PREORDENINGE VAN TEORIEË GEÏNDUSEER DEUR SEMANTIESE INFORMASIE

deur

ISABELLA CORNELIA BURGER

PROEFSKRIF

voorgelê ter vervulling van die vereistes
vir die graad

PHILOSOPHIAE DOCTOR

in

WISKUNDE

in die

FAKULTEIT NATUURWETENSKAPPE

aan die

RANDSE AFRIKAANSE UNIVERSITEIT

PROMOTOR: PROF. J. HEIDEMA
MEI 1992

Aan my ouers en Pieter

VOORWOORD

Ek wil my hoogste dank betuig teenoor die volgende persone:

- my promotor, professor Johannes Heidema, vir sy inspirerende leiding, vriendelike hulp en bystand, voortdurende motivering en die vele insiggewende gesprekke wat ek met hom gevoer het;

- my ouers vir hulle voortdurende belangstelling in my studieloopbaan en hulle opoffering om die universiteitsopleiding wat aan die basis van hierdie proefskrif lê, moontlik te maak;

- my eggenoot vir sy liefdevolle bemoediging, geduld en bystand;

- Annetjie Boshoff vir die netjiese tikwerk.

——oOo——

I think, Socrates, as presumably you do yourself, that in this life it is either altogether beyond our powers, or at least very difficult, to attain certain knowledge about matters such as these. And yet a man would be a coward if he did not try with all his might to refute every argument about them, refusing to give up before he has worn himself out by examining them from all sides. For he must do one of two things: either he must learn, or discover, the truth about these matters, or if that is beyond his powers, he must grasp whatever human doctrine seems to him to be the best, and to offer the hardest resistance to refutation; and, mounting on it as upon a raft, he must venture into danger and sail upon it through life, unless he can mount on something stronger, less dangerous, and more trustworthy ...

— PLATO (in Popper [1969], p. 252).

INHOUDSOPGAWE

INHOUDSOPGAWE (VERVOLG)

——000——

OPSOMMING

Oral waar informasie of empiriese data benut moet word, byvoorbeeld in die keuse tussen twee opponerende teorieë of in die ontwerp van 'n deskundige stelsel om besluitneming te ondersteun, tree fundamentele vrae na vore: wanneer is, met betrekking tot gegewe informasie of data, een teorie in vergelyking met 'n ander een meer waarheidsgetrou, meer betroubaar, of meer informatief?

Die eerste formele definisie van waarheidsgetrouheid is deur Popper geformuleer. Popper se kwalitatiewe definisie van waarheidsgetrouheid berus op die beginsel van logiese afleibaarheid: hoe groter die versameling van waar sinne afleibaar uit 'n teorie en hoe kleiner die versameling van onwaar sinne afleibaar uit 'n teorie, hoe nader is die teorie aan die waarheid. In Hoofstuk 1 bespreek ons kortliks Popper se benadering tot waarheidsgetrouheid. Enkele ander belangrike benaderings word ook bekyk, onder andere dié van Oddie, Kuipers en Niiniluoto.

In Hoofstuk 2 definieer ons die begrip *konfigurasie* — eers in die *algemeen* (Afdeling **2.1**) en daarna in die *proposisielogika* (Afdeling **2.2**) en *predikaatlogika* (Afdeling **2.3**). Die begrippe van 'n *positiewe* en *negatiewe konfigurasie* word ook omskryf (**2.1**) en die betekenis daarvan in die proposisielogika (**2.2**) en predikaatlogika (**2.3**). Positiewe en negatiewe konfigurasies word op 'n aantal maniere, semanties en sintakties, gekarakteriseer.

In die proposisielogika is die begrip "konfigurasie" 'n gemeenskaplike veralgemening van sinskonnektiewe, sinne en teorieë. Dié begrip dien dan ook as raamwerk vir die vergelyking van teorieë in terme van hul waarheidsgetrouheid (Hoofstuk **3**).

In Hoofstuk **3** word 'n model vir die vergelyking van proposisionele teorieë teen die agtergrond van *volledige informasie* oor die "werklikheid" voorgestel. Ons definieer naamlik in Afdeling **3.1** 'n waarheidsgetrouheid–preordening van teorieë in

terme van die *positiewe* en *negatiewe afsluitings* van teorieë. Hierdie voorstel lewer dieselfde waarheidsgetrouheid–preordening as wat deur Brink en Heidema as 'n "magsordening" gedefinieer is. Die ooreenkomste en verskille van die preordening met Popper se definisie van waarheidsgetrouheid word in Afdeling **3.2** bespreek.

Die waarheidsgetrouheid–preordening kan tot 'n parsiële ordening saamgetrek word en dan in 'n *volledige distributiewe tralie ingebed* word. In Afdeling **3.3** beskryf ons hierdie inbeddingsproses en toon aan dat elke tralie van alle positiewe (of negatiewe) konfigurasies isomorf aan 'n vrye distributiewe tralie is. 'n Rekursiewe konstruksie vir die verkryging van die vrye distributiewe tralie met n + 1 voortbringers uit die vrye distributiewe tralie met n voortbringers, word ook voorgestel.

Die waarheidsgetrouheid–preordening kan aan die hand van die *konvekse* en *nie–konvekse inhoud* van elke teorie, ook *verfyn* word tot 'n parsiële ordening — dié proses word in Afdeling **3.4** bespreek. (Vir 'n verkorte weergawe van Hoofstuk **3**, verwys ons die leser na die artikels van Burger en Heidema ([1990] en [199?]).)

In Hoofstuk **4** veralgemeen ons die hele verhaal van Hoofstuk 3 — die verhaal van die waarheidsgetrouheidordening van proposisionele teorieë teen die agtergrond van volledige informasie oor die waarheid — na die geval van *onvolledige informasie*. Twee leksikografiese ordeninge word in **4.1** gedefinieer vir die vergelyking van teorieë se datagetrouheid — een wat met 'n dapper en een wat met 'n versigtige benadering tot datagetrouheid geassosieer kan word. Dié ordeninge kan versterk word tot produkordeninge. Filosofiese eienskappe van die ordeninge word bespreek, onder andere die eienskappe met betrekking tot betroubaarheid en informatiwiteit. Die modellering van onsekerheid in digitale inligtingsoordrag word in **4.2** geopper as 'n toepassingsmoontlikheid van die ordeninge.

——oOo——

SUMMARY

Frequently when information or empirical data has to be employed, e.g. in choosing between rival scientific theories or in the design of a scientific system to support decision making, fundamental questions come to the fore: when is, relative to available information, one theory closer to the truth, more dependable, or more informative than another theory?

In 1960 Popper gave the first formal explication of verisimilitude (truthlikeness). Popper's qualitative theory of truthlikeness employed the notion of logical consequence: a theory is closer to the truth the larger the set of its true consequences and the smaller the set of its false consequences. In Chapter 1 we discuss Popper's theory of truthlikeness as well as a few other important approaches, such as those of Oddie, Kuipers and Niiniluoto.

The notion, *configuration*, is defined in Chapter 2 — firstly in *general* (Section **2.1**) and then in the *propositional logic* (Section **2.2**) and *predicate logic* (Section **2.3**). The notions of a *positive* and *negative configuration* are also described (**2.1**) as well as their meanings in the propositional logic (**2.2**) and predicate logic (**2.3**). Positive and negative configurations are characterized, semantically and syntactically, in a number of equivalent ways.

The notion "configuration" is in the propositional logic a common generalisation of connectives, sentences and theories. Because of this fact, configurations provide a framework within which we can compare the truthlikeness of theories (Chapter **3**).

In Chapter **3** we propose a model for the comparison of propositional theories against the background of full information about the "actual world". We define namely (in Section **3.1**) a verisimilar preordering of theories by employing the *positive* and *negative closure* of each theory. This proposal delivers the same

verisimilar preordering of theories that has been defined by Brink and Heidema as a "power ordering". The similarities and differences of the preordering to Popper's definition of truthlikeness are discussed in Section **3.2**.

The preordering may be collapsed to a partial ordering and then *embedded into a complete distributive lattice.* In Section **3.3** we describe this embedding process and also show that each lattice of all positive (or negative) configurations is isomorphic to a free distributive lattice. A recursive construction for obtaining the free distributive lattice with n + 1 generators from the free distributive lattice with n generators is also proposed.

The preordering may also be *refined* to a partial ordering by employing the *convex–content* and *non–convex content* of each theory — we discuss this process in Section **3.4**. (We refer the reader to the papers of Burger and Heidema ([1990] & [199?]) for a shorter version of Chapter **3**.)

In Chapter **4** we generalise the whole story of Chapter **3**, i.e. the story of the verisimilar ordering of propositional theories against the background of full information, to the case of *incomplete information.* We define (in **4.1**) two lexicographical orderings — one which may be associated with a brave approach and one which may be associated with a cautious approach to the comparison of theories in terms of available information. These orderings may be strengthened to product orderings. Philosophical properties of the orderings are discussed, among others the properties in connection with dependability and informativity. The modelling of uncertainty in the transfer of digital information is proposed (in **4.2**) as a possibility for application of the orderings.

——oOo——

HOOFSTUK 1

WAARHEIDSGETROUHEID — 'N BESPREKING VAN ENKELE BELANGRIKE BENADERINGS

The gods did not reveal, from the beginning,
All things to us; but in the course of time,
Through seeking we may learn, and know things better.

But as for certain truth, no man has known it,
Nor will he know it; neither of the gods,
Nor yet of all the things of which I speak.
And even if by chance he were to utter
The final truth, he would himself not know it;
For all is but a woven web of guesses.

— XENOPHANES (in Popper [1969], p. 26).

Die probleem van *waarheidsgetrouheid* ("verisimilitude") is om te kan spesifiseer wanneer een teorie *nader aan die waarheid* (of werklikheid) is as 'n ander teorie. Alhoewel van die vroegste filosowe, soos byvoorbeeld Plato, reeds oor die waarheid van teorieë gewonder en getwyfel het, is die probleem van waarheidsgetrouheid vir die eerste keer formeel aangepak deur Popper in 1960 ([1969] en [1972]).

Professor Sir Karl Raimund Popper is op 28 Julie 1902 in Himmelhof in die distrik Ober St. Veit in Wenen gebore. As die jongste van drie kinders, met 'n akademikus as vader en 'n uiters musikale moeder, het Popper in 'n ryk opvoedkundige milieu, omring deur filosofiese boeke, opgegroei. Vroeg reeds het hy oor allerlei filosofiese vrae gewonder (Schilpp [1974]).

Popper se filosofie oor waarheidsgetrouheid het eintlik ontstaan na aanleiding van sy filosofie oor die doel van die wetenskap. Volgens Popper behoort die doel van enige wetenskap die *openbaarmaking* van die onbekende werklikheid te wees. In hierdie proses — die proses om die waarheid te probeer ontdek — vind daar 'n *konstante groei* plaas. Nie slegs groei ons kennis oor die onbekende werklikheid nie, maar die wetenskap groei ook. Vir Popper is die konstante groei of vooruitgang van die wetenskap essensieel vir die empiriese en rasionele karakter van die wetenskap: "It is the way of its growth which makes science rational and empirical" (Popper [1969], p. 215). Die groeiproses word bewerkstellig deur die evaluering van bestaande teorieë. Bestaande teorieë word gedurig heroorweeg en aanvaar of verwerp en deur beter teorieë vervang. Popper [1969] self stel dit so: "... it is not the accumulation of observations which I have in mind when I speak of the growth of scientific knowledge, but the repeated overthrow of scientific theories and their replacement by better and more satisfactory ones" (p. 215).

Popper gebruik die kriterium van *weerlegbaarheid* of *toetsbaarheid* om tussen teorieë te diskrimineer. Hoe meer weerlegbaar 'n teorie is, hoe meer wetenskaplik is die teorie vir Popper. Ackermann [1976] stel dit so: "... Popper's views of scientific methodology are his conception of falsifiability as a way of distinguishing genuinely scientific statements from nonscientific statements ..." (p. 6). Die mate van weerlegbaarheid waaroor 'n teorie beskik hang egter saam met die mate van *logiese inhoud* of *deduktiewe krag* van die teorie. 'n Teorie met 'n sterk logiese inhoud, dit wil sê 'n teorie wat baie sê of wat 'n hoë mate van empiriese informasie bevat, kan "strenger" getoets word as 'n teorie met 'n swak logiese inhoud. Dit beteken dat 'n teorie wat oor 'n hoë mate van deduktiewe krag beskik, 'n kleiner waarskynlikheid het om as "waar" bewys te word as 'n teorie met swak deduktiewe krag. 'n Groot waarskynlikheid (om "waar" te wees) kom dus ooreen met 'n swak logiese inhoud. Aldus Popper [1969] beskik 'n bevredigende teorie dus oor die volgende eienskappe: "All these properties, which ... we desire in a theory can be shown to amount to one and the same thing: to a higher degree of empirical *content* or of testability ... In short, we prefer an interesting, daring, and highly informative theory to a trivial one" (p. 217).

Popper klassifiseer homself as 'n "negativist" wanneer dit gaan oor die beoordeling van teorieë as aanvaarbaar of onaanvaarbaar deurdat hy slegs in die kritisering en toetsing van teorieë belangstel en glad nie poog om teorieë as geldig te bevestig nie. Popper glo dan ook dat geen teorie as waar bewys kan word nie; al ons teorieë is onwaar; en die strewe na Die Waarheid dus 'n nimmereindigende proses: "The way in which knowledge progresses, and especially our scientific knowledge, is by unjustified (and unjustifiable) anticipations, by guesses, by tentative solutions to our problems, by *conjectures*" (Popper [1969], p. vii).

Alhoewel Die Waarheid nooit ten volle geken kan word nie, moet die wetenskap steeds streef en soek na hierdie Waarheid (anders stagneer die wetenskap). 'n Bevredigende teorie moet dus nie net oor 'n sterk logiese inhoud beskik nie, die teorie moet ook in ooreenstemming met bestaande feite wees en poog om die onbekende waarheid te verduidelik en te openbaar. Volgens Popper [1969] moet beide kriteria geld wanneer teorieë geëvalueer word: "Thus we accept the idea that the task of science is the search for truth, that is, for true theories ... Yet we also stress that truth is not the only aim of science. We want more than mere truth: what we look for is interesting truth — truth which is hard to come by ... truth which has a high degree of explanatory power ... I therefore hold that both ideas — the idea of truth, in the sense of correspondence with the facts, and the idea of content — play about equally important roles in our considerations" (pp. 229, 231).

Die kombinasie van bogenoemde twee kriteria lei uiteindelik tot Popper se definisie van waarheidsgetrouheid. Popper glo, dat alhoewel die Volle Waarheid nooit bereik kan word nie, daar wel tog *grade van nader–aan–die–waarheid* bestaan. Dit beteken, een onwaar teorie kan 'n beter beskrywing of benadering van die waarheid wees as 'n ander teorie. In Popper se eie woorde: "This suggests that we combine here the ideas of truth and content into one — the idea of a degree of better (or worse) correspondence to truth ... the idea of ... verisimilitude" ([1969], pp. 232, 233).

Popper gebruik die beginsel van *logiese afleibaarheid* in sy kwalitatiewe definisie van waarheidsgetrouheid. Hy beskou naamlik die versamelings van waar en onwaar sinne afleibaar uit 'n teorie en noem dit onderskeidelik die "*truth–content*" en "*falsity–content*" van die teorie. Hoe groter die "truth–content" en hoe kleiner die "falsity–content" van 'n teorie, hoe nader aan die waarheid is die teorie. Formeel gestel, in Popper se eie woorde (in Miller [1974], p. 167):

> "Assuming that the truth–content and the falsity–content of two theories t_1 and t_2 are comparable, we can say that t_2 is more closely similar to the truth, or corresponds better to the facts, than t_1, if and only if either
>
> (a) the truth–content but not the falsity–content of t_2 exceeds that of t_1,
>
> (b) the falsity–content of t_1, but not its truth–content, exceeds that of t_2."

Die grootste tekortkoming van Popper se definisie is in 1974 deur David Miller en Pavel Tichý gelyktydig maar onafhanklik aangetoon: volgens Popper se definisie kan geen onwaar teorie nader aan die waarheid wees as 'n ander onwaar teorie nie. Dus, teorieë wat onwaar sinne bevat is onvergelykbaar in terme van waarheidsgetrouheid (Harris [1974]; Miller [1974]; Oddie [1986]; Tichý [1974] en [1976]).

Reaksies op hierdie probleem was lewendig en 'n hele vloedgolf van besprekings het gevolg met allerlei nuwe voorstelle vir definisies van waarheidsgetrouheid — met dié van Niiniluoto as die mees omvattende. 'n Oorsig van die eerste drie boeke oor die onderwerp, naamlik dié van Oddie [1986], Kuipers [1987], en Niiniluoto [1987], word gegee in Brink [1989]. Een van die nuwer benaderings, wat gebruik maak van die wiskundige begrippe van magsversameling, magsoperasie en magsrelasie, is dié van Brink en Heidema ([1987] en [1989]). Die benaderings van Oddie, Niiniluoto, Kuipers, Schurz en Weingartner word nou kortliks bespreek.

Volgens Oddie kan alle teorieë oor waarheidsgetrouheid in een van twee kategorieë ingedeel word: die "probability-content"-benadering en die "likeness"- of "similarity"-benadering, waarvan hy laasgenoemde as die belowendste beskou. Volgens die "probability-content"-benadering word die waarheidsgetrouheid van 'n teorie deur sy *waarheidswaarde* tesame met sy *logiese inhoud* bepaal. Die "similarity"-benadering beskou twee teorieë "naby" aan mekaar indien die twee teorieë baie *soortgelyk* is; een teorie (T_1) sal dus nader aan die waarheid wees as 'n ander teorie (T_2) indien T_1 'n groter ooreenkoms met die waarheid as T_2 toon (in Kuipers [1987]).

Beide Oddie en Niiniluoto se teorieë oor waarheidsgetrouheid funksioneer binne die "similarity"-benadering. Simplisties beskou, word die waarheidsgetrouheid van twee teorieë, a en β, in terme van 'n afstandsfunksie, $\Delta(a, \beta) \in [0,1]$, gedefinieer: hoe kleiner die afstand tussen twee teorieë, hoe meer gelyksoortig is die twee teorieë. Die afstand tussen 'n teorie a en Die Waarheid (τ) is dan die spesiale geval $\Delta(a, \tau)$, waar 'n afname in afstand op 'n toename in waarheidsgetrouheid dui. Volgens Brink [1989] moet, afhangende van die konteks, die definisie van Oddie egter telkens verskillend geïnterpreteer word. Dit beteken dat sy definisie, wat in terme van 'n spesiale geval geformaliseer word, nie sonder meer veralgemeen kan word nie. Brink [1989] beskou dan ook die definisie van Niiniluoto as meer gesofistikeerd as dié van Oddie: "But where Oddie single-mindedly chooses between alternatives from the outset, Niiniluoto plays the field" (p. 184). In teenstelling met dié van Oddie maak Niiniluoto se definisie ook voorsiening vir die evaluering van waarheidsgetrouheid in terme van twee komponente: 'n *waarheidskomponent* en 'n *informasiekomponent*. Kuipers [1987] stel dit so: "... the degree of truthlikeness of a particular answer is defined as a weighted combination of two factors which reflect our cognitive interest in hitting close to the truth and excluding false alternatives" (p. 2).

Waarheidsgetrouheid van teorieë word vergelyk in terme van die gelyksoortigheid wat die teorieë met die waarheid toon. Dit veronderstel dat die waarheid bekend moet wees — dat ons oor volledige inligting omtrent die waarheid beskik.

Dié probleem van waarheidsgetrouheid (teen die agtergrond van volledige informasie) staan as die "logical problem of truthlikeness" bekend. Wanneer waarheidsgetrouheid in terme van onvolledige informasie (omtrent die werklikheid) geëvalueer word, word daarna verwys as die "epistemic problem of truthlikeness". Niiniluoto het beide probleme in sy boek "Truthlikeness" [1987] behandel.

Die "similarity"–benaderings van Oddie en Niiniluoto kan as *linguisties* of *sintakties* geklassifiseer word. Dit beteken 'n teorie word as 'n linguistieke entiteit, 'n versameling sinne, beskou. In teenstelling hiermee is die benadering van Kuipers *semanties* of *model–teoreties* van aard, met die klem op strukture. Teorieë se waarheidsgetrouheid word nou nie meer in terme van die versamelings sinne waaruit die teorieë bestaan gedefinieer nie, maar in terme van die modelle van die sinne, dit wil sê in terme van die versamelingteoretiese strukture.

Volgens Brink [1989] is die belangrikste bydrae van Kuipers se gelyksoortigheiddefinisie die diskriminasie tussen twee verskillende variante van waarheidsgetrouheid. Kuipers onderskei naamlik, tussen wat hy noem, die "descriptive truth" en die "theoretical truth". Die "descriptive truth" is die struktuur wat die werklike wêreld verteenwoordig, terwyl die "theoretical truth" dui op die versameling van strukture wat die versameling van empiries moontlike strukture verteenwoordig. Die "tipe" waarheid wat beskou word, bepaal dan die definisie van waarheidsgetrouheid, soos wat Brink ([1989], p. 197) opmerk: "Likeness to descriptive truth, then, is *descriptive verisimilitude*, and likeness to theoretical truth is *theoretical verisimilitude*". (Sien ook Kuipers [1987].)

