DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656038

Raciocínio covariacional em Cálculo: desenvolvimento a partir de tarefas

Covariate Reasoning in Calculus: development from the use of tasks

William José Gonçalves[1]

André Luis Trevisan[2]

Daniel Daré Luziano da Silva[3]

Alessandro Jacques Ribeiro[4]

Resumo

Visto que analisar de forma coordenada as variações de duas grandezas interdependentes (raciocínio covariacional – RC) é um aspecto central da aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, discutimos habilidades do RC mobilizadas durante discussões matemáticas desencadeadas pelo trabalho com tarefas. Realizamos uma investigação qualitativa, de cunho interpretativo, a partir de recortes da produção escrita e trechos de diálogos de um grupo de estudantes de Engenharia que cursaram essa disciplina, no trabalho com uma tarefa envolvendo uma garrafa que enche. A tarefa possibilitou a exploração de habilidades como: constituir quantidades e raciocinar sobre seu processo de medição; imaginar quantidades variando continuamente; coordenar pares de quantidades que variam juntas (tempo, altura, volume e raio). Além disso, os estudantes foram capazes de estabelecer uma relação entre a altura e o volume, construindo uma representação na qual a inversão na concavidade do gráfico mostrou compreensão da existência de uma mudança na taxa de variação nessa situação.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Ensino de Cálculo Diferencial e Integral; Tarefas Matemáticas; Raciocínio Covariacional.

Abstract

The design of coordinated analysis as variables of two interdependencies (covariational reasoning - CR) is a central aspect of Calculus learning, the most discussed skills are mobilized amid the mathematical routines triggered by work with tasks. Realization of a qualitative research, interpretive, from records of written production and excerpts from dialogues of a group of students without work with a task in conjunction with a bottle that fills. The task made possible the exploration of the skills including: quantity and reasoning about its measurement process; imagine minute varying continuously; coordinate pressure pairs that can vary together (time, height, volume and radius). In addition, students were able to establish a relationship between height and

Submetido em: 24/07/2019 – **Aceito em**: 24/08/2020 – **Publicado em**: 02/10/2020

[1] Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Professor da Educação Básica - Paraná, Brasil. E-mail: williamboatematica@gmail.com.

[2] Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina. Professor do Departamento de Matemática da UTFPR, Brasil. E-mail: andrelt@utfpr.edu.br.

[3] Discente em Engenharia, bolsista de iniciação científica do CNPq na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Brasil. E-mail: dlsilvadaniel@hotmail.com

[4] Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Professor Associado no Centro de Matemática, Computação e Cognição da Universidade Federal do ABC, Brasil. E-mail: alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br.

DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656038

volume, building a representation in which the inversion in the concavity of the graph showed an understanding of the existence of a change in the rate of change in this situation.

Keywords: Mathematics Teaching; Teaching Differential and Integral Calculus; Mathematical Tasks; Covariational Reasoning.

Introdução

Durante praticamente os três anos do Ensino Médio e ao ingressar no Ensino Superior, no curso de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), os estudantes lidam com um conceito "formal" de funções que, raramente, "carrega" sua essência: o aspecto covariacional das grandezas envolvidas. Segundo Barufi (2002, p. 69), "para a maioria dos alunos, a Matemática da Escola no Ensino Médio pouco ou nada tem a ver com o que lhes é apresentado no Cálculo, e o caráter de análise com o qual passa a se defrontar parece se constituir em grande dificuldade".

Uma função relaciona-se a um conceito matemático que descreve como duas ou mais quantidades variam uma em relação à outra, podendo ser descrita por diferentes tipos de representações, incluindo palavras, símbolos matemáticos, gráficos ou tabelas. Como destaca Mestre (2014, p. 71), a "gênese do pensamento funcional acontece quando o aluno se envolve numa atividade, escolhe prestar atenção às quantidades que variam e começa a focar-se na relação entre essas quantidades".

Nessa direção, o chamado raciocínio covariacional (RC) pode ser caracterizado em termos de coordenação das imagens de duas variáveis à medida que elas mudam (Confrey & Smith, 1994, 1995), ou em razão dos valores das quantidades individuais como variáveis, portanto conceituando duas ou mais quantidades como variando simultaneamente (Thompson & Carlson, 2017). Segundo estes últimos pesquisadores, o raciocínio quantitativo e covariacional dos estudantes é fundamental para a aprendizagem de muitos tópicos matemáticos, como função e taxa de variação. Eles argumentam também que ideias de variação e covariação são epistemologicamente necessárias como bases conceituais para a elaboração de conceitos do CDI. Apesar de haver uma quantidade crescente de pesquisas sobre o raciocínio quantitativo e covariacional de estudantes em nível secundário (Ensino Médio), pesquisas a respeito do raciocínio quantitativo de estudantes em nível de graduação é escasso (Speer & Kung, 2016; Mkhatshwa, 2020).

Segundo Thompson (2011), para que estudantes se envolvam no RC, eles devem (1) construir duas quantidades, (2) imaginar que as medidas dessas quantidades variam suavemente e (3) unir as medidas de duas quantidades construindo um objeto multiplicativo que represente, simultaneamente, as duas medidas. Por seu lado, Frank (2017) destaca que o trabalho com tarefas investigativas possibilita aos estudantes desenvolver essas habilidades do RC, com foco na concepção de gráficos como representações emergentes de fenômenos em constante mudança.

Nessa acepção, considerando a importância da temática, elencamos como problema de pesquisa a investigação das possibilidades do desenvolvimento de habilidades do RC

DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656038

promovidas pelo trabalho com tarefas matemáticas, em estudantes de Engenharia que cursam CDI1[5]. O objetivo deste artigo é apresentar e discutir habilidades do RC que foram mobilizadas durante as discussões desencadeadas pelo trabalho com tarefas matemáticas. Para isso, está organizado em introdução; apresentação da fundamentação teórica relacionada às temáticas RC e tarefas matemáticas; procedimentos metodológicos da pesquisa e descrição e análise dos dados, organizadas a partir de algumas das tarefas que compuseram o ambiente de ensino e de aprendizagem de CDI1.

O raciocínio covariacional

Sintetizamos aqui, com base nos textos de Thompson, Carlson e colaboradores, publicados a partir da década de 1990, ideias que circunscrevem o conceito de raciocínio covariacional RC. Reconhecemos que, nas obras de Thompson, na década em tela, existe uma ideia prefacial de RC apresentada com as temáticas "quantidade" e "raciocínio quantitativo", no intuito de caracterizar o conceito de taxa, aspecto central quando se pensa em uma função sob o viés covariacional. Thompson (1990, 1992, 1994) apresenta um modelo teórico organizado sobre estágios para a caracterização do raciocínio quantitativo, sustentado na ideia de abstração reflexiva de Piaget, em pesquisas a respeito de campos conceituais aditivo e multiplicativo.

