

Peter Reineker, Michael Schulz und Beatrix M. Schulz

Theoretische Physik 1

Mechanik

mit Aufgaben in Maple



WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA

Inhaltsverzeichnis

Vorwort XV

1 Einleitung 1

- 1.1 Experimentelle und Theoretische Physik /
- 1.2 Ziel der Theoretischen Physik 2
- 1.3 Der Aufbau der Lehrbuchreihe Theoretische Physik 2
- 1.4 Stellung der klassischen Mechanik innerhalb der Theoretischen Physik 3
- 1.5 Gültigkeitsgrenzen der klassischen Mechanik 4
- 1.6 Aufbau des Bands Theoretische Mechanik 4
- 1.7 Modellebenen der Theoretischen Mechanik 7
- 1.8 Lösung von Gleichungen 8

2 Kinematik eines Massenpunkts 13

- 2.1 Grundbegriffe der Kinematik 13
 - 2.1.1 Bezugssystem und Räume 13
 - 2.1.2 Weglänge, Verrückung, Geschwindigkeit 14
 - 2.1.3 Beschleunigung 16
- 2.2 Verschiedene Koordinatensysteme 17
 - 2.2.1 Zerlegung in kartesische Koordinaten 17
 - 2.2.2 Zerlegung nach Tangential- und Normalkomponenten 18
 - 2.2.3 Zerlegung in ebenen Polarkoordinaten 21
 - 2.2.4 Zerlegung in Kugelkoordinaten 24
 - 2.2.5 * Zerlegung in allgemeine krummlinige Koordinaten 25
- 2.3 * Rekonstruktion von Bewegungsgleichungen 29
- Aufgaben 31

Mit einem Stern sind Themen und Kapitel gekennzeichnet, die eher zusätzlich für die Masterausbildung vorgesehen sind

3	Newton'sche Mechanik des einzelnen Massenpunkts	33
3.1	Die Newton'schen Axiome	33
3.1.1	Das erste Axiom: Trägheitsgesetz	33
3.1.2	Das zweite Axiom: Grundgleichung der Dynamik	35
3.1.2.1	Kraftgesetz	35
3.1.2.2	Superpositionsprinzip	36
3.1.2.3	Statische Kraftmessung	37
3.1.2.4	Das zweite Newton'sche Axiom	37
3.1.2.5	Träge Masse	38
3.1.2.6	Dynamische Kraftmessung	39
3.1.3	Das dritte Axiom: Wirkung und Gegenwirkung	39
3.2	Bewegung eines freien Massenpunkts	40
3.2.1	Bewegung eines Massenpunkts im Schwerfeld	42
3.2.2	Bewegung einer Ladung im elektromagnetischen Feld	44
3.3	Arbeit und kinetische Energie	45
3.4	Der Satz von der Erhaltung der mechanischen Energie	49
3.4.1	Erste Integrale	49
3.4.2	Konservative Kräfte	50
3.4.3	Kraftfelder	51
3.4.4	Potentielle Energie und Arbeit, notwendige und hinreichende Bedingungen für konservative Kraftfelder	52
3.4.5	Darstellung von konservativen Kraftfeldern	56
3.4.6	Energiesatz der Mechanik	57
3.4.7	Beispiele für konservative Kraftfelder	58
3.4.7.1	Schwerfeld der Erde in der Nähe der Erdoberfläche	58
3.4.7.2	Newton'sches Gravitationsgesetz	60
3.4.8	Beispiele für nichtkonservative Kraftfelder	65
3.4.8.1	Kraftfeld mit rot $\neq 0$	65
3.4.8.2	Nichtkonservatives Kraftfeld mit rot $= 0$ bis auf singuläre Linien	67
3.4.9	Nichtkonservative Kräfte mit zeitabhängigem Potential	69
3.5	Zentralkräfte. Drehmoment und Drehimpuls	70
3.5.1	Zentralkräfte	70
3.5.2	Drehmoment und Drehimpuls	74
3.6	Die eingeschränkte Bewegung eines Massenpunkts. Dissipation	75
3.6.1	Zwangsbedingungen	75
3.6.2	Zwangskräfte und Bewegungsgleichung	76
3.6.3	Bewegung eines Massenpunkts auf ruhender schiefer Ebene	79
3.6.3.1	Behandlung in natürlichen Koordinaten	80
3.6.3.2	Behandlung mit Lagrange-Gleichungen	80
3.6.4	Arbeit der Zwangskraft	82
3.6.5	Verallgemeinerung der Bedingungsgleichungen	83

