# Raciocínio combinatório em problemas escolares de produto cartesiano

*Maria Lucia Faria Moro*[*], *Maria Tereza Carneiro Soares*[**] *e Jomar Antonio Camarinha Filho*[***]

**Resumo:** São descritos níveis do raciocínio combinatório de alunos de 3ª a 6ª séries do Ensino Fundamental, ao solucionarem problemas de produto cartesiano. O trabalho decorre do reexame de hierarquias descritas em estudos anteriores, com base em proposições de Piaget e Vergnaud. Os participantes, 110 alunos de escolas públicas (média etária 10;5), solucionaram por escrito quatro problemas multiplicativos de produto cartesiano. A análise qualitativa e a quantitativa dos dados permitiram: redefinir patamares do raciocínio combinatório; apontar ausência de raciocínio combinatório nas soluções em todas as séries e problemas, mas tendência significativa a soluções de níveis mais adiantados na 4ª série em alguns problemas.  A discussão destaca na hierarquia descrita: a combinação progressiva das variáveis; a passagem do raciocínio aritmético para o algébrico e a dos esquemas aditivos aos multiplicativos; marcas da progressiva abertura para os possíveis em relação ao necessário. Restrições metodológicas e implicações para a educação matemática são apresentadas.

**Palavras-chave:** construção do raciocínio combinatório; problemas multiplicativos de produto cartesiano; matemática no Ensino Fundamental**.**

---

[*] Professora do Setor de Educação da Universidade Federal do Paraná (UFPR) Paraná - Brasil. E-mail: mlfmoro@sul.com.br.

[**] Professora do Setor de Educação da Universidade Federal do Paraná. (UFPR) Paraná - Brasil. E-mail: mariteufpr@gmail.com

[***] Professor do Departamento de Estatística da Universidade Federal do Paraná (UFPR) Paraná - Brasil. E-mail: jomarcf@gmail.com.

# Combinatory reasoning in school problems of Cartesian product

**Abstract:** The paper concerns the construction of the combinatory reasoning when problems of Cartesian product are solved by 3rd to 6th grade Elementary School students'. Stemming from the revision of hierarchies described in earlier studies, it is based on Piaget's and Vergnaud's proposals. The participants, 110 students attending State Elementary Schools (mean age 10;5), answered a paper and pencil instrument containing four multiplicative problems of Cartesian product. A qualitative and a quantitative analysis result in a revised hierarchy of the combinatory reasoning, and show its absence on solutions in all grades and problems, but a significant tendency to advanced solutions in 4th grade to some problems. Concerning the hierarchy, the discussion underlines the progressive combination of variables; the passage from arithmetical to algebraic reasoning and from additive to multiplicative schemata; the progressive overture to the possibilities in its interplay with the necessities. Methodological restrictions and implications for mathematical education are presented.

**Key-words:** Combinatory reasoning construction; multiplicative problems of Cartesian product; Elementary School mathematics.

## Introdução

O estudo trata da construção do raciocínio combinatório tal como presente na solução de quatro problemas multiplicativos de produto cartesiano por alunos de 3ª a 6ª série da escola fundamental.[1] É examinada a hipótese de que se pode identificar a psicogênese daquele tipo de raciocínio em direção à sua formalização, quando são solucionados, na escola, problemas matemáticos de produto cartesiano. Também é verificada a ocorrência de relação entre os níveis identificados, a escolaridade e o tipo de problema resolvido, na expectativa de que, quanto mais avançada a escolaridade, soluções de

[1] Referimo-nos, neste texto, às séries do Ensino Fundamental, de 3ª a 6ª, porque foi ainda no contexto do Ensino Fundamental de oito anos que os dados foram coletados.

níveis mais avançados tendam a ocorrer, especialmente com problemas menos complexos (duas variáveis, valores numéricos baixos) (Vergnaud, 1983, 1985).

Este estudo insere-se em um projeto maior sobre as soluções de alunos da escola fundamental a outros problemas do tipo mencionado. Como tal, além de verificar como se constrói o raciocínio combinatório, visa também examinar a validade e a fidedignidade dos resultados obtidos em trabalhos anteriores (Moro; Soares, 2006) que descreveram diferentes níveis hierárquicos de raciocínio combinatório, a partir da análise das soluções aos mesmos quatro problemas.

A respeito do tipo de problema escolhido, temos como referência relevante a teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1985, 1990). Segundo essa perspectiva, os problemas de produto cartesiano (ou produto de medidas) fazem parte do campo conceitual das estruturas multiplicativas. Eles comportam um sistema de relações ternárias entre medidas, em que uma delas é produto de duas outras, nos planos numérico e dimensional, generalizável a mais de duas dimensões. Representada pela tabela cartesiana, essa forma de relação multiplicativa é relevante para a cultura matemática do ser humano. Ela se faz presente tanto na solução de diversos problemas do cotidiano, como em conceitos e relações de outros ramos das ciências (física, economia, por exemplo).

Por causa da inserção deste trabalho no projeto maior acima referido, os resultados dos estudos anteriores lhe são referências importantes. Passamos a expor as principais contribuições que deles advieram.

Em primeiro lugar, as hierarquias em níveis e subníveis de transformação do raciocínio combinatório, obtidas em cada um dos estudos citados, trazem a mesma tendência: de soluções sem sinal de raciocínio combinatório até as que contêm sinais desse raciocínio. Porém, ainda que obedecendo a essa mesma tendência, em alguns aspectos a hierarquia das soluções de 5ª e 6ª séries é diferente da hierarquia proposta para as soluções de alunos da 3ª e da 4ª série.

De pronto, pudemos constatar os seguintes critérios comuns na composição das duas hierarquias:

- a progressão da ausência para a presença de todos os casos de combinação, algo observado para tipos diversos de problemas e de conteúdos em que está envolvida a combinação de variáveis, conforme a literatura. Por exemplo, Inhelder e Piaget (1972) descrevem, a esse respeito, soluções que vão da ausência de combinações entre variáveis para sua presença, quando, inicialmente por tateio, mais e melhores relações entre tais variáveis são estabelecidas, com progressiva dissociação entre elas e controle sistemático da combinação entre seus valores;

- a presença, a partir de certo ponto, de soluções calcadas na correspondência um a um; logo, em cálculo de caráter aditivo, linear, e sua transformação para soluções apoiadas na correspondência "um para muitos"; portanto, em cálculo de caráter multiplicativo, bidimensional, atributo típico do raciocínio combinatório. Com essa perspectiva, essas transformações foram vistas como uma progressiva abertura de possibilidades em seu interjogo com o necessário (Piaget; Berthoud-Papandropoulos; Kilcher, 1986), por causa de sinais da crescente necessidade de coordenação, por associatividade, das possibilidades abertas de composições "um para muitos" (cada uma das variáveis com todos os valores das outras), no plano das operações concretas, mas não ainda como multiplicações de segundo grau, no plano formal (Piaget; Szeminska, 1971).

Em princípio, esses aspectos falam a favor da validade da composição das duas hierarquias: ambas estariam se referindo ao mesmo fenômeno: o da construção do raciocínio combinatório, quando da solução de problemas matemáticos de produto cartesiano tal como os propostos.

Porém, já dissemos acima, houve diferenças entre a hierarquia extraída das soluções de 3ª e 4ª série e aquela extraída das soluções de 5ª e 6ª séries. Em que consistiram, então, essas diferenças? A que elas podem ser atribuídas? Elas alteram a hipótese de que as hierarquias de níveis e subníveis antes descritas sejam válidas?