Schurz en Weingartner [1987] se benadering tot waarheidsgetrouheid toon 'n groot ooreenkoms met dié van Popper. Volgens Oddie se klassifisering van die teorieë oor waarheidsgetrouheid, is Schurz en Weingartner (en ook Popper) se definisie 'n goeie voorbeeld van die "content"–benadering. Popper het die versamelings van waar en onwaar sinne afleibaar uit 'n teorie beskou en dit onderskeidelik die "truth–content" en "falsity–content" van die teorie genoem. Die probleme wat met Popper se definisie ondervind is, het ons reeds bespreek. Schurz en Weingartner toon hoe hierdie probleme oorkom kan word deur sekere beperkings op die *deduktiewe afsluiting* van 'n teorie T (d.w.s. op die versameling sinne afleibaar uit T) te plaas en dan dié versameling in sy *waar* en *onwaar* dele te splits. In die eerste plek word die versameling logiese gevolge (afleidings) van T tot "relevante" gevolge beperk. Op die wyse word irrelevante logiese afleidings uitgeskakel. As β 'n logiese gevolg van T is, is dit byvoorbeeld irrelevant, om vir 'n arbitrêre γ, die gevolgtrekking te maak dat $\beta \vee \gamma$ ook 'n logiese gevolg van T is. In die tweede plek word alle "oorbodige" gevolgtrekkings van die versameling relevante afleidings geëlimineer. Dit beteken elke relevante afleiding word ontbind in onherleibare konjunktiewe elemente en dan word slegs die onherleibare ontbinde elemente gebruik. 'n Relevante afleiding α van T wat nie in die vorm van 'n konjunksie is nie, word vervang met 'n sin α^*, waar α^* logies ekwivalent is aan α, en α^* 'n konjunksie met die maksimum aantal konjunkte is. As α sowel as β logiese afleidings uit T is, is dit byvoorbeeld onnodig om nog $\alpha \wedge \beta$ ook as 'n afleiding te beskou — $\alpha \wedge \beta$ as oorbodige afleiding uit T kan dus geëlimineer word (in Kuipers [1987]).

Dit sal in Hoofstuk 3 aangetoon word dat die waarheidsgetrouheidordening, wat oorspronklik deur Brink en Heidema ([1987], [1989]) in terme van die begrippe van magsversameling en –ordening gedefinieer is en nou deur ons (Burger en Heidema) in terme van ander begrippe gepropageer word, sekere ooreenkomste met dié van Popper, en dus ook met dié van Schurz en Weingartner, toon. Net soos Popper, Schurz en Weingartner maak ons ook van die deduktiewe afsluiting van teorieë gebruik, maar ons beperk ons tot slegs die *positiewe* en *negatiewe* sinne afleibaar uit teorieë. Meer hieroor later.

Elkeen van die benaderings van Oddie, Niiniluoto, Kuipers, Schurz en Weingartner wat bespreek is, weerspieël 'n positiewe reaksie op die hele kwessie van waarheidsgetrouheid wat sy ontstaan aan Popper te danke het. Daar is egter wel filosowe wat sterk gekant is teen die hele waarheidsgetrouheid–beweging — mense soos Thomas Kuhn. In Kuhn se histories–sosiologiese benadering tot die wetenskap, staan die begrip "paradigma" sentraal. Hy definieer dit as volg: "These I take to be universally recognized scientific achievements that for a time provide model problems and solutions to a community of practitioners" (Kuhn [1970], p. viii).

As 'n historikus, sien Kuhn geen sin in die vergelyking van teorieë in terme van waarheidsgetrouheid nie: "All historically significant theories have agreed with the facts, but only more or less. There is no more precise answer to the question whether or how well an individual theory fits the facts" ([1970], p. 147). Kuhn beskou teorieë as onvergelykbaar op grond van die volgende argumente: (1) die voorstellers van die verskillende teorieë (paradigmas) verskil dikwels oor die lys van probleme wat deur die teorieë opgelos behoort te word; hulle standaarde en definisies van die wetenskap verskil; (2) dikwels word die betekenis van woorde verskillend geïnterpreteer, sodat kommunikasiegapings en misverstande tussen die voorstellers van teorieë ontstaan; (3) voorstellers van teorieë werk dikwels in verskillende "wêrelde" — soos wetenskaplikes wie se eksperimente in verskillende omstandighede plaasvind.

Volgens Kuhn het alle teorieë hulle ontstaan te danke aan een of ander krisis in die geskiedenis van die wetenskap. In teenstelling met Popper se kriterium van weerlegbaarheid vir 'n bevredigende wetenskaplike teorie, glo Kuhn dat 'n wetenskaplike teorie immuun teen weerlegbaarheid kan wees. Teorieë word nie vervang op grond van toetsing of weerlegbaarheid nie, soos Kuhn [1970] opmerk: "... once it has achieved the status of paradigm, a scientific theory is declared invalid only if an alternate candidate is available to take its place. No process yet disclosed by the historical study of scientific development at all resembles the methodological stereotype of falsification by direct comparison with nature" (p. 77). 'n Nuwe teorie hoef ook nie in konflik met sy voorganger te wees nie — dit kan naamlik slegs nuwe fenomene probeer beskryf of verklaar. Geen teorie kan egter oplossings bied vir al die probleme op 'n sekere tydstip nie — en hiermee gaan Goethe akkoord:

Wir steuern dabei auf Hypothesen los, auf imaginäre Inseln, aber die eigentliche Synthese wird wahrscheinlich ein unentdecktes Land bleiben. Und mich wundert es nicht, wenn ich bedenke, wie schwer es gehalten, selbst in so einfachen Dingen wie die Pflanze und die Farbe zu einiger Synthese zu gelangen.

— In Eckermann ([1911], p. 234).

We steer by hypotheses to imaginary islands; but the proper synthesis will probably remain an undiscovered country; and I do not wonder at this, when I consider how difficult it is to obtain any synthesis even in such simple things as plants and colours.

— In Eckermann ([1971], p. 294).

——oOo——

HOOFSTUK 2

KONFIGURASIES

But I shall let the little I have learnt go forth into the day in order that someone better than I may guess the truth, and in his work may prove and rebuke my error. At this I shall rejoice that I was yet a means whereby this truth has come to light.

— ALBRECHT DÜRER (in Popper [1969], p. 2).

Die tema van hierdie hoofstuk is *konfigurasies*. Dié begrip word eerstens in die algemeen gedefinieer en verduidelik (in Afdeling **2.1**) voordat die betekenis daarvan in die *proposisielogika* (Afdeling **2.2**) en *predikaatlogika* (Afdeling **2.3**) ondersoek word. *Positiewe* en *negatiewe konfigurasies* word gedefinieer met die oog op die latere vergelyking van teorieë ten opsigte van hul waarheidsgetrouheid en informasiegetrouheid, waarin hierdie begrippe dan juis die hoofrolle vertolk. 'n Aantal ekwivalente karakteriserings van positiewe en negatiewe konfigurasies word bespreek, onder andere die karakterisering in terme van die *positiewe* en *negatiewe afsluitings* van 'n konfigurasie. Laasgenoemde twee begrippe kan by toepassing op die logika *semanties* en *sintakties* beskryf word. Daar word ook aangetoon hoe die begrip konfigurasie as 'n gemeenskaplike veralgemening van sinskonnektiewe, sinne en teorieë beskou kan word. As gevolg van hierdie feit, vorm konfigurasies die raamwerk van al ons besprekings oor waarheidsgetrouheid en informasiegetrouheid, dit wil sê dat alle begrippe en ordeninge, in die bespreking van waarheidsgetrouheid (Hoofstuk **3**) en informasiegetrouheid (Hoofstuk **4**), in terme van konfigurasies gedefinieer kan word.

2.1 POSITIEWE EN NEGATIEWE KONFIGURASIES

Ons begin met enige nie–leë versameling A wat ons die *onderliggende versameling* sal noem. Die *magsversameling* $\mathscr{P}A$ van A kan dan gedefinieer word as die versameling van alle deelversamelings van A. Dus,

$$\mathscr{P}A = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Laat **2** die twee–element–Boole–algebra $\{0, 1\}$ met $0 < 1$ aandui. Die magsversameling $\mathscr{P}A$ van A kan dan ook as die versameling van alle karakteristieke funksies van deelversamelings van A beskou word, dit wil sê:

$$\mathscr{P}A = \{v : A \rightarrow \mathbf{2}\},$$

wat ook as die versameling $\mathbf{2}^A$ geskryf kan word. Vir elke deelversameling B van A word sy karakteristieke funksie soos volg gedefinieer:

$$v_B : A \rightarrow \mathbf{2}, \text{ waar } v_B(a) = \begin{cases} 1 \text{ as } a \in B \\ 0 \text{ as } a \notin B\,. \end{cases}$$

Die begrip *konfigurasie* ("configuration") kan nou óf in terme van 'n deelversameling van $\mathscr{P}A$ óf in terme van 'n karakteristieke funksie van 'n deelversameling van $\mathscr{P}A$ beskryf word:

2.1.1 **Definisie** Laat $\mathbf{W} \subseteq \mathscr{P}A$.

'n *Konfigurasie* **C** is enige deelversameling van **W**.

'n Konfigurasie **C** is dus 'n element van die magsversameling $\mathscr{P}\mathscr{P}A$ van $\mathscr{P}A$, dit wil sê **C** is 'n versameling van deelversamelings van A. Ons kan 'n konfigurasie **C** egter ook as 'n karakteristieke funksie $\mathbf{C} : \mathbf{W} \rightarrow 2$ van 'n deelversameling van **W** sien: gegee enige deelversameling **C** van **W**, dit wil sê van $\mathscr{P}A$, dan bestaan die karakteristieke funksie:

$$C : W \longrightarrow 2, \text{ waar } C(v) = \begin{cases} 1 \text{ as } v \in C \\ 0 \text{ as } v \notin C\,. \end{cases}$$

Die *versameling van alle konfigurasies* vorm dus die versameling 2^W of $\mathscr{P}W$ wat bevat is in die versameling 2^{2^A} of $\mathscr{P}\mathscr{P}A$.

Vir die definiëring van die begrippe *positiewe* en *negatiewe konfigurasie* word 'n ordening op W benodig. Ons orden $W \subseteq \mathscr{P}A$ op die natuurlike manier, naamlik deur inklusie. Dan het ons dat as $v, w \in W$ en $v \subseteq w$ (gesien as deelversamelings van A), dan $v^{-1}(1) \subseteq w^{-1}(1)$, waar v en w nou as karakteristieke funksies beskou word.

2.1.2 **Definisies** Beskou 'n konfigurasie $(C, \subseteq) \subseteq (W, \subseteq)$.

(1) C word *positief* genoem indien die volgende geld:

as $v \in C$, $w \in W$ en $v \subseteq w$, dan $w \in C$.

(2) C word *negatief* genoem indien dit geld dat:

as $v \in C$, $w \in W$ en $w \subseteq v$, dan $w \in C$.

Let wel dat in hierdie geval die elemente van W as deelversamelings van A beskou word, dit wil sê die funksies v en w staan vir die deelversamelings van A waarvan hul die onderskeie karakteristieke funksies is.

'n Konfigurasie C sal dus as *positief* geëtiketteer word as C na *bo* geslote is. Dit beteken dat as $v \in C$, dan moet alles wat beter (of hoër) as v in $(W, \subseteq)$ is, ook in C wees. Net so, sal C *negatief* wees as C na *onder* geslote is (as v in $(W, \subseteq)$ is, moet alles wat laer as v in $(W, \subseteq)$ is, ook in C wees). Dit alles beteken niks anders nie as dat 'n *positiewe* konfigurasie 'n *semifilter* in $(W, \subseteq)$ is en dat 'n *negatiewe* konfigurasie 'n *semi–ideaal* in $(W, \subseteq)$ is.

As C as 'n karakteristieke funksie $C : W \longrightarrow 2$ beskou word, is C positief as geld dat:

$$\text{as } C(v) = 1,\ w \in W \text{ en } v^{-1}(1) \subseteq w^{-1}(1), \text{ dan } C(w) = 1,$$

en negatief as geld dat:

$$\text{as } C(v) = 1,\ w \in W \text{ en } w^{-1}(1) \subseteq v^{-1}(1), \text{ dan } C(w) = 1.$$

(Hier word die elemente van W natuurlik as karakteristieke funksies van deelversamelings van A beskou.)

Laasgenoemde metode van klassifisering van 'n konfigurasie $C : W \longrightarrow 2$ as positief of negatief kom respektiewelik met die klassifisering van 'n konfigurasie as *isotoon* of *antitoon* ooreen. Vervolgens eers die definisies van die laaste twee begrippe: isotoon en antitoon:

2.1.3 **Definisies** Beskou 'n konfigurasie $C : W \longrightarrow 2$.

(1) C is *isotoon* as C die *orde behou.* Dit beteken dat vir alle $v, w \in W$,

$$\text{as } v \subseteq w \text{ (in } W\text{), dan } C(v) \leq C(w) \text{ (in } 2\text{).}$$

(2) C is *antitoon* as C die *orde omkeer.*

Positiewe konfigurasies kan nou net sowel as isotone konfigurasies geëtiketteer word en negatiewe konfigurasies as antitone konfigurasies. Stelling 2.1.4 stipuleer hierdie verbande:

2.1.4 **Stelling** Vir 'n konfigurasie C:

(1) C is positief as en slegs as C isotoon is.

(2) C is negatief as en slegs as C antitoon is.

Bewys

(1) Veronderstel **C** is positief (d.i. $C(v) = 1$, $w \in \mathbf{W}$ en $v^{-1}(1) \subseteq w^{-1}(1)$ impliseer $C(w) = 1$). Laat $v \subseteq w$. (Te bewys: $C(v) \leq C(w)$.) As $C(v) = 0$, dan $C(v) \leq C(w)$. As $C(v) = 1$, dan, omdat $v \subseteq w$, geld $v^{-1}(1) \subseteq w^{-1}(1)$ en dus $C(w) = 1$.

Omgekeerd, veronderstel **C** is orde–behoudend (d.i. $v \subseteq w$ impliseer $C(v) \leq C(w)$). As $C(v) = 1$ en $v^{-1}(1) \subseteq w^{-1}(1)$, dan geld $v \subseteq w$ en dus $C(v) \leq C(w)$ waaruit volg dat $C(w) = 1$.

(2) Soortgelyk aan die bewys van (1). □

'n Verdere manier om konfigurasies as positief of negatief te karakteriseer, geskied by wyse van die *positiewe* (2.1.5) en *negatiewe* (2.1.6) *afsluitingsoperasies.* Hierdie twee afsluitingsoperasies vorm die kern van die definisies van waarheidsgetrouheidordeninge wat later volg. In die definisies van die ordeninge gaan ons die simbole (vet letters) **X** en **Y** (in plaas van C_1 en C_2) gebruik wanneer twee konfigurasies ten opsigte van hul waarheidsgetrouheid vergelyk word. **X** (en **Y**) sal dus voortaan op 'n konfigurasie dui.

2.1.5 **Definisie** Die *positiewe afsluitingsoperasie* $\Delta : \mathscr{P}\mathbf{W} \longrightarrow \mathscr{P}\mathbf{W}$ word soos volg gedefinieer: vir alle $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{W}$:

$$\Delta\mathbf{X} := \{w \in \mathbf{W} \mid (\exists x \in \mathbf{X})(x \subseteq w)\}.$$

$\Delta\mathbf{X}$ word die *positiewe afsluiting van* **X** genoem.

$\Delta : \mathscr{P}\mathbf{W} \longrightarrow \mathscr{P}\mathbf{W}$ is 'n afsluitingsoperasie:

(1) $X \subseteq \Delta X$;

(2) $\Delta(\Delta X) = \Delta X$;

(3) As $X, Y \subseteq W$, $X \subseteq Y$, dan $\Delta X \subseteq \Delta Y$.

Hierdie afsluitingsoperasie het ook die volgende spesiale eienskap:

(4) As $X = \bigcup\{X_i \mid i \in I\}$, dan $\Delta X = \bigcup\{\Delta X_i \mid i \in I\}$.

Die laaste spesiale eienskap (4) is die enigste een wat nie onmiddellik duidelik mag wees nie: $\Delta X = \Delta[\bigcup\{X_i \mid i \in I\}] \subseteq \Delta[\bigcup\{\Delta X_i \mid i \in I\}] = \bigcup\{\Delta X_i \mid i \in I\}$ — vir die geldigheid van die laaste stap moet die leser bietjie vorentoe blaai na Lemma 2.2.2 (1); omgekeerd: vir alle j geld $\Delta X_j \subseteq \Delta[\bigcup\{X_i \mid i \in I\}]$ en dus, $\bigcup\{\Delta X_i \mid i \in I\} \subseteq \Delta[\bigcup\{X_i \mid i \in I\}]$. (Dit is natuurlik ook moontlik om eienskap (4) direk te bewys.)

As $X = \bigcap\{X_i \mid i \in I\}$, geld wel dat $\Delta X \subseteq \bigcap\{\Delta X_i \mid i \in I\}$ (want vir elke j geld $\bigcap\{X_i \mid i \in I\} \subseteq X_j$, dus $\Delta[\bigcap\{X_i \mid i \in I\}] \subseteq \Delta X_j$ en daarom $\Delta[\bigcap\{X_i \mid i \in I\}] \subseteq \bigcap\{\Delta X_i \mid i \in I\}$), maar nie die omgekeerde nie. As $X = \bigcap\{X_i \mid i \in I\}$ byvoorbeeld 'n leë versameling is, dan $\Delta X = \phi$, terwyl $\bigcap\{\Delta X_i \mid i \in I\}$ nie noodwendig leeg sal wees nie.

Die positiewe afsluiting ΔX van 'n konfigurasie X kan soos volg beskryf word: om ΔX te verkry word al die elemente van X, asook al die elemente in W wat *bokant* 'n element van X in $(W, \subseteq)$ lê, geneem. Vergelyk ons nou dié beskrywing van ΔX met die definisie van 'n positiewe konfigurasie, is dit maklik om te sien dat $X = \Delta X$ (dit wil sê al die elemente wat "beter" as die elemente van X in $(W, \subseteq)$ is, lê ook in X) as en slegs as X 'n positiewe konfigurasie (volgens 2.1.2 (1)) is.

2.1.6 **Definisie** Die *negatiewe afsluitingsoperasie* $\nabla : \mathcal{P}W \longrightarrow \mathcal{P}W$ word soos volg gedefinieer: vir alle $X \subseteq W$:

$$\nabla X := \{w \in W \mid (\exists x \in X)(w \subseteq x)\}.$$

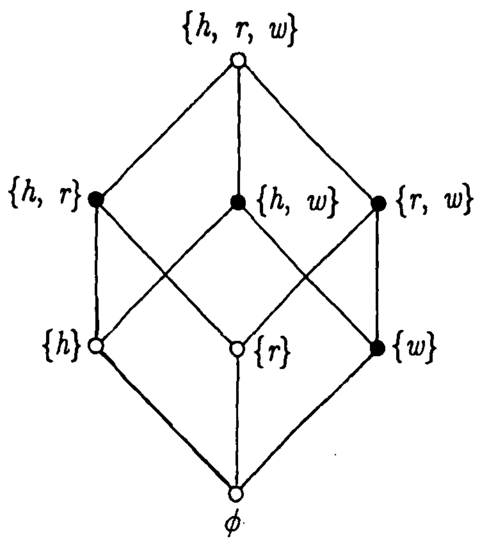
∇X word die *negatiewe afsluiting van* X genoem.

$\nabla : \mathscr{P}W \longrightarrow \mathscr{P}W$ is, soortgelyk aan $\Delta : \mathscr{P}W \longrightarrow \mathscr{P}W$, 'n afsluitingsoperasie en het ook die spesiale eienskap dat as $X = \cup\{X_i \mid i \in I\}$, dan is $\nabla X = \cup\{\nabla X_i \mid i \in I\}$. Ook die beskrywing van die negatiewe afsluiting ∇X van 'n konfigurasie X is soortgelyk aan dié van ΔX — al verskil, vir ∇X word al die elemente in W wat *onder* 'n element van X in $(W, \subseteq)$ lê, geneem. 'n Konfigurasie X kan dan ook in terme van sy negatiewe afsluiting as negatief gekarakteriseer word: X is negatief as en slegs as $X = \nabla X$.

