

Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: reflexões para o ensino de matemática¹

Maíza Lamonato e Cármen Lúcia Brancaçhion Passos***

Resumo: A resolução de problemas é tema central, quando o assunto é ensinar Matemática nos diversos níveis de escolaridade. Por sua vez, a exploração-investigação matemática, no contexto brasileiro, tem despertado crescente interesse em pesquisadores e professores que ensinam Matemática. Contudo, tanto uma como outra são apresentadas sob diversos entendimentos e possibilidades, permitindo novas discussões e reflexões. Este artigo analisa aproximações e distanciamentos entre resolução de problemas e exploração-investigação matemática, apontando contribuições de ambas para a Matemática escolar. Tomando como objeto de discussão a literatura de educação matemática, tais aproximações ou distanciamentos são delineados à medida que são discutidos os diversos entendimentos para as duas abordagens. As contribuições para o ensino de Matemática dependem das possibilidades geradas na sala de aula, e tanto a resolução de problemas quanto a exploração-investigação matemática podem ser promissoras para a construção de conhecimentos, mas não para sua apropriação como algo pronto e acabado.

Palavras-chave: Resolução de problemas; exploração-investigação matemática; ensino de matemática.

Discussing problem solving and mathematical exploration-investigation: reflections on the teaching of mathematics

Abstract: Problem solving is a central theme when it comes to teaching mathematics at the various schooling levels. In the Brazilian context, mathematical exploration-investigation, in turn, has become a subject of increasing interest among researchers and teachers of mathematics. However, these two approaches are presented from a variety of standpoints, allowing for new discussions and reflections. This paper analyzes the closeness as well as the distance between problem solving and mathematical exploration-investigation, identifying their contributions to school mathematics. Taking as the object of discussion the literature on mathematics education, such closeness or distance are outlined as the various understandings of the two approaches are discussed. The contributions to mathematics education depend on the possibilities generated in the classroom, and both problem solving and

¹ Este artigo tem como referência a dissertação de Mestrado e a tese de Doutorado da primeira autora, orientadas pela segunda, defendidas, respectivamente, em 2007 e 2011, no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), em São Carlos, SP.

* Doutora em Educação: Processos de Ensino e de Aprendizagem na UFSCar. Professora na rede municipal de Ribeirão Preto e no Departamento de Metodologia de Ensino da UFSCar, em São Carlos, SP. maizalamonato@gmail.com

** Professora Doutora do Departamento de Teorias e Práticas Pedagógicas da UFSCar. Docente no Programa de Pós-Graduação em Educação da UFSCar. carmenpassos@mpc.com.br

mathematical exploration-investigation can be promising for building up knowledge, but not for learning something readymade and concluded.

Key words: Problem solving, mathematical exploration-investigations, teaching of mathematics.

Introdução

Há algum tempo a resolução de problemas² ocupa um lugar de destaque, quando o assunto é ensinar Matemática. No meio acadêmico, em inúmeras pesquisas ela é veiculada como objetivo de ensino e aprendizagem nos cursos superiores e na Educação Básica e também é um dos principais objetivos dos professores que ensinam Matemática, conforme recomendam diversos documentos curriculares. Por sua vez, no Brasil, a investigação matemática e, mais especificamente, a exploração-investigação matemática, por meio das aulas exploratório-investigativas, tem tido espaço crescente nas discussões sobre o ensino de Matemática, conforme pode ser observado em diversas pesquisas de pós-graduação brasileiras, das quais destacamos, por exemplo, Abreu (2008), Bertini (2009), Castro (2004), Costa (2008), Déchen (2008), Gomes (2007), Lamonato (2007) e Lamonato (2011).

Para ampliar o debate a respeito dessas abordagens, neste artigo apresentaremos aspectos teóricos vindos da literatura em Educação Matemática e nossas interpretações, reflexões e questionamentos com vistas às contribuições de tais abordagens metodológicas para a Matemática escolar.

Faremos referência à Matemática escolar, entendendo esta expressão como a Matemática que se ensina na Educação Básica. Fiorentini (2005, p. 2), ao discutir três diferentes perspectivas do conhecimento matemático, afirma que “a matemática escolar se constitui com feição própria mediante um processo de interlocução com a matemática científica e com a matemática produzida/mobilizada nas diferentes práticas cotidianas”, acrescentando ainda que se trata de um conhecimento “mobilizado, transcriado ou produzido nas diferentes relações que se estabelecem no seio escolar”.

Objetivamos discutir a resolução de problemas e a exploração-investigação matemática em sala de aula com vistas à possibilidade de construção de conhecimentos, incluindo tanto aqueles específicos de Matemática quanto as atitudes perante esta ciência e as novas relações entre quem aprende e o objeto de conhecimento a ser aprendido. Nossas reflexões foram conduzidas a partir da seguinte questão: “Quais são as aproximações e os distanciamentos entre a resolução de problemas e a exploração-investigação matemática e as contribuições para a Matemática escolar”?

Em um primeiro momento, apresentaremos a perspectiva da inquirição que entendemos ser base da exploração-investigação matemática. Na sequência,

² Preferimos o uso das expressões *resolução de problemas* e *investigação matemática* com as iniciais grafadas em letras minúsculas. No entanto, manteremos a grafia de cada autor em suas respectivas citações.

discutiremos diversos entendimentos da resolução de problemas e da exploração-investigação matemática a partir da literatura. Posteriormente, apontaremos proximidades e distanciamentos dessas abordagens e as contribuições que avistamos para a Matemática escolar.

O uso da exploração-investigação matemática e parte dos entendimentos dados à resolução de problemas na sala de aula vão ao encontro do proposto por D'Ambrosio (1993, p. 36), ao defender vivência conjunta, por professor e aluno, das ações matemáticas necessárias à realização de uma dada tarefa:

Assim como no processo de construção da Matemática como disciplina, a essência do processo é a pesquisa, na construção do conhecimento para cada aluno, a essência do processo tem que ser a pesquisa. Dificilmente o aluno de Matemática testemunha a ação do verdadeiro matemático no processo de identificação e solução de problemas. O professor faz questão de preparar todos os problemas a serem apresentados com antecedência; conseqüentemente, o legítimo ato de pensar matematicamente é escondido do aluno, e o único a conhecer a dinâmica desse processo continua sendo o professor. O professor, com isso, guarda para si a emoção da descoberta de uma solução fascinante, da descoberta de um caminho produtivo, das frustrações inerentes ao problema considerado e de como um matemático toma decisões que facilitam a solução do problema proposto. O que o aluno testemunha é uma solução bonita, eficiente, sem obstáculos e sem dúvidas, dando-lhe a impressão de que ele também conseguirá resolver problemas matemáticos com tal elegância.

A exploração-investigação matemática, com base na perspectiva da exploração e da inquirição, como veremos na seção seguinte, possibilita ao aluno pensar a partir de uma dinâmica que prevê observações, descobertas, erros, acertos e, fundamentalmente, decisões. Essa, em síntese, é a essência da exploração-investigação matemática que entendemos para a Educação Básica e também para a formação de professores³, uma vez que, por tratar-se de questões ou situações abertas, cabe, a quem está interessado em investigar, a tomada de decisões sobre o percurso a seguir.

A perspectiva da exploração e inquirição e algumas implicações na prática pedagógica

A perspectiva da inquirição, segundo nosso entendimento, mantém estreito vínculo com a exploração-investigação matemática no ensino. A ligação entre elas parece-nos evidente nas formas pelas quais ambas consideram a construção do conhecimento matemático por quem aprende Matemática: as dúvidas, os erros e os questionamentos promovem sua construção. Dessa maneira, a construção do conhecimento é entendida como algo que se dá pela superação de incertezas, por

³ Evidentemente não excluímos a exploração-investigação matemática na formação dos demais profissionais. Entretanto, pelos autores aqui citados e pelos nossos trabalhos de pesquisa, limitamo-nos a apontá-la como perspectiva metodológica para a Educação Básica e para a formação de professores polivalentes e de Matemática.

meio do questionamento e pela busca de respostas, e não como consequência certa do acúmulo de conhecimentos anteriores.

