# A divisão e os racionais: revisão bibliográfica e análise

*Maria Helena Fávero*[1] *e Regina da Silva Pina Neves*[2]

**Resumo**: Relatórios oficiais no Brasil apontam baixo desempenho escolar nas tarefas sobre divisão e número racional. São analisados 65 estudos sobre o assunto, publicados entre 1999 e 2010. Os estudos sobre resolução de problemas inserem-se nos estudos tradicionais com entrevistas sobre as estratégias; nas intervenções, predominam o grupo controle e experimental, com pré e pós-testes. Ambos se referem aos campos conceituais, aos registros de representação semiótica e aos subconstrutos dos números racionais. Convergem na importância da compreensão da lógica do sistema numérico decimal para a compreensão da lógica do algoritmo da divisão e dos racionais; no predomínio, em sala de aula, da exposição e de regras, em detrimento do conceito; na importância do professor. Propõe-se um modelo que leve em conta a análise das regulações cognitivas, integrando a análise dos processos comunicacionais, considerando a Psicologia do Desenvolvimento, em relação tanto ao professor quanto ao aluno.

**Palavras-chave:** Divisão; números racionais; sistema numérico decimal; regulações cognitivas; processos comunicacionais.

# Division and rational numbers: research review and analysis

**Abstract:** Official reports in Brazil reveal poor school performance in tasks involving division and rational numbers. We analyse 65 such studies, published between 1999 and 2010. Those regarding problem solving are traditional studies with interviews about strategies, and the predominant interventions involve control and experimental groups with pre and post tests. Both refer to conceptual fields (Vergnaud, 1990), to records of semiotic representation (Duval,1993) and to the sub-constructs of rational numbers (Kieren, 1988). They agree on the importance of understanding the logic of the decimal number system in order to grasp the logic of the division algorithm and rational numbers, on the classroom predominance of exposition and rules to the detriment of concepts, and on the importance of the teacher. It is proposed a model based on the analysis of cognitive regulations, including an analysis of the communicative processes, and taking into account the Developmental Psychology of both the teacher and the student.

**Key words:** Division, rational numbers, decimal number system, cognitive regulations, communicative processes.

---

1 Instituto de Psicologia da Universidade de Brasília, DF. Coordenadora do Laboratório de Psicologia do Conhecimento – COGITO. Professora orientadora do Programa de Pós-Graduação em Processos de Desenvolvimento Humano e Saúde. faveromh@unb.br. faveromh@brturbo.com.br

2 Consultora pela Organização das Nações Unidas para a educação, a ciência e a cultura (UNESCO) do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. Pesquisadora integrante do Laboratório de Psicologia do Conhecimento (COGITO) do Instituto de Psicologia da Universidade de Brasília. Pesquisadora integrante da *Cognição - Atendimento Multidisciplinar*, Brasília, DF. reginapina@gmail.com.

## Introdução

Os relatórios de avaliações oficiais, como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), o Programa Internacional de Avaliação Comparada (PISA) e o Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE), confirmam o consenso apontado nos estudos brasileiros e internacionais entre as décadas de 1980 e 1990: as dificuldades de alunos e de professores em lidar com o conceito de número racional – tomado, no geral, como um procedimento simples de contagem dupla em situações estáticas de parte-todo –, com o algoritmo da divisão e com a lógica de sua notação (ver, por exemplo, Bryant; Nunes, 1997; Correa, 1996; Kieren, 1988; e Saiz, 1996). Também confirmam as queixas de professores e de alunos, inclusive dos adultos em processo de alfabetização (Fávero; Soares, 2002) e de profissionais da educação (Fávero; Pina Neves, 2009).

Considerando tais dados, este artigo apresenta, analisa e discute uma pesquisa bibliográfica dos estudos brasileiros e internacionais centrados nesses dois tópicos: número racional e divisão. Para tanto, focam-se dois objetivos principais: a análise do ponto de vista teórico e metodológico dessa produção e a identificação de possíveis aspectos consensuais, no que se refere tanto à prática de ensino quanto ao processo de aquisição conceitual.

## Método

O critério para a seleção dos estudos desta revisão bibliográfica era que se tratasse de estudos fundamentados explicitamente em um referencial teórico e metodológico da Psicologia da Educação Matemática. Abrangendo o período de 1999 a 2010, a revisão bibliográfica foi desenvolvida por meio dos seguintes bancos de dados: SciELO – Scientific Electronic Library; OVID; Wilson; Web of Science; Banco de Teses CAPES; General Science Abstracts Full Text; Education Full Text; ERIC (via CSA); ERIC (via US Department of Education) e PsycINFO, a partir do Portal da Capes. Completou-se a pesquisa nas bibliotecas da Universidade de Campinas, Universidade de São Paulo, Universidade Estadual Paulista, Universidade Federal do Paraná, Universidade de Brasília, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Universidade Federal de Minas Gerais e Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Foram utilizadas as palavras-chave *division*, divisão, *fraction*, fração, decimal, *number rational*, número racional, e as palavras – matemática, *mathematical,* educação matemática, *mathematical education* como forma de filtro no campo *assunto.* Assim, foram analisados 39 artigos científicos publicados em periódicos internacionais e nacionais, 5 pesquisas publicadas em livros nacionais, 7 pesquisas apresentadas em congressos científicos, 10 dissertações de mestrado e 4 teses de doutorado defendidas no Brasil.

Das 65 referências analisadas, 64,2% eram de estudos brasileiros; 11,2%, de estudos norte-americanos; 19,4 %, de estudos europeus; 3,5%, de canadenses; 1,7%, de australianos. Do total, 78,18% relatavam pesquisas sobre resolução de problemas e 21,82%, pesquisas de intervenção. Observou-se um grande número de pesquisas focadas nos alunos: 83,9%. Apenas 8,9% dos estudos foram desenvolvidos com professores e 7,2%, com ambos.

Outra tendência a ser ressaltada é que, dessa maioria de estudos desenvolvidos com alunos, 65,3% envolveram alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental; 28,9%, alunos dos anos finais do Ensino Fundamental; 1,9%, alunos do Ensino Médio; e apenas 3,9%, alunos universitários.

Como proposto por Fávero e Sousa (2001), sistematizou-se a análise bibliográfica em tabelas, nas quais a *primeira* coluna fornece um contador relativo às referências; a *segunda* apresenta a referência completa do estudo; a *terceira,* o país de origem do estudo; a *quarta* identifica o referencial teórico; a *quinta* identifica os objetivos do estudo; a *sexta*, o método; e a *sétima*, os principais resultados descritos.

A análise assim elaborada evidenciou duas principais categorias de estudo: as pesquisas sobre resolução de problemas e as pesquisas de intervenção. Apresentam-se exemplos de cada uma dessas categorias em duas tabelas.

## A primeira categoria de estudos: as pesquisas sobre resolução de problemas

Nessa categoria de estudos, verificou-se a referência dominante das seguintes abordagens teóricas: a teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1990); os subconstrutos dos números racionais de Kieren (1988) e os estudos sobre registros de representação semiótica de Duval (1993).

Nos estudos que se fundamentavam na Teoria dos Campos Conceituais, há sempre uma revisão das principais publicações de Vergnaud, enfatizando as ideias defendidas por esse autor em relação a conhecimento, conceito, campo conceitual, esquema, situação, invariante e representação. Nos estudos que adotaram a teoria dos diferentes subconstrutos dos números racionais, os cinco construtos para o número racional foram retomados na fundamentação: relação parte-todo, medida, quociente, razão e operador. Os que adotaram os Registros de Representação Semiótica discorreram sobre as três aproximações da noção de representação proposta por Duval (1993): representação subjetiva e mental; representações internas ou computacionais; e representações semióticas em seus dois aspectos: forma (ou o representante) e conteúdo (o representado). Trata-se, em todos os casos, de uma fundamentação teórica homogênea, que não propõe novas reflexões, nem mesmo em relação aos resultados obtidos.

Apenas um estudo se refere exclusivamente à abordagem piagetiana e recupera os dados de Piaget (1978), enfatizando que a gênese do conceito de fração está na partição de grandezas contínuas e que há estágios sucessivos na construção das diferentes noções fracionárias; de modo que as ideias de conservação, pensamento reversível e nível operatório aparecem como condições prévias para o desenvolvimento do conceito de fração (Campos, 2004).

Em cinco estudos, a abordagem piagetiana também está presente, mas como fundamento do conceito de esquema, retomado através da teoria dos campos conceituais, como o faz o próprio Vergnaud (1990) (Bezerra, 2001; Cunha, 2002; Fonseca, 2005; Pires, 2004; Spinillo, 2002).

Verificaram-se também várias referências aos trabalhos de Guy Brousseau, nos quais são destacadas as ideias de situação didática, situação a-didática e devolução (Brousseau, 1986), assim como aos de Hans Freudenthal, pontuando alguns princípios da chamada Matemática Realística (Freudenthal, 1991).

Como se pode observar na Tabela 1 – que apresenta parte das publicações analisadas –, os objetivos dos estudos dessa categoria visavam, de maneira geral, a identificar, descrever e analisar erros e estratégias de resolução em relação aos conceitos de divisão e de número racional.