Die volgende voorbeeld mag help om die gedefinieerde begrippe en die onderlinge verbande wat tussen hulle geld, te verduidelik: Beskou die Boole–algebra $\{\mathscr{P}(\{h, r, w\}), \subseteq)$ soos voorgestel in Figuur 1. Die operasies hier ter sprake is natuurlik die versamelingteoretiese operasies van deursnede, vereniging en komplement. Ons beskou die konfigurasie (versameling van deelversamelings van $\{h, r, w\}$) $X = \{\{h, r\}, \{h, w\}, \{r, w\}, \{w\}\}$. Hierdie betrokke deelversamelings van $\{h, r, w\}$ word met ingekleurde posisies in Figuur 1 aangedui. Die positiewe afsluiting ΔX van X moet dan bestaan uit alle elemente van X asook alle elemente van $\mathscr{P}(\{h, r, w\})$ wat bokant 'n element van X lê. Vir ΔX moet ons dus alle oningekleurde posisies bokant 'n ingekleurde posisie ook inkleur. Uit Figuur 1 is dit duidelik dat ΔX die versameling $\{\{h, r, w\}, \{h, r\}, \{h, w\}, \{r, w\}, \{w\}\}$ moet wees. Die versameling $\{h, r, w\}$ kom dus in ΔX voor, maar nie in X nie. Dus $X \neq \Delta X$ en daarom is X nie 'n positiewe konfigurasie nie. Dit is ook maklik om te sien dat X nie aan die vereistes van die *definisie* (2.1.2 (1)) van 'n positiewe konfigurasie voldoen nie: beskou byvoorbeeld die versamelings $v = \{h, r\}$ en $w = \{h, r, w\}$ — v is duidelik bevat in w en $v \in X$, maar $w \notin X$.

Indien ons X as 'n karakteristieke funksie $X : \mathscr{P}(\{h, r, w\}) \longrightarrow 2$ beskou, waar al die elemente van $\mathscr{P}(\{h, r, w\})$ wat op 1 afgebeeld word weer eens met 'n ingekleurde posisie aangedui word, sien ons dat X ook nie isotoon is nie: $\{r, w\} \subseteq \{h, r, w\}$ maar $X(\{r, w\}) = 1$ en $X(\{h, r, w\}) = 0$. Die orde word dus nie behou nie.

Met behulp van dieselfde figuur kan aangetoon word dat $\nabla X = \{\{h, r\},$



Figuur 1

$\{h, w\}$, $\{r, w\}$, $\{h\}$, $\{r\}$, $\{w\}$, $\phi\}$. (Vir ∇X word al die oningekleurde posisies onder 'n ingekleurde posisie ook ingekleur.) X is dus ook nie 'n negatiewe konfigurasie nie.

In die volgende afdeling word die voorafgaande begrippe teen die agtergrond van die proposisielogika gekleur en verkry sodoende meer spesifieke betekenisse.

2.2 KONFIGURASIES IN DIE PROPOSISIELOGIKA

In hierdie geval is die nie–leë onderliggende versameling A, waarmee ons in die vorige afdeling begin het, die versameling van proposisiesimbole p_i, d.i. $A = \{p_i \mid i \in I\}$, waar I enige indeksversameling kan wees. A is dus 'n deelversameling van die versameling van alle lettersinne $(\pm)p_i$. ("Lettersin" ("literal") is 'n begrip uit die Rekenaarwetenskap en beteken net: 'n p_i sonder of met 'n negasieteken.) Meer spesifiek: A is die versameling van *positiewe lettersinne* (d.i. p_i's sonder 'n negasieteken). Om verwarring te voorkom, sal ons eerder A(+) in plaas van A gebruik vir die versameling van atomiese sinne (positiewe lettersinne). Die versameling van *alle* lettersinne sal met A(L) aangedui word, d.i. $A(L) = \{(\pm)p_i \mid i \in I\}$.

'n *Moontlike wêreld*, x, is 'n maksimale konsistente deelversameling van die versameling A(L) van lettersinne $(\pm)p_i$. 'n Moontlike wêreld moet dus vir elke i, óf p_i óf $\neg p_i$ bevat. Die beskrywing van 'n moontlike wêreld kan aan die hand van enige een van die volgende vorme geskied:

(i) 'n *valuasie* $v : A(+) \longrightarrow \{0, 1\}$;

(ii) die ooreenstemmende deelversameling (wat ons die *diagram* sal noem) van A(L), waar p_i geneem word as $v(p_i) = 1$ (d.i. p_i is waar onder v of v bevredig p_i) en $\neg p_i$ geneem word as $v(p_i) = 0$ (d.i. $\neg p_i$ is waar onder v);

(iii) die ooreenstemmende *deelversameling* $v^{-1}(1)$ van A(+) wat bestaan uit daardie p_i's wat waar is onder die valuasie v en waarvoor v die karakteristieke funksie is;

(iv) in die geval as A(+) eindig is, byvoorbeeld $I = \{1, 2, ..., n\}$, die ooreenstemmende *rytjie van nulle en ene* $(v(p_1), v(p_2), ..., v(p_n))$;

(v) weer eens as A(+) eindig is en byvoorbeeld $I = \{1, 2, ..., n\}$, die ooreenstemmende *diagramsin* $(\pm)p_1 \wedge (\pm)p_2 \wedge ... \wedge (\pm)p_n$ — die konjunksie van al die lettersinne $(\pm)p_i$ wat waar is onder v.

Elke valuasie $v : A(+) \longrightarrow 2$ (of $v : I \longrightarrow 2$) kan dus as 'n deelversameling van A(+) of as 'n karakteristieke funksie van 'n deelversameling van A(+) beskou word. Laat **W** nou die *versameling van alle moontlike wêrelde of valuasies* $v : A(+) \longrightarrow 2$ aandui, d.i. $\mathbf{W} = 2^{A(+)}$ $(= 2^I)$ of $\mathbf{W} = \mathscr{P}A(+)$. (Die leser kan ook maar aan **W** as **W**(+) dink, omdat **W** nou die versameling van alle deelversamelings van A(+) is.) 'n *Konfigurasie* (d.i. 'n deelversameling van die magsversameling van A(+), of 'n element van die magsversameling van die magsversameling van A(+)) — sien Afdeling **2.1** — is dan nou niks anders as 'n *versameling valuasies* of 'n *versameling* *moontlike wêrelde* nie. Die beskrywing van konfigurasies in die proposisielogika is dus 'n spesiale geval van die algemene beskrywing van konfigurasies in Afdeling 2.1: nóú is $\mathbf{2}^{\mathbf{W}}$, die versameling van alle konfigurasies, nie net bevat in $2^{2^{A(+)}} = \mathscr{P}\mathscr{P}A(+)$ nie; $\mathbf{2}^{\mathbf{W}}$ is nou gelyk aan $2^{2^{A(+)}}$.

Proposisies word uit die proposisiesimbole p_i en die konnektiewe $\neg$ (nie), $\wedge$ (en), $\vee$ (of), $\rightarrow$ (as ... dan ...), $\leftrightarrow$ (ass) en $+$ (eksklusiewe of) opgebou. Laasgenoemde konnektief beteken net: $p_1 + p_2$ as en slegs as óf p_1 óf p_2, maar nie beide nie. 'n *Teorie* X (gewone hoofletters word vir hierdie doel gebruik) is enige versameling proposisiesinne. Soos wel bekend, kan 'n valuasie op die versameling van atomiese sinne (d.i. op die positiewe lettersinne) volgens die gewone waarheidstabelle van die konnektiewe, rekursief uitgebrei word tot 'n valuasie op die versameling van alle sinne. 'n Moontlike wêreld (of valuasie), x, wat 'n *sin* S waar maak (of bevredig) word 'n *model* van S genoem en ons skryf $x \models S$ vir "x bevredig die sin S" of "x is 'n model van S". 'n *Model*, x, van 'n *teorie* X, is dan 'n moontlike wêreld wat X bevredig, wat beteken dat x alle sinne S in die teorie X waar maak, d.i. $x \models S$ vir alle $S \in X$ (of kortweg $x \models X$). Die versameling modelle van X sal ons met die ooreenkomstige vet letter **X** en ook soms (waar nodig) met Mod(X) aandui. Dus, $\mathbf{X}$ (= Mod(X)) is die konfigurasie $\{x \mid x \models X\}$ (= $\{x \mid x \models S$ vir alle $S \in X\}$).

Ter wille daarvan om die verduidelikings wat volg so eenvoudig en duidelik as moontlik aan die leser te bied, sal ons ons voortaan beperk tot slegs 'n *eindig voortgebringde proposisietaal*. Meer spesifiek: die proposisietaal voortgebring deur $A(+) = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. In hierdie taal is daar slegs eindig veel, om presies te wees, 2^n moontlike wêrelde en slegs eindig veel (meer presies 2^{2^n}) logies nie–ekwivalente sinne. (Twee sinne (of teorieë) X en Y word *logies ekwivalent* genoem as hulle versamelings modelle dieselfde is, d.i. $X \equiv Y$ as en slegs as Mod(X) = Mod(Y).) Elke teorie is dus 'n eindige versameling sinne en kan deur konjunksie as 'n *enkelsin* geskryf word. Die sin wat die ekwivalensieklas van alle *toutologieë* (d.i. logiese waarhede) verteenwoordig sal ons met T aandui, en die sin wat die ekwivalensieklas van alle *kontradiksies* (d.i. logiese onwaarhede) verteenwoordig met F. T word deur alle valuasies en F deur geen valuasie bevredig, wat beteken Mod(T) = **W** en Mod(F) = ϕ.

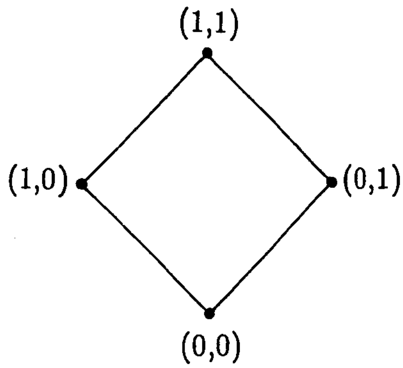
Die volgende voorbeeld mag help om die verband tussen teorieë, sinne en versamelings modelle te verduidelik: Beskou die taal voortgebring deur twee veranderlikes. In plaas van die simbole p_1 en p_2 gebruik ons eerder p en q, sodat A(+) nou die versameling $\{p, q\}$ is. Die teorie (versameling sinne), $\{\neg(p \wedge q), p \vee \neg q, p \vee q\}$ kan deur konjunksie as die enkelsin $[\neg(p \wedge q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)]$ geskryf word, wat logies ekwivalent aan die sin $p \wedge \neg q$ is. In hierdie taal voortgebring deur $\{p, q\}$ is daar vier moontlike wêrelde, naamlik $\{p, q\}$, $\{p, \neg q\}$, $\{\neg p, q\}$ en $\{\neg p, \neg q\}$. Die versameling modelle van $p \wedge \neg q$, d.i. die versameling moontlike wêrelde wat $p \wedge \neg q$ waar maak, is dan die konfigurasie $\{\{p, \neg q\}\}$ wat bestaan uit die enkele moontlike wêreld $\{p, \neg q\}$ of (1,0). Dit is dan ook die valuasie v : $\{p, q\} \longrightarrow$ **2** wat aan p 'n 1 toevoeg en aan q 'n 0.

In die geval van n proposisiesimbole is daar 2^n moontlike wêrelde en elke moontlike wêreld, gesien as die n–tal $(v(p_1), v(p_2), \ldots, v(p_n))$ van nulle en ene, is 'n element van die Boole–algebra $\mathbf{2}^n$. Die ordening, $\leq$, van die Boole–algebra $\mathbf{W} = \mathbf{2}^n$ is die *produkordening*: vir alle $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbf{2}^n$:

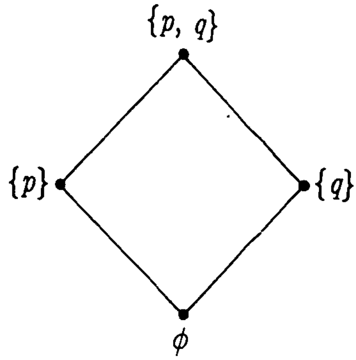
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq (y_1, y_2, \ldots, y_n) \Leftrightarrow x_i \leq y_i \text{ (in } \mathbf{2}) \text{ vir alle } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Dit beteken dat y bokant x in $(\mathbf{2}^n, \leq)$ sal wees as y in elke posisie "beter of net so goed as" x is. Ter illustrasie van hierdie ordening beskou ons weer die taal voortgebring deur $\{p, q\}$. **W** is in hierdie geval die Boole–algebra $(\mathbf{2}^2, \leq)$ — soos geïllustreer deur Figuur 2. Figuur 3 gee **W** as die Boole–algebra $(\mathscr{P}(\{p, q\}), \subseteq)$.

In die geval van *eindig* veel voortbringers p_i bestaan daar *een–een ooreenkomste* tussen die *versameling van alle sinne*; die *versameling van alle konfigurasies*; en die *versameling van alle* n–*êre konnektiewe*. Dit beteken dat in die geval van



Figuur 2

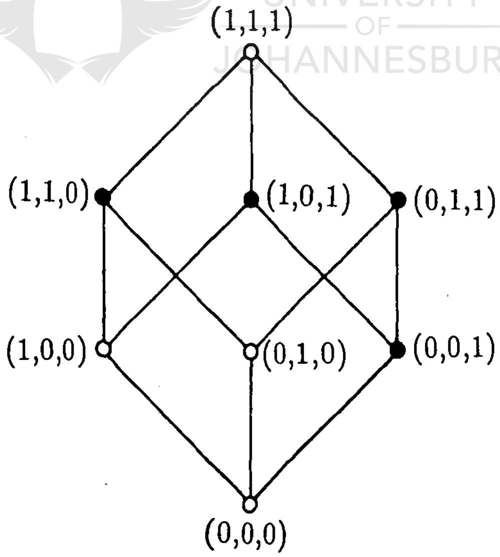


Figuur 3

eindig veel proposisiesimbole, elke konfigurasie X die versameling modelle van 'n teorie X is; of dat elke konfigurasie deur 'n teorie (en selfs deur 'n enkelsin) *beskryf* kan word. Ter verduideliking van hierdie een–een ooreenkomste tussen teorieë (sinne), konfigurasies en n–êre konnektiewe in die eindige geval, beskou ons die taal voortgebring deur drie veranderlikes. In plaas van die simbole p_1, p_2 en p_3 gebruik ons die letters h, r en w na aanleiding van die bekende voorbeeld in die literatuur oor waarheidsgetrouheid, waar h, r en w respektiewelik die sinne "It is hot", "It is raining" en "It is windy" voorstel. Beskou nou die sin $X = (h \wedge r) \leftrightarrow \neg w$ in die taal voortgebring deur $\{h, r, w\}$ en sy waarheidstabel (Tabel 1). Elke deelry (daarmee bedoel ons 'n ry in die waarheidstabel sonder 'n inskrywing in die hoofkolom) stel 'n moontlike wêreld $x \in \mathbf{W} = \mathbf{2}^3$ voor. (In die opstel van die waarheidstabel word, soos dit die gebruik is, 'n leksikografiese ordening op **W** geplaas. Dit is dieselfde ordening wat byvoorbeeld in die opstel van woordeboeke gebruik word.) Ons orden $\mathbf{W} = \mathbf{2}^3$, soos afgespreek, deur die produkordening. Figuur 4 illustreer dié ordening van die agt moontlike wêrelde. Die laaste kolom in die waarheidstabel gee die diagramsin wat met elke moontlike wêreld ooreenkom, d.i. die diagramsin wat deur die spesifieke valuasie of deelry bevredig word.

h	r	w	$(h \wedge r) \leftrightarrow \neg w$	diagramsin
1	1	1	0	$h \wedge r \wedge w$
1	1	0	1	$h \wedge r \wedge \neg w$
1	0	1	1	$h \wedge \neg r \wedge w$
1	0	0	0	$h \wedge \neg r \wedge \neg w$
0	1	1	1	$\neg h \wedge r \wedge w$
0	1	0	0	$\neg h \wedge r \wedge \neg w$
0	0	1	1	$\neg h \wedge \neg r \wedge w$
0	0	0	0	$\neg h \wedge \neg r \wedge \neg w$

Tabel 1



Figuur 4

Die versameling modelle van X is die konfigurasie **X** = {(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)} — geïllustreer deur die ingekleurde posisies in Figuur 4. (Figuur 1 (Afdeling **2.1**) stel dieselfde konfigurasie voor — egter net as 'n deelversameling van ($\mathscr{P}(\{h, r, w\}), \subseteq$).) Dit is dieselfde versameling van deelrye wat 'n 1 in die hoofkolom van die waarheidstabel van X het. Dus, gegee enige teorie X, kan die konfigurasie **X** wat met X ooreenkom, verkry word deur al daardie moontlike wêrelde wat 'n 1 in die hoofkolom van die waarheidstabel van X het, te neem.

'n Konfigurasie **X** kom weer met die waarheidstabel van 'n sin X ooreen: deur aan elke $x \in$ **X** 'n 1 in die hoofkolom toe te ken en aan die res van die moontlike wêrelde in $\mathbf{2}^n$ 'n 0 toe te ken, word die hoofkolom van die sin X, wat die konfigurasie **X** as versameling modelle het, verkry. Om die sin X (of 'n logies ekwivalente vorm daarvan) te verkry word die disjunksie van al die diagramsinne met die waarde 1 geneem. Dit lewer 'n sin in *volledige disjunktiewe normaalvorm*, d.i. 'n sin geskryf as die disjunksie van konjunksies van lettersinne, maar met die eienskap dat elke proposisiesimbool, p_i, presies een maal sonder of met 'n negasieteken in elke disjunk voorkom. Vir ons voorbeeld lewer dit die sin $(h \wedge r \wedge \neg w) \vee (h \wedge \neg r \wedge w) \vee (\neg h \wedge r \wedge w) \vee (\neg h \wedge \neg r \wedge w)$, wat logies ekwivalent aan die sin $(h \wedge r) \leftrightarrow \neg w$ is.

Die verband met 'n n–êre konnektief volg nou maklik: elke konnektief kan natuurlik deur 'n waarheidstabel G weergegee word wat weer met 'n sin X ooreenkom, naamlik die sin wat juis G as waarheidstabel het. Die sin X kom op sy beurt weer met 'n konfigurasie **X** ooreen. Elke konnektief is dus ook 'n konfigurasie $\mathbf{X} : \mathbf{2}^n \longrightarrow \mathbf{2}$. 'n Moontlike wêreld is 'n deelversameling van $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$; 'n konfigurasie is 'n deelversameling van $\mathscr{P}(\{p_1, p_2, \ldots, p_n\})$. Omdat daar 2^n deelversamelings van $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ is, is daar dus 2^{2^n} konfigurasies of logies nie–ekwivalente sinne.

Die een–een ooreenkoms tussen die versameling van alle sinne en alle konfigurasies is natuurlik ook 'n isomorfie van Boole–algebras: As **X** deur X beskryf word en **Y** deur Y, dan word **X** $\cap$ **Y**, **X** $\cup$ **Y** en **W** $-$ **X** (die komplement van **X** in **W**) respektiewelik deur X $\wedge$ Y, X $\vee$ Y en $\neg$X beskryf.

Aan die hand van die voorafgaande voorbeeld is aangetoon dat, in die eindige geval, elke konfigurasie *beskryfbaar* (of *aksiomatiseerbaar*) is. In die geval van *oneindig* veel voortbringers is dit egter *nie* die geval nie — soos aangetoon deur Brink en Heidema [1989]. In die oneindige geval is daar meer konfigurasies as teorieë en alhoewel elke sin en elke teorie met 'n konfigurasie ooreenkom — die versameling van alle valuasies wat die sin of teorie waar maak — is nie elke konfigurasie beskryfbaar deur 'n teorie nie. Die konfigurasies wat wel as die versameling modelle van 'n teorie optree word deur Brink, Pretorius en Vermeulen [1991] in 'n interessante resultaat gekarakteriseer (p. 9: Lemma 4.1). Daar word 'n topologie op die versameling **W** geplaas en dan verteenwoordig al die *kompakte deelruimtes van* **W** presies die *beskryfbare konfigurasies.*

Teen die agtergrond van 'n eindig voortgebringde proposisielogika, kyk ons nou weer na die begrippe soos gedefinieer in Afdeling **2.1**. As X die teorie is wat die konfigurasie **X** as versameling modelle het, word die teorie wat met die positiewe afsluiting $\Delta\mathbf{X}$ (nou geneem in terme van die produkordening) van **X** ooreenkom, met ΔX aangedui; en die teorie wat met die negatiewe afsluiting $\nabla\mathbf{X}$ (ook in terme van die produkordening) van **X** ooreenkom, met ∇X. Dit beteken (in die eindige geval) dat indien $\mathbf{X} = \mathrm{Mod}(X)$, dan is

$$\Delta\mathbf{X} = \Delta\mathrm{Mod}(X) = \mathrm{Mod}(\Delta X); \text{ en}$$

$$\nabla\mathbf{X} = \nabla\mathrm{Mod}(X) = \mathrm{Mod}(\nabla X).$$

Ons noem dan 'n sin X *positief* as $X \equiv \Delta X$ en *negatief* as $X \equiv \nabla X$.