Algumas ideias desfavoráveis à Matemática podem ser expressas por muitas pessoas. Não é incomum presenciarmos depoimentos que afirmam que “a Matemática é difícil mesmo”, que “ela é só para alguns, os mais inteligentes”, “que alguns conteúdos não podem ser aprendidos porque não se têm pré-requisitos”. Ou, ainda, a Matemática entendida como a disciplina de certeza (Siegel; Borasi, 1994), como uma ciência pura, exata (Fonseca; Brunheira; Ponte, 1999), não dinâmica, mas, de certa maneira, já pronta e acabada. Concordamos com Schoenfeld (1992, p. 69) que estes aspectos desencadeiam crenças incorretas nos estudantes, que podem ser tais como “há somente um caminho correto para resolver qualquer problema matemático; matemática é uma atividade solitária feita por indivíduos em isolamento”.

Assim, a Matemática, vista como uma disciplina que se encerra em si mesma, que já está pronta e que deve ser *aprendida*, desqualifica-a enquanto ciência e campo de conhecimento e pesquisa, outorgando apenas a alguns o poder de conhecê-la e estudá-la. Dessa maneira, estaríamos reduzindo a Matemática, incluindo seu processo de construção, a uma Matemática estática, presente no currículo escolar, ainda entendendo este como um rol de conteúdos.

Por outro lado, necessitamos entender, compreender e tratar a Matemática como um processo, como uma ciência, de fato, que tem caráter de investigação, que é um conhecimento historicamente *em construção* e não somente *construído*.

Skagestad⁴ (1981), citado por Siegel e Borasi (1994, p. 203), afirma que “somente a dúvida e a incerteza podem prover um motivo para a procura de novo conhecimento”. Neste sentido, Siegel e Borasi (1994, p. 205) indicam algumas consequências do conhecimento como inquirição:

o conhecimento matemático é falível; o conhecimento matemático é criado através de um processo não-linear no qual a geração de hipóteses tem um papel chave; a produção do conhecimento matemático é um processo social que ocorre com a comunidade de prática; e o valor verdadeiro do conhecimento matemático é construído através de práticas retóricas.

Estes autores salientam a importância da dúvida, da incerteza e das hipóteses na construção do conhecimento matemático e afirmam que o conhecimento absoluto é falível e compatível com a ideia de que a verdade absoluta é uma ilusão (Siegel; Borasi, 1994).

Ao pensarmos a prática pedagógica, a perspectiva da inquirição contraria a simples apropriação do conhecimento através da transmissão e da memorização, requerendo sua construção por quem aprende. O foco da construção do conhecimento é o processo, que pode ser não linear e incerto, com importância dada ao erro, e não exclusivamente ao caminho mais curto e direto. Esta perspectiva vai ao encontro de um dos saberes necessários à prática educativa: “ensinar não é transferir

⁴ SKAGESTAD, P. *The Road of Inquiry*. New York: Columbia University Press, 1981.

conhecimento, mas criar possibilidades para sua produção ou a sua construção” (Freire, 1996, p. 22).

Um dos aspectos relevantes no processo de inquirição e exploração-investigação na sala de aula são as contribuições para as crenças, as concepções e as posturas dos alunos em relação à Matemática.

O efeito cumulativo, dia após dia, de exploração, na sala de aula, de diferentes tipos de tarefas conduz ao desenvolvimento de ideias implícitas nos alunos sobre a natureza da Matemática – sobre se a Matemática é algo de que eles podem pessoalmente compreender o sentido e quão longa e arduamente devem trabalhar para consegui-lo (Stein; Smith, 1998, p. 2).

Siegel e Borasi (1994) salientam que a inquirição entendida como prática social potencializa a meta da Matemática escolar, socializando os significados dados pelos estudantes para uma comunidade onde o professor é orientador e mediador.

Percebemos, então, a inquirição como uma prática que valoriza a construção de conhecimentos, não busca o acúmulo de pré-requisitos para atividades subsequentes nem depende destes exclusivamente. Assim, consideramos a exploração-investigação matemática, cuja base se encontra na perspectiva da inquirição, com papel fundamental no desenvolvimento curricular, que pode favorecer o ensino de Matemática ao longo de toda a escolaridade. Sob essa perspectiva, o ensino deve priorizar as posturas do estudante que se aproximem das de um pesquisador, pois elas o colocam como descobridor, como aquele que procura evidências, regularidades e semelhanças e, a partir desses dados, elabora suas hipóteses e conjecturas, vai em busca de descobertas, justificando-as e socializando na sua comunidade, caracterizando um processo de negociação nas diversas etapas.

Antes de nos referirmos especificamente à exploração-investigação matemática e à resolução de problemas, faremos uma discussão dos termos *tarefa* e *atividade* – visto que isso será importante na compreensão dessas ideias no decorrer desse texto –, que diversos autores utilizam com significados distintos.

Tarefa e atividade

Abordaremos nesta seção o conceito de *tarefa* e a distinção entre este e *atividade*, apoiando-nos em alguns autores que, como veremos adiante, tratam da investigação matemática em outros países. Não nos apegaremos ao termo “tarefa” como entendido no Brasil, como sinônimo de “lição de casa”.

De acordo com Christiansen e Walther (1986, p. 8),

As tarefas em si mesmas não contêm conceitos ou estruturas matemáticas. E atividade às cegas numa tarefa não assegura a aprendizagem que se pretende. A tarefa é interpretada sob a influência de muitos fatores e a atividade é condicionada pelas ações do professor, que são, uma vez mais, feitas e interpretadas sob a influência de atitudes e concepções do professor e do aluno respectivamente.

De modo complementar, para Cunha (2000, p. 3), a palavra “tarefa” vem do inglês *task*, que significa “a proposta de trabalho que o professor apresenta aos seus alunos, que, pelo seu lado, se envolvem em ‘atividade’ matemática para poder resolver”.

Nesse sentido, então, estamos considerando *tarefa* como a proposta – oral ou escrita – feita pelo professor. Cabe aos alunos, dessa forma, envolverem-se em *atividade*, porém nesse processo não estarão somente os alunos, mas estará com eles o professor, mesmo que, em dados momentos, os papéis sejam diferenciados.

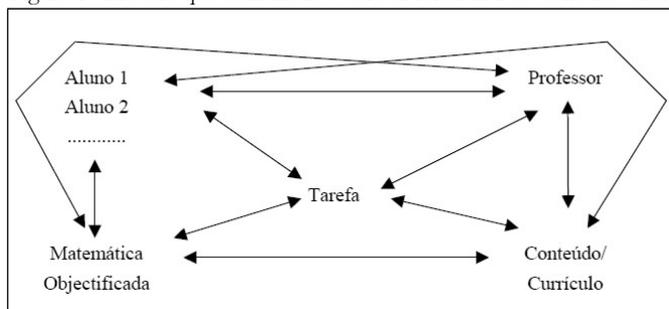
A análise e a exploração de uma tarefa pelo professor, segundo Christiansen e Walther (1986), não definem a ela seu grau de dificuldade e de abertura. Os fatores que ocorrem na sala de aula, como explicações, informações, sugestões e orientações do professor e, até mesmo, as relações estabelecidas pelos alunos com seus colegas também modificam o alcance e o processo de desenvolvimento da atividade a partir da tarefa.

A preparação da tarefa e suas características inerentes não garantem o envolvimento dos alunos na atividade matemática pretendida, uma vez que não é possível prever antecipadamente as ocorrências na sala de aula. A tarefa é apenas um dos diversos fatores que podem caracterizar a atividade.

Além disso, conforme Stein e Smith (1998), as tarefas matemáticas passam por três fases: a primeira é a maneira como elas aparecem nos materiais curriculares, a segunda é aquela que engloba as formas pelas quais a tarefa é planejada e apresentada pelo professor e, finalmente, a terceira fase refere-se a como elas acontecem na sala de aula. Isso implica a impossibilidade de classificar as tarefas de maneira absoluta, sem considerar o contexto e as interações entre os agentes durante a dinâmica na sala de aula. Essa particularidade reforça nossa perspectiva de discutir as aproximações e os distanciamentos entre resolução de problemas e exploração-investigação, considerando tanto as tarefas como as atividades decorrentes.

