MODELING AND ANALYSIS OF INFORMATION SYSTEMS, VOL. 27, NO. 3, 2020
journal homepage: www.mais-journal.ru

COMPUTER SYSTEM ORGANIZATION

Features of the Algorithmic Implementation of Difference Analogues of the Logistic Equation with Delay

S. D. Glyzin[1], S. A. Kashchenko[1], A. O. Tolbey[1]

DOI: 10.18255/1818-1015-2020-3-344-355

[1]Centre of Integrable Systems, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150003, Russia.

MSC2020: 39A11, 34K18
Research article
Full text in Russian

Received August 11, 2020
After revision September 7, 2020
Accepted September 9, 2020

The logistic equation with delay or Hutchinson's equation is one of the fundamental equations of population dynamics and is widely used in problems of mathematical ecology. We consider a family of mappings built for this equation based on central separated differences. Such difference schemes are usually used in the numerical simulation of this problem. The presented mappings themselves can serve as models of population dynamics; therefore, their study is of considerable interest. We compare the properties of the trajectories of these mappings and the original equation with delay. It is shown that the behavior of the solutions of the mappings constructed on the basis of the central separated differences does not preserve, even with a sufficiently small value of the time step, the basic dynamic properties of the logistic equation with delay. In particular, this map does not have a stable invariant curve bifurcating under the oscillatory loss of stability of a nonzero equilibrium state. This curve corresponds in such mappings to the stable limit cycle of the original continuous equation. Thus, it is shown that such a difference scheme cannot be used for numerical modeling of the logistic equation with delay.

Keywords: logistic equation with delay; mapping; bifurcation.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Sergey D. Glyzin correspondence author	orcid.org/0000-0002-6403-4061. E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru Head of the Department of Computer Networks, professor.
Sergey A. Kashchenko	orcid.org/0000-0002-4846-6040. E-mail: kasch@uniyar.ac.ru First Vice-Rector, professor.
Anna O. Tolbey	orcid.org/0000-0001-5668-3929. E-mail: bekva@yandex.ru Associate Professor, PhD.

Funding: The author were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-29-10043).

For citation: S. D. Glyzin, S. A. Kashchenko, and A. O. Tolbey, "Features of the Algorithmic Implementation of Difference Analogues of the Logistic Equation with Delay", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 27, no. 3, pp. 344-355, 2020.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ, ТОМ 27, № 3, 2020
сайт журнала: www.mais-journal.ru

COMPUTER SYSTEM ORGANIZATION

Особенности алгоритмической реализации разностных аналогов логистического уравнения с запаздыванием

С. Д. Глызин [1], С. А. Кащенко [1], А. О. Толбей[1]

DOI: 10.18255/1818-1015-2020-3-344-355

[1]Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
150003, г. Ярославль, ул. Советская, 14.

УДК 517.962.24
Научная статья
Полный текст на русском языке

Получена 11 августа 2020 г.
После доработки 7 сентября 2020 г.
Принята к публикации 9 сентября 2020 г.

Логистическое уравнение с запаздыванием или уравнение Хатчинсона представляет собой одно из фундаментальных уравнений популяционной динамики и находит широкое применение в задачах математической экологии. В работе рассматривается семейство отображений, построеннное для этого уравнения на основе центральных разделенных разностей. Такие разностные схемы обычно используются при численном моделировании данной задачи. Представленные отображения сами по себе могут служить моделями динамики популяций, поэтому их изучение представляет значительный интерес. В работе сопоставляются свойства траекторий данных отображений и исходного уравнения с запаздыванием. Показано, что поведение решений отображений, построенных на основе центральных разделенных разностей, не сохраняет, даже при достаточно малой величине шага по времени, основных динамических свойств логистического уравнения с запаздыванием. В частности, у этого отображения при колебательной потере устойчивости ненулевого состояния равновесия не бифурцирует устойчивая инвариантная кривая. Эта кривая соответствует в таких отображениях устойчивому предельному циклу исходного непрерывного уравнения. Тем самым показано, что такая разностная схема не может быть использована для численного моделирования логистического уравнения с запаздыванием.

Ключевые слова: логистическое уравнение с запаздыванием; отображение; бифуркации.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Сергей Дмитриевич Глызин автор для корреспонденции	orcid.org/0000-0002-6403-4061. E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru заведующий кафедрой компьютерных сетей, доктор физ.-мат. наук, профессор.
Сергей Александрович Кащенко	orcid.org/0000-0002-4846-6040. E-mail: kasch@uniyar.ac.ru первый проректор, доктор физ.-мат. наук, профессор.
Анна Олеговна Толбей	orcid.org/0000-0001-5668-3929. E-mail: bekva@yandex.ru доцент кафедры компьютерных сетей, канд. физ.-мат. наук.