Nesse modelo, uma quantidade é definida como uma qualidade de algo passível de mensuração. Quantificação é o processo pelo qual se atribuem valores numéricos às qualidades de um objeto. Uma operação quantitativa é uma ação mental por meio da qual se reconhece uma quantidade como aquela cujo valor varia (ou pode variar) e se concebe uma nova quantidade em relação a uma ou mais quantidades já conhecidas. Uma operação quantitativa não é, necessariamente, numérica, pois tem a ver com a compreensão de uma situação (reconhecer que uma quantidade cresce/decresce, ou que o "modo" como cresce/decresce pode mudar, ou ainda que duas quantidades cresçam, ou não, na mesma direção). Uma operação numérica, por sua vez, pode ser usada para quantificar/mensurar essas mudanças.

Thompson (1994) destaca que o desenvolvimento do conceito de taxa de variação passa, inicialmente, pelo reconhecimento de mudança em alguma quantidade, progride para uma imagem vagamente coordenada entre duas quantidades e se consolida em uma imagem da covariação de duas quantidades cujas medidas permanecem em proporção constante. Uma definição de covariação encontrada de maneira mais sistematizada em Saldanha e Thompson (1998, p. 299, tradução nossa) é a seguinte: "nossa noção de covariação é de alguém que tenha em mente uma imagem sustentada [*sustained*, no original] dos valores de duas quantidades [que variam] simultaneamente".

Nesse viés,

[5] Disciplina do 1º semestre dos cursos de Engenharia da UTFPR, instituição na qual foi desenvolvida a pesquisa, contemplando o estudo de funções reais de uma variável real, limites, derivadas e integrais, com carga horária de 90 horas.

DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656038

> No desenvolvimento inicial, coordenam-se [mentalmente] valores de duas quantidades – pense em um, depois o outro, depois o primeiro, depois o segundo, e assim por diante. Imagens posteriores de covariação implicam a compreensão do tempo como uma quantidade contínua, de modo que, na sua imagem, os dois valores de quantidades persistem (Saldanha & Thompson, 1998, p.289).

Carlson, Jacobs, Coe, Larsen e Hsu (2002) propõem um quadro teórico para descrever habilidades do RC, incluindo cinco categorias de ações mentais observadas em estudantes, ao aplicá-lo no contexto de representação e interpretação de um modelo gráfico para um evento dinâmico. Mais recentemente, Thompson e Carlson (2017) revisaram as estruturas covariacionais anteriores de duas maneiras: (i) analisando o raciocínio variacional dos alunos separadamente do seu raciocínio covariacional; (ii) analisando como os alunos coordenam suas imagens de valores de quantidades variando.

Frank (2017) elaborou tarefas que buscavam desenvolver habilidades do RC, conceituando gráficos como representações emergentes de fenômenos em constante mudança. Para tal, o estudante deve, inicialmente, conceituar duas quantidades envolvidas em certa situação (reconhecendo um atributo que ele entenda ter uma magnitude mensurável). Em seguida, ele deve imaginar as medidas dessas duas quantidades variando continuamente, concentrando-se na magnitude variável, em vez de nos valores numéricos que a medida da quantidade pode assumir. Após, deve coordenar como as duas quantidades variam juntas, imaginando a relação entre suas medidas em um dado momento em seu tempo experimental, construindo um objeto multiplicativo que une a medida dessas duas grandezas. Finalmente, o estudante deve coordenar sua concepção da variação suave da medida de cada quantidade a fim de se envolver na covariação contínua suave. Tais processos são essenciais no trabalho com tarefas que envolvam mudanças que ocorrem em duas variáveis interdependentes, como os que consideramos em nossa pesquisa, e que serão apresentados a seguir.

O trabalho com tarefas matemáticas e o papel das discussões matemáticas na aprendizagem de CDI

Propostas pedagógicas para o ensino de CDI que estejam alinhadas às mais recentes recomendações para a formação de engenheiros (NAE, 2005; Brockman, 2013)

> pedem por tarefas que favoreçam ao estudante o desenvolvimento de competências de conexão e reflexão, para além da mera reprodução e memorização. Tais tarefas devem ter como pressuposto o fato de que o conhecimento matemático se mostra dinâmico e construído a partir das relações, justificativas, análise e validações estabelecidas pelos envolvidos e não como algo pronto e acabado (Trevisan & Mendes, 2013, p. 137).

No sentido proposto por Ponte (2014, p.14), tarefas são “elementos organizadores de quem aprende, sendo em sua maioria propostas por professores e, uma vez propostas, devem ser interpretadas pelos alunos podendo originar atividades diversas”. O autor diz, ainda, que elas são “ferramentas de mediação fundamentais no ensino e na aprendizagem da Matemática”, podendo ou não ter “potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos que podem ajudar a mobilizar” (Ponte, 2014, p. 16).

DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656038

Gafanhoto e Canavarro (2014) apontam que, na maioria das vezes, a escolha das tarefas a serem propostas aos estudantes é diretamente influenciada pelos manuais escolares, livros didáticos e outros mediadores curriculares acessíveis, em especial a Internet. As autoras lembram, no entanto, que “nem sempre estes recursos se adequam da melhor maneira aos alunos de uma dada turma e ao propósito de ensino dos professores” e, reforçam ainda, que a “seleção, adaptação ou criação de boas tarefas para a sala de aula constitui um desafio para muitos professores” (Gafanhoto & Canavarro, 2014, p. 115).

Tarefas matemáticas podem ser classificadas sob diferentes perspectivas: sua natureza, suas características, estratégias para sua resolução, sua demanda cognitiva, os tipos de raciocínio requeridos para sua resolução. Respaldados nos trabalhos de Stein e Smith (2009), apontamos que tarefas que contemplem níveis de demanda cognitiva mais elevada (que demandam o uso de procedimento em conexão com significado e fazer matemática) são desejáveis na proposição de tarefas aos estudantes.

Visto que “não é tanto a partir das actividades práticas que os alunos aprendem, mas a partir da reflexão que realizam sobre o que fizeram durante essas actividades práticas” (Ponte, 2005, p. 15), é importante destacar o papel das discussões matemáticas no trabalho com tarefas matemáticas, seja nos pequenos grupos ou em momentos de plenária. As discussões são

> momentos de trabalho na sala de aula com grandes potencialidades para a aprendizagem dos alunos, ao favorecerem o seu envolvimento na apresentação, justificação, argumentação e negociação de significados para os seus raciocínios quando trabalham com tarefas matematicamente significativas (Rodrigues, Menezes & Ponte, 2018, p. 399).

Ponte (2017) argumenta que, em oposição a um modelo de aula que pressupõe a exposição de conceitos e uma prática que conduz à memorização acrítica e mecanização, tanto a investigação em Educação Matemática quanto a prática profissional dos professores apontam os momentos de discussões matemáticas como essenciais para a compreensão dos estudantes. Partindo de um “estado da arte” a respeito do tema, o autor destaca que a valorização dos momentos de discussão no ensino da Matemática já é uma ideia fortemente instituída, pelo menos a partir da década de 1980.

