*УДК 519.224.22* *DOI: 10.32362/2500-316X-2018-6-6-74-83*

# СВОЙСТВА ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ПОКАЗАТЕЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРЕТО

**И.С. Пулькин[@],**
**А.В. Татаринцев**

*МИРЭА – Российский технологический университет, Москва 119454, Россия*
*[@]Автор для переписки, e-mail: pulkin@mirea.ru*

В настоящей работе исследуются статистические свойства оценки максимального правдоподобия показателя распределения Парето. Степенные законы распределения, такие, как распределение Парето, в последнее время привлекают пристальное внимание исследователей в самых различных областях науки и техники, от экономики и лингвистики до анализа интернет-трафика. Поэтому задача определения показателя степенного закона по заданной выборке имеет исключительную практическую важность. Аналитически доказано, что предлагаемая оценка является смещенной, хотя и состоятельной, и предложена формула, устраняющая смещение. Аналитически выведена формула для дисперсии несмещенной оценки. Кроме того, поставлена и аналитически решена задача о нахождении функции распределения и плотности вероятности этой оценки как случайной величины. Далее получены те же формулы для математического ожидания и дисперсии, но уже исходя из ранее найденной плотности вероятности. Полученные результаты могут быть использованы в различных областях человеческой деятельности, например, для предсказания интенсивности природных и техногенных катастроф.

***Ключевые слова:*** распределение Парето, метод максимального правдоподобия, несмещенная оценка.

# PROPERTIES OF THE MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATES OF THE EXPONENT OF PARETO DISTRIBUTION

**I.S. Pulkin[@],**
**A.V. Tatarintsev**

*MIREA – Russian Technological University, Moscow 119454, Russia*
*[@]Corresponding author e-mail: pulkin@mirea.ru*

This paper investigates the statistical properties of maximum likelihood estimation index of the Pareto distribution. In recent years, power distribution laws such as Pareto distribution attract the attention of researchers in various fields of science and technology, from economics and linguistics to Internet traffic analysis. Therefore, the problem of determining the exponent of the power law for a given sample is of exceptional practical importance. It is analytically proved that this estimate is biased, although valid. A formula that eliminates the bias is proposed. Besides, a formula for the variance of the unbiased estimate is analytically derived. In addition, the problem of finding the distribution function and probability density of this estimate as a random variable is set and analytically solved. Next, a formula for mathematical expectation and dispersion based on previously determined probability density is found. The obtained results can be used in various fields of human activity, for example, to predict the intensity of natural and man-made disasters.

***Keywords:*** Pareto distribution, method of maximum likelihood, unbiased estimation.

В последнее время задачи, связанные с нахождением оценок параметров распределения Парето и его аналогов, привлекают внимание исследователей по всему миру. Таким исследованиям посвящены, в частности, работы [1–6].

Распределение Парето задается плотностью вероятностей

$$\rho(x) = \frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{\theta}{x}\right)^{\alpha+1}$$

при $x > \theta$. При $x < \theta$ плотность вероятности равна нулю.

Функция распределения случайной величины $X$, распределенной по Парето, описывается формулой

$$F_x(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^{\alpha}, \text{ где } x > \theta.$$

Ее математическое ожидание и дисперсия равны соответственно:

$$MX = \frac{\alpha\theta}{\alpha-1}, DX = \left(\frac{\theta}{\alpha-1}\right)^2 \frac{\alpha}{\alpha-2}.$$

При $\alpha \le 2$ дисперсия бесконечна, а при $\alpha \ge 1$ бесконечно и математическое ожидание.

Это распределение впервые появилось в работах Вильфредо Парето по экономической статистике. Оно описывает распределение доходов в обществе при условии, что все они превышают некоторый базовый уровень $\theta$.

Впоследствии были открыты многие новые важные области применения этого распределения:

- лингвистика: частота употребления слов;
- сейсмология: закон Гутенберга-Рихтера;
- распределение размеров файлов в интернет-трафике;
- популярность имен;

- размер паводка;
- природные и техногенные катастрофы.

Важность предсказания интенсивности катастроф – природных и техногенных – переоценить невозможно. Вот, например, что сказано по этому поводу в [7]: «...В ряду ущербов от катастроф изредка встречаются *суперэкстремальные значения*, несоизмеримые по величине со значениями для подавляющей части событий. Ущерб от этих суперэкстремальных событий сравним *с суммарным ущербом* от всех катастроф за тот же период времени».

