ISSN 1816-0301 (Print)
ISSN 2617-6963 (Online)

УДК 519.6, 004.94
https://doi.org/10.37661/1816-0301-2020-17-4-22-35

Поступила в редакцию 20.03.2020
Received 20.03.2020

Принята к публикации 12.10.2020
Accepted 12.10.2020

Вейвлет-преобразование на конечном интервале

В. М. Романчак

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь
E-mail: Romanchak@bntu.by

Аннотация. Рассматриваются интегральные преобразования на конечном интервале с сингулярным базисным вейвлетом. С помощью последовательности таких преобразований решается задача непараметрической аппроксимации функции. Традиционно считается, что для базисного вейвлета должно выполняться условие допустимости, т. е. среднее значение вейвлета должно равняться нулю. Существует ряд сингулярных вейвлетов, для которых условие допустимости не выполняется. В этом случае в качестве базисного вейвлета можно использовать дельтообразные функции, которые участвуют в оценках Парзена – Розенблатта и Надарая – Ватсона. Исследование ряда вейвлет-преобразований на конечном интервале проводится только в одном частном случае из-за технических сложностей при попытке непосредственного решения этой задачи. Реализуется идея периодического продолжения вейвлет-преобразования с конечного интервала на всю числовую ось, которая позволяет сформулировать достаточные условия сходимости. Приводится пример аппроксимации с помощью суммы дискретных вейвлет-преобразований.

Ключевые слова: вейвлет, вейвлет-преобразование, окно Парзена − Розенблатта, непараметрическая аппроксимация, ядерная оценка Надарая – Ватсона

Для цитирования. Романчак, В. М. Вейвлет-преобразование на конечном интервале / В. М. Романчак // Информатика. – 2020. − Т. 17, № 4. – С. 22–35. https://doi.org/10.37661/1816-0301-2020-17-4-22-35

Wavelet transformation on a finite interval

Vasily M. Romanchak

Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus
E-mail: Romanchak@bntu.by

Abstract. Integral transformations on a finite interval with a singular basis wavelet are considered. Using a sequence of such transformations, the problem of nonparametric approximation of a function is solved. Traditionally, it is assumed that the validity condition must be met for a basic wavelet (the average value of the wavelet must be zero). The paper develops the previously proposed method of singular wavelets when the tolerance condition is not met. In this case Delta-shaped functions that participate in Parzen – Rosenblatt and Nadaray – Watson estimations can be used as a basic wavelet. The set of wavelet transformations for a function defined on a numeric axis, defined locally, and on a finite interval were previously investigated. However, the study of the convergence of the decomposition on a finite interval was carried out only in one particular case. It was due to technical difficulties when trying to solve this problem directly. In the paper the idea of evaluating the periodic continuation of a function defined initially on a finite interval is implemented. It allowed to formulate sufficient convergence conditions for the expansion of the function in a series. An example of approximation of a function defined on a finite interval using the sum of discrete wavelet transformations is given.

Keywords: wavelet, wavelet transform, the Parzen – Rosenblatt window method, nonparametric estimator, Nadaraya − Watson kernel regression

For citation. Romanchak V. M. Wavelet transformation on a finite interval. *Informatics*, 2020, vol. 17, no. 4, pp. 22−35 (in Russian). https://doi.org/10.37661/1816-0301-2020-17-4-22-35

Введение. Методы непараметрической аппроксимации в настоящее время широко распространены. Непараметрическую аппроксимацию можно использовать для построения различных математических моделей [1]. В прикладных работах часто применяют аппроксимацию ядерными функциями [2, 3] и вейвлетами [4, 5]. Если ядерные функции использовать в качестве базисного вейвлета в интегральном вейвлет-преобразовании, то получим метод сингулярных вейвлетов. При аппроксимации методом сингулярных вейвлетов происходит суммирование ядерных оценок Надарая – Ватсона [6] по параметру размытости, поэтому отпадает необходимость решать задачу оптимального выбора этого параметра. Преобразование для бесконечного промежутка рассматривалось в работах [7, 8]. Оценка сходимости суммы вейвлет-преобразований для бесконечного промежутка получена в работе [9], для конечного промежутка – в работе [10].

В настоящей статье рассматриваются более общие условия сходимости для конечного промежутка. Для этого определяется периодическое продолжение вейвлет-преобразования с конечного интервала на всю числовую ось. В качестве примера приложения теории показано, что в некоторых случаях из сигнала можно выделить медленную и быструю компоненты.

Целью исследования является развитие метода сингулярных вейвлетов, в частности получение достаточных условий сходимости ряда, составленного из вейвлет-преобразований на конечном промежутке. В работе доказываются две теоремы, которые содержат формулировки условий сходимости ряда из вейвлет-преобразований. При доказательстве используется определение периодического продолжения функции $f(x)$ с конечного интервала $[A, B]$ на бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$.

Преобразование с сингулярным вейвлетом

Определение. Пусть для функции $\psi(x)$ выполняется условие на бесконечности

$$\left|\psi(x)\right| \le \frac{d}{1+x^2}, \tag{1}$$

где d − некоторая константа, $d > 0$, и для функции $\psi(x)$ существует конечное среднее значение

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau)d\tau. \tag{2}$$

Тогда функция $\psi(x)$ принадлежит пространству $L^1(R)$. Такую функцию $\psi(x)$ назовем *базисным вейвлетом*. Обычно для базисного вейвлета должно выполняться условие допустимости: среднее определяемое по формуле (2) должно равняться нулю, $C_\psi = 0$. Если считать, что для вейвлета среднее не равно нулю, $C_\psi \neq 0$, то такой базисный вейвлет будем называть *сингулярным* [7]. Например, сингулярным вейвлетом является функция плотности нормального распределения. Базисный вейвлет может быть задан с точностью до постоянного множителя. Поэтому считаем, что среднее сингулярного вейвлета равно единице, $C_\psi = 1$. Преобразование для бесконечного промежутка определяется формулой [8, 9]

$$W\left(f(x)-f\right)(x,\, a) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x)-f(\tau)\right)\psi\left(\frac{\tau-x}{a}\right)d\tau, \tag{3}$$

где $a > 0$, $b \in R$.