No intuito de “operacionalizar” um modelo de aula “de realização viável em nosso modelo educativo”, o qual valorize as discussões matemáticas, temos defendido a organização de ambientes de aprendizagem pautados em episódios de resolução de tarefas (Couto, Fonseca, & Trevisan, 2017; Couto & Trevisan, 2017; Trevisan & Mendes, 2017; Trevisan & Mendes, 2018). A expressão “ambiente de aprendizagem” refere-se ao contexto em que, ao indivíduo, são oferecidas oportunidades para aprender. Os episódios (momentos) são organizados com base na proposição de tarefas elaboradas e/ou adaptadas de materiais curriculares, que não sejam precedidas da apresentação de definições ou exemplos similares, e que seu desenvolver em grupos em sala de aula contribua para a exploração intuitiva de ideias matemáticas e posterior sistematização (Trevisan & Mendes, 2018).

DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656038

Conforme Trevisan e Mendes (2017), tal dinâmica de trabalho tem como objetivo convidar os estudantes a explorarem alguns conceitos intuitivamente, ou seja, não há uma explicação prévia de conceitos anteriores à tarefa que será proposta (a preocupação central nesse momento não é trazer a definição formal do conceito em tela). Nesse contexto, é possível aos estudantes, durante o trabalho autônomo ou em pequenos grupos, elaborar suas próprias conjecturas e, dessa forma, apresentar aos colegas da turma suas conclusões. Após essas discussões e de uma discussão coletiva com toda a turma, o professor pode intervir visando "refinar" os conceitos que são subjacentes ao conteúdo que se pretende explorar. No caso deste artigo, nosso foco são discussões que ocorrem em pequenos grupos, quando os estudantes estão em momento de trabalho autônomo (Ponte, 2014; Stein et al, 2008).

Procedimentos metodológicos

Caracterização e contextualização da pesquisa

Esta é uma investigação qualitativa de cunho interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994). Trata-se de recorte de um trabalho desenvolvido no âmbito de um projeto mais amplo, sob coordenação do segundo autor, cujo objetivo geral foi investigar os processos envolvidos na caracterização, na implementação e na avaliação de um ambiente de ensino e de aprendizagem para a disciplina de CDI, considerando as condições reais às quais estamos sujeitos.

Para tal, desdobram-se vários objetivos específicos, dentre os quais, organizar tarefas matemáticas que compõem esse ambiente. Assim, tem-se trabalhado com a criação de tarefas (e, intrinsecamente associado a isso, investigado formas de utilizá-las em sala de aula, bem como aprendizagens por ela propiciadas) que oportunizem aos estudantes reinventar o CDI, que permitam a criação de conceitos e teoremas fundamentais utilizados intuitivamente antes que sejam descritos com precisão ou provados (Trevisan & Mendes, 2017).

Contexto de investigação

Com o intuito de alcançar o objetivo proposto para este artigo, foram organizados cinco episódios de resolução de tarefas junto a uma turma de CDI1 do curso de Engenharia de uma Universidade Federal, sob responsabilidade do segundo autor (e orientador do trabalho mais amplo). Foram organizados, ao longo do semestre, cinco episódios de resolução de tarefas (conduzidos pelo primeiro autor, como parte do seu Estágio de Docência, junto a um Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), cada um deles consistindo em um encontro de três aulas de 50 minutos, à medida que os conceitos "formais" de limite, derivada e integral eram explorados e sistematizados. Aos 50 estudantes que cursavam a disciplina, organizados em grupos de três a cinco integrantes (conforme sua escolha), foram propostas sequências de tarefas sem que houvesse alguma explicação prévia de conteúdos. O curso foi planejado seguindo a estrutura curricular "não usual" proposta por Trevisan e Mendes (2017, p. 265).

Para a organização das tarefas, levamos em consideração um conjunto de habilidades

DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656038

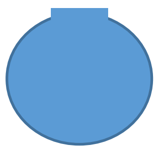
do RC que poderiam ser mobilizadas nas tarefas propostas: (i) Constituir quantidades envolvidas na situação (reconhecer atributos de uma situação passíveis de medição); (ii) Raciocinar sobre o processo de medição dessas quantidades; (iii) Imaginar medidas de quantidades variando continuamente; (iv) Coordenar duas quantidades que variam juntas: (a) reconhecendo que as quantidades se relacionam; (b) reconhecendo a direção de crescimento - ambas crescem/decrescem, por exemplo; (c) reconhecendo a existência de taxas de variação - cresce mais rápido/mais lento, ou cresce a uma taxa crescente ou decrescente; (d) identificando eventuais mudanças na taxa de crescimento.

Como esses estudantes já haviam tido contato com uma definição formal de função durante o Ensino Médio, nosso propósito, com a realização dessas tarefas, era que eles (re)significassem esse conceito. Em todas as tarefas, buscou-se mobilizar a articulação entre múltiplas representações (linguagem natural, tabela, gráfico), no intento de coordenar a variação das quantidades envolvidas, reconhecendo a existência de taxas de variação e eventuais mudanças nessas taxas. O modo como as tarefas foram organizadas tinha a intenção de que os estudantes lidassem com as situações sem a necessidade de tomar/adotar valores específicos para as grandezas envolvidas, ou seja, imaginassem medidas de quantidades variando continuamente (item iii).

O conjunto de tarefas elaborado e proposto encontra-se em Gonçalves (2018). No Quadro 1, apresentamos a tarefa selecionada para análise neste artigo por envolver uma maior diversidade de habilidades do RC, bem como por possibilitar a articulação entre diferentes representações (linguagem natural, tabela, gráfico e expressão algébrica). Ela possibilita: (i) Constituir quantidades (como volume ou altura da água na garrafa, tempo de enchimento da garrafa); (ii) Raciocinar sobre o processo de medição dessas quantidades (escolha de unidades de medida adequadas, por exemplo; (iii) Imaginar medidas dessas quantidades variando continuamente e (iv) Coordenar duas dessas quantidades, como, por exemplo: (a) relacionar tempo e altura; tempo e volume; altura e volume; (b) observar o comportamento crescente nas várias relações listadas; (c) reconhecer que tempo e volume se relacionam a uma taxa constante, enquanto tempo e altura e altura e volume relacionam-se a taxas variáveis e (d), no caso do tempo e altura (e altura e volume), reconhecer que há uma mudança na taxa de variação (representando um gráfico com mudança de concavidade – existência de ponto de inflexão).

Quadro 1 – Tarefa selecionada para análise.

Água é derramada em uma garrafa/vaso a uma taxa constante. Use esta informação e a forma do vaso (figura ao lado) para responder às perguntas a seguir.



a) O que você entende por taxa constante de derrame de água nesta situação?
b) Imagine a cena do vaso sendo enchido e escreva o que você acha que pode ser medido nesta situação.
c) Esboce um gráfico que relacione a altura da água na garrafa com o passar do tempo. Explique o raciocínio que levou ao seu esboço.
d) Construa gráficos que relacionem as diferentes grandezas envolvidas nessa situação.

Fonte: Gonçalves (2018, p. 25).

DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656038

Um dos procedimentos para a coleta de dados incluiu o uso da produção escrita e do áudio dos grupos enquanto trabalhavam com as tarefas. Outro procedimento consistiu na realização de observação participante (Gil, 2010) pelo primeiro e segundo autores, tanto nos momentos de trabalho em pequenos grupos, quanto na discussão coletiva, implicando no convívio com o grupo pesquisado, por algum tempo. No caso do primeiro autor, ele se enquadrava como um indivíduo "de fora", visto que sua presença não era rotineira nas aulas, e o segundo autor, como um "nativo", pois era o professor responsável pela disciplina. Como forma de registros dos dados, para serem posteriormente analisados, foram feitas anotações pelos pesquisadores em seus diários de campo individuais, à medida que acompanhavam o trabalho em grupos circulando pela aula, também em momento posterior à aula. Essas observações tinham o objetivo de identificar aspectos relacionados às habilidades do RC que se fizessem presentes durante as discussões.

Organização e modo de análise dos dados

Para fins de análise, organizamos recortes da produção escrita e de trechos de diálogo durante o trabalho de um dos grupos, os quais ilustravam o potencial das tarefas em termos de fomentar discussões que envolviam habilidades do RC. Tal escolha foi realizada com base nos registros feitos pelo pesquisador em seu diário de campo, ao acompanhar o trabalho dos grupos em sala de aula. Para a escolha dos episódios, tomou-se por critério aqueles que evidenciassem um maior envolvimento dos estudantes na "apresentação, justificação, argumentação e negociação de significados" (Rodrigues, Menezes e Ponte, 2018, p. 399), enquanto trabalhavam com as tarefas. Houve intervenção do pesquisador junto aos grupos, em alguns momentos das discussões, no intuito de compreender como estavam pensando e, quando era o caso, trazer novos elementos que possibilitassem aprofundar a discussão, ou colocar "em xeque" hipóteses incorretas.

Neste artigo, trazemos recortes de protocolos desse grupo de estudantes, cujos integrantes são indicados como A1, A2 e A3. A escolha do grupo se deu pelo envolvimento deles com a proposta, pelo teor das discussões e pela presença da diversidade de ideias entre os integrantes que perpassavam essas discussões.

Selecionados os grupos, procedeu-se à análise dos dados. Para tal, adaptamos as etapas presentes no modelo proposto por Powell, Francisco e Maher (2004) para a análise de dados no contexto de investigações sobre o trabalho matemático e o desenvolvimento do pensamento de estudantes engajados em investigações matemáticas (no caso de nosso trabalho, o modelo foi adaptado para a análise de áudios). Para nos familiarizarmos com o conteúdo dos áudios, ouvimos integralmente os áudios das equipes selecionadas (mantendo-se ao nosso lado os protocolos escritos e o diário de campo). A partir daí, selecionamos e tomamos nota de trechos específicos do diálogo para ouvi-los novamente, elaborando breves descrições do conteúdo de cada trecho e identificando momentos significativos, que chamamos de eventos críticos (Powell, Francisco e Maher, 2004).

DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656038

De posse das transcrições[6], focamos nossa atenção no conteúdo desses eventos críticos, identificando temas que nos ajudassem a interpretar os dados coletados (codificação). Como apontam Powell, Francisco e Maher (2004, p. 29-30), "da mesma forma que a identificação de eventos críticos, a codificação é dirigida pela perspectiva teórica dos pesquisadores e pelas questões de pesquisa". Assim, buscamos desvelar habilidades do RC que foram mobilizadas durante as discussões matemáticas em cada um desses eventos críticos, desencadeadas pelo trabalho com tarefas matemáticas, trazendo para análise a transcrição integral de 5 desses eventos críticos (foram omitidas falas, consideradas não relevantes, entre um evento e outro). Segundo os autores supracitados, o modelo proposto é compatível com a implementação de códigos definidos *a priori*, o que ocorre em nosso caso.

Com o objetivo de facilitar tal identificação e posteriores interpretações, destacamos, nas falas dos estudantes, trechos transcritos dentro de cada evento crítico que, em nossa compreensão, evidenciam as habilidades mobilizadas, sendo essas organizadas conforme o Quadro 2.

Quadro 2 – Habilidades mobilizadas/desveladas no trabalho com a tarefa.

Simbologias Utilizadas	Habilidades Mobilizadas/Desveladas
i	Constituir quantidades envolvidas na situação.
ii	Raciocinar sobre o processo de medição dessas quantidades.
iii	Imaginar medidas de quantidades variando continuamente.
iv (a)	Coordenar duas quantidades que variam juntas: reconhecer que as quantidades se relacionam
iv (b)	Coordenar duas quantidades que variam juntas: reconhecer direção de crescimento - ambas crescem/decrescem.
iv (c)	Coordenar duas quantidades que variam juntas: reconhecer a existência de taxas de variação - cresce mais rápido/mais lento, ou cresce a uma taxa crescente ou decrescente.
iv (d)	Coordenar duas quantidades que variam juntas: identificar eventuais mudanças na taxa de crescimento.

Fonte: autores.

Resultados e discussão

Os resultados aqui apresentados e discutidos organizam-se em cinco eventos críticos identificados a partir das discussões matemáticas ocorridas no grupo de estudantes que foi analisado.

Evento 1 – apresentando a situação da garrafa

[6] Nas transcrições, o símbolo [...] indica corte de fala considerada não relevante, e o símbolo [hipótese] representa uma hipótese a partir do contexto da fala.

DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656038

O pesquisador iniciou a tarefa fazendo a leitura dos itens para a sala inteira. Ao final da leitura, lançou uma pergunta: *Vocês acreditam que a altura dentro da garrafa vai ser constante?* A intenção do pesquisador era permitir que os estudantes iniciassem a situação tendo em mente a questão central da tarefa. Um dos integrantes do grupo iniciou respondendo à pergunta, como na transcrição a seguir.

[1.1] A1: Nããão	
[1.2] A2: Não?	
[1.3] A1: Não, porque o raio começa pequeno [...] depois aumenta e depois diminui.	i, iii, iv(b)

Nesse evento, os entendimentos iniciais entre os membros foram diferentes e A1 tentou justificar sua opinião com seu argumento. Podemos destacar que a justificativa traz consigo a identificação da grandeza (raio) e seu comportamento no decorrer da situação, bem como o fato de essa grandeza interferir na altura. Assim, a situação apresentada na tarefa possibilitou ao grupo conceituar individualmente os valores de cada uma dessas grandezas (raio e altura), etapa necessária a um posterior reconhecimento da variação simultânea (Thompson & Carlson, 2017).

Evento 2 – derrame para dentro ou para fora?

A discussão dos itens da tarefa iniciou-se com a leitura do item (a).