Финансирование: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-10043.

Для цитирования: S. D. Glyzin, S. A. Kashchenko, and A. O. Tolbey, “Features of the Algorithmic Implementation of Difference Analogues of the Logistic Equation with Delay”, *Modeling and analysis of information systems*, vol. 27, no. 3, pp. 344-355, 2020.

1. Постановка задачи

1.1. Простейшие свойства логистического уравнения с запаздыванием

Среди фундаментальных моделей популяционной динамики особое место занимает логистическое уравнение с запаздыванием

$$\frac{du}{dt} = r[1 - u(t-1)]u, \tag{1}$$

в котором неотрицательная функция $u(t)$ моделирует нормированную плотность численности популяции, а положительный параметр r характеризует скорость ее роста. В уравнении (1) за счет запаздывания в правой части простейшим способом моделируется возрастная структура популяции. Исследованию решений этого уравнения посвящено значительное количество литературы (см. [1—6]). Для изложения полученных нами результатов понадобятся простейшие свойства его решений, полученные в этих работах.

Через $C[-1,0]$ ниже обозначается пространство непрерывных на отрезке $[-1,0]$ функций со стандартной нормой. Это пространство примем в качестве фазового, т.е. пространства начальных условий уравнения (1). Для дальнейших построений нам потребуются два утверждения о решениях уравнения (1).

1. Для уравнения (1) выполняется теорема существования и единственности решений, т.е. для каждого значения t_0 и каждой начальной функции $\varphi(s) \in C[-1,0]$, при всех $t > t_0$, существует и единственное решение $u(t,\varphi)$ уравнения (1), для которого $u(t_0 + s, \varphi) = \varphi(s)$.

2. Бифуркации Андронова – Хопфа. Положим в (1)

$$r = \pi/2 + \varepsilon,$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, тогда в достаточно малой и не зависящей от ε окрестности состояния равновесия $u \equiv 1$ существует двумерное устойчивое локальное интегральное многообразие (см., например, [7, 8]). На этом многообразии уравнение (1) можно записать в виде скалярного комплексного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dg}{dt} = (\varepsilon\alpha_1 + O(\varepsilon^2))g + (d + O(\varepsilon))g|g|^2 + O(|g|^5), \tag{2}$$

где $g(t)$ — скалярная комплекснозначная функция и

$$\alpha_1 = \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)^{-1}\left(\frac{\pi}{2} + i\right), \quad d = -\frac{1}{10}[3\pi - 2 + i(\pi + 6)]\left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)^{-1}. \tag{3}$$

Сформулируем бифуркационную теорему.

Теорема 1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ уравнение (1) имеет орбитально асимптотически устойчивый цикл $u_0(t,\varepsilon)$, для которого имеет место асимптотическое представление*

$$u_0(t,\varepsilon) = 1 + \sqrt{\varepsilon\frac{20}{\pi(3\pi - 2)}}\cos\Big((\pi/2 - 2\pi\varepsilon/(3\pi - 2))t\Big) + O(\varepsilon). \tag{4}$$

1.2. Построение разностных аппроксимаций

Переход от уравнения (1) к разностному уравнению можно выполнить несколькими различными способами. В первую очередь остановимся на самом простом и очевидном способе, когда разностная модель получается в результате замены производной по времени на разделенную разность. Фиксируем произвольное натуральное k и будем считать, что шаг по времени равен $1/k$. Тогда простейшими способами выбора разделенной разности являются разность «вперед» $\dfrac{u(t+1/k)-u(t)}{1/k}$, «центральная» разность $\dfrac{u(t+1/k)-u(t-1/k)}{2/k}$ и разность «назад» $\dfrac{u(t)-u(t-1/k)}{1/k}$.

Случаи «вперед» и «назад», а также разностная схема, получающаяся из (1) на основе учета вольтерровской структуры правой части этого уравнения, подробно рассмотрены в [9—11].

В данной работе, в свою очередь, рассматривается случай «центральной» разности, для которого имеем

$$\frac{u(t+1/k)-u(t-1/k)}{2/k} = r[1-u(t-1)]u(t). \tag{5}$$

Сразу отметим, что точность приближения производной с помощью данной формулы выше, чем в случаях разностей «вперед» и «назад». Полагая $t = n/k$, $n \in \mathbb{Z}$ и обозначая $u_n = u(n/k)$, приходим к разностному уравнению порядка $k+1$

$$u_{n+1} = u_{n-1} + \frac{2r}{k}(1-u_{n-k})u_n, \quad n \geqslant 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) будем называть дискретным вариантом логистического уравнения с запаздыванием. Этому уравнению, как и уравнению (1), может быть придан некоторый биологический смысл: величина $u_n > 0$ может интерпретироваться как численность очередного поколения моделируемой популяции, а величина k — как номер возрастной группы, начиная с которой особи популяции вовлекаются в процесс ее воспроизводства.