- 3.6.6 Zweiseitige und einseitige Zwangsbedingungen 87
- 3.6.7 Freiheitsgrade 87
- 3.6.8 Dissipation 88
- 3.6.8.1 Gleitreibung 89
- 3.6.8.2 Haftreibung 90
- 3.6.8.3 Stokes'sche und Newton'sche Reibung 91
- 3.6.8.4 Zusammenfassung der Reibungsgesetze 92
- 3.7 Gleichgewicht des Massenpunkts. Das Prinzip der virtuellen Arbeit 93
- 3.7.1 Gleichgewicht eines Massenpunkts. Das Problem der Statik 93
- 3.7.2 Das Prinzip der virtuellen Arbeit 95
- 3.7.2.1 Freier Massenpunkt 95
- 3.7.2.2 Gebundener Massenpunkt 96
- 3.7.2.3 Verallgemeinerung des Prinzips der virtuellen Verrückung 100
- 3.7.2.4 Prinzip der virtuellen Verrückung für konservative eingeprägte Kräfte 101
- 3.8 Das d'Alembert'sche Prinzip. Die formale Rückführung der Dynamik auf die Statik 101
- 3.8.1 Das d'Alembert'sche Prinzip 101
- 3.8.2 Die formale Rückführung der Dynamik auf die Statik 103
- 3.9 Bewegte Bezugssysteme (Relativbewegung). Trägheitskräfte 104
- 3.9.1 Beschreibung der Drehbewegung. Winkelgeschwindigkeit 104
- 3.9.2 Kinematik der Relativbewegung 105
- 3.9.2.1 Zusammenhang der Ortsvektoren 105
- 3.9.2.2 Zusammenhang der Geschwindigkeiten 106
- 3.9.2.3 Zeitliche Änderung von Skalaren und Vektoren 107
- 3.9.2.4 Zusammenhang der Beschleunigungen 109
- 3.9.3 Bewegungsgleichung des Massenpunkts 109
- 3.9.3.1 Galilei-Transformation 111
- 3.9.3.2 Konstante Relativbeschleunigung 113
- 3.9.3.3 Konstante Rotation 113
- Aufgaben 114
- 4 Anwendung der Newton'schen Grundgleichung auf spezielle Probleme der Dynamik eines Massenpunkts 117**
- 4.1 Eindimensionale Bewegungen. Freier Fall aus großer Entfernung 117
- 4.1.1 Rein zeitabhängige Kraft 118
- 4.1.2 Rein ortsabhängige Kraft 119
- 4.1.3 Rein geschwindigkeitsabhängige Kraft 120
- 4.1.4 Freier Fall aus großer Entfernung (ohne Reibung) 120