[2.1] A1: Taxa constante de derrame [...] O que você entende por taxa constante de derrame? Vou colocar assim: Volume que entra “dentro” do recipiente, a taxa de entrada do [...].	i
[2.2] A2: A quantidade de água que entra é a mesma que sai, de encher, não é?	
[2.3] A1: Não, não, “to” falando só de entrada da situação. Taxa constante quer dizer que vai entrar mesma quantidade de água por unidade de tempo.	i,iii, iv(a), iv(b), iv(c)
[2.4] A2: “Uhum” [...] é que eu entendi derrame de saída do vaso.	
[2.5] A1: É de derrame de derramar dentro do vaso. [...] Escrevi assim: taxa constante de derrame é que será derramado a mesma quantidade de água.	
[2.6] A2: Por unidade de tempo.	
[2.7] A1: Por unidade de tempo [enfatizando]	

A expressão “derrame” gerou dúvidas entre os membros do grupo, pois foi entendida sob duas perspectivas: estando o vaso vazio, esse seria preenchido com água; vaso cheio, seria esvaziado. Com base no comentário de A1 em [2.1], dizendo “volume”, podemos perceber que o aluno constituiu que a grandeza que será observada está relacionada ao volume, enquanto no enunciado da tarefa apresentamos a expressão “água é derramada em um vaso a uma taxa constante”, ou seja, não mencionamos de forma explícita que estaríamos

DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656038

interessados no volume de água dentro do vaso. Nesse sentido, a discussão ocorrida no grupo mostrou-se como um aspecto essencial para a negociação de significados e para a compreensão da situação matemática em estudo (Ponte, 2017; Rodrigues, Menezes, & Ponte, 2018).

Além disso, a expressão "taxa constante" nos desvela que, para o aluno, será derramada a mesma quantidade de água em todo o período observado (o aluno chamou esse fato de "por unidade de tempo"). Trata-se de um tipo particular de crescimento, passível de ser explorado de forma intuitiva, sem que tenha alguma explicação prévia de conceitos anteriores à tarefa proposta (Trevisan & Mendes, 2017).

Evento 3 – identificando mais grandezas envolvidas

Grupo pensando no item (b) da tarefa:

[3.1] A1: Imagine a cena do vaso sendo enchido...	
[3.2] A2: Volume, raio, diâmetro.	i
[3.3] A1: Volume? "quantiii" (aqui A1 parece duvidar desse fato)	
[3.4] A2: É, volume [...] diâmetro do vaso também dá pra gente ver.	
[3.5] A1: Quando está sendo "enchido" que dá pra medir?	
[3.6] A2: O volume, porque dependendo da quantidade de água da pra medir o volume.	iv(a)
[3.7] A3: Dá pra calcular a massa, imagina ele amarrado numa corda e derramando água.	i, iv(a)
[3.8] A2: O que mais?	
[3.9] A1: Volume, diâmetro [...]	
[3.10] A2: Massa	
[3.11] A1: [...] o que mais? [...] velocidade de enchimento.	i
[3.12] A2: Acho que não tem mais.	
[3.13] A1: É "tá" bom, é bastante já (risos).	

Observando o evento 3, podemos notar que, antes mesmo de A1 [3.1] terminar a leitura, A2 [3.2] já responde o enunciado. Um terceiro membro (A3), que não havia feito comentário algum anteriormente, entra comentando a situação em [3.7]. Isso sugere que o contexto da situação, juntamente com o item anterior, tenha possibilitado aos estudantes, mobilizar o reconhecimento de quantidades individuais envolvidas (volume, raio, diâmetro, massa, velocidade de enchimento) como variáveis, bem como ideias sobre possíveis relações entre essas quantidades (Thompson & Carlson, 2017). Desse modo, a discussão favoreceu o envolvimento dos estudantes na apresentação e justificação de ideias (Rodrigues, Menezes & Ponte, 2018), possibilitando que "imaginassem" o que estava acontecendo na situação.

Evento 4 – o que vai ser relacionado com o quê? Vai ser uma reta?

O grupo começou lendo o enunciado do item (c).

DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656038

[4.1] A2: No começo é um pouco mais maior.	iv(c), iv(d)
[4.2] A1: Rápido	
[4.3] A2: Mais maior ... depois vai ficando menorzinho.	iv(c), iv(d)
[4.4] A3: A e? Depende muito o que você está olhando no gráfico, se for por...por raio e volume, tem que ver como cê tá montando o gráfico... se for por raio... se for por volume...	iv(a)
[4.5] A2: É, então, porque ela cresce no começo rápido, depois ela diminui e depois volta mais rápido, por causa daqui, tipo...	iv(c), iv(d)
[4.6] A3: Então, mas daí se for medir a altura do coiso pelo diâmetro por unidade de tempo "a e" é uma reta.	
[4.7] A2: Não, não porque tipo assim, ó! o raio daqui é menor que o daqui (nesse momento eles estão olhando para o formato da garrafa apresentada na tarefa) então a quantidade de água que for colocar aqui ela já vai aparecer aqui, a e na hora que ele começar a encher esse tanto de, esse diâmetro, ele vai demorar pra estar crescendo e aqui ele vai crescer mais rápido (continua olhando para os diâmetros da garrafa conforme vai sendo preenchida com água)	ii, iv(b), iv(c), iv(d)
[4.8] A2: daí eu acho que seria esse gráfico assim(apontando para o gráfico do rascunho) é esse gráfico aí (gráfico apresentado abaixo como Figura 1).	
[4.9] A2: Porque, tipo, quando começa colocar água aqui, ela vai crescer rápido (A2 está observando, nesse momento, a água no início do enchimento da garrafa) porque vai dar uma diminuída na rapidez, olha o tamanho disso aqui (olhando mais ao centro da garrafa), daí a hora que começar afunilar aqui, ele vai crescer mais rápido.	ii, iv(c), iv(d)
[4.10] A1: Altura de água, esse gráfico aqui (o gráfico apresentado na figura) seria de altura de água. O volume vai ser constante, vai tá sempre enchendo na mesma quantidade independente de.	iv(b), iv(c)

O gráfico apresentado pelo grupo, conforme mencionado em [4.8], é apresentado na Figura 1.

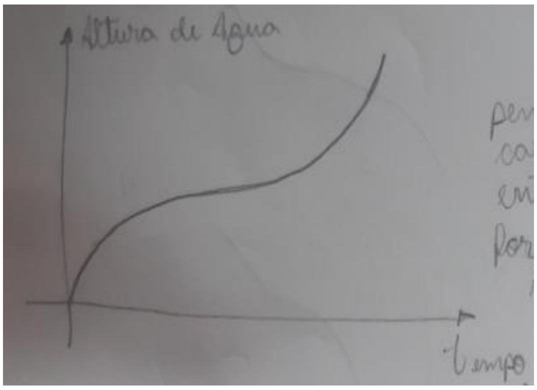


Figura 1 – Esboço proposto pelo grupo para a relação entre tempo e altura
Fonte: Produção escrita dos estudantes.

