REnCiMa
Revista de Ensino de Ciências e Matemática

doi.org/10.26843/rencima eISSN: 2179-426X

EARLY ALGEBRA: A ÁLGEBRA QUE EMERGE DAS ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO UTILIZADAS POR ALUNOS DOS ANOS INICIAIS

EARLY ALGEBRA: THE ALGEBRA EMERGING FROM THE RESOLUTION STRATEGIES USED BY STUDENTS OF THE INITIAL YEARS

Lígia Sousa Bastos

Colégio Estadual Luís Eduardo Magalhães – SEC/BA, E-mail: ligiasousabastos@gmail.com

Vera Lúcia Merlini

Universidade Estadual de Santa Cruz, E-mail: vera.merlini@gmail.com

Resumo

Este artigo apresenta uma análise qualitativa das respostas dadas por quatro alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental no que tange os conceitos algébricos. O objetivo desse trabalho foi analisar as estratégias de resolução dos alunos frente a duas situações que contemplam o contexto das equações, dando enfoque aos conceitos algébricos que emergem dessas resoluções. A metodologia empregada para tal fim foi baseada no método clínico piagetiano em que os alunos eram indagados quanto às suas respostas quando respondiam às questões do instrumento diagnóstico aplicado. Quanto à análise dos dados essa foi qualitativa e interpretativa à luz do aporte teórico adotado. A pesquisa revelou que alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental conseguem resolver situações com ênfase nas equações e na relação funcional. Esses alunos têm grande potencial em desenvolver o pensamento algébrico, ficando evidente quando fazem uso de propriedades algébricas e apresentam ideias gerais a partir de situações particulares.

Palavras-chave: *Early Algebra*; Equações; Funções; Pensamento Algébrico.

Abstract

This paper presents a qualitative analysis of the answers given by four students of the Early Years of Elementary School regarding algebraic concepts. The objective of this work was to analyze the students' resolution strategies in two situations that contemplate the context of the equations, focusing on the algebraic concepts that emerge from these resolutions. The methodology employed for this purpose was based on the Piagetian clinical method in which students were asked about their answers when answering the questions of the applied diagnostic instrument. As for the data analysis, this was qualitative and interpretative in light of the theoretical framework adopted. Research has shown that students in the early years of elementary school can solve situations with an emphasis on equations and functional relationships. These students have great potential for developing algebraic thinking, becoming evident when they make use of algebraic properties and present general ideas from particular situations.

Keywords: *Early Algebra*; Equations; Functions; Algebraic Trought.

Introdução

Há algum tempo, pesquisas vêm sendo realizadas em torno do desenvolvimento do pensamento algébrico, desde os anos iniciais, abarcando que ele é fundamental para que alunos compreendam melhor a Álgebra no que concerne ao estudo sobre a sua estrutura. Cabe explicitar que o termo pensamento algébrico está sendo utilizado de acordo com Ponte, Branco e Matos (2009), que inclui três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas. Pesquisadores como Booth (1995), Lins e Gimenez (1997), Branco (2008), Rodrigues e Pires (2017) e Ferreira (2017) discutem a respeito de como é necessário e pode ser possível introduzir conceitos algébricos para alunos já no início da sua trajetória escolar.

Essas pesquisas motivaram algumas mudanças significativas no currículo escolar, sobretudo o brasileiro. Isso pode ser observado nos documentos oficiais nacionais que foram publicados desde a década de 1990, como os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997, 1998). Os PCN (BRASIL, 1998) sugeriam que se trabalhasse com alguns aspectos da álgebra já nos anos iniciais, como, por exemplo, generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, e que esses e outros aspectos só seriam ampliados nos anos finais do Ensino Fundamental.

Nesse quesito, a principal mudança observada pode ser vista na publicação da Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2017), que inclui desde o primeiro ano do Ensino Fundamental a Unidade Temática Álgebra. Essa mudança foi fundamental, pois, antes da BNCC, não existia um documento que estabelecesse a introdução das noções de Álgebra nos anos iniciais. De acordo com os PCN (1997), uma “pré-álgebra” pode ser desenvolvida já nos anos iniciais, no entanto, o trabalho com a Álgebra propriamente dita fica a cargo dos anos finais do Ensino Fundamental. Na BNCC, o ensino das noções de Álgebra deixa de ser uma recomendação, devendo perpassar por todos os anos da Educação Básica.

Assim sendo, com base no contexto atual do ensino da Matemática, e, sobretudo da Álgebra, este trabalho tem a intenção de discutir parte dos resultados já encontrados numa pesquisa de mestrado em andamento. Tal pesquisa tem como foco observar, por meio da aplicação de um instrumento diagnóstico, como os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental utilizam estratégias para resolver situações que envolvem sequências, equações e funções.

Nesse artigo é feita uma discussão acerca dos resultados obtidos nas situações que envolvem o contexto das equações. Nesse sentido, *o objetivo desse estudo é analisar as estratégias de resolução dos alunos frente a duas situações que contemplam* *o contexto das equações, dando enfoque aos conceitos algébricos que emergem dessas resoluções.*

Este artigo está dividido em cinco seções, em que a primeira dedica-se à exposição acerca do pensamento algébrico e a sua forte relação com a *Early Algebra*; a segunda coloca em evidência a forte relação das equações com as funções; a terceira aborda a metodologia empregada neste estudo; a quarta traz para a discussão a análise dos resultados obtidos, bem como as implicações a respeito do ensino das equações para os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental; e, por fim, são trazidas as considerações finais a respeito do que foi abordado neste texto.

A *Early Algebra* e o pensamento algébrico

A *Early Algebra* é traduzida como pré-álgebra ou mesmo álgebra precoce, no entanto o seu significado e o seu foco vão muito além da sua tradução. O interesse da *Early Algebra* é justamente apresentar noções de Álgebra mesmo para aqueles que estão no início da vida escolar e que ainda não têm acesso à Álgebra formal.

Apesar do termo *Early Algebra* ter sido cunhado há um pouco mais de uma década, as pesquisas em torno desse tema não são tão recentes assim. De fato, em grande parte, as pesquisas em torno do ensino da Álgebra para alunos dos anos iniciais da educação básica têm sido realizadas a partir da década de 1990 (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; KAPUT, 1999; BLANTON, 2007). Desse modo, com o volume de estudos desse tipo e com foco nessa temática, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM)[1] lança, em 1991 e 2000, como Princípios e Normas para o ensino de Matemática um bloco tratando especificamente do ensino da Álgebra desde os anos mais elementares da escolaridade nos Estados Unidos.