Tabela 1 – Primeira categoria de estudos: amostra de pesquisas sobre resolução de problemas

| Nº | Referência | País | Referencial teórico | Objetivos | Método | Resultados |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 01 | Neuman (1999) | HOL | Vergnaud | Identificar estratégias utilizadas pelas crianças em problemas de divisão. | 72 alunos, de 2ª a 6ª grades, foram submetidos a entrevistas clínicas, individuais, e à resolução de 2 problemas de divisão. | A maioria dos alunos de 2ª grade usou desenhos relacionados à situação descrita no problema. Os demais usaram cálculos e representações gráficas nos problemas de divisão partitiva e representações gráficas, a partir de agrupamentos e subtrações sucessivas nos de divisão quotativa. |
| 02 | Lautert e Spinillo (1999) | BRA | Vergnaud | Identificar como e quais elementos da operação de divisão são representados, em situações de divisão apresentadas oralmente em linguagem matemática formal. | 80 alunos, entre 5 e 8 anos, foram igualmente divididos em 4 grupos: Jardim; Alfabetização; 1ª série; e 2ª série e submetidos a dois cálculos de divisão lidos pelo pesquisador. | As crianças – exceto as do Jardim – representaram seus procedimentos de resolução, usando as operações que já dominavam no contexto escolar. Utilizaram diferentes formas de linguagem, tais como: idiossincrática; icônica e simbólica. Nas resoluções, o quociente sempre foi representado, e o resto, nem sempre. |
| 03 | Moro (1999) | BRA | Vergnaud | Identificar as elaborações infantis sobre as estruturas aditivas e sobre a passagem dessas às multiplicativas. | 07 alunos de 6 e 7 anos responderam a tarefas baseadas na equalização de parcelas e na composição aditiva de números. | As duas tarefas permitiram que as estruturas aditivas tivessem sua construção verificada em sua passagem às multiplicativas.<br>Adequações foram mais observadas nas tarefas de composição/decomposição e de repartição numérica, apoiadas no material. Inadequações ocorreram mais nas tarefas relativas a interpretações dos sujeitos das realizações práticas e de suas notações. |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 04 | Abreu e Morgado (1999) | POR | Inhelder | Verificar se a representação mental correta do enunciado de um problema implica em sua solução correta. | 76 alunos, entre 7 e 10 anos, foram entrevistados individualmente, na resolução de seis problemas de divisão. | A construção de uma representação mental correta do enunciado implicou em uma solução adequada para o problema e evoluiu de acordo com a escolaridade. |
| 05 | Mix, Levine e Huttenlocher (1999) | USA | Spinillo e Bryant | Identificar as habilidades de cálculo envolvendo números inteiros e frações. | 72 alunos, entre 3 e 7 anos, resolveram individualmente 2 atividades escritas envolvendo cálculo de fração e de números inteiros. | Não houve variação de desempenho entre as tarefas de fração e números inteiros. Os alunos de até 4 anos calcularam com quantias fracionárias menores ou iguais a 1. Os mais velhos resolveram corretamente problemas de números mistos. Nenhum aluno utilizou símbolos ou algoritmos convencionais em suas resoluções. |
| 06 | Li e Silver (2000) | USA | NCTM | Investigar as estratégias de resolução usadas por alunos de 3ª grade sobre o algoritmo da divisão. | 14 alunos, de 3ª grade, sem instrução de divisão, responderam individualmente a 6 problemas (com contexto) e 8 cálculos (sem contexto) e foram questionados quanto à resolução. | A maioria dos alunos usou como estratégias o cálculo mental e conhecimentos de adição, subtração e multiplicação. As duas tarefas foram solucionadas a partir da criação de uma representação gráfica para a questão.<br>Os alunos lidaram com o resto de modo concreto e eficiente, usando para ele expressões como: sobras e extras. |
| 07 | Brito (2000) | BRA | Carraher e Schieliman | Identificar as dificuldades de estudantes na resolução de problemas verbais não rotineiros. | 114 alunos, entre 9 e 19 anos, responderam a 10 problemas verbais com história, entre rotineiros (usuais no contexto escolar) e não rotineiros; desses, dois se referiam à divisão. | As maiores dificuldades foram: a leitura e a identificação da informação matemática necessária para a construção de uma representação do problema.<br>Os problemas de divisão foram considerados os mais difíceis e apresentaram os maiores índices de erros.<br>Os sujeitos não estão familiarizados com problemas não rotineiros. |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 08 | Charles e Nason (2000) | AUS | Freudenthal | Identificar as estratégias de partição de crianças. | 12 alunos entre 7 e 8 anos do 3º ano foram submetidos a 30 tarefas realistas e entrevistados individualmente. | As estratégias identificadas foram: quociente partitivo; multiplicação e divisão sucessiva. |
| 09 | Correa e Meireles (2000) | BRA | Nunes e Bryant | Investigar a compreensão de crianças sobre divisão partitiva. | 61 alunos entre 5 e 7 anos foram entrevistados individualmente em quatro sessões, nas quais foram apresentados dois grupos de bonecos dispostos em diferentes lados de uma mesa e dois tipos de quantidades contínuas desenhadas em papel: barras de chocolate e suco de laranja. | O maior desempenho foi observado em situações de divisão partitiva com quantidades contínuas.<br>De acordo com a idade, observaram-se: - progressivo desenvolvimento da habilidade em lidar com a relação de ordem inversa entre divisor e quociente;<br>- aumento da porcentagem de justificativas que fazem menção a fatores matematicamente relevantes à solução do problema. |
| 10 | Moskal e Magone (2000) | HOL | NCTM | Descrever as estratégias de resolução de alunos em questões de comparação de decimais. | 43 alunos, entre 9 e 10 anos, responderam a problemas e forneceram explicação por escrito para suas respostas. | Os alunos usaram diversas estratégias, entre elas: figuras, tabelas e diagramas. As explicações basearam-se no posicionamento do zero, no número de zeros e na distância do número para o ponto. A maioria dos alunos estabeleceu a relação fração/ número decimal. |
| 11 | Starepravo (2001) | BRA | Vergnaud<br>Piaget<br>Brosseau | Descrever o processo de compreensão, pelos alunos, das estruturas multiplicativas. | 4 alunos da 3ª série resolveram seis situações-problemas de compra, propostos oralmente pela entrevistadora em sessões individuais, tendo como recurso encarte de ofertas. E foram entrevistados posteriormente. | Os procedimentos gráficos de solução foram, em sua maioria, diferentes dos procedimentos típicos ensinados na escola.<br>Tanto nos problemas de multiplicação quanto nos de divisão, as notações foram predominantemente de tipo aditivo.<br>As interpretações avaliativas que os sujeitos fizeram de suas notações foram provocadas pela entrevistadora. |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | Spinillo e Lautert (2001) | BRA | Vergnaud | Explorar as relações entre o significado que as crianças atribuem à divisão e o desempenho em problemas de divisão. | 80 alunos do Jardim à 2ª série foram igualmente distribuídos em 2 grupos (com e sem instrução sobre divisão) e resolveram dois problemas de divisão, um partitivo e outro quotitivo, lidos pelo pesquisador. A entrevista clínica foi posterior às resoluções. | Alunos sem instrução tiveram desempenho mais limitado em ambos os problemas e apresentaram definições que não estavam associadas a um significado matemático.<br>Alunos com instrução tiveram melhor desempenho em ambos os problemas e apresentaram definições de natureza matemática associada exclusivamente à divisão.<br>A noção matemática de divisão parece anteceder o uso de procedimentos apropriados. Esses passam a ser adotados quando os alunos recebem instrução no contexto escolar. |
| 13 | Anghileri (2001) | GBR | Kouba | Compreender os métodos de cálculos utilizados pelos alunos em problemas de divisão. | 279 alunos de escolas inglesas do 5º ano, com bom desempenho nos testes nacionais, e 256 alunos do 5º ano de escolas holandesas, que adotavam livros-texto de acordo com a "Educação Matemática Realista", resolveram individualmente 10 problemas de divisão, nos meses de janeiro e junho do mesmo ano. | Quanto à progressão de métodos ingênuos para formais, os holandeses mostraram progressão; os ingleses, descontinuidade.<br>A porcentagem de sucesso foi similar entre crianças inglesas e holandesas no primeiro teste; no segundo teste, as holandesas alcançaram melhor desempenho.<br>A estratégia de subtração repetida usada pelas crianças holandesas mostrou-se eficaz para todos os problemas. |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | Correa (2001) | BRA | Vergnaud | Analisar os procedimentos de cálculo oral utilizados pelas crianças na resolução de problemas de divisão. | 162 alunos, entre 6 e 9 anos, foram divididos em dois grupos. Um respondeu um problema de divisão partitiva e o outro por quotas, tendo, como apoio, material referente à situação. | Não houve diferença significativa entre os dois grupos quanto à natureza das estratégias. Em geral, os sujeitos modelaram os problemas ora utilizando o material concreto, ora o cálculo mental. Na divisão partitiva, observou-se a frequência de estratégias derivadas da partição dos números, seja em partes iguais (adição repetida e metades), seja em parcelas diferentes; e, na por quotas, o uso de estratégias da dupla contagem e de fatos multiplicativos conhecidos. |
| 15 | Bianchini (2001) | BRA | Brousseau Duval | Investigar o processo de aquisição do conceito de número racional. | Alunos de 3ª série foram observados por uma pesquisadora durante uma sequência de atividades sobre frações. | Os alunos desconhecem o significado (medida) do número racional. Para a iniciação de frações a partir de áreas de figuras geométricas regulares, é necessário observar se a criança já possui o desenvolvimento de conservação de área em sua estrutura cognitiva. |
| 16 | Squire e Bryant (2002a ) | GBR | Piaget Vergnaud | Investigar a habilidade das crianças ao resolverem problemas de divisão partitiva quando recebem um modelo concreto de problema. | 87 alunos, entre 5 e 8 anos, receberam 2 modelos de problemas de divisão partitiva logicamente equivalentes e informações sobre a quantidade total, o número de recipientes; e tiveram que descobrir o tamanho da porção que cada recipiente iria receber. | Os alunos apresentaram melhor desempenho em problemas de divisão partitiva quando o tamanho das porções coincidia com o quociente do que quando coincidia com o divisor. |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | Lautert e Spinillo (2002) | BRA | Vergnaud | Comparar o desempenho de crianças com e sem instrução formal sobre a divisão em problemas de partição e por quotas. | 80 alunos, entre 5 e 9 anos, foram divididos em 2 grupos (sem e com instrução). Resolveram dois problemas de divisão inexata, em sessões individuais, apresentados oralmente, sendo um de partição e outro de quotas. | O tipo do problema não influenciou o desempenho, apenas o nível de instrução formal.<br>A instrução foi fator importante no aparecimento dos diferentes tipos de definições. Crianças sem instrução não definiam ou, quando o faziam, forneciam definições sem um significado matemático. As crianças instruídas apresentavam definições de natureza matemática associadas exclusivamente à divisão. |
| 18 | Anghileri, Beishuizen e Putten (2002) | HOL | Matemática Realistica | Identificar métodos de cálculo escrito para a divisão em alunos na Inglaterra e na Holanda. | 276 alunos ingleses e 259 alunos holandeses do 5º ano escolar resolveram individualmente problemas com contexto | Os alunos holandeses apresentaram melhor desempenho, usando prioritariamente estratégias informais em suas soluções, principalmente a subtração sucessiva.<br>Os alunos ingleses usaram prioritariamente o algoritmo tradicional em suas soluções. |
| 19 | Robinson, Arbuthnott e Gibbons (2002) | CAN | Diversos | Identificar as estratégias utilizadas por adultos na solução de problemas simples de divisão. | 23 mulheres e 9 homens, entre 18 e 43 anos, cursando o primeiro semestre de psicologia, resolveram individualmente 64 algoritmos de divisão apresentados no monitor de um computador. | As estratégias mais usadas foram: conhecimento prévio; fatos derivados e agrupamentos, tendo sido a primeira a mais eficiente.<br>Problemas fáceis foram resolvidos rapidamente por várias estratégias, os difíceis foram prioritariamente resolvidos usando o conhecimento prévio. |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | Squire e Bryant (2002b) | GBR | Vergnaud | Compreender como as crianças resolvem problemas simples de divisão. | 118 alunos de 5 a 9 anos participaram, individualmente, de duas sessões de testes. Na primeira, responderam a um pré-teste (de repartição). Os aprovados responderam problemas de divisão (partitivos e quotitivos). A partir desses resultados, os alunos foram divididos em 2 grupos experimentais. Na segunda, um dos grupos recebeu problemas de divisão partitiva e o outro, quotitiva. | O início da resolução de problemas apoia-se em um modelo mental construído a partir de um esquema de ação que depende do contexto do problema. A experiência de compartilhar influencia os modelos mentais de divisão, é positiva. Apresentaram melhores resultados nos problemas de divisão partitiva. |
| 21 | Cunha (2002) | BRA | Piaget<br>Duval<br>Vergnaud | Identificar as representações da quebra da unidade. | 48 alunos de 2ª a 5ª séries responderam a 21 questões contextualizadas e não contextualizadas, de modo oral e escrito, sobre medida, sistema monetário e matemático formal. | Os alunos apresentaram baixo desempenho nas questões (contextualizadas e não contextualizadas) de quebra de unidade. E não conseguiram associar os dígitos após a vírgula com quantidades menores que a unidade. Os de 4ª e 5ª séries não conseguiram representar quantidades menores que a unidade no sistema escrito; nem ler e interpretar um número na representação decimal. No contexto monetário, os de 5ª série apresentaram melhor desempenho no sistema escrito do que no oral. |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 22 | Sharp e Adams (2002) | USA | Kieren<br>D`Ambrosio<br>Matemática Realística | Identificar como os alunos constroem o conhecimento de divisão de frações. | 23 alunos, entre 10 e 11 anos, sem instruções sobre divisão de frações, responderam a 20 problemas sobre o tema. | Os alunos usaram figuras, símbolos, palavras e os conhecimentos preexistentes de divisão de números inteiros para resolver e comunicar suas produções. Alguns desenvolveram procedimentos simbólicos formais e outros, procedimentos pictóricos. Nenhum aluno criou algum procedimento que lembrasse o procedimento usual de inverter – multiplicar, usado para a divisão de frações. |
| 23 | Notari (2002) | BRA | Mason<br>Kaput | Identificar os principais erros dos alunos na simplificação de frações aritméticas e algébricas. | Alunos de 8ª série e 1º ano responderam a 8 questões de frações  e foram entrevistados em função do alto ou baixo número de erros. | Alto índice de erro na simplificação de frações algébricas, revelando incompreensão das regras formais que regulamentam as transformações. Ausência de integração entre os domínios conceituais algébricos e aritméticos. Presença dominante do cálculo automatizado e de generalizações inválidas. |
