

Для цитирования: Соболев Б.В., Соловьев А.Н., Пайзулаев М.М., Рашидова Е.В., Муртазалиев Г.М. Особенности напряжений в вершине упругого клина, подкрепленного тонким гибким покрытием на его сторонах. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2019;46 (3):159-166. DOI:10.21822/2073-6185-2019-46-3-159-166

For citation: B.V. Sobol, A.N. Soloviev, M.M. Payzulaev, E.V. Rashidova, G.M. Murtazaliev. Features of stresses at the apex of an elastic wedge, supported by a thin flexible coating on the sides Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2019; 46(3):159-166. (In Russ.) DOI:10.21822/2073-6185-2019-46-3-159-166

СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА

УДК 666.974.2

DOI: 10.21822/2073-6185-2019-46-3-159-166

ОСОБЕННОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ВЕРШИНЕ УПРУГОГО КЛИНА, ПОДКРЕПЛЕННОГО ТОНКИМ ГИБКИМ ПОКРЫТИЕМ НА ЕГО СТОРОНАХ

Соболев Б.В.¹, Соловьев А.Н.¹, Пайзулаев М.М.², Рашидова Е.В.¹, Муртазалиев Г.М.²

¹Донской государственный технический университет,

¹344010, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1, Россия,

²Дагестанский государственный технический университет,

²367026, г. Махачкала, пр. И.Шамиля, 70, Россия

Резюме. Цель. Провести исследование задачи об определении показателей степени при особенности напряжений в вершине клиновидной области в случаях, когда на ее сторонах (или на одной из них) закреплено тонкое гибкое покрытие. **Метод.** Предполагается, что покрытие является нерастяжимым. На другой стороне клиновидной области предполагаются условия наличия такого же покрытия, либо она зафиксирована, свободна от напряжений, либо находится в гладком контакте с жестким основанием. Математически, проблема сводится к задаче определения корней характеристических трансцендентных уравнений, возникающих из условия существования нетривиального решения системы линейных однородных уравнений. **Результат.** Для различных сочетаний граничных условий и углов раствора определены показатели при особенности радиальной компоненты тензора напряжений. В частности, установлены значения углов, при которых возникает сингулярное поведение у напряжений. Рассмотрен случай, когда на поверхности ребра задано специальное граничное условие, моделирующее накладку, и получены характеристические уравнения для определения показателя степенной зависимости асимптотического решения в его окрестности для четырех вариантов граничных условий. В двух случаях получились трансцендентные уравнения, которые решаются численно. **Вывод.** Представлены расчеты первых положительных корней уравнений в зависимости от угла раствора ребра и коэффициента Пуассона. Определены значения углов, при которых возникает сингулярное поведение у напряжений. В случае сочетания граничных условий (III - IV), сингулярное поведение напряжений наблюдается для угла $\alpha = \pi/8$, тогда как, в случае (III - III) это значение равно $\pi/4$.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ: 19-08-00074

Ключевые слова: клиновидная область, гибкое покрытие, сингулярность напряжений, граничные условия, угол раствора