A discussão possibilitou ao grupo pensar em quantidades que variam não a partir de tabelas de números que aumentam ou diminuem seus valores, mas, sim, em objetos que se alteram continuamente, aspecto essencial do RC. Pelo modo como fez os traços no papel,

DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656038

inferimos que o estudante compreende que, nessa situação, as quantidades envolvidas variam continuamente, uma vez que, ao invés de marcar pontos e uni-los, constrói uma curva contínua, evidenciando compreender a variação contínua e suave das grandezas envolvidas (Thompson & Carlson, 2017; Frank, 2017).

Se observarmos as falas de A2, o estudante gradativamente refina suas colocações. No trecho [4.2] e, posteriormente em [4.7], reformula seus argumentos. Vale ressaltar que, em [4.9], o estudante argumenta, realizando secções em alturas diferentes da garrafa, e busca convencer os demais integrantes, sendo sua sugestão de representação convergente com os seus argumentos. Destaca-se, aqui, a "argumentação e negociação de significados para os seus raciocínios" (Rodrigues, Menezes & Ponte, 2018, p. 399), contribuindo para a conceituação de duas ou mais quantidades que variam simultaneamente (Thompson & Carlson, 2017).

Evento 5 – relacionando outras grandezas

O grupo iniciou as discussões a partir do item (d)

[5.1] A2: Construa gráficos que relacionem as diferentes grandezas envolvidas nessa situação.	
[5.2] A1: Raio e [...]	i
[5.3] A2: Raio e grafff, raio é constante.	
[5.4] A1: Raio não é constante.	ii
[5.5] A2: Raio é sim, ele não faz assim ó. (não foi possível identificar para onde aponta).	
[5.6] A1: É mesmo.	
[5.7] A2: Diâmetro que não é constante	
[5.8] A1: Diâmetro é só quando é dois raios.	
[5.9] A2: Então os dois são constantes. [...] Não precisa calcular, só pensar.	iv(a)
[5.10] A1: Mas é, o raio, quando seccionar esse vaso em partes horizontais, infinitas partes horizontais, esses raios das partes seccionadas vão mudar, só que eu não sei escrever isso não.	
[5.11] A2: Vai fazer assim ó (aponta para o gráfico da figura 4).	

Observando as falas de A2, em [5.3], [5.5] e [5.7], nota-se que, em todo o tempo, a ideia era que o raio era constante e o diâmetro não, porém, com o comentário de A1 em [5.8], a ideia de A2 muda, basta observarmos [5.9]. A representação gráfica da situação acima foi simbolizada por uma parábola com concavidade voltada para baixo. Tal ideia é fruto das discussões de A1, principalmente em [5.10], e mostra uma reflexão realizada por esse estudante no sentido de reconhecer a existência de uma relação invariante de duas quantidades que variam simultaneamente, de modo que, "na concepção da pessoa, cada valor de uma quantidade determina exatamente um valor do outro" (Thompson & Carlson, 2017, p.444). Abaixo segue o gráfico apresentado pelo grupo, Figura 2.

DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656038

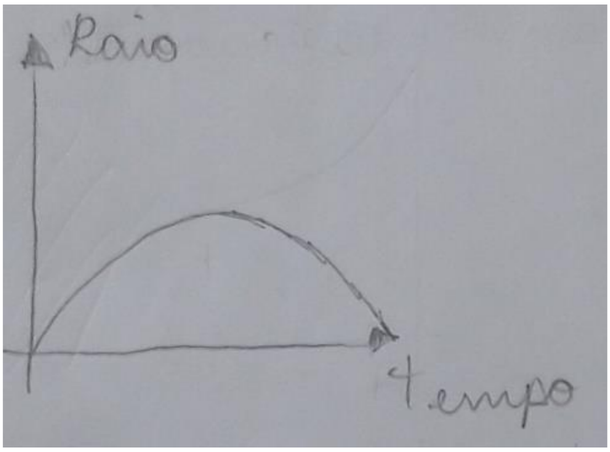


Figura 2 – Esboço proposto pelo grupo para a relação entre tempo e raio.
Fonte: Produção escrita dos estudantes.

O grupo continuou a discutir o item (d) da tarefa, agora pensando na representação gráfica que relaciona o volume de água em função do tempo.

[5.11] A2: Volume é constante também, né?	ii, iii
[5.12] A1: Volume do recipiente é constante.	
[5.13] A2: É então, dá pra fazer no gráfico tempo e volume.	iii, iv(a)
[5.14] A1: Pera aí, então, é o volume de água.	
[5.15] A2: Daí pra fazer no gráfico [...] é uma reta, o volume é o mesmo. Altura que é daquele jeito [mencionando o gráfico do item c]. O volume é constante.	

O grupo parece não ter dúvidas em afirmar que o gráfico da situação será uma reta, visto que as duas grandezas observadas são constantes [5.11], e apresenta o gráfico da Figura 3 como resultado da breve conversa.

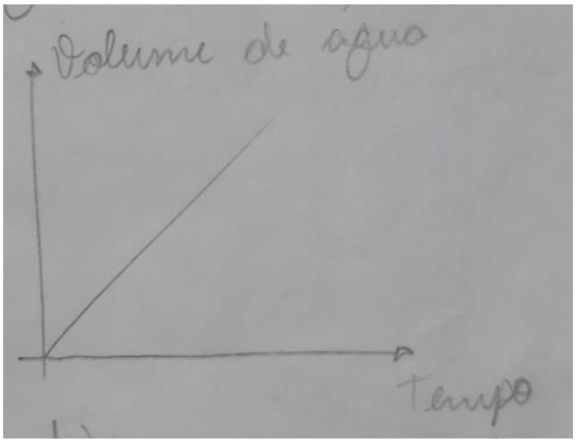


Figura 3 – Esboço proposto pelo grupo para a relação entre tempo e volume.
Fonte: Produção escrita dos estudantes.

DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656038

Após pensarem quais grandezas poderiam ser medidas na situação da garrafa, eles se depararam com duas grandezas diferentes daquelas que haviam sido previstas no planejamento. O grupo, então, inicia uma interessante e intrigante discussão.

[5.16] A1: Se o raio aumenta... o cresci...mento	i
[5.17] A2: Eu acho que essa relação que a gente fez desse raio vai complicar a vida.	ii
[5.18] A1: Não, vai ser o mesmo aqui. Ó, se o raio aumenta... velocidade de crescimento... Não é só a altura, é velocidade de crescimento.	iv(a)
[5.19] A2: Se o raio aumenta, o crescimento diminui.	
[5.20] A3: O volume em função do tempo?	
[5.21] A2: Não, volume é constante...o raio... tipo, se você pegar a cada pontinho.	
[5.22] A2: Diminui... Quando o raio é maior, ela demora mais pra encher.	iv(a), iv(b)

Se observarmos, em [5.17], temos A2 percebendo que correlacionar as grandezas em tela irá dar trabalho, talvez porque o raio cresce e decresce depois de um certo momento (quando alcançar o maior círculo da secção transversal). Mas A1 está convicto da ideia da situação, conforme [5.18]. Apresentamos a Figura 4 para ilustrar o gráfico resultante do comentário [5.22].