Die positiewe afsluiting ΔX en die negatiewe afsluiting ∇X van 'n teorie X kan *semanties* en *sintakties* beskryf word. In Afdeling **2.1** is alles wat nodig is vir die semantiese beskrywing reeds bespreek — dit word nou net kortliks herhaal: *Semanties* word die positiewe en negatiewe afsluiting van 'n teorie X soos volg verkry: ΔX is die teorie van $\Delta\mathbf{X}$, en laasgenoemde word verkry deur al die wêrelde van **X**, asook alle wêrelde wat *bo* 'n wêreld van **X** in $(2^n, \leq)$ lê, te neem; ∇X beskryf $\nabla\mathbf{X}$ en laasgenoemde word verkry deur al die wêrelde van **X**, asook alle wêrelde wat *onder* 'n wêreld van **X** in $(2^n, \leq)$ lê, te neem. Die sin $X = (h \wedge r) \leftrightarrow \neg w$ (van ons vorige voorbeeld) is dan duidelik nie positief of negatief nie: volgens Figuur 4 is $\Delta[(h \wedge r) \leftrightarrow \neg w]$ se modelle die versameling {(1,1,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)} en $\nabla[(h \wedge r) \leftrightarrow \neg w]$ s'n die versameling {(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0,0,0)}. Die twee versamelings kom onderskeidelik met die sinne $\neg w \longrightarrow (h \wedge r)$ en $(h \wedge r) \longrightarrow \neg w$ ooreen. (Die leser sal onthou dat hierdie spesifieke geval reeds in Afdeling **2.1** bespreek is.) Die sin $X = (h \wedge r) \leftrightarrow \neg w$ se waarheidstabel kom met 'n karakteristieke funksie (of konfigurasie) $\mathbf{X} : \mathbf{2}^3 \longrightarrow \mathbf{2}$, ooreen. Die feit dat X nóg positief, nóg negatief is, kom natuurlik ooreen met die feit dat $\mathbf{X} : \mathbf{2}^3 \longrightarrow \mathbf{2}$ nóg isotoon nóg antitoon is: $\mathbf{X}$ behou nie regdeur die orde nie: $(1,1,0) \leq (1,1,1)$ maar $\mathbf{X}((1,1,0)) > \mathbf{X}((1,1,1))$ en $\mathbf{X}$ keer ook nie regdeur die orde om nie, want $(1,0,0) < (1,0,1)$, maar $\mathbf{X}((1,0,0)) < \mathbf{X}((1,0,1))$.

Omdat Δ en ∇ afsluitingsoperasies op $\mathscr{P}$W is, geld $\mathbf{X} \subseteq \Delta\mathbf{X}$ en $\mathbf{X} \subseteq \nabla\mathbf{X}$ wat vir die ooreenstemmende sinne beteken $X \models \Delta X$ en $X \models \nabla X$, d.i. X is logies sterker as ΔX en ∇X, of ΔX en ∇X is afleibaar uit X. Meer nog: ΔX is die *kleinste positiewe versameling* en ∇X die *kleinste negatiewe versameling wat* X *omvat*; dus ΔX is die *logies sterkste positiewe* en ∇X die *logies sterkste negatiewe sin afleibaar uit* X. Die simbool $\models$, wat nou *semantiese afleibaarheid* uitdruk, gebruik ons ook om aan te dui dat 'n moontlike wêreld 'n sin (of teorie) bevredig. Hierdie dubbele gebruik behoort nie die leser te verwar nie, want $X \models Y$ beteken maar net: $\mathrm{Mod}(X) \subseteq \mathrm{Mod}(Y)$, wat weer beteken: as $v \in W$ en $v \models X$, dan moet v ook vir Y bevredig.

Die *sintaktiese* beskrywing van ΔX (as X gegee is) geskied aan die hand van die volgende algoritme: skryf die waarheidstabel van X neer (met $p_1, p_2, \ldots, p_n$ aan die bokant van die kolomme) en gaan deur die volgende stappe:

(Δ1) As $X \equiv F$ (logiese onwaarheid), d.i. $\mathbf{X} = \phi$, dan is daar slegs nulle in die hoofkolom en ons definieer $\Delta X \equiv F$.

(Δ2) As die n–tal (0,0,...,0) 'n 1 in die hoofkolom het, dan definieer ons $\Delta X \equiv T$ (logiese waarheid).

As nie (Δ1) of (Δ2) die geval is nie, dan:

(Δ3) Vir elke ry in die waarheidstabel wat 'n 1 in die hoofkolom het, word die konjunksie van al daardie p_i's wat die waarde 1 in die betrokke ry het, geneem. Laat $\mathscr{K}_\Delta'$ die versameling van al die konjunksies wat op hierdie wyse verkry is, aandui.

(Δ4) Verwyder uit $\mathscr{K}_\Delta'$ al die konjunksies wat nie minimaal is nie, d.i. al daardie konjunksies K $\in \mathscr{K}_\Delta'$ waarvoor daar 'n konjunksie L $\in \mathscr{K}_\Delta'$ bestaan wat opgebou is uit 'n egte deelversameling van daardie proposisiesimbole wat in K voorkom. Die oorblywende konjunksies vorm die versameling $\mathscr{K}_\Delta$.

(Δ5) Die disjunksie van die elemente in $\mathscr{K}_\Delta$ is dan ΔX.

Vir die sintaktiese beskrywing van ∇X gebruik ons 'n soortgelyke algoritme — dit behels die volgende stappe:

(∇1) As X $\equiv$ F, dan ∇X $\equiv$ F.

(∇2) As die n–tal (1,1,...,1) 'n 1 in die hoofkolom het, definieer ons ∇X $\equiv$ T.

As nie (∇1) of (∇2) die geval is nie, dan:

(∇3) Vir elke ry in die waarheidstabel wat 'n 1 in die hoofkolom het, word die konjunksie van al daardie $\neg p_i$'s waarvoor p_i die waarde 0 in die betrokke ry aanneem, geneem. Laat $\mathscr{K}_\nabla'$ dié versameling konjunksies aandui.

(∇4) Verwyder uit $\mathscr{K}_\nabla'$ al die konjunksies wat nie minimaal is nie en vorm só die versameling $\mathscr{K}_\nabla$.

(∇5) Neem die disjunksie van die elemente van $\mathscr{K}_\nabla$ vir ∇X.

Ons wys daarop dat stappe (Δ4) en (∇4) (die krimping van $\mathscr{K}_\Delta'$ na $\mathscr{K}_\Delta$ en van $\mathscr{K}_\nabla'$ na $\mathscr{K}_\nabla$) slegs vir die doel van elegansie en ekonomie gedoen word — die disjunksie van die elemente in $\mathscr{K}_\Delta'$ ($\mathscr{K}_\nabla'$) en van dié in $\mathscr{K}_\Delta$ ($\mathscr{K}_\nabla$) is logies ekwivalent. Die leser moet homself of haarself daarvan vergewis dat dit wat sintakties in stappe 3 van die algoritmes aan 'n spesifieke ry (van die waarheidstabel wat 'n 1 in die hoofkolom het) gedoen word, semanties met die inkleur van die posisie van die betrokke wêreld asook alle posisies daarbo in $(2^n, \leq)$ (vir ΔX) en alle posisies ondertoe (vir ∇X), ooreenkom. Dit kan soos volg verduidelik word: die modelle van die konjunksie van die p_i's wat die waarde 1 aanneem, is presies die wêreld (wat met die betrokke ry ooreenkom) asook alle wêrelde boontoe, d.i. alle wêrelde wat in *ten minste* die relevante p_i's 'n 1 het; die modelle van die konjunksie van die $\neg p_i$'s waarvoor p_i die waarde 0 (in die betrokke ry) aanneem is presies dié wêreld asook alle wêrelde ondertoe, d.i. alle wêrelde wat in *ten minste* die betrokke posisies 'n 0 het.

Ter illustrasie van die voorafgaande algoritmes vir die verkryging van ΔX en ∇X van 'n teorie X, bepaal ons nou die positiewe en negatiewe afsluiting van ons voorbeeldsin $X = (h \wedge r) \leftrightarrow \neg w$ sintakties. Ons versoek die leser om terug te blaai na waar die waarheidstabel (Tabel 1) van hierdie sin gegee is. Dit is maklik om te sien dat geeneen van (Δ1), (Δ2), (∇1) of (∇2) van die twee algoritmes hier die geval is nie. Met die toepassing van stappe (Δ3) en (∇3) verkry ons $\mathscr{K}_\Delta{}' = \{h \wedge r, h \wedge w, r \wedge w, w\}$ en $\mathscr{K}_\nabla{}' = \{\neg w, \neg r, \neg h, \neg h \wedge \neg r\}$. Deur al die konjunksies wat nie minimaal is nie te verwyder (volgens (Δ4) en (∇4)), het ons dan $\mathscr{K}_\Delta = \{h \wedge r, w\}$ en $\mathscr{K}_\nabla = \{\neg w, \neg r, \neg h\}$. Die disjunksie van die elemente van $\mathscr{K}_\Delta$ (stap (Δ5)) lewer die sin $(h \wedge r) \vee w$ wat logies ekwivalent aan $\neg w \rightarrow (h \wedge r)$ is — soos reeds aangetoon, die positiewe afsluiting ΔX van X; die disjunksie van die elemente van $\mathscr{K}_\nabla$ (stap (∇5)) lewer die sin $\neg h \vee \neg r \vee \neg w \equiv (h \wedge r) \rightarrow \neg w$ — die negatiewe afsluiting ∇X van X.

Indien X reeds in disjunktiewe normaalvorm geskryf is (dit wil sê X is geskryf as die disjunksie van konjunksies van lettersinne $(\pm)p_i$) kan ΔX en ∇X ook aan die hand van die volgende resultaat bepaal word:

2.2.1 **Stelling** Vir enige sin X in disjunktiewe normaalvorm, kan ΔX en ∇X deur die volgende algoritme verkry word:

- As $X \equiv F$, dan $\Delta X \equiv \nabla X \equiv F$.
- As $X \not\equiv F$, dan:

(a) word ΔX verkry deur alle voorkomste van $\neg p_i$'s in X met T te vervang;

(b) word ∇X verkry deur alle voorkomste van p_i's (wat dus nie deur 'n negasieteken voorafgegaan word nie) in X met T te vervang.

Bewys

Veronderstel eerstens dat X in *volledige disjunktiewe normaalvorm* is, dit wil sê elke p_i kom in elke disjunk van X presies een maal, sonder of met 'n negasieteken, voor. 'n Disjunk wat in X optree, kom ooreen met 'n ry in X se waarheidstabel wat 'n 1 in die hoofkolom het. Die vervanging van negatiewe lettersinne (voortbringers met 'n negasieteken) in hierdie disjunk met T (in die beskrywing van die algoritme (a) vir die verkryging van ΔX) lewer 'n sin wat logies ekwivalent is aan die sin wat verkry word deur die konjunksie te neem van daardie p_i's wat 'n 1 in die betrokke ry van die waarheidstabel gekry het. Volgens die vorige beskrywing van die algoritme om ΔX uit X se waarheidstabel te vind, sal (a) dus inderdaad die korrekte ΔX lewer. (Let op dat as die disjunk $\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge \neg p_n$ in X voorkom, dan word dit vervang met $T \wedge T \wedge \ldots \wedge T$, d.i. met T, en die hele X word gereduseer tot T vir ΔX — wat klop met (Δ2).)

'n Soortgelyke argument toon dat (b) die korrekte ∇X lewer.

Veronderstel nou dat X ($\not\equiv$ F) in *algemene disjunktiewe normaalvorm* is, dit wil sê X is 'n disjunksie van konjunksies van lettersinne. Ons sal nou aantoon dat (a) weer eens die korrekte ΔX lewer. Beskou enigeen van die disjunkte, sê D, wat in X voorkom. Om konkreet te wees, byvoorbeeld $D = p_1 \wedge \neg p_2$. Vorm nou die disjunksie D^* van alle moontlike konjunksies

$$D' = p_1 \wedge \neg p_2 \ \wedge (\pm)p_3 \wedge \ldots \wedge (\pm)p_n$$

wat gevorm kan word deur by D alle moontlike kombinasies van die orige lettersinne $(\pm)p_i$ met konjunksie te voeg. Dit is duidelik dat D logies ekwivalent is aan D^*. Die proses om elke negatiewe lettersin met T te vervang (sien (a)) lewer in die geval van D 'n sin ekwivalent aan die konjunksie van die positiewe lettersinne in D: $p_1 \wedge T$

$\equiv p_1$. Dieselfde proses (d.i. die vervanging van negatiewe lettersinne met T) lewer in die geval van D* 'n disjunksie van 'n aantal sinne wat logies ekwivalent is aan die logies swakste van hierdie sinne: $p_1 \wedge \mathrm{T} \wedge \mathrm{T} \wedge \ldots \wedge \mathrm{T}$ (dié konjunksie D′ waarin die meeste negatiewe lettersinne voorkom), wat weer ekwivalent is aan p_1, die konjunksie van positiewe lettersinne in D.

Proses (a), toegepas op D en toegepas op D*, lewer dus ekwivalente resultate. Dit geld egter vir elke disjunk D in X en daarom sal proses (a) toegepas op X, en toegepas op die volledige disjunktiewe normaalvorm van X, ook ekwivalente resultate oplewer. Vir X in algemene disjunktiewe normaalvorm sal (a) dus wel die korrekte ΔX lewer.

Op 'n soortgelyke manier lewer proses (b) — die vervanging van positiewe lettersinne met T — toegepas op D 'n sin ekwivalent aan die konjunksie van die negatiewe lettersinne in D: $\mathrm{T} \wedge \neg p_2 \equiv \neg p_2$. As (b) toegepas word op D* verkry ons weer eens 'n ekwivalente resultaat: $\mathrm{T} \wedge \neg p_2 \wedge \mathrm{T} \wedge \mathrm{T} \wedge \ldots \wedge \mathrm{T} \equiv \neg p_2$. Omdat dit geld vir elke disjunk D in X, sal proses (b) toegepas op X, en toegepas op die volledige disjunktiewe normaalvorm van X, ekwivalente resultate oplewer. □

Ter verduideliking van die voorafgaande bespreking pas ons Stelling 2.2.1 op ons voorbeeldsin $\mathrm{X} = (h \wedge r) \leftrightarrow \neg w$ toe. X se volledige disjunktiewe normaalvorm is die sin $(h \wedge r \wedge \neg w) \vee (h \wedge \neg r \wedge w) \vee (\neg h \wedge r \wedge w) \vee (\neg h \wedge \neg r \wedge w)$. Die vervanging van alle negatiewe lettersinne met T lewer $\Delta\mathrm{X} \equiv (h \wedge r \wedge \mathrm{T}) \vee (h \wedge \mathrm{T} \wedge w) \vee (\mathrm{T} \wedge r \wedge w) \vee (\mathrm{T} \wedge \mathrm{T} \wedge w)$ wat logies ekwivalent aan die sin $\neg w \rightarrow (h \wedge r)$ is. Vir ∇X moet alle positiewe lettersinne met T vervang word. Deur dit te doen verkry ons $\nabla\mathrm{X} \equiv (\mathrm{T} \wedge \mathrm{T} \wedge \neg w) \vee (\mathrm{T} \wedge \neg r \wedge \mathrm{T}) \vee (\neg h \wedge \mathrm{T} \wedge \mathrm{T}) \vee (\neg h \wedge \neg r \wedge \mathrm{T}) \equiv (h \wedge r) \rightarrow \neg w$.

X kan egter ook logies ekwivalent wees aan 'n sin in algemene disjunktiewe normaalvorm: $\mathrm{X} \equiv (h \wedge r \wedge \neg w) \vee (\neg h \wedge w) \vee (\neg r \wedge w)$. Proses (a) toegepas op X in hierdie vorm lewer $\Delta\mathrm{X} \equiv (h \wedge r \wedge \mathrm{T}) \vee (\mathrm{T} \wedge w) \vee (\mathrm{T} \wedge w) \equiv \neg w \rightarrow (h \wedge r)$; en proses (b) het die sin $\nabla\mathrm{X} \equiv (\mathrm{T} \wedge \mathrm{T} \wedge \neg w) \vee (\neg h \wedge \mathrm{T}) \vee (\neg r \wedge \mathrm{T}) \equiv (h \wedge r) \rightarrow \neg w$ tot gevolg.

Na aanleiding van die vorige beskrywings van die algoritmes om ΔX en ∇X uit X se waarheidstabel te verkry, kan ons nou bewys dat vir die positiewe afsluiting $\Delta \mathbf{X}$ van 'n konfigurasie **X** altyd een van die volgende uitsprake moet geld: $\Delta \mathbf{X} = \phi$ (verteenwoordig logiese onwaarheid); $\Delta \mathbf{X} = \mathbf{W}$ (verteenwoordig logiese waarheid); of, $\Delta \mathbf{X}$ verteenwoordig 'n sin wat met slegs die gebruik van konjunksie en disjunksie uit proposisiesimbole p_i opgebou kan word. Laasgenoemde geval kom ooreen met die klassieke sintaktiese definisie van 'n "positiewe sin" in die proposisielogika (vergelyk Chang & Keisler [1991], p. 13). Die klassifisering van ΔX in bogenoemde drie vorme, kom met Stelling 2.2.3 se karakterisering van 'n positiewe sin X ooreen: as X positief is geld $X \equiv \Delta X$ of $\mathbf{X} = \Delta \mathbf{X}$. Vir die bewys van Stelling 2.2.3 word die volgende lemma benodig:

2.2.2 **Lemma** As $\{X_i \mid i \in I\}$ 'n versameling positiewe konfigurasies is, dan is

(1) $\cup\{X_i \mid i \in I\}$ positief, en

(2) $\cap\{X_i \mid i \in I\}$ positief.

Bewys

(1) Ons moet bewys $\cup\{X_i \mid i \in I\} = \Delta[\cup\{X_i \mid i \in I\}]$. Uit eienskap (1) van $\Delta : \mathscr{P}\mathbf{W} \longrightarrow \mathscr{P}\mathbf{W}$ as afsluitingsoperasie volg dat $\cup\{X_i \mid i \in I\} \subseteq \Delta[\cup\{X_i \mid i \in I\}]$. Omgekeerd: As $w \in \Delta[\cup\{X_i \mid i \in I\}]$, bestaan daar 'n $x \in \cup\{X_i \mid i \in I\}$ só dat $w \geq x$. Dus $w \in \Delta X_i$ vir 'n $i \in I$. Maar $\Delta X_i = X_i$ vir alle $i \in I$ (want X_i is positief), dus $w \in \cup\{X_i \mid i \in I\}$.

(2) $\cap\{X_i \mid i \in I\} \subseteq \Delta[\cap\{X_i \mid i \in I\}]$. Omgekeerd: As $w \in \Delta[\cap\{X_i \mid i \in I\}]$, bestaan daar 'n $x \in \cap\{X_i \mid i \in I\}$ só dat $w \geq x$. Dit beteken $w \in \Delta X_i = X_i$

vir alle $i \in I$ en dus, $w \in \cap\{X_i \mid i \in I\}$. □

2.2.3 **Stelling** Vir enige sin X geld: X is positief (d.i. $X \equiv \Delta X$) as en slegs as X ekwivalent is aan een van die volgende:

(a) F of

(b) T of

(c) 'n Sin wat opgebou is uit proposisiesimbole p_i met behulp van slegs konjunksie en disjunksie.

Bewys

Veronderstel (a) geld, d.i. $X \equiv F$ of $X = \phi$. Volgens die algoritme (stap (Δ1)) is $\Delta X \equiv F$ en dus is X positief. As (b) die geval is, d.i. $X \equiv T$ of $X = W$, is dit duidelik dat X positief is. Laat geval (c) geld en veronderstel X is deur middel van $\wedge$ en $\vee$ opgebou uit $p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_t}$. Dan is **X** deur middel van $\cap$ en $\cup$ opgebou uit die versamelings modelle van p_{i_s}, $s \in \{1, 2, ..., t\}$. Die versamelings modelle van p_{i_s}, $s \in \{1, 2, ..., t\}$ is egter positief, want die modelle van p_{i_s} is die moontlike wêreld (0,0,...,0,1,0,0,...,0) met 'n 1 in die i_s–de posisie asook alle wêrelde bokant dié een in $(W, \leq)$. Volgens Lemma 2.2.2 word positiwiteit deur die vereniging en deursnede van versamelings wêrelde behou. Die konfigurasie **X** wat met X ooreenkom is dus positief, sodat X positief is.

Omgekeerd, veronderstel X is positief. Dan geld $X \equiv \Delta X$ en dus, volgens die algoritmiese konstruksie van ΔX, geld (a), (b) of (c). □

Die karakterisering van 'n negatiewe sin X word deur Stelling 2.2.4 weergegee.

2.2.4 **Stelling** Vir enige sin X is die volgende ekwivalent:

(1) X is negatief (d.i. $X \equiv \nabla X$);

(2) $X \equiv \neg Y$, vir 'n positiewe Y;

(3) X is logies ekwivalent aan een van die volgende:

(a) T of

(b) F of

(c) 'n Sin wat opgebou is uit die ontkennings van proposisiesimbole p_i met behulp van slegs konjunksie en disjunksie.