BUILDING AND ARCHITECTURE

FEATURES OF STRESSES AT THE APEX OF AN ELASTIC WEDGE, SUPPORTED BY A THIN FLEXIBLE COATING ON THE SIDES

B.V. Sobol¹, A.N. Soloviev¹, M.M. Payzulaev², E.V. Rashidova¹, G.M. Murtazaliev²

¹Don State Technical University,

¹1 Gagarin Square, Rostov-on-Don 344010, Russia,

²Daghestan State Technical University,

²70 I. Shamil Ave., Makhachkala 367026, Russia

Abstract Objectives To study the problem of determining the degree of stress at the apex of a wedge-shaped area in cases where the sides (or one of them) are covered with a thin flexible coating. **Method** It is assumed that the coating is not stretchable. On the other side of the wedge-shaped area, the same coating is assumed to be present; it is either fixed, stress-free or in smooth contact with a rigid base. Mathematically, the problem is reduced to the task of determining the roots of characteristic transcendental equations arising from the existence of a nontrivial solution to the system of linear homogeneous equations. **Results** Values for the specific characteristics of the radial component of a stress tensor are determined for different combinations of boundary conditions and solution angles. In particular, the angles at which the singular behaviour of stresses occurs are determined. The case is considered when a special boundary condition is given on the edge surface, simulating the overlay. Characteristic equations are obtained to determine the index of the degree dependency of the asymptotic solution in its vicinity for four variants of boundary conditions. In two cases, transcendental equations are obtained, which are solved numerically. **Conclusion** Calculations of the first positive roots of the equations depending on the angle of the edge solution and Poisson's ratio are presented. The values of the angles, at which the singular behaviour of stresses occurs, are determined. In the case of a combination of boundary conditions (III – IV), the singular stress behaviour is observed for the angle $\alpha = \pi/8$, while in the case of (III – III) this value is equal to $\pi/4$.

Acknowledgements This work was supported by a grant from the Russian Foundation for Basic Research (RFBR): 19-08-00074.

Keywords: wedge-shaped area, flexible coating, stress singularity, boundary conditions, solution angle

Введение. В линейной теории упругости в окрестности нерегулярной границы (угловые точки в двумерных задачах, ребра в трехмерных задачах и др.) при определенной их геометрии могут возникать сингулярности в напряжениях. Учет этого поведения важен при построении численных методов решения краевых задач, а также может быть использован при оценке критического состояния материала (например, возникновение и рост трещин). В работе [1] показано, что проблема исследования особенности напряжений в окрестности трехмерного ребра изотропного упругого тела может быть разделена на плоскую и анти плоскую задачи теории упругости.

В монографии [2] для плоской задачи предложен метод определения показателей при особенности напряжений в вершине клиновидной области при различных граничных условиях на ее сторонах. Рассмотрены случаи, когда на сторонах клина полагаются равными нулю компоненты вектора смещений (стороны зафиксированы, случай I-I), компоненты тензора напряжений на сторонах клина равны нулю (стороны свободны, случай II-II), или же равны нулю касательное напряжение $\tau_{r\theta}$ и нормальное смещение u_θ (гладкий контакт, случай III-III). Там же исследованы задачи, когда имеют место условия смешанного типа (т.е. на одной стороне условие одного типа, а на другой – другого).

Постановка задачи. Нахождение меньших по величине показателей асимптотического поведения используется в задачах определения критического состояния материала, например, в

вершине трещины посредством вычисления коэффициентов интенсивности напряжений. Кроме этого, определение этих показателей (не только меньших по величине) может быть использовано при построении асимптотического ряда в окрестности нерегулярной точки границы. Который, в свою очередь, может быть использован при построении численной схемы решения неоднородной задачи, например, методом конечных элементов. При этом коэффициенты этого ряда могут быть найдены по схеме, предложенной в [3].

Другой подход к исследованию этого вопроса с построением асимптотического решения в декартовой системе координат предложен в работе [4]. Этот метод применим и в случае анизотропного тела, когда выше названный метод встречает определенные трудности. Общий подход построения асимптотического ряда предложен в работе [5].

Методы исследования. Математическая модель тонкого гибкого покрытия на границе упругого тела, содержащего внутренние трещины, рассмотрена в работах авторов данной статьи [6,7]. Она сформулирована на основе асимптотического анализа решения задачи для упругой полосы [8] и представляет собой специальное граничное условие. Если предположить, что тонкое гибкое покрытие является нерастяжимым, это граничное условие существенно упрощается: $u_r = 0$. Оно было ранее сформулировано в работах [9,10].