Assim sendo, se a *Early Algebra* é o campo em que estão centradas questões relativas ao ensino da Álgebra para as crianças, então o centro dela é o desenvolvimento do pensamento algébrico. Esse tipo de pensamento é considerado o responsável por fazer uso de “modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos” (BRASIL, 2017, p. 226).

Por ser considerado tão importante, vários autores (KAPUT, 1999; BLANTON; KAPUT, 2005; LINS; GIMENEZ, 1997; PONTE, BRANCO; MATOS, 2009) realizam discussões acerca do pensamento algébrico. Sendo assim, para Blanton e Kaput (2005), o pensamento algébrico é a forma que alunos generalizam as ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares e estabelecem essas generalizações a partir de um discurso argumentativo cada vez mais formal de acordo com a idade. As generalizações partem de um processo natural, ou seja, a depender da idade e da experiência do aluno. Sendo assim, a generalização pode ser expressa a partir de palavras ou de símbolos.

[1]O NCTM foi fundado em 1920 com o intuito de melhorar o ensino e a aprendizagem da Matemática nos Estados Unidos da América. Alguns anos depois esse conselho lançou os Princípios e Normas para o ensino de matemática que influenciou muitos países do mundo inteiro com o seu conteúdo. Para mais informações: https://www.nctm.org/About/

Para que seja possível desenvolver o pensamento algébrico, é preciso que ofereça aos alunos situações propícias a esse desenvolvimento, desde os anos iniciais da escolaridade básica, de acordo com o nível escolar de cada aluno. Sendo assim, eles possivelmente serão capazes de generalizar e estabelecer relações entre os objetos. Nessa perspectiva, o que se espera é que os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental possam, futuramente, compreender com mais facilidade as relações e as estruturas que subjazem a Álgebra ensinada nos anos finais.

A equivalência expressa por meio de equações e da relação funcional

Para compreender melhor o que está sendo discutido neste artigo, faz-se necessário a explanação a respeito da relação de equivalência, devido à importância que ela tem para a compreensão da igualdade, tanto nas equações quanto na relação funcional. Por isso, é necessário entender o que é uma relação de equivalência para entender o que subjaz a igualdade e a relação funcional.

De acordo com Ferreira (2013), uma relação R só é considerada de equivalência, caso estejam definidas três propriedades dentro de um conjunto X. Essas propriedades são fundamentalmente as seguintes:

(i) $\forall\ a \in X$, se aRa, a relação é reflexiva;

(ii) se aRb, então bRa, com $a, b \in X$, a relação é simétrica;

(iii) se aRb e bRc, então aRc, para $a, b, c \in X$, a relação é transitiva.

Entre as relações de equivalência tem-se a igualdade, que muitas vezes é compreendida como a única relação de equivalência, quando é apenas uma delas. Dessa forma, como exemplo pode-se tomar o caso de uma relação R no conjunto dos números inteiros de modo que aRb será uma relação de equivalência se e somente se $a - b$ for um número inteiro. Nesse caso é possível verificar que essa relação é reflexiva, pois $a - a = 0$ é um inteiro; é simétrica, pois supondo que $a - b$ é inteiro, têm-se que $b - a$ é também um inteiro, por isso bRa; é transitiva, pois supondo que aRb e bRc têm-se então $a - b$ e $b - c$ como números inteiros, então, $a - c = (a - b) + (b - c)$ é também um inteiro. Assim, verifica-se que a relação citada é uma relação de equivalência.

De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009), o sinal de igual (=) pode ser visto de dois modos distintos: o processual e o estrutural. Segundo esses autores, no que se refere ao modo processual, uma igualdade pode ser vista a partir de uma operação para indicar um resultado, seja ele numérico, seja numa simplificação de uma expressão algébrica, por exemplo, $4 + 5 = 9$. Por outro lado, em relação ao modo estrutural, uma igualdade pode ser entendida como uma relação de equivalência que pode aparecer na forma de equações, por exemplo, $4x + 2 = 10$; ou mesmo na forma de uma relação funcional, por exemplo, $y = 4x + 2$. A equivalência na relação funcional aparece quando existe a dependência entre variáveis que, em outras palavras, o valor da variável y depende do valor atribuído à variável x.

No que tange às equações, Caraça (2003) define uma equação polinomial[2] como sendo "toda igualdade da forma $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + \cdots + a_n = 0$", em que n é um número inteiro e positivo que é chamado o grau da equação, x é a incógnita e $a_0, a_1, \dots, a_n$ são chamados de coeficientes da equação. Uma equação nesse formato respeita as regras das equações algébricas que, segundo Garbi (2010), são todas aquelas que utilizam as operações algébricas usuais (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação inteira e radiciação) para chegar a definir o valor da incógnita.

No que concerne à relação funcional, é preciso deixar claro o que ela vem a ser. De acordo com Rüthing (1984), a relação funcional é o tipo de relação que define uma função. Para Bianchini e Machado (2010), na relação funcional a função da variável é deixar clara a relação de dependência entre duas ou mais variáveis num problema. Sendo assim, é possível afirmar que a relação funcional goza das três propriedades da relação de equivalência – reflexiva, simétrica e transitiva – na relação de dependência entre as variáveis dessa relação.

Em relação às funções, Munem e Foulis (1982) trazem a seguinte definição como regra ou correspondência:

> Uma *função* f é uma regra ou uma correspondência que faz associar um e somente um valor da variável y para cada valor de variável x. Deve ser bem compreendido que a variável x é denominada *variável independente*, pode tomar qualquer valor num certo conjunto de números [...]. A variável y é denominada *variável dependente*, visto que seu valor depende do valor de x (MUNEM; FOULIS, 1982, p. 21 - grifo do autor).

Os mesmos autores ainda fazem a observação de que "Uma equação que fornece y em termo de x determina uma função f" (MUNEM; FOULIS, 1982, p. 21). Os referidos autores deixam evidente a ideia da relação de funções com equações quando a equação coloca y em termos de x. Desse modo, Ponte, Branco e Matos (2009) afirmam que a função pode ser entendida como equivalência na relação de dependência entre variáveis. Sendo assim, é possível perceber a forte relação entre equações e funções quando elas são entendidas no contexto da relação de equivalência.