| 24 | Robinson e Ninowski (2003) | CAN | Diversos | Descrever como os adultos aplicam o princípio da inversão. | 20 mulheres e 9 homens, entre 18 e 23 anos, alunos de graduação, responderam individualmente a dois conjuntos de 24 cálculos. | O desempenho foi diferenciado, nos problemas de inversão das formas (a+b-b) e (d x e: e). Os alunos usaram a estratégia de inversão mais frequentemente em problemas de (+ e –) do que em problemas de (x e : ). |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | Selva (2003) | BRA | Piaget | Analisar como o material didático influencia o desempenho e as estratégias de resolução em crianças. | 108 alunos, entre 5 e 8 anos, da alfabetização à 2ª série, foram divididos em três grupos: 1 – possuíam fichas de um mesmo tamanho e cor; 2 – possuíam papel e lápis; e 3 - não possuíam nenhum material. E resolveram individualmente 8 problemas (4 de partição e 4 de quotição), apresentados alternadamente, na forma de uma história. | Não ocorreram diferenças significativas em termos de número de acertos, em nenhuma série, entre os grupos que receberam fichas e aqueles que trabalharam com papel e lápis.<br>Houve melhor desempenho por parte das crianças das séries mais adiantadas.<br>O uso de lápis e papel favoreceu a utilização de estratégias mais complexas, ao passo que o uso de fichas levou as crianças a permanecer utilizando a estratégia de representação direta. |
| 26 | Ferreira e Lautert (2003) | BRA | Piaget | Ilustrar a tomada de consciência por meio do conceito de divisão. | Um aluno de 6 anos e 4 meses, da alfabetização, foi submetido à resolução de um problema, em uma situação gráfica, na qual usava papel e lápis; e a uma situação concreta, na qual usava fichas e/ou objetos idênticos aos do problema. | O aluno revelou diferentes graus de tomada de consciência da divisão, auxiliado pelos referentes presentes na linguagem do entrevistador - sem, no entanto, atingir a conceituação.<br>Ao lidar com um dado novo, recorreu a esquemas de adição já construídos, não sendo capaz de reelaborar ou construir novos esquemas, não tomando consciência entre o resto e os outros termos da divisão. |
| 27 | Carraher (2003) | BRA | Confrey e Smith | Analisar como a compreensão de razões e proporções se desenvolve com base no conhecimento prévio. | Cinco alunos, entre 10 e 11 anos, de 5ª e 6ª séries, instruídos sobre frações, foram submetidos a entrevista individual. | O ensino e a aprendizagem de razões e proporções podem basear-se no que os estudantes já sabem, mas esse não é um processo simples e direto. As operações sobre os números racionais não podem ser diretamente derivadas das operações com inteiros. |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 28 | Moro (2004) | BRA | Vergnaud<br>Piaget | Descrever a natureza e as transformações de notações infantis relativas a tarefas centradas na igualização de parcelas e na repartição de grandezas. | 12 alunos, entre 6 a 10 anos, de 1ª e 2ª séries, foram agrupados em tríades e submetidos a tarefas centradas na igualização e na repartição de coleções, propostas oralmente pelo pesquisador, para solução conjunta pelos elementos das tríades. | As notações dos alunos apresentam desenhos, algarismos e escritas alfabéticas e apontam três estados de conceituação: ausência na noção de divisão; concepção aditiva da divisão e concepção elementar de divisão.<br>Compor e decompor uma totalidade em partes equivalentes e/ou não equivalentes (provocado nas tarefas de igualização de parcelas e de repartição) está presente na psicogênese das estruturas multiplicativas nas aditivas. |
| 29 | Pires (2004) | BRA | Duval<br>Brousseau<br>Vergnaud | Analisar os registros produzidos pelas crianças no processo escolar de conceitualização dos números racionais não negativos. | 32 alunos, de 9 anos, de 3ª série, responderam a situações-problemas envolvendo números racionais. | Os alunos usaram diferentes registros (gráficos, orais, pictóricos) para comunicar suas representações e métodos alternativos para trabalhar com o conceito de número racional. Usaram pouco o registro fracionário, mesmo quando a situação exigia; preferiram fazer a conversão para o registro decimal ou até mesmo natural. Atribuíram significados aos registros convencionais para os números racionais, que nem sempre correspondem ao significado trabalhado pela escola. |
| 30 | Campos (2004) | BRA | Piaget | Identificar a conceituação de fração na produção de alunos de 8ª série. | 186 alunos, de 8ªsérie, responderam individualmente à pergunta: Qual a fração maior: ½ ou ¼? 0,4 ou 0,36? | Os alunos apresentaram alto grau de dificuldade, ausência de conceituação e dificuldade de justificar respostas. Para eles, os decimais não são parte integrante dos números fracionários, e, sim, outro conjunto numérico. |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 31 | Lautert (2005) | BRA | Nunes e Bryant, | Examinar como as crianças lidam com as relações inversas entre os termos da divisão. | 40 alunos, entre 9 e 11 anos, de 3ª série, instruídos sobre divisão no contexto escolar, resolveram individualmente 6 problemas de divisão sem resto (3 partitivos e 3 quotitivos). Esses foram apresentados oralmente e por escrito e justificativas foram solicitadas. | Os alunos apresentaram dificuldades em compreender as relações inversas nos dois tipos de problemas. As justificativas expressaram maior compreensão das relações inversas em problemas de divisão por quotas.<br>A maior dificuldade, em ambos os problemas, foi focalizar a atenção no maior divisor, esquecendo-se de considerar o tamanho do dividendo. |
| 32 | Castela (2005) | BRA | Piaget | Investigar o conhecimento do algoritmo da divisão e sua aplicação em questões contextualizadas em alunos de 6ª série. | 28 alunos de 6ª série, entre 11 e 13 anos, resolveram 12 questões (8 formais - aplicação de algoritmo e 4 contextualizadas – problemas do tipo escolar); e foram feitos questionamentos sobre as resoluções. | Menos da metade dos alunos conhece o algoritmo da divisão. O erro mais frequente a ele relacionado é o uso incorreto do zero no quociente. A grande maioria dos sujeitos não relacionou de maneira correta o resto aos demais elementos. |
| 33 | Moro (2005) | BRA | Vergnaud<br>Piaget | Descrever as concepções de divisão por partição em tarefas de repartição de coleções numéricas. | Seis alunos, entre 7 e 8 anos, de 1ª e 2ª séries foram agrupados em tríades e submetidos à resolução de tarefas de divisão por partição, propostas oralmente pelo pesquisador em duas sessões, com intervenção deste. | A hierarquia das concepções de divisão retrata uma progressão: (1º) impera a distribuição de uma coleção em duas partes e, depois, em mais partes, a ausência de relação entre a ação efetuada e seus resultados; (2º) há ideias pré-aditivas; e (3º) há predomínio de relações aditivas, ausência da distinção entre o escalar e as medidas sobre as quais opera.<br>Os níveis de tomada de consciência observados foram: menos avançado – da concepção pré-aditiva de divisão; intermediário – da concepção aditiva de divisão; e mais avançado – da concepção elementar da divisão. |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 34 | Jesus (2005) | POR | NCTM | Compreender a formação do conceito de divisão a partir da resolução de problemas | Um aluno de 8 anos foi acompanhado por sua professora em sua rotina escolar, por meio de observações diretas, recolhimento de notas de aulas, fichas de trabalho e conversas informais na resolução de problemas. | A compreensão das operações de adição, subtração e multiplicação foi decisiva para a apropriação da divisão.<br>A proficiência do cálculo, o sentido de número e o cálculo mental foram essenciais em todo o processo de resolução de problemas.<br>O aluno não dominava o algoritmo da divisão, contudo, utilizou procedimentos intuitivos que permitiram melhor compreensão do conceito, assim como o desenvolvimento do sentido de número e das operações, ao mesmo tempo que propiciou melhor desempenho na resolução de problemas. |
| 35 | Ferreira (2005) | POR | Nunes e Bryant | Compreender a conceituação de divisão a partir da resolução de problemas em alunos das séries iniciais. | 18 alunos foram submetidos, durante quatro anos, a atividades de resolução de problemas de divisão como partilha (1º e 2º anos), como medida (3º ano) e como razão (4º ano), pela mesma professora. | A aprendizagem do algoritmo da divisão pouco alterou as estratégias pessoais dos alunos. A maioria conseguiu, ao longo do processo, compreender e aplicar corretamente o algoritmo, outros não. Contudo, estes aplicavam estratégias menos econômicas, porém eficientes.<br>No decorrer do processo, os alunos desenvolveram e usaram procedimentos pessoais para a resolução das operações.<br>Problemas de divisão como medida precisam ser trabalhados ao longo do 1º e do 2º anos. |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 36 | Prado (2005) | BRA | Dantzig | Analisar a aprendizagem matemática de alunos sobre medição e fração. | Alunos de 5ª série resolveram uma situação-problema de medição e participaram de discussão sobre a resolução desta. | O processo de formação da linguagem numérica não se inicia apenas como símbolo a/b. Está inserido em um amplo movimento que tem início e desenvolvimento nas ações da medição; na expressão verbal não estruturada; na escrita das expressões verbais através das palavras; na criação de alguns símbolos que reduzam a quantidade de palavras; na criação de símbolos que eliminem as palavras; na comparação dos símbolos criados pelos alunos com os símbolos matemáticos fracionários atuais. |
| 37 | Fonseca (2005) | BRA | Piaget | Verificar se os alunos conhecem a técnica da divisão de números racionais. | 24 alunos, de 6ª série, responderam a 9 questões: 4 formais (algoritmo da divisão) e 5 contextualizadas (situações-problemas envolvendo peso, medida e valor monetário) e foram entrevistados. | Menos da metade dos alunos domina as técnicas do algoritmo da divisão. Os que não dominam utilizaram outros métodos nas questões contextualizadas. Todos os alunos conhecem os termos décimos, centésimos e milésimos. No entanto, não atribuem significados a eles, quando inseridos em uma divisão. |
| 38 | Merlini (2005) | BRA | Vergnaud<br>Kieren | Identificar as estratégias de resolução usadas pelos alunos em questões de frações. | Alunos de 5ª e 6ª séries responderam a 19 questões que abordavam os cinco significados da fração, envolvendo quantidades discretas e contínuas e representações icônicas e não icônicas, e foram entrevistados posteriormente à resolução. | Os percentuais de acerto tanto na 5ª como na 6ª séries foram baixos. O significado parte-todo manteve homogeneidade em ambas as séries, embora a 6ª tenha apresentado melhor desempenho nas questões com quantidade discreta não icônica.<br>A homogeneidade entre as séries foi rompida nos significados quociente e operador multiplicativo. |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 39 | Magina, Campos e Nunes (2005) | BRA | Vergnaud<br>Kieren | Investigar os conceitos que professores das séries iniciais do Ensino Fundamental têm sobre fração. | 70 professores, de 1ª a 4ª séries, com magistério, resolveram 4 problemas sobre fração. | A maior parte dos professores apresentou conceitos adequados de fração, porém, ainda têm dificuldades em representar numericamente situações de fração e de razão, não estabelecendo conexões entre esses conceitos. |
| 40 | Santos (2005) | BRA | Vergnaud | Compreender as concepções de professores que atuam no Ensino Fundamental, no tocante às frações. | 67 professores, entre especialistas e polivalentes, elaboraram e responderam a 6 problemas envolvendo o conceito de fração. | Na elaboração dos problemas, tanto os professores polivalentes quanto os especialistas valorizaram a fração com o significado de operador multiplicativo. Nas resoluções, houve valorização de aspectos procedimentais – aplicação de um conjunto de técnicas e regras (algoritmos).<br>Não foram observadas diferenças significativas na concepção, entre os professores, seja na elaboração, seja na resolução. Estas se mostraram influenciadas pelas experiências vividas como alunos na Educação Básica. |
| 41 | Merlini e Cols. (2005) | BRA | Vergnaud<br>Kieren | Comparar o conceito de número racional de professores e estudantes do Ensino Fundamental. | 47 professores do Ensino Fundamental elaboraram 6 problemas sobre número racional na sua representação fracionária. E seus alunos responderam a um teste escrito de fração. | O significado de "quociente" não foi contemplado de maneira expressiva. 80% dos problemas propostos referiam-se ao significado "operador multiplicativo" e "parte-todo".<br>A representação da fração em situação de divisão (quociente), do ponto de vista formal, não era usual entre os sujeitos. |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 42 | Magina e Cols. (2005) | BRA | Vergnaud Kieren | Comparar o prognóstico feito por professores e o desempenho real dos alunos de 3ª e 4ª séries primárias, sobre os significados das frações. | 70 professores, de 1ª a 4ª séries, relataram o prognóstico de acerto de seus alunos em problemas de frações. E 131 alunos, de 3ª e 4ª séries, responderam a 4 questões (bem usuais) envolvendo 3 significados da fração. | O prognóstico do desempenho relatado pelos professores, em geral, não coincide com o desempenho real dos alunos.<br><br>Os professores superestimaram a capacidade dos alunos das 4ª séries em relação aos das 3ª séries, porém, não houve uma diferença expressiva, quando comparados os índices de acertos dos alunos da 3ª e da 4ª. |
| 43 | Silva, M. (2005) | BRA | D´Ambrosio Frendenthal Brosseau | Compreender como os erros sobre números racionais são concebidos pelos professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem. | 2 professores, de 5ª a 7ª séries, avaliaram e identificaram os erros, em protocolos de resolução de um grupo de 17 alunos, numa prova sobre os números racionais.<br>Professores e alunos foram entrevistados separadamente. | Os professores consideraram apenas a resposta no final da questão; apresentaram discurso construtivista e uma prática conservadora e descontextualizada de tratamento dos erros; possuem uma visão tradicional do processo de ensino e aprendizagem, apesar de conhecerem outras propostas pedagógicas. Não aceitaram interpretações diferentes das suas, nas respostas fornecidas pelos alunos. Não evidenciaram as reais necessidades conceituais dos alunos a partir dos erros.<br>As maiores dificuldades dos alunos foram no uso da vírgula, na compreensão da relação parte-todo e na divisão de números decimais; essas foram atribuídas (pelos professores) a deficiências de conteúdos oriundas das séries iniciais. A análise dos erros dos alunos de 6ª e 7ª contradiz essa hipótese. Os alunos consideraram o erro uma incapacidade pessoal de aprender matemática. |