Quanto à primeira pergunta, da comparação entre níveis e subníveis das duas hierarquias obtidas, temos entre eles certas correspondências e, mesmo, algumas equivalências. São elas mais marcantes, pela ordem, para os níveis II e IV e menos marcantes para os níveis I e III, pela ordem. Entretanto, duas diferenças importantes ocorreram: a) não houve soluções definidas como de nível 0 na hierarquia de 5ª e 6ª séries, mas as houve na de 3ª e 4ª séries, o que configura um número diferente de níveis de construção do raciocínio combinatório nas duas hierarquias: cinco níveis para as soluções de 3ª e 4ª séries (do nível 0 ao IV) e quatro níveis para as de 5ª e 6ª séries (do nível I ao IV); b) houve a identificação em separado de casos de resposta *em branco* e daqueles chamados de *só respostas* na hierarquia de 5ª e 6ª séries, mas não na de 3ª e 4ª séries.

De outra parte, para cada nível da hierarquia de soluções da 5ª e 6ª séries, houve a identificação de um número maior de subníveis do que na de 3ª e 4ª séries, principalmente no caso das soluções dos níveis II e III.

Em resposta à segunda pergunta acima, primeiramente podemos atribuir essas diferenças à obtenção de soluções diferentes, de 5ª e 6ª séries, das obtidas pela amostra de 3ª e 4ª séries no primeiro estudo.

Por conta desses novos casos, as seguintes modificações ocorreram:

- houve redefinição de um dos eixos de julgamento da presença de sinais de raciocínio combinatório nas soluções, a saber: da utilização do eixo pertinência /não pertinência das soluções ao problema, no primeiro estudo, para a utilização do eixo relativo à interpretação do texto do problema, no segundo estudo. Assim sendo, em vez de ser cada solução interpretada apenas segundo sua provável pertinência ou não à pergunta do problema, ela o foi também conforme a interpretação dada pelos participantes às relações entre os elementos do texto do problema, como menos ou mais correspondente ao teor matemático ali presente (informações numéricas, contextos de uso social dos elementos). Desse modo, houve uma clara expansão da definição do critério, e uma alteração de sua própria natureza: em vez de dicotômico, passou ele a ser utilizado como uma escala, por conta das diversas gradações de manifestação da ausência de interpretação propriamente matemática das relações entre os elementos do texto do problema (desde a cópia de partes do texto - palavras e números - até o uso de referências à linguagem aritmética escolar - neste caso, composições numéricas por justaposição de algarismos e cálculos aritméticos os mais variados com os números obtidos dessa justaposição e/ou os do texto - e ao contexto sociocultural). Nesta variação e em sua frequência, as soluções de 5ª e 6ª séries muito se diferenciaram das de 3ª e 4ª séries;

- em consequência da referida alteração do critério, foram reinterpretados e colocados à parte os casos de *só respostas*, aquelas manifestações exclusivamente numéricas e/ou as aparentemente dadas ao acaso, de cujo teor foi impossível identificar qualquer procedimento de solução e que já tinham presença na amostra de 3ª e 4ª séries, ali compondo o nível 0, então denominado de *resposta alheia ao contexto*;

- à parte, também foram colocados os casos de resposta em branco, presentes na amostra de 5ª e 6ª séries, mas ausentes na amostra do estudo anterior, das soluções de 3ª e 4ª séries.

Logo, houve, sim, alteração na definição e na aplicação dos critérios de composição das duas hierarquias. E é também plausível afirmar que essa redefinição de critério trouxe as principais diferenças entre elas, diferenças estas relativas, sobretudo, aos níveis menos avançados das duas hierarquias: a presença de um nível identificado como 0 (zero) na hierarquia de 3ª e 4ª séries e sua ausência na hierarquia de 5ª e 6ª séries, nesta com a descrição à parte, então, da categoria *só respostas*.

Quanto às demais diferenças (relativas, em geral, ao número diverso de subníveis dos quatro níveis), podemos atribuí-las muito mais à descrição de outras soluções, ausentes na amostra de 3ª e 4ª séries. É exemplo o que ocorreu no nível IV, *de presença de soluções combinatórias*: na hierarquia de 3ª e 4ª séries, tais soluções aparecem somente em um subnível, enquanto, na de 5ª e 6ª séries, aparecem em dois subníveis porque, ausente na amostra de 3ª e 4ª séries, o subnível IVB contempla solução combinatória cuja representação, de marca algébrica, denota domínio de procedimento econômico de cálculo relacional, um controle multiplicativo eficiente da combinação de todos os valores das variáveis. É, sem dúvida, solução mais avançada que as do subnível IVA, apoiadas em diagrama.

Apesar de destacarmos o aparecimento de soluções diferentes em uma e outra amostra como origem importante dessas outras diferenças entre as hierarquias, não descartamos também o fato de ter ocorrido alguma mudança ou maior precisão de julgamento dos pesquisadores no processo de apreciação dos dados da amostra de 5ª e 6ª séries em relação à apreciação dos da 3ª e 4ª séries.

Sem dúvida, e felizmente, o julgamento de pesquisadores altera-se entre momentos de análise de dados de um mesmo estudo, o que pode mais acontecer entre estudos; e, ao que tudo indica, isso ocorreu em nosso caso. Entretanto, foi muito importante termos obtido soluções diferentes dos participantes da 5ª e da 6ª série.

Por outro lado, essas soluções diferentes conduziram-nos, no caso da hierarquia de 5ª e 6ª séries, a uma descrição de subníveis tão minuciosa que nos impediu de perceber que, embora algumas soluções fossem diferentes, elas continham atributos em comum. Mediante revisão do julgamento, o novo agrupamento das soluções em um mesmo subnível resultou em um número menor de subníveis no presente estudo.

Assim sendo, a hierarquia ora proposta com todas as alterações decorrentes do reexame dos resultados dos estudos anteriores consiste em uma revisão importante das hierarquias antes propostas, no que concerne à identificação mais válida e, mesmo, mais precisa dos níveis de raciocínio combinatório de alunos do Ensino Fundamental, quando resolvem eles problemas de produto cartesiano.

Com isto, não queremos dizer, no entanto, que as hierarquias antes obtidas não tivessem sua validade; elas a tinham, mas, de certa forma, limitada por conta não somente das restrições quanto à abrangência e ao número de casos, como, sobretudo, pelos decorrentes limites de definição de critérios.

É com essa perspectiva que contemplamos a hipótese de que, com outras amostras de alunos, provenientes de outras séries e/ou contextos e, principalmente, com outras formas ou procedimentos de coleta de dados, seja provável encontrar soluções que justifiquem a identificação e a descrição de outros níveis (e/ou subníveis) de elaboração do raciocínio combinatório. Logo, haverá a necessidade de revisão dos critérios aqui adotados para que ganhem eles em validade e em fidedignidade.

## Método

Conforme o modelo dos trabalhos anteriores, o estudo foi realizado em duas escolas públicas de uma extensa região metropolitana escolhidas por conveniência (disponibilidade em receber os pesquisadores). Uma delas atendia alunos de 1ª a 4ª série; a outra, alunos de 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental.

Os participantes são 110 alunos, de ambos os sexos (idades entre 7;8 e 14;1, com média de 10;5), os presentes em cada turma e que concordaram em participar do estudo. A escolha de uma turma por série também ocorreu por conveniência, conforme a disponibilidade dos professores em ceder sua turma para a coleta dos dados.