При планировании необходимо знать, какой интенсивности катастроф следует опасаться, а какие маловероятны. Для этого надо уметь определять параметры распределения Парето по предыдущим наблюдениям. Это приводит к такой математической постановке задачи: получена выборка $x_1$, ... $x_n$, подчиняющаяся распределению Парето. Требуется определить или с достаточной точностью оценить параметры $\alpha$ и $\theta$.

Сразу заметим, что, как правило, достаточно определить параметр $\alpha$, поскольку параметр $\theta$ обычно известен заранее: это – минимальный порог, и значения, меньшие $\theta$, просто не попадают в выборку. Если мы исследуем, например, землетрясения, то в выборку попадают только те из них, чья интенсивность (энергия, магнитуда) больше определенного порога.

Если мы возьмем другую выборку, с другим порогом, то параметр $\alpha$ окажется тем же самым. Такой вывод следует из такого свойства распределения Парето: если $X$ – случайная величина, распределенная по Парето, с параметрами $\alpha$ и $\theta$, то условное распределение $X$ при условии $X > x_1$ также подчиняется распределению Парето с параметрами $\alpha$ и $x_1$.

Таким образом, следует сосредоточиться на задаче оценивания по выборке параметра $\alpha$, считая, что параметр $\theta$ известен.

Для оценки параметров распределения по выборке наиболее часто используется метод максимального правдоподобия. В случае распределения Парето он приводит к следующей формуле

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\ln x_1 + \ldots + \ln x_n - n \ln \theta},$$

где $x_1$, ... $x_n$ – выборка, $n$ – объем выборки.

Ее можно представить в виде

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\ln \frac{x_1}{\theta} + \ldots + \ln \frac{x_n}{\theta}},$$

откуда следует, что без ограничения общности можно считать, что $\theta = 1$.

В дальнейшем мы будем это подразумевать, не указывая специально.

Настоящая работа посвящена исследованию статистических свойств оценки максимального правдоподобия параметра $\alpha$. В [7] обсуждаются различные, в основном эмпирические, подходы к этой оценке, в частности, предпринимается попытка интервального оценивания.

В [8] описан следующий вычислительный эксперимент. Генерировалось 5000 выборок, подчиненных распределению Парето с параметрами $\alpha = 0.8$ и $\alpha = 2.5$. Объемы выборок были равны 10, 20 и 50. Для каждой выборки вычислялась оценка $\hat{\alpha}$. Результаты вычислительного эксперимента указывают на то, что оценка $\hat{\alpha}$ – смещенная, и позволяют предложить эмпирическую формулу для несмещенной оценки:

$$\tilde{\alpha} = \frac{n-1}{n}\hat{\alpha}.$$

Результаты численного эксперимента можно представить в виде таблиц. В них указана как оценка максимального правдоподобия (ОМП) $\hat{\alpha}$, так и исправленная в соответствии с предыдущей формулой оценка $\tilde{\alpha}$.

Для $\alpha = 0.8$

| Объем выборки | 10 | 20 | 50 |
|---|---|---|---|
| ОМП $\hat{\alpha}$ | 0.890 | 0.843 | 0.813 |
| Исправленная ОМП $\tilde{\alpha}$ | 0.801 | 0.801 | 0.797 |

Для $\alpha = 2.5$

| Объем выборки | 10 | 20 | 50 |
|---|---|---|---|
| ОМП $\hat{\alpha}$ | 2.782 | 2.635 | 2.550 |
| Исправленная ОМП $\tilde{\alpha}$ | 2.504 | 2.503 | 2.499 |

Аналитически свойства этой оценки ранее не исследовались, в частности, никакие свойства этой оценки не нашли отражения в подробном и всеобъемлющем справочнике [9]. Настоящая работа восполняет этот пробел.