В частном случае, если $C_\psi = 0$, преобразование (3) имеет вид

$$W(f)(x,a) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\psi\left(\frac{\tau-x}{a}\right)d\tau.$$

Здесь преобразование (3) с точностью до постоянной совпадает со стандартным вейвлет-преобразованием [1]. При $C_\psi = 1$ преобразование (3) можно записать в виде

$$W\left(f(x)-f\right)(x,\, a) = f(x) - \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\psi\left(\frac{\tau-x}{a}\right)d\tau.$$

Введение сингулярных вейвлетов расширяет возможности теории вейвлетов и ядерных оценок типа Надарая – Ватсона [10]. Определим преобразование на конечном промежутке:

$$W\,(\,f\,(x)-\,f\,)(x,a)=\,f\,(x)-Wf\,(x,a),\tag{4}$$

где $Wf(x,a)$ – вейвлет-преобразование вида

$$Wf\,(x,a)=\frac{1}{aC(x)}\int_A^B f\,(\tau)\psi\left(\frac{\tau-x}{a}\right)d\tau.\tag{5}$$

Здесь $C\left(x\right)=\int_A^B\psi\left(\dfrac{\tau-x}{a}\right)d\tau,$ где $\psi(x)$ – сингулярный вейвлет.

Последовательность преобразований. Используя сингулярный вейвлет $\psi(x)$ и формулы (4), (5), запишем последовательность преобразований на конечном интервале:

$$F_{k+1}(x)=F_k\,(x)-WF_k\,(x,\,a_k),\tag{6}$$

где

$$WF_k\,(x,\,a_k)=\frac{1}{a_kC_k\left(x\right)}\int_A^B F_k(\tau)\psi\left(\frac{\tau-x}{a_k}\right)d\tau,\tag{7}$$

$$C_k\left(x\right)=\int_A^B\psi\left(\frac{\tau-x}{a_k}\right)d\tau,\ F_0(x)=f(x),\,k=0,\,1,\,2,\,\ldots$$

Непосредственно доказывается утверждение, что если функция $F_k(x)$ принадлежит пространству $L^1[A,\,B]$, то функция $F_{k+1}(x)\,=\,W(f\,-\,f(x))(x,\,a)$ также принадлежит пространству $L^1[A,\,B]$ [10]. С помощью последовательности (6) можно аппроксимировать функцию $f(x)$. Если вейвлет $\psi(x)$ является неотрицательной функцией, то в формуле (8) функция $C_k(x)$ неотрицательна, $C_k(x) > 0$, и преобразования (6), (7) существуют для любых положительных a_k.

Формула разложения. Если функция $f(x)$ на промежутке $[A,\,B]$ принадлежит пространству $L^1[A,\,B]$, то ее можно представить в виде суммы вейвлет-преобразований и остаточного члена:

$$f\,(x)=\sum_{k=0}^{K}WF_k\,(x,a_k)+F_{K+1}\,(x),\tag{8}$$

где a_k − произвольные положительные действительные числа;

$F_k(x)$ – элемент последовательности преобразований (6), $F_0(x) = f(x)$;

$WF_k\,(x,a)$ – вейвлет-преобразование, определяемое по формуле (7);

$F_{K+1}(x)$ – остаточный член разложения, который находится по формуле (7);

k – порядковый номер вейвлет-преобразования, $0 \le k \le K + 1$;

$K + 1$ – порядок приближения, $K \ge 0$.

Ограничимся случаем, когда вейвлет $\psi(x)$ является неотрицательной функцией, т. е. существует последовательность вейвлет-преобразований (6), (7). Тогда формула (8) выполняется тождественно для любых положительных значений a_k. Например, при $K = 1$ из рекуррентной формулы (6) следуют равенства

$$F_1(x)=F_0\,(x)-WF_0\,(x,a_0),\ F_2\,(x)=F_1(x)-WF_1(x,a_1).$$

Суммируя эти равенства, получим $F_2(x) = F_0(x) - WF_0(x, a_0) - WF_1(x, a_1)$. Учитывая, что $F_0(x) = f(x)$, будет выполняться формула

$$f(x) = WF_0(x,\ a_0) + WF_1(x,\ a_1) + F_2(x). \tag{9}$$

При произвольном порядке K формула (9) доказывается аналогично. Для оценки остаточного члена $F_{K+1}(x)$ понадобятся вспомогательные определения. Сумму в выражении (8) можно рассматривать как частичную сумму ряда. Если остаточный член разложения стремится к нулю, ряд сходится.

Вспомогательные определения

Приращения высших порядков. Пусть функция f задана на промежутке $[A, B]$. Будем говорить, что задано приращение первого порядка в точке $z \in [A, B]$, если определено выражение

$$\Delta f(\Delta_0, z) = f(\Delta_0 + z) - f(z), \tag{10}$$

где $z \in [A, B]$, $\Delta_0 + z \in [A, B]$. Приращение второго порядка в точке z найдем по формуле

$$\Delta^2 f\left(\Delta_0, \Delta_1, z\right) = \Delta f(\Delta_0, \Delta_1 + z) - \Delta f(\Delta_0, z), \tag{11}$$

где $\Delta_1 + z \in [A, B]$.