Os 110 alunos participantes são: 24 da 3ª série e 26 da 4ª série (idade cronológica média de 8 anos e 10 meses); 31 de 5ª série e 29 de 6ª série (idade cronológica média de 11 anos e 3 meses).

Os quatro problemas de produto de medidas, abaixo reproduzidos, foram propostos aos participantes. Todos eles têm solução pela multiplicação, o que consiste em encontrar uma “medida-produto”, combinando-se duas ou mais medidas elementares.

Eis os quatro problemas:

1) Em uma loja de carros há 5 Monzas, 3 Fuscas e 6 Pampas. Ao comprar o carro, você pode escolher 2 tipos de rodas: esportiva e comum. De quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinados?

2) Em uma sorveteria por quilo existem 28 sabores de sorvetes, 12 coberturas e 5 tipos de casquinhas. De quantas maneiras diferentes você pode se servir, sabendo que todos os sorvetes são acompanhados de casquinha e cobertura?

3) Vou dar uma festa e servirei sanduíches. Para fazer os sanduíches, comprei 3 tipos de frios (presunto, mortadela e salame), 2 tipos de queijo (mussarela e queijo prato) e 4 tipos de pães. Quantos tipos diferentes de sanduíches, com um tipo de pão, um tipo de frios e um tipo de queijo, posso servir?

4) Valéria fez 32 colares, 92 pulseiras e 115 anéis para vender. De quantas maneiras ela pode arrumar, em uma caixinha, apenas 1 colar, 1 pulseira e 1 anel para mostrar aos clientes?

Também conforme os estudos anteriores, a escolha desses problemas ocorreu porque eles contêm as seguintes características combinadas: duas ou três variáveis; valores baixos e altos para as variáveis; presença ou não de valores distractores (Vergnaud, 1985).

Marcou ainda a escolha dos quatro problemas o fato de eles comportarem somente solução por multiplicações. Para a amostra de alunos de 5ª e 6ª séries, foram mantidos os mesmos problemas multiplicativos propostos aos alunos da amostra de 3ª e de 4ª séries, para garantir a realização da pretendida comparação entre as soluções de todas essas séries, segundo o modelo de estudo transversal definido.

Em consonância com o projeto maior de pesquisa, para a coleta e o registro dos dados, os seguintes procedimentos foram empregados:

- os problemas foram apresentados aos participantes no formato de um teste escrito, e as soluções individuais (por escrito, em caneta) foram obtidas em sessão coletiva (sala de aula), com duração aproximada de 50 minutos e orientada pelos pesquisadores, um em cada turma (aplicações simultâneas para 3ª e 4ª séries e para 5ª e 6ª séries);

- previamente informados de que as respostas aos problemas serviriam somente à pesquisa, os participantes receberam a recomendação para que tentassem resolver todos os quatro problemas no tempo disponível, sem se preocuparem com a obtenção exclusiva da resposta correta;

- foi-lhes dito também que poderiam utilizar diferentes formas de expressar a solução (desenhos, escritas numérica e alfabética, gráficos, por exemplo), e recomendado que deveriam marcar sua solução para cada problema, no espaço indicado na folha, sem apagar do papel todas as operações e as marcas utilizadas;

- antes de iniciar a solução, o pesquisador fez a leitura dos enunciados dos problemas;

- pedidos de esclarecimentos e dúvidas dos participantes sobre os problemas, expressos durante a sessão, foram atendidos, mas o pesquisador somente esclareceu dúvidas sobre o texto dos enunciados.

Para a análise dos dados foram escolhidos procedimentos de ordem qualitativa e de ordem quantitativa.

A análise qualitativa focalizou o conteúdo das soluções dos participantes a cada um dos problemas, centrando-se no que esse conteúdo pode revelar do raciocínio combinatório ali envolvido. Os critérios usados, inspirados dentre os apontados na literatura, disseram respeito: às características da construção do raciocínio combinatório (Inhelder; Piaget, 1972); aos esquemas e diferentes relações lógico-matemáticas presentes na construção das estruturas multiplicativas (Lemoyne et al., 1994; Nunes; Bryant, 1997; Piaget; Berthoud-Papandropuolos; Kilcher, 1986; Vergnaud, 1985); às estratégias de solução a problemas de composição prática de combinações com materiais (English, 1992; Mekhmandarov, 2000).

Os critérios empregados organizaram-se em três eixos principais, a saber: presença de limites de interpretação, pelos sujeitos, das relações entre elementos do texto dos problemas; presença de um ou mais casos de combinação de valores das variáveis; presença de cálculo relacional aditivo e/ou multiplicativo.

Logo, trata-se, em linhas gerais, dos mesmos eixos utilizados nos estudos anteriores, mas com a importante diferença de definição do eixo relativo à interpretação das relações entre os elementos textuais do problema, já acima explicada.

Essa análise foi efetuada conforme os seguintes momentos: a) de revisão comparativa das características descritivas de cada grupo de soluções, das duas hierarquias antes descritas (de 3ª e 4ª séries, e de 5ª e 6ª séries), verificando-lhes seus traços e significados comuns, conforme os critérios revisados; b) de nova descrição dos níveis (e subníveis), com repetidas revisões dessas descrições, para adaptar e redefinir tais níveis por força da redefinição dos critérios, em atenção à validade das descrições obtidas e da provável hierarquia ali presente.

A análise quantitativa fez-se pela aplicação de testes estatísticos não paramétricos (análise de variância e coeficiente de correlação de Spearman) às frequências das soluções, conforme os níveis identificados (agrupando frequências dos respectivos subníveis), para verificar a ocorrência de relação entre aqueles níveis de solução, a escolaridade (séries escolares) e o tipo de problema resolvido.

## Resultados

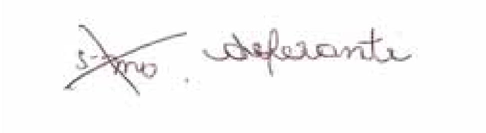
Descrevemos a seguir os níveis e os subníveis de elaboração do raciocínio combinatório, inferidos da análise qualitativa das soluções de 3ª a 6ª séries aos quatro problemas aplicados. Cada exemplo apresentado é identificado pelas iniciais adaptadas do nome do seu autor, e conforme série escolar e problema.

Afora os níveis e subníveis abaixo descritos, foram encontrados:

- casos de soluções *em branco* aos diversos problemas, significando ausência de qualquer solução e/ou resposta;

- casos de *só resposta*, aquelas exclusivas ou aparentemente dadas ao acaso, das quais foi impossível inferir qualquer procedimento de solução, quer quando há valor numérico (mesmo correspondente à resposta correta ao problema), quer quando há afirmação qualquer, de caráter vago. Por exemplo, Th (5ª, problema 2):

Figura 1



Eis a descrição dos níveis e subníveis de raciocínio combinatório identificados.

Nível I - *De ausência de solução combinatória*

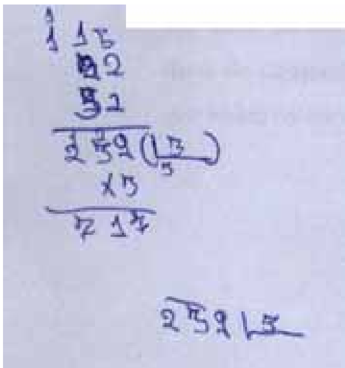
São soluções que se caracterizam por revelar limites maiores ou menores da interpretação sobre o que é informado e solicitado no texto do problema. Tais limites, quando acentuados, denotam atenção quase exclusiva aos algarismos do texto. Resultam, então, em composições numéricas por justaposição desses algarismos, e em cálculos aritméticos os mais variados com os números assim obtidos e com os contidos no texto, na tentativa de dar alguma resposta numérica ao problema.