Среднее значение оценки максимального правдоподобия $\hat{\alpha}$, как оказалось, можно вычислить аналитически. Это значение равно

$$M\hat{\alpha} = \int_1^{+\infty}\ldots\int_1^{+\infty} \frac{n\rho(x_1)\cdot\ldots\cdot\rho(x_n)dx_1\ldots dx_n}{\ln(x_1\cdot\ldots\cdot x_n)} =$$

$$= \int_1^{+\infty}\ldots\int_1^{+\infty} \frac{n\alpha^n dx_1\ldots dx_n}{(x_1\cdot\ldots\cdot x_n)^{\alpha+1}\ln(x_1\cdot\ldots\cdot x_n)} = n\alpha^n I_n(\alpha).$$

Вычислим интеграл:

$$I_n(\alpha) = \int_1^{+\infty}\ldots\int_1^{+\infty} \frac{dx_1\cdot\ldots\cdot dx_n}{(x_1\cdot\ldots\cdot x_n)^{1+\alpha}\ln(x_1\cdot\ldots\cdot x_n)}$$

После замены переменных $x_1 = e^{t_1};\ldots;x_n = e^{t_n}$ интеграл преобразуется к виду:

$$I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty}\ldots\int_0^{+\infty} e^{-\alpha(t_1+\ldots+t_n)}\cdot\frac{dt_1\cdot\ldots\cdot dt_n}{t_1+\ldots+t_n}.$$

Используя интегральное представление:

$$\frac{1}{A} = \int_0^{+\infty} e^{-As} ds, \quad A > 0,$$

приходим к следующему выражению:

$$I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} dt_1 \ldots \int_0^{+\infty} dt_n\, e^{-\alpha(t_1+\ldots+t_n)} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-s(t_1+\ldots+t_n)} ds = \int_0^{+\infty} ds \int_0^{+\infty} dt_1 \ldots \int_0^{+\infty} dt_n\, e^{-(\alpha+s)(t_1+\ldots+t_n)}.$$

Далее вычисляем интегралы по $t_1$, ...; $t_n$ и затем по переменной $s$.

Заметим, что этот интеграл сходится при $n > 1$:

$$I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(\alpha+s)^n} = \frac{1}{(n-1)\,\alpha^{n-1}}.$$

Поэтому окончательно получаем

$$M\hat{\alpha} = \frac{n}{n-1}\alpha,$$

несмещенная оценка параметра $\alpha$ равна

$$\tilde{\alpha} = \frac{n-1}{n}\hat{\alpha},$$

и обе оценки состоятельные.

Для вычисления дисперсии оценки $\hat{\alpha}$ вычислим среднее значение квадрата этой оценки

$$M\left(\hat{\alpha}^2\right) = \int_1^{+\infty} \ldots \int_1^{+\infty} \hat{\alpha}^2 \rho(x_1)\ldots\rho(x_n) dx_1 \ldots dx_n = \int_1^{+\infty} \ldots \int_1^{+\infty} \frac{n^2 \alpha^n dx_1 \ldots . dx_n}{(x_1 \ldots . x_n)^{\alpha+1} \ln^2(x_1 \ldots . x_n)} = n^2 \alpha^n D_n(\alpha).$$

Вычисление интеграла

$$D_n(\alpha) = \int_1^{+\infty} \ldots \int_1^{+\infty} \frac{dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_n}{(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\alpha+1} \ln^2(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)}$$

во многом аналогично первому интегралу. Замена $x_1 = e^{t_1}; \ldots; x_n = e^{t_n}$ преобразует интеграл к виду:

$$D_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \ldots \int_0^{+\infty} e^{-\alpha(t_1+\ldots+t_n)} \cdot \frac{dt_1 \cdot \ldots \cdot dt_n}{(t_1+\ldots+t_n)^2}.$$

Используем интегральное представление дважды:

$$D_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} dt_1 \ldots \int_0^{+\infty} dt_n\, e^{-\alpha(t_1+\ldots+t_n)} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-s(t_1+\ldots+t_n)} ds \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\sigma(t_1+\ldots+t_n)} d\sigma.$$

Меняем порядок интегрирования:

$$D_n(\alpha)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} dsd\sigma \int_0^{+\infty} dt_1 \ldots \int_0^{+\infty} dt_n e^{-(\alpha+s+\sigma)(t_n+\ldots+t_n)}.$$

Вычисляем интегралы по $t_1$, ...; $t_n$ и затем по переменным $s$, $\sigma$. Заметим, что этот интеграл сходится при $n > 2$:

$$D(\alpha)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dsd\sigma}{(\alpha+s+\sigma)^n}=\frac{1}{(n-1)(n-2)\alpha^{n-2}}.$$