В общем случае приращение в точке z порядка $k + 1$ зададим равенством

$$\Delta^{k+1} f(\Delta_0, ..., \Delta_{k-1}, \Delta_k, z) = \Delta^k f(\Delta_0, ..., \Delta_{k-1}, \Delta_k + z) - \Delta^k f(\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_{k-1}, z),$$

где $\Delta_k + z \in [A, B]$. Приращение k-го порядка является симметрической функцией своих параметров $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_k$, т. е. при любой их перестановке значение функции не меняется. В частности,

$$\Delta^2 f(\Delta_0, \Delta_1, z) = \Delta^2 f(\Delta_1, \Delta_0, z),$$

$$\Delta^{k+1} f(\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_k, z) = \Delta^{k+1} f(\Delta_k, ..., \Delta_1, \Delta_0, z).$$

Условия Липшица высших порядков. Пусть функция f задана на промежутке $[A, B]$. Будем говорить, что для функции $f(z)$ выполняется условие Липшица первого порядка в точке $z \in [A, B]$, если определена разность первого порядка и верно неравенство

$$\left|\Delta f(\Delta_0, z)\right| \le L\left|\Delta_0\right|.$$

Условие Липшица второго порядка в точке $z \in [A, B]$ выполняется, если для разности второго порядка выполняется неравенство

$$\Delta^2 f\left(\Delta_0, \Delta_1, z\right) \le L\left|\Delta_0\right|\left|\Delta_1\right|.$$

Аналогично определим в точке $z \in [A, B]$ условие Липшица порядка $m + 1\Delta$:

$$\Delta^{m+1} f(\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_m, z) \le L\left|\Delta_0\right|\left|\Delta_1\right|, ..., \left|\Delta_m\right|.$$

С помощью условия Липшица первого порядка можно оценить разность второго порядка:

$$\left|\Delta^2 f\left(\Delta_0, \Delta_1, z\right)\right| \le \left|\Delta^1 f(\Delta_1, z + \Delta_0)\right| + \left|\Delta^1 f(\Delta_1, z)\right| \le 2L_1\left|\Delta_1\right|.$$

Подобным образом можно получить оценку для разности произвольного порядка:

$$\Delta^{k+1} f\left(\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_k, z\right) \leq 2^k \left|\Delta_k\right| L, \tag{12}$$

где $z \in [A, B]$. Согласно условию Липшица второго порядка получим оценку для разности третьего порядка

$$\left|\Delta^3 f(\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, z)\right| \leq \left|\Delta^2 f(\Delta_1, \Delta_2, z+\Delta_0)\right| + \left|\Delta^2 f(\Delta_1, \Delta_2, z)\right| \leq 2L\left|\Delta_1\right|\left|\Delta_2\right|.$$

Для разности произвольного порядка будет выполняться неравенство

$$\left|\Delta^{k+1} F(\Delta_0, ..., \Delta_{k-1}, \Delta_k, z)\right| \leq 2^{k-1} L\left|\Delta_k\right|\left|\Delta_{k-1}\right|. \tag{13}$$

С помощью условия Липшица порядка m можно оценить разность порядка k ($k > m$):

$$\left|\Delta^{k+1} F(\Delta_0, ..., \Delta_{k-1}, \Delta_k, z)\right| \leq 2^{k-m+1} L\left|\Delta_{k-m+1}\right|, ..., \left|\Delta_{k-1}\right|\left|\Delta_k\right|. \tag{14}$$

Остаточный член разложения. Вначале для функции $f(x)$ и базисного вейвлета $\psi(x)$ определим периодические продолжения. Положим, что функция $f(x)$ задана на промежутке $[A, B]$. Дополнительно будем рассматривать продолжение функции $f(x)$, $x \in [A, B)$, на числовую полуось $[A, \infty)$ по формуле

$$f(x+T) = f\left(x\right),$$

где $T = B - A$. Введем также периодическое продолжение базисного вейвлета $\psi(u_k)$, определенного на промежутке $[0, T_k)$, где $T_k = (B - A)/a_k$, $a_k > 0$, на числовую полуось $[0, \infty)$ по формуле

$$\psi\left(u_k + T_k\right) = \psi\left(u_k\right).$$

Сделав замену переменных $\tau = x + a_k u_k$ в выражениях (6) и (7), получим преобразование

$$F_{k+1}(x) = \frac{1}{C_k} \int\limits_{A_k - H_k}^{B_k - H_k} \left(F_k(x) - F_k(x + a_k u_k)\right) \psi(u_k) du_k, \tag{15}$$

где $C_k = \int\limits_{A_k - H_k}^{B_k - H_k} \psi\left(u_k\right) du_k$, $A_k = A/a_k$, $B_k = B/a_k$, $H_k = x / a_k$.

Можно считать, что для соотношения (15) определено периодическое продолжение функций $F_k(x + a_k u_k)$ и $\psi\left(u_k\right)$ с периодом $T_k = (B - A)/a_k$ по переменной u_k. Длина промежутка интегрирования в преобразовании (15) равна T_k и совпадает с периодом подынтегральной функции. Поэтому равенство (15) выполняется для произвольной постоянной H_k и следующее преобразование можно записать в виде равенства

$$F_{k+1}(x) = \frac{1}{C_k} \int\limits_{0}^{T_k} \left(F_k(x) - F_k(x + a_k u_k)\right) \psi\left(u_k\right) du_k, \tag{16}$$

где $C_k = \int_0^{T_k} \psi(u_k) du_k$, $T_k = (B - A)/a_k$. Используя рекуррентную последовательность (16), получим формулу для остаточного члена в разложении (8). Формула (16) для $k = 1$ имеет вид

$$F_2(x) = \frac{1}{C_1} \int_0^{T_1} \left(F_1(x) - F_1(x + a_1 u_1) \right) \psi(u_1) du_1. \tag{17}$$

С учетом разности первого порядка (10) для $k = 0$ и на основании формулы (16) получим выражение

$$F_1(x) = -\frac{1}{C_0} \int_0^{T_0} \Delta F_0(a_0 u_0, x) \psi(u_0) du_0. \tag{18}$$