Bewys

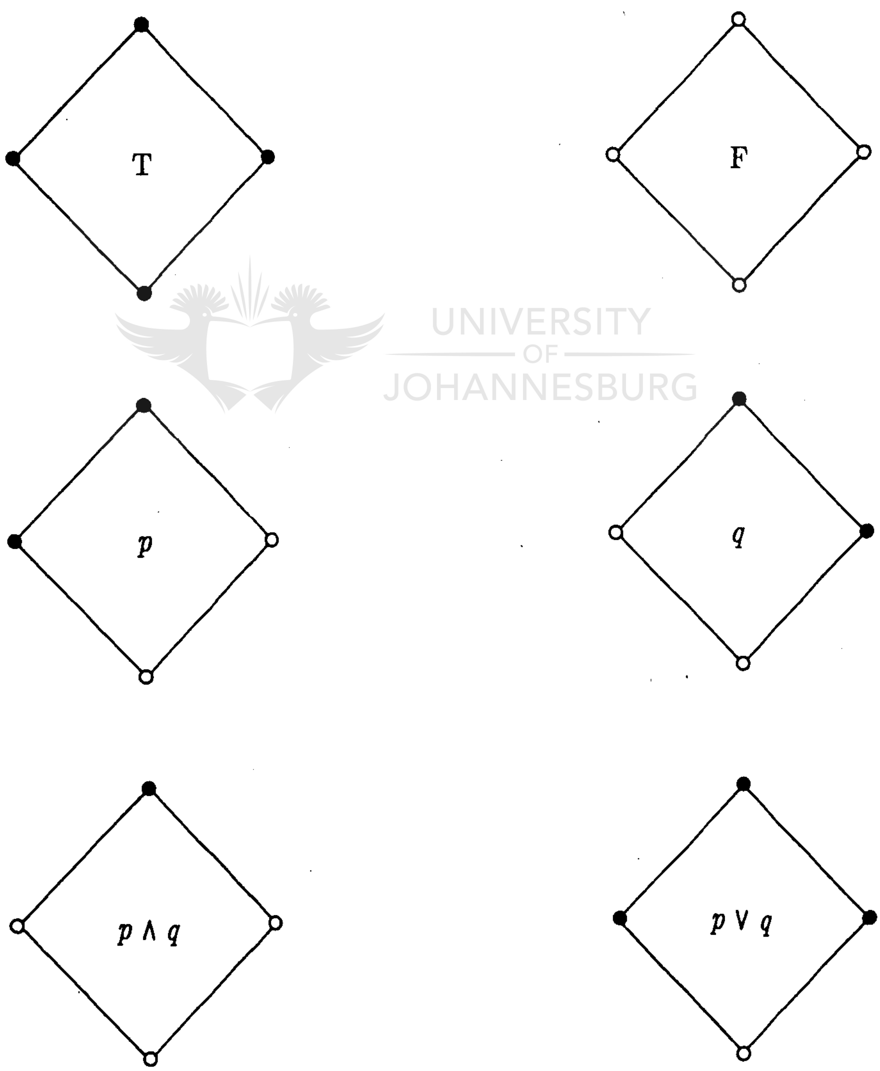
(1) $\Leftrightarrow$ (3): 'n Resultaat soortgelyk aan Lemma 2.2.2 kan ook vir 'n versameling van negatiewe konfigurasies X_i bewys word. Die bewys is dan analoog aan dié van Stelling 2.2.3.

(3) $\Longrightarrow$ (2): Beide T en F is positief en negatief en is die ontkennings van mekaar. Met die toepassing van De Morgan se wette is dit maklik om te sien dat die ontkenning van 'n sin X met die vorm (c) positief is.

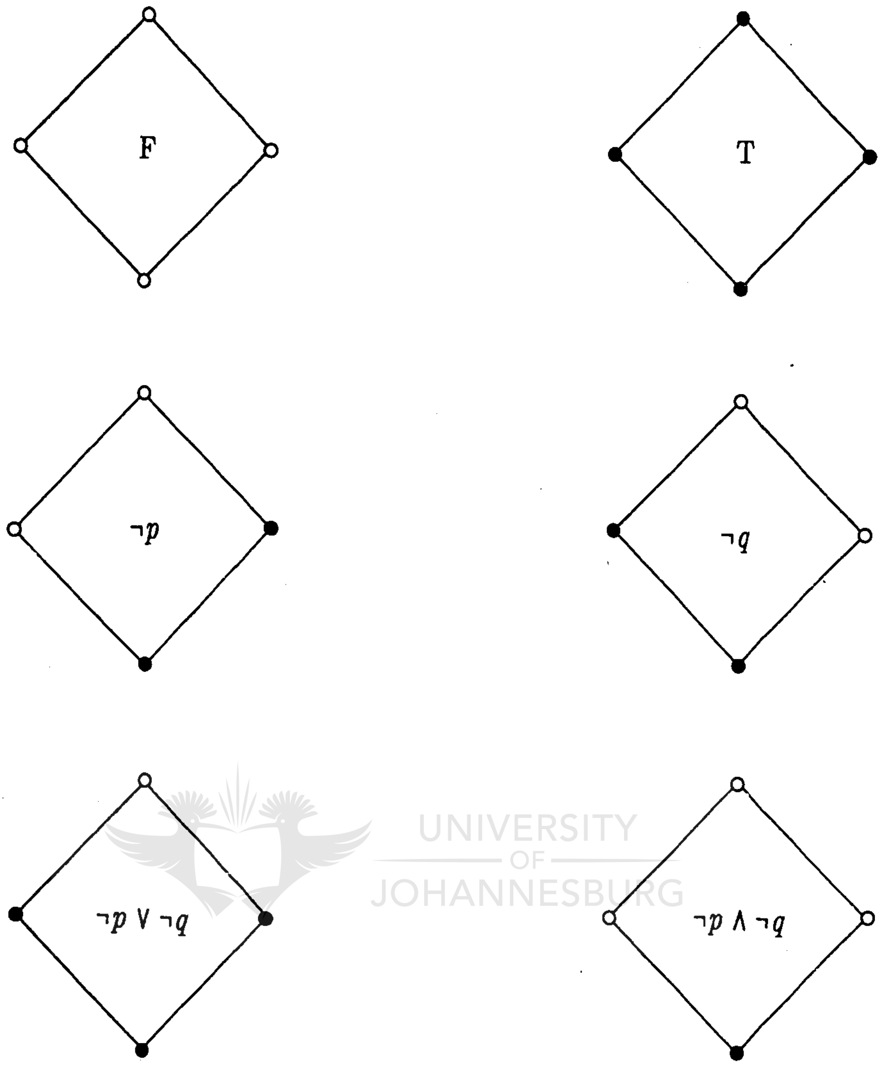
(2) $\Longrightarrow$ (3): Triviaal, as Stelling 2.2.3 se karakterisering van 'n positiewe Y in gedagte gehou word. □

Behalwe vir T en F kan 'n *positiewe sin* altyd herskryf word tot 'n sin wat uit slegs die simbole ∧, ∨ en *positiewe lettersinne* bestaan, en 'n *negatiewe sin* tot 'n sin wat uit slegs die simbole ∧, ∨ en *negatiewe lettersinne* bestaan. In dié sin verwys die "positief" en "negatief" in die onderskeid van lettersinne nie net na die af– of aanwesigheid van 'n negasieteken nie, maar ook na die gebruik van die simbole (p_i of $\neg p_i$) in die karakteriserings van positiewe en negatiewe sinne.

Figure 5 en 6 is 'n duidelike illustrasie van onderskeidelik Stelling 2.2.3 en 2.2.4: In die taal voortgebring deur $\{p, q\}$ is daar sestien logies nie–ekwivalente sinne, waarvan ses positief (voorgestel deur Figuur 5) en ses negatief (Figuur 6) is. Dit is maklik om te sien dat die res van die sestien sinne, naamlik die sinne $p \wedge \neg q$, $\neg p \wedge q$, $p \longrightarrow q \equiv \neg p \vee q$, $q \longrightarrow p \equiv p \vee \neg q$, $p \longleftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ en $p + q \equiv (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ nóg aan Stelling 2.2.3 nóg aan Stelling 2.2.4 voldöen en dus nóg positief nóg negatief is. Die enigste sinne wat beide positief en negatief is, is T en F.



Figuur 5



Figuur 6

Soos afgespreek het ons die begrippe, soos gedefinieer in Afdeling **2.1**, teen die agtergrond van 'n eindig voortgebringde proposisionele logika bespreek. In so 'n taal is elke konfigurasie beskryfbaar deur 'n teorie (en selfs deur 'n enkelsin). Dit beteken dat elke konfigurasie as die versameling modelle **X** van 'n teorie X optree. In besonder word die konfigurasies $\vartriangle$**X** en $\triangledown$**X** respektiewelik deur die enkelsinne $\vartriangle$X en $\triangledown$X beskryf. Die vraag is nou: Kan die positiewe afsluiting $\vartriangle$**X** en die negatiewe afsluiting $\triangledown$**X** van 'n *beskryfbare* konfigurasie **X** beskryf word in die geval van *oneindig* veel voortbringers; en indien wel, deur watter teorieë?

Beskou die proposisionele taal voortgebring deur *enige* aantal proposisie-simbole p_i, $i \in I$. Laat $X = \{S_j \mid j \in J\}$ enige teorie (d.i. 'n versameling sinne S_j, $j \in J$) wees en laat $X^\wedge$ die *versameling van alle eindige konjunksies van sinne uit* X aandui. Met ander woorde, $X^\wedge$ se elemente is alle sinne van die vorm $S_{j_1} \wedge S_{j_2} \wedge \ldots \wedge S_{j_k}$, waar k enige natuurlike getal ≥ 1 is. $X^\wedge$ is dan oneindig, want daar bestaan oneindig veel sulke konjunksies. Die versameling modelle van X is dan dieselfde as die versameling modelle van $X^\wedge$ (d.i. X (= Mod(X)) = Mod($X^\wedge$)): Volgens Brink en Heidema [1989] is $\mathrm{Mod}(X) = \cap\{\mathrm{Mod}(S) \mid S \in X\}$ — "Theorem" 4.3, p. 11; en $\mathrm{Mod}(X_1 \wedge X_2) = \mathrm{Mod}(X_1) \cap \mathrm{Mod}(X_2)$ — "Theorem" 5.2, p. 15. Dus, Mod($X^\wedge$) is die deursnede van die versamelings modelle van alle sinne van die vorm $S_{j_1} \wedge S_{j_2} \wedge \ldots \wedge S_{j_k}$. Deur die herhaalde toepassing van "Theorem" 5.2 is die versameling modelle van elkeen van dié sinne weer die deursnede van die versamelings modelle van al die sinne S_{j_t}, $t \in \{1, 2, \ldots, k\}$ wat in die betrokke konjunksie optree. Omdat $X^\wedge$ bestaan uit alle moontlike eindige konjunksies van sinne uit X, kry ons dat $\mathrm{Mod}(X^\wedge) = \mathrm{Mod}(X) = X$.

Ons sal nou aantoon dat $\vartriangle X$, d.i. $\vartriangle\mathrm{Mod}(X)$, wel beskryfbaar is. Met ander woorde, ons sal aantoon dat $\vartriangle X$ die versameling modelle van 'n teorie is — die teorie soos beskryf in die volgende definisie:

2.2.5 **Definisie** Met X en $X^\wedge$ soos beskryf hierbo, definieer:

$$\vartriangle X^\wedge := \{\vartriangle S \mid S \in X^\wedge\}.$$

2.2.6 **Stelling** $\mathrm{Mod}(\vartriangle X^\wedge) = \vartriangle X$, d.i. $\vartriangle X^\wedge$ beskryf die konfigurasie $\vartriangle X$.

Bewys

$\mathrm{Mod}(\vartriangle X^\wedge) \subseteq \vartriangle X$: Laat $w \in \mathrm{Mod}(\vartriangle X^\wedge)$, d.i. $w \vDash \vartriangle S$ vir alle $S \in X^\wedge$. Dit beteken w is 'n model van $\vartriangle S$, vir alle $S \in X^\wedge$, wat weer beteken $w \in \mathrm{Mod}(\vartriangle S) = \vartriangle\mathrm{Mod}(S)$ (want

$S \in X^\wedge$ en S is dus 'n eindige konjunksie). Vir elke $S \in X^\wedge$ bestaan daar dus 'n moontlike wêreld (d.i. valuasie) v_s só dat $v_s \subseteq w$ (wat beteken $v_s^{-1}(1) \subseteq w^{-1}(1)$ — sien Afdeling **2.1**) en $v_s \vDash S$. Stel $Y := \{\neg p_i \mid w(p_i) = 0\}$, dit wil sê Y is die versameling van alle negatiewe lettersinne wat waar is onder die valuasie w. Dan is w 'n model van Y (d.i. $w \vDash Y$) en ons kan die feit dat $v_s \subseteq w$ uitdruk as $v_s \vDash Y$. (Onthou: $w \vDash Y$ beteken dat w aan alle elemente $\neg p_i$ van Y 'n 1 toeken en dus aan alle ooreenkomstige positiewe lettersinne p_i 'n 0 moet toeken. Die feit dat $v_s \subseteq w$ beteken dat v_s ook aan al súlke positiewe lettersinne p_i 'n 0 moet toeken.) Dus $v_s(p_i) = 0$ vir alle $\neg p_i \in Y$.

Beskou nou die versameling sinne $X \cup Y$. Enige eindige deelversameling Z van $X \cup Y$ het nou 'n model: As $Z \subseteq Y$, dan $w \vDash Z$ (en $v_s \vDash Z$ vir alle v_s); as $Z \cap X \neq \phi$, neem die konjunksie S van die eindig veel sinne in $Z \cap X$. Dan geld $S \in X^\wedge$ en dus $v_s \vDash Y$. Ook het ons $v_s \vDash S$, en dus $v_s \vDash Z$, met ander woorde Z het 'n model v_s. Volgens die kompaktheidseienskap van die proposisielogika het $X \cup Y$ 'n model, sê v. Dus $v \vDash X$ en $v \vDash Y$. Uit $v \vDash Y$, volg dat $v \subseteq w$ wat beteken dat $w \in \Delta X$.

$\Delta X \subseteq \mathrm{Mod}(\Delta X^\wedge)$: Laat $w \in \Delta X$, dus $w \in \Delta\mathrm{Mod}(X)$. Daar bestaan dus 'n valuasie $v \in \mathrm{Mod}(X)$ met $v \subseteq w$, d.i. daar bestaan 'n moontlike wêreld v, só dat $v \vDash X$ en $v \subseteq w$. Maar $\mathrm{Mod}(X) = \mathrm{Mod}(X^\wedge)$, dus $v \vDash X^\wedge$, waaruit volg dat $v \vDash S$ vir alle $S \in X^\wedge$ en dus $v \vDash \Delta S$ vir alle $S \in X^\wedge$ (aangesien $S \vDash \Delta S$), sodat $w \vDash \Delta S$ vir alle $S \in X^\wedge$ (omdat $v \subseteq w$) en dus $w \vDash \Delta X^\wedge$. Dus $w \in \mathrm{Mod}(\Delta X^\wedge)$. □

Die negatiewe afsluiting ∇X van 'n beskryfbare konfigurasie **X** word op sy beurt beskryf deur die teorie $\nabla X^\wedge := \{\nabla S \mid S \in X^\wedge\}$, d.i. $\mathrm{Mod}(\nabla X^\wedge) = \nabla X$. Die bewys hiervan is soortgelyk aan dié vir ΔX en sal nie hier bespreek word nie.

2.3 KONFIGURASIES IN DIE PREDIKAATLOGIKA

In die vorige afdeling het ons die begrip "konfigurasie" se betekenis in die proposisielogika bespreek — in die proposisielogika kom 'n konfigurasie (as 'n spesiale geval van die begrip soos gedefinieer in 2.1) met 'n versameling valuasies op 'n vaste versameling ($A(+)$) van atomiese proposisies ooreen. In die predikaatlogika kry die begrip "konfigurasie" egter 'n algemener betekenis as in 2.1. Voordat ons dié betekenis bespreek, eers 'n beskrywing van die taal waarin ons werk.

Laat $\mathscr{L}$ die taal van die predikaatlogika aandui wat opgebou is uit die volgende simbole: die standaard logiese simbole (d.i. die konnektiewe $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$, $\leftrightarrow$ en die kwantore $\exists$ en $\forall$); aftelbaar veel veranderlikes; 'n versameling relasiesimbole $\{R_j \mid j \in J\}$, waar R_j γ_j–êr is; 'n versameling funksiesimbole $\{F_l \mid l \in L\}$, waar F_l δ_l–êr is; en 'n versameling K van konstant–simbole. 'n Interpretasie $\mathfrak{B}$ van die taal is dan van die vorm $\mathfrak{B} = (B, \{Q_j \mid j \in J\}, \{G_l \mid l \in L\}, g)$ waar B die onderliggende versameling van die interpretasie is; R_j as die γ_j–êre relasie Q_j op B geïnterpreteer word; F_l as die δ_l–êre funksie G_l op B geïnterpreteer word; en die konstant–simbole onder die funksie $g : K \longrightarrow B$ geïnterpreteer word. Ons definieer dan 'n *konfigurasie* as *enige klas van interpretasies van* $\mathscr{L}$.

In Afdeling 2.1 is 'n konfigurasie as 'n sekere *versameling* gedefinieer, naamlik as 'n versameling van deelversamelings van 'n vaste versameling A (of as 'n versameling van karakteristieke funksies van deelversamelings van A). Soos verduidelik in 2.2, is die beskrywing van konfigurasies in die proposisielogika 'n spesiale geval van die algemene beskrywing in 2.1: in die proposisielogika is 'n konfigurasie 'n versameling modelle, d.i. 'n versameling van valuasies op die versameling $A(+)$ van atomiese sinne (of positiewe lettersinne). In die predikaatlogika beskou ons 'n konfigurasie egter as 'n *klas* van interpretasies of modelle. Hier kry die begrip dus 'n algemener betekenis as in 2.1, omdat dit onmoontlik is om in die predikaatlogika net na versamelings van modelle te kyk en dit onmoontlik is om interpretasies weer te gee deur valuasies op 'n vaste versameling van atomiese sinne.

Volgens 2.1 is 'n konfigurasie, sê X, positief as $X = \Delta X$, d.i. as X na bo geslote is, waar "na bo geslote" in terme van *inklusie* van die elemente van X beskryf word. Die begrip van 'n positiewe konfigurasie kan ons net so deurvoer na die proposisielogika, omdat die elemente van 'n konfigurasie, X, in die proposisielogika ook deur inklusie (of die produkordening) georden word. Ook in die predikaatlogika is 'n konfigurasie X *positief* as X na *bo* geslote is, maar nou word die elemente van X nie deur inklusie georden nie — die ordening op X word nou gedefinieer in terme van homomorfieë tussen sy elemente. Voordat ons dié ordening beskryf, omskryf ons eers die begrip "homomorfie" in die predikaatlogika.

Laat $\mathfrak{B} = (B, \{Q_j \mid j \in J\}, \{G_l, l \in L\}, g)$ en $\mathfrak{B}' = (B', \{Q_j' \mid j \in J\}, \{G_l' \mid l \in L\}, g')$ twee interpretasies van $\mathscr{L}$ wees. 'n *Homomorfie* $': \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}'$ is 'n funksie $': B \longrightarrow B'$ só dat:

(1) vir alle $j \in J$, $(b_1, b_2, ..., b_{\gamma_j}) \in Q_j \Longrightarrow (b_1', b_2', ..., b_{\gamma_j}') \in Q_j'$;

(2) vir alle $l \in L$, $[G_l(b_1, b_2, ..., b_{\delta_l})]' = G_l'(b_1', b_2', ..., b_{\delta_l}')$;

(3) vir alle $k \in K$, $(g(k))' = g'(k)$.

Die ordening op interpretasies van die taal word dan soos volg gedefinieer: vir alle $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$:

$\mathfrak{B} \leq \mathfrak{B}'$: as en slegs as daar 'n surjektiewe homomorfie $': \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}'$ bestaan.

'n Interpretasie $\mathfrak{B}$ is dus in hierdie ordening onder 'n interpretasie $\mathfrak{B}'$ as $\mathfrak{B}'$ 'n *homomorfe beeld* van $\mathfrak{B}$ is. Dié ordening word nou gebruik om die begrip van 'n *positiewe konfigurasie* te definieer.

2.3.1 **Definisie** Beskou 'n konfigurasie X.

X word *positief* genoem as die volgende geld:

as $\mathfrak{B} \in X$ en $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{B}'$, dan $\mathfrak{B}' \in X$.