Metodologia

A pesquisa empreendida é de cunho qualitativo que de acordo com Bogdan e Binklen (1994) uma pesquisa nesses moldes preza mais pelos detalhes de todo o processo do que simplesmente pelo resultado do processo em si. Assim, para a realização dessa pesquisa foram entrevistados quatro alunos, sendo dois do 4º ano e dois

[2] Foi dada a definição de equação polinomial pelo fato desta ser o tipo mais simples de equação para ser apresentada para alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Ainda sendo o tipo mais simples, é preferível usar as equações de grau um, pois é a mais simples para ser adaptada ao contexto dos anos iniciais. A adaptação de uma equação é necessária para os anos inicias, porque não é recomendável apresentá-la através da escrita algébrica formal. O trabalho com a Álgebra é necessário para os anos iniciais, no entanto precisa ser feito com situações que se adequem às necessidades dos alunos desse período da escolaridade básica.

do 5º ano do Ensino Fundamental. O critério de escolha do 4º ano escolar se deu pelo fato desses alunos já terem passado pelo ensino da estrutura multiplicativa, e o 5º ano pelo fato de ser o último dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Quanto à escolha dos alunos, essa foi feita pelo professor da turma e que, segundo a escola, estavam na idade regular e possuíam notas iguais ou acima da média da escola.

A coleta de dados foi feita adotando-se o método clínico piagetiano, que, segundo Piaget (1979), consiste em fazer a criança falar livremente revelando as características mais importantes daquilo que se deseja observar, sem que haja qualquer tipo de manipulação. Assim sendo, os quatro alunos responderam a um instrumento diagnóstico que contemplava três situações concernentes às equações, e, na medida em que iam respondendo, eram feitas algumas indagações sobre como eles estavam pensando para resolver cada uma delas. Desse modo, as perguntas feitas não eram aleatórias. Assim, por serem previamente organizadas e dando margem à outras perguntas que pudessem ser feitas no decorrer do processo de resolução do instrumento diagnóstico, consideramos o que Fiorentini e Lorenzato (2007) classificam por entrevista semiestruturada. Aliado a esse tipo de entrevista, as perguntas eram feitas de modo que durante a entrevista os alunos revelassem o raciocínio implícito de suas respostas registradas no papel. A partir dessas respostas, seria possível ter a compreensão de como eles pensaram ao resolverem as situações a que foram expostos.

O instrumento diagnóstico que os alunos responderam consistia em um caderno de nove questões apresentado em papel A4 e com figuras coloridas. O conjunto de questões que havia no caderno não era somente de equações. No entanto, as que foram consideradas para esse trabalho foram somente duas das que caracterizavam situações de equações, que serão destacadas a seguir.

As duas questões que tratam da equivalência por meio das equações compõem um conjunto de situações encadeadas, em que, para resolver corretamente e com mais facilidade a segunda e a terceira questão, seria necessário ter respondido corretamente a primeira. Nas situações apresentadas, nas balanças aparecem caixas de três cores (amarela, vermelha e verde), e o "peso"[3] das caixas vermelha e verde está em função do "peso" da caixa amarela.

A caixa amarela foi considerada como a variável, independente das funções que representam o "peso" das caixas vermelha e verde. A caixa vermelha em função da amarela pode ser representada pela função $f(a) = 3a$, em que $a \in \mathbb{R}_+$. Em relação à caixa verde, a função que pode descrever seu "peso" é dada por $g(a) = 5a$, com $a \in \mathbb{R}_+$.

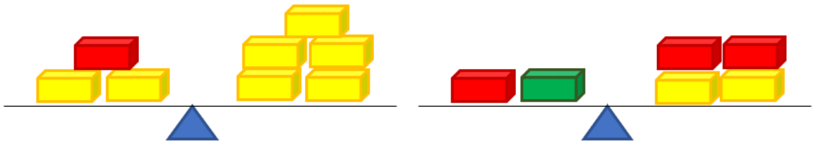
Sendo descritas desse modo as funções do "peso" das caixas, apresentar-se-á a Questão 1 (Q1) que se trata de duas equações representadas na forma de balança de dois pratos. A questão apresentada tem por objetivo relacionar os elementos presentes

[3] Neste trabalho é usado o termo "peso" para fazer referência à medida de massa de cada caixa. Esse termo foi utilizado, inclusive em toda a pesquisa pelo fato de os alunos estarem acostumados ao uso do termo para indicar a massa dos objetos. Assim, para não ter interferência nos resultados da pesquisa por uso de um termo ou nomenclatura recomendada, optou-se por usar o termo referido para não causar estranheza aos alunos por uso de termo desconhecido por eles.

nas equações, a fim de descobrir os valores das incógnitas presentes nas duas balanças que são apresentadas no problema da Figura 1.

Figura 1 – Primeiro problema do instrumento diagnóstico relacionado a Equações

Questão 1
Duas balanças estão equilibradas.



a) Quantas caixinhas amarelas valem uma caixinha vermelha?
b) Quantas caixinhas amarelas valem uma caixinha verde?

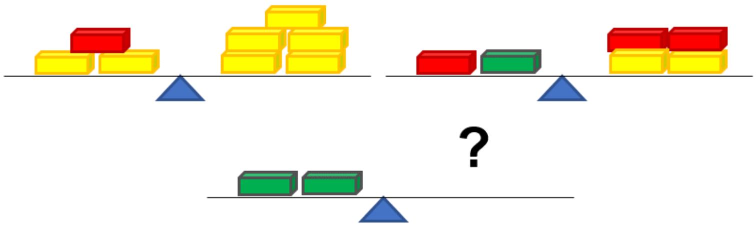
Fonte: Dados da Pesquisa

No caso da Q1, a incógnita presente na primeira equação, representada pela primeira balança, é a caixa vermelha, e a incógnita da segunda equação, representada pela segunda balança, é a caixa verde. Para resolver essa questão, o aluno deveria resolver a primeira equação e, usando a propriedade transitiva, resolveria a segunda equação.

A Questão 2 (Q2) apresenta as duas balanças que compõem a Q1. No entanto, é pedido para o aluno completar uma terceira balança que compõe a situação, a fim de deixar a balança equilibrada. Nessa questão, os “pesos” da balança continuam em função da caixa amarela. Por isso, continua-se a considerar as funções f e g. Após ter descoberto os valores das caixas vermelha e verde, o objetivo dessa questão é testar as possibilidades de fazer a balança equilibrar. A Q2 é apresentada pela Figura 2.

Figura 2 – Segundo problema do instrumento diagnóstico relacionado a Equações

Questão 2:
As duas primeiras balanças estão equilibradas. Complete a terceira balança com caixinhas de modo que ela também fique equilibrada.



Quantas e com quais cores de caixinhas que você pode colocar no lugar da interrogação para equilibrar a terceira balança?