Outra forma de manifestação dos limites mencionados é apelar, na busca de solução, a critérios relacionados ao uso social, o que denota certo desvio do contexto específico da matemática escolar em que os problemas apresentados se situam, mas em que há alguma atenção ao conteúdo do texto, não somente aos algarismos. Eis os subníveis identificados:

Subnível IA: da obtenção de resultado por um cálculo qualquer

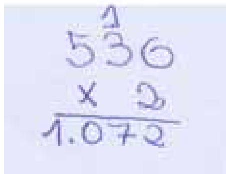
São soluções que se caracterizam pela aparente busca de algum resultado numérico, mediante justaposição de algarismos do texto ou pela execução (com cálculo mental ou não) de quaisquer das operações aritméticas com os valores das variáveis, dos distractores e/ou outros, por vezes resultantes das próprias operações (em ordem variada, de uma a quatro operações, repetindo-se exclusivamente ou não). Por exemplo, DLe( 6ª, problema 4)

Figura 2



Fil (6ª, problema 1)

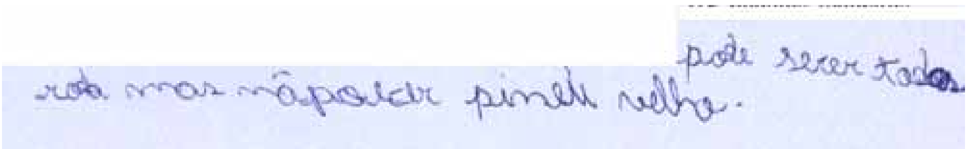
Figura 3




Subnível IB: da evocação de elementos do problema em contextos não matemáticos.

São soluções com desenho ou escrita alfabética. Referem-se (com cópia ou não) à pergunta ou ao texto do problema, às variáveis e/ou aos seus valores (sobretudo os distractores). Pautam-se pela interpretação do conteúdo do problema conforme significado sociocultural das variáveis, mas sem combinação entre elas. Por exemplo, Lu (4ª, problema 1):

Figura 4



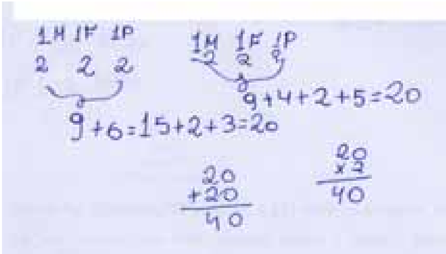
Nível II - Dos primeiros indícios de relações para soluções combinatórias.

A característica que distingue as soluções (predominantemente pictóricas) desse nível das do anterior é o progressivo aparecimento de relações de correspondência termo a termo entre valores unitários das variáveis, todas elas ou alguma delas, como também entre partes dos valores de uma das variáveis com partes dos das outras. A marca de tais relações é ainda aditiva. Por vezes, fazem-se presentes, complementares às soluções, cálculos aritméticos envolvendo tanto valores numéricos do texto (incluídos os distractores), como valores numéricos estranhos ao texto. Segue a descrição dos subníveis identificados:

Subnível IIA: dos emparelhamentos parciais entre variáveis e seus valores

São soluções que se compõem de esboços de correspondência termo a termo: (a) entre valor unitário de uma das variáveis ao valor da outra, ou (b) entre partes do valor de uma delas ao valor das outras. Seguem, respectivamente, cálculos aditivos, multiplicativos e subtrativos, envolvendo, de diferentes formas, as variáveis, considerados os distractores ou suas partes decompostas. Por exemplo, LeC (5ª problema 1):

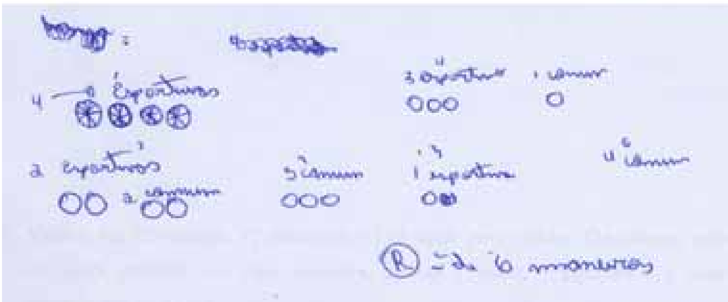
Figura 5




Subnível IIB - das composições aditivas restritas à variável única ou estranha.

Apesar do registro da resposta correta à pergunta, a solução representa composições aditivas (que se esgotam), não dos valores das duas variáveis do texto, mas dos dois valores de uma delas com um valor constante relativo à mesma variável. Esta não consta do texto, mas refere-se à característica do objeto ali evocado. Logo, está presente apenas a relação de composição (aditiva) dos valores de uma das variáveis. Por exemplo, LuH (6ª problema 1):

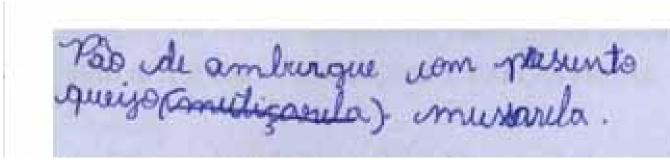
Figura 6



Subnível IIC - do caso favorito.

São soluções que representam um caso apenas de relação entre as variáveis, e que colocam em correspondência termo a termo um - e somente um - valor de cada uma delas. Seria uma combinação escolhida por razão estética ou por adequação de uso. Quando presentes, os valores distractores são também considerados. Por exemplo, JesC (6ª, problema 3):

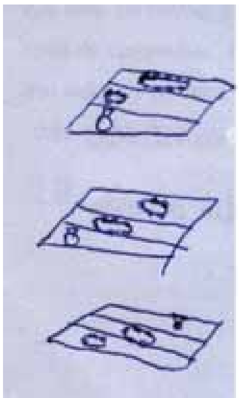
Figura 7




Subnível IID: dos casos favoritos.

São soluções (sobretudo pictóricas ou diagramáticas) que consistem em mais de um caso de relação entre as variáveis, mas que ordenam por correspondência termo a termo apenas partes dos valores dessas variáveis em relação a parte dos valores das outras, incluindo, por vezes, os distractores. Em alguns casos, a ordenação é claramente direcionada pelo critério de uso. Por exemplo, ThK (6ª, problema 4):

Figura 8



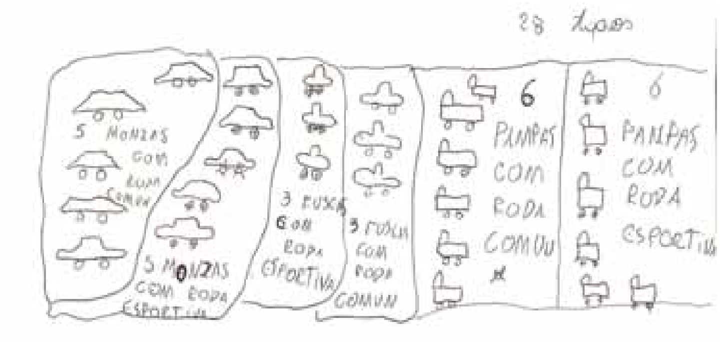
Nível III - Dos indícios de soluções combinatórias.