In die predikaatlogika word 'n *sin*, S, (d.i. 'n formule sonder vrye veranderlikes) *positief* genoem as S opgebou is uit atomiese formules met behulp van slegs $\wedge$, $\vee$, $\forall$ en $\exists$ (sien Chang en Keisler [1991], p. 72). 'n *Teorie*, X, (d.i. 'n versameling sinne) word dan *positief* genoem as X logies ekwivalent aan 'n versameling positiewe sinne is. (Net soos in die proposisionele geval, is $X \equiv Y$ (d.i. teorie X is logies ekwivalent aan Y) as Mod(X) = Mod(Y) (d.i. X = Y) — ons neem ook aan dat die begrip van "'n interpretasie is 'n model van 'n teorie X" aan die leser bekend is.) Met bogenoemde beskrywing van 'n positiewe teorie (of 'n sin) word die teorieë (of sinne) T en F (onderskeidelik die ekwivalensieklas van alle logiese *waar* teorieë en die ekwivalensieklas van alle logiese *onwaar* teorieë) dus uitgesluit. Ons sal net soos in die proposisielogika beide hierdie teorieë ook insluit by die versameling van positiewe teorieë. Met die insluiting van dié twee teorieë (T en F) klop bogenoemde definisie van positiewe teorieë met die volgende karakterisering (bekend as Lyndon se Homomorfiestelling):

> "'n Teorie X is logies ekwivalent aan 'n positiewe versameling sinne (d.i. X is positief) as en slegs as X behoue bly onder homomorfe beelde (d.i. as Mod(X) = X geslote is onder homomorfe beelde" (Barwise [1977], p. 72).

In die proposisielogika geld, volgens Stelling 2.2.3, dat 'n konfigurasie X positief is (d.i. X is na bo geslote; of $X = \Delta X$) as en slegs as X ekwivalent is aan F of T of 'n sin wat opgebou is uit positiewe lettersinne met behulp van slegs konjunksie en disjunksie. Analoog hieraan kan ons nou vir die predikaatlogika die volgende uitspraak lewer: 'n aksiomatiseerbare konfigurasie X is positief as en slegs as X logies ekwivalent aan 'n positiewe teorie is. (Dié uitspraak volg direk uit die "Lyndon Homomorphism Theorem" en Definisie 2.3.1.)

Net soos in **2.1** en **2.2** is 'n *negatiewe konfigurasie* in die predikaatlogika, 'n konfigurasie wat na *onder* geslote is:

2.3.2 **Definisie** Beskou 'n konfigurasie X.

Ons noem X *negatief* as die volgende geld:

$$\text{as } \mathfrak{B}' \in X \text{ en } \mathfrak{B} \leq \mathfrak{B}', \text{ dan } \mathfrak{B} \in X.$$

Volgens Definisie 2.3.2 is 'n konfigurasie dus negatief as X geslote is onder *homomorfe oerbeelde*: as $\mathfrak{B}' \in X$ en daar 'n surjektiewe homomorfie $': \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}'$ bestaan, dan moet $\mathfrak{B} \in X$.

Analoog aan die proposisionele geval word 'n *sin* in die predikaatlogika *negatief* genoem as dit logies ekwivalent aan die ontkenning van 'n positiewe sin is, d.i. as dit opgebou is uit die ontkennings van atomiese sinne met behulp van slegs $\wedge$, $\vee$, $\forall$ en $\exists$ (sien Chang en Keisler [1991], p. 313). 'n *Negatiewe teorie* is dan maar net 'n versameling van negatiewe sinne. Volgens ons afspraak om ook die teorieë T en F as elemente van die versameling van positiewe teorieë te neem, is T sowel as F nou ook negatief: $T \equiv \neg F$ en $F \equiv \neg T$. Volgens Stelling 2.2.4, is in die proposisielogika, 'n konfigurasie X negatief (d.i. $X = \triangledown X$) as en slegs as $X \equiv \neg Y$ vir 'n positiewe teorie Y. Dit is maklik om te sien dat ons ook in die predikaatlogika so 'n uitspraak kan lewer: 'n konfigurasie X, beskryf deur 'n sin X, is negatief as en slegs as $X \equiv \neg Y$, vir 'n positiewe sin Y.

Alhoewel ons nie 'n algemene (of selfs aksiomatiseerbare) konfigurasie in die predikaatlogika met 'n versameling valuasies op een vaste versameling atomiese sinne kan laat ooreenkom nie, kan ons so 'n konfigurasie tog met 'n klas van versamelings van valuasies laat ooreenkom — een versameling vir elke element van die konfigurasie. Ons beskryf vir elke moontlike interpretasie 'n versameling valuasies:

Laat $\mathfrak{B} = (B, \{Q_j \mid j \in J\}, \{G_l \mid l \in L\}, g)$ 'n interpretasie van $\mathscr{L}$ wees en vorm die taal $\mathscr{L}(B)$ — met $\mathscr{L}(B)$ bedoel ons die taal wat net soos $\mathscr{L}$ lyk, behalwe dat sy konstantsimbole nou $K \cup B$ is (met $K \cap B = \phi$). Met elke surjektiewe homomorfie $'$: $\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}'$ kom 'n deelversameling A(+) van alle atomiese sinne van $\mathscr{L}$(B) ooreen, naamlik die atomiese sinne van $\mathscr{L}$(B) wat waar is onder die interpretasie $\mathfrak{B}' = (B', \{Q_j' \mid j \in J\}, \{G_l' \mid l \in L\}, g' \cup ')$, waar $g' = g \circ '$ en $\mathfrak{B}'$ gesien word as 'n interpretasie van $\mathscr{L}$(B). Noem dié versameling sinne $D^+(\mathfrak{B}')$ — "die *positiewe diagram* van $\mathfrak{B}'$". $\mathfrak{B}$ is self ook te sien as 'n interpretasie van $\mathscr{L}$(B), naamlik as die interpretasie $(B, \{Q_j \mid j \in J\}, \{G_l \mid l \in L\}, g \cup id_B)$ en dan is $D^+(\mathfrak{B}) \subseteq D^+(\mathfrak{B}')$ (want homomorfieë behou die waarheid van atomiese sinne). Trouens vir enige twee homomorfe beelde $\mathfrak{B}'$ en $\mathfrak{B}''$ van $\mathfrak{B}$ geld:

$$D^+(\mathfrak{B}') \subseteq D^+(\mathfrak{B}'') \text{ as en slegs as } \mathfrak{B}' \leq \mathfrak{B}''.$$

Vir elke interpretasie $\mathfrak{B}$ (as 'n element van 'n konfigurasie X) kan sy homomorfe beelde se preordening, $\leq$, dus wel weergegee word deur die inklusierelasie tussen versamelings van atomiese sinne.

——oOo——

HOOFSTUK 3

WAARHEIDSGETROUHEIDORDENINGE VAN TEORIEË: DIE SPESIALE GEVAL VAN VOLLEDIGE INFORMASIE OOR DIE WAARHEID

It follows, therefore, that truth manifests itself...

— BENEDICTUS DE SPINOZA (in Popper [1969], p. 3).

Every man carries about him a touchstone ...
to distinguish ... truth from appearances.

— JOHN LOCKE (in Popper [1969], p. 3).

In hierdie hoofstuk het ons die definiëring van enkele waarheidsgetrouheidordeninge van teorieë in die proposisielogika teen die agtergrond van *volledige informasie oor die waarheid*, ten doel. Dié doelwit verteenwoordig natuurlik 'n hoogs geïdealiseerde geval wanneer dit met die wetenskaplike praktyk vergelyk word: as die waarheid ten volle bekend is, is dit mos onnodig om te besluit of teorie Y nader aan die waarheid is as teorie X; die enigste teorie van belang is dan die één wat die *volledige waarheid* beskryf. Die leser sal dalk nou vra: Hoekom beskou ons dan hierdie geïdealiseerde geval van volledige informasie? Die antwoord lê daarin dat dié spesiale geval 'n gerieflike raamwerk vorm waarteen ons dan die algemene, realistiese geval kan beskou: Hoe evalueer ons die relatiewe waarheidsgetrouheid van teorieë wanneer ons oor slegs *gedeeltelike informasie* oor die waarheid beskik? Dié "epistemiese" en "metodologiese" vraag sal in Hoofstuk 4 bespreek word; in hierdie hoofstuk konsentreer ons slegs op die "semantiese" en "logiese" vraag.

Die definiëring van die waarheidsgetrouheidordeninge geskied aan die hand van die volgende begrippe: die *positiewe afsluiting*, die *negatiewe afsluiting*, die *konvekse inhoud* en die *nie–konvekse inhoud* van 'n teorie. In Afdeling **3.1** sal ons aantoon dat ons met behulp van die begrippe, positiewe en negatiewe afsluiting, 'n *preordening* kan definieer wat ooreenstem met die waarheidsgetrouheid–preordening wat Brink en Heidema ([1987], [1989]) in terme van die wiskundige begrippe van magsversameling, magsoperasie en magsrelasie gedefinieer het. Ons sal ook aantoon (in **3.4**) dat, deur die begrippe konvekse inhoud en nie–konvekse inhoud ook te betrek, 'n *parsiële ordening* verkry word wat 'n verfyning van bogenoemde ordening van Brink en Heidema is.

'n Verdere doelwit is om die leser (in **3.1**) daarvan te oortuig dat ons definisie van waarheidsgetrouheid die twee aspekte van die intuïtiewe begrip *nader–aan–die–waarheid*, naamlik dié van *meer betroubaar* en *meer informatief*, ineenvleg en versoen.

Oddie [1990] het op sekere ooreenkomste tussen die benadering van Brink en Heidema en ander benaderings gewys. In reaksie hierop belowe Brink en Heidema [1991] 'n latere verduideliking betreffende die verwantskap tussen hulle en *Popper se benadering*. Ons sal nou hierdie belofte in Afdeling **3.2** nakom.

In Afdeling **3.3** toon ons aan hoe die waarheidsgetrouheid–preordening (eers modulo antisimmetrie saamgetrek tot 'n parsiële ordening) in 'n *volledige distributiewe tralie ingebed kan word* — naamlik die produk van die tralie van positiewe teorieë met die tralie van negatiewe teorieë. Ons toon ook aan dat elke tralie van alle positiewe (of negatiewe konfigurasies) isomorf aan 'n vrye distributiewe tralie is.

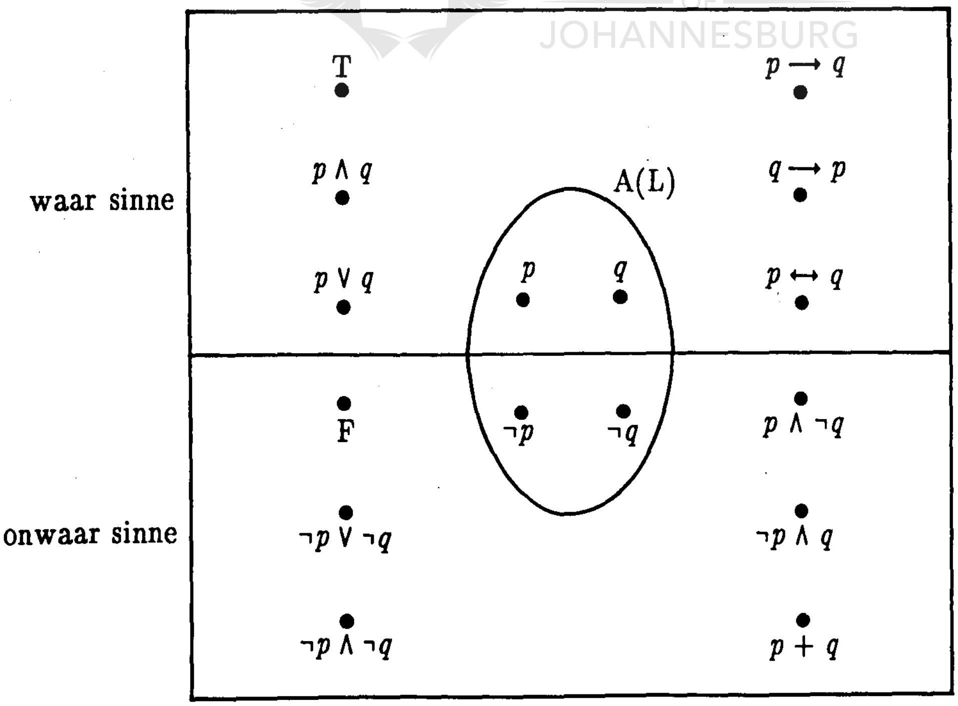
3.1 DIE WAARHEIDSGETROUHEID–PREORDENING

Ons beskou weer eens, ter wille van eenvoudigheid, 'n *eindig voortgebringde* *proposisionele taal*, naamlik die taal voortgebring deur proposisiesimbole p_i, i $\in$ {1, 2, ..., n}; en opgebou deur die konnektiewe $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, en $+$. (Dié taal sal regdeur Hoofstuk **3** gebruik word.) Soos reeds verduidelik in Hoofstuk **2**, is daar in hierdie taal 2^n moontlike wêrelde of valuasies en 2^{2^n} logies nie–ekwivalente proposisies (sinne of teorieë). Anders gestel: daar is 2^{2^n} konfigurasies of versamelings van versamelings moontlike wêrelde.

Ons doelwit is om te kan besluit wanneer een teorie nader aan die waarheid (of meer waarheidsgetrou) as 'n ander teorie is. Vir die doel van hierdie hoofstuk is "die waarheid" volledig bekend (d.i. ons ken volledig die waarheidswaarde van elke p_i) en is "die waarheid" een spesifieke moontlike wêreld (d.i. 'n maksimale konsistente deelversameling van A(L)). Hierdie spesifieke moontlike wêreld sal as die *reële wêreld* bekend staan en sal met die letter r aangedui word. (Die leser moet hierdie notasie vir die reële wêreld nie met die kursiewe letter *r* verwar nie. Laasgenoemde is die simbool wat gebruik word vir die proposisie "it is raining" in voorbeelde waar ons werk met 'n taal voortgebring deur drie veranderlikes.) Sonder verlies aan algemeenheid kan ons (gerieflikheidshalwe) die reële wêreld, r, as die valuasie wat 'n 1 (vir "waar") aan elke p_i toeken, neem. Die reële wêreld is dus die valuasie $\mathrm{r} = (1,1,...,1)$ wat die diagramsin $p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n$ waar maak of bevredig, d.i. $\mathrm{r} \models p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n$. Dit beteken dat r die diagram $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ van positiewe lettersinne is — wat natuurlik maar net die versameling A(+) van voortbringers van die taal is. Vir die versameling van alle moontlike wêrelde geld dan: $\mathbf{W} = \mathscr{P}(\mathrm{r}) = \mathscr{P}\mathrm{A}(+)$.

"Die waarheid" (of die reële wêreld), r, bepaal vir elke sin van die taal of dit "waar" of "onwaar" is: Ons noem 'n sin (teorie) X *waar* as dit waar is in die reële wêreld, d.i. as $\mathrm{r} \in \mathrm{Mod}(X) = \mathbf{X}$ of $\mathrm{r} \models X$. Soortgelyk, word 'n sin X *onwaar* genoem as dit onwaar is in die reële wêreld, wat maar net beteken $\mathrm{r} \notin \mathbf{X}$, d.i. $\mathrm{r} \not\models X$ of $\mathrm{r} \models \neg X$. Op die wyse kategoriseer "die waarheid" die versameling sinne van die taal in waar en onwaar sinne en verkry ons 'n baie growwe *preordening* (of "*kwasi–ordening*", d.i.

'n refleksiewe, transitiewe relasie) op die sinne van die taal: sin X is onder sin Y as en slegs as X onwaar is of Y waar is onder r. Dit beteken dat al die waar sinne ekwivalent is onder die preordening en bokant al die onwaar sinne (wat ook ekwivalent is onder die ordening) in die ordening moet wees. Figuur 7 illustreer hierdie ordening vir die sestien logies nie-ekwivalente sinne van die taal voortgebring deur die versameling $\{p, q\}$. Hier is $r = \{p, q\}$, d.i. r is die valuasie (1,1) wat die sin $p \wedge q$ bevredig. Die sin $X = \neg p \wedge \neg q$ is dan byvoorbeeld onder die sin $Y = q \longrightarrow p$ in die ordening want $r \vDash q \longrightarrow p$. (Elke moontlike wêreld (of valuasie) verdeel natuurlik die sinne van die taal in twee kategorieë: dié wat waar is onder die valuasie en dié wat onwaar is.)



Figuur 7

Ons kan ook 'n *anti–wêreld* ("anti–world") definieer. Die anti–wêreld verteenwoordig dit wat maksimaal in stryd met die waarheid of reële wêreld is en is in alle opsigte presies die teenoorgestelde van die reële wêreld. Ons sal die antiwêreld met r^* aandui. Vir $r = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ is r^* die diagram $\{\neg p_1, \neg p_2, ..., \neg p_n\}$, d.i. die valuasie wat aan elke p_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ 'n 0 toeken (of aan elke $\neg p_i$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ 'n 1 toeken) en dus die sin $\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge ... \wedge \neg p_n$ bevredig. Die anti–wêreld $r^* = (0,0,...,0)$ is dus niks anders as die leë deelversameling van r nie.

Die anti–wêreld is die valuasie wat presies die teenoorgestelde waardes, as die reële wêreld, aan die p_i's toeken, en die begrip "onwaar sin" is die duaal van die begrip "waar sin". Tog kan ons nie die anti–wêreld, in plaas van die reële wêreld, gebruik om sinne as waar of onwaar te klassifiseer nie. Ter verduideliking van hierdie laaste punt beskou ons weer Figuur 7. Hier is $r = \{p, q\}$ — die boonste helfte van A(L); dus r^* is die diagram $\{\neg p, \neg q\}$ — verteenwoordig deur die onderste helfte van A(L), of die valuasie (0,0) wat die sin $\neg p \wedge \neg q$ bevredig. Beskou nou die sinne $p \leftrightarrow q$ en $\neg p \wedge q$. Die modelle van $p \leftrightarrow q$ is die versameling moontlike wêrelde $\{(1,1), (0,0)\}$, d.i. $\mathrm{Mod}(p \leftrightarrow q) = \{\{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$; terwyl $\mathrm{Mod}(\neg p \wedge q) = \{(0,1)\} = \{\{\neg p, q\}\}$. Dus, $r \in \mathrm{Mod}\ (p \leftrightarrow q)$ en $r \notin \mathrm{Mod}\ (\neg p \wedge q)$. Per definisie is $p \leftrightarrow q$ dus waar en $\neg p \wedge q$ onwaar. Ons het ook $r^* \in \mathrm{Mod}(p \leftrightarrow q)$ en $r^* \notin \mathrm{Mod}(\neg p \wedge q)$. Mens kan dus nie redeneer dat 'n sin X waar is as $r^* \nvDash X$ en onwaar is as $r^* \vDash X$ nie.

Ons wil, soos reeds opgemerk, die waarheidsgetrouheid van teorieë in terme van hul positiewe en negatiewe afsluitings vergelyk. In Hoofstuk 2, Afdeling 1, het ons verduidelik wat die terme positiewe afsluiting en negatiewe afsluiting van 'n konfigurasie beteken. Die ordening wat ons op **W** geplaas het vir die algemene beskrywing van die begrippe, was die van inklusie van deelversamelings van A. In die geval van 'n proposisionele taal met eindig veel voortbringers p_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, kan **W** as die Boole–algebra $\mathbf{2}^n$ beskou word en dan is die ordening op **W** — gesien as die versameling van alle moontlike valuasies $v : \{p_1, p_2, ..., p_n\} \rightarrow \{0, 1\}$, maar net die produkordening ($\leq$). Die vraag is nou: Is vir ons doel (die definiëring van 'n waarheidsgetrouheidordening op die sinne van 'n eindige proposisionele taal) die produkordening 'n "sinvolle" ordening op W? 'n Ordening op W is "sinvol" as dit 'n waarheidsgetrouheidordening op die elemente van W is en dit dan uitgebrei kan word tot 'n waarheidsgetrouheidordening op die elemente van $\mathscr{P}$W. Meer spesifiek: ons vereis 'n ordening op W wat nie net 'n waarheidsgetrouheidordening op die *versameling van alle moontlike wêrelde* sal wees nie, maar wat ook van so 'n aard is dat deur die neem van positiewe en negatiewe afsluitings op $\mathscr{P}$W, dit uitgebrei kan word tot 'n waarheidsgetrouheidordening op die *versameling van alle moontlike versamelings van moontlike wêrelde.* Die antwoord op bostaande vraag is dan JA — ons keuse van die reële wêreld as $r = (1,1,...,1)$ sorg dat die produkordening ook 'n waarheidsgetrouheidordening is. (Dat dit ook uitgebrei kan word tot 'n waarheidsgetrouheidordening op konfigurasies, sal bietjie later in hierdie hoofstuk bespreek word.) Volgens die produkordening moet die reële wêreld $r = (1,1,...,1)$, wat in elke posisie "beter of net so goed as" al die ander moontlike wêrelde (nou gesien as rytjies van nulle en ene) is, heel bo in die ordening $(W, \leq)$ wees; terwyl die anti–wêreld $r^* = (0,0,...,0)$, wat in elke posisie "slegter of net so sleg as" al die ander moontlike wêrelde is, heel onder in $(W, \leq)$ moet wees. Omdat die elemente van W ook as deelversamelings van $r = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ beskou kan word, is die produkordening natuurlik dieselfde as dié van inklusie op deelversamelings van r. Vir alle $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in W$ geld dus:

$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x_i \leq y_i$ (in 2) vir alle $i \in \{1, 2, ..., n\}$;

$\Leftrightarrow \quad x \cap r \subseteq y \cap r$;

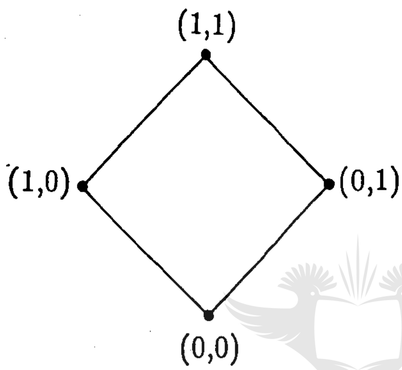
$\Leftrightarrow \quad x \cap r^* \supseteq y \cap r^*$;

$\Leftrightarrow$ daar *meer* (of net soveel) *positiewe* (of *waar*) lettersinne p_i (en dus *minder* (of net soveel) *negatiewe* (of *onwaar*) lettersinne $\neg p_i$) in y voorkom as in x;

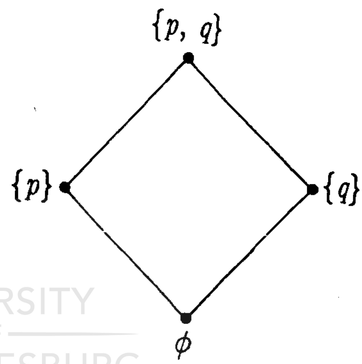
$\Leftrightarrow$ y "nader of net so naby aan" die reële wêreld r

$= (1,1,...,1)$ is as x.