Christiansen e Walther (1986) apresentam a tarefa, considerando as relações indicadas na Figura 1, nas quais, implicitamente ilustrado, está o conceito de atividade. A “matemática objetificada” é, “como concebida pelos matemáticos e professores de matemática com uma grande formação matemática”, e “matemática como conteúdo/currículo” é a “descrição oficial dada pelas autoridades educacionais da disciplina de Matemática a ser ensinada na escola” (Christiansen; Walther, 1986, p. 8). Na Figura 1 estão representadas as relações binárias envolvidas no conceito de tarefa: professor-conteúdo/currículo, professor-aluno, professor/tarefa, etc.

Figura 1– Modelo que demonstra o caráter relacional do conceito tarefa



Fonte: Christiansen e Walther, 1986, p. 5

Uma vez que ocorrem relações entre tarefa e conteúdo; tarefa e professor; tarefa-conteúdo-professor; e assim por diante, acrescentamos explicitamente mais duas relações: tarefa-tarefa e aluno-aluno, pois o caráter relacional e as conexões entre duas ou mais tarefas podem ser componentes significativas para uma dada tarefa, da mesma forma que a relação entre dois ou mais alunos. Uma tarefa e a atividade decorrente estão relacionadas com as demais tarefas apresentadas pelo professor. Assim, reelaboramos o modelo apresentado por Christiansen e Walther:

Figura 2 – Adaptação do modelo que demonstra o caráter relacional do conceito tarefa

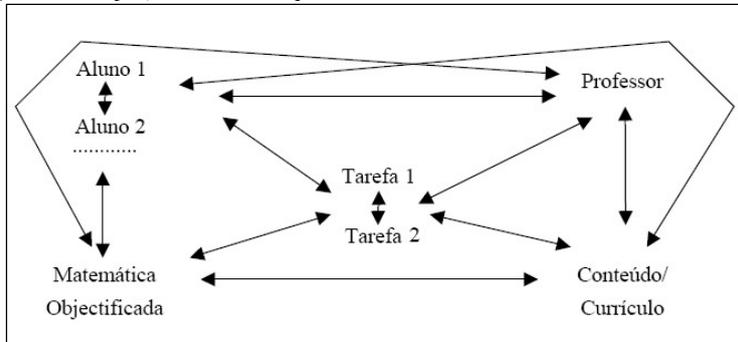


Figura elaborada pelas autoras deste texto

Além das relações indicadas nas Figuras 1 e 2, é importante ressaltar as influências de um grande número de aspectos: finalidades, conteúdos, métodos, avaliação, concepções dos alunos e professores a respeito do ensino e da aprendizagem de Matemática, além dos fatores sociais. A aprendizagem não é garantida pelas tarefas apresentadas, mas é influenciada pelas atitudes e pela atenção do aluno – seu interesse, sua motivação e suas concepções sobre a Matemática e sobre a aprendizagem. Outros fatores são as características da atividade do aluno, os processos que ele usa ou não durante a sua atividade, como, por exemplo, a reflexão sobre suas ações e sua aprendizagem (Christiansen; Walther, 1986).

A interação professor-aluno e os questionamentos que o professor pode fazer a seus alunos acreditamos que sejam fatores que podem contribuir ou não para

o desenvolvimento da atividade pretendida e para a conseqüente elaboração de conhecimento e, de certa forma, influenciar a elaboração/seleção de outras tarefas que venham a ser apresentadas. Alrø e Skovsmose (2006) dão importância à noção de “convite”, que se aproxima do nosso entendimento de tarefa. Cabe ao professor a busca e a promoção de caminhos que oportunizem aprendizagens para seus alunos, selecionando e elaborando tarefas e “convites”.

Em suma, podemos afirmar que a tarefa é a proposta de trabalho; e a atividade é representada pelas ações de quem se propõe a desenvolvê-la. Desse modo, perceberemos, mais adiante, que uma tarefa não garante que se pense em resolução de problemas ou em exploração-investigação matemática de forma absoluta.

Resolução de Problemas

A literatura de Educação Matemática tem apresentado diversos autores que, no estudo da resolução de problemas, categorizam-na sob diversos temas ou abordagens.

Ela é caracterizada nos currículos escolares, por Stanic e Kilpatrick (1989), em três temas: (1) resolução de problemas como contexto; (2) resolução de problemas como instrumento; (3) resolução de problemas como arte.

A “resolução de problemas como contexto” subentende os problemas como “meios para atingir fins” (Stanic; Kilpatrick, 1989, p. 8). Os referidos pesquisadores apontam cinco subtemas, a saber: (a) resolução de problemas como justificativa, ou seja, a resolução de problemas é justificativa para o ensino de Matemática; (b) resolução de problemas como motivação: os problemas constituem estímulo para o ensino de Matemática; (c) resolução de problemas como recreação: os problemas são propostos com a finalidade de divertir os alunos com a Matemática aprendida; (d) resolução de problemas como veículo: os problemas representam “um veículo através do qual um novo conceito ou um procedimento deve ser aprendido” (Stanic; Kilpatrick, 1989, p. 9); e (e) resolução de problemas como prática, que tem sido, de acordo com nossas experiências, de maior presença nas salas de aula, pois os problemas servem para reforçar procedimentos e conceitos já ensinados.

No tema “resolução de problemas como instrumento”, os problemas são vistos como competências “a serem ensinadas no currículo escolar” (Stanic; Kilpatrick, 1989, p. 9).

Finalmente, na “resolução de problemas como arte”, os alunos devem aprender a arte de resolver problemas. Neste tema, Stanic e Kilpatrick (1989) nomeiam Polya, enfatizando que, segundo este autor, a Matemática consiste em saber-fazer, e nisto está a capacidade de resolver problemas. Consideram que a resolução de problemas como arte é o tema mais difícil de ser implantado nas aulas. Porém, nos livros didáticos de Matemática, os trabalhos de Polya frequentemente são sintetizados apenas em passos para a resolução de problemas: compreensão do

problema; estabelecimento de um plano; execução do plano e retrospecto (Polya, 1994, p. xii-xiii).

Outra categorização da resolução de problemas é firmada por Mendonça (1999, p. 16) sob três maneiras diferentes: (1) como “objetivo”, quando “se ensina matemática para resolver problemas”, incidindo na exposição da teoria, para depois propor problemas que serão resolvidos pela aplicação da teoria ou dos procedimentos já explicados; (2) como “processo”, quando interessa o trabalho com as estratégias de solução; significa ter o foco nos processos heurísticos. Na sala de aula, isso implica trabalhar prioritariamente as estratégias de solução, de modo que os alunos tenham domínio dos processos ou procedimentos necessários para resolver um problema em Matemática. E (3) como “ponto de partida”, considerada, assim, como um “recurso pedagógico, apresentado no início do processo de aprendizagem”, interessando também o processo. Mendonça (1999) não apenas destaca os modos pelos quais a resolução de problemas pode ser entendida, mas salienta a necessidade, com a qual concordamos, de avançar além da resolução de problemas, para a formulação de problemas, tendo como foco, na atividade, o perguntar, o problematizar e o formular, aspectos esses que, conforme veremos na próxima seção, convergem com a exploração-investigação matemática.

Onuchic (1999, p. 206), referindo-se a Schroeder e Lester⁵ (1989), indica três modos diferentes de abordar a resolução de problemas, porém sobrepostos na prática: “ensinar sobre a resolução de problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar matemática através da resolução de problemas”. Segundo a autora, no primeiro caso, o professor ressalta os modelos de resolução com base em Polya ou variações deles. No segundo modo, a atenção do professor está voltada para a maneira como a Matemática é ensinada e como ela pode ser usada. Por último, no ensino de Matemática por meio da resolução de problemas, estes são vistos como ponto de partida para o ensino dessa disciplina. Assim, parte-se de um problema com vista à construção de conceitos e ao ensino de diversos conteúdos, incluindo até procedimentos.