Одним из наиболее важных свойств уравнения Хатчинсона является появление у него при $r = \pi/2$ устойчивых периодических решений. Полученные разностные уравнения должны не только сохранять это свойство, но и при увеличении k все более и более приближаться к непрерывной модели. В связи с этим рассмотрим колебательную потерю устойчивости единичного состояния равновесия модели (6) и изучим режимы, ответвляющиеся от устойчивого состояния равновесия при критических значениях параметров.

Наша цель состоит в том, чтобы показать, что в отличие от рассмотренных ранее разностных схем, у разностного уравнения, построенного на основе центральной разности, при колебательной потере устойчивости ненулевого состояния равновесия не бифурцирует устойчивая инвариантная кривая. Эта кривая соответствует в таких отображениях устойчивому предельному циклу исходного непрерывного уравнения (1). Ее отсутствие позволит показать, что разностная схема (6) не может быть использована для численного моделирования логистического уравнения с запаздыванием на больших промежутках времени.

2. Локальные свойства дискретной модели логистического уравнения

2.1. Устойчивость единичной неподвижной точки отображения. Свойства характеристического многочлена

Рассмотрим задачу устойчивости единичного состояния равновесия предложенной модели. Для этого в уравнении (6) сделаем сдвиг на состояние равновесия $u_n = 1 + v_n$ и линеаризуем полученные уравнения в нуле. В результате за устойчивость этого состояния будет отвечать следующее линейное разностное уравнение:

$$v_{n+1} = v_{n-1} - \frac{2r}{k} v_{n-k}. \tag{7}$$

Выпишем для полученного линеаризованного уравнения соответствующий ему многочлен устойчивости. В данном случае характеристический многочлен имеет вид

$$P(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda^{k+1} - \lambda^{k-1} + \frac{2r}{k}. \tag{8}$$

Характеристический многочлен (8) для задачи (6) имеет свойства, существенно отличающиеся при четном и нечетном значениях k. Выполнены следующие два простых утверждения.

Лемма 1. *Пусть k — четное, тогда при всех значениях $r > 0$ многочлен (8) имеет как минимум один вещественный отрицательный корень по модулю больший единицы.*

Доказательство этого факта следует из нечетности степени многочлена (8) и следующих его свойств:

$$\lambda^{k+1} - \lambda^{k-1} + \frac{2r}{k}\bigg|_{\lambda=-1} = \frac{2r}{k} > 0,$$

в то же время

$$\lambda^{k+1} - \lambda^{k-1} + \frac{2r}{k} \longrightarrow -\infty, \quad \text{при } \lambda \longrightarrow -\infty.$$

Лемма 2. *Пусть $k = 2m + 1$ ($m = 1, 2, \dots$), тогда*

1. *При выполнении неравенства*

$$0 < r < r_*, \quad \text{где} \quad r_* \stackrel{\text{def}}{=} (2m+1)\sin\left(\frac{\pi}{2(2m+1)}\right), \tag{9}$$

все корни многочлена (8) лежат в круге $S = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ комплексной плоскости, а при $r = r_*$ уравнение $P(\lambda) = 0$ имеет две простые пары корней

$$\lambda_{1,2} = \exp(\pm i\omega_1), \quad \text{где} \quad \omega_1 = \frac{\pi}{2(2m+1)}, \quad \text{и} \quad \lambda_{3,4} = \exp(\pm i\omega_2), \quad \text{где} \quad \omega_2 = \pi - \omega_1, \tag{10}$$

а все остальные его корни по-прежнему находятся в S.

2. *Корни (10) удовлетворяют требованиям отсутствия главных резонансов.*

3. *Выполняется неравенство*

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left|\lambda(\varepsilon)\right|\bigg|_{\varepsilon=0} > 0, \tag{11}$$

где $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ — корень многочлена (8), существующий при $r = r_* + \varepsilon$, $0 \leqslant \varepsilon \ll 1$ и обращающийся в $\exp(i\omega_j)$ $j = 1, 2$ при $\varepsilon = 0$.

4. *При условии выполнения неравенства*

$$0 < r < r_{**}, \quad \textit{где} \quad r_{**} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2m+1}{2(m+1)}\left(\frac{m}{m+1}\right)^m, \tag{12}$$

многочлен $P(\lambda)$ *имеет вещественные корни.*

Доказательство. Многочлен (8) при $r = 0$ имеет корень $\lambda = 0$ кратности $k - 1$ и два простых корня $\lambda = 1$ и $\lambda = -1$. Обозначим через $\lambda_+(r)$ и $\lambda_-(r)$ корни этого многочлена, обращающиеся при $r = 0$ в единицу и минус единицу соответственно. Будем считать, что $0 < r \ll 1$. Нетрудно видеть, что $\lambda'_+(0) = -1/k < 0$ и $\lambda'_-(0) = 1/k > 0$. А это значит, что при малых r все корни уравнения $P(\lambda) = 0$ заведомо лежат в S.