As soluções do nível III trazem, diversamente das de níveis anteriores, o fato de serem regidas pelo esquema de correspondência “um para muitos” entre os valores das variáveis, de início ainda envolvendo os distractores. Quando predomina o emprego de diagramas, a presença em progressão desse esquema é mais evidente, embora, por vezes, haja sinais de contagem dos casos obtidos e de cálculos aditivos, mesclados com cálculos multiplicativos. Outra marca importante é a de que são soluções não distorcidas por interpretações do conteúdo do problema, restritas a contextos socioculturais específicos. Eis os subníveis encontrados:

Subnível IIIA - da busca inicial de combinações mediante cálculos diversos distorcidos pelos distractores

São soluções com diagrama ou com cálculo, em que estão representadas muitas tentativas de combinações entre os valores das variáveis, mas regidas pelos valores distractores. Estas tentativas são feitas por diferentes junções, repetições e complementações de cálculos variados entre alguns e/ou todos os valores das variáveis, os aditivos mesclados aos multiplicativos, na aparente busca de “muitas maneiras”. Por exemplo, FeB (4ª, problema 1):

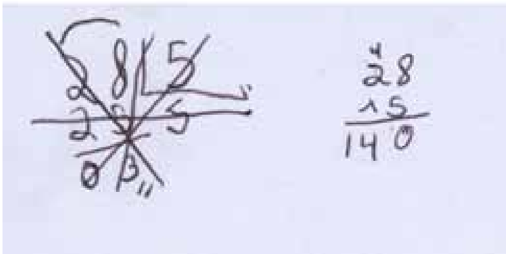
Figura 9



Subnível IIIB - das combinações parciais mediante cálculos aditivo-multiplicativos não distorcidos pelos distractores.

Trata-se de soluções obtidas por meio de diagramas ou de cálculos em que há multiplicação e/ou adição entre alguns ou todos os valores de algumas das variáveis, acompanhados de outro tipo de cálculo aditivo ou multiplicativo, envolvendo os resultados obtidos e/ou o valor da terceira variável, quando é o caso, sem a presença dos distractores. São combinações obtidas de diversas “relações” aditivo-multiplicativas, na busca de resposta final, em termos de “muitos casos”. Quando há diagrama com recursos pictóricos, fica evidente a dificuldade de representar todos os valores das três variáveis, combinados. Por exemplo, FeC (5ª, problema 2):

Figura 10



Subnível IIIC: das combinações de variáveis marcadas por relações aditivo-multiplicativas.

São soluções diagramadas ou com cálculos, as quais contemplam a composição de relações aditivo-multiplicativas entre todos os valores das variáveis envolvidas. Quando presentes, os cálculos são de adição e/ou de multiplicação entre os valores de cada variável e cada resultado obtido dessas operações. Os resultados são, então, incorretos, por causa desta “combinação” de produtos e somas, às vezes com sinais de contagem dos casos obtidos. Por exemplo, LeC (5ª, problema 2):

Figura 11

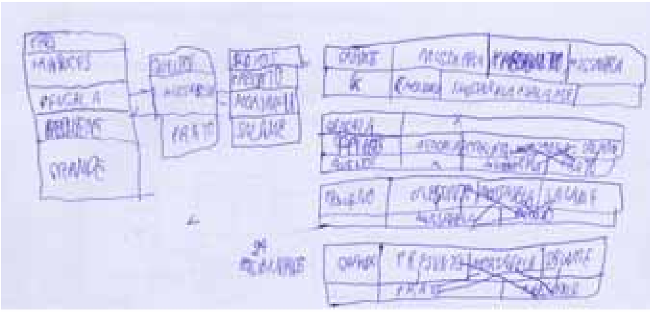

Nível IV - Da presença de soluções combinatórias.

Muito apoiadas em diagramas ou em outro recurso gráfico (listas, tabelas, por exemplo), as soluções desse nível diferenciam-se das do nível anterior, ao representarem a relação de “um para muitos” entre todos os valores de todas as variáveis, sejam elas duas ou três. Na elaboração dessas soluções, há o emprego de procedimentos econômicos, inclusive os com marca algébrica.

Subnível IVA: do total das combinações por cálculo de marca aritmética.

São soluções em que estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, representados quer em diagrama (com registro pictórico e/ou numérico do total de possibilidades identificadas, ou com apoio na disposição ordenada dos valores de uma ou mais variáveis como referência), quer por cálculo multiplicativo canônico. Por exemplo, LuC (5ª, problema 3):

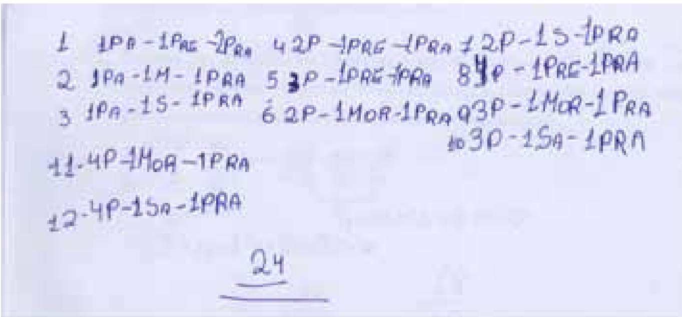
Figura 12



Subnível IVB: do total das combinações por cálculo de marca algébrica.

Trata-se de solução com marca algébrica (siglas, algarismos), representada com certa ordem, pela qual está indicada uma parte ou o total das combinações entre os valores das três variáveis. Este traço expressa controle eficiente das possibilidades de combinação dos valores das variáveis na utilização de procedimento econômico de cálculo relacional. No caso obtido, essa representação é a da metade das combinações. Por exemplo, LeC (5ª, prob. 3)

Figura 13



Seguem os resultados da análise quantitativa dos dados para verificar a ocorrência de alguma relação significativa entre níveis de raciocínio combinatório, série escolar e tipos de problema. Para essa análise, as frequências das soluções foram agrupadas por níveis, porque tomá-las por subníveis inviabilizaria o tratamento estatístico dos dados, por conta do alto número de caselas com valor zero.

Assim sendo, a Tabela 1 apresenta frequências e percentuais das soluções dos participantes de cada série a cada problema, conforme os níveis identificados.

Examinados os dados da tabela, impõem-se desde logo à vista os altos percentuais de soluções de nível I dos participantes para todos os problemas e séries. Se adicionados, os percentuais de solução dos níveis I e II, os menos avançados na hierarquia obtida, representam a maioria das soluções para todas as séries e todos os problemas.

Para efetuar a análise estatística, foi atribuído a cada tipo de solução possível da Tabela 1(de resposta em branco até soluções de nível IV) um valor numérico de ordem (de 1 a 6).

Mediante a análise de variância (ANOVA) de Kruskal-Wallis, foram comparadas as amostras provenientes de cada série para cada problema, com a finalidade de verificar se há diferenças significativas entre elas. O teste acusou que somente se manifestaram diferenças significativas entre os níveis de solução ao problema 1 ($x^2$ = 11, 6324, p= 0,008755) e ao problema 3 ($x^2$ = 9,1234, p = 0, 02758) (gl = 3 e $\alpha$ = 0,05). Conforme o teste das comparações múltiplas, essas diferenças são significativas entre os níveis das soluções de 4ª e os das soluções de 6ª série.