- 4.1.5 Fall in einem widerstehenden Medium 123
- 4.2 Schwingungen 126
 - 4.2.1 Harmonische Schwingungen ohne Dämpfung 126
 - 4.2.1.1 Verwendung des Energiesatzes 129
 - 4.2.1.2 Lösung mit Exponentialansatz 130
 - 4.2.1.3 Rückführung auf eine komplexe Differentialgleichung
 - 1. Ordnung 131
 - 4.2.1.4 Phasenraum 132
 - 4.2.1.5 Matrixdarstellung der Bewegungsgleichung 134
 - 4.2.2 Dreidimensionaler isotroper harmonischer Oszillator 134
 - 4.2.3 Gedämpfte Schwingung 135
 - 4.2.3.1 Gedämpfte oszillierende Bewegung 136
 - 4.2.3.2 Aperiodische Kriechbewegung oder überdämpfte Schwingung 138
 - 4.2.3.3 Aperiodischer Grenzfall 140
 - 4.2.4 Erzwungene Schwingung, Resonanz 140
 - 4.2.5 Methode der Green'schen Funktion 144
 - 4.2.5.1 Beschreibung einer stoßartigen Kraft: Dirac'sche δ -Funktion 146
 - 4.2.5.2 Green'sche Funktion der Schwingungsgleichung 148
 - 4.2.5.3 Erzwungene Schwingung mit beliebiger Störkraft 150
 - 4.2.5.4 Resonanz des ungedämpften Oszillators 153
- 4.3 Bewegung eines Massenpunkts im Gravitationsfeld 153
 - 4.3.1 Flächensatz und Energiesatz 154
 - 4.3.1.1 Formulierung des Problems in ebenen Polarkoordinaten 154
 - 4.3.1.2 Qualitative Diskussion der Bewegung 155
 - 4.3.1.3 Berechnung der Bahnkurve 156
 - 4.3.1.4 Berechnung der Umlaufzeit 158
 - 4.3.1.5 Zeitabhängigkeit der Bahnbewegung 159
 - Aufgaben 161
- 5 Newton'sche Mechanik von Punktsystemen 163**
 - 5.1 Punktsysteme und darauf wirkende Kräfte 163
 - 5.1.1 Äußere und innere Kräfte 163
 - 5.1.2 Eingeprägte und Zwangskräfte 166
 - 5.2 Impulssatz und Schwerpunktsatz 167
 - 5.2.1 Impulssatz 167
 - 5.2.2 Schwerpunktsatz 168
 - 5.2.3 Satz von der Erhaltung des Gesamtimpulses 171
 - 5.2.4 Bewegung durch Rückstoß 172
 - 5.3 Der Drehimpuls eines Systems von Massenpunkten 175
 - 5.3.1 Drehimpulssatz 175
 - 5.3.2 Drehimpulserhaltungssatz 176
 - 5.3.3 Abhängigkeit des Drehimpulses vom Bezugssystem 178

- 5.3.3.1 Zwei ruhende Bezugspunkte O und O' 178
- 5.3.3.2 Bewegter Schwerpunkt als Bezugssystem 179
- 5.4 Energiesatz 181
- 5.4.1 Satz über die Änderung der kinetischen Energie 181
- 5.4.2 Der Energiesatz 182
- 5.4.3 Zerlegung der potentiellen und kinetischen Energie 183
- 5.4.4 Die zehn ersten Integrale eines abgeschlossenen, konservativen System 186
- 5.5 Schwingungen von Systemen mit mehreren Freiheitsgraden 187
- 5.5.1 * Potentielle und kinetische Energie. Gleichgewicht 187
- 5.5.2 * Bewegungsgleichung. Eigenwerte und Eigenvektoren 191
- 5.5.3 * Allgemeine Lösung, Normalkoordinaten, Normalschwingungen 196
- 5.5.4 * Beispiel: gekoppelte Pendel 197
- Aufgaben 201