Quanto ao método, encontrou-se, nessa categoria, a predominância da abordagem qualitativa, envolvendo atividades escritas, seguida de entrevista clínica semiestruturada, visando a obter dados sobre as estratégias utilizadas por alunos e professores. Na maioria desses estudos, tais atividades eram de natureza semelhante àquelas utilizadas no contexto escolar tradicional. Alguns adotaram o que denominaram de "itens contextualizados", definidos como "atividades significativas" para os alunos, sem maior aprofundamento.

No que diz respeito aos resultados obtidos por essa categoria de estudos, foi possível distinguir aqueles relativos à divisão e aqueles relativos aos números racionais.

Os estudos sobre divisão apontaram, sobretudo, dados relacionados ao tipo de procedimento e registros adotados e à natureza dos erros. Em geral, os resultados desses estudos indicaram que os alunos apresentaram melhor desempenho em situação de divisão partitiva com quantidades contínuas; que a noção de divisão precede o uso de procedimentos matemáticos formais e que tais procedimentos só passam a ser adotados quando os alunos são instruídos no contexto escolar. É interessante salientar que os estudos também mostraram que os algoritmos alternativos foram os mais utilizados, sendo vistos pelos alunos como mais eficazes do que o algoritmo formal. Ao mesmo tempo, revelaram que tais alunos não compreendem a lógica do algoritmo formal. Assim, os estudos apontaram que os alunos utilizaram três tipos de registros: os grafismos irregulares, sem relação com a operação; o uso de sinais gráficos relacionados com as quantidades envolvidas na operação; e o uso de símbolos convencionais. Na maioria dos casos, os procedimentos de registro diferiam daqueles ensinados na escola.

As estratégias mais utilizadas por alunos entre 5 e 7 anos foram a partição com contagem, a partição com adição e a adição; em menor número, a divisão partitiva. As mais utilizadas por alunos entre 7 e 9 anos foram a multiplicação, a divisão partitiva, a divisão por correspondência e a subtração sucessiva. Ou seja: os estudos apontam que, de acordo com a idade, os alunos avançam no entendimento da relação inversa entre divisor e quociente, o que é compatível com os estudos de Piaget, como as próprias pesquisas salientam.

O aspecto comum aos resultados destas e unânime entre os autores condiz com os dados das avaliações oficiais aos quais se fez referência no início deste artigo: os erros e as dificuldades com a divisão estiveram presentes nas resoluções da maioria dos alunos, tanto das séries iniciais quanto das séries finais do Ensino Fundamental.

Também há um consenso nos resultados dos estudos sobre os racionais, que indicaram que as verdades construídas pelos alunos sobre os números inteiros tornaram-se obstáculos na construção dos números racionais. A compreensão da relação parte-todo foi apontada como a mais frequente nas resoluções competentes, tanto por parte dos alunos quanto por parte dos professores. Por outro lado, também se observou um consenso sobre a falta de compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos de quociente, medida, razão e operador multiplicativo. Os autores apontaram quase com unanimidade o conceito de quociente como a estratégia didática apropriada para dar início ao trabalho escolar com os racionais, uma vez que, segundo eles, isso permitiria a transição da compreensão do resto na divisão, para a criação de uma representação apropriada para a passagem do conjunto dos naturais para os racionais.