Поэтому

$$M(\hat{\alpha}^2)=\frac{n^2}{(n-1)(n-2)}\alpha^2.$$

Теперь из формулы $DX = MX^2 - (MX)^2$ следует

$$D\hat{\alpha}=\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\alpha^2,$$

а для дисперсии несмещенной оценки

$$D\tilde{\alpha}=\frac{\alpha^2}{n-2}.$$

Для несмещенной оценки $\tilde{\alpha}$ можно поставить задачу нахождения функции распределения. Пусть $F(a)=P(\tilde{\alpha}<a)$. Поскольку

$$\tilde{\alpha}=\frac{n-1}{\ln(x_1\cdot\ldots\cdot x_n)},$$

то неравенство $\tilde{\alpha}<a$ приводится к виду

$$\frac{n-1}{\ln(x_1\cdot\ldots\cdot x_n)}<a.$$

Поскольку все $x_i > 1$, логарифм положителен, следовательно, получаем неравенство

$$e^{\frac{n-1}{a}}<x_1\cdot\ldots\cdot x_n.$$

Обозначим область, в которой все точки $x_1$, ... $x_n$ удовлетворяют этому неравенству, через $\Omega(a)$ .

Тогда

$$P(\tilde{\alpha}<a)=\int\underset{\Omega(a)}{\ldots}\int\rho(x_1)\ldots\rho(x_n)dx_1\ldots dx_n=\int\underset{\Omega(a)}{\ldots}\int\frac{\alpha^n dx_1\ldots dx_n}{(x_1\ldots x_n)^{a+1}}.$$

Уместно сделать замену $t_i = \ln x_i$, тогда

$$P(\tilde{\alpha} < a) = \alpha^n \int \underset{\tilde{\Omega}(a)}{\dots} \int \frac{dt_1 \dots dt_n}{e^{\alpha(t_1 + \dots + t_n)}}$$

Здесь $\tilde{\Omega}(a)$ – та же область, только в переменных $t_i$. Она задается неравенствами

$$\frac{n-1}{a} < t_1 + \ldots + t_n; t_i > 0, i = 1 \ldots n.$$

Поскольку интеграл по всему гипероктанту $t_i > 0, i = 1 \ldots n$ равен единице, задачу можно свести к интегралу по конечной области – $n$-мерному симплексу

$$\Delta(z) = \{t_1 + \ldots + t_n < z; t_i > 0, i = 1 \ldots n\},$$

где $z = \dfrac{n-1}{a}$.

Вычислим интеграл:

$$J_n(z) = \int \underset{\Delta(z)}{\dots} \int e^{-a(t_1 + \dots + t_n)} dt_1 \dots dt_n$$

по области $\Delta(z)$: $t_1 > 0; \dots; t_n > 0; t_1 + \dots + t_n < z$. После замены переменных $\alpha t_1 = \tau_1; \dots; \alpha t_n = \tau_n; \alpha z = \zeta$ интеграл преобразуется к виду:

$$J_n(\zeta) = \frac{1}{\alpha^n} \int \underset{\Delta(\zeta)}{\dots} \int e^{-(\tau_1 + \dots + \tau_n)} d\tau_1 \dots d\tau_n = \frac{1}{\alpha^n} \int_0^{\zeta} e^{-\tau_1}\, d\tau_1 \int_0^{\zeta - \tau_1} e^{-\tau_2}\, d\tau_2 \dots \int_0^{\zeta - \tau_1 - \dots - \tau_{n-1}} e^{-\tau_n}\, d\tau_n.$$

Используя начальные значения:

$$J_1(\zeta) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\zeta}\right);$$

$$J_2(\zeta) = \frac{1}{\alpha^2}\left(1 - e^{-\zeta}(1 + \zeta)\right);$$

$$J_3(\zeta) = \frac{1}{\alpha^3}\left(1 - e^{-\zeta}(1 + \zeta + \zeta^2 / 2)\right);$$

получаем гипотезу:

$$J_n(\zeta) = \frac{1}{\alpha^n}\left(1 - e^{-\zeta} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\zeta^k}{k!}\right).$$

Имеем также рекуррентное равенство:

$$J_{n+1}(\zeta) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\zeta} J_n(\zeta - \tau_1) \cdot e^{-\tau_1}\, d\tau_1,$$

с помощью которого правильность гипотезы доказывается по индукции.