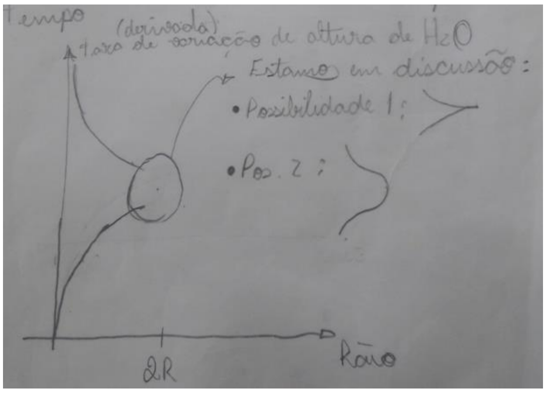


Figura 4 – Esboço proposto pelo grupo para a relação entre raio e tempo.
Fonte: Produção escrita dos estudantes.

Seguem as discussões no grupo, agora com a presença do pesquisador.

[5.23] A1: Então, o raio é vai ser uma grandeza que vai aumentar constantemente, mas a velocidade.	iii
[5.24] Pesquisador: O tempo todo ele (raio) cresce?	
[5.25] A1: É então até metade aqui. O raio só vai até um ponto, ele tem um limite,	iv(d)
[5.26] A2: Ele cresce depois volta a diminuir.	iv(b)
[5.27] A1: O raio tem limite. Só que a velocidade...	
[5.28] A2: A velocidade, ela é rápida, tipo, no começo, na primeira secção, ela aumenta rápido, é mais alta e depois, quando chega mais pro diâmetro, ela diminui, ela vai ficando menor, depois aumenta de novo.	iv(b)

DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656038

Observando os diálogos, podemos perceber que, para A1, quanto mais próximo do diâmetro forem as secções, menores serão as taxas de crescimento da altura de água dentro do recipiente [5.38]. Ocorre, nessa situação, a constituição de uma operação quantitativa que evidencia a compreensão da situação (reconhecimento de que uma quantidade cresce/decresce, bem como do "modo" como cresce/decresce).

Podemos observar que o estudante tem como "entrave" a questão de o raio aumentar e diminuir no decorrer do tempo ([5.26]). Ao relacioná-lo com a altura, chega-se à representação de uma situação que é, matematicamente, uma função, e deve-se o "entrave" possivelmente ao fato que, muitas vezes, tais relações são ignoradas (ou artificialmente construídas) nas aulas de Matemática da Educação Básica e também de CDI, embora imprescindíveis ao desenvolvimento do RC.

Conclusões e considerações finais

Nesta seção, apresentamos uma síntese dos resultados observados, embasados nas análises dos eventos nos quais os dados foram organizados. Para tal, procuramos responder ao objetivo de pesquisa, isto é, discutir habilidades do RC que foram mobilizadas durante as discussões matemáticas desencadeadas pelo trabalho com tarefas matemáticas.

Embora na tarefa haja itens que envolvam explicitamente a variável tempo, seu objetivo maior era possibilitar a exploração da relação entre a altura e o volume da garrafa. Assim, ao invés de solicitar que se construísse um gráfico que relacionasse essas duas variáveis (Carlson & Thompson, 2017), a tarefa foi organizada por meio de itens que mobilizam elementos necessários a essa construção. Inicialmente, foram feitas as seguintes solicitações: uma explicação sobre o conceito de taxa constante de derrame; a identificação de grandezas que pudessem ser medidas na situação; a construção de um gráfico que relacionasse a altura da água com o tempo e a construção de gráficos que relacionassem as grandezas envolvidas, identificadas pelo próprio grupo de alunos.

Para o grupo de estudantes em análise, reconhecemos que a tarefa possibilitou a exploração das habilidades esperadas. O grupo reconheceu que o raio pode ser pensado como uma quantidade que varia com o tempo, o mesmo ocorrendo com o volume. Os estudantes estabeleceram, ainda, uma relação entre a altura e o volume, construindo uma representação na qual a inversão na concavidade do gráfico mostrou compreensão da existência de uma mudança na taxa de variação nessa situação.

Por exemplo, quando um dos alunos menciona que "ela (a altura cresce no começo rápido, depois ela diminui e depois volta mais rápido", parece-nos que essa fala se torna um "detonador" de uma discussão entre alguns integrantes do grupo. Com isso, observamos que os estudantes reconhecem que as grandezas tempo e altura covariam e que existe uma mudança de crescimento da altura com o passar do tempo. Ao se observar a representação gráfica utilizada, bem como as discussões matemáticas realizadas, entendemos que os estudantes conseguiram representar graficamente a situação sem pensar de forma discreta, um

DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656038

fato necessário à elaboração do RC (Carlson, 2002; Thompson, 2016). A ideia de covariação entre as quantidades “altura e raio” das seções transversais (aspecto não previsto ao elaborarmos a tarefa) se fez presente nas discussões do grupo. Enquanto a altura é uma quantidade sempre crescente, o raio ora aumenta, ora diminui ao longo do tempo.

Acerca das habilidades desveladas no trabalho com essas tarefas, a análise dos dados mostrou que, em menor ou maior profundidade, todas aquelas que foram previamente elencadas estiveram presentes nas discussões do grupo selecionado. Dessas, a *constituição de quantidades* envolvidas na situação e o *raciocinar acerca do processo de medição* dessas quantidades foram ideias que se fizeram presentes nas discussões do grupo, ao lidar com a tarefa. Nessa discussão, foram reconhecidas como atributos da situação, passíveis de medição, a quantidade (volume) e a altura da água na garrafa como variáveis explícitas e que covariam com o tempo. Destaca-se, também, o reconhecimento da variação do raio das seções transversais da garrafa ao longo do tempo, quantidade que não havia sido pensada na preparação da tarefa. Tal identificação foi fundamental para a investigação da representação gráfica da relação entre essas variáveis, bem como a investigação da concavidade desses gráficos. Além disso, mobilizaram a compreensão das taxas de variação envolvidas no contexto proposto. A construção do gráfico que relacionou o tempo com o raio da superfície de água na parte esférica do vaso levou os estudantes a reconhecerem uma situação que, matematicamente, não é uma função.

Reconhecer que o grupo em análise foi capaz de *imaginar medidas de quantidades variando continuamente* foi um aspecto com o qual tivemos alguma dificuldade em lidar, em especial pelo modo como os dados foram coletados (uso de áudio). Tal inferência ocorreu porque, em diversos momentos, em suas várias representações, o grupo esboço curvas contínuas (Figuras 3 a 6) representando a relação entre as variáveis envolvidas, evidenciando o reconhecimento de uma variação.

A tarefa permitiu aos estudantes transitar entre vários formas de representação matemática (Thompson & Carlson, 2017; Ponte, 2005), potencializando. assim, a exploração de ideias relacionadas à *coordenação entre as quantidades envolvidas*, em especial, o reconhecimento de que havia quantidades envolvidas na situação que poderiam ser relacionadas. Reconhecemos que esse aspecto ressalta as potencialidades da tarefa, propostas para uma ressignificação do conceito de função, visto que ampliam a abordagem usualmente presente em livros tanto do Ensino Médio quanto de CDI que tratam desse conceito, uma vez que, em geral, privilegiam em demasiado a linguagem algébrica.