Em geral, os alunos usaram pouco o registro fracionário – a/b –, mesmo quando a situação assim o exigia, optando pela conversão para o registro decimal ou natural. Os melhores resultados foram obtidos nas situações que envolviam o sistema monetário. Os estudos também indicaram que os alunos entendem e tratam os números decimais como um conjunto numérico dissociado dos números fracionários. Suas estratégias de resolução mostraram registros de diferentes naturezas (gráficos, orais e pictóricos), e essa escolha esteve sempre relacionada à situação. Ou seja: os alunos que não dominavam os algoritmos formais para as operações com racionais criaram métodos alternativos em questões contextualizadas e os usaram com sucesso.

A presente revisão também mostrou que a linguagem que as crianças e os adolescentes utilizaram no contexto de resolução de situações-problemas não correspondia àquela utilizada na escola para o tratamento das frações, isto é, eles atribuíam significados aos registros convencionais para os números racionais, que nem sempre correspondiam ao ensinado na escola. De um modo geral, esse fato, associado à questão do registro, gerava uma avaliação equivocada, por parte dos professores, sobre a competência dos alunos.

A partir da análise dos erros nas resoluções de problemas envolvendo os racionais, os estudos concluíram que, tanto no caso dos alunos quanto no dos professores, os erros eram, na sua maioria, consequência da generalização de regras de uma situação para outra, sem que houvesse uma análise das condições que validassem tal generalização. Pode-se pensar que tais resultados se devam ao fato de que, como salienta Fávero (2007, 2009a), o ensino privilegia as regras, em detrimento dos conceitos.

*Naqueles estudos em que os professores foram solicitados a elaborar problemas, os resultados indicaram que eles utilizaram prioritariamente a fração com o significado de operador multiplicativo e valorizaram o uso exclusivo de algoritmos formais e/ou regras para a sua resolução. Quando solicitados a elaborar prognósticos do desempenho de seus alunos, os professores demonstraram dificuldades; além disso, os prognósticos elaborados não coincidiram com o desempenho efetivo de seus alunos, no que se refere tanto às séries iniciais quanto às séries finais do Ensino Fundamental.*

*Compatível com tais resultados, o discurso dos professores — como ainda demonstraram os estudos — mostrou-se altamente influenciado pelas experiências escolares vividas com alunos da educação básica, de tal modo que os autores concluíram que os processos de formação pelos quais passaram os professores não alteraram suas concepções quanto ao ensino e à aprendizagem dos números racionais. Prova disso é que, quando solicitados a propor sequências didáticas para o ensino dos racionais, os professores sugeriram atividades centradas apenas na demonstração de desenhos de figuras subdivididas em partes iguais — algumas das quais, destacadas para o registro formal de frações — ou na apresentação dessa mesma sequência com o uso de um material dito concreto, como papel dividido em partes, por exemplo.*

## A segunda categoria de estudos: as pesquisas de intervenção

Do mesmo modo que nas pesquisas sobre resolução de problemas, a análise evidenciou que o referencial teórico das pesquisas de intervenção se centrou predominantemente na já referida teoria dos campos conceituais (Vergnaud, 1990), na teoria dos subconstrutos dos números racionais (Kieren, 1988) e nos trabalhos de Guy Brousseau (1996). A referência a este último é compreensível, uma vez que, como se sabe, esse pesquisador francês se dedicou prioritariamente à didática e à formação de professores de matemática. Em resumo, como se pode observar na Tabela 2, que apresenta parte dos estudos de intervenção, os principais objetivos dos estudos dessa categoria foram: propor novos procedimentos de ensino; propor formas de intervenção com professores, visando à mudança de sua prática de ensino.

Tabela 2 – Segunda categoria de estudos: amostra de pesquisas de intervenção

| Nº | Referência | País | Referencial teórico | Objetivos | Método | Resultados |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 01 | Chahon (1999) | BRA | Bruner Vergnaud | Analisar uma proposta de intervenção para o ensino de frações baseada em metarregras. | 64 alunos foram divididos em 4 grupos (2 experimentais e 2 controle) e submetidos a uma avaliação inicial e ao pós-teste. Os grupos experimentais foram submetidos à intervenção, por meio de 12 atividades, ao longo de 10 sessões. | Os grupos experimentais apresentaram os maiores escores no pós-teste. As atividades que mais beneficiaram a nomeação e a identificação de equivalências entre frações foram as que empregaram material contínuo. |
| 02 | Keijzer e Terwel (2001) | HOL | Freudenthal | Analisar uma proposta de intervenção para o ensino de frações. | Uma aluna, de 10 anos, participou de 30 sessões (aulas) de intervenção baseada na proposta da Matemática Realista. | O programa e seu projeto de ensino estimularam o progresso da aluna. Esta, após 20 sessões, utilizou o ½ para estabelecer comparações e determinar a posição de outras frações na reta numérica, estabeleceu relações formais entre elas e passou a compará-las a partir do seu denominador. |
| 03 | Bezerra (2001) | BRA | Brosseau Vergnaud | Investigar uma abordagem de ensino para os números fracionários. | 2 turmas, entre 8 e 10 anos, de 3ª série (sem instrução escolar sobre frações), foram divididas em 2 grupos (controle - GC e experimental - GE) e responderam a pré e pós-teste. O GE foi submetido à intervenção durante 12 encontros. | O grupo experimental apresentou desempenho superior ao grupo controle no pós-teste. A abordagem utilizada na intervenção, a partir da divisão de números naturais, seguida de interpretação do resto e de sua representação, apresentou resultados bastante satisfatórios. |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 04 | Joseph e Hunter (2001) | USA | Diversos | Analisar o uso de uma estratégia autorregulatória para o ensino de frações. | 8 alunos, de 12 anos, responderam a um teste matemático de adição e subtração de frações, participaram de intervenção (baseada no uso de cartões com resoluções e seguida de discussão) e responderam a um pós-teste. | Todos os alunos tiveram melhora no desempenho em função dos cartões. |
| 05 | Connor (2001) | USA | Kieren | Investigar uma abordagem de ensino para os números fracionários. | 25 alunos, entre 9 e 10 anos, responderam ao Teste de Resultados da Califórnia (CAT) que envolvia cálculos e conceitos fracionários. As questões do teste foram revisitadas pela professora durante as aulas na forma de grupos de discussão. | A abordagem não explicitou como os diferentes discursos influenciaram os conceitos fracionários – considerando os alunos individualmente.<br><br>A prática da discussão dirigida requer apoio tanto para o professor quanto para os alunos, pois emergiram discussões conceituais variadas, que nem sempre foram controladas pela professora. |
| 06 | Brito e Lima (2001) | BRA | Ausubel | Avaliar os mapas conceituais como recurso na compreensão de frações. | 19 alunas do 4º ano de magistério e 7 professoras do 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental foram submetidas a questionário, teste matemático, instrução (palestra) sobre elaboração de mapas conceituais e elaboração do mapa cognitivo de frações. | Os sujeitos não compreendiam muitos dos conceitos relacionados às frações e não estavam aptos a trabalhar esse conteúdo. Apresentaram alta motivação para o uso do mapa conceitual. Contudo, mais estudos são necessários para verificar se o uso dos mapas pode facilitar a aprendizagem de frações. |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 07 | Saxe, Gearhart e Na´ilah (2001) | USA | NTCM<br>Behr, Lesh, Post e Silver | Identificar a influência do desenvolvimento profissional e curricular dos professores sobre a compreensão de frações por seus alunos. | 23 professores participaram de 3 diferentes programas de formação. Seus alunos, entre 9 e 11 anos, responderam a testes no início e no final de uma unidade de frações. | O programa de formação, pautado na compreensão dos professores em relação à matemática que ensinam; na compreensão das crianças; na compreensão, pelos professores, das realizações e das motivações das crianças na matemática; e na criação de oportunidades para os professores trabalharem com outros profissionais, mostrou-se o mais eficiente para o desenvolvimento profissional. E seus alunos alcançaram os melhores desempenhos nos testes. |
| 08 | Spinillo (2002) | BRA | Vergnaud | Investigar o uso do julgamento proporcional na resolução de tarefas. | 180 alunos, entre 6 e 8 anos, foram igualmente divididos em 3 grupos (Alfabetização; 1ª série; e 2ª série) e responderam a um pré-teste.<br>O grupo 1 resolveu, sem intervenção, uma tarefa de proporção e um pós-teste com a mesma tarefa do pré-teste.<br>O grupo 2 (Controle) resolveu o pré e o pós-teste.<br>O grupo 3 (Experimental) foi submetido à mesma tarefa do grupo 1, à instrução e ao pós-teste. | Somente o grupo 3 apresentou progressos entre o pré-teste e o pós-teste.<br>As justificativas apresentadas depois da instrução mostraram que as crianças estabeleciam relações de segunda ordem com base no referencial de metade.<br>A instrução levou os alunos a aplicarem noções intuitivas a uma dada situação que usualmente não seria resolvida por essa estratégia. |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 09 | Calsa (2004) | BRA | Vergnaud<br>Inhelder e Piaget | Analisar a influência de uma abordagem de ensino no desempenho de alunos em problemas multiplicativos. | Alunos de 4ª série foram organizados em dois grupos, um deles submetido à intervenção psicopedagógica de abordagem construtivista. | A variação da posição da incógnita não exerceu influência sobre o desempenho.<br>A intervenção psicopedagógica contribuiu para o aumento do número de acertos e modificação de estratégias. |
| 10 | Meneghetti e Nunes (2005) | BRA | Kilpatrick<br>D`Ambrosio | Avaliar material didático para o ensino dos números racionais. | Alunos de 5ª série foram submetidos a um pré-teste, a partir de situações-problemas; e à intervenção de um pesquisador durante 23 aulas, utilizando quatro *kits* pedagógicos (compostos de atividades e materiais manipuláveis), abordando a ideia intuitiva de fração, conceitos de equivalência e as operações fundamentais e pós-teste com as mesmas questões. | Os alunos apresentaram melhor desempenho no pós-teste.<br>O trabalho de intervenção apoiado pelo material didático foi decisivo para o melhor desempenho no pós-teste. |
| 11 | Escolano e Sállan (2005) | SPA | Kieren<br>Freudenthal<br>Brosseau | Analisar uma estratégia didática para o ensino de frações. | 160 alunos, de 4º ano, resolveram 30 situações-problemas de medição - durante 23 sessões, com intervenção de seus professores a partir da reflexão coletiva sobre os erros.<br>E produziram textos apresentando suas percepções sobre os conceitos e os procedimentos. | Essa estratégia propiciou a superação dos obstáculos didáticos ocasionados pelo ensino a partir do significado – parte-todo (são eles: as frações impróprias não existem; o todo da unidade não é um número; não se precisa de um novo conjunto numérico).<br>Essa estratégia de ensino requer mais aulas, se comparada com a estratégia a partir do significado parte-todo. |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | Silva, A. (2005) | BRA | Brosseau Chevallard | Analisar uma proposta de formação para professores de 5ª série para o ensino de números fracionários. | 8 professores responderam a um questionário; participaram de 29 encontros de formação; elaboraram mapas conceituais no início e ao final da formação, tendo como palavra-chave: fração; elaboraram e aplicaram, em suas salas de aula, sequências didáticas elaboradas durante os encontros; e produziram um relatório sobre a experiência da formação. | As sequências didáticas construídas apresentaram tarefas, na sua maioria, envolvendo o significado parte-todo. Foram observadas mudanças no discurso desses professores, principalmente sobre a aprendizagem de seus alunos e a maneira de observá-los em ação. A formação explicitou a necessidade de os professores desenvolverem autonomia e reflexão sobre o conteúdo matemático e suas práticas docentes. |

Dos sujeitos que participaram desses estudos, 75% eram alunos do Ensino Fundamental e 25%, professores.