De modo paralelo, Branca (1997, p. 4) apresenta três interpretações mais comuns para a resolução de problemas: (1) como uma “meta”: razão principal para estudar Matemática: “aprender a resolver problemas é a razão principal para estudar matemática” (Branca, 1997, p. 5); (2) como um “processo”: para a aplicação de conhecimentos adquiridos previamente a situações novas e desconhecidas: “o que é considerado importante nesta interpretação são os métodos, os procedimentos, as estratégias e as heurísticas” (Branca, 1997, p. 5); (3) como uma “habilidade básica”. Levando em conta diversas considerações sobre o que sejam habilidades básicas, Branca (1997, p. 10) afirma que “considerar a resolução de problemas como uma

⁵ SCHROEDER, T. L.; LESTER JR. F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). *New Directions for Elementary School Mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, 1989. (Year Book).

habilidade básica pode nos ajudar a organizar as especificações para o dia-a-dia de nosso ensino de habilidades, conceitos e resolução de problemas”. Em outras palavras, Diniz (2001) esclarece que a resolução de problemas entendida como uma “meta” implica que, após o terreno preparado, o aluno pode resolver problemas; como um “processo”, os enfoques são dados aos procedimentos ou passos para chegar à resposta, “o ensino centra-se em ensinar a resolver problemas, o que, como consequência, resultaria em aprender matemática” (Diniz, 2001, p. 88); a resolução de problemas como “habilidade básica” “deve ser entendida como uma competência mínima para que o indivíduo possa inserir-se no mundo do conhecimento e do trabalho” (Diniz, 2001, p. 88).

Diniz (2001, p. 89) chama a resolução de problemas de “perspectiva metodológica”, com o intuito de ampliá-la para além de uma “metodologia ou conjunto de orientações didáticas”. Para esta autora,

a Resolução de Problemas corresponde a um modo de organizar o ensino o qual envolve mais que aspectos puramente metodológicos, incluindo uma postura frente ao que é ensinar, e conseqüentemente, do que significa aprender [...] na Resolução de Problemas trata-se de situações que não possuem solução evidente e que exigem que o resolvidor combine seus conhecimentos e decida pela maneira de usá-los em busca da solução. (Diniz, 2001, p. 89).

Diniz (2001) ressalta que esta perspectiva transpassa os “problemas convencionais” apresentados ao final de determinado conteúdo: são claros, com enunciados precisos; correspondem à aplicação dos algoritmos; e sua solução – muitas vezes, única – consiste em traduzir a linguagem do enunciado e aplicar algoritmos. A resolução dos problemas convencionais com frequência é mecânica e seguida de exemplos.

Nos documentos curriculares brasileiros, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para os terceiros e quartos ciclos do Ensino Fundamental (Brasil, 1998), é dado destaque à valorização dos processos e à socialização dos resultados na resolução de problemas. “Resolver um problema pressupõe que o aluno: elabore um ou vários procedimentos de resolução (como realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses); compare seus resultados com os de outros alunos; valide seus procedimentos” (Brasil, 1998, p. 40).

Os problemas apresentados aos alunos devem estar de acordo com os objetivos do professor para tal tarefa. Schoenfeld (1996, p. 68-69) lista quatro propriedades dos problemas: (a) devem ser acessíveis e facilmente compreendidos, sem vocabulário pouco conhecido da maioria dos alunos; (b) devem poder ser resolvidos de diversas maneiras e oferecer múltiplas soluções, valorizando não a resposta, mas as conexões; (c) devem servir, assim como suas soluções, para a introdução de ideias matemáticas importantes; e (d) devem, se possível, ser como “germens para ‘honestas e boas’ explorações matemáticas”.

Além da resolução de problemas, cabem algumas considerações a respeito do que seja *problema*. As definições de *problema* são estreitamente relacionadas ao seu uso

na prática pedagógica, assim como a concepção de “resolver problema”. Alguns autores explicitam sua definição, e consideramos relevantes essas contribuições para este trabalho. Dentre eles, destacamos Cunha (2000), Ernest (1996), Matos e Serrazina (1996), Onuchic e Allevato (2004) e Polya (1997).

Ernest (1996, p. 29) afirma que uma das definições de um problema é “uma situação na qual um indivíduo ou um grupo é chamado a realizar uma tarefa na qual não há um algoritmo imediatamente acessível que determine completamente o método de solução”; acrescenta também o desejo de realizar a tarefa, afirmando-se em Lester⁶ (1980). Esse entendimento é próximo do que afirmam Onuchic e Allevato (2004) a respeito de problema e converge com o entendimento expresso por Matos e Serrazina (1996). Onuchic e Allevato (2004) afirmam que problema

é tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em saber. [...] O problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm método ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta. (Onuchic; Allevato, 2004, p. 221).

Em Matos e Serrazina (1996), Lester também é lembrado, por afirmar que uma situação é ou não é um problema, dependendo da reação de quem recebeu a proposta. Novamente, destacamos que a consideração de problema não se reduz ao âmbito da tarefa, mas contempla também a atividade – estabelecida pelos que nela estão envolvidos.

Cunha (2000) evidencia uma diferença entre a resolução de problemas e a resolução de exercício: para a primeira, os alunos não dispõem de algoritmos que levem à obtenção imediata dos resultados, como acontece nos exercícios.

Assim, considerando-se o interesse dos envolvidos, a resolução de problemas pode estar em todas as salas de aula, pois não é uma atividade necessariamente para níveis elevados de escolaridade ou para quando se pretende aprofundar determinado tópico ou assunto.

Sublinhamos que não estamos escrevendo sobre problemas de texto pronto, em que, conforme Mendonça (1999, p. 17),

o professor/a apresenta um enunciado que contém dados, relações entre os dados e uma ou mais perguntas já formuladas, colocadas de maneira explícita, sem nenhuma abertura para dúvidas e, de um modo geral, tal enredo/enunciado não leva em conta questões emocionais/afetivas/culturais/sociais do resolvidor – mesmo porque tudo está estabelecido a priori.

Ou seja, no início já são dados todos os caminhos, as questões e os dados de que se necessita para resolver.

Ainda cabe destacar a noção de contextualização, referindo-se, de modo específico, aos problemas que trazem um contexto de aplicação dos conteúdos

⁶ LESTER, F. K. Research on Mathematical Problem Solving. In: SHUMWAY, R. J. (Ed.). *Research in Mathematics Education*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics. 1980. p. 286-323.

matemáticos envolvidos. Não vinculamos diretamente resolução de problemas à presença de um contexto, pois uma tarefa que se refira apenas a um tópico ou até a um procedimento matemático pode ser entendida por um indivíduo como um problema. Por outro lado, a apresentação de um contexto não é condição necessária nem suficiente para que uma tarefa seja considerada um problema. Ressaltamos este aspecto relacional entre contexto e problema, pois não nos parece raro que, para evitar exercícios algorítmicos do tipo “Quanto é: $140 - 20$?”, alguém proponha uma pseudocontextualização, como: “Se uma criança, que vai ao médico todos os meses, descobriu que tem 140 cm e que cresceu 20 cm de um mês para o outro, quanto ela media no mês anterior?”⁷. É evidente que esse é um exemplo isolado com o qual nos defrontamos na prática docente e que nos remete às reflexões aqui pretendidas. Um contexto qualquer não é condição para um problema aproximar-se da realidade do aluno, nem tampouco para facilitar sua compreensão. O contexto, na resolução de problemas, deve estar presente, sempre que possível, com o intuito de favorecer a atividade dos alunos, seja na interpretação dos dados fornecidos, seja para a resolução ou ainda para a avaliação da resposta obtida. O contexto não deve ser uma *paisagem* no problema, mas elemento importante, quando presente.

Em síntese, pelos autores que aqui trouxemos, podemos perceber que *problema e resolução de problemas* são inerentes ao sujeito que se envolve e aos objetivos de quem os propõe. O problema não necessariamente é sinônimo de desafio, bem como este não reside exclusivamente na tarefa, estando mais na dimensão da atividade, individual ou coletiva.