Обозначим через IV граничное условие, когда на стороне имеется тонкое гибкое покрытие [8] и равны нулю нормальные напряжения

$$\theta=\alpha: 4G_c h u_r'' = (1 - \nu_c) \tau_{r\theta} - 2\nu_c h \sigma_\theta', \quad \sigma_\theta = 0 \quad (1)$$

Здесь G_c и ν_c – модуль сдвига и коэффициент Пуассона покрытия, h – толщина покрытия, $u_r, \tau_{r\theta}, \sigma_\theta$ – соответственно, компоненты вектора перемещений и тензора напряжений в полярной системе координат $Or\theta$.

В данной работе рассмотрены задачи, когда на одной стороне задано условие IV, а именно случай IV-IV, а также для случаев смешанных условий (IV-I, IV-II, IV-III; индексация здесь очевидна).

Локальные особенности напряжений и перемещений. Перейдем теперь к рассмотрению плоской задачи теории упругости для клина. Перепишем уравнения равновесия в перемещениях Ламе в полярной системе координат:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} \right) &= 0 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

где λ, μ - коэффициенты Ламе, u_θ - угловая компонента вектора смещений.

Приведем также выражения для компонент тензора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \\ \tau_{r\theta} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

В соответствии с [2] будем искать решение системы уравнений (2) в виде произведения функций

$$u_r(r, \theta) = r^\lambda f(\theta), \quad u_\theta(r, \theta) = r^\lambda g(\theta). \quad (4)$$

Подставляя (4) в (2), перейдем к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} v_1 f'' + (\lambda^2 - 1)f + [(\lambda - 1) - v_1(\lambda + 1)]g' &= 0 \quad \left(v_1 = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \right) \\ g'' + v_1(\lambda^2 - 1)g + [(\lambda + 1) - v_1(\lambda - 1)]f' &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} f &= A \cos[(1 + \lambda)\theta] + B \sin[(1 + \lambda)\theta] + C \cos[(1 - \lambda)\theta] + D \sin[(1 - \lambda)\theta] \\ g &= B \cos[(1 + \lambda)\theta] - A \sin[(1 + \lambda)\theta] + v_2 D \cos[(1 - \lambda)\theta] - v_2 C \sin[(1 - \lambda)\theta] \end{aligned}$$

$$(v_2 = \frac{3+\lambda-4v}{3-\lambda-4v}) \quad (5)$$

В этом случае выражения для смещений и напряжений примут вид
 $r^{-\lambda}u_r = A\cos[(1 + \lambda)\theta] + B\sin[(1 + \lambda)\theta] + C\cos[(1 - \lambda)\theta] + D\sin[(1 - \lambda)\theta]$

$$r^{-\lambda}u_\theta = B\cos[(1 + \lambda)\theta] - A\sin[(1 + \lambda)\theta] + v_2D\cos[(1 - \lambda)\theta] - v_2C\sin[(1 - \lambda)\theta]$$

$$\mu^{-1}r^{1-\lambda}\sigma_\theta = -2\lambda A\cos[(1 + \lambda)\theta] - 2\lambda B\sin[(1 + \lambda)\theta] - (1 + \lambda)(1 - v_2)C\cos[(1 - \lambda)\theta] - (1 + \lambda)(1 - v_2)C\cos[(1 - \lambda)\theta] - (1 + \lambda)(1 - v_2) \times D\sin[(1 - \lambda)\theta]$$

$$\mu_1 r^{1-\lambda}\tau_{r\theta} = -2\lambda A\sin[(1 + \lambda)\theta] + 2\lambda B\cos[(1 + \lambda)\theta] - (1 - \lambda)(1 - v_2)C\sin[(1 - \lambda)\theta] + (1 - \lambda)(1 - v_2)D\cos[(1 - \lambda)\theta] \quad (6)$$

Перейдем к удовлетворению граничным условиям задачи IV-IV.