Подставив (18) в равенство (17) и используя определение разности второго порядка (11), запишем

$$F_2(x) = \frac{1}{C_0 C_1} \int_0^{T_1} \int_0^{T_0} \left(\Delta F_0(a_0 u_0, x + a_1 u_1) - \Delta F_0(a_0 u_0, x) \right) \psi(u_0) \psi(u_1) du_0 du_1 =$$

$$= \frac{1}{C_0 C_1} \int_0^{T_1} \int_0^{T_0} \Delta^2 F_0(a_0 u_0, a_1 u_1, x) \psi(u_0) \psi(u_1) du_0 du_1.$$

Таким образом, в общем случае остаточный член разложения имеет вид

$$F_{k+1}(x) = \frac{(-1)^k}{C_0 \dots C_k} \int_0^{T_k} \dots \int_0^{T_0} \Delta^{k+1} f(a_0 u_0, \dots, a_k u_k, x) \psi(u_0) \dots \psi(u_k) du_0 \dots du_k, \tag{19}$$

где $T_k = (B - A) / a_k$, $a_k > 0$, $C_k = \int_0^{T_k} \psi(u_k) du_k$.

Если условие Липшица выполняется для функции $f(z)$ в точке $z \in [A, B)$, то оно будет выполняться в этой точке и для периодического продолжения функции $f(z)$ на множество $[A, +\infty)$. Следовательно, условие Липшица можно применять для разности порядка $k + 1$ в выражении под знаком интеграла в формуле (19).

Достаточные условия равномерной сходимости. Применение периодического продолжения позволяет получить оценки остаточного члена разложения в форме (19). Докажем две теоремы.

Теорема 1. *Пусть для функции $f(x)$ в точке $x \in [A, B]$ выполняется условие Липшица порядка m, $\psi(x)$ – сингулярный неотрицательный вейвлет. Будем считать, что интеграл в выражении*

$$I_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \psi(x) dx$$

сходится и параметры вейвлет-преобразований (7) *образуют геометрическую прогрессию, такую, что* $a_k = a_0 q^k$, $k = 0, 1, \dots, a_0 > 0$. *Тогда остаточный член разложения (8) стремится к нулю в точке x для таких значений q, что* $0 < q < 2^{-1/m}$.

Доказательство. Ограничимся доказательством теоремы для продолжения функции $f(x)$ на числовую полуось $[A, \infty)$:

1. Разберем случай, когда для периодического продолжения функции $f(x)$ в точке $x \in [A, B)$ выполняется условие Липшица первого порядка (12) и верно неравенство

$$\Delta^{k+1} f(a_0 u_0, \dots, a_k u_k, x) \le 2^k a_k |u_k| L. \tag{20}$$

Следовательно, для остаточного члена в форме (19) выполняется оценка

$$\left|F_{k+1}(x)\right| \le \frac{2^k a_k L}{C_0 ... C_k} \int_0^{T_k} ... \int_0^{T_0} u_k \psi(u_0)...\psi(u_k)\, du_0 ... du_k .$$

Тогда верно неравенство

$$\left|F_{k+1}(x)\right| \le \frac{2^k a_k L}{C_k} \int_0^{T_k} u_k \psi(u_k) du_k \le \frac{2^k a_k L}{C_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left|u_k\right| \psi(u_k) du_k = \frac{2^k a_k L}{C_0} I_\psi . \tag{21}$$

Здесь учитывается, что выполняется соотношение $C_k > C_0$, так как $B_k - A_k > B_0 - A_0$. Соответственно,

$$\left|F_{k+1}(x)\right| \le c' 2^k q^k , \tag{22}$$

где c' – постоянная, не зависящая от номера k и выбора точки x. Таким образом, остаточный член стремится к нулю при $0 < q < 2^{-1}$ и теорема для условия Липшица первого порядка доказана.

2. Пусть выполняется условие Липшица второго порядка (13) для периодического продолжения функции $f(x)$, тогда справедливо неравенство

$$\Delta^{k+1} f\left(a_0 u_0, ..., a_k u_k, x\right) \le 2^{k-1} a_k a_{k-1} \left|u_k\right| \left|u_{k-1}\right| L.$$

Для остаточного члена (19) выполняется оценка

$$\left|F_{k+1}(x)\right| \le \frac{2^{k-1} a_k a_{k-1} L}{C_k C_{k-1}} \int_0^{T_k} \int_0^{T_{k-1}} u_{k-1} u_k \psi(u_{k-1}) \psi(u_k) du_{k-1} du_k \le 2^{k-1} a_k a_{k-1} \frac{I_\psi^{\ 2}}{C_0^{\ 2}} L.$$

Следовательно, для значений $a_k = a_0 q^k$ верно неравенство

$$\left|F_{k+1}(x)\right| \le c' 2^k q^{2k} , \tag{23}$$

где c' – постоянная. Таким образом, ряд в разложении сходится при $q < 2^{-1/2}$ и теорема для условия Липшица второго порядка доказана.

3. Пусть выполняется условие Липшица (14) порядка m для функции $f(x)$ в точке $x \in [A, B)$. Можно показать, что остаточный член разложения стремится к нулю при выполнении условия $0 < q < 2^{-1/m}$. Случай продолжения функции $f(x)$ на числовую полуось $(-\infty, B]$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Можно получить оценку для остаточного члена при других предположениях. Например, если не требовать существования интеграла I_ψ в выражении (20).

Теорема 2. *Пусть для функции* $f(x)$ *в точке* $x \in [A, B]$ *выполняется условие Липшица порядка* m, $\psi(x)$ *– сингулярный неотрицательный вейвлет и параметры* a_k *вейвлет-преобразований* (7) *образуют геометрическую прогрессию,* $a_k = a_0 q^k$, $a_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots$. *Тогда остаточный член формулы разложения (8) стремится к нулю в точке* x *для таких значений* q, *что* $0 < q < 2^{-3/m}$.