A exploração-investigação matemática

A exploração-investigação matemática é entendida como um meio pelo qual pode ocorrer a aprendizagem da Matemática em um processo que busca possibilitar ao estudante momentos de produção/criação de seus conhecimentos matemáticos, respeitando o nível de desenvolvimento em que ele se encontra. Investigar é procurar o que ainda não se conhece; investigar é questionar e procurar responder. Para investigar, é necessário querer saber; para investigar, é preciso estar curioso.

Em uma exploração-investigação matemática na Escola Básica, não se busca que os alunos obtenham “a resposta certa”, antecipadamente esperada pelo professor, mas que eles explorem possibilidades, postulem conjecturas e “se convençam a si próprios e aos outros das suas descobertas” (Pirie⁸, 1987, apud Serrazina et al., 2002, p. 43-44).

Devido à sua abertura, a investigação na sala de aula possibilita a vivência do estudante com formulação de questões, de conjecturas, de testes, de argumentação e

⁷ Encontramos esta tarefa em uma avaliação externa proposta a estudantes de 2ª série do Ensino Fundamental de um município paulista, no ano de 2007.

⁸ PIRIE, S. *Mathematical Investigations in your Classrooms*: A Pack for Teachers. Oxford: University of Oxford and University of Warwick, 1987.

de discussão de ideias, aspectos centrais em uma nova feição do ensino da Matemática (Abrantes; Leal; Ponte, 1996), permitindo ao aluno a observação, a percepção de relações e de elementos que não se reduzem simplesmente àquela resolução que o professor ainda não forneceu.

Braumann (2002) avista a proximidade entre aprendizagem matemática e posturas investigativas ou a prática da inquirição:

Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão “detectivesca” indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informações sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles.

[...]

Sem essa prática [investigativa], podemos dizer o que quisermos, mas, se formos minimamente honestos, sabemos que não estamos a ensinar Matemática e que o estudante não está a aprender Matemática. Não nos devemos espantar se ele não gostar (Braumann, 2002, p. 5 - p. 10).

Como acrescenta Freire (1996, p. 26), “nas condições de verdadeira aprendizagem os educandos vão se transformando em reais sujeitos da construção e da reconstrução do saber ensinado”. Ou ainda, conforme defendem Freire e Faundez (1985), o conhecimento inicia-se com uma pergunta, e aprender a perguntar é a base do conhecimento, ou seja, a tarefa primeira na atividade matemática.

A exploração-investigação matemática alcança destaque por possibilitar que aprender e ensinar sejam diferentes de transmitir e adquirir conhecimentos, mas, pelos seus processos intrínsecos, proporcionam o desenvolvimento do conhecimento por quem se envolve em atividade de investigação matemática.

Consideramos relevante o desenvolvimento de posturas investigativas para que o futuro cidadão, a criança de hoje, não se torne “*expert* do conhecimento pronto”, mas produtor de conhecimentos. Banchoff (2000, p. 356), ao defender a necessidade de oportunizar aos alunos experiências matemáticas, indica, nomeadamente, suas primeiras inclinações como jovem matemático: “fazer boas questões, tentar respondê-las e compartilhar as questões e as respostas com os outros”. Este pesquisador destaca, de suas lembranças enquanto criança, que, ao perguntar para sua mãe se ela passava o ferro quente na roupa para torná-las lisas ou quentes, sua mãe respondeu-lhe: “*O que você acha?*”. Assim esse pesquisador percebe o início de sua carreira de “fazer perguntas” e ajudar os outros a respondê-las.

Em uma atividade investigativa, a partir de uma dada situação, a exploração inicial leva à proposição de questões que não estão dadas *a priori*. Então, tendo em vista as questões propostas por quem investiga, desencadeia-se nova etapa para a

elaboração de conjecturas e seus refinamentos pela busca das validações, levando à justificação dos resultados obtidos e à consequente socialização e debate. Tais processos são convergentes com as palavras de Freire (1996, p. 88), ao afirmar que é necessário investir no exercício da curiosidade, que “convoca a imaginação, a intuição, as emoções, a capacidade de conjecturar, de comparar, na busca da perfilização do objeto”.

Nosso entendimento de exploração-investigação matemática concorda com a concepção de Fiorentini (2006, p. 29) de “aulas exploratório-investigativas”:

aquelas que mobilizam e desencadeiam, em sala de aula, tarefas e atividades abertas, exploratórias e não diretivas do pensamento do aluno e que apresentam múltiplas possibilidades de alternativa de tratamento e significação. Essas aulas servem, geralmente, para introduzir um novo tema de estudo ou para problematizar e produzir significados a um conceito matemático. Dependendo da forma como essas aulas são desenvolvidas, a atividade pode restringir-se apenas à fase de explorações e problematizações. Porém, se ocorrer, durante a atividade, formulação de questões ou conjecturas que desencadeiam um processo de realização de testes e de tentativas de demonstração ou prova dessas conjecturas, teremos, então, uma situação de investigação matemática.

A primeira etapa – a exploração e a formulação de questões – constitui os momentos iniciais da atividade, em que os alunos observam ou recolhem dados, buscam diferenças, semelhanças, regularidades e põem questões que buscarão desvendar. Posteriormente, a formulação de conjecturas consiste num processo de elaboração de hipóteses para suas questões, explicações que serão testadas e reformuladas, utilizando-se de exemplos e contraexemplos, caminhando, assim, para a justificação das conjecturas, com o uso de argumentações, provas ou demonstrações. E, finalmente, a avaliação do trabalho prevê a discussão, a argumentação, a socialização e o debate, processos estes nem sempre lineares, mas que abarcam a negociação de significados em diversos momentos.

A exploração-investigação matemática permite a vivência do processo e não apenas objetiva o resultado final; é, desse modo, um caminho promissor para o aluno “pensar sobre” o que se investiga, esperando-se que ele não apenas desenvolva o que foi determinado pelo professor. Assim, na etapa final, a socialização dos resultados obtidos também será oportunidade de construção de conhecimento, uma vez que envolverá uma situação pensada, experimentada e problematizada, um momento de novidades até para o aluno que concluiu sua atividade. Isto difere de um exercício ou de certos problemas, pois, muitas vezes, quem terminou a atividade assiste à apresentação do resultado final, feita pelo professor ou por outros alunos, como uma maneira de ratificar seus resultados. A socialização não precisa estar necessariamente na etapa final, mas pode ser realizada durante as outras etapas, favorecendo discussões e debate entre os alunos e as orientações e contribuições do professor.

A atividade investigativa preza a perseverança, a busca do inesperado e, no tocante aos problemas propostos, valoriza sua solução tanto quanto as diferentes formas e estratégias de resolvê-los. A exploração-investigação pode surpreender a proposta inicial feita e desvendar aspectos não observados pelo professor, ao preparar a tarefa ou ao propô-la.

No desenvolvimento da exploração-investigação matemática na sala de aula, é decisivo o modo como o professor propõe a tarefa, responde às questões dos alunos, dando-lhes atenção e encorajando-os, sem mostrar-lhes as respostas diretamente (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2003). Para favorecer a continuidade da atividade no eixo exploratório-investigativo, o professor deve pensar em intervenções que levem os alunos a perceber o que eles próprios já fizeram e a examinar novas possibilidades. Conforme postulam Alrø e Skovsmose (2006), ao dissertarem sobre a comunicação em sala de aula em cenários de investigação – um ambiente que pode dar suporte para uma investigação –, são oportunas as perguntas do tipo “o-que-acontece-se”. Isso pode ser um modo profícuo de o professor provocar continuidade na atividade dos alunos.

O docente, em uma aula investigativa, assume diversos papéis: desafiar os alunos, avaliar o progresso destes, levá-los a raciocinar matematicamente, apoiar o trabalho dos estudantes e promover reflexões, fornecer e recordar informações (Ponte et al., 1998; Ponte; Brocardo; Oliveira, 2003).