Простой анализ функции (8) показывает, что при $k = 2m + 1$ она четная и имеет при $0 < r < r_{**}$ четыре вещественных корня. Если же $r > r_{**}$, то вещественных корней нет. Для определения критического значения $r = r_{**}$ необходимо, чтобы наряду с равенством $P(\lambda) = 0$, выполнялось равенство $P'(\lambda) = 0$. Данные два равенства позволяют найти $r_{**} = \dfrac{2m+1}{2(m+1)}\left(\dfrac{m}{m+1}\right)^m$ и соответствующую ему пару корней кратности два $\lambda = \pm\sqrt{\dfrac{m}{m+1}}$.

Для того чтобы определить характер поведения комплексных корней многочлена (8) при увеличении параметра r, подставим в уравнение $P(\lambda) = 0$ соотношение $\lambda = \exp(i\omega)$, $\omega > 0$, умножим результат на $\exp[-i(2m + 1)\omega]$ и в получившемся выражении разделим вещественную и мнимую части. В результате приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} &\cos(2m+1)\omega = 0,\\ &\sin(\omega) - \frac{r}{2m+1}\sin(2m+1)\omega = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Нетрудно заметить, что допустимые частоты ω, определяющиеся из (13), задаются формулами

$$\omega_n = \frac{\pi}{2(2m+1)} + \frac{2n\pi}{2m+1}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{14}$$

Полученные равенства позволяют определить наименьшее значение $r_* > 0$ параметра r, при котором две пары комплексных корней

$$\lambda_{1,2} = \exp(\pm i\omega_1), \quad \text{где} \quad \omega_1 = \frac{\pi}{2(2m+1)}, \quad \text{и} \quad \lambda_{3,4} = \exp(\pm i\omega_2), \quad \text{где} \quad \omega_2 = \pi - \omega_1, \tag{15}$$

многочлена (8) первый раз выходят на единичную окружность. Это значение имеет следующий вид:

$$r_* = (2m+1)\sin\left(\frac{\pi}{2(2m+1)}\right). \tag{16}$$

Свойство нерезонансности полученных корней, как и неравенство (11), очевидно, следует из этих же формул. Лемма доказана.

В рамках леммы 2 при стремлении m к бесконечности, в пределе получаются равенства

$$\lim_{m\to\infty} r_*(m) = \lim_{m\to\infty}(2m+1)\sin\left(\frac{\pi}{2(2m+1)}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{m\to\infty} r_{**}(m) = \lim_{m\to\infty}\frac{2m+1}{2(m+1)}\left(\frac{m}{m+1}\right)^m = e^{-1}, \tag{17}$$

показывающие близость свойств многочлена (8) и квазимногочлена уравнения Хатчинсона (1) (см. [4, 5]).

2.2. Построение нормальной формы задачи

Доказанная в лемме 2 нерезонансность корней многочлена (8) позволяет при

$$r = r_* + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \tag{18}$$

воспользоваться аналогом известной бифуркационной теоремы Андронова-Хопфа для отображений (см. [12], [13]). У данной бифуркации существуют и другие общепринятые названия: бифуркация рождения тора, бифуркация Неймарка-Сакера и даже бифуркация Андронова-Хопфа-Неймарка-Сакера. С бифуркацией Андронова-Хопфа для потоков эту бифуркацию роднит то, что в случае двумерных отображений она связана с рождением замкнутой инвариантной кривой из неподвижной точки (дискретный аналог предельного цикла). Следует отметить, что это соответствие довольно условное, поскольку в такой бифуркации очень важную роль играют резонансы. В случаях, когда эти резонансы слабые или величина частоты иррациональна, то аналогия достаточно полная: здесь, как и в случае потоков, из неподвижной точки рождается единственная замкнутая инвариантная кривая. В случае же так называемых главных резонансов, бифуркации совсем другие, см., например, [13—15]. Бифуркация Андронова-Хопфа для отображений была впервые исследована в работе Ю.И. Неймарка [16], который, однако, не рассмотрел случай сильных резонансов. Впоследствии этот пробел был устранен Р. Сакером [17, 18]. Способы исследования такой бифуркации хорошо известны и изложены в целом ряде монографий и учебных пособий.