Fonte: Dados da Pesquisa

No caso da Q2, ela faz menção a um sistema linear em que há três equações e duas incógnitas. Assim, se chamar a caixa vermelha de m e a caixa verde de d, é possível escrever o seguinte sistema de equações ou sistema linear:

$$2a + m = 5a$$
$$m + d = 2m + 2a$$
$$2d = x$$

Nesse sistema linear, verifica-se que a terceira equação não está definida e, por isso, a solução para ela depende das demais equações do sistema. Assim sendo, é possível classificar esse sistema linear, conforme Lipschutz (1994), como sistema consistente com infinitas soluções.

A fim de identificar os alunos por meio do ano escolar, eles receberam nomes fictícios, sendo os alunos do 4º ano Abel e Antônio, e os alunos do 5º ano Bento e Beto. Para a produção dos dados, além do próprio instrumento diagnóstico impresso, foi utilizada também a videogravação, para registrar as falas, como também a forma como utilizavam outros mecanismos, como gestos, além do papel, para expressar as suas respostas.

A análise seguiu observando os registros dos alunos no caderno de questões e as gravações em vídeo e áudio capturados durante a aplicação do instrumento diagnóstico. Para a análise, procurou-se interpretar (FIORENTINI e LORENZATO, 2007), de acordo com as características do pensamento algébrico, os conceitos algébricos que emergem das estratégias de resolução utilizadas pelos alunos frente às três situações que contemplam o contexto de equações. Assim, buscou-se compreender as atitudes adotadas por esses alunos ao resolverem situações de equivalência, que dizem respeito às equações, mas que também possuem referências na relação funcional.

Resultados e Discussão

A fim de facilitar o entendimento sobre os dados obtidos a partir do instrumento diagnóstico, esta seção trará para a discussão as impressões acerca de cada uma das respostas das duas questões analisadas neste artigo. As respostas das questões serão analisadas separadamente, observando as estratégias que os alunos apresentaram.

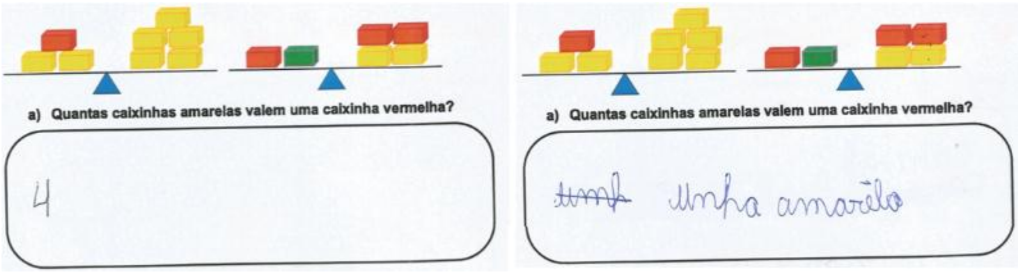
Todos os quatro alunos responderam às duas questões referentes às equações do instrumento diagnóstico. No geral, demoraram em média 10 minutos para resolverem cada situação. Durante a resolução, com alguns deles era possível o diálogo enquanto respondiam, pois eles mesmos interagiam com a pesquisadora. No entanto, com outros era necessário um tempo maior para se estabelecer uma conversa e deixá-los à vontade, uma vez que todo o processo de coleta de dados estava sendo filmado enquanto respondiam ao instrumento diagnóstico.

Em relação às respostas apresentadas pelos alunos na Q1, apenas um deles respondeu corretamente aos dois itens, um deles acertou o item (a) e os outros dois erraram ambos os itens da questão. Em relação à Q2, o mesmo aluno que acertou toda a Q1 respondeu corretamente a Q2. Os outros três, apesar de não terem respondido corretamente, apresentaram respostas coerentes com o que haviam respondido na Q1.

Tendo em vista os resultados obtidos da Q1, e o que ocorreu para os alunos apresentarem a resposta da Q2, a Figura 3 apresenta os extratos dos protocolos dos dois alunos que não responderam corretamente a Q1.

Figura 3: Respostas dos alunos Antônio e Beto, respectivamente, para a Q1 (a)

Questão 1: Duas balanças estão equilibradas.



Fonte: Dados da Pesquisa

A partir das respostas dadas por Antônio e Beto, é razoável supor que eles não compreenderam o problema. Assim sendo, a seguir serão apresentados os trechos das entrevistas dos alunos Antônio e Beto ao responderem ao instrumento diagnóstico, conforme os extratos a seguir.

> **Pesquisadora:** Quantas caixinhas amarelas valem uma caixinha vermelha?
> (Após perguntar quanto valia a caixa vermelha, Antônio responde imediatamente.)
> **Antônio:** Quatro? (Responde com um tom de dúvida.)
> **Pesquisadora:** Como foi que você achou quatro?
> **Antônio:** A caixinha vermelha é do mesmo tamanho (referindo-se ao tamanho da caixa amarela), mas contando elas assim (apontando para cada uma das caixas vermelhas presentes nas duas balanças) dá pra saber mais ou menos que são quatro que vale.

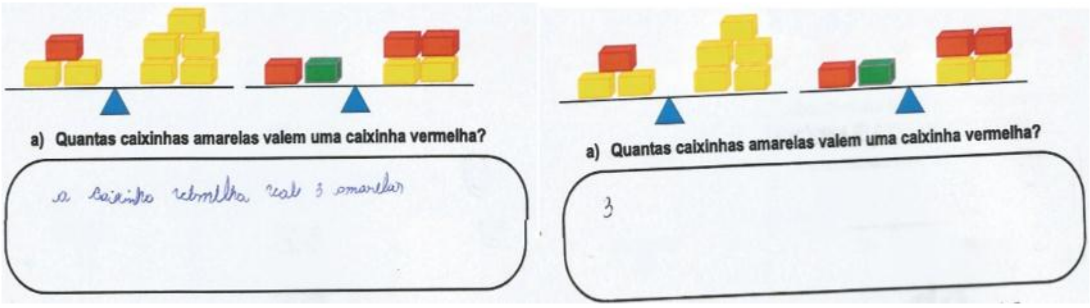
A partir do diálogo de Antônio com a pesquisadora, é possível observar que ele apenas contabilizou quantas caixas vermelhas havia nas duas balanças e afirmou que essa quantidade seria o “peso” da caixa vermelha em função da caixa amarela. Antônio ainda chegou a afirmar que a caixa vermelha é do mesmo tamanho da caixa amarela, o que demonstra que ele, apesar de não ter respondido corretamente, conseguiu estabelecer a relação entre as quantidades de caixa vermelha e de caixas amarelas. A seguir, é apresentado o trecho da entrevista com o aluno Beto.