Com a intervenção do professor, a investigação na sala de aula pode ser desencadeada e assim permanecer. Porém, se os alunos não tiverem seu apoio e acompanhamento, a exploração iniciada pode não prosseguir para as demais etapas.

Aprender a realizar tarefas abertas, não diretivas; a levantar hipóteses; a discutir e a argumentar são processos que não garantem o envolvimento e a interação dos alunos de imediato, nem tampouco, necessariamente, o êxito da proposta feita pelo professor. Porém, a incorporação dessas atividades, pouco a pouco, nas aulas de Matemática, acreditamos, apresentará melhoria na sua implantação e no seu desenvolvimento. Em outras palavras, a construção de conhecimentos pelos próprios professores, a partir de sua ousadia em experimentar as tarefas abertas, pode de fato, torná-las presentes no ensino de Matemática em todos os níveis. Em Passos et al. (2005), apresentamos os resultados de uma investigação com alunos de uma escola pública brasileira que não tinham experiência com tarefas investigativas: foi percebido que a atividade exploratório-investigativa havia despertado o interesse de alunos que rotineiramente não apresentavam grande envolvimento com as aulas de Matemática.

Contudo, cada professor somente poderá ver as potencialidades, as vantagens, as dificuldades, os obstáculos e até o alcance da exploração-investigação matemática em sua prática docente, a partir do momento que se dispuser a experimentar e refletir sobre os fatos que se sucederem. Isso só pode ocorrer se o professor, enquanto sujeito aprendente de seu próprio ofício, tiver oportunidades nas

quais possa aprender Matemática *investigando*. Ou seja, para que o professor desenvolva suas ações pedagógicas promovendo e favorecendo a exploração-investigação, é preciso que ele próprio vivencie, experimente, reflita e problematize suas práticas em experiências investigativas com conteúdo matemático.

Buscando aproximações e distanciamentos: resolução de problemas e exploração-investigação matemática

A resolução de problemas, quando voltada para os processos e para a socialização dos resultados e dos caminhos percorridos, é uma necessidade que pode possibilitar o descortinar da criatividade, aproximando-se da exploração-investigação matemática.

Qualquer que seja a perspectiva pela qual se entenda a resolução de problemas – como “contexto”; especificamente “como veículo para ensinar matemática” (Stanic; Kilpatrick, 1989, p. 9); como “ponto de partida” (Mendonça, 1999, p. 16); para “ensinar matemática através da resolução de problemas”, segundo Onuchic (1999, p. 206), a partir de Schroeder e Lester (1989); como “perspectiva metodológica” (Diniz, 2001, p. 89); ou, ainda, como “método de ensino” (Wilson; Fernandez; Hadaway, 1993, p. 10), em que um problema é tido como desencadeador da construção do conhecimento matemático; ou também se trasladando da resolução de problemas para a formulação de problemas (Mendonça, 1999) –, temos que o(s) problema(s) é(são) convite(s) à exploração e à discussão e apresenta(m) convergência com a exploração-investigação matemática. Além disso, conforme destacou anteriormente Schoenfeld (1996), um problema pode ser ambiente propício para explorações; e, em nosso entender, é possível, inclusive, investigar a partir de um problema.

Nesse caso, o problema apresentado e uma situação aberta, característica da exploração-investigação matemática, mantém similaridades, na medida em que professor e alunos busquem a exploração, o levantamento e o teste de conjecturas, a justificação, a argumentação e a socialização. Assim, o ponto divergente entre a investigação matemática e a resolução de problemas fica reservado à forma de apresentação da tarefa e à condução das atividades. Dependendo das possibilidades geradas na sala de aula, ambos podem ser promissores para a construção de conhecimentos, e não para sua apropriação como algo pronto e acabado. Nesse sentido, também um problema pode impor ao professor o papel de orientador, de questionador, durante a atividade com seus alunos.

Uma similaridade entre a resolução de problemas e a investigação matemática também é percebida, quando a resolução de problemas é entendida “como um processo” (Mendonça, 1999, p. 16) que mantém o foco nas estratégias desenvolvidas e nos processos utilizados. Da mesma forma, tendo a resolução de problemas “como processo” que, segundo Wilson, Fernandez e Hadaway (1993), não preza pela aplicação de algoritmos, mas pela sua criação, pela generalização e

discussão de suas aplicações. Neste caso, os processos envolvidos contemplam também aspectos investigativos.

De modo geral, podemos afirmar que, quanto mais a resolução de problemas for entendida como prática para aplicação de procedimentos, mais ela diverge da exploração-investigação matemática. Há ainda que considerar que, muitas vezes, um problema é usado, tradicionalmente, no sentido de uma tarefa a ser realizada, com foco no resultado final (Schoenfeld, 1992). Neste caso, este é um dos pontos de maior distanciamento com a exploração-investigação matemática e com a própria resolução de problemas enquanto metodologia desencadeadora para construção de conhecimento matemático.

Diante do exposto, seguiremos nossas discussões a partir de alguns exemplos.

Exemplo 1: “Riscando cubos e economizando papel – Investigue como podemos desenhar planificações de cubo em uma folha de cartolina, minimizando os gastos de papel. (Considere que o objetivo seja montar cubos, independentemente da planificação escolhida.)” (Lamonato, 2011, p. 116).

Essa tarefa foi elaborada com a intenção de provocar uma atividade exploratório-investigativa no grupo de professoras para o qual ela foi apresentada. Ao elaborá-la, deixamos para a abertura da tarefa as informações sobre as dimensões da cartolina, das planificações, os tipos de planificações e a quantidade necessária de planificações que poderiam ser esperadas, etc. Essas decisões foram tomadas de modo que pudéssemos avistar uma diversidade de questões a investigar. As pessoas que se envolveram na atividade decorrente se interessaram por pavimentar todo o retângulo da cartolina com planificações do cubo, sem deixar espaços (Lamonato, 2011). Assim, o problema que desencadeou a busca pelas soluções, dando foco à atividade investigativa, foi proposto pelas professoras que estavam participando da atividade num curso de formação contínua e não foi apresentado diretamente na tarefa. Por sua vez, isso excluiu nossa expectativa de que pudessem ser discutidas as dimensões da cartolina e das planificações. Assim, se a intenção não fosse apresentar diretamente às pessoas uma tarefa de natureza aberta, um problema poderia ter sido inserido no enunciado da tarefa. Poderíamos ter apresentado o exemplo 2: “Quantas planificações de um cubo com aresta 4 cm podem ser desenhadas num cartolina com dimensões 56 cm por 76 cm?”.

O exemplo 2 pode favorecer a discussão de diversas estratégias para resolvê-lo, bem como pode suscitar respostas diferentes que necessitem de debate e de uma busca por justificativas para permitir o convencimento. Entretanto, diferentemente da primeira situação, se a tarefa fosse apresentada na forma do exemplo 2, explicitamente haveria maior clareza de qual questionamento o proponente da tarefa queria que os participantes assumissem, o que excluiria outros questionamentos que poderiam ter sido feitos.

Assim, na natureza da tarefa, as duas situações apresentadas diferem quanto às intenções de quem a elabora e propõe, podendo desencadear diferentes atividades. Entretanto, além disso, pode ocorrer convergência na natureza das atividades, se em ambos os casos houver levantamento de conjecturas, testes, justificativas, busca por provas, socialização e debate, tendo, em todos esses momentos, a intervenção oportuna do professor (ou formador de professores) para que a atividade se desencadeie no eixo exploratório-investigativo.

Em outro ponto extremo, mesmo que a tarefa seja apresentada conforme consta no exemplo 1, a dinâmica pode transformá-la em uma atividade próxima ao exemplo 2, se houver uma conduta diretiva por parte de seu proponente.