Здесь следует приравнять нулю выражения для σ_θ и главный член условия $(1)u_r''$ при $\theta = \pm\alpha$, что приводит к системе линейных однородных алгебраических уравнений 4-го порядка:

$$\begin{aligned} -2\lambda A\cos[(1 + \lambda)\alpha] \pm 2\lambda B\cos[(1 + \lambda)\alpha] - (1 + \lambda)(1 - v_2) \times C\cos[(1 - \lambda)\alpha] \\ \pm (1 + \lambda)(1 - v_2)D\sin[(1 - \lambda)\alpha] = 0 \quad (7) \\ A\cos[(1 + \lambda)\alpha] \pm B\sin[(1 + \lambda)\alpha] + C\cos[(1 - \lambda)\alpha] \pm D\sin[(1 - \lambda)\alpha] = 0 \end{aligned}$$

Обсуждение результатов. Легко видеть, что эта система уравнений распадается на две системы второго порядка:

$$\begin{aligned} 2\lambda A\cos[(1 + \lambda)\alpha] + (1 + \lambda)(1 - v_2)C\cos[(1 - \lambda)\alpha] = 0 \\ A\cos[(1 + \lambda)\alpha] + C\cos[(1 - \lambda)\alpha] = 0 \\ 2\lambda B\sin[(1 + \lambda)\alpha] + (1 + \lambda)(1 - v_2)D\sin[(1 - \lambda)\alpha] = 0 \\ B\sin[(1 + \lambda)\alpha] + D\sin[(1 - \lambda)\alpha] = 0 \quad (8) \end{aligned}$$

Равенство нулю определителя системы является условием, при котором однородная система уравнений имеет нетривиальное решение. В результате непосредственных преобразований, получаем:

$$\sin[2\alpha(1 - \lambda)]\sin[2\alpha(1 + \lambda)] = 0 \quad (9)$$

Решения полученного уравнения имеют вид

$$\lambda = \pm 1 + \frac{\pi}{2\alpha}n, \text{ где } n \in Z \quad (10)$$

Аналогичным образом анализируются задачи, когда имеют место условия смешанного типа.

Соответствующие трансцендентные уравнения таковы:

$$\begin{aligned} \lambda \\ \sin[4\alpha] = -(3 - 4v)\sin[4\alpha\lambda] \quad (IV - I) \quad (11) \end{aligned}$$

$$\lambda\sin[4\alpha] = \sin[4\alpha\lambda] \quad (IV - II) \quad (12)$$

$$\cos[2\alpha(-1 + \lambda)]\cos[2\alpha(1 + \lambda)] = 0 \quad (IV - III) \quad (13)$$

В случае (IV - III) решения уравнения имеют вид

$$\lambda = \pm 1 + \frac{\pi}{\alpha}\left(\frac{\pm 1}{4} + n\right), \text{ где } n \in Z$$

Для случаев (IV - I) и (IV - II) решение строится численно.