> **Pesquisadora:** Quantas caixinhas amarelas valem uma caixinha vermelha?
> (Após um longo tempo pensando ele responde.)
> **Beto:** aqui eu pensei em uma.
> **Pesquisadora:** Mas, me explica como foi que você pensou que uma vermelha vale uma amarela?
> **Beto:** Porque eu estava pensando em dividir.
> **Pesquisadora:** Mas como seria essa divisão?
> **Beto:** Eu estava pensando em dividir as amarelas pela vermelhas.

Após passar um tempo significativo, aproximadamente 20 minutos, Beto respondeu que a caixa verde valia duas caixas amarelas. Somente quando ele já estava respondendo a Q2, ele conseguiu chegar a uma resposta para o item (a) da Q1. Desse modo, ele constatou que a caixa vermelha valia quatro amarelas. O que demonstra que Beto não compreendeu o problema e, por meio de um raciocínio, que não foi possível entender nem mesmo durante a entrevista, ele chegou à resposta mostrada na imagem à direita na Figura 3 para o item (a) da Q1. A seguir, são apresentadas na Figura 4 as imagens das respostas dos alunos Abel e Bento.

Figura 4 - Respostas dos alunos Abel e Bento, respectivamente, para a Q1 (a)

Questão 1: Duas balanças estão equilibradas.



Fonte: Dados da Pesquisa

A resposta do item (a) da Q1, à esquerda, apresentada na Figura 4 é do aluno do 4º ano, Abel, e a da direita do aluno do 5º ano, Bento, e as duas respostas estão corretas. Para compreender como os dois responderam, faz-se necessário expor os extratos da entrevista feita durante a aplicação do instrumento.

> (No momento em que a pesquisadora explicava a situação, Abel já havia compreendido a situação fazendo uma afirmação)
> **Abel:** “Já peguei!”
> **Pesquisadora:** Quantas caixinhas amarelas valem uma caixinha vermelha?
> **Abel:** Tá! Se aqui tem cinco e aqui tem três... Aqui tem uma vermelha... Então se eu por... (Entendendo que era colocar três amarelas no lugar da vermelha) Aqui vale três!

Observando o trecho da entrevista com o aluno Abel, é possível concluir que o aluno Abel do 4º ano utilizou a estratégia de comparação de “pesos”. Desse modo, a equação resolvida por ele foi $2a + m = 5a$. Assim, se em um prato havia duas caixas amarelas ($2a$) e uma vermelha (m) e no outro prato havia cinco caixas amarelas ($5a$), por comparação, é razoável supor que ele concluiu que a caixa vermelha só poderia representar três caixas amarelas para que igualasse o “peso” referente ao prato das cinco caixas amarelas. A seguir, é apresentado um trecho da entrevista com o aluno Bento, em que evidencia o raciocínio utilizado por ele para responder o item (a) da Q1.

> **Pesquisadora:** A pergunta é “Quantas caixinhas amarelas vale uma vermelha?”
> Silencia.

> **Bento:** Três?
> **Pesquisadora**: Por que você pensou logo que é três?
> **Bento:** Porque aqui tem dois (referindo às duas caixas amarelas que estão no prato esquerdo da primeira balança) e aqui tem... Aí tirando dois ia ficar três (referindo-se às caixinhas amarelas que estão no prato direito da balança).
> **Pesquisadora:** Hum! Muito bem.

O aluno Bento do 5º ano apresenta uma estratégia um pouco diferente. Ele usa o princípio básico de equivalência, utilizado na resolução de equações quando é feita uma simplificação acrescentando ou retirando de ambos os membros da igualdade a mesma quantidade. Apesar de ele não ter registrado em seu protocolo, ele explicou passo a passo sua estratégia de resolução na entrevista. Do ponto de vista algébrico, o aluno resolveu da seguinte maneira:

$$2a + m = 5a \Rightarrow$$

$$2a + m - \mathbf{2a} = 5a - \mathbf{2a} \Rightarrow$$

$$m = 3a$$

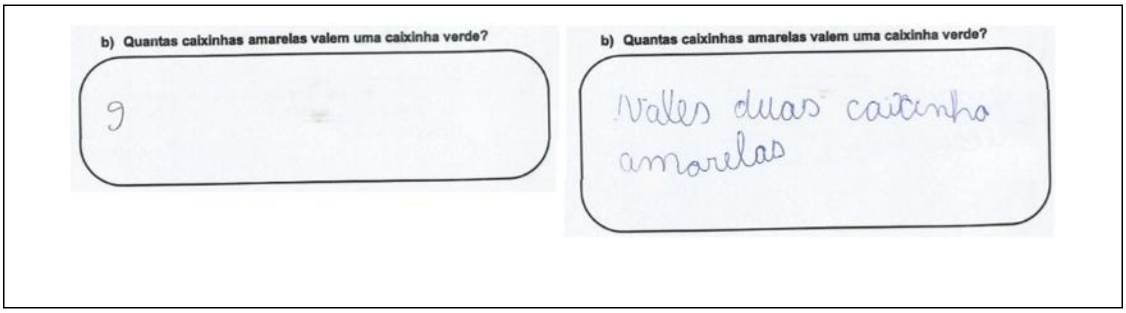
No caso do item (a), como nas duas situações utilizou-se do "peso" da caixa amarela *(a)* para representar o "peso" da caixa vermelha *(m)*. É preciso esclarecer que esse resultado independe do "peso" da caixa amarela, ou seja, não é necessário saber quanto ela pesa, mas quantas delas é preciso para formar uma caixa vermelha. O valor $m = 3a$ encontrado diz respeito à quantidade de caixas amarelas, sendo que o "peso" da caixa pode ser representado por a, e que a pode assumir qualquer valor não negativo. Dessa forma, fica evidente a relação entre a quantidade da caixa vermelha em função da caixa amarela, que pode ser representada da seguinte forma: $f(a) = 3a$. Essa relação de dependência entre o "peso" da caixa vermelha em função da caixa amarela fica evidente quando Abel (4º ano) exemplifica a partir de um contexto o "peso" da caixa vermelha.

> **Pesquisadora:** Me explica como foi que você pensou que a vermelha vale três amarelas.
> **Abel:** Porque aqui... Como tem três aqui já tem cinco. Então, se têm duas amarelas aqui e duas amarelas aqui (se referindo aos dois pratos da balança) e aqui tem uma vermelha, então se aqui pesar 5Kg (se referindo a cada caixa amarela) essa aqui pesa 15Kg (se referindo à caixa vermelha).