Ниже будем использовать несколько иной способ нахождения асимптотики бифурцирующих из состояния равновесия решений на основе построения нормальной формы с непрерывным медленным временем (см. [9—11]).

Для того, чтобы выяснить характер потери устойчивости единичного состояния равновесия уравнения (6) при условии (18), рассмотрим $(k+1)$-мерное отображение

$$\begin{gathered} y = (y_0, y_1, \dots, y_k) \longrightarrow (\overline{y}_0, \overline{y}_1, \dots, \overline{y}_k), \\ \overline{y}_s = y_{s+1}, \quad s = 0, \dots, k-1, \quad \overline{y}_k = y_{k-1} + \frac{2(r_* + \varepsilon)}{k}(1 - y_0)y_k. \end{gathered} \tag{19}$$

Из линейного анализа и, в частности, из леммы 2 следует, что в некоторой достаточно малой окрестности состояния равновесия $y_0 = \ldots = y_k = 1$ это отображение имеет экспоненциально устойчивое четырехмерное инвариантное многообразие. После перемещения этого состояния равновесия в начало координат и последующего перехода к подходящим криволинейным полярным координатам отображение (19) записывается в виде

$$\begin{aligned} \overline{\xi_1} &= (1 + \varepsilon\alpha_1)\xi_1 + (a_{11}\xi_1^2 + a_{12}\xi_2^2)\xi_1 + O\big(\varepsilon^2|\xi| + \varepsilon|\xi|^2 + |\xi|^4\big), \\ \overline{\xi_2} &= (1 + \varepsilon\alpha_2)\xi_2 + (a_{21}\xi_1^2 + a_{22}\xi_2^2)\xi_2 + O\big(\varepsilon^2|\xi| + \varepsilon|\xi|^2 + |\xi|^4\big), \\ \overline{\varphi_1} &= \varphi_1 + \omega_1 + \varepsilon\beta_1 + b_{11}\xi_1^2 + b_{12}\xi_2^2 + O\big(\varepsilon^2 + \varepsilon|\xi| + |\xi|^3\big), \\ \overline{\varphi_2} &= \varphi_2 + \omega_2 + \varepsilon\beta_2 + b_{21}\xi_1^2 + b_{22}\xi_2^2 + O\big(\varepsilon^2 + \varepsilon|\xi| + |\xi|^3\big), \end{aligned} \tag{20}$$

где α_j, β_j, a_{jk}, b_{jk}, $j = 1, 2$, $k = 1, 2$ — некоторые вещественные постоянные, $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$.

После замены $\xi_j = \sqrt{\varepsilon}\rho_j$, $j = 1, 2$ отображение (20) приобретает вид

$$\begin{aligned} \overline{\rho_1} &= \rho_1 + \varepsilon\big(\alpha_1 + a_{11}\rho_1^2 + a_{12}\rho_2^2\big)\rho_1 + O\big(\varepsilon^{3/2}\big), \\ \overline{\rho_2} &= \rho_2 + \varepsilon\big(\alpha_2 + a_{21}\rho_1^2 + a_{22}\rho_2^2\big)\rho_2 + O\big(\varepsilon^{3/2}\big), \\ \overline{\varphi_1} &= \varphi_1 + \omega_1 + \varepsilon\big(\beta_1 + b_{11}\rho_1^2 + b_{12}\rho_2^2\big) + O\big(\varepsilon^{3/2}\big), \\ \overline{\varphi_2} &= \varphi_2 + \omega_2 + \varepsilon\big(\beta_2 + b_{21}\rho_1^2 + b_{22}\rho_2^2\big) + O\big(\varepsilon^{3/2}\big). \end{aligned} \tag{21}$$

Наряду с отображением (21), рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
\frac{d\rho_1}{dt} &= \varepsilon\big(\alpha_1 + a_{11}\rho_1^2 + a_{12}\rho_2^2\big)\rho_1,\\
\frac{d\rho_2}{dt} &= \varepsilon\big(\alpha_2 + a_{21}\rho_1^2 + a_{22}\rho_2^2\big)\rho_2,\\
\frac{d\varphi_1}{dt} &= \omega_1 + \varepsilon\big(\beta_1 + b_{11}\rho_1^2 + b_{12}\rho_2^2\big),\\
\frac{d\varphi_2}{dt} &= \omega_2 + \varepsilon\big(\beta_2 + b_{21}\rho_1^2 + b_{22}\rho_2^2\big),
\end{aligned}
\tag{22}
$$

тогда отображение сдвига по ее траекториям за время $t = 1$ с точностью до величин порядка $\varepsilon^{3/2}$ совпадает с (21), а сама система (22) после замен $\varphi_j = \psi_j + \omega_j t$, $w_j = \rho_j \exp(i\psi_j)$, $j = 1, 2$, $\tau = \varepsilon t$ принимает вид

$$
\begin{aligned}
\frac{dw_1}{d\tau} &= \gamma_1 w_1 + \big(d_{11}|w_1|^2 + d_{12}|w_2|^2\big)w_1,\\
\frac{dw_2}{d\tau} &= \gamma_2 w_2 + \big(d_{21}|w_1|^2 + d_{22}|w_2|^2\big)w_2,
\end{aligned}
\tag{23}
$$

где $\gamma_j = \alpha_j + i\beta_j$, $d_{jk} = a_{jk} + ib_{jk}$, $j = 1, 2$, $k = 1, 2$.