Доказательство. Ограничимся доказательством теоремы для продолжения функции $f(x)$, определенной для $x \in [A, B)$, на числовую полуось $[A, \infty)$, предполагая, что выполняются условия Липшица первого порядка, второго порядка и для общего случая:

1. Пусть выполняется условие Липшица первого порядка для функции $f(x)$ в точке $x \in [A, B)$. Так как $a_k |u_k| < B - A$, из выражения (20) следует неравенство

$$\left|\Delta^{k+1} f(a_0 u_0, ..., a_k u_k, x)\right| \le 2^k L(B - A), \tag{24}$$

которое остается верным для продолжения функции $f(x)$ на числовую полуось $[A, \infty)$.

Введем обозначения:

$$\psi_k^{\alpha}(x) = \begin{cases} \psi(x), & |x| \le M_k, \\ 0, & |x| > M_k; \end{cases} \tag{25}$$

$$\psi_k^{\beta}(x) = \begin{cases} 0, & |x| \le M_k, \\ \psi(x), & |x| > M_k, \end{cases} \tag{26}$$

где M_k – некоторое положительное число, $\psi(t)$ – базисный вейвлет. Тогда верно равенство

$$\psi(x) = \psi_k^{\alpha}(x) + \psi_k^{\beta}(x). \tag{27}$$

В точке $x \in [A, B)$ для функции $f(x)$ с продолжением на числовой полуоси $[A, \infty)$ выполняется неравенство

$$\left|\Delta^{k+1} f(a_0 u_0, ..., a_k u_k, x)\psi(u_k)\right| \le 2^k a_k |u_k| L\psi_k^{\alpha}(u_k) + 2^k L(B - A)\psi_k^{\beta}(u_k),$$

которое следует из равенства (27) и неравенств (20) и (24).

Если учесть неравенство (1) и оценку $|u_k| L\psi_k^{\alpha}(u_k) \le |M_k| L\psi_k^{\alpha}(u_k)$, получим выражение

$$\left|\Delta^{k+1} f(a_0 u_0, ..., a_k u_k, x)\psi(u_k)\right| \le 2^k L\left(a_k M_k \psi_k^{\alpha}(u_k) + \frac{d(B - A)}{M_k^{\ 2}}\right). \tag{28}$$

Следовательно, для остаточного члена разложения в форме (19) выполняются соотношения

$$\left|F_{k+1}(x)\right| \le \frac{2^k L}{C_0 ... C_k} \int_0^{T_k} ... \int_0^{T_0} \left(a_k M_k \psi_k^{\alpha}(u_k) + \frac{d(B - A)}{M_k^{\ 2}}\right) \psi(u_0) ... \psi(u_{k-1}) du_0 ... du_k \le$$

$$\le \frac{2^k L}{C_k} \int_0^{T_k} \left(a_k M_k \psi(u_k) + \frac{d(B - A)}{M_k^{\ 2}}\right) du_k$$

и

$$\left|F_{k+1}(x)\right| \le 2^k L\left(a_k M_k + \frac{d(B - A)^2}{a_k C_0 M_k^{\ 2}}\right). \tag{29}$$

Оценка (29) найдена с применением соотношений

$$\frac{1}{C_k}\int_0^{T_k}\psi(u_k)du_k \le \frac{1}{C_k}\int_0^{\infty}\psi(u_k)du_k = 1, \quad \int_0^{T_k} du_k = T_k = \frac{B-A}{a_k}, \quad C_k \ge C_0.$$

Тогда, если считать, что $M_k = (a_k)^{-2/3}$ и $a_k = a_0q^k$, из выражения (29) следуют оценки

$$|F_k(x)| \le c_1 2^k (a_k)^{\frac{1}{3}} \le c_2 2^k q^{\frac{k}{3}},$$

где c_1, c_2 – положительные постоянные. Следовательно, последовательность $F_k(x)$ будет стремиться к нулю для $0 < q < 2^{-3}$.

2. Считаем, что выполняется условие Липшица второго порядка (13) для функции $f(x)$ в точке $x \in [A, B)$. Используя функции $\psi_k^{\alpha}(x)$ и $\psi_k^{\beta}(x)$, которые определены формулами (25) и (26), получим неравенство по аналогии с нахождением соотношения (28):

$$\left|\Delta^{k+1} f(a_0u_0, ..., a_ku_k, x)\psi(u_k)\psi(u_{k-1})\right| \le$$
$$\le 2^{k-1}L\left(a_kM_k\psi_k^{\alpha}(u_k) + \frac{d(B-A)}{M_k^{\;2}}\right)\left(a_{k-1}M_{k-1}\psi_{k-1}^{\alpha}(u_{k-1}) + \frac{d(B-A)}{M_{k-1}^{\;2}}\right).$$

Для остаточного члена разложения (19) выполняется условие, верность которого можно подтвердить по аналогии с доказательством неравенства (29):

$$|F_{k+1}(x)| \le 2^{k-1}L\left(a_kM_k + \frac{d(B-A)^2}{a_kC_0M_k^{\;2}}\right)\left(a_{k-1}M_{k-1} + \frac{d(B-A)^2}{a_{k-1}C_0M_{k-1}^{\;2}}\right). \tag{30}$$

Выбрав в выражении (30) значения $M_k = (a_k)^{-2/3}$, $M_{k-1} = (a_{k-1})^{-2/3}$ и $a_k = a_0q^k$, получим оценку для остаточного члена

$$|F_{k+1}(x)| \le c_1 2^k (a_k)^{\frac{2}{3}} \le c_2 2^k q^{\frac{2}{3}k},$$

где c_1, c_2 – положительные постоянные. Следовательно, для $q < 2^{-3/2}$ разложение функции $f(x)$ в ряд сходится.