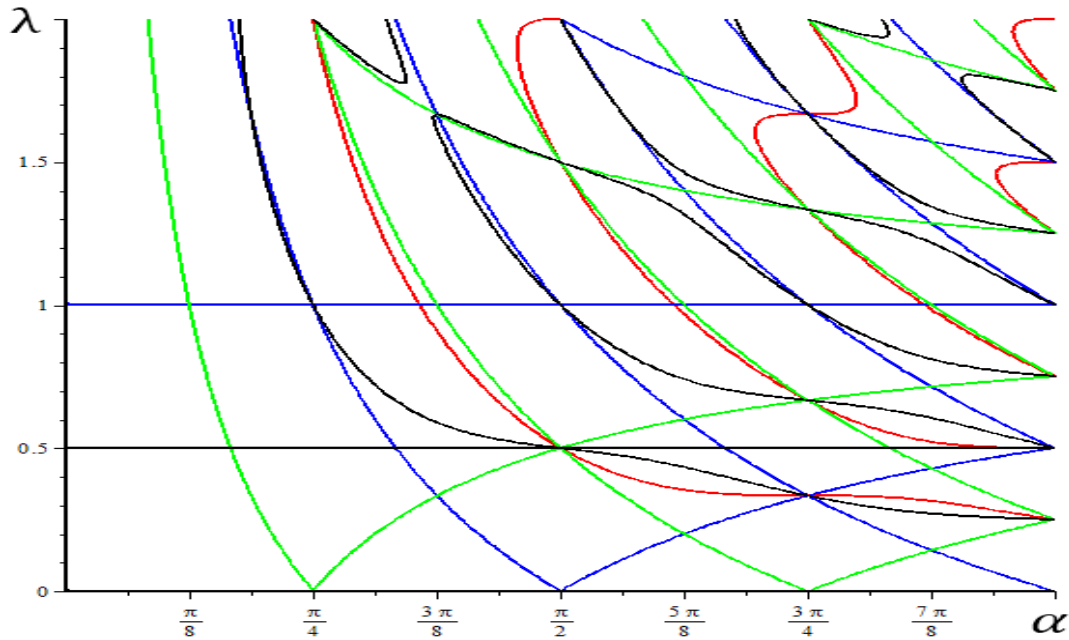


Рис. 1. Зависимость корней характеристических уравнений от угла
Fig. 1. The Dependence of the Roots of the Characteristic Equations on the Angle

На рис.1 представлены зависимости положительных корней характеристических уравнений (9), (11)-(13) от угла α , при этом кривая черного цвета соответствует случаю (I-IV) при $\nu = 1/3$, линия красного цвета - случай (II-IV), зеленого - (III-IV) и синего - (IV-IV).

Следует отметить, что в случаях (I-IV) и (IV - IV) сингулярность в напряжениях наблюдается при $\alpha > \pi/4$, в случае (III-IV) при $\alpha > \frac{\pi}{8}$ и для случая (II-IV) при $\alpha > 0.123$.

Показатель становится меньше 1/2 при $\alpha > \frac{\pi}{6}$ для случая (III-IV), при $\alpha > \frac{\pi}{3}$ для случая (IV - IV) и при $\alpha > \pi/2$ для случаев (I-IV) и (II -IV).

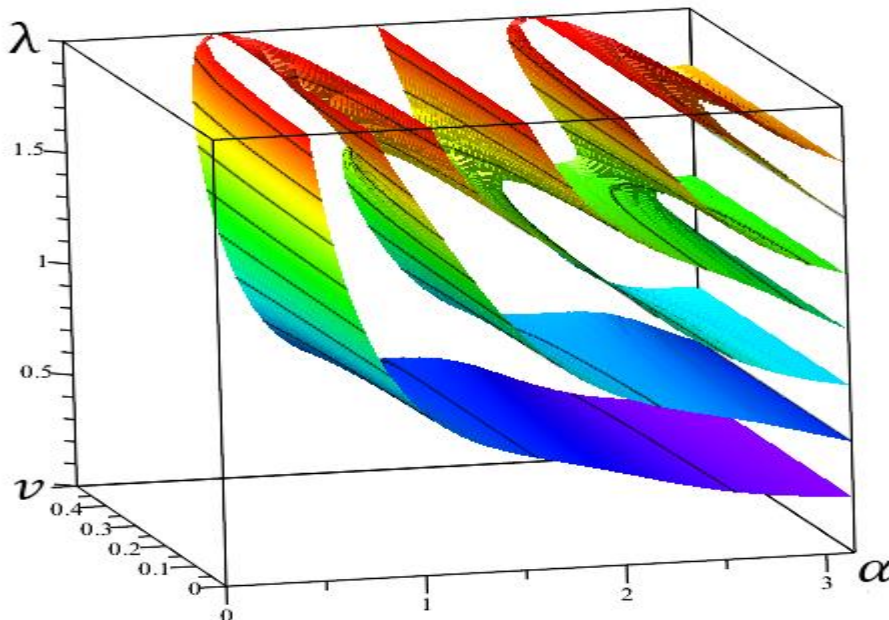


Рис. 2. Зависимость корней характеристического уравнения в случае (I-IV) от угла и коэффициента Пуассона
Fig. 2. The dependence of the roots of the characteristic equation in the case (I-IV) of the angle and Poisson's ratio

На рис. 2 представлены зависимости первых положительных корней характеристического уравнения (10) для случая (I-IV), в зависимости от угла α и коэффициента Пуассона ν .