Quanto ao método, evidencia-se o uso predominante do modelo experimental clássico, com grupo controle submetido a pré e pós-testes e grupo experimental submetido a pré-teste, intervenção e pós-teste. Constataram-se diferenças quanto à natureza das tarefas, que variaram do tipo escolar a atividades ditas contextualizadas, definidas como aquelas que apresentam um contexto simulando fatos e/ou acontecimentos do dia a dia. O período de tempo das intervenções, como descrito nos estudos, apresentou uma variação muito grande: de 40 minutos a 87 horas. O procedimento descrito nesses estudos também foi variado: de aula expositiva dita *dialogada* – definida como sequências de ensino apresentando revisão conceitual, seguida de esclarecimentos em função da demanda do grupo – a oficinas apoiadas na utilização de materiais denominados *manipuláveis*. Em nenhum dos dois casos esses termos foram devidamente conceituados.

Os resultados desses estudos mostraram que as intervenções pautadas na resolução de problemas reais, definidos pelos autores como aqueles que são factíveis e significativos para os alunos e formulados a partir de experiências cotidianas, beneficiaram o progresso dos alunos: favoreceram a passagem de estratégias intuitivas – entendidas como aquelas criadas a partir de conhecimentos anteriores – às relações formais com significado, tanto para a divisão quanto para os racionais. Nesses casos, os autores afirmaram que os alunos avançaram gradativamente na compreensão dos conceitos, dos símbolos a eles relacionados e suas generalizações, alcançando níveis cada vez mais complexos de pensamento matemático e atingindo a abstração necessária numa etapa dita adequada a seu desenvolvimento cognitivo, social e cultural.

Os alunos submetidos à intervenção apoiada em situações significativas com a utilização da manipulação de material com representação pictórica, seguida de formalização –

isto é, observação sistemática das ações; discussão orientada para salientar regularidades conceituais; registro livre das principais conclusões; validação dos diferentes registros e registro das conclusões por meio da linguagem matemática –, foram capazes de estabelecer a relação parte-todo para quantidades discretas; utilizar o registro a/b com quantidades discretas; representar pictórica e simbolicamente a situação-problema com quantidades contínuas; dividir corretamente as áreas, garantindo a sua conservação, com quantidades contínuas; representar simbolicamente com a fração imprópria com base em uma representação com quantidades contínuas.

Em outras palavras, de um modo geral, esses estudos indicaram a eficácia dos procedimentos de intervenção adotados, uma vez que os sujeitos, considerando a diferença entre pré e pós-testes, demonstraram ser capazes de utilizar a representação a/b em diferentes situações, lidando, ora com grandezas discretas, ora com contínuas; e demonstrando a compreensão conceitual do significado do numerador e do denominador, bem como a noção de número racional intrínseca a essa representação formada por dois números inteiros.

Essas pesquisas também demonstraram ter havido progresso na compreensão da relação entre as unidades e seus decimais, através da superação da compreensão restrita da relação parte-todo em dois casos: nas intervenções em que se utilizaram situações de medição, isto é, nas atividades envolvendo a utilização de instrumentos de medida e registro livre dos resultados; e nas intervenções em que foi utilizada a divisão não exata, ou seja, nas situações que exigiam, para a sua resolução, a divisão de dois números naturais seguida de registro livre do resto obtido. Segundo os autores, os alunos passaram a compreender que se tratava de um número não natural com representação própria, segundo o sistema de numeração decimal com subunidades.

Os estudos que relataram intervenções junto a professores mostraram que, de um modo geral, não foram observadas mudanças em sua prática de ensino após a intervenção. Para que tal mudança tivesse ocorrido, os autores argumentam que teria sido necessário um tempo prolongado de participação no que eles denominam de encontros de formação. Nada é dito sobre o desenvolvimento psicológico dos adultos que são o professor e a professora.

## Discussão Geral

Pode-se dizer, por meio desta análise bibliográfica, que há uma convergência teórica nas pesquisas focadas na divisão e nos racionais, com predomínio da teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud e da teoria dos subconstrutos dos números racionais. Do ponto de vista metodológico, foi evidenciado que a tendência geral é a proposta de resolução e problemas com alunos do Ensino Fundamental e a adoção da análise qualitativa dos dados obtidos.

Apesar da predominância da referência à teoria dos campos conceituais, evidenciou-se que poucos estudos apresentavam, como propõe Vergnaud (1990), uma interação entre os componentes do tripé – situações, invariantes e representações – para a construção de conceitos referentes à divisão e aos números racionais. Ficou clara essa interação em um dos estudos analisados, no qual os conceitos foram abordados a partir da explicitação do conjunto das situações, por meio de problemas que contemplam os cinco significados da fração, o conjunto de invariantes – equivalência, ordem, objetos, propriedades e relações e o conjunto de representações – a/b, com a e b naturais e b diferente de zero, pictórica e decimal (Santos, 2005).

Os estudos que adotaram a Teoria dos Registros de Representação Semiótica como aporte teórico apresentam um aspecto comum: eles não a retomam para aprofundamento, nem em referência aos resultados, nem na sua discussão.

Vários estudos fizeram referência à importância dos problemas reais, entendidos, como já dissemos, a partir das contribuições da Educação Matemática Realista de Hans Freudenthal (1991). No entanto, esta análise evidenciou que predominaram, nas atividades propostas para as situações de intervenção e nos pré e pós-testes, aquelas do tipo escolar, em forma de pergunta, para as quais se espera uma resolução expressa pelo registro da operação correspondente, sem vinculação a um campo conceitual particular, como nos estudos de Anghileri; Beishuizen; Putten (2002); Charles; Nason (2000); Escolano; Sállan (2005); Keijzer; Terwel (2001); Sharp; Adams (2002); e Silva, M. (2005), por exemplo.

As teses referentes à Etnomatemática (D´Ambrosio, 2001) foram referidas nos estudos com o intuito de discutir a coexistência das "matemáticas" nas diferentes culturas, em oposição ao paradigma dominante da Matemática ocidental (Meneghetti; Nunes, 2005; Sharp; Adams, 2002; Silva, A. 2005).

Nos estudos da segunda categoria de análise, aqueles referentes à intervenção, evidenciou-se o predomínio de um procedimento desenvolvido em poucas horas, focado, sobretudo, na explanação, em geral sintética e centrada na divisão e nos racionais, sem referência ao campo conceitual envolvido (ver Tabela 2).

## Conclusão

Embora esta análise tenha revelado diversidades no que diz respeito aos métodos adotados nos estudos, o que dificulta a discussão conclusiva, é inegável que existe uma produção importante de dados. Assim, mesmo que nem sempre explícitos nos estudos, com base na experiência como pesquisadoras, podem-se deduzir alguns aspectos que sugerem questões importantes, a partir dos quais se pode avançar no que se refere à pesquisa e à construção do campo conceitual no qual se inserem a divisão e os números racionais.

A primeira delas diz respeito à importância da compreensão da lógica do sistema numérico decimal compreender a lógica do algoritmo da divisão e dos números racionais. Nesse caso, como outros autores já apontaram, o uso de atividades envolvendo os instrumentos de medidas e a articulação entre o uso desses instrumentos, a representação da sequência numérica dos próprios instrumentos, a possibilidade de operar com essa sequência e a sua notação devem ser levados em conta nas pesquisas de intervenção que visam à aquisição de novas competências numéricas. Como defende Fávero (2005, 2007, 2009b), esse é um procedimento que, do ponto de vista do desenvolvimento psicológico, é compatível com os argumentos clássicos de Piaget e Vygotsky, no que se refere à descentração e à zona de desenvolvimento proximal: a escolha de situações-problemas, envolvendo os sistemas de medidas e a utilização de diferentes instrumentos de medida, permite estabelecer comparações de objetos no tempo e a distância, com uma precisão que ultrapassa as habilidades perceptuais da pessoa. O trabalho de Pina Neves (2008) evidencia a pertinência dessa tese.

Pode-se dizer, pela presente análise bibliográfica, que raramente isso é levado em conta na prática de ensino, como também evidenciaram, por exemplo, os trabalhos de Connor (2001); Fávero; Pimenta (2006); Fávero; Soares (2002); Merlini; Magina; Santos; Moutinho (2005), Saxe; Gearhart; Nailah (2001).

A segunda questão refere-se à prática de sala de aula: em geral, os autores apontam para uma prática ainda restrita à exposição e às regras, em detrimento do conceito; e, consequentemente, voltada à memorização, em detrimento do raciocínio. Em outros termos, na sala de aula, predomina a ideia de *transmissão* nos processos comunicacionais, conforme já discutido por Fávero (2005, 2007, 2009). Por isso mesmo, pode-se indicar um consenso importante nesta revisão: a importância do papel do professor e, consequentemente, a importância da sua formação.

Tem-se insistido nesse aspecto não apenas em relação aos professores de matemática, mas também em relação aos pedagogos e aos psicólogos que atuam na educação formal (Fávero; Pina Neves, 2009, 2011).