A partir desse extrato é possível que Abel já tenha conseguido generalizar a relação que existe entre o "peso" das caixas. Conforme Blanton e Kaput (2005), o aluno apresentou uma generalização a partir de uma situação particular. Nesse sentido, segundo Ponte, Branco e Matos (2009), é possível que esse aluno já esteja pensando na Álgebra em termos de estruturas, mesmo que intuitivamente, e compreende essa relação de equivalência como uma relação funcional. Ainda de acordo com os referidos autores, o aluno entende o sinal de igual na sua concepção estrutural. Além disso, no que concerne ao item (a) da Q1, é possível afirmar que apenas os alunos Abel e Bento utilizaram o que Kieran (1995, p. 105) chama de abordagem algébrica, que é quando "focaliza as *inversas* das operações dadas". Em conformidade com a referida autora, os alunos utilizam operações inversas para resolver uma equação e encontrar o valor da incógnita.

Em relação ao item (b) da Q1, apenas Bento a acertou. Apesar de apenas um aluno tê-la acertado, será mostrado aqui como os demais alunos responderam a este item. O que será ressaltado na análise das respostas que os alunos apresentaram é o raciocínio empregado por eles para chegarem à resposta dada. Por isso, a primeira parte da análise refere-se às respostas apresentadas pelos alunos Antônio e Beto, que também não responderam corretamente ao item (a) da Q1. Para compreender o que os referidos alunos responderam e pensaram, seguem as imagens dos protocolos dos alunos Antônio e Beto na Figura 5.

Figura 5 - Respostas dos alunos Antônio e Beto para a Q1 (b)

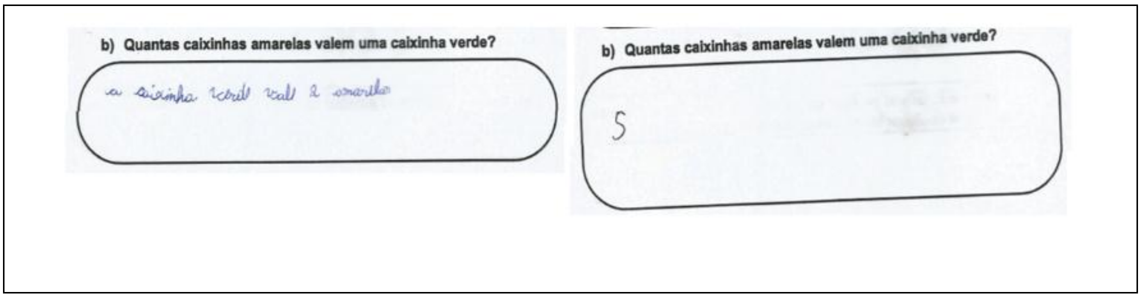


Fonte: Dados da Pesquisa

Cabe ressaltar que, apesar de terem respondido errado ao item (b), os dois alunos estimaram que a caixa verde tinha o "peso" maior do que a caixa vermelha. Esse dado é importante, uma vez que eles perceberam que as caixas de cores distintas têm "pesos" distintos e, para que haja equilíbrio na balança, necessariamente a caixa amarela deve ser, de fato, a mais leve.

A seguir, são apresentados os extratos dos protocolos dos alunos Abel e Bento. Desses dois alunos, apenas Bento apresentou resposta correta para o item (b) da Q1. A Figura 4 traz as respostas dadas por esses alunos para esse item.

Figura 6 - Respostas dos alunos Abel e Bento para a Q1 (b), respectivamente



Fonte: Dados da Pesquisa

Na Figura 6, são apresentadas as respostas dos alunos Abel[4] e Bento para o item (b) da Q1. No entanto, os registros deles não deixam explícitas as estratégias de resolução de cada questão. Por isso, para que fique mais bem compreendido, seguem os

[4] O aluno Abel escreve como resposta para o item (b) da Q1 "a caixinha verde vale 2 amarela".

extratos das entrevistas feitas com os alunos enquanto resolviam o item (b) da Q1. O trecho a seguir foi retirado da entrevista feita com o aluno Abel.

> (Depois de ter anotado a resposta, a pesquisadora pergunta)
> **Pesquisadora:** Por que você chegou a essa conclusão que a caixinha verde vale duas caixinhas amarelas?
> **Abel:** Porque, se o vermelho vale três, o verde aqui... Se eu tivesse tirado o vermelho, o verde não ia aguentar os dois vermelhos, porque o vermelho vale três caixinhas (se referindo às três caixinhas amarelas). Então o verde só tá dando um apoio para poder conseguir essas duas caixinhas (se referindo às duas caixinhas amarelas que estão no prato da segunda balança) pra poder equilibrar.
> **Pesquisadora:** Me explica de novo!
> **Abel:** Se a verde vale duas e o vermelho vale três, então se o vermelho tivesse ficado aqui (se referindo ao prato que tem duas caixas amarelas), esse lado ia ficar mais equilibrado (no sentido de ficar mais "pesado") que esse.

O que esse diálogo demonstra é que o aluno Abel conseguiu identificar a relação da caixa vermelha com as caixas amarelas. No entanto, ele não conseguiu utilizar essa informação para a segunda equação. O que ele teria que fazer era apenas uma substituição, de modo que se $m = 3a$, então onde se tem $2m + 2a = 2(3a) + 2a = 8a$. Sendo assim, se a equação é dada por $m + d = 2m + 2a$, então, por transitividade, $m + d = 8a$. Uma vez que ele não conseguiu transpor essas informações para a segunda equação, resultou no erro. O que fica evidente também no diálogo é que, na tentativa de relacionar os valores ali presentes, Abel relaciona a caixa verde com as duas caixas amarelas. Entretanto, ele não percebeu que a balança não se equilibraria porque em um prato havia uma caixa vermelha e, no outro, duas.

Bento foi o único aluno, dos quatro entrevistados, que apresentou resposta correta para o item (b) da Q1. A seguir, será apresentado o extrato da entrevista feita com ele enquanto resolvia a referida questão.

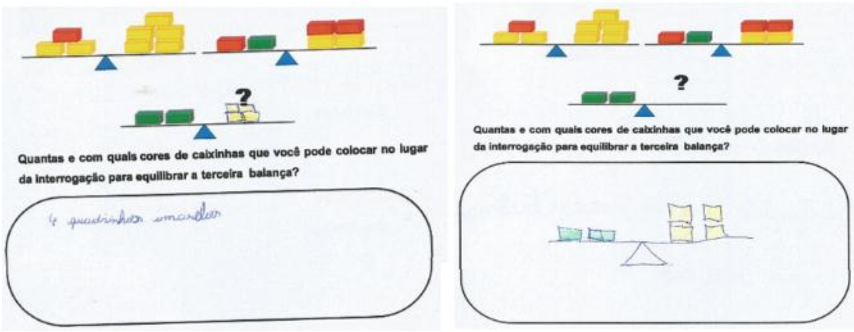
> Após um tempo significativo de espera, Bento diz o valor da caixa verde.
> **Bento:** Cinco?
> **Pesquisadora:** Como foi que você chegou a essa resposta?
> **Bento:** É porque aqui tem oito (referindo-se ao 2º prato da 2ª balança) e aqui (referindo-se ao 1º prato da 2ª balança) desse lado tem três caixinhas amarelas (substitui direto o valor na caixa vermelha), aí precisa de cinco (referindo-se à caixa verde) pra poder ficar oito.

