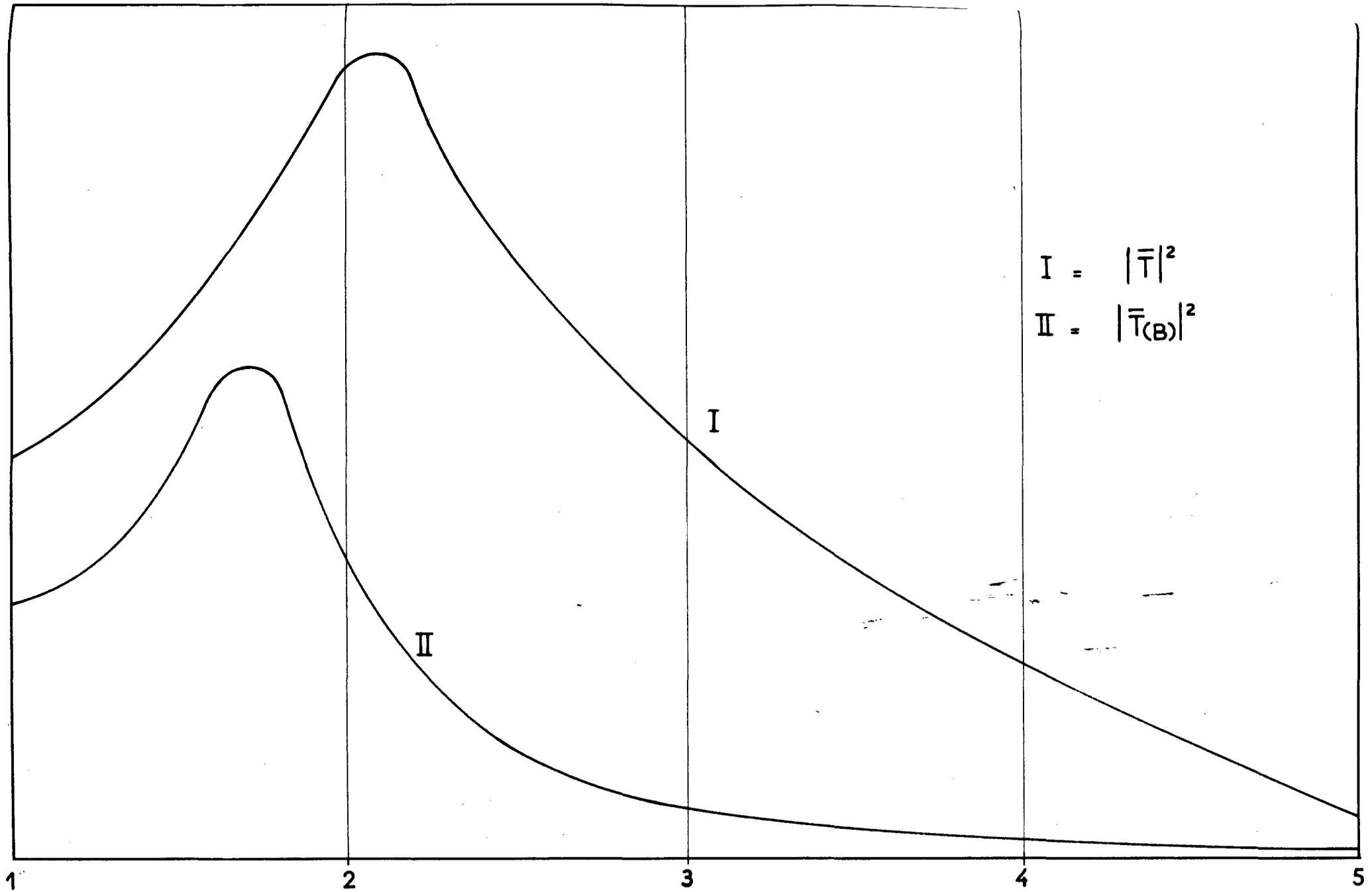


Fig 1 - Comparaison de  $|\bar{T}|^2$  et  $|\bar{T}(B)|^2$

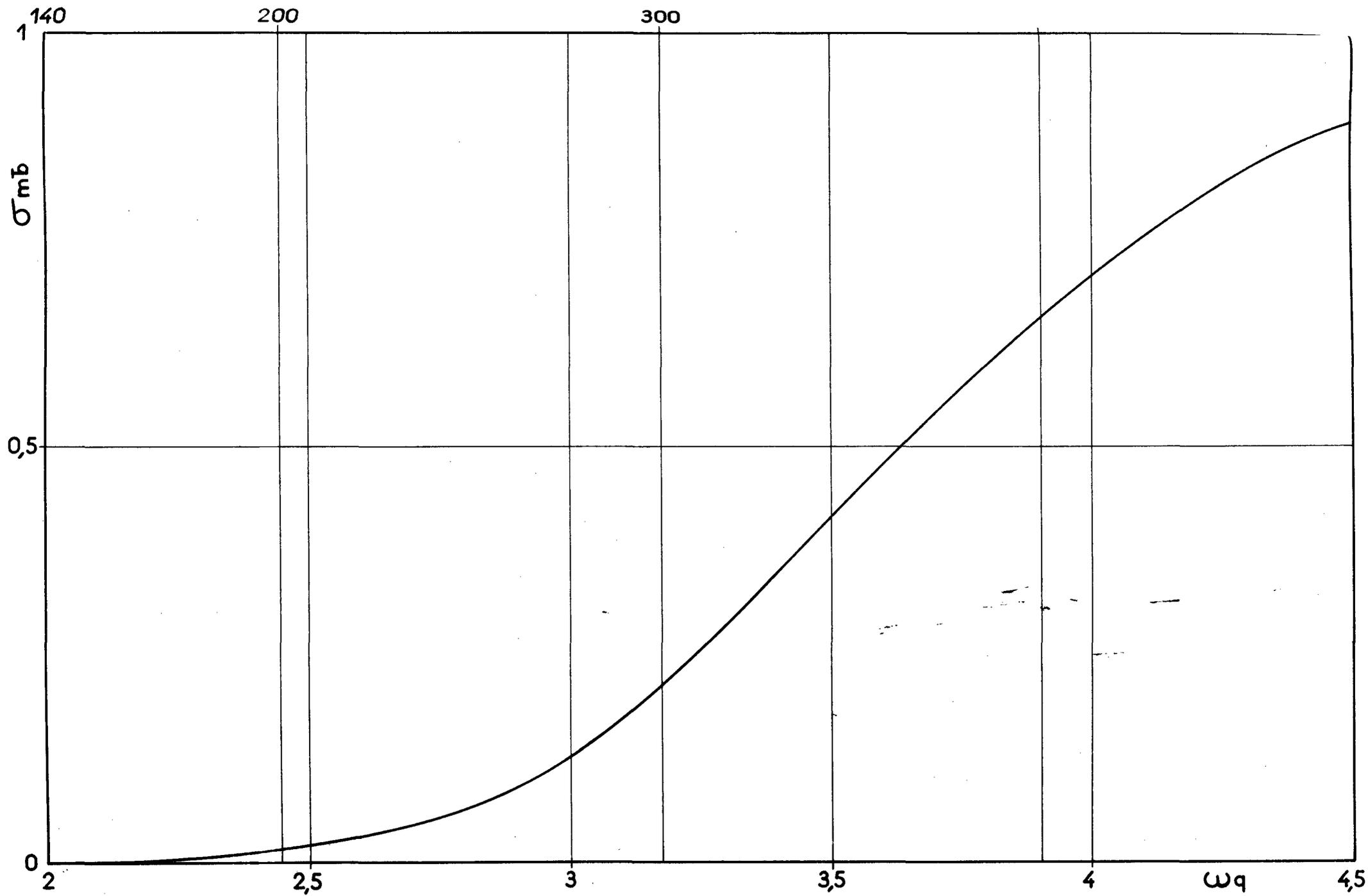


Fig: 2 - Section efficace totale de la réaction  $\pi^+ + P \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + N$