Возвращаясь к переменной $a$, получим выражение для функции распределения

$$F(a) = P(\tilde{\alpha} < a) = e^{-\zeta} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\zeta^k}{k!},$$

где по-прежнему

$$\zeta = \frac{\alpha(n-1)}{a}.$$

В общем случае, когда $\theta \neq 1$, следует написать

$$\zeta = \frac{\alpha\theta(n-1)}{a}.$$

Плотность вероятности находим дифференцированием

$$\rho(a) = \frac{dF(a)}{da} = \frac{dF(a)}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{da} = \left( -e^{-\zeta} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\zeta^k}{k!} + e^{-\zeta} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\zeta^{k-1}}{(k-1)!} \right) \cdot \frac{\alpha(n-1)}{-a^2}.$$

Заменяя во второй сумме индекс суммирования на $k_1 = k - 1$, получим, что все слагаемые, кроме одного, сокращаются. Остается:

$$\rho(a) = \frac{dF(a)}{da} = e^{-\zeta} \frac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{\alpha(n-1)}{a^2} = \frac{1}{a(n-1)!} \cdot \zeta^n e^{-\zeta},$$

где, как и ранее

$$\zeta = \frac{\alpha\theta(n-1)}{a}.$$

Вычисленные ранее математическое ожидание и дисперсия могут быть получены непосредственно исходя из найденной функции распределения. Математическое ожидание равно

$$M\tilde{\alpha} = \int_0^{+\infty} a \cdot \frac{dF}{da}\, da = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \zeta^n e^{-\zeta}\, da.$$

После замены переменной интегрирования $a = \alpha(n-1)/\zeta$ получим:

$$M\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{(n-2)!} \int_0^{+\infty} \zeta^{n-2} e^{-\zeta}\, d\zeta = \frac{\alpha}{(n-2)!} \cdot (n-2)! = \alpha.$$

Интеграл легко вычисляется через Гамма-функцию Эйлера. Аналогично вычисляется математическое ожидание квадрата:

$$M(\tilde{\alpha}^2) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} a\, \zeta^n e^{-\zeta}\, da = \frac{\alpha^2(n-1)}{(n-2)!} \int_0^{+\infty} \zeta^{n-3}\, e^{-\zeta}\, d\zeta = \alpha^2 \frac{(n-1)}{(n-2)!} \cdot (n-3)! = \alpha^2 \frac{n-1}{n-2}.$$

Теперь, применяя известную формулу для дисперсии, получим:

$$D\tilde{\alpha} = M(\tilde{\alpha}^2) - (M\tilde{\alpha})^2 = \alpha^2 \frac{n-1}{n-2} - \alpha^2 = \frac{\alpha^2}{n-2}.$$

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

**Теорема.** Пусть $x_1$, .... $x_n$ – выборка, подчиняющаяся распределению Парето с параметрами $\alpha$ и $\theta$. Тогда величина

$$\tilde{\alpha} = \frac{n-1}{\ln x_1 + \ldots + \ln x_n - n \ln \theta}$$

является случайной величиной, обладающей следующими свойствами:

1. Ее функция распределения равна при $a > 0$

$$F(a) = P(\tilde{\alpha} < a) = e^{-\zeta} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\zeta^k}{k!},$$

плотность вероятностей

$$\rho(a) = \frac{1}{a(n-1)!} \cdot \zeta^n e^{-\zeta},$$

где

$$\zeta = \frac{\alpha\theta(n-1)}{a}.$$

2. Ее математическое ожидание и дисперсия равны соответственно

$$M\tilde{\alpha} = \alpha; D\tilde{\alpha} = \frac{\alpha^2}{n-2}.$$

Таким образом, величина $\tilde{\alpha}$ является несмещенной оценкой параметра $\alpha$.

## Литература:


1. Afify A.Z., Yousof H.M., Butt N.S., Hamedani G.G. The transmuted Weibull-Pareto distribution // Pak. J. Statist. 2016. V. 32(3). P. 183–206.

2. Alzaghal A., Ghosh I., Alzaatreh A. On shifted Weibull-Pareto distribution // Int. J. Statistics and Probability. 2016. V. 5. № 4. P. 139–149.

3. Chhetri S.B., Akinsete A.A., Aryal G., Long H. The Kumaraswamy transmuted Pareto distribution // J. Stat. Distrib. Applicat. 2017. V. 4. P. 11–35.