Анализ уравнения (10) показывает, что для значений угла раствора, при котором возникает сингулярность в напряжениях, практически не зависит от значения коэффициента Пуассона.

Вывод. Рассмотрен случай, когда на поверхности ребра задано специальное граничное условие, моделирующее накладку, и получены характеристические уравнения для определения показателя степенной зависимости асимптотического решения в его окрестности для четырех вариантов граничных условий.

В двух случаях получились трансцендентные уравнения, которые решаются численно. Представлены расчеты первых положительных корней уравнений в зависимости от угла раствора ребра и коэффициента Пуассона.

Определены значения углов, при которых возникает сингулярное поведение у напряжений.

Следует отметить, что в случае сочетания граничных условий (III - IV), сингулярное поведение напряжений наблюдается для угла $\alpha = \pi/8$, тогда как, в случае (III - III) это значение равно $\pi/4$.

Библиографический список:

1. Аксентян О.К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра. – Прикладная математика и механика. - 1967, т.31, вып.1.
2. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости - М.: Наука, 1981. 688 с.
3. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками. - Math. Nachr. 1977, т.76.
4. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. - М.: Наука, Гл. ред. физ-мат литературы. 1973. –304 с.
5. Белоконь А.В. - Колебания и волны в полуограниченных и ограниченных телах: диссертация ... доктора физико-математических наук: 01.02.04. - Ростов-на -Дону, 1987. - 450 с.: ил. Механика деформируемого твердого тела.
6. B. Sobol, A. Soloviev, A. Krasnoschekov. (2015). The transverse crack problem for elastic bodies stiffened by thin elastic coating. - ZAMM. Z. Angew. Math. Mech. No. 11. pp. 1302-1314.
7. B. Sobol, A. Soloviev, E. Rashidova, P. Vasiliev. (2018). Equilibrium state of the internal crack in the infinite elastic wedge with thin coating. - ZAMM. Z. Angew. Math. Mech., No 98. pp. 659-674. doi:10.1002/zamm.201700246.
8. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. - М.: Наука, 1983. – 488 с.
9. Kim, C.I., Ru, C.-Q., & Schiavone, P. (2013). A clarification of the role of crack-tip conditions in linear elasticity with surface effects. Mathematics and Mechanics of Solids, No 18(1). pp. 59–66. doi:10.1177/1081286511435227.
10. Kim, C.I., Schiavone, P. & Ru, C.Q. (2013). Effects of boundary reinforcement on local singular fields in linearly elastic materials. - Archives of Mechanics, - № 65(4). pp. 289–300.
11. Elastic-plastic fracture analyses for pipeline girth welds with 3D semi-elliptical surface cracks subjected to large plastic bending / Y.M. Zhang, D.K. Yi, Z.M. Xiao, Z.H. Huang, S B. Kumar // Int. J. of Pressure Vessels and Piping. 2013. Vol. 105-106. pp. 90-102. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2013.03.009
12. Chiodo M.S.G., Ruggieri C. J and CTOD estimation procedure for circumferential surface cracks in pipes under bending // Eng. Fract. Mech. 2010. Vol. 77(3). pp. 415-436. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2009.10.001
13. Madia M., Arafan D., Zerbst U. Reference load solutions for plates with semi-elliptical surface cracks subjected to biaxial tensile loading // Int. J. of Pressure Vessels and Piping. 2014. Vol. 119. pp 19- 28. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2014.02.004
14. Atroshchenko E., Potapenko S., Glinka G. Stress intensity factor for a semi-elliptical crack subjected to an arbitrary mode I loading // Mathematics and Mechanics of Solids. 2014. Vol. 19(3). pp 289-298. DOI: 10.1177/1081286512463573
15. Predan J., Mocilnik V., Gubelj N. Stress intensity factors for circumferential semi-elliptical surface cracks in a hollow cylinder subjected to pure torsion // Eng. Fract. Mech. 2013. Vol. 105. pp. 152-168. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2013.03.033
16. Linear and non-linear analyses for semi-elliptical surface cracks in pipes under bending / B. Mechab, B. Serier, B.B. Bouiadjra, K. Kaddouri, X. Feugas // Int. J. of Pressure Vessels and Piping. 2011. Vol. 88(1). pp. 57-63. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2010.11.001