Для вычисления коэффициентов γ_j, d_{jk} рассмотрим вытекающее из (6) разностное уравнение с непрерывным временем (см. аналогичные вычисления в [9—11])

$$
u(t+1) = u(t-1) + \frac{2(r_* + \varepsilon)}{k}\big[1 - u(t-k)\big]u(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{24}
$$

формальное решение которого будем искать в виде ряда

$$
u = 1 + \sqrt{\varepsilon}\, h_0(t,\tau) + \varepsilon\, h_1(t,\tau) + \varepsilon^{3/2} h_2(t,\tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t. \tag{25}
$$

Здесь

$$
h_0 = w_1(\tau)\exp(i\omega_1 t) + \overline{w_1}(\tau)\exp(-i\omega_1 t) + w_2(\tau)\exp(i\omega_2 t) + \overline{w_2}(\tau)\exp(-i\omega_2 t), \tag{26}
$$

$w_j(\tau)$, $j = 1, 2$ — медленно меняющиеся комплексные амплитуды, которые будут определены на третьем шаге алгоритма, а h_1, h_2 — некоторые тригонометрические полиномы аргументов $\omega_1 t$ и $\omega_2 t$ с зависящими от медленного времени τ коэффициентами.

После подстановки соотношений (18), (25) в (24) и приравнивания коэффициентов при $\sqrt{\varepsilon}$, ε и $\varepsilon^{3/2}$ приходим к серии линейных неоднородных разностных уравнений вида

$$
L(h_0) = 0, \quad L(h_k) = f_k(t,\tau), \quad k = 1, 2, \tag{27}
$$

где $L(h) \overset{\text{def}}{=} h(t+1,\tau) - h(t-1,\tau) + (2r_*/k)h(t-k,\tau)$, а переменная τ рассматривается как параметр. В силу (26) и очевидных соотношений

$$
L\big(\exp(\pm i\omega_j t)\big) = 0, \quad j = 1, 2, \tag{28}
$$

первое уравнение из (27) представляет собой верное равенство. Во втором из этих уравнений неоднородность f_1, имеющая вид

$$
f_1 = -\frac{2r_*}{k}\, h_0(t,\tau)h_0(t-k,\tau), \tag{29}
$$

является линейной комбинацией вторых гармоник $\exp(\pm 2i\omega_j t)$, $j = 1, 2$, $\exp(i(\pm\omega_1 \pm \omega_2)t)$.

Приравнивание коэффициентов при $\varepsilon^{3/2}$ дает

$$f_2 = -h_0'(t+1,\tau) + h_0'(t-1,\tau) + r_* h_0'(t-k,\tau) - \frac{2}{k}h_0(t-k,\tau) - \\ -\frac{2r_*}{k}\big(h_0(t,\tau)h_1(t-k,\tau) + h_1(t,\tau)h_0(t-k,\tau)\big).$$

Неоднородность f_2 может быть преобразована к виду

$$f_2 = f_{2,1}(\tau)\exp(i\omega_1 t) + f_{2,2}(\tau)\exp(i\omega_2 t) + \text{к.с.} + F_*(t,\tau), \tag{30}$$

где под к.с. подразумевается комплексно сопряженное выражение, а в выражении $F_*(t,\tau)$ собраны третьи гармоники по ω_1, ω_2, которые не являются резонансными. Необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения для h_2 в классе тригонометрических полиномов является отсутствие в (30) первых гармоник, т. е. равенства

$$f_{2,1}(\tau) \equiv 0, \quad f_{2,2}(\tau) \equiv 0. \tag{31}$$

Для выполнения данных равенств будем использовать еще не определенные комплексные амплитуды $w_1(\tau)$, $w_2(\tau)$ (см. (26)). Выполняя соответствующие вычисления, убеждаемся, что из (31) для $w_1(\tau)$, $w_2(\tau)$ получается система дифференциальных уравнений (23), в которой

$$\gamma_j = -\frac{\exp(i\omega_j k)}{P'(i\omega_j)}, \quad j = 1, 2, \tag{32}$$

$$d_{11} = \frac{4(1+i)\sin^2\omega_1}{P(2i\omega_1)P'(i\omega_1)}, \quad d_{12} = \frac{8(1+i)\sin^2\omega_1}{P(i(\omega_1+\omega_2))P'(i\omega_1)},$$
$$d_{21} = \frac{8(1+i)\sin^2\omega_1}{P(i(\omega_1+\omega_2))P'(i\omega_2)}, \quad d_{22} = \frac{4(1+i)\sin^2\omega_1}{P(2i\omega_2)P'(i\omega_2)},$$