Ora, articulando essas duas considerações – aquela referente à compreensão da lógica do sistema numérico decimal e aquela referente à formação do professor e do profissional que atua na educação, assim como suas respectivas práticas –, é possível remeter ao que já foi evidenciado nas conclusões de estudos de Fávero e Soares (2002) e Fávero e Pimenta (2006): o meio escolar vem mantendo uma compreensão limitada do sistema numérico, das quatro operações e, consequentemente, dos algoritmos formais a elas associados.

Cabe, então, chamar a atenção para dois outros aspectos relevantes: em primeiro lugar, que o procedimento de uma situação de resolução de problema só tem significado em relação ao aporte conceitual no qual essa situação se insere; em segundo lugar, para que isso seja levado em conta, o professor deve ter construído certas competências. Pode-se, nesse sentido, distinguir pelo menos duas delas, intimamente relacionadas: aquela que diz respeito à sua competência na área de conhecimento em que atua e aquela que lhe permite desempenhar o papel de mediador desse conhecimento.

Do ponto de vista da prática em sala de aula, isso pressupõe o que já foi insistido por Fávero (2005): ultrapassar a ideia de *transmissão* nos processos comunicacionais para adotar a ideia de *interlocução,* o que implica considerar a interação entre um especialista — o professor — e um novato — o aluno — nas situações em que este não dispõe de todas as competências necessárias.

O que se considerou até aqui — sobretudo, a ideia defendida no parágrafo anterior — remete a duas questões que não foram abordadas em nenhum dos estudos revistos. A primeira diz respeito ao desenvolvimento psicológico do adulto, o professor e a professora. A segunda refere-se à relação entre gênero e mediação semiótica, uma questão de ponta que se insere na discussão mais ampla sobre a equidade de gênero no acesso às áreas de ciência e tecnologia, que, como se sabe, mantém a matemática como um filtro (Fávero, 2010a; Gonzalez-Pienda et al., 2006).

Ora, como salientado por Fávero (2001, 2007, 2010a) – que retoma Piaget (1977), especialmente sua Tomada de Consciência –, ambas as questões pressupõem uma reformulação teórico-conceitual que fundamente uma reelaboração de significados, de tal modo que isso repercuta nos modos de mediação do conhecimento matemático e na sua aquisição. Como defende essa autora, está em jogo, portanto, a formação dos professores, do ponto de vista das suas competências conceituais na área da matemática, como de sua competência crítica no que se refere ao acesso ao conhecimento e às questões relativas à cidadania (Fávero, 2009b).

Assumir essa tese, com base na formação dos professores, implica considerar ambos, a capacidade do adulto para o pensamento pós-formal e o consenso teórico que o considera como construtor ativo de verdades múltiplas e polissêmicas; implica, assim, assumir que ser adulto significa estar em desenvolvimento em um universo do desenvolvimento do pensamento coletivo, em um meio de mediação semiótica (Fávero, 2012).

É esse o desafio que se defende para o desenvolvimento de pesquisas sobre a divisão e os números racionais, seja com estudantes, seja com professores, professoras e outros profissionais ligados à educação e ensino:

> Desenvolver um procedimento de intervenção segundo uma dimensão desenvolvimental significa intervir nas operações de regulação de tal modo que o processo de produção seja revisto pelo indivíduo, em função do campo conceitual particular, e que isto resulte na reelaboração das ações e produtos. O que estamos defendendo é que, para se avançar, tanto teórica como metodologicamente, isto implica a adoção de um modelo de análise que explicite os dois componentes de uma intervenção: de um lado, o processo de tomada de consciência, por parte dos sujeitos envolvidos, da relação entre os próprios processos de regulação cognitiva, suas produções e um campo conceitual específico de conhecimento; e, de outro lado, o processo de tutoramento viabilizado por um procedimento particular de interação. Ou seja: estamos propondo que os trabalhos junto a professores considerem a dimensão desenvolvimental que está implícita e explicitem os dois tipos de dados: aqueles que podem nos dar pistas do processo de reconstrução do sujeito adulto; e aqueles que podem nos fornecer pistas sobre as variáveis que intervêm na direção tomada por esta reconstrução (Fávero, 2001, p. 194).

## Referências

ABREU, C. C. F.; MORGADO, L. M. de A. Análise de estratégias de resolução em problemas verbais de divisão: estudo exploratório. *Revista Portuguesa de Pedagogia,* v. 33, n. 1, p. 67-82, 1999.

ANGHILERI, J. A study of progression in written calculation strategies for division. *Support for learning*, v. 16, n. 1, p. 17-22, 2001.

ANGHILERI, J.; BEISHUIZEN, M.; PUTTEN, V. K. From informal strategies to structured procedures: mind the gap. *Educational Studies in Mathematics*, v. 49, p. 149-170, 2002.

BEZERRA, F. J. B. *Introdução do conceito de número fracionário e de suas representações* – uma abordagem criativa para a sala de aula. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2001.

BIANCHINI, B. L. *Estudo sobre a aplicação de uma seqüência didática para o ensino dos números decimais.* Tese (Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. Brasília, DF, 1997.

BRITO, M. R. F. Este problema é difícil porque não é de escola! A compreensão e a solução de problemas aritméticos verbais por crianças da escola fundamental. *Temas em Psicologia,* v. 8, n. 1, p. 93-109, 2000.

BRITO, M. R. F.; LIMA, V. S. Mapeamento cognitivo e a formação do conceito de frações. In: BRITO, M. R. F. (Org.). *Psicologia da Educação Matemática* – teoria e pesquisa, Florianópolis: Insular, 2001. p. 107-121.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.

BROUSSEAU, G. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA C.; SAIZ, I. (Org.). *Didática da matemática:* reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 48-72.

BRYANT, P.; NUNES, T. *Crianças fazendo matemática,* Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

CALSA, G. C. *Intervenção psicopedagógica e problemas aritméticos no ensino fundamental.* Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

CAMPOS, E. M. Aprender frações... Sim, mas como? Quando? *Ciências e Letras,* n. 5, p. 187-200, 2004.

CARRAHER, D. W. Relações entre razão, divisão e medida. In: SCHLIEMANN, A. L. D.; CARRAHER, D. W. (Org.). *A compreensão de conceitos aritméticos. Ensino e Pesquisa.* Campinas: Papirus, 2003. p. 73-94.

CASTELA, S. A. *Divisão de números naturais:* concepções de alunos de 6ª série. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.

CHAHON, M. O uso da metacognição no ensino fundamental de matemática: uma proposta de intervenção. *Arquivos Brasileiros de Psicologia,* v. 51, n. 3, p. 52-59, 1999.

CHARLES, K.; NASON, R. Young children´s partitioning strategies. *Educational Studies in Mathematics*, n. 43, p. 191-221, 2000.

CONNOR, M. C. Can any fraction be turned into a decimal? A case study of a mathematical group discussion. *Educational Studies in Mathematics*, n. 46, p. 143-185, 2001.

CORREA, J. A compreensão inicial do conceito de divisão partitiva em tarefas não-computacionais. In: NOVAES, M. H.; BRITO, M. R. F. (Org.). *Psicologia na educação*: articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica. Rio de Janeiro: ANPEPP, 1996.

CORREA, J. A influência dos modos de divisão partitiva e por quotas nos procedimentos de cálculo oral utilizados por crianças. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA — SOCIEDADE BRASILEIRA DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., (Org.). *Anais:* trabalhos completos. Curitiba: Editora da UFPR, 2001. p.71-79.

CORREA, J.; MEIRELES, E. de S. A compreensão intuitiva da criança acerca da divisão partitiva de quantidades contínuas. *Estudos de Psicologia*, v. 5, n. 1, p. 11-31, 2000.

CUNHA, M. R. K. *A quebra da unidade e o número decimal:* um estudo diagnóstico nas primeiras séries do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2002.

D´AMBROSIO, U. *Etnomatemática. Elo entre as tradições e a modernidade.* Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnements cognitifs de la pensée. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives* — IREM-ULP, Strasbourg, v. 5, p. 37-65, 1993.

ESCOLANO, R.; SÁLLAN, J. M. G. Modelos de medida para la enseñanza del número racional en educación primaria. *Revista Iberoamericana de Educacion Matemática*, n. 1, p. 17-35, 2005.

FÁVERO, M. H. Regulações cognitivas e metacognitivas do professor: uma questão para a articulação entre a psicologia do desenvolvimento adulto e a psicologia da educação matemática. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA — SOCIEDADE BRASILEIRA DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1. (Org.). *Anais:* trabalhos completos. Curitiba: Editora UFPR, 2001. p. 187-197.

FÁVERO, M. H. Psicologia e conhecimento. Subsídios para a análise do ensinar e aprender. Brasília: EDUnB, 2005.

FÁVERO, M. H. Paradigme personnel et champ conceptuel:implications pour les situations didactiques. In: MERRI, M. (Org.). Activité Humaine et Conceptualisation, Toulouse, França: Presses Universitaires du Mirail, 2007. p. 625-634.

FÁVERO, M. H. La psicología del conocimiento y la construcción de competencias conceptuales en la escuela. Revista Internacional Magistério, v. 7, n. 39, p. 18-22, jun./jul. 2009a.

FÁVERO, M. H. Os fundamentos teóricos e metodológicos da psicologia do conhecimento. In: FÁVERO, M. H.; CUNHA, C. da. (Org.). Psicologia do conhecimento. O diálogo entre as ciências e a cidadania, Brasília: UNESCO; Liber Livro, 2009b. p. 9-20.

FÁVERO, M. H. Mediação de conhecimento e gênero: uma hegemonia partilhada. In: GUÉRIOS, Ettiène; STOLTZ, Tania (Org.). Educação e alteridade. São Carlos, SP: Edufscar, Editora da Universidade Federal de São Carlos, 2010a. p. 179-194.

FÁVERO, M. H. Psicologia do gênero. Psicobiografia, Sociocultura e Transformações. Curitiba: Editora da Universidade Federal do Paraná, 2010b.

FÁVERO, M. H. A Pesquisa de intervenção na construção de competências conceituais. Psicologia em Estudo, Maringá, v. 17, n. 1, p. 103-110, 2012. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413>. Acesso em: 10 maio 2012.

FÁVERO, M. H.; PIMENTA, M. L. Pensamento e linguagem: a língua de sinais na resolução de problemas. Psicologia: Reflexão & Crítica, Porto Alegre, v. 19, n. 2, p. 225-236, 2006.

FÁVERO, M. H.; PINA NEVES, R. S. Competências para resolver problemas e para analisar a resolução de problemas. Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional (ABRAPEE), v. 13, n. 1, jan./jun., p. 113-124, 2009.