Outra situação que relativiza a consideração de uma tarefa pode ser exemplificada a partir de problemas que podemos encontrar em livros didáticos, similares ao exemplo 3: “Em seu aniversário, Francisco recebeu de presente R\$ 80,00 de sua avó e R\$ 40,00 de sua tia. Com esse dinheiro, ele comprou 3 DVDs. Qual o valor de cada um deles?”. Tal tarefa, num primeiro momento, pode levar-nos a pensar que se trata de uma situação na qual os alunos devam adicionar os valores que representam os dois presentes (R\$ 40,00 e R\$ 80,00) e, ao final, efetuar a divisão do resultado obtido (R\$ 120,00) por 3, obtendo um resultado esperado de que cada DVD custa R\$ 40,00. Todavia, o problema omite que foi gasto *todo* o dinheiro e que os três DVDs têm preços idênticos. Desse modo, pode-se pensar que tal tarefa incida em resposta única ou ainda que, a partir dela, o professor venha a questionar e promover o questionamento pelas crianças, ocorrendo explorações, levantamento e teste de conjecturas, justificativas e debates, criando um ambiente de argumentação e de busca pelo convencimento.

Assim, a natureza relativa da atividade iniciada pela tarefa, resulta da interação, das posturas, dos interesses, da necessidade e das condições de todos os envolvidos, fazendo com que os pontos de aproximação e distanciamento da resolução de um problema ou da exploração-investigação de uma situação proposta não sejam determinados pela tarefa, mas pelos demais aspectos mencionados.

Salientamos que, se a investigação matemática e a resolução de problemas forem consideradas distintas em termos do grau de dificuldade das tarefas, entendendo que a exploração-investigação seja mais difícil que a resolução de problemas, haverá implicações pedagógicas desfavoráveis, pois podemos esperar que, para alcançar a exploração-investigação matemática, os alunos devam estar aptos a resolver exercícios; a resolver problemas; e, finalmente, sejam capazes de explorar e investigar. E, se assim for, é possível prever a inexistência da exploração-investigação matemática na sala de aula, principalmente nos níveis elementares, o que contraria nossas análises.

Concordamos com Ponte e Matos (1996, p. 119), quando afirmam que

as investigações matemáticas vão desde as tarefas bastante elaboradas e complexas que podem levar algum tempo a resolver, até as questões mais

simples que podem ser levantadas a partir de uma pequena variação de um fato ou procedimento conhecido.

E concordamos, ainda, com Martins et al. (2002), referindo-se a Chamoso e Rawson⁹ (2001), ao afirmarem que na investigação se incentiva o uso da curiosidade e a busca de estratégias alternativas, procurando, inclusive, entender o que ocorreria, se certas condições de um problema ou da situação fossem alteradas.

Consideramos a resolução de problemas e a exploração-investigação matemática nos diversos níveis de escolaridade, inclusive na Educação Infantil, pois, mesmo os alunos não tendo condições de elaborar processos complexos de raciocínio, podem posicionar-se, justificar e argumentar seus feitos, com posturas investigativas perante situações matemáticas ou não, tomando decisões e não apenas dando respostas esperadas. Para tanto, cabe ao professor questionar suas próprias afirmações e a dos estudantes e não encerrar a conversa na primeira afirmação, mesmo que esta esteja correta. Cabe à formação do professor proporcionar tais vivências.

Pelos autores e obras aqui referidos, a resolução de problemas e a exploração-investigação matemática diferenciam-se nos enunciados das tarefas, sendo o início de uma investigação de caráter mais aberto do que a resolução de problemas, ainda que ambos os processos sejam entendidos na perspectiva da inquirição, concordando com Ernest (1996). Este ponto de convergência é que ressaltamos ser favorável à tríade exploração-problema-investigação na perspectiva do ensino de Matemática na Educação Básica.

Indo além de um possível ponto de divergência quanto ao início, se a resolução do problema também buscar a exploração deste em múltiplas direções e a discussão das estratégias, podemos falar em *explorar um problema* ou ainda *investigar um problema*. Sendo assim, é a prática pedagógica a instância privilegiada para revelar convergências e divergências entre a resolução de problemas e a exploração-investigação matemática.

Além disso, em nossa prática pedagógica, avistamos que a perspectiva de inquirição na sala de aula, em tarefas exploratório-investigativas ou na resolução de problemas, favorece e contempla a interação em grupo, a realização de registros escritos, o questionamento, a argumentação e o desenvolvimento da criticidade.

Considerações finais

Com o propósito de verificar “Quais são as aproximações e distanciamentos entre a resolução de problemas e a investigação matemática e as contribuições para a Matemática escolar?”, foi possível perceber que a resolução de problemas e a exploração-investigação matemática são opções metodológicas centradas no aluno, contrárias à recepção passiva de conhecimentos. Nestes casos, o professor deixa de

⁹ CHAMOSO, J.; RAWSON, W. Em lá búsqueda de lo importante em el aula de matemáticas. *SUMA*, n. 36, p. 33-41, 2001.

assumir a postura centralizadora, ou seja, a responsabilidade pela nova aprendizagem passa a ser compartilhada entre professor e alunos. São perspectivas metodológicas que se complementam, podendo estar em todos os níveis de escolaridade. Ambas requerem intervenções docentes e participação do professor na aprendizagem dos alunos, para que esta ocorra.

No caso da exploração-investigação matemática, no início é apresentada uma situação, não tão clara como um problema, mas a partir da qual os alunos, por meio de explorações, constroem questionamentos e vão em busca dos caminhos para solução, levantando e verificando hipóteses e conjecturas, em um trabalho não necessariamente linear, até, finalmente, a socialização de resultados com o grupo da sala de aula.

Na resolução de problemas, o professor elabora os problemas ou as questões, porém, há a possibilidade de que os alunos não sejam apenas os “resolvedores” dos problemas elaborados por outros, mas que também elaborem os seus próprios, que irão resolver. Na exploração-investigação matemática, dada a situação, a elaboração das questões já faz parte do processo resolução. Por outro lado, ao final, ambas as atividades podem promover o debate e a socialização dos resultados como novo momento para argumentação e justificação.

O entendimento dado à resolução de problemas pode distanciá-la ou aproximá-la da exploração-investigação matemática, dependendo da proposta apresentada, dos objetivos e das ações do professor, das oportunidades aproveitadas na sala de aula e da atividade do aluno.

Destacamos algumas potencialidades para o ensino e a aprendizagem de Matemática, que podem ser marcantes nestes tipos de atividades e entendemos que podem contribuir de modo positivo para a Matemática escolar: (a) proporcionar momentos de trabalho em grupo que apostam na organização e na troca de experiências e conhecimentos; (b) oportunizar o registro, a negociação de significados e a comunicação de processos e resultados; (c) estimular a aprendizagem e a articulação de conhecimentos aprendidos anteriormente; (d) contribuir para o desenvolvimento da percepção, de observações, da exploração e para o estabelecimento de relações entre fenômenos, objetos ou situações; (e) colaborar para que as crenças e concepções dos alunos a respeito da Matemática e seu ensino estejam mais próximas da natureza desta disciplina, valorizando o caráter científico da Matemática, com influências diretas em sua posição perante esta ciência; (f) possibilitar ao professor momentos de partilha de informações e melhor conhecimento dos processos de aprendizagem de seus alunos, com consequências para suas crenças e concepções a respeito do ensino, da aprendizagem da Matemática e das aulas propriamente ditas.

As discussões em torno desses temas são relevantes tanto nas pesquisas quanto na formação do professor, seja inicial ou contínua, visto que as inúmeras interpretações possibilitam usos que são ora muito próximos, ora muito distantes.

Esperamos que este texto tenha despertado concordâncias e divergências nos leitores em relação às nossas contribuições e que as lacunas sejam objeto de futuras discussões.