A partir das respostas de Bento, é possível perceber que ele consegue relacionar os valores das incógnitas presentes nas duas equações. Isso fica mais evidente quando ele se dirige à caixa vermelha e, na sua fala, já substituindo direto por três caixas amarelas. Além disso, através da propriedade transitiva ele consegue encontrar o valor da caixa verde apenas fazendo substituições. Outro fato importante é o de que ele consegue estabelecer a equivalência entre os dois pratos, tanto da primeira quanto da segunda balança.

Em relação à Q2, para resolvê-la, os alunos precisariam apenas transpor as informações obtidas na Q1 para resolver o sistema que está implícito na Q2. Dos quatro alunos, apenas um respondeu corretamente a questão. No entanto, vale destacar que Abel e Beto a responderam de maneira coerente, pois, como a resposta da Q2 dependia da resposta da Q1, eles deram resposta para a Q2 de acordo com o que responderam na Q1. No caso de Antônio, ele respondeu de uma forma que não é coerente com o que ele havia respondido para a Q1. Daqui em diante, serão apresentados os resultados obtidos dessa questão. Para compreender o que cada aluno fez, começar-se-á por apresentar o registro escrito de Abel, Antônio e Beto para a Q2. Para iniciar a discussão, a Figura 7 traz as imagens das respostas dadas por Abel e Beto para Q2.

Figura 7 - Respostas dos alunos Abel e Beto para a Q2

Questão 2: As duas primeiras balanças estão equilibradas. Complete a terceira balança com caixinhas de modo que ela também fique equilibrada.



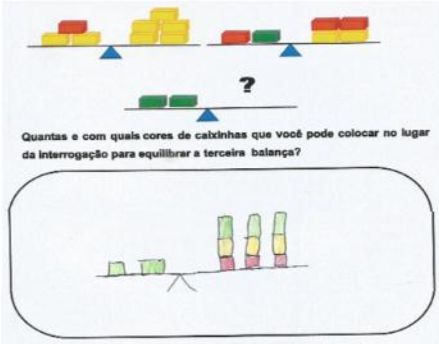
Fonte: Dados da Pesquisa

Para esses alunos, essa questão tinha resposta única, ainda que ela se configure como um sistema consistente com infinitas soluções. Esse tipo de raciocínio utilizado por Abel e Beto é chamado por Kieran (1995) de raciocínio aritmético, que é quando o aluno admite uma resposta única e numérica para um determinado problema. Apesar de terem dado uma única resposta para essa situação, eles compreenderam que cada caixinha verde corresponde a duas caixas amarelas e, por isso, para equilibrar a balança, seriam necessárias as quatro caixas amarelas no segundo prato. Os dois alunos partiram do mesmo raciocínio e responderam com base na Q1 (b). Os dois alunos afirmaram na Q1 (b) que a caixa verde valia duas amarelas e, por isso, utilizaram esses valores. O que eles não compreenderam foi que essa situação se tratava de um sistema consistente e, assim, havia mais de uma solução (LIPSCHUTZ,1994).

Para compreender o que o aluno Antônio fez, segue a imagem da Q2, mostrada pela Figura 8, respondida por ele durante a aplicação do instrumento diagnóstico.

Figura 8 - Resposta do aluno Antônio para a Q2

Questão 2: As duas primeiras balanças estão equilibradas. Complete a terceira balança com caixinhas de modo que ela também fique equilibrada.



Fonte: Dados da Pesquisa

Em relação ao aluno Antônio, é possível perceber que ele não conseguiu nem mesmo relacionar as informações dadas por ele na Q1. É possível inferir também que ele não conseguiu entender o problema e, por isso, não conseguiu dar uma resposta coerente. Para compreender melhor o raciocínio desse aluno, segue um trecho da entrevista dele enquanto respondia ao instrumento diagnóstico.

> **Pesquisadora:** Antônio, agora só explica para a tia[5] de novo como foi que você pensou que tem que ter três de cada?
> **Antônio:** Porque uma pode ser mais pesada que a outra. Aí, a vermelha pode ser mais pesada que a amarela ou a amarela pode ser mais pesada que a vermelha. E a verde pode ser mais pesada do que a vermelha com a amarela.

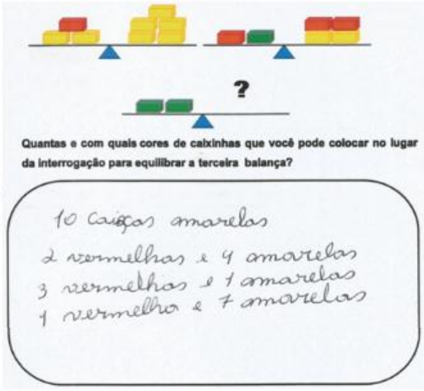
A partir desse trecho da entrevista, percebe-se que para o aluno, o “peso” das caixas não tinha uma dependência. Além disso, apesar de Antônio compreender que as caixas amarela e vermelha possuíam “pesos” diferentes, ele não conseguiu descobrir qual delas tinha “peso” maior. O que ele conseguiu identificar foi que a caixa verde é a que possui o maior “peso”. Contudo, não conseguiu dizer nada sobre as possibilidades de resposta que o problema tem.

Dos quatro alunos, o único que respondeu corretamente foi Bento. Logo a seguir, a Figura 9 mostra o registro escrito do aluno para a Q2.

[5] Tia é um termo empregado comumente na escola. Esse termo é mais utilizado no contexto dos anos iniciais do Ensino Fundamental. O termo foi também utilizado ao entrevistar os alunos, pelo fato de eles estarem mais acostumados com esse tipo de tratamento e facilitar a comunicação entre a pesquisadora e os alunos.

Figura 9 - Resposta do aluno Bento para a Q2

Questão 2: As duas primeiras balanças estão equilibradas. Complete a terceira balança com caixinhas de modo que ela também fique equilibrada.