FÁVERO, M.H.; PINA NEVES, R. S. La intervención psicopedagógica como opción teórico-metodológica para la formación inicial de profesores de matemática. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, n. 28, p. 99-116, dic. 2011. Disponível em: <http://www.fisem.org/web/union/>. Acesso em: 10 jun. 2012.

FÁVERO, M. H.; SOARES, M. T. C. Iniciação escolar e a notação numérica: uma questão para o estudo do desenvolvimento adulto. Psicologia: Teoria e Pesquisa, v. 18, n. 1, p. 43-50, 2002.

FÁVERO, M. H.; SOUSA, C. M. S. G. A resolução de problemas em Física: revisão de pesquisa, análise e proposta metodológica. Investigações em Ensino de Ciências, v. 6, n. 2, p. 143-196, 2001.

FERREIRA, E. Um percurso na aprendizagem do conceito de divisão no 1º ciclo. In: GRUPO DE TRABALHO DE INVESTIGAÇÃO (Org.). O professor e o desenvolvimento curricular. Lisboa: APM, 2005. p. 113-137.

FERREIRA, S. P. A.; LAUTERT, S. L. A tomada de consciência analisada a partir do conceito de divisão: um estudo de caso. Psicologia: Reflexão e Crítica, v. 16, n. 3, p. 547-554, 2003.

FONSECA, F. L. A divisão de números racionais decimais: um estudo exploratório junto a alunos de 6ª série. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.

FREUDENTHAL, H. Revisiting Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

GONZALEZ-PIENDA, J. A.; NÚÑEZ, J. C.; SOLANO, P.; SILVA, E. H.; ROSÁRIO, P.; MOURÃO, R.; VALLE, A. Olhares de gênero face à matemática: uma investigação no ensino obrigatório espanhol. *Estudos de Psicologia,* v. 11, n. 2, p. 135-141, 2006.

JESUS, A. M. Construir o conceito da divisão, resolvendo problemas: um estudo de caso. In: GRUPO DE TRABALHO DE INVESTIGAÇÃO (Org.). *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM, 2005. p. 91-111.

JOSEPH, L. M.; HUNTER, A. D. Differential application of cue card strategy for solving fraction problems: exploring instructional utility of the cognitive assessment system. *Child Study Journal*, v. 31, n. 2, p. 123-136, 2001.

KEIJZER, R.; TERWEL, J. Audrey´s acquisition of fractions: A case study into the learning of formal mathematics. *Educational Studies In Mathematics*, v. 7, p. 53-73, 2001.

KIEREN, T. E. Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal developmemt. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. *Number concepts and operations in the middle grades*. New Jersey: Erlbaum, 1988. p. 162-180.

LAUTERT, S. L. *Como as crianças lidam com as relações inversas em problemas de divisão.* Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2005.

LAUTERT, S. L.; SPINILLO, A. G. Como crianças representam a operação de divisão: da linguagem oral para outras formas de representação. *Temas em Psicologia*, v. 7, n. 1, p. 23-36, 1999.

LAUTERT, S. L.; SPINILLO, A. G. As relações entre o desempenho em problemas de divisão e as concepções de crianças sobre a divisão. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, v. 18, n. 3, p. 237-246, 2002.

LI, Y.; SILVER, A. E. Can young students succeed where older students fail? An examination of third graders´solutions of a division-with-remainder (DWR) problem. *Journal of Mathematical Behavior*, v. 19, p. 233-246, 2000.

MAGINA, S. M. P.; CAMPOS, T. M. M.; NUNES, T. A fração do ponto de vista do professor não especialista: conceitos e estratégias de ensino. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., de 17 a 22 de julho, Porto. ASSOCIAÇÃO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA (Org.). *Anais:* Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática: trabalhos completos. Porto: Gabinete de Edição da APM - Associação dos Professores de Matemática, 2005. p.1-9.

MAGINA, S. M. P.; CAMPOS, T. M. M.; SANTOS, A. dos; MERLINI, V. L.; RODRIGUES, W.; DAMICO, A.; SILVA, A.; MOUTINHO, L. V.; CANOVA, R. Frações: do prognóstico dos professores à realidade dos alunos. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., de 17 a 22 de julho, Porto. ASSOCIAÇÃO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA (Org.). *Anais:* Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática: trabalhos completos. Porto: Gabinete de Edição da APM - Associação dos Professores de Matemática, 2005. p. 10-22.

MENEGHETTI, R. C. G.; NUNES, A. C. A. Atividades lúdicas e experimentais para o ensino de frações incorporadas a uma proposta pedagógica. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., de 17 a 22 de julho, Porto. ASSOCIAÇÃO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA (Org.). *Anais:* Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática: trabalhos completos. Porto: Gabinete de Edição da APM - Associação dos Professores de Matemática, 2005. p. 34-41.

MERLINI, V. L. *O conceito de fração em seus diferentes significados:* um diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

MERLINI, V. L.; MAGINA, S. M. P.; SANTOS, A. dos; MOUTINHO, L. V. Fração: o significado quociente para professores e estudantes - um estudo comparativo. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., de 17 a 22 de julho, Porto. ASSOCIAÇÃO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA (Org.). *Anais:* Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática: trabalhos completos. Porto: Gabinete de Edição da APM - Associação dos Professores de Matemática, 2005. p.23-33.

MIX, K. S.; LEVINE, S. C.; HUTTENLOCHER, J. Early fraction calculation ability. *Developmental Psychology*, v. 35, n. 5, p. 164-174, 1999.

MORO, M. L. F. Aprendizagem construtivista de estruturas aditivas e multiplicativas na iniciação matemática. *Temas em Psicologia*, v. 7, n. 3, p. 263-282, 1999.

MORO, M. L. F. Notações da matemática infantil: igualar e repartir grandezas na origem das Estruturas Multiplicativas. *Psicologia: Reflexão e Crítica, v.* 17, n. 2, p. 251-266, 2004.

MORO, M. L. F. Estruturas multiplicativas e tomada de consciência: Repartir para dividir. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, v. 21, n. 2, p. 217-226, 2005.

MOSKAL, B. M.; MAGONE, M. E. Making sense of what students know: examining the referents, relationships and modes students displayed in response to a decimal task. *Educational Studies Mathematics*, v. 43, p. 313-335, 2000.

NEUMAN, D. Early learning and awareness of division: a phenomenographic approach. *Educational Studies in Mathematics*, v. 40, p. 101-128, 1999.

NOTARI, A. M. *Simplificações de frações aritméticas e algébricas:* um diagnóstico comparativo dos procedimentos. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

PIAGET, J. *A tomada de consciência.* São Paulo: Melhoramentos; Editora da Universidade de São Paulo, 1977.

PIAGET, J. *Fazer e compreender*. Tradução de: Christina L. de Paula Leite. São Paulo: Melhoramentos; Editora da Universidade de São Paulo, 1978.

PINA NEVES, R. S. *A divisão e os números racionais:* uma pesquisa de intervenção psicopedagógica sobre o desenvolvimento de competências conceituais de alunos e professores. Tese (Doutorado em Psicologia) — Instituto de Psicologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2008.

PIRES, E. L. Meus registros para frações e decimais: entre o que eu penso e o que eu escrevo; entre o que eu escrevo e que você lê. *Dissertação (Mestrado)* — Universidade de Brasília, Brasília, 2004.

PRADO, E. P. de A. A escrita numérica fracionária. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., de 17 a 22 de julho, Porto. ASSOCIAÇÃO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA (Org.). *Anais:* Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática: trabalhos completos. Porto: Gabinete de Edição da APM - Associação dos Professores de Matemática, 2005. p.42-50.

ROBINSON, K. M.; ARBUTHNOTT, D. K.; GIBBONS, K. A. Adults' representations of division facts: a consequence of learning history? *Canadian Journal of Experimental Psychology, v.* 56, n. 4, p. 302-309, 2002.

ROBINSON, M. K.; NINOWSKI, E. J. Adults´Understanding of inversion concepts: How does performance on addition and subtraction inversion problems compare to performance on multiplication and division inversion problems? *Canadian Journal of Experimental Psychocoly,* v. 57, n. 4, p. 321-330, 2003.

SAIZ, I. Dividir com dificuldade ou a dificuldade de dividir. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.). *Didática da matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 11-25.

SANTOS, A. O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atual no ensino fundamental. *Dissertação* (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

*SAXE*, G. B.; GEARHART, M.; NA´ILAH, S. N. Enhancing students´understanding of mathematics: A study of three contrasting approaches to professional support. *Journal of Mathematics Teacher Education,* v. 4, p. 55-79, 2001.

SELVA, A. C. V. Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas de divisão. In: SCHLIEMANN, A. L. D.; CARRAHER, D. W. (Org.). *A compreensão de conceitos aritméticos:* ensino e pesquisa. Campinas: Papirus, 2003. p. 95-119.

SHARP, J.; ADAMS, B. Children´s constructions of knowledge for fraction division after solving realistic problems. *The Journal of Educational Research,* v. 5, p. 333-347, 2002.

SILVA, A. R. H. S. A concepção do professor de matemática e dos alunos frente ao erro no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais. *Dissertação* (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2005.

SILVA, M. J. F. Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série. *Tese* (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SPINILLO, A. G. O papel de intervenções específicas na compreensão da criança sobre proporção. *Psicologia: Reflexão e Crítica*, v. 15, n. 3, p. 475-487, 2002.

SPINILLO, A. G.; LAUTERT, S. L. Definindo a divisão e resolvendo problemas de divisão: as múltiplas facetas do conhecimento matemático. In: Simpósio brasileiro de psicologia da educação matemática, 1. Sociedade brasileira de psicologia da educação matemática, sociedade brasileira de educação matemática (Org.). *Anais:* trabalhos completos. Curitiba: Editora da UFPR, 2001. p. 61-68.

SQUIRE, S.; BRYANT, P. From sharing to dividing. The development of children's understanding of division. *Developmental Science*, v. 5, n. 4, p. 452-466, 2002a.

SQUIRE, S.; BRYANT, P. The Influence of Sharing on Children´s Initial Concept of division. *Journal of Experimental Child Psychology,* v. 81, p. 1-43, 2002b.

STAREPRAVO, A. R. A resolução de problemas de estrutura multiplicativa por crianças da 3ª série do ensino fundamental. *Dissertação* (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2001.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. Recherches en *Didactique des Mathématiques,* v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.