где $\omega_1 = \dfrac{\pi}{2(2m+1)}$, $\omega_2 = \pi - \omega_1$, $P(\lambda)$ определяется формулой (8), а $P'(\lambda)$ обозначено выражение

$$P'(\lambda) = (k+1)\lambda^k - (k-1)\lambda^{k-2}.$$

Сделаем одно замечание. Выше вместо разностного уравнения (6) использовалось соответствующее уравнение с непрерывным временем (24) и был приведен формализм построения асимптотического разложения для решения специального вида. С точки зрения теории нормальных форм ситуация является достаточно сложной. Дело в том, что характеристический многочлен $P(\lambda)$ для линеаризованного (на положительном состоянии равновесия) уравнения с непрерывным временем имеет при $r = r_*$ не две пары корней на единичной окружности $\lambda_\pm = \exp(\pm i\omega_0)$, а две счетные серии пар корней

$$\lambda_{nj\pm} = \exp(i2\pi n \pm i\omega_j) \quad n = 1, 2, \ldots, j = 1, 2.$$

Поэтому критический случай в задаче об устойчивости состояния равновесия имеет бесконечную размерность. Подобный критический случай был исследован в [19]. На основе анализа из [19, 20] получаем, конечно, тот же результат для нахождения коэффициентов γ_j и d_{jk}.

Полярная замена $w_j = z_j \exp(i\psi_j)$, $j = 1, 2$ в системе (23) позволяет разделить амплитудные и фазовые переменные и рассмотреть систему амплитудных переменных отдельно

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \gamma_{10} z_1 + \left(a_{11} z_1^2 + a_{12} z_2^2\right) z_1, \\ \frac{dz_2}{dt} &= \gamma_{20} z_2 + \left(a_{21} z_1^2 + a_{22} z_2^2\right) z_2, \end{aligned} \tag{33}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{10} &= \gamma_{20} = \operatorname{Re} \gamma_1 = \frac{(2m+1)\cdot \sin\omega_1}{2(\cos^2\omega_1 + (2m+1)^2 \sin^2\omega_1)}, \\ a_{11} &= \operatorname{Re} d_{11} = \frac{(-\cos\omega_1 - (2m+1)\sin(2\omega_1) - (2m+1)\sin\omega_1 + 2\cos^2\omega_1)\cdot \sin\omega_1}{(1+4\cos^2\omega_1)\cdot(\cos^2\omega_1 + (2m+1)^2\sin^2\omega_1)}, \\ a_{12} &= \operatorname{Re} d_{12} = \frac{-2(\cos\omega_1 + (2m+1)\sin\omega_1)\cdot\sin\omega_1}{\cos^2\omega_1 + (2m+1)^2\sin^2\omega_1}, \\ a_{21} &= \operatorname{Re} d_{21} = \frac{-2(-\cos\omega_1 + (2m+1)\sin\omega_1)\cdot\sin\omega_1}{\cos^2\omega_1 + (2m+1)^2\sin^2\omega_1}, \\ a_{22} &= \operatorname{Re} d_{22} = \frac{(\cos\omega_1 - (2m+1)\sin(2\omega_1) + (2m+1)\sin\omega_1 + 2\cos^2\omega_1)\cdot \sin\omega_1}{(1+4\cos^2\omega_1)\cdot(\cos^2\omega_1 + (2m+1)^2\sin^2\omega_1)}. \end{aligned}$$

Непосредственный анализ полученных коэффициентов позволяет обосновать следующее утверждение.

Лемма 3. *Выполнены неравенства*

$$\gamma_{10} = \gamma_{20} > 0, \quad a_{11} < 0, \quad a_{22} > 0. \tag{34}$$

Неравенства (34) гарантируют недиссипативность системы (33), а в след за ней и системы (23). Это означает, что при $r = r_* + \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$ в окрестности порядка $\sqrt{\varepsilon}$ единичного состояния равновесия разностного уравнения (6) отсутствуют устойчивые решения (см. [12, 13]).