- 6 Lagrange-Formulierung der Mechanik 203**
- 6.1 Das Prinzip der virtuellen Arbeit und das d'Alembert'sche Prinzip 203
- 6.1.1 Das d'Alembert'sche Prinzip für Punktsysteme 203
- 6.1.2 Gleichgewicht eines Systems von Massenpunkten 206
- 6.2 Lagrange-Gleichungen 1. Art für Punktsysteme 207
- 6.2.1 Einteilung der Zwangsbedingungen 207
- 6.2.2 Lagrange-Gleichungen 1. Art 212
- 6.2.3 Energiesatz 213
- 6.3 Das Hamilton'sche Prinzip 215
- 6.3.1 Differential- und Integralprinzipien 215
- 6.3.2 Festlegung der zulässigen Vergleichsbahnen 217
- 6.3.3 Ableitung des Hamilton'schen Prinzips aus dem d'Alembert'schen Prinzip 220
- 6.3.4 Hamilton'sches Prinzip bei Kräften mit Potential 221
- 6.4 Grundaufgabe der Variationsrechnung 224
- 6.4.1 Mathematische Beispiele für Extremalprobleme 224
- 6.4.2 Zurückführung des Variationsproblems auf Euler—Lagrange-Gleichungen 229
- 6.4.3 Variationen und Variationsableitungen 232
- 6.4.4 Variationsprobleme mit Nebenbedingungen 233
- 6.4.4.1 Nebenbedingungen in integrierter Form 233
- 6.4.4.2 Nebenbedingungen in differentieller Form 234
- 6.4.5 Anwendungen der Euler-Lagrange-Gleichung 235
- 6.4.5.1 Kürzeste Verbindung zweier Punkte in der Ebene 235
- 6.4.5.2 Seil der Länge 1 unter dem Einfluss der Schwerkraft 236

- 6.5 Lagrange'sche Bewegungsgleichung 2. Art 238
- 6.5.1 Euler-Lagrange-Gleichungen der Mechanik 238
- 6.5.2 Euler-Lagrange-Gleichungen mit holonomen Nebenbedingungen 238
- 6.5.3 Allgemeine Koordinaten und Geschwindigkeiten 239
- 6.5.4 Lagrange-Gleichungen 2. Art für holonome Systeme mit Potential 242
- 6.5.5 Lagrange-Gleichungen 2. Art für nichtkonservative holonome Systeme 245
- 6.5.6 Bewegung eines Teilchens in einem elektromagnetischen Feld 247
- 6.5.7 * Integrale der Lagrange-Gleichungen. Allgemeine Impulskoordinaten. Erhaltungssätze 250
- 6.5.7.1 * Zyklische Variable, verallgemeinerte Impulse 250
- 6.5.7.2 * Explizit zeitunabhängige Lagrange-Funktion 251
- 6.5.8 * Nichtholonome Systeme. Zwangsbedingungen. Zwangskräfte 252
- 6.5.8.1 * Zwangsbedingungen. Freiheitsgrade 252
- 6.5.8.2 * Bewegungsgleichungen 255
- 6.6 * Symmetrien und Erhaltungssätze (Theorem von E. Noether) 259
- Aufgaben 267

7 Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen 269

- 7.1 Systeme mit einer Lagrange-Funktion (einem kinetischen Potential) 269
- 7.2 Hamilton-Funktion. Kanonische Gleichungen 270
- 7.3 Physikalische Bedeutung der Hamilton-Funktion 271
- 7.4 Beispiele 272
- 7.4.1 Massenpunkt mit konservativer Kraft. Kartesische Koordinaten 272
- 7.4.2 Massenpunkt mit konservativer Kraft. Kugelkoordinaten 273
- 7.4.3 Hamilton-Funktion für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld 273
- 7.5 * Poisson-Klammern 274
- 7.6 Erhaltungssätze. Zyklische Variable 275
- 7.6.1 Energieerhaltungssatz 275
- 7.6.2 Zyklische Variable 276
- 7.7 * Kanonische Transformationen 277
- 7.7.1 * Punkttransformation und kanonische Transformation 277
- 7.7.2 * Kanonische Transformationen 278
- 7.7.3 * Beispiele für kanonische Transformationen 280
- 7.7.3.1 * Identische Transformationen 280
- 7.7.3.2 * Vertauschung von Koordinaten und Impulsen 281