3. Пусть выполняется условие Липшица (14) порядка m для функции $f(x)$ в точке $x \in [A, B)$. Подобным образом можно показать, что для сходимости ряда достаточно выполнить условие

$$|F_{k+1}(x)| \le c_1 2^k q^{\frac{m}{3}k}, \tag{31}$$

где c_1 – положительная постоянная. Следовательно, остаточный член разложения будет стремиться к нулю для таких значений q, что $0 < q < 2^{-3/m}$. Случай продолжения функции $f(t)$ на числовую полуось $(-\infty, B]$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Алгоритм дискретной аппроксимации функции. Рассмотрим алгоритм дискретной аппроксимации функции, для которой не выполняются условия Липшица. Пусть x_i, $i = 1, \dots, n$, принадлежат интервалу $[-1, 1]$ и известны значения функции $y_i = f(x_i)$ в этих точках.

1. Присваиваем начальные значения y_i коэффициентам вейвлета нулевого порядка: $F_{0,i} = y_i$, $i = 1, \dots, n$.

2. Вычисляем коэффициенты вейвлет-преобразования, используя дискретный аналог формул (6) и (7):

$$F_{k+1,i} = F_{k,i} - WF_k(x_i, a_k), \tag{32}$$

где $k = 1, \ldots, K$; $F_{k,i}$ – значения коэффициентов вейвлета k-го порядка в точке x_i, $i = 1, \ldots, n$; $a_k = \alpha 2^{-k}$, α – постоянная. Здесь

$$WF_k(x, a_k) = \frac{\sum_i F_{k,i} \psi\left(\frac{x_i - x}{a_k}\right)}{\sum_i \psi\left(\frac{x_i - x}{a_k}\right)}. \tag{33}$$

3. Восстанавливаем функцию $f_K(x) \approx f(x)$ во всех точках интервала $[A, B]$, используя аналог формулы (8):

$$f_K(x) = \sum_{k=0}^{K} WF_k(x, a_k). \tag{34}$$

Например, в частном случае $\psi(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $x_i \in [-1, 1]$, $y_i = f(x_i)$, где $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x < 0; \\ 0, \text{ если } x = 0; \\ -1, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

Значения коэффициентов вейвлет-преобразования $W_{k,i}$, найденные по формуле (33), представлены в таблице. Номеру строки m, $m = 1, 2, \ldots, 6$, соответствует номер преобразования $k = m - 1$. Столбец с номером $i + 1$, $i = 0, 1, 2, ..., 8$, соответствует координате точки $x_i = -1 + 2i/n$, $n = 16$.

Коэффициенты вейвлет-преобразования $W_{k,i}$

–1,00	–1,00	–1,00	–1,00	0,00	1,00	1,00	1,00	1,00
–0,30	–0,34	–0,46	–0,68	0,00	0,68	0,46	0,34	0,30
–0,00	–0,02	–0,11	–0,38	0,00	0,38	0,11	0,02	0,00
0,01	0,02	0,00	–0,15	0,00	0,15	–0,00	–0,02	–0,01
0,00	0,00	0,01	–0,02	0,00	0,02	–0,01	–0,00	–0,00
–0,00	0,00	0,00	–0,00	0,00	0,00	–0,00	–0,00	0,00

Значения аппроксимирующей функции были рассчитаны по формуле (34). На рис. 1 показаны графики функций $f_K(x)$, $x \in [-1, 1]$, для $K = 4$ и $K = 6$ и $y = f(x)$, а также точки x_i, в которых заданы значения функции y_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, 8$. На рис. 2 изображен график аппроксимации функции $f(x)$ полиномами степени $n = 8$ и и $n = 12$, коэффициенты которых найдены по методу наименьших квадратов.

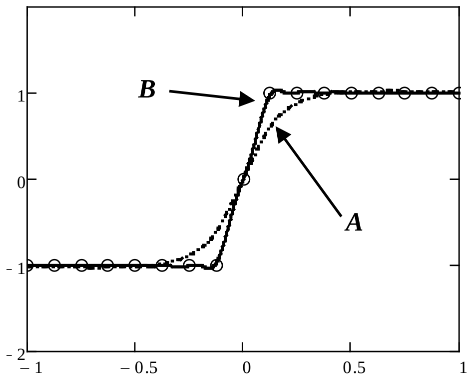

Рис. 1. Аппроксимация разрывной функции вейвлет-преобразованиями: A – функция $f_4(x)$, B – функция $f_{12}(x)$

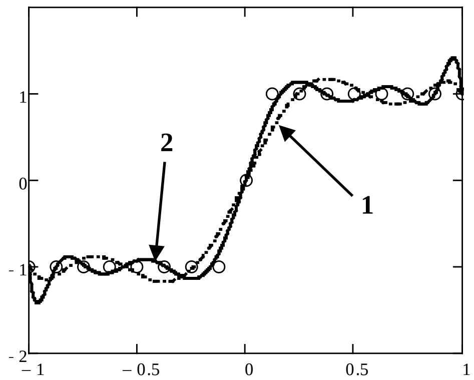

Рис. 2. Аппроксимация разрывной функции полиномом по методу наименьших квадратов: 1 – степень полинома, равная 5; 2 – степень полинома, равная 11

Аппроксимацию функцией $f_3(x)$ можно интерпретировать как результат сглаживания данных, аппроксимацию $f_6(x)$ – как интерполяцию (квазиинтерполяцию). Применяя различные порядки аппроксимации K, можно получить разные степени сглаживания функции, которые можно использовать в задаче фильтрации сигнала. Для этого функцию $f_K(x)$ удобно представить в виде суммы двух компонент:

$$f_K(x) = S(x) + T(x), \tag{35}$$

где $S(x) = \sum_{k=0}^{m} WF_k(x, a_k)$, $T(x) = \sum_{k=m}^{K} WF_k(x, a_k)$; преобразование $WF_k(x, a_k)$ определено по формуле (32). Таким образом, выполняется равенство $f(x) = S(x) + T(x) + F_{K+1}(x)$. Остаток $F_{K+1}(x)$ в узлах x_i можно найти по формуле

$$F_{K+1}(x_i) = f(x_i) - S(x_i) - T(x_i).$$

Параметры вейвлет-разложения (35) можно выбрать так, чтобы компонента $S(x)$ изменялась медленно, а компонента $T(x)$ – быстро и остаток был достаточно мал.