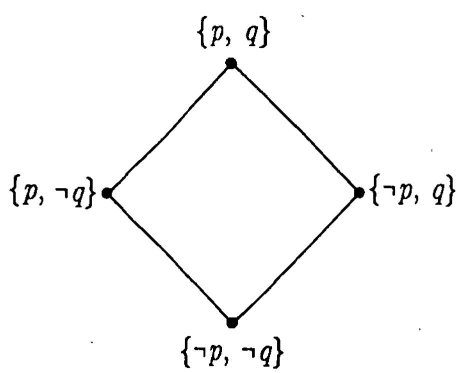
Die taal voortgebring deur $\{p,\ q\}$ gaan ons voortaan dikwels gebruik — veral ter illustrasie van die waarheidsgetrouheid–preordening wat ons bietjie later gaan definieer. Daarom illustreer ons weer vir die gerief van die leser die ordening op **W** vir hierdie geval: Figuur 8 illustreer $\mathbf{W} = \mathbf{2}^2$ — georden deur die produkordening; Figuur 9 gee $\mathbf{W} = \mathscr{P}(\{p,\ q\})$ — georden deur inklusie; en Figuur 10 dui die ooreenstemmende diagramme aan.



Figuur 8

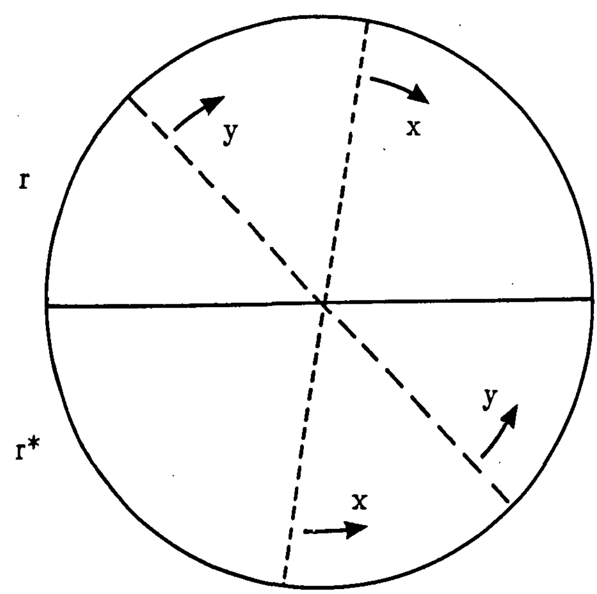


Figuur 9



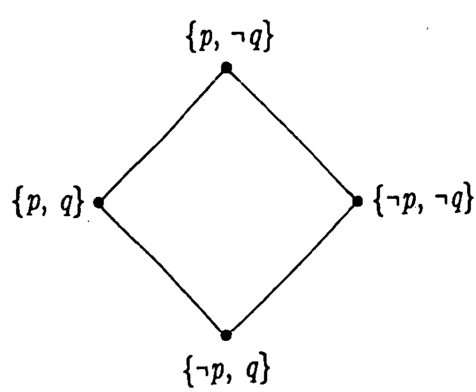
Figuur 10

Figuur 11 mag verder help om die waarheidsgetrouheidkarakter van die produkordening te illustreer: A(L), die versameling van alle lettersinne, $(\pm)p_i$, word verdeel in twee dele — die boonste helfte verteenwoordig al die lettersinne wat in r voorkom, d.i. al die positiewe (of waar) lettersinne; en die onderste helfte verteenwoordig al die lettersinne wat in r* voorkom, d.i. al die negatiewe (of onwaar) lettersinne. Moontlike wêreld y is dan 'n *beter* (*of net so 'n goeie*) *beskrywing van die reële wêreld* $r = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ as moontlike wêreld x, indien y se deursnede met r groter as (of gelyk aan) x se deursnede met r is; of ekwivalent hieraan, as x se deursnede met r* groter as (of gelyk aan) y se deursnede met r* is. (Ons spreek af om voortaan met die beskrywing "moontlike wêreld y is 'n *beter* (of *swakker*) beskrywing van die reële wêreld as x" (of kortweg: "y is beter (of swakker) as x") altyd ook die moontlikheid van x = y in te sluit.)



Figuur 11

Veronderstel ons sou 'n ander moontlike wêreld as $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ vir die reële wêreld kies. Dan is die produkordening op **W** nie meer 'n waarheidsgetrouheid - ordening op **W** nie. Die ordening op **W** wat natuurlik wel nog aan die vereiste van waarheidsgetrouheid sal voldoen, is dié van inklusie op deursnedes met r (of inklusie op deelversamelings van r), waar r nou as 'n *diagram*, d.i. 'n maksimale konsistente versameling lettersinne, beskou word: x is onder y as en slegs as $x \cap r \subseteq y \cap r$. Ter illustrasie van hierdie punt beskou ons die, nou reeds bekende, taal voortgebring deur $\{p, q\}$, maar nou met r gekies as $\{p, \neg q\} = (1,0)$ en dus, $r^* = \{\neg p, q\} = (0,1)$. In Figuur 12 word die ordening van inklusie van deursnedes met $r = \{p, \neg q\}$ uitgebeeld. Hierdie ordening besit duidelik die eienskap van waarheidsgetrouheid: r staan heel bo in die ordening en r*, wat in stryd met "die waarheid" is, heel onder. Halfpad in die ordening kom die diagramme $\{p, q\}$ en $\{\neg p, \neg q\}$ voor. Beide hierdie diagramme weerspieël die "helfte" van "die waarheid", die "helftes" verskil egter en daarom is hulle onvergelykbaar wat die ordening betref. Vergelyk die leser nou hierdie ordening met die produkordening (Figuur 8) en sy ekwivalente vorme (Figure 9 en 10), is dit maklik om te sien dat die produkordening nie vir hierdie geval aan die vereiste van waarheidsgetrouheid voldoen nie. Ons keuse van die reële wêreld as $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ is dus in meer as een opsig gerieflik.



Figuur 12

In ons eindig voortgebringde proposisionele taal kan elke konfigurasie deur 'n enkelsin beskryf word, so ook die konfigurasies ΔX en ∇X — die positiewe en negatiewe afsluiting van 'n konfigurasie X: As X die teorie is wat die konfigurasie **X** beskryf, d.i. **X** = Mod(X), dan word Δ**X** deur die sin ΔX en ∇**X** deur die sin ∇X beskryf. Dit beteken dat Δ**X** = ΔMod(X) = Mod(ΔX) en ∇**X** = ∇Mod(X) = Mod(∇X). In Hoofstuk **2**, Afdeling **2**, is algoritmes geformuleer wat ΔX en ∇X sintakties beskryf. Die algoritmes, asook alle resultate voortspruitend daaruit, is in terme van die produkordening op **W** geformuleer. (Die leser moet homself of haarself daarvan vergewis dat indien ons 'n ander ordening as die produkordening (of een van sy ekwivalente vorme) op **W** sou gebruik, die algoritmes nie meer geld nie.) Ons is dus in alle opsigte terug in die situasie van Afdeling **2.2**.

Om die positiewe afsluiting ΔX van 'n teorie X te verkry, word Mod(X) = **X** tesame met al die moontlike wêrelde wat bokant 'n $x \in$ **X** in (**W**, $\leq$) voorkom, geneem. Dit beteken dat die reële wêreld $r = (1,1,\ldots,1)$ altyd 'n model van ΔX sal wees (d.i. $r \in \Delta$**X**) behalwe as X 'n kontradiksie (of logiese onwaarheid) is, want dan is $X \equiv \Delta X \equiv F$ of, semanties beskou, **X** = Δ**X** = ϕ. Dus as **X** $\neq \phi$, verteenwoordig die *positiewe afsluiting* ΔX van **X** altyd 'n *waar* teorie ΔX. Aan die ander kant word die negatiewe afsluiting ∇X van 'n teorie X verkry deur die konfigurasie **X** asook alle moontlike wêrelde wat onder 'n $x \in$ **X** in (**W**, $\leq$) lê, te neem. Hierdie beskrywing van ∇X het tot gevolg dat die *negatiewe afsluiting* van alle *waar* sinne ekwivalent is aan die sin T: as X waar is, geld $r \in$ **X** en dus ∇**X** = **W**. As **X** egter met 'n *onwaar* sin X ooreenkom, kom die konfigurasie ∇**X** altyd met 'n *onwaar* sin ∇X ooreen: as X onwaar is, is $r \notin$ **X** en dus ook, $r \notin \nabla$**X**. In Tabel 2 word die positiewe afsluitings ΔX en die negatiewe afsluitings ∇X van die sestien logies nie–ekwivalente sinne X van ons illustratiewe taal gelys. Die waarheid of onwaarheid van die sestien sinne en hul afsluitings word ook aangedui. As die leser nou Tabel 2, asook Figure 5, 6 (Afdeling **2.2**) en 7 beskou, sal hy of sy sien dat daar meer waar en onwaar as onderskeidelik positiewe en negatiewe sinne is. Meer spesifiek, as ons F by die versameling van

	X	ΔX	∇X	◇X	♂X
waar onwaar	T	T	T	T	T
waar onwaar	p	p	T	p	T
waar onwaar	q	q	T	q	T
waar onwaar	$p \wedge q$	$p \wedge q$	T	$p \wedge q$	T
waar onwaar	$p \vee q$	$p \vee q$	T	$p \vee q$	T
waar onwaar	$p \longrightarrow q$	T	T	T	$p \longrightarrow q$
waar onwaar	$q \longrightarrow p$	T	T	T	$q \longrightarrow p$
waar onwaar	$p \leftrightarrow q$	T	T	T	$p \leftrightarrow q$
waar onwaar	 $\neg p$	T	 $\neg p$	 $\neg p$	T
waar onwaar	 $\neg q$	T	 $\neg q$	 $\neg q$	T
waar onwaar	 $\neg p \wedge \neg q$	T	 $\neg p \wedge \neg q$	 $\neg p \wedge \neg q$	T
waar onwaar	 $\neg p \wedge q$	q	 $\neg p$	 $\neg p \wedge q$	T
waar onwaar	 $p \wedge \neg q$	p	 $\neg q$	 $p \wedge \neg q$	T
waar onwaar	 $\neg p \vee \neg q$	T	 $\neg p \vee \neg q$	 $\neg p \vee \neg q$	T
waar onwaar	 $p + q$	$p \vee q$	 $\neg p \vee \neg q$	 $p + q$	T
waar onwaar	 F	 F	 F	 F	T

Tabel 2

positiewe sinne sou uitsluit en T by die versameling van negatiewe sinne, is die versameling van positiewe sinne eg bevat in die versameling van waar sinne, en die versameling van negatiewe sinne eg bevat in die versameling van onwaar sinne. Vir die versameling A(L) van lettersinne geld natuurlik dat die versameling van waar (onwaar) lettersinne dieselfde as die versameling van positiewe (negatiewe) lettersinne is. Dat die sin T so baie keer in die tabel voorkom is as gevolg van die feit dat vir alle waar teorieë X, $\nabla X \equiv T$ en vir alle $X \not\equiv F$, X negatief, $\Delta X \equiv T$.

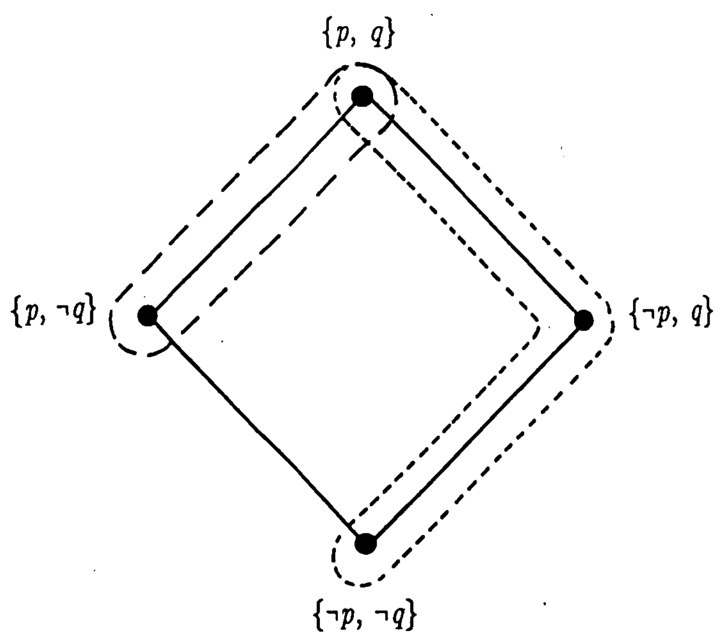
Die vraag "Wanneer is 'n *moontlike wêreld* y 'n beter beskrywing van die waarheid (of reële wêreld r) as 'n *moontlike wêreld* x?", word in terme van die produkordening beantwoord: wanneer y meer (of net soveel) positiewe lettersinne as x bevat. Nou wil ons die idee van "nader aan die waarheid" na *versamelings van moontlike wêrelde* uitbrei: wanneer is 'n *konfigurasie* Y (of *teorie* Y) 'n beter beskrywing van die werklikheid as 'n *konfigurasie* X (of *teorie* X)? Ons antwoord op hierdie vraag het as oorsprong die waarheidsgetrouheid–preordening van Brink en Heidema ([1987] en [1989]) — gedefinieer in terme van die wiskundige begrippe van magsversameling en magsordening:

3.1.1 **Definisie** Laat $\leq$ die ordening op 'n versameling **A** aandui. Dan word die *magsordening* $\Leftarrow$ op die magsversameling $\mathscr{P}\mathbf{A}$ gedefinieer as die relasie tussen deelversamelings van **A** waarvoor die volgende geld: vir alle **X**, **Y** $\subseteq$ **A**:

$$\mathbf{X} \Leftarrow \mathbf{Y} \text{ ass } (\forall x \in \mathbf{X})(\exists y \in \mathbf{Y})\,[x \leq y]\ \&\ (\forall y \in \mathbf{Y})\,(\exists x \in \mathbf{X})\,[x \leq y].$$

Indien (**A**, $\leq$) as die Boole–algebra (**W**, $\leq$) beskou word, is, soos voorgestel deur Brink en Heidema ([1987], [1989]), die ooreenstemmende mags–preordening (of kwasi–ordening) $\Leftarrow$ van *versamelings van wêrelde* 'n *waarheidsgetrouheid–preordening* van die teorieë wat met die versamelings wêrelde ooreenkom. Dit beteken dat vir teorieë X, Y: X $\Leftarrow$ Y per definisie geld ass X $\Leftarrow$ Y. (Vir argumente tot ondersteuning van die beskouing dat die preordeningrelasie $\Leftarrow$ 'n waarheidsgetrouheid–preordening is, verwys ons die leser na die artikels van Brink en Heidema.) Die waarheidsgetrouheid van teorieë word dus maar net in terme van die konfigurasies waarmee hulle ooreenkom gedefinieer.

Ter verduideliking van die waarheidsgetrouheid–preordening $\Leftarrow$, beskou ons die sinne X = $p \longrightarrow q$ en Y = p van ons illustratiewe taal. In Figuur 13 is X die versameling moontlike wêrelde ingesluit deur die klein stippeltjies en Y die versameling ingesluit deur die groter stippels. Y = p is dan meer waarheidsgetrou (of nader aan die waarheid) as X = $p \longrightarrow q$, d.i. X $\Leftarrow$ Y, want vir elke x $\in$ X = $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$ = {(1,1), (0,1), (0,0)} bestaan daar 'n y $\in$ Y = $\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}\}$ = {(1,1), (1,0)} wat 'n beter beskrywing van die reële wêreld r = $\{p, q\}$ = (1,1) is (neem byvoorbeeld telkens y = (1,1)); en vir elke y $\in$ Y bestaan daar 'n x $\in$ X wat 'n swakker beskrywing van die reële wêreld is (neem byvoorbeeld telkens x = (0,0)).

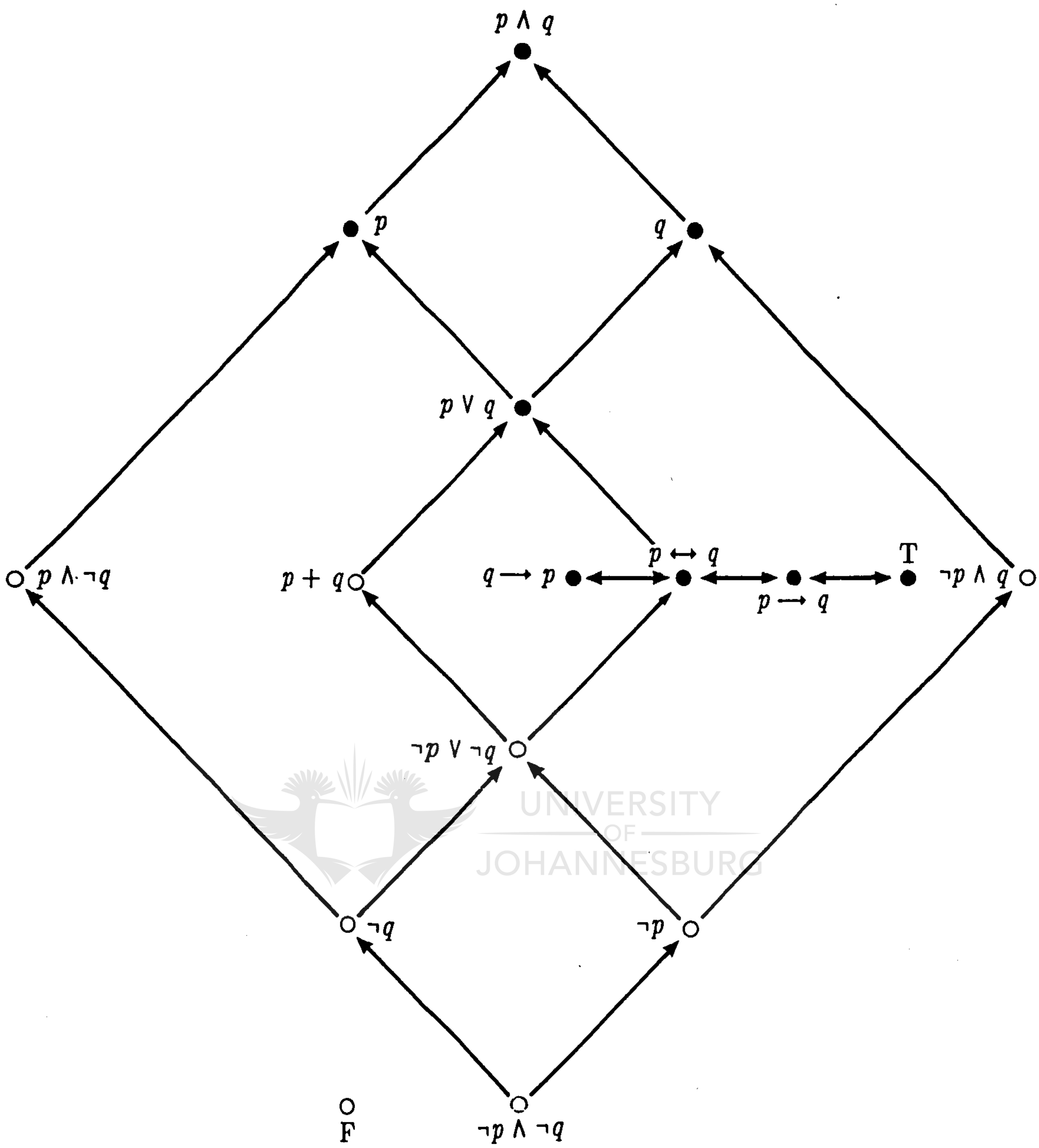


Figuur 13

In Figuur 14 (wat met Brink & Heidema [1987], "Figure 6", p. 540, ooreenstem) word die waarheidsgetrouheid–preordening $\Leftarrow$ vir die geval van twee proposisionele veranderlikes geïllustreer. Die annotasies in die diagram spesifiseer die sestien logies nie–ekwivalente teorieë (sinne) eerder as die ooreenstemmende versamelings van moontlike wêrelde. Hier geld X $\Leftarrow$ Y as X onder Y in die diagram is en daar 'n pyl (direk of transitief) vanaf X na Y is. Vir die gerief van die leser onderskei ons ook die agt waar sinne van die agt onwaar sinne deur net die posisies van die *waar* sinne in te kleur. Die sinne $q \longrightarrow p$, $p \longrightarrow q$, $p \leftrightarrow q$ en T is met horisontale lyne verbind wat pyle in beide rigtings het. Dit beteken dat vir die betrokke vier sinne die relasie $\Leftarrow$ in beide rigtings geld (byvoorbeeld: $p \leftrightarrow q \Leftarrow$ T en T $\Leftarrow p \leftrightarrow q$) en dat die sinne dus ekwivalent is onder $\Leftarrow$. Ons sal sulke sinne *waarheidsgetrou–ekwivalent* noem en die ekwivalensierelasie wat tussen hulle geld met $\Leftrightarrow$ aandui.