O reconhecimento da direção de crescimento, da existência de taxas de variação e de eventuais mudanças nessa taxa fez-se presente nas discussões. Assim, reflexões a partir de expressões presentes no enunciado, por exemplo: “continua crescendo, mas a uma taxa decrescente”, foram importantes para a mobilização dessas ideias.

Entretanto, em vários momentos, embora os alunos parecessem verbalizar compreender a situação, falhavam ou “travavam” nas representações. O comentário “Eu acho

DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656038

que essa relação que a gente fez desse raio vai complicar a vida" surge quando tentam riscar um possível gráfico que parece não ilustrar uma situação passível de representação. Em vários momentos, durante a realização da tarefa, o grupo deparou-se com situações que, para eles, pareciam não ser passíveis de representação gráfica.

De um modo informal, parece que, embora, em suas falas, parecessem reconhecer a covariação entre as grandezas envolvidas, não eram capazes de elaborar uma representação gráfica. Isso ocorreu no momento em que o grupo buscava representar a relação entre o raio das seções transversais e o tempo, relação que não se classifica como uma função (sempre há dois "instantes" simétricos em relação ao meio da garrafa na qual os raios coincidem). Assim, a concavidade dos gráficos "surgia" mais como consequência de ligar pontos marcados no plano cartesiano, ou pela inferência da relação de crescimento entre as variáveis envolvidas, que pela análise do modo como essas variáveis cresciam.

Destacamos, também, o papel desempenhado pela discussão entre os estudantes durante a realização da tarefa (Ponte, 2017), elaborando conjecturas a respeito das representações que eram revisadas e reformuladas no decorrer do trabalho e, ainda, o potencial da tarefa proposta, que, pelo seu caráter exploratório, mostrou-se como de alta demanda cognitiva (Stein & Smith, 2009). Percebemos, também, que as tarefas de alta demanda cognitiva possibilitaram o desenvolvimento de habilidades do RC e a concepção de gráficos como representações emergentes de fenômenos em constante mudança (Frank, 2017).

Por fim, se observarmos as diversas representações gráficas mobilizadas, podemos inferir que, embora as análises tenham mostrado que os estudantes compreendiam elementos relacionados ao RC, eles não souberam como representar graficamente a relação entre as grandezas enredadas. Trata-se de um aspecto que emergiu de nossos dados e que permanece em aberto, demandando maior aprofundamento teórico, tanto na busca de compreendê-la, quanto no sentido de subsidiar reformulações nos enunciados ou no sequenciamento das tarefas.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação Araucária, à Fapesp e ao CNPq pelo apoio à pesquisa.

Referências

Barufi, M. C. B. (2012). *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral.* Tese de Doutorado em Educação. São Paulo: Universidade de São Paulo.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656038

Brockman, J. B. (2010). *Introdução à engenharia*: modelagem e solução de problemas. Rio de Janeiro, RJ: LTC.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33 (5), 352-378.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 135–164.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation and their role in the development of exponential function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 66–86.

Couto, A. F., & Trevisan, A. L. (2017). Cálculo interativo: um ambiente virtual de suporte às aulas de cálculo diferencial e integral. *Hipátia*, 2(1), 16-25.

Couto, A. F., Fonseca, M. O. S., & Trevisan, A. L. (2017). Aulas de cálculo diferencial e integral, organizadas a partir de episódios de resolução de tarefas: um convite à insubordinação criativa. *REnCiMa*, 8(4), 50-61.

Frank, K. M. (2017). *Examining the Development of Students' Covariational Reasoning in the Context of Graphing*. Dissertation of Doctor of Philosophy. Tucson: Arizona State University.

Gil, A. C. (2010). *Métodos e Técnicas de Pesquisa Social*. São Paulo: Atlas.

Gonçalves, W. J. (2018). *Raciocínio covariacional em aulas de Cálculo Diferencial e Integral: possibilidades de desenvolvimento a partir do uso de tarefas*. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Londrina: Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Mestre, C. M. M. V. (2014). *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade*: uma experiência de ensino. Tese de Doutorado em Educação. Lisboa: Universidade de Lisboa.

National Academy of Engineering (NAE). (2005). *Educating the Engineer of 2020*: Adapting Engineering Education to a new Century. Washington, DC: National Academies Press.

Mkhatshwa, T. P. (2019). Calculus students' quantitative reasoning in the context of solving related rates of change problems. *Mathematical Thinking and Learning*, 22 (2), 139-161.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. J. P. PONTE (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 13-27). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P. (2017). Discussões coletivas no ensino aprendizagem em Matemática. In: GTI (Ed.), *A prática dos professores*: planificação e discussão coletiva na sala de aula (pp. 33-56). Lisboa: APM.

Powell, A. B., Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2004). Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos de estudantes. *Bolema*, 17(21), 81-140.

DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656038

Rodrigues, C.; Menezes, L., & Ponte, J. P. (2018). Práticas de Discussão em Sala de Aula de Matemática: os casos de dois professores. *Bolema*, 12 (61), 398-418.

Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In: S. B. Berensah & W. N. Coulombe. (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education*. Raleigh, NC: North Carolina State University.

Speer, N., & Kung, D. (2016). The complement of RUME: What's missing from our research? In T. Fukawa-Connelly, N. Infante, M. Wawro & S. Brown (Eds.), *Proceedings of the 19th Meeting of the MAA Special Interest Group on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 1288–1295). Pittsburgh: Pensylvania.

Stein, M.H., & Smith, M.S. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para reflexão. *Educação e Matemática*, 105, 22-28.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340

Thompson, P. W. (1990). *A theoretical model of quantity-based reasoning in arithmetic and algebraic*. Center for Research in Mathematics & Science Education: San Diego State University.

Thompson, P. W., & Thompson, A. G. (1992). *Images of rate*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate mathematics curriculum. In: E. Dubinski, A. H. Schoenfeld & J.J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education I* (pp. 21-44). Providence: American Mathematical Society.

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. In: L. L. Hatfield, S. Chamberlain & S. Belbase (Eds.), *New perspectives and directions for collaborative research in Mathematics Education*. (pp. 33-57). Laramie, WY: University of Wyoming Press.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp.421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Trevisan, A. L., & Mendes, M. T. (2013). Possibilidades para matematizar em aulas de Cálculo. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 6, 129-138.

Trevisan, A. L., & Mendes, M. T. (2017). Integral antes de derivada? Derivada antes de integral? Limite, no final? Uma proposta para organizar um curso de Cálculo. *Educação Matemática Pesquisa*, 19(3), 353-373.

Trevisan, A. L., & Mendes, M. T. (2018). Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta. *Revista Brasileira de Ensino e Tecnologia*, 11(1), 209-227.