Пример приложения сингулярных вейвлетов. Исследуем временной ряд рождаемости в Республике Беларусь в период с 1950 по 2019 г. Пусть x_i – год, для которого определен уровень рождаемости, x_i = 1950, 1951, …, 2019; y_i – уровень рождаемости за год x_i. Аппроксимируем дискретный ряд наблюдений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ непрерывной функцией $f(x)$, такой, что $f(x_i) = y_i$. Используя формулу (34), представим функцию $f_K(x)$ в виде суммы медленной $S(x)$ и быстрой $T(x)$ компонент. Параметры для вейвлет-разложения выбраны следующие: $m = 1$, $K = 5$, $a_k = 2^{-k}$; сингулярный вейвлет $\psi(t) = e^{-t^2}$. Результаты расчетов представлены на рис. 3.

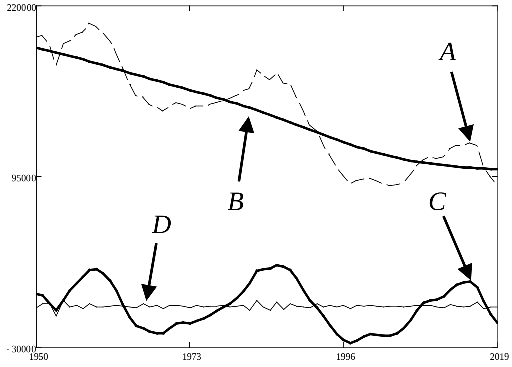

Рис. 3. Схема выделения из сигнала быстрой и медленной компонент: A – график исходных данных, y_i; B – график медленной компоненты, $S(x)$; C – график быстрой компоненты, $T(x)$; D – остаток

Проведем спектральный анализ Фурье исходных данных и быстрой компоненты.

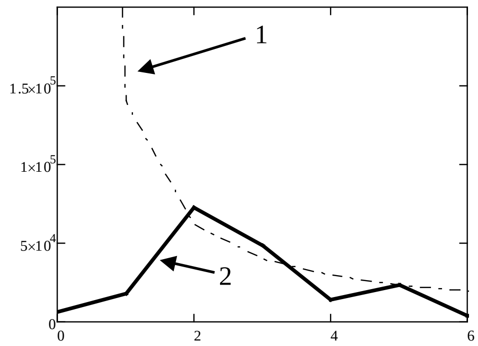

Рис. 4. Амплитудный спектр сигнала:
1 – спектр исходных данных; 2 – спектр быстрой компоненты

В результате спектрального анализа исходных данных (рис. 4) не была обнаружена периодическая аддитивная компонента. Спектр быстрой компоненты указывает на наличие периодической составляющей с периодом около 35 лет.

Графики на рис. 4. можно использовать как иллюстрацию влияния различных факторов на демографические показатели. В частности, специалистов в области демографии может заинтересовать возможность непосредственного анализа графиков.

В качестве примера приведем вариант трактовки графиков. Показатель рождаемости можно представить в виде суммы медленной и быстрой компонент. Обе компоненты имеют естественную интерпретацию. Первая обусловлена воздействием факторов, которые медленно изменяют показатели рождаемости; вторая – наличием факторов, оказывающих влияние на быстрое изменение рождаемости. Быстрая компонента, судя по графику на рис. 4, связана с военными действиями на территории страны (стрессовой ситуацией, приведшей к всплеску рождаемости в послевоенный период). На основании данных спектрального анализа можно сделать вывод, что воздействие этого всплеска рождаемости повторяется каждые 35 лет, хотя и становится менее выраженным.

Возможен следующий прогноз на период начиная с 2020 г.: значения медленной и быстрой компонент в ближайшие 10 лет будут убывать, поэтому показатель рождаемости будет сокращаться. Это обусловлено совпадением результатов воздействия двух групп факторов. Вместе с тем скорость спада медленной компоненты в последние 10 лет несколько замедлилась, что свидетельствует о появлении новых тенденций, которые оказывают влияние на медленную компоненту.

Заключение. Исследован ряд вейвлет-преобразований с сингулярным вейвлетом, для которого условие допустимости не выполняется. Показано, что вейвлет-преобразования можно использовать для аппроксимации функциональных зависимостей. Сформулированы и доказаны достаточные условия сходимости ряда вейвлет-преобразований, проведено исследование реального временного ряда. Показано, что если функция $f(x)$ на промежутке $[A, B]$ принадлежит пространству $L^1[A, B]$, то ее можно представить в виде суммы вейвлет-преобразований и остаточного члена. Для остаточного члена должно выполняться условие (31). Из условия сходимости следует, что скорость сходимости тем выше, чем выше порядок условия Липшица для функции $f(x)$.