Onthou dat in hierdie geval "die waarheid" oor die "reële wêreld" r = (1,1) is, terwyl die enkel–element–konfigurasie {r} met die sin $p \wedge q$ ooreenkom — dié sin wat nou die waarheid, die volle waarheid, en niks anders as die volle waarheid verteenwoordig nie. Dit maak dan ook sin dat dié spesifieke sin heel bo in die diagram (Figuur 14) moet staan, terwyl die sin $\neg p \wedge \neg q$, wat met die enkel–element-konfigurasie {r*} ooreenkom en wat 'n infame leuen oor "die waarheid" verkondig, heel onder. Die sinne $p \wedge \neg q$ en $\neg p \wedge q$ kom onderskeidelik met die enkel–element-konfigurasies $\{\{p, \neg q\}\}$ en $\{\{\neg p, q\}\}$ ooreen; beide hierdie diagramsinne is die konjunksie van een waar (positiewe) en een onwaar (negatiewe) lettersin. Elkeen van die sinne $p \wedge \neg q$ en $\neg p \wedge q$ het dus net mooi een (maar verskillende) helfte van "die waarheid" $p \wedge q$ beet, maar ook terselfdertyd een helfte van "die onwaarheid" beet. In die sin is dit sinvol dat die twee sinne halfpad tussen "die volle waarheid", $p \wedge q$, en "totale onwaarheid", $\neg p \wedge \neg q$, in die diagram voorkom.

Die vier sinne $p \wedge q$, $p \wedge \neg q$, $\neg p \wedge q$ en $\neg p \wedge \neg q$ word onderskeidelik deur die valuasies (1,1), (1,0), (0,1) en (0,0) bevredig, wat op hulle beurt weer met die



Figuur 14

diagramme $\{p, q\}$, $\{p, \neg q\}$, $\{\neg p, q\}$, $\{\neg p, \neg q\}$ ooreenkom. Beskou ons die diagramme as deelversamelings van $r = \{p, q\}$ kom hulle onderskeidelik met die deelversamelings $\{p, q\}$, $\{p\}$, $\{q\}$ en ϕ ooreen. Dit beteken $\mathrm{Mod}(p \wedge q) = \{(1,1)\} = \{\{p, q\}\}$; $\mathrm{Mod}(p \wedge \neg q) = \{(1,0)\} = \{\{p, \neg q\}\} = \{\{p\}\}$; $\mathrm{Mod}(\neg p \wedge q) = \{(0,1)\} = \{\{\neg p, q\}\} = \{\{q\}\}$; en $\mathrm{Mod}(\neg p \wedge \neg q)\} = \{(0,0)\} = \{\{\neg p, \neg q\}\} = \{\phi\}$. Vergelyk ons nou die ordening van die vier moontlike wêrelde (1,1), (1,0), (0,1) en (0,0) in (W, $\leq$) — Figuur 8 (of $\{p, q\}$, $\{p\}$, $\{q\}$, ϕ — Figuur 9; of $\{p, q\}$, $\{p, \neg q\}$, $\{\neg p, q\}$, $\{\neg p, \neg q\}$ — Figuur 10) met dié van hulle ooreenstemmende diagramsinne in ($\mathscr{P}$W, $\Leftarrow$) — Figuur 14, is dit maklik om te sien dat die onderlinge posisies vanaf (W, $\leq$) na ($\mathscr{P}$W, $\Leftarrow$) nie verander nie. Die *magsordening* $\Leftarrow$ op *versamelings van moontlike wêrelde* (d.i. op konfigurasies of teorieë) is dus 'n *uitbreiding* van die produkordening $\leq$ op *enkel* (moontlike) *wêrelde*. In die algemeen geld dan: vir alle x, y $\in$ W:

$$x \leq y \text{ (in W)} \Leftrightarrow \{x\} \Leftarrow \{y\} \text{ in } \mathscr{P}\text{W}.$$

Die ordening $\Leftarrow$ op diagramsinne is dus maar net die van inklusie op die ooreenstemmende diagramme. (Vergelyk ook Brink & Heidema [1987], p. 542.)

In die begin van die afdeling is 'n baie growwe preordening op die versameling sinne van die taal gedefinieer — die preordening waarvolgens al die *waar sinne* bo al die *onwaar sinne* is. Dié preordening word verfyn deur die waarheidsgetrouheid–preordening $\Leftarrow$. Dit beteken dat die waarheidsgetrouheid–preordening $\Leftarrow$, as versameling geordende pare sinne, eg bevat is in die growwe preordening. In die preordening $\Leftarrow$ is byvoorbeeld nie meer alle waar sinne bo alle onwaar sinne nie, maar dit geld nog steeds dat *geen onwaar sin bo 'n waar sin is nie* (sien Brink & Heidema [1987]). Wat die versameling van *lettersinne* betref kry ons egter nog steeds die spesiale situasie dat al die *positiewe* (d.i. *waar*) *lettersinne* bo al die *negatiewe* (d.i. *onwaar*) *lettersinne* in ($\mathscr{P}$W, $\Leftarrow$) is, alhoewel die positiewe (en so ook die negatiewe) lettersinne nou onderling onvergelykbaar is (vergelyk Figuur 14). Dus, vir elke positiewe lettersin p_i, i $\in$ {1, 2, ..., n} en vir elke negatiewe lettersin $\neg p_j$, j $\in$ {1, 2, ..., n} geld $\neg p_j \Leftarrow p_i$. Ons kan dit soos volg verduidelik: Vir elke positiewe lettersin p_i is daar presies $2^n/2$ moontlike wêrelde wat p_i bevredig, naamlik die moontlike wêrelde wat in ten minste die posisie p_i 'n 1 het. Dieselfde geld vir negatiewe lettersinne: daar is $2^n/2$ moontlike wêrelde wat 'n 0 in posisie p_j het. Dit beteken dat vir alle p_i, r $\in$ Mod(p_i) en vir alle p_j, r* $\in$ Mod($\neg p_j$). Vir elke $\neg p_j$ en elke p_i geld dan: vir elke x $\in$ Mod($\neg p_j$) is daar 'n y (naamlik r) $\in$ Mod(p_i) waarvoor x $\leq$ y;

en vir elke y $\in$ Mod(p_i) is daar 'n x (naamlik r*) $\in$ Mod($\neg p_j$) waarvoor $x \lesssim y$.

Brink en Heidema [1987] onderskei die twee helftes van die waarheidsgetrouheid–preordening $\Leftarrow$ met $\leftharpoonup$ en $\leftharpoondown$:

$$X \leftharpoonup Y \text{ ass } (\forall x \in X)(\exists y \in Y)\,[x \lesssim y]; \text{ en}$$

$$X \leftharpoondown Y \text{ ass } (\forall y \in Y)(\exists x \in X)\,[x \lesssim y].$$

Die konjunksie (of deursnede) van $\leftharpoonup$ en $\leftharpoondown$ is dus $\Leftarrow$. Hulle maak ook die volgende notasie–afsprake:

$$X \Rightarrow Y \text{ beteken } Y \Leftarrow X;$$

$$X \rightharpoondown Y \text{ beteken } Y \leftharpoondown X;$$

$$X \leftrightharpoons Y \text{ beteken } X \leftharpoonup Y \text{ en } X \rightharpoondown Y.$$

'n Hele klompie interessante resultate oor die gedrag en eienskappe van die relasies $\leftharpoonup$ en $\rightharpoondown$ (en kombinasies daarvan) met betrekking tot waarheid en onwaarheid, konjunksie en disjunksie van teorieë ensovoorts, word deur Brink en Heidema [1987] bewys. Ons sal net 'n lys van sommige van die resultate gee — vir bewyse daarvan verwys ons die leser na bogenoemde artikel. Onthou dat 'n teorie X waar is as en slegs as r $\in$ Mod(X) = X. Die konjunksie van twee teorieë X en Y is dus waar as en slegs as die reële wêreld 'n model van beide X en Y is, d.i. as r $\in$ Mod(X) $\cap$ Mod(Y) = Mod(X $\wedge$ Y); terwyl die disjunksie van twee teorieë X en Y waar is as en slegs as die reële wêreld 'n model van ten minste een van die teorieë is, d.i. as r $\in$ Mod(X) $\cup$ Mod(Y) = Mod(X $\vee$ Y).

Vir enige teorieë X en Y geld:

(1) As X $\equiv$ Y, dan X $\Leftrightarrow$ Y.

(2) As Y *waar* is, dan X $\leftharpoonup$ Y.

(3) As X *waar* is en Y *onwaar* is, dan X $\not\leftharpoonup$ Y (en dus X $\nLeftarrow$ Y).

(4) X $\wedge$ Y $\leftrightharpoons$ X en X $\wedge$ Y $\leftrightharpoons$ Y.

(5) X $\leftrightharpoons$ X $\vee$ Y en Y $\leftrightharpoons$ X $\vee$ Y.

(6) As *beide* X en Y *waar* is, dan X $\vee$ Y $\Leftarrow$ X $\Leftarrow$ X $\wedge$ Y.

(7) As X *waar* is en Y *onwaar* is, dan

(a) $X \not\Leftarrow X \wedge Y$

(b) Y en $X \wedge Y$ mag óf vergelykbaar óf onvergelykbaar in terme van $\Leftarrow$ of $\Rightarrow$ wees.

(c) $X \vee Y \Leftarrow X$

(d) $X \vee Y \not\Leftarrow Y$

(8) As *beide* X en Y *onwaar* is, dan mag X en $X \wedge Y$ óf vergelykbaar óf onvergelykbaar in terme van $\Leftarrow$ of $\Rightarrow$ wees.
Soortgelyk vir X en $X \vee Y$.

Vir voorbeelde ter ondersteuning van die resultate kan die leser weer Figuur 14 van nader bekyk. Dit is duidelik dat die eerste resultaat net in een rigting geld: dit is heel moontlik dat $X \Leftarrow Y$ en $Y \Leftarrow X$ (en dus $X \Leftrightarrow Y$) maar dat $X \not\equiv Y$. Vergelyk maar net die vier sinne $q \longrightarrow p$, $p \longleftrightarrow q$, $p \longrightarrow q$ en T in Figuur 14. Dit beteken dat die relasie $\Leftarrow$ nie antisimmetries op die versameling (logies ekwivalente klasse van) sinne is nie. Resultaat (2) geld omdat vir Y waar, is $r \in Y$ en dus is daar altyd 'n model van Y wat "beter" as alle modelle van X is. Dit is interessant om daarop te let dat die sin F — die sin wat alle logiese teenstrydighede verteenwoordig, met *geen ander* sin in terme van $\Leftarrow$ vergelyk kan word nie. Die rede is dat geen moontlike wêreld vir F bevredig nie, d.i. Mod(F) = ϕ. Volgens resultaat (2) geld wel dat $F \Leftarrow X$ vir alle waar teorieë X. Dit is egter ook die geval dat $F \Leftarrow X$ vir alle teorieë X: vir elke (daar is geen) model van F is daar altyd 'n model van X te vinde wat hoër op in die produkordening van die versameling moontlike wêrelde lê. Die ander helfte van die relasie $\Leftarrow$ geld egter nooit nie—triviaal nie, d.i. vir alle teorieë $X \not\equiv F$, is $F \not\Rightarrow X$: daar kan nooit 'n model van F gevind word wat "slegter" as 'n model van X is nie. Soortgelyk geld $X \not\Leftarrow F$ vir alle $X \not\equiv F$ (vir waar teorieë X, volg dit uit resultaat (3)), maar wel $X \Rightarrow F$ vir alle teorieë X.

Op grond van die resultate lys Brink en Heidema [1987] sekere algemene beginsels (wat hulle noem "Principles concerning verisimilitude") met betrekking tot die vergelyking van teorieë in terme van die waarheidsgetrouheid–preordening $\Leftarrow$. Ons herhaal die lys hier en volg hulle afspraak dat die beskrywings "vermeerdering (of vermindering) in waarheidsgetrouheid" en "meer (of minder) waarheidsgetrou" die moontlikheid van ekwivalente waarheidsgetrouheid ook insluit:

(1) Geen onwaar teorie is meer waarheidsgetrou as enige waar teorie nie.

(2) Vir waar teorieë word waarheidsgetrouheid deur konjunksie vermeerder en deur disjunksie verminder.

(3) Die waarheidsgetrouheid van 'n waar teorie word nie vermeerder deur konjunksie met 'n onwaar teorie nie — dit word óf verminder óf die resultaat is 'n onvergelykbare teorie.

(4) Die waarheidsgetrouheid van 'n onwaar teorie mag of vermeerder of verminder of onvergelykbaar word deur die konjunksie met 'n waar teorie.

(5) Die waarheidsgetrouheid van 'n waar teorie word verminder deur disjunksie met 'n onwaar teorie.

(6) Die waarheidsgetrouheid van 'n onwaar teorie word nie verminder deur disjunksie met 'n waar teorie nie — dit word óf vermeerder óf die resultaat is 'n onvergelykbare teorie.

(7) Vir onwaar teorieë word waarheidsgetrouheid deur konjunksie, sowel as disjunksie, of vermeerder of verminder of onvergelykbaar gemaak.

Ter ondersteuning van bogenoemde beginsels kan die leser weer eens Figuur 14 beskou. Waarop ons nou wil fokusseer, is die feit dat Brink en Heidema se waarheidsgetrouheid–preordening, $\Leftarrow$, ekwivalent in terme van *positiewe* en *negatiewe afsluitings* beskryf kan word. Dié feit is ook (in 'n ander konteks) deur Pretorius [1988], p. 2) bewys; en dit skyn of magsrelasies op die wyse van Definisie 3.1.2 vir die eerste keer deur Walker [1984] beskryf is.

3.1.2 **Definisie** Vir alle X, Y $\subseteq$ W:

$$X \Leftarrow Y \text{ ass } X \subseteq \triangledown Y \text{ en } \vartriangle X \supseteq Y,$$

in welke geval ons sê dat X *minder (of net so) waarheidsgetrou as* Y *in die waarheidsgetrouheid–preordening is.*

Uit die feit dat $\vartriangle : \mathscr{P}W \longrightarrow \mathscr{P}W$ en $\triangledown : \mathscr{P}W \longrightarrow \mathscr{P}W$ afsluitingsoperasies is, kan die ordening $\Leftarrow$ ook gedefinieer word as: vir alle X, Y $\subseteq$ W:

$$X \Leftarrow Y \text{ ass } \triangledown X \subseteq \triangledown Y \text{ en } \vartriangle X \supseteq \vartriangle Y.$$

Dit is amper triviaal om aan te toon dat ons definisie (3.1.2) van die waarheidsgetrouheid–preordening $\Leftarrow$ ekwivalent is aan dié van Brink en Heidema (3.1.1) met $A = W$: die eerste helfte van Definisie 3.1.1, $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)[x \leq y]$, beteken maar net dat $X \subseteq \triangledown Y$ (en dus $\triangledown X \subseteq \triangledown Y$); en die tweede helfte, $(\forall y \in Y)$ $(\exists x \in X)[x \leq y]$, maar net dat $Y \subseteq \vartriangle X$ (en dus $\vartriangle Y \subseteq \vartriangle X$).

Vir enige teorie X geld altyd dat $\triangledown X \Leftarrow X \Leftarrow \vartriangle X$, d.i. elke teorie X is altyd *ten minste net so waarheidsgetrou as sy negatiewe afsluiting* $\triangledown X$ *en hoogstens net so waarheidsgetrou as sy positiewe afsluiting* $\vartriangle X$. Dit kan soos volg verduidelik word: $\triangledown(\triangledown X) = \triangledown X$; $\vartriangle X = \vartriangle(\vartriangle X)$ en as $X \neq \phi$, is $\vartriangle(\triangledown X) = W \supseteq \vartriangle X$ en $\triangledown X \subseteq \triangledown(\vartriangle X) = W$. (Onthou dat vir alle $\phi \neq X \subseteq W$: $r \in \vartriangle X$, $r^* \in \triangledown X$ en dus, $\triangledown(\vartriangle X) \equiv T$ en $\vartriangle(\triangledown X) \equiv T$. As natuurlik $X = \phi$, is $\triangledown X = X = \vartriangle X = \phi$.)

Met die notasie $X \Leftrightarrow Y$ bedoel ons $X \Leftarrow Y$ en $Y \Leftarrow X$. In terme van Definisie 3.1.2 beteken $X \Leftrightarrow Y$ dus $\triangledown X = \triangledown Y$ en $\vartriangle X = \vartriangle Y$. Indien $X \not\equiv F$, bestaan die volgende waarheidsgetrouheid–ekwivalensies:

3.1.3 **Stelling** As $X \neq \phi$, geld:

(1) $\vartriangle X \Leftrightarrow X \cup \{r\}$ en

(2) $\triangledown X \Leftrightarrow X \cup \{r^*\}$.

Bewys

(1) $\nabla(\Delta X) = W$ en $\nabla(X \cup \{r\}) = \nabla X \cup \nabla(\{r\}) = \nabla X \cup W = W.$

$\Delta(\Delta X) = \Delta X$ en $\Delta(X \cup \{r\}) = \Delta X \cup \Delta(\{r\}) = \Delta X \cup \{r\} = \Delta X.$

(2) $\nabla(\nabla X) = \nabla X$ en $\nabla(X \cup \{r^*\}) = \nabla X \cup \{r^*\} = \nabla X.$

$\Delta(\nabla X) = W$ en $\Delta(X \cup \{r^*\}) = \Delta(\{r^*\}) = W.$ □

Die versamelings van waar en onwaar sinne afleibaar uit 'n teorie X word respektiewelik die *waarheid–inhoud* ("truth–content") en *onwaarheid–inhoud* ("falsity–content") van X genoem. (Vergelyk ook Hoofstuk 1: Popper se filosofie oor waarheidsgetrouheid.) In die geval van 'n eindig voortgebringde proposisionele taal kan elke versameling sinne (d.i. 'n teorie) deur konjunksie as 'n enkelsin geskryf word. In só 'n taal beskryf die begrippe *waarheid–inhoud* en *onwaarheid–inhoud* van X dus twee spesifieke sinne, naamlik onderskeidelik die *logies sterkste waar* en *logies sterkste onwaar sin afleibaar uit* X.

Die feit dat vir 'n nie–leë konfigurasie X geld dat ΔX en $X \cup \{r\}$ waarheidsgetrou–ekwivalent is (uit 3.1.3 (1)) beteken dus dat vir 'n nie–teenstrydige ("non–contradictory") teorie X, sy waarheid–inhoud — voorgestel deur die versameling moontlike wêrelde $X \cup \{r\}$, altyd presies net so na aan die waarheid as sy positiewe afsluiting ΔX is, en ten minste net so naby aan die waarheid as X self is. Vir 'n voorbeeld om dié argument te illustreer, versoek ons die leser om terug te blaai na Figuur 4 (Afdeling 2.2) en daarop te let dat $\Delta[(h \wedge r) \leftrightarrow \neg w)] \equiv (h \wedge r) \vee w$ nie slegs die positiewe afsluiting nie, maar ook die waarheid–inhoud van $(h \wedge r) \leftrightarrow \neg w$ is. In hierdie voorbeeld is die logies sterkste positiewe sin afleibaar uit X (naamlik ΔX), dus nie slegs *waarheidsgetrou–ekwivalent* aan die logies sterkste waar sin afleibaar uit X nie — ΔX is ook *logies ekwivalent* aan die waarheid–inhoud van X, d.i. $\Delta X = X \cup \{r\}$. (Vir $X \neq \phi$