References:

1. Aksentyan O.K. Osobennosti napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya plity v okrestnosti rebra. – Prikladnaya matematika i mekhanika. - 1967, t.31, vyp.1. [Aksentyan O.K. Features of the stress-strain state of the plate in the vicinity of the rib. - Applied mathematics and mechanics. 1967, t.31, Issue 1. (In Russ)]
2. Parton V.Z., Perlin P.I. Metody matematicheskoy teorii uprugosti - M.: Nauka, 1981. 688 s. [Parton V.Z., Perlin P.I. Methods of the mathematical theory of elasticity - M.: Nauka, 1981. 688 p. (In Russ)]
3. Maz'ya V.G., Plamenevskiy B.A. O koeffitsiyentakh v asimptotike resheniy ellipticheskikh krayevykh zadach v oblastyakh s konicheskimi tochkami. - Math. Nachr. 1977, t.76. [Maz'ya V.G., Plamenevskiy B.A. On coefficients in the asymptotics of solutions of elliptic boundary value problems in domains with conical points. - Math. Nachr. 1977, Vol. 76. (In Russ)]
4. Kalandiya A.I. Matematicheskiye metody dvumernoy uprugosti. - M.: Nauka, Gl. red. fiz-mat litera-tury. 1973. –304 s. [Kalandia A.I. Mathematical methods of two-dimensional elasticity. - M.: Science, Ch. ed. physical mat literature tours. 1973. 304 p. (In Russ)]
5. Belokon' A.V. - Kolebaniya i volny v poluogranichennykh i ogranichennykh telakh: dissertatsiya ... dok-tora fiziko-matematicheskikh nauk: 01.02.04. - Rostov-na -Donu, 1987. - 450 s.: il. Mekhanika deformiruyemogo tverdogo tela [Belokon A.V. - Oscillations and waves in semi-limited and limited bodies: dissertation ... Doctors of physical and mathematical sciences: 02/01/04. - Rostov-on-Don, 1987. 450 p.: Ill. Mechanics of a deformable solid (In Russ)]
6. B. Sobol, A. Soloviev, A. Krasnoschekov. (2015). The transverse crack problem for elastic bodies stiffened by thin elastic coating. - ZAMM. Z. Angew. Math. Mech - No. 11. - pp. 1302-1314.
7. B. Sobol, A. Soloviev, E. Rashidova, P. Vasiliev. (2018). Equilibrium state of the internal crack in the infinite elastic wedge with thin coating. - ZAMM. Z. Angew. Math. Mech., - No. 98. - pp. 659-674. doi: 10.1002 / zamm.201700246.
8. Aleksandrov V.M., Mkhitarian S.M. Kontaknyye zadachi dlya tel s tonkimi pokrytiyami i prosloyka-mi. - M.: Nauka, 1983. – 488 s. [Alexandrov V.M., Mkhitarian S.M. Contact tasks for bodies with thin coatings and interlayers. M.: Nauka, 1983. 488 p. (In Russ)]
9. Kim, C.I., Ru, C.-Q., & Schiavone, P. (2013). A clarification of the role of crack-tip conditions in linear elasticity with surface effects. Mathematics and Mechanics of Solids, No. 18 (1). pp. 59–66. doi: 10.1177 / 1081286511435227.
10. Kim, C.I., Schiavone, P. \ & Ru, C.Q. (2013). Effects of boundary reinforcement on local singular fields in linearly elastic materials. - Archives of Mechanics, No. 65 (4). pp. 289-300.
11. Elastic-plastic fracture analyses for pipeline girth welds with 3D semi-elliptical surface cracks subjected to large plastic bending / Y.M. Zhang, D.K. Yi, Z.M. Xiao, Z.H. Huang, S B. Kumar // Int. J. of Pressure Vessels and Piping. 2013. Vol. 105-106. pp. 90-102. DOI: 10.1016 / j.ijpvp.2013.03.03.009
12. Chiodo M.S. G., Ruggieri C. J and CTOD assessment procedure for circumferential surface cracks in pipe under bending // Eng. Fract. Mech 2010. Vol. 77 (3). pp. 415-436. DOI: 10.1016 / j.engfracmech.2009.10.00.00
13. Madia M., Arafan D., Zerbst U. Reference load solutions for plates with semi-elliptical surface cracks subjected to biaxial tensile loading // Int. J. of Pressure Vessels and Piping. p 2014. Vol. 119. pp. 19- 28. DOI: 10.1016 / j.ijpvp.2014.02.02.004
14. Atroshchenko E., Potapenko S., Glinka G. Stress intensity factor for a semi-elliptical crack subjected to an arbitrary mode I loading // Mathematics and Mechanics of Solids. p2014 p Vol. 19 (3). pp. 289-298. DOI: 10.1177 / 1081286512463573
15. Predan J., Mocilnik V., Gubelj N. Stress intensity factors for circumferential semi-elliptical surface cracks in a hollow cylinder subjected to pure torsion // Eng. Fract. Mech p 2013 p Vol. 105. pp 152-168. DOI: 10.1016 / j.engfracmech.2013.03.03.033
16. Linear and non-linear analyses for semi-elliptical surface cracks in pipes under bending / B. Mechab, B. Serier, B.B. Bouadjra, K. Kaddouri, X. Feaugas // Int. J. of Pressure Vessels and Piping. p2011. p Vol. 88 (1). pp. 57-63. DOI: 10.1016 / j.ijpvp.2010.11.001