Referências Bibliográficas

- ABRANTES, P; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. Introdução. In: ABRANTES, P; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. *Investigar para aprender Matemática (textos selecionados)*. Lisboa: Associação dos Professores de Matemática, 1996. p. 1-2.
- ABREU, M. G. S. *Uma investigação sobre a prática pedagógica: refletindo sobre a investigação nas aulas de matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação: Metodologia de Ensino) — Centro de Educação e Ciências Humanas da Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, 2008.
- ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. *Diálogo e aprendizagem em Educação Matemática*. Tradução de Orlando de A. Figueiredo. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- BANCHOFF, T. F. The Mathematician as a Child and Children as Mathematicians. *Teaching Children Mathematics*, v. 6, n. 6, p. 350-356, fev. 2000.
- BERTINI, L. de F. *Compartilhando conhecimentos no ensino de matemática nas séries iniciais: uma professora no contexto de tarefas investigativas*. Dissertação (Mestrado em Educação: Metodologia de Ensino) — Centro de Educação e Ciências Humanas da Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, 2009.
- BRANCA, N. A. Resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica. In: KRULIK, S; REYS, R. E. (Ed.). *A resolução de problemas na matemática escolar*. Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. p. 4-12.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Brasília: Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental, 1998.
- BRAUMANN, C. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In: PONTE, J. P.; COSTA, C.; ROSENDO, A. I.; MAIA, E.; FIGUEIREDO, N.; DIONÍSIO, A. D. (Org.). *Atividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores*. Coimbra: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, 2002. p. 5-24.
- CASTRO, J. F. *Um estudo sobre a própria prática em um contexto de aulas investigativas de Matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação) — Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2004. 197 p.
- CHRISTIANSEN, B.; WALTHER, G. Tarefa e actividade. In: CHRISTIANSEN, B.; WALTHER, G. *Perspectives on mathematics education*. Dordrecht: D. Reidel, 1986. p. 243-307. Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/mestrado-bibliografia.htm>> Acesso em: 28 maio 2005.
- COSTA, J. L. *Provas e validações em geometria em um grupo de dimensão colaborativa*. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade São Francisco, Itatiba, SP, 2008.
- CUNHA, M. H. Saberes profissionais de professores de matemática. Dilemas e dificuldades na realização de tarefas de investigação. *Revista Millenium on-line*. n. 17, 2000. Disponível em: <www.ipv.pt>. Acesso em: 10 maio 2005.
- D'AMBROSIO, B. S. Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio. *Pro-Posições*, v. 4, n. 1, p. 35-41, mar. 1993.
- DÉCHEN, T. *Tarefas exploratório-investigativas para o ensino de álgebra na sexta série do ensino fundamental: indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos*. Dissertação

(Mestrado em Educação: Metodologia de Ensino) — Centro de Educação e Ciências Humanas da Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, 2008.

DINIZ, M. I. Resolução de problemas e comunicação. In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 87-97.

ERNEST, P. Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In: ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. *Investigar para aprender Matemática* (textos selecionados). Lisboa: Associação dos Professores de Matemática, 1996. p. 25-48.

FIORENTINI, D. A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. *Revista de Educação – PUC, Campinas*, n. 18, p. 107-115, jun. 2005.

FIORENTINI, D. Grupo de sábado: uma história de reflexão, investigação e escrita sobre a prática escolar em matemática. In: FIORENTINI, D.; CRISTÓVÃO, E. M. (Org.). *Histórias de investigação de/em aulas de matemática*. Campinas, SP: Alínea, 2006. p. 13-36.

FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. P. da. As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. In: *Actas do ProfMat99*. Lisboa: APM, 1999. p. 91-101. Disponível em: <http://esev.ipv.pt/mat1/ciclotextos/Texto_Actividadesf>. Acesso em: 04 maio 2005.

FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. 31. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996. (Coleção Leitura).

FREIRE, P.; FAUNDEZ, A. *Por uma pedagogia da pergunta*. 5. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1985. (Coleção Educação e Comunicação, v. 15).

GOMES, A. A. M. *Aulas investigativas na educação de jovens e adultos (EJA): o movimento de mobilizar-se e apropriar-se de saber(es) matemático(s) e profissional(is)*. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade São Francisco, Itatiba, SP, 2007.

LAMONATO, M. *Investigando geometria: aprendizagens de professoras da Educação Infantil*. Dissertação (Mestrado em Educação: Metodologia de Ensino) — Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação e Ciências Humanas, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, 2007. 244p.

LAMONATO, M. *A exploração-investigação matemática: potencialidades na formação contínua de professores*. Tese (Doutorado em Educação: Processos de Ensino e de Aprendizagem) – Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação e Ciências Humanas, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, 2011. 250p.

MARTINS, C.; MAIA, E.; MENINO, H.; ROCHA, I.; PIRES, M. V. O trabalho investigativo nas aprendizagens iniciais da matemática. In: PONTE, J. P.; COSTA, C.; ROSENDO, A. I.; MAIA, E.; FIGUEIREDO, N.; DIONÍSIO, A. D. (Org.). *Atividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores*. Coimbra: SEM/SPCE, 2002. p. 59-81. Disponível em: <<http://www.esec.pt/eventos/xieiem/pdfs/gt2.PDF>>. Acesso em: 06 jan. 2006.

MATOS, J. M.; SERRAZINA, M. L. *Didáctica da matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

MENDONÇA, M. C. Resolução de problemas pede (re)formulação. In: ABRANTES, P.; PONTE, J. P. da; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa: Grupo “Matemática Para Todos – investigações na sala de aula” (CIEFCUL) e Associação dos Professores de Matemática, 1999. p. 15-33.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

- ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino e aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. (Org.). *Educação matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231.
- PASSOS, C. L. B.; ZUFFI, E. M.; MENEGETTI, R. C. G.; LAMONATO, M.; GONÇALVES, J. P.; SOUZA, R. D.; SOUZA, V. S. E. Investigações geométricas no contexto de uma escola pública brasileira. In: SEMINÁRIO LUSO-BRASILEIRO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO CURRÍCULO E NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES, 2005, Lisboa. Lisboa, Portugal: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2005.
- POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo enfoque do método matemático*. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1994.
- POLYA, G. Sobre a resolução de problemas de matemática na high school. In: KRULIK, S; REYS, R. E. (Ed.). *A resolução de problemas na matemática escolar*. Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. p. 1-3.
- PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. (Coleção Tendências em Educação Matemática).
- PONTE, J. P.; MATOS, J. F. Processos cognitivos e interações sociais nas investigações matemáticas. In: ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. da. *Investigar para aprender matemática* (textos selecionados). Lisboa: Associação dos Professores de Matemática, 1996.
- PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; BRUNHEIRA, L.; VARANDAS, J. M.; FERREIRA, C. O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante*, v. 7, n. 2, p. 41-70, 1998.
- SCHOENFELD, A. H. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan, 1992. p. 334-370. Disponível em: <http://gse.berkeley.edu/faculty/AHSchoenfeld/Schoenfeld_MathThinking.pdf>. Acesso em: 08 set. 2005.
- SCHOENFELD, A. H. Porquê toda essa agitação acerca da resolução de problemas? In: ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. da. *Investigar para aprender Matemática* (textos selecionados). Lisboa: Associação dos Professores de Matemática, 1996. p. 61-71.
- SERRAZINA, L.; VALE, I.; FONSECA, H.; PIMENTEL, T. Investigações matemáticas e profissionais na formação de professores. In: PONTE, J. P.; COSTA, C.; ROSENDO, A. I.; MAIA, E.; FIGUEIREDO, N.; DIONÍSIO, A. F. (Org.). *Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. Coimbra: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, 2002. p. 41-58.
- SIEGEL, M.; BORASI, R. Demystifying mathematics education through inquiry. In: ERNEST, P. (Ed.). *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and mathematics education*. 2nd. ed. London: The Falmer Press, 1994. (Studies in Mathematics Education Series, v. 4). p. 201-214.
- STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In: SILVER, R. I. C. E. A. (Ed.). *The Teaching and Assessment of Mathematical Problem Solving*. VA: NCTM; Lawrence Erlbaum, 1989. p. 1-22. Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/stanic-kilpatrick%2089.pdf>>. Acesso em: 18 ago. 2008.
- STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, v. 3, n. 4, p. 268-275, 1998.

WILSON, J. W.; FERNANDEZ M. L.; HADAWAY, N. Mathematical Problem Solving. In: WILSON, P. S (Ed.) *Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics*. New York: MacMillan, 1993. Disponível em: <<http://jwilson.coe.uga.edu/emt725/PSSyn/Pssyn.html>>. Acesso em: 04 maio 2008.

Aprovado em 17/08/2011.