Tabela 1 - Frequências e percentuais de soluções a cada problema, por série e níveis de raciocínio combinatório (n = número de participantes/soluções).

| | Problema/Série | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | | | | 2 | | | | 3 | | | | 4 | | | |
| Nível | 3ª n=24 | 4ª n=26 | 5ª n=31 | 6ª n=29 | 3ª n=24 | 4ª n=26 | 5ª n=31 | 6ª n=29 | 3ª n=24 | 4ª n=26 | 5ª n=31 | 6ª n=29 | 3ª n=24 | 4ª n=26 | 5ª n=31 | 6ª n=29 |
| Em branco | 0(0,0) | 2(7,7) | 1(3,2 | 3(10,3) | 1(4,1) | 3(11,5) | 3(9,7) | 1(3,4) | 0(0,0) | 1(3,9) | 3(9,7) | 3(10,3) | 0(0,0) | 4(15,3) | 3(9,7) | 2(6,9) |
| Só respostas | 0(0,0) | 0(0,0) | 1(3,2) | 2(6,9) | 1(4,1) | 0(0,0) | 2(6,4) | 1(3,4) | 1(4,1) | 0(0,0) | 0(0,0) | 1(3,4) | 0(0,0) | 1(3,9) | 0(0,0) | 0(0,0) |
| I | 14(58,4) | 10(38,5) | 22(71,0) | 18(62,2) | 13(54,3) | 15(57,7) | 16(51,7) | 24(82,9) | 15(62,5) | 16(61,4) | 24(77,5) | 22(76,0) | 17(70,9) | 16(61,7) | 23(74,3) | 24(82,8) |
| II | 10(41,6) | (26,9) | 6(19,4) | 6(20,6) | 9(37,5) | 2(7,8) | 3(9,6) | 3(10,3) | 8(33,4) | 4(15,4) | 2(6,4) | 3(10,3) | 7(29,1) | 2(7,6) | 3(9,6) | 3(10,3) |
| III | 0(0,0) | 6(23,0) | 1(3,2) | 0(0,0) | 0(0,0) | 4(15,3) | 7(22,6) | 0(0,0) | 0(0,0) | 4(15,4) | 0(0,0) | 0(0,0) | 0(0,0) | 3(11,5) | 2(6,4) | 0(0,0) |
| IV | 0(0,0) | 1(3,9) | 0(0,0) | 0(0,0) | 0(0,0) | 2(7,7) | 0(0,0) | 0(0,0) | 0(0,0) | 1(3,9) | 2(6,4) | 0(0,0) | 0(0,0) | 0(0,0) | 0(0,0) | 0(0,0) |

Logo, parece que são os participantes da 4ª série que se destacam significativamente e em relação aos da 6ª série quanto aos percentuais mais baixos de solução de nível I e aos mais altos de soluções dos níveis seguintes (até o mais avançado, nível IV). Porém, apesar de suas soluções concentrarem-se também nos níveis I e II, aquela tendência somente é significativa para os problemas 1 e 3, ainda que se esboce para os problemas 2 e 4 (ver percentuais e frequências da Tabela 1). Esses resultados contrariam a expectativa de que, quanto mais avançada a escolaridade, menor seria a probabilidade de os participantes expressarem soluções menos adiantadas quanto ao raciocínio combinatório ali expresso. A notar que os participantes da 4ª série são os que têm o menor percentual de soluções de nível I, e em relação ao problema 1 (38,4%).

Comparados também os níveis das soluções das séries, independentemente dos problemas (levando-se em consideração a média dos valores atribuídos aos níveis aos quatro problemas), manifestou-se diferença significativa somente entre as médias da 3ª e da 6ª série ($x^2$ = 8,9064, p= 0,03056. Nesse caso, poder-se-ia esperar, também, uma diferença significativa entre a 4ª e a 6ª série, pois a média da 4ª série é a maior; porém, isso não se verifica, porque a variabilidade das médias associada à 4ª série foi muito grande.

A ANOVA de Friedman, aplicada a cada série separadamente, para a comparação entre os níveis das soluções aos quatro problemas, também mostrou diferenças consideráveis entre esses níveis apenas na 4ª série e entre os problemas 1 e 4 ($x^2$ = 12,0224, gl = 3, p = 0,007307). Também conforme Friedman, comparados os níveis de solução, independentemente da série, somente há diferença significativa entre eles no caso das soluções aos problemas 1 e 4 ($x^2$ = 8,1745, gl = 3, p = 0,04254).

Essas indicações sinalizam dificuldade maior em expressar soluções de níveis mais adiantados ao problema 4, o que um exame dos dados da Tabela 1 pode asseverar, mesmo para as soluções dos participantes da 4ª série, os que, em linhas gerais, mostraram soluções mais avançadas, conforme os demais indicadores acima expostos.

Complementando a análise estatística, foi aplicado o teste de Spearman, para verificar o significado dos coeficientes de correlação dos níveis de solução entre: a) problemas, independentemente das séries; b) séries, independentemente de problemas; c) problemas em cada série; d) séries em cada problema.

Considerados todos esses casos, somente um índice forte de correlação positiva ($rs$ = 0, 73) manifestou-se entre os níveis de solução aos problemas 1 e 3 na 6ª série, significativo com p = $6{,}838.10^{-6}$. Dessa forma, espera-se que os alunos da 6ª série pertencentes a certo nível no problema 1 estejam, também, classificados no mesmo nível no problema 3.

Esse resultado da 6ª série revela-se interessante, dado que os problemas 1 e 3 são os que envolvem valores mais baixos, embora referentes respectivamente a duas variáveis (com distractores) e a três variáveis. É resultado também conforme a dois outros casos de correlação positiva significativa, mas com índices moderados, a saber: do conjunto dos níveis das soluções, independentemente de série ($rs$ = 0,57, com p = $8{,}629.10^{-11}$); e, na 4ª série ($rs$ = 0,60, com p = 0,001039), cujos níveis de solução, vimos acima, diferenciam-se significativamente dos da mesma 6ª série, nos mesmos problemas 1 e 3.

Os casos restantes de correlação positiva significativa moderada associam tanto os níveis das soluções aos problemas 1 e 2 na 3ª série ($rs$ = 0,62, com p = 0,001280), como os das soluções aos problemas 3 e 4 na 5ª série ($rs$ = 0,63, com p = 0,000156); e, ainda, associam os níveis das soluções da 3ª e os da 5ª série no problema 2 ($rs$ = 0,55, com p = 0,005068).

## Discussão

Em resposta aos propósitos deste estudo, novamente pudemos não apenas descrever hierarquicamente diferentes níveis de raciocínio combinatório, presentes nas soluções escritas de alunos de 3ª a 6ª série a problemas multiplicativos de produto cartesiano, mas, especialmente, pudemos avançar na obtenção de uma hierarquia mais válida e fidedigna, em comparação com as hierarquias obtidas a respeito em trabalhos anteriores.

A hierarquia exposta neste texto retrata em termos gerais a tendência já desenhada naqueles estudos: de soluções sinalizando ausência de raciocínio combinatório, conforme, agora, os limites maiores ou menores da interpretação dos respondentes das relações entre os elementos do texto do problema, até aquelas em que há sinais de presença desse tipo de raciocínio, identificados os momentos de transição entre tais patamares e dentro de cada um deles.