Сведения об авторах:

Соболь Борис Владимирович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий; e-mail: b.sobol@mail.ru

Соловьев Аркадий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики; e-mail: solovievarc@gmail.com

Пайзулаев Магомед Муртазалиевич, кандидат технических наук, доцент, кафедра сопротивления материалов, теоретической и строительной механики; e-mail: ventav@mail.ru

Рашидова Елена Викторовна, кандидат физико-математических наук, профессор, кафедра информационных технологий; e-mail: el.rash@mail.ru

Муртазалиев Гелани Муртазалиевич, доктор технических наук, профессор, кафедра сопротивления материалов, теоретической и строительной механики; e-mail: smdstu@mail.ru

Information about the authors:

Boris V. Sobol', Dr. Sci. (Technical), Prof., Department of Information Technologies; e-mail: b.sobol@mail.ru

Arkady N. Soloviev, Dr. (Physics and Mathematical)), Prof., Head of the Department of Theoretical and Applied Mechanics; e-mail: solovievarc@gmail.com

Magomed M. Payzulaev, Cand. Sci. (Technical), Seniorlecturer, Department of Resistance of Materials, Theoretical and Building Mechanics; e-mail: **ventav@mail.ru**

Elena V. Rashidova, Cand. Sci. (Physics and Mathematical), Prof., Department of Information Technologies; e-mail: **el.rash@mail.ru**

Gelani M. Murtazaliev, Dr. Sci. (Technical), Prof., Department Resistance of Materials, Theoretical and Construction Mechanics; e-mail: **smdstu@mail.ru**

Конфликт интересов.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию 30.07.2019.

Принята в печать 25.09.2019.

Conflict of interest.

The authors declare no conflict of interest.

Received 30.07.2019.

Accepted for publication 25.09.2019.