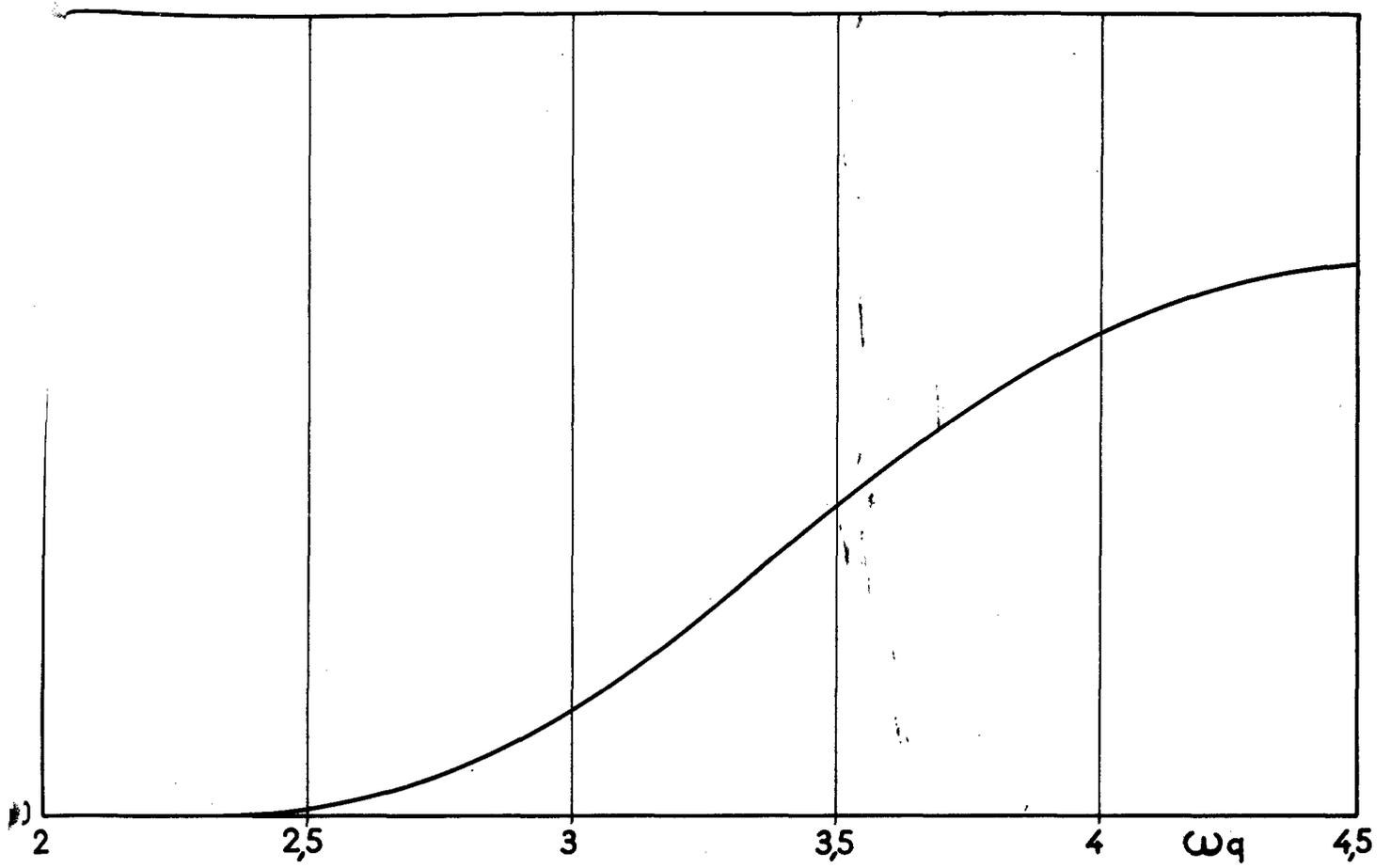


Fig = 3 - Section efficace totale de la réaction  $\pi^+P \rightarrow \pi^+\pi^0P$