- 7.7.3.3 * Punkttransformation als Spezialfall einer kanonischen Transformation 281
- 7.7.3.4 * Harmonischer Oszillator 282
- 7.7.4 * Infinitesimale kanonische Transformation 283
- 7.7.5 * Invarianz der Poisson-Klammern 284
- 7.8 * Liouville-Gleichung. Bewegung im Phasenraum 286
- 7.8.1 * Konfigurationsraum und Phasenraum 286
- 7.8.2 * Bewegungsgleichungen im Phasenraum 287
- 7.8.3 * Symplektische Matrizen 288
- 7.8.4 * Jacobi-Matrix für kanonische Transformationen 289
- 7.8.5 * Benachbarte Bahnkurven 291
- 7.8.6 * Liouville-Gleichung 293
- 7.8.7 * Liouville-Theorem 296
- 7.9 * Hamilton-Jacobi'sche partielle Differentialgleichung 296
- 7.9.1 * Ableitung der Gleichung 296
- 7.9.2 * Bedeutung der Hamilton-Jacobi-Gleichung 298
- 7.9.3 * Zusammenhang mit der Wirkungsfunktion 298
- 7.9.4 * Wirkungsfunktion bei zeitunabhängiger Hamilton-Funktion 299
- 7.9.5 * Beispiel: Freier Massenpunkt in der Ebene 300
- 7.9.6 * Geometrische Bedeutung der Wirkungsfunktion 301
- 7.10 * Periodische Bewegung. Wirkungs- und Winkelvariable 303
- 7.10.1 * Systeme mit einem Freiheitsgrad 304
- 7.10.2 * Separable Systeme mit mehreren Freiheitsgraden 308
- 7.11 * Reguläre und Irreguläre Bewegung konservativer Systeme 310
- 7.11.1 * Charakterisierung der Dynamik im Phasenraum 310
- 7.11.2 * Integrierte Systeme 311
- 7.11.3 * Störungstheorie 313
- 7.11.4 * Kolmogorov-Arnold-Moser-Theorem 315
- 7.11.5 * Das Poincaré-Birkhoff-Theorem 316
- Aufgaben 318

8 Mechanik des starren Körpers 321

- 8.1 Definition und Freiheitsgrade des starren Körpers 321
- 8.2 Koordinatensysteme und Bewegung eines starren Körpers 322
- 8.2.1 Koordinatensysteme 322
- 8.2.2 Euler'sche Winkel 322
- 8.2.3 Infinitesimale Verschiebung des Körpers 326
- 8.2.4 Wechsel des Bezugssystems 326
- 8.3 Kinetische Energie des starren Körpers. Trägheitstensor 328
- 8.3.1 Kinetische Energie des starren Körpers 328
- 8.3.2 Der Trägheitstensor 329
- 8.3.2.1 Definition des Trägheitstensors 329

- 8.3.2.2 Hauptträgheitsachsen 331
- 8.3.2.3 Trägheitsellipsoid 333
- 8.3.2.4 Der Satz von Steiner 333
- 8.3.2.5 Berechnung des Trägheitstensors 334
- 8.3.2.6 Beispiele 335
- 8.4 Drehimpuls und Drehmoment. Bewegungsgleichungen eines starren Körpers 338
- 8.5 Energie- und Drehimpulssatz des kräftefreien Kreisels 340
- 8.6 Die Bewegungsgleichungen eines in einem Punkt festgehaltenen Körpers 341
- 8.7 Diskussion von Sonderfällen 343
 - 8.7.1 Isotroper Trägheitstensor 343
 - 8.7.2 Euler'sche Gleichungen im Hauptachsensystem für einen kräftefreien Kiesel 344
 - 8.7.2.1 Allgemeine Lösung 344
 - 8.7.2.2 Untersuchung der Stabilität der Rotation um Hauptträgheitsachsen 344
 - 8.7.2.3 Freie Rotation des symmetrischen Kreisels 346
 - 8.7.2.4 Freie Rotation um eine beliebige Achse 347
- A Zusammenhang zwischen den Ellipsenparametern in kartesischen und Polarkoordinaten 353**
- Literaturverzeichnis 355**
- Sachverzeichnis 357**