4. Dixit U.J., Nooghabi M.J. Comments on the estimate for Pareto distribution // Stat. Methodology. 2010. V. 7. P. 687–691.

5. Mdziniso N.C., Cooray K. Odd Pareto families of distributions for modelling loss payment data // Scand. Actuar. J. 2018. V. 3. P. 1–22. http://dx.doi.org/10.1080/03461238.2017.1280527

6. Nofal Z.M., ElGebaly Y.M. New characterizations of the Pareto distribution // Pak. J. Stat. Oper. Res. 2017. V. 13. № 1. P. 63–74.

7. Владимиров В.А., Воробьев Ю.Л., Малинецкий Г.Г. [и др.] Управление риском. Риск. Устойчивое развитие. Синергетика. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://

www.keldysh.ru/papers/2003/source/book/gmalin/titul.htm

8. Пулькин И.С. Методы оценки параметров распределения Парето // В сб. Математика, физика, информатика и их приложения в науке и образовании. Междунар. школа-конф. молодых ученых: сб. тез. докл. М.:,МИРЭА, 12–15 декабря 2016 г. С. 123–124.

9. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 816 с.

## References:

1. Afify A.Z., Yousof H.M., Butt N.S., Hamedani G.G. The transmuted Weibull-Pareto distribution. *Pak. J. Statist.* 2016; 32(3): 183-206.

2. Alzaghal A., Ghosh I., Alzaatreh A. On shifted Weibull-Pareto distribution. *Int. J. Statistics and Probability.* 2016; 5(4): 139-149.

3. Chhetri S.B., Akinsete A.A., Aryal G., Long H. The Kumaraswamy transmuted Pareto distribution. *J. Stat. Distrib. Applicat.* 2017; 4: 11-35.

4. Dixit U.J., Nooghabi M.J. Comments on the estimate for Pareto distribution. *Stat. Methodology.* 2010; 7: 687-691.

5. Mdziniso N.C., Cooray K. Odd Pareto families of distributions for modelling loss payment data. *Scand. Actuar. J.* 2018; 3: 1-22. http://dx.doi.org/10.1080/03461238.2017.1280527

6. Nofal Z.M., ElGebaly Y.M. New characterizations of the Pareto distribution. *Pak. J. Stat. Oper. Res.* 2017; 13I(1): 63-74.

7. Vladimirov V.A., Vorobyev Yu.L., Malinetsky G.G. [et al.] Risk management. Risk. Sustainable development. Synergetics. [Electronic resource]. http://www.keldysh.ru/papers/2003/source/book/gmalin/titul.htm (in Russ.).

8. Pulkin I.S. Methods for estimating the parameters of the Pareto distribution. Mathematics, Physics, Computer Science and Their Applications in Science and Education. Int. School-Conference of Young Scientists: a collection of abstracts. Moscow: MIREA, December 12–15, 2016. P. 123-124. (in Russ.).

9. Kobzar A.I. Applied mathematical statistics. For engineers and scientists. Moscow: FIZMATLIT Publ., 2005. 816 p. (in Russ.).

***Об авторах:***

***Пулькин Игорь Сергеевич,*** кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Института кибернетики ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78).

***Татаринцев Андрей Владимирович,*** кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики-2 Физико-технологического института ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78).

***About the authors:***

***Igor S. Pulkin,*** Ph.D. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Chair Mathematics, Institute of Cybernetics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo Pr., Moscow 119454, Russia).

***Andrey V. Tatarintsev,*** Ph.D. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Chair Mathematics - 2, Institute of Physics and Tecnologies, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo Pr., Moscow 119454, Russia).

***Для цитирования:*** Пулькин И.С., Татаринцев А.В. Свойства оценки максимального правдоподобия показателя распределения Парето // Российский технологический журнал. 2018. Т. 6. № 6. С. 74–83. DOI: 10.32362/2500-316X-2018-6-6-74-83

***For citation:*** Pulkin I.S., Tatarintsev A.V. Properties of the maximum likelihood estimates of the exponent of pareto distribution. *Rossiyskiy tekhnologicheskiy zhurnal (*Russian Technological Journal*).* 2018; 6(6): 74-83. (in Russ.). DOI: 10.32362/2500-316X-2018-6-6-74-83.