Fonte: Dados da Pesquisa

A partir da Figura 9, é possível perceber que ele compreendeu o problema e respondeu corretamente de acordo com as informações dadas por ele na Q1. Além disso, ele compreendeu também que aquela situação tinha mais de uma resposta e, portanto, ele apresenta aí quatro das sete possibilidades de solução para o sistema. No momento da resolução, Bento fez a substituição dos valores das caixas diretamente e sem demonstrar dúvidas. Em nenhum momento, ele ficou em dúvida ao responder a questão, o que demonstra que ele entendeu que, respondendo à Q1, ele havia resolvido o problema para a Q2. O único trabalho que havia na Q2 era apenas equilibrar a balança a partir dos valores encontrados na Q1.

Considerações Finais

Este trabalho teve como objetivo *analisar as estratégias de resolução dos alunos frente a duas situações que contemplam o contexto das equações, dando enfoque aos conceitos algébricos que emergem dessas resoluções.* Diante dos dados analisados, foi possível identificar algumas características importantes em relação ao pensamento algébrico desses alunos. Além disso, algumas características em relação à própria Álgebra foram identificadas nas suas estratégias.

A partir do que foi identificado nas respostas dos alunos, é possível inferir que, de todos os alunos que responderam a Q1, apenas os alunos Abel e Bento utilizaram a Álgebra para resolver as equações, quando esses alunos demonstram usar até mesmo operações inversas para encontrar os valores das incógnitas presentes nas equações e no sistema de equações. Nesse sentido, isso se traduz nas estratégias adotadas pelos alunos, em que eles utilizaram princípios algébricos, como somar ou subtrair termos de ambos os membros da igualdade, e propriedades, como a transitiva, por exemplo, para resolver as equações. Em relação à Q2, é possível afirmar que os alunos conseguem resolver sistemas de equações com mais de uma incógnita. Todavia, a dificuldade dos alunos ao resolverem esse tipo de questão é a de que eles não conseguem pensar em várias possibilidades de respostas, o que é caracterizado pelo raciocínio aritmético, que ocorre quando os alunos estão acostumados a ter uma resposta única e numérica para o problema.

É possível inferir também que situações que envolvem a equivalência no contexto das equações não se configura como situações simples para estudantes dessa faixa etária e desses anos da educação básica. Isso significa que as equações são um grande obstáculo para esses alunos. Nem sempre eles conseguem relacionar os elementos presentes nos membros de uma equação, mesmo ela sendo apresentada na sua forma icônica, como é o caso da balança de dois pratos.

No que diz respeito ao pensamento algébrico, foi possível identificar a possibilidade de generalização de situações por parte de alguns alunos. Assim, foi possível perceber que eles apresentam essas generalizações a partir de algumas situações particulares. Isso é verificado quando Abel extrapola a sua generalização do “peso” da caixa vermelha em função da caixa amarela, enfatizando a relação de dependência entre os “pesos” das caixas.

O que esses resultados evidenciam, a partir desse diagnóstico, é o fato de que esses alunos têm grande potencial em desenvolver o pensamento algébrico, ficando evidente quando eles fazem uso de propriedades algébricas e apresentam ideias gerais a partir de situações particulares. Nesse sentido, esses alunos apresentam fortes características de que podem compreender conceitos Matemáticos nesses anos da educação básica, deixando evidente a possibilidade de fazer um trabalho com esses alunos com vistas ao desenvolvimento do pensamento algébrico. O que pode ser feito para que esse tipo de pensamento seja desenvolvido é uma adaptação de materiais ou de informações, que apresentem as noções de Álgebra, que esses alunos precisam compreender e saber aplicar nas situações que sejam postas para eles resolverem.

Talvez fosse necessário fazer uma pesquisa maior e com mais profundidade em que fosse possível observar as limitações do ensino de equações para os alunos do Ensino Fundamental. Possivelmente, descobrindo as lacunas no ensino desse conteúdo tão importante, é que poderia ser feito um trabalho já nos anos iniciais abordando as noções das equações a partir da equivalência e com o uso do sinal de igualdade. É razoável afirmar que, mesmo não tendo compreendido as limitações do ensino de equações, é necessário introduzir o quanto antes as noções de equivalências nos anos iniciais da escolaridade. Não se pode privar os alunos, mesmo pequenos, de fazerem as descobertas inerentes à Matemática que a Álgebra pode proporcionar.

Referências

BIANCHINI, B. L.; MACHADO, S. D. A. A Dialética entre Pensamento e Simbolismo Algébricos. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.12, n.2, pp. 354-368, 2010.

BLANTON, M. et al. **Early Algebra.** In: VICTOR, J. K. (Ed.) Algebra: Gateway to a Technological Future, Columbia/USA, The Mathematical Association of America, 2007, p. 7 –14.

BLANTON, M.; KAPUT, J. **Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning.** Journal for Research in Mathematics Education, v. 36, nº 5, p. 412–446, 2005.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCCpublicacao.pdf>. Acesso em: 14 de julho de 2017.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTLE, A. P. **As idéias da álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

BRANCO, N. C. V.**O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico** Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade de Lisboa, Portugal, 2008.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 5ª ed. Lisboa: Gradiva Publicações LTDA, 2003.

FERREIRA, J. **A construção dos números**. 3ª edição. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2013.

FERREIRA, M. C. N. Álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental: uma análise dos documentos curriculares nacionais. **REnCiMa**, v. 8, n. 5, p. 16-34, 2017.

FIORENTINI, D; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP. Autores Associados, 2007.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL. A. Contribuições para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-posições**, v,4, n. 1, p. 78-91, 1993.

GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas**. 4ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

KAPUT, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema& T. Romberg (Orgs.), **Mathematics classrooms that promote understanding**(pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

KATZ, Victor. J. **Algebra**: Gateway to a Technological Future, Columbia: MAA Reports, 2007

KIERAN, C. **Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra.** In: COXFORD, A. F.; SHULTLE, A. P. As idéias da álgebra. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p. 104 – 110.

LINS, R.C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. Campinas: Papiros, 1997 (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

LIPSCHUTZ, S. Álgebra linear: teoria e problemas. 3ª ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1994.

MUNEM, M. A.; FOULIS, D. J. **Cálculo**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Koogan, 1982.

PIAGET, J. **A representação do mundo na criança**. Tradução: Rubens Fiúza. Rio de Janeiro: Record, 1079. 318p

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico.** Lisboa: DGIDC, 2009.

RODRIGUES, I. C.; PIRES, C. M. C. Um mapeamento de teses e dissertações que abordam o ensino e a aprendizagem da álgebra no Ensino Fundamental no Brasil. **REnCiMa**, v.8, n.2, p.162-182, 2017.

RÜTHING, D. Some Definitions of the Concept of Function from John Bernoulli to N. Bourbaki. **The Mathematical Intelligencer**, v. 6, n. 4, p. 72-77, 1984.