O progressivo aumento dos casos de combinação de variáveis e de seus valores, mais a alteração qualitativa do cálculo relacional aditivo para o multiplicativo com a presença, primeiro, do esquema da correspondência "um para um", depois a do esquema da correspondência de "um para muitos", respectivamente, seguem sendo os dois outros eixos de avaliação que nortearam a descrição dos níveis e subníveis identificados. São eixos característicos, também presentes na literatura sobre a construção do raciocínio combinatório no caso de outros conceitos (Inhelder; Piaget, 1972; Piaget; Szeminska, 1971). Essa constatação fala a favor da validade da hierarquia obtida e da adequação de tomar tais características como critérios para avaliar soluções a problemas de produto cartesiano segundo os níveis de raciocínio combinatório que elas podem revelar.

Os resultados sugerem uma relação entre a transformação das referidas características, de forma que quanto mais aumentam nas soluções os casos de combinação das variáveis e de seus valores, mais ali aparecem sinais da presença em transformação do cálculo relacional aditivo em direção ao multiplicativo. Também podemos pensar na coerência entre esses dois eixos de critérios com o terceiro, adotado, o referente à interpretação das relações entre os diversos elementos do texto do problema: em paralelo, esta interpretação progressivamente perde marcas de ordem sociocultural e ganha teor matemático, na medida em que passam a marcar a cena formas cada vez mais complexas de interligar as variáveis.

Tais avanços, provavelmente interligados, podem ser explicados por uma progressiva conceitualização "em ato" (Vergnaud, 1990) da ideia de variáveis e de seus valores, havendo primeiro a identificação e a discriminação das variáveis e, depois, as de seus valores, com a consequente e progressiva transformação da natureza da relação possível entre esses valores.

Porém, em que quadro interpretar essa transformação da natureza da relação possível entre variáveis e seus valores?

Foi possível constatar que os avanços na identificação das variáveis e das combinações entre elas, conforme seus respectivos valores, ocorrem inicialmente por tateio, havendo na sequência melhor dissociação dos casos e um controle cada vez mais sistemático de suas inter-relações (Inhelder; Piaget, 1972). Do ponto de vista da dinâmica do funcionamento cognitivo, haveria nesse caso necessidade crescente de coordenar as composições possíveis "um para muitos" segundo uma progressiva abertura de possibilidades em seu interjogo com o necessário (Piaget; Berthoud-Papandropoulos; Kilcher, 1986).

De outra parte, o exame conjunto e mais acurado das soluções dos participantes de 3ª a 6ª séries levou, mais uma vez, à constatação de que as soluções de nível IV, em que o raciocínio combinatório já se faz presente, expressam-se, ao menos, em dois patamares diferentes: aquele que, ainda apoiado no cálculo aditivo e, sobretudo, em diagramas, traz subjacentes marcas das operações concretas; o outro, o seguinte, onde há a presença de cálculo propriamente multiplicativo e cujas marcas já são progressivamente as das operações formais, com representações já de caráter algébrico. Estas já podem ser consideradas como representações de representações, dado que já sinalizam a dissociação sistemática e a associabilidade multiplicativa e comutativa entre as variáveis e seus valores (Inhelder; Piaget, 1972; Mekhmandarov, 2000; Piaget; Szeminska, 1971). Logo, é provável que trabalhar com problemas de produto cartesiano na escola favoreça o aparecimento da lógica das proposições, pois que esquemas e relações de caráter combinatório são uma das suas dimensões (Inhelder; Piaget, 1972).

A possibilidade de soluções em que o raciocínio combinatório se faz presente com características algébricas corrobora a hipótese de que, malgrado suas peculiaridades estruturais, o trabalho com a álgebra pode ser iniciado nas series básicas do Ensino Fundamental, via problemas de produto cartesiano.

Essa posição remete à polêmica sobre a ideia de que a aprendizagem da aritmética é necessariamente anterior à da álgebra, e/ou a de que a álgebra é uma generalização da aritmética. Partilhada dentro e fora das instituições responsáveis pela educação escolar, essa convicção tem encontrado apoio em resultados de pesquisas que continuam a destacar as imensas dificuldades na aprendizagem da álgebra ensinada ao final do Ensino Fundamental, no Ensino Médio e, inclusive, no Ensino Superior (Collis, 1975; Fujii, 1993; Herscovics; Linchevski, 1991; Kuchemann, 1981, e.g.).

Apesar de já haver na literatura acadêmica e nas salas de aula evidências que abalam essas afirmações, pouco consenso há entre os pesquisadores e professores sobre a possibilidade e os riscos de romper a ordem linear: antes, ensino da aritmética; depois, ensino da álgebra.

No entanto, fortalece-se a hipótese de que é possível oferecer boas oportunidades para que as crianças pensem algebricamente desde as séries iniciais do Ensino Fundamental. E a solução de problemas de produto cartesiano seria uma delas, para que o uso da natureza potencialmente algébrica da aritmética venha a construir uma ponte vigorosa entre as experiências aritméticas e o conceito de variável (Fujii, 1993), contrariando a divisão que existe entre a aritmética e a álgebra na escola.

A esse respeito, Arcavi, Friedlander e Hershkowitz (1989-90) sugerem o uso de termos como expressões numéricas generalizáveis ou expressões quase variáveis, com a intenção de apontar a necessidade de uma reforma do currículo das séries iniciais, sugerindo, já para o início da escolarização, atividades algébricas, evidentemente sem o uso da linguagem algébrica convencional.

Por sua vez, Lins e Gimenez (1997, p. 10) sugerem que "... é preciso começar mais cedo o trabalho com álgebra, e de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra...".

Logo, além de recomendar a presença do trabalho com problemas de produto cartesiano desde os inícios da escola fundamental para desenvolver a lógica das proposições, nossos resultados também apontam o trabalho com tal tipo de problema como uma das circunstâncias favoráveis para fazer com que o pensamento aritmético e o algébrico se desenvolvam de forma articulada, sem o divórcio hierárquico da visão tradicional a respeito.

Essas conclusões ganham em consistência diante dos resultados que a análise estatística mostra a favor dos participantes da 4ª série (também, de certo modo, da 3ª série), no que concerne à expressiva incidência, ali, de soluções com progressivos sinais de presença de raciocínio combinatório. Embora esses resultados sejam significativos somente no caso dos problemas 1 e 3 (com valores numéricos baixos), eles muito surpreendem ao serem comparados aos dos participantes da 6ª série, com menor incidência daquelas soluções.

Evidencia-se, desse modo, que tão somente anos de escolaridade no Ensino Fundamental não bastam para que ocorram soluções progressivamente mais sofisticadas em raciocínio combinatório, no caso dos problemas focalizados. Os surpreendentes resultados dos participantes com menos anos de escolaridade, quando comparados aos de mais anos de escola, permitem afirmar que sobretudo a qualidade da intervenção escolar – em vez de anos de escola - deve ser levada em conta na explicação do ocorrido. Como qualidade da intervenção escolar, queremos significar um ensino voltado preferencialmente à reflexão, à compreensão das relações matemáticas que definem o teor de problemas tais como os do estudo. É muito provável que esta tenha sido a marca da experiência com o ensinar e o aprender que principalmente nossos participantes da 4ª série estavam tendo na ocasião, o que necessariamente faz pensar na qualidade do trabalho do professor, no quadro de uma proposta pedagógica pertinente da escola.