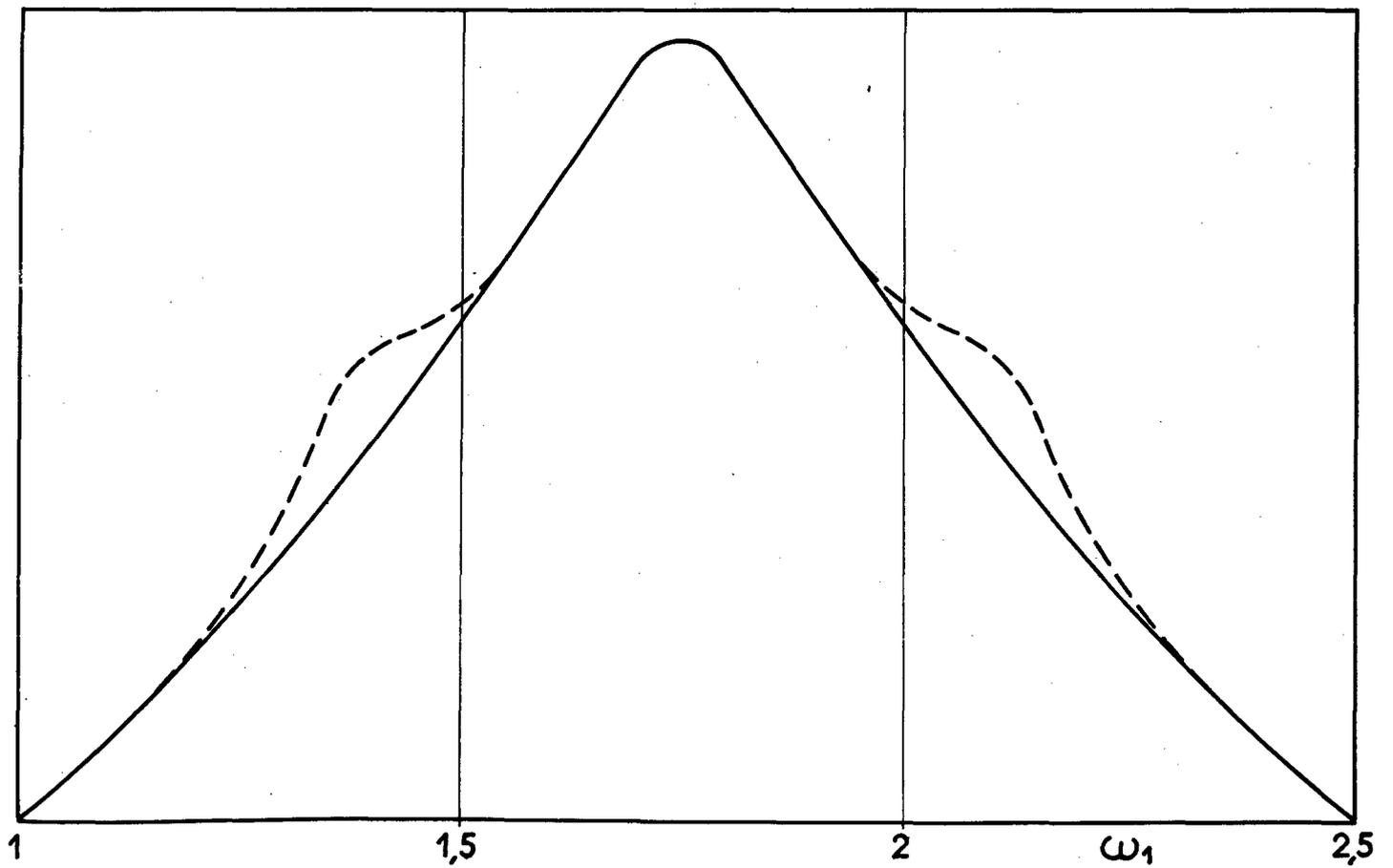


Fig = 4 - Analyse de la production en fonction de l'énergie  
d'un méson émergent  $\omega_q = 3,5$

## REFERENCES

1. Yukawa H. - Proc. Phys - Math. Soc. Japan, 17, 48(1935)
2. Kemmer N. - Proc. Cambridge Phil. Soc. 34, 354(1938)
3. Lattes, CMG, Occhialini G.P.S. Powell C.F. Nature, 160, 453, 486(1947)
4. Birnbaum W, Barkas W.H. Smith F.M. - Phys. Rev, 91, 765L(1953)  
Crowe K.M, Phillips R.H. - Phys. Rev, 96, 470(1954)  
Panofsky W.K.H. et al. Phys. Rev, 81, 565 (1951)
5. Marshak, R.E. - Phys. Rev. 82, 313(1951)  
Cheston W.B. - Phys. Rev. 83, 1118(1951)  
Cartwright W. F. et al. - Phys. Rev. 91, 677(1953)  
Yang C.N. (1950) - Phys. Rev. 77, 242(1950)
6. Panofsky W.K.H. et al. - Phys. Re. 81, 515(1951)
7. Feynman R. P. - Proc. 5th Rochester Conference, 67(1955)
8. Lévy M. M. - Phys. Rev. 86, 806 L(1952)  
Phys. Rev. 88, 72(1952)  
Phys. Rev. 88, 725(1952)
9. Tamm I. - J. Phys. U.R.S.S. , 9, 449, (1945)  
Dancoff S.M. - Phys. Rev, 78, 382(1950)
10. Chew G. F. et Goldberger M. L. - Phys. Rev, 77, 470(1950)  
et Steinberger J. L. - Phys. Rev, 78, 497L(1950)  
Phys. Rev. 80, 196(1950)  
et Lewis H. W. - Phys. Rev, 84, 779(1951)  
et Wick G. C. - Phys. Rev, 85, 636(1952)  
Phys. Rev. 89, 591(1953)  
Phys. Rev. 93, 341(1954)  
Phys. Rev. 94, 1748(1954)  
Phys. Rev. 94, 1755(1954)  
Phys. Rev. 95, 1669(1954)  
Phys. Rev. 95, 285(1954)