Приведен пример аппроксимации с помощью суммы дискретных сингулярных вейвлет-преобразований. Выполнен сравнительный анализ аппроксимации рядом, составленным с помощью сингулярных вейвлетов, и методом наименьших квадратов. В качестве функции $f(x)$ на промежутке $[A, B]$ выбрана разрывная функция. Для разрывной функции условия Липшица не выполняются, поэтому не выполняются и доказанные в работе условия сходимости. Тем не менее сумма дискретных вейвлет-преобразований с сингулярным вейвлетом позволяет построить аппроксимацию функции $f(x)$, максимальное отклонение которой от точного значения существенно ниже, чем у приближения, полученного методом наименьших квадратов. В качестве примера приложения исследован временной ряд рождаемости в Республике Беларусь в период с 1950 по 2019 г. Для этого функция представлена в виде суммы двух компонент и остаточного члена формулы (35). Параметры вейвлет-разложения можно выбрать так, чтобы одна компонента изменялась медленно, а вторая – быстро и остаток вейвлет-разложения был достаточно мал. В этом случае можно провести спектральный анализ для каждой компоненты, причем результаты спектрального анализа каждой компоненты допускают вполне ясную интерпретацию.

Существует распространенная точка зрения, которая нашла свое отражение даже в учебной литературе, что вейвлет-преобразования обладают практически всеми достоинствами преобразований Фурье. Основанием для таких выводов является тот факт, что вейвлеты Морле [2] можно использовать для анализа сигнала, в частности периодического сигнала. Такой анализ позволяет судить о наличии периодической компоненты, однако в целом дает искаженное представление о спектре сигнала. Это вдвойне опасно, так как обработку экспериментальных данных часто проводят специалисты, которые далеки от предметной области, в то время как выводы делают исследователи, хорошо разбирающиеся в предметной области, но некритично воспринимающие результаты анализа сигнала. В рассмотренном случае результаты спектрального анализа быстрой и медленной компонент свободны от искажений. Представленный в работе пример позволяет сделать вывод о том, что сочетание вейвлет-анализа с анализом Фурье дает возможность получить объективную характеристику сигнала.

Список использованных источников

1. Хардле, В. Прикладная непараметрическая регрессия : пер. с англ. / В. Хардле. − М. : Мир, 1993. – 349 с.

2. Чуи, К. Введение в вейвлеты : пер. с англ. / К. Чуи. − М. : Мир, 2001. – 412 с.

3. Добеши, И. Десять лекций по вейвлетам : пер. с англ. / И. Добеши. – Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2001. − 464 с.

4. Watson, G. S. Smooth regression analysis / G. S. Watson // Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Ser. A. −1964. − Vol. 26. − P. 359–372.

5. Parzen, E. On estimation of a probability density function and mode / E. Parzen // The Annals of Mathematical Statistics. – 1962. – Vol. 33, no. 3. – P. 1065−1076.

6. Надарая, Э. А. Об оценке регрессии / Э. А. Надарая // Теория вероятностей и ее применение. − 1964. − Т. 9, № 1. − С. 157–159.

7. Серенков, П. С. Система сбора данных о качестве как техническая основа функционирования эффективных систем менеджмента качества / П. С. Серенков, В. М. Романчак, В. Л. Соломахо // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 4. – С. 100–104.

8. Романчак, В. М. Аппроксимация экспертных оценок сингулярными вейвлетами / В. М. Романчак, П. М. Лаппо // Вестник Гродненского гос. ун-та. Сер. 2. Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. – 2017. – Т. 7, № 1. − С. 132−139.

9. Романчак, В. М. Аппроксимация сингулярными вейвлетами / В. М. Романчак // Системный анализ и прикладная информатика. – 2018. – № 2. − С. 23–28.

10. Романчак, В. М. Сингулярные вейвлеты на конечном интервале / В. М. Романчак // Информатика. – 2018. – Т. 15, № 4. − С. 39–49.

References

1. Härdle W. *Applied Nonparametric Regression*. Cambridge, Cambridge University Press, 1992, 434 p.

2. Chui C. *An Introduction to Wavelets*. San Diego, Academic Press, 1992, 266 p.

3. Daubechies I. *Ten Lectures on Wavelets*. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992, 377 p.

4. Watson G. S. Smooth regression analysis. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Ser. A*, 1964, vol. 26, pp. 359–372.

5. Parzen E. On estimation of a probability density function and mode. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1962, vol. 33, no. 3, pp. 1065−1076.

6. Nadaraya E. A. Ob ocenke regressii [About a regression assessment]. Teorija verojatnostej i ee primenenie [*Probability Theory and Its Application*], 1964, vol. 9, no. 1, pp. 157–159 (in Russian).

7. Serenkov P. S., Romanchak V. M., Solomakho V. L. Sistema sbora dannyh o kachestve kak tehnicheskaja osnova funkcionirovanija jeffektivnyh sistem menedzhmenta kachestva [System of collection of data on quality as technical basis of functioning of effective systems of quality management]. Doklady Nacional'noj akademii nauk Belarusi [*Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*], 2006, vol. 50, no. 4, pp. 100−104 (in Russian).

8. Romanchak V. M., Lappo P. M. Approksimacija jekspertnyh ocenok singuljarnymi vejvletami [Approximation of expert estimates by singular wavelets]. Vestnik Grodnenskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. 2. Matematika. Fizika. Informatika, vychislitel'naja tehnika i upravlenie [*Bulletin of the Grodno State University. Series 2: Mathematics. Physics. Informatics, Computer Science and Management*], 2017, vol. 7, no. 1, pp. 132−139 (in Russian).

9. Romanchak V. M. Approksimacija singuljarnymi vejvletami [Approximation by singular wavelets]. Sistemnyj analiz i prikladnaja informatika [*Systems Analysis and Applied Informatics*], 2018, no. 2, pp. 23–28 (in Russian).

10. Romanchak V. M. Singuljarnye vejvlety na konechnom intervale [Singular wavelets on a finite interval]. Informatika [*Informatics*], 2018, vol. 15, no. 4, pp. 39−49 (in Russian).

Информация об авторе

Романчак Василий Михайлович, кандидат технических наук, доцент кафедры инженерной математики, Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь.
E-mail: Romanchak@bntu.by

Information about the author

Vasily M. Romanchak, Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor of the Department of Engineering Mathematics, Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus.
E-mail: Romanchak@ bntu.by