3. Некоторые выводы

Подведем некоторые итоги. Специфика построенных разностных уравнений состоит в том, что они обладают другой динамикой по сравнению с уравнением Хатчинсона. В частности, характеристический многочлен уравнения (6), линеаризованного на единичном решении, имеет при четном k и произвольном положительном r отрицательный корень, по модулю больший единицы. Это влечет неустойчивость единичного решения при любом $r > 0$ и, более того, к тому, что компоненты u_n решения уравнения (6) с положительными начальными условиями становятся отрицательными. Это обстоятельство не позволяет при четном k привлекать модель (6) к анализу динамики уравнения с запаздыванием (1).

При нечетном k в уравнении (6) существует критическое значение параметра $r = r_*$ такое, что при $0 < r < r_*$ единичное состояние равновесия модели устойчиво, однако его способ потери устойчивости существенно отличается от полученного ранее у других моделей. Это связано с наличием у характеристического многочлена (8) при критических значениях r не одной, а двух пар корней на единичной окружности комплексной плоскости. При построении нормальной формы уравнения (6) выяснилось, что для выбранной аппроксимации это уравнение перестаёт адекватно моделировать динамику уравнения Хатчинсона. В частности, при значениях параметра r, соответствующих потере устойчивости единичного состояния равновесия, от него не ответвляется устойчивая инвариантная кривая, которой у уравнения Хатчинсона соответствует устойчивый цикл (устойчивые периодические колебаний). Это показывает, что при выборе разностной схемы, моделирующей динамику уравнения Хатчинсона, не всегда удается получить разностное уравнение с нужными свойствами.

Численный эксперимент для различных k показал, что при $r > r_*$ в этой модели не появляется устойчивой инвариантной кривой и решение уходит из области положительных значений.

References

[1] E. M. Wright, “A non-linear difference-differential equation”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 194, pp. 66–87, 1955.

[2] S. Kakutani and L. Markus, “On the non-linear difference-differential equation $y'(t) = (a - by(t - \tau))y(t)$”, *Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations*, vol. 4, pp. 1–18, 1958.

[3] G. S. Jones, “The existence of periodic solutions of $f'(x) = -\alpha f(x-1)\{1+f(x)\}$”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 5, pp. 435–450, 1962.

[4] S. Kashchenko, “Asymptotics of the Solutions of the Generalized Hutchinson Equation”, *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 47, no. 7, pp. 470–494, 2013.

[5] S. A. Kashchenko, “Periodic Solutions of Nonlinear Equations Generalizing Logistic Equations with Delay”, *Math. Notes*, vol. 102, pp. 181–192, 2017.

[6] S. Kashchenko and D. Loginov, “About Global Stable of Solutions of Logistic Equation with Delay”, *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 937, no. 1, p. 012 019, 2017.

[7] J. K. Hale, *Theory of functional differential equations.* New York: l Springer Verlag, 1977.

[8] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations.* New York: Wiley, 1964.

[9] S. D. Glyzin and S. A. Kashchenko, “Finite-Dimensional Mappings Describing the Dynamics of a Logistic Equation with Delay”, *Doklady Mathematics*, vol. 100, no. 1, pp. 380–384, 2019.

[10] S. Glyzin and S. Kashchenko, “A family of finite-dimensional maps induced by a logistic equation with a delay”, *Mathematical modeling*, vol. 32, no. 3, pp. 19–46, 2020.

[11] S. D. Glyzin, A. Y. Kolesov, and N. K. Rozov, “Finite-dimensional models of diffusion chaos”, *Comput. Math. and Math. Phys.*, vol. 50, pp. 816–830, 2010.

[12] J. E. Marsden and M. McCracken, *The Hopf bifurcation and its applications. Appl. Math. Sci., 19.* Springer-Verlag, 1976.

[13] È. È. Shnoĭ, “On the stability of fixed points of two-dimensional mappings”, *Differ. Equ.*, vol. 30, no. 7, pp. 1156–1167, 1994.

[14] V. I. Arnold, *Ordinary Differential Equations.* Springer-Verlag, 1992.

[15] Y. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory.* Springer-Verlag, 1995.

[16] Y. I. Neimark, “On some cases of periodic motions depending on parameters (In Russian.)”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 129, pp. 736–739, 1959.

[17] R. J. Sacker, “On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations”, in *Report IMM-NYU 333*, New York University, 1964.

[18] R. J. Sacker, “A new approach to perturbation theory of invariant surfaces”, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 18, pp. 717–732, 1965.

[19] I. S. Kashchenko and S. A. Kashchenko, “Normal and quasinormal forms for systems of difference and differential-difference equations”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 38, pp. 243–256, 2016.

[20] I. S. Kashchenko and S. A. Kashchenko, “Analysis of Local Dynamics of Difference and Close to Them Differential-Difference Equations”, *Russ Math.*, vol. 62, pp. 24–34, 2018.