11. Chew G. F. et Low F. E. - Phys. Rev. 101, 1570, 1579(1956)
12. Wick G. C. - Rev. Mod. Phys. 27, 339,(1955)
13. Schwinger J. - Phys. Rev. 72, 742(1947)
14. Cutowsky - à paraître dans la Physical Review.  
Bosco B. - à paraître au Nuovo Cimento.
15. Gartenhaus S - Phys. Rev. 100, 900(1955)
16. Klein A, et Mac Cormick B. H. - Phys. Rev. 104, 1747(1956)
17. Omnes, R. - Comptes Rendus, 243, 1019(1956)
18. Saltzmann G - Phys. Rev. 99, 619(1955)
19. Wigner E. P. et Eisenbud - Phys. Rev. 72, 29(1947)
20. Watson K. M. - Phys. Rev. 95, 228(1954)
21. Omnès R. - Comptes Rendus, 244, 47(1957)
22. Ignatenko A. E. Comptes Rendus du Symposium CERN, 1956, 313, tome 2.  
Crussard J, Walker W. O. et Koshiba M - Phys. Rev. 94, 736(1954)  
Blau M et Caulton M. - Phys. Rev. 96, 150(1954)  
Crewe A. V. , Kruse V. E. et Taft H. D. - Bull APS 1, 150, (1956)
23. d'Espagnat B.- Mat-fys Medd. 28, 11(1954)
24. Nelkin M. - Phys. Rev. 104, 1150(1956)
25. Low F. E. - Phys. Rev. 97, 1392(1955)
26. Lehman H, Symanzick K et Zimmermann - Nuovo Cimento 1, 1(1955)
27. Bogolioubov N. N. , Medredev et Polivanov - présenté à la Conférence de Seattle de Physique Théorique - septembre 1956.
28. Omnès R. - Nuovo Cimento (à paraître)
29. Schwinger J. - Phys. Rev. 74, 1439(1948)
30. Fubini et Thirring - à paraître.
31. Wick G. C. - conférences non publiées - Genève (1956)
32. Nambu Y. - Phys. Rev. 100, 394(1955)
33. Feldman et Matthews - Phys. Rev. 102, 1421(1956)
34. Racah J. - Phys. Rev. 62, 438(1942)
35. Barshay S. - Phys. Rev. 103, 1102(1956)
36. Franklin J - à paraître.  
Rodberg L. S. - à paraître.
37. Fukuda J et Kovacs J. S. - Phys. Rev. 104, 1784(1956)
38. Haag R. - Nuovo Cimento 5, 203, (1957)
39. Fermi E. - Progr. Theor. Phys. 5, 570(1950)
40. Drell Friedman et Zachariensen, 104, 236(1956)
41. Bogolioubov et Shirkov - Uspechi fisic. Nauk, 55, 149(1955)
42. V. I. Fainberg - JETP, 30, 608(1956) traduit dans Soviet Physics, JETP, 3, 644(1956)  
Duiinio, Gulmanelli et Scotti, Nuovo Cimento, 2, 1132(1955)
43. J. Horowitz et A. Messiah - Note CEA, No. 2 (1953)
44. Haag - Note non publiée.



E R R A T A

Page 13, ligne 13

au lieu de : s'harmoniques, lire : d'harmoniques

Page 21, ligne 9

au lieu de :  $z = i$ , lire  $z = i\infty$

Page 38, ligne 18

au lieu de : du type, lire : du type  $\beta$

Page 56, ligne 16

au lieu de : ... deux mésons par une ....., lire : ... deux mésons par un  
et entre la ligne 16 et la ligne 17, lire : ... méson dépasse nettement la  
valeur maximale de la section efficace totale permise par la condition de  
conservation de la projectibilité ( $8\pi\lambda^2$ ).

L.S. Rodberg établit une équation de Low par une ....

Page 77, équation (22)

dans l'intégrale, multiplier par  $\omega_k$  la quantité à intégrer.

DEUXIEME THESE  
\*\*\*\*\*

Propositions données par la Faculté

"LES EXPERIENCES INTERFEROMETRIQUES DE HANDBURY BROWN"

Vu et approuvé

Paris, le 4 mai 1957

Le Doyen de la Faculté des Sciences

J. PERES

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie  
de Paris

Jean SARRAILH