Se esse tipo de fator explicativo dos progressos do raciocínio combinatório no trato dos problemas focalizados parece importante, cumpre, no entanto, adiantar ser ele provavelmente apenas necessário, pois, ao que tudo indica, tais avanços, para ocorrer, também envolvem dimensões do desenvolvimento cognitivo do indivíduo. Tais avanços se tornam prováveis, então, à medida que estruturações correspondentes ocorram na progressão dos períodos, como bem o sugerem as referências acima examinadas (Inhelder; Piaget, 1972; Piaget; Berthoud-

Papandropoulos; Kilcher, 1986). Logo, estamos diante de resultados que podem ser explicados pela necessária conjunção interativa de efeitos do desenvolvimento cognitivo e os do processo de ensino-aprendizagem escolar.

Outro aspecto que os resultados da análise estatística põem em discussão é o da maior dificuldade do problema 4 em ser resolvido mediante esquemas e relações de ordem combinatória, o que encontra a hipótese de que há problemas de produto cartesiano (no caso, temos apenas os multiplicativos) mais simples e mais complexos, (Vergnaud, 1985). Cumpre assinalar que, dentre os quatro problemas propostos, é este o que traz não só três variáveis, como estas aparecem com valores numéricos altos, afora conter valores como distractores.

Também os resultados que destacam as significativas diferenças a favor dos participantes da 4ª série nos problemas 1 e 3, mais os que mostram correlações significativas, moderadas ou fortes, entre as soluções a esses dois problemas (mesmo na 6ª série, em que as soluções foram as menos avançadas), falam a favor da ideia de que valores numéricos baixos nos problemas representam menor dificuldade de solução, sob a ótica do raciocínio combinatório, do que a presença de duas ou três variáveis. Daí que soluções com marcas de raciocínio combinatório surgiriam antes, na solução desse tipo de problema de produto cartesiano, o que seria facilitado, quando já dispõem os alunos de recursos algébricos para resolvê-los.

A esse respeito, e diante da presença interessante de soluções com diagramas (principalmente na 4ª e na 5ª série), os resultados tornam plausível a ideia de que a existência nos problemas, de valores numéricos menores, mesmo quando estão em jogo três variáveis, pode favorecer o aparecimento progressivo de cálculo relacional multiplicativo de caráter combinatório, principalmente quando são os alunos introduzidos ao uso de ferramentas como os diagramas. Esse gênero de ferramentas de representação parece fundamental, porque é apoio à “manipulação espacial” de correspondências “um para muitos”, algo mais viável entre os valores, quando estes são relativamente baixos.

Para encerrar, embora tenhamos acima afirmado os ganhos em validade e fidedignidade da nova hierarquia proposta neste texto, seguimos tendo reservas quanto à identificação e à definição dos níveis e subníveis que a compõem. São restrições que se devem ao restrito grupo de participantes que examinamos, apenas alunos de 3ª a 6ª séries, componentes de amostra obtida por conveniência.

Também seguem as restrições quanto ao procedimento de coleta de dados. Em primeiro lugar, são eles limitados à solução escrita dos participantes aos problemas, obtida coletivamente, sem que tenhamos deles qualquer outro tipo de dado, verbal, por exemplo, referente à justificativa ou à interpretação própria de sua solução. Nada sabemos, então, dos participantes, de sua compreensão em plano metacognitivo das relações e dissociações sistemáticas que regeriam as combinações (Mekhmandarov, 2000). Em segundo lugar, a situação de coleta de dados foi a de sala de aula, o que pode ter sugerido a tantos participantes (e de todas as séries) a necessidade de expressar soluções algorítmicas da matemática escolar, conforme a ideia de que problemas de matemática devem ser resolvidos por algum cálculo. Um terceiro ponto concerne ao fato de que o instrumento de coleta conteve apenas problemas multiplicativos de produto cartesiano, uma restrição importante à hierarquia descrita. Que modificações lhe poderiam ser feitas, se examinados os sinais de raciocínio combinatório em soluções a problemas de produto cartesiano comportando a divisão?

De qualquer modo, a hierarquia ora proposta é referência para estudos de replicação. Estes se fazem claramente necessários com diferentes tipos de problemas de produto cartesiano, com amostras mais amplas e de maior abrangência quanto às séries do Ensino Fundamental e com procedimentos mais flexíveis.

Em síntese, os resultados obtidos apontam para a necessidade e a relevância do trabalho com problemas de produto cartesiano na escola fundamental, desde as séries iniciais, não somente pelo seu significado matemático específico, mas também como alternativa para promover o desenvolvimento cognitivo do aluno, ao ativar a construção de seu raciocínio combinatório, com possíveis reflexos em outras áreas da aprendizagem escolar.

## Referências Bibliográficas


ARCAVI, A.; FRIEDLANDER A.; HERSHKOWITZ, R. L'algèbre avant la lettre. *Petit X*, n. 24, p. 61-71, 1989-90.

COLLIS, K. F. *A study of concrete and formal operations in school mathematics:* a Piagetian viewpoint. Australian Council for Educational Research Series 95. Hawthorn, Victoria: ACER, 1975.

ENGLISH, L. Children's use of domain-specific knowledge and domain-general strategies in novel problem solving. *British Journal of Educational Psychology*, n. 62, p. 203-216, 1992.

FUJII T. A clinical interview on children's understanding and misconceptions of literal symbols in school mathematics. In: I. HIRABAYASHI et al. (Ed.). *Proceedings of the 17th PME International Conference.* Tsukuba: University of Tsukuba, 1993. v.1, p. 173-180.

HERSCOVICS, N.; LINCHEVSKI, L. Pre-algebraic thinking: Range of equations and informal solution processes used by seventh graders prior to any instruction. In: F. FURINGHETTI (Ed.). *Proceedings of the 15th. PME International Conference*, Assisi: PME, 1991. v. 2, p.173-180.

INHELDER, B.; PIAGET, J. *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Trad.de M. T. Cevasco. Buenos Aires: Paidos, 1972. Trabalho original publicado em 1955.

KUCHEMANN, D. Algebra. In : HART, K. (Ed.). *Children's understanding of mathematics*: 11 -16. London/UK: John Murray, 1981. p. 102-119.

LEMOYNE, G. et al. Addition, addition répetée, multiplication: un trajet éclairé par les schèmes d'action. In : ARTIGUE, M. et al. (Ed.), *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1994. p. 236-242.

LINS, R.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.* Campinas: Papirus, 1997. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

MEKHMANDAROV, I. Analysis and synthesis of the Cartesian product by kindergarten children. In: NAKAHARA, T.; KOYAMA, M. (Ed.), *Proceedings of the 24th. Annual Conference of the PME*. Hiroshima: Hiroshima University, 2000. v. 3, p. 295-301.

MORO, M. L. F.; SOARES, M. T. C. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 8, p. 99-124, 2006.

NUNES, T.; BRYANT, P. *Crianças fazendo matemática*. Trad. de S. Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PIAGET, J.; BERTHOUD-PAPANDROPOULOS, J.; KILCHER, H. Multiplicação e associatividade multiplicativa. In: J. PIAGET (Dir.), *O possível e o necessário II - A evolução dos necessários na criança*. Trad. de B. M. de Albuquerque Porto Alegre: Artes Médicas, 1986. p. 72-88. Original publicado em 1983.

PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. *A gênese do número na criança*. Trad. de C. M. Oiticica. Rio de Janeiro: Zahar, 1971. Original publicado em 1941.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. Em: LES, R. e LANDAU, M. (Org.), *Acquisition of Mathematics: concepts and processes*. London: Academic Press, p. 127-174, 1983.

VERGNAUD, G. *L'enfant, la mathématique et la réalité*. 3. ed. Berne: Peter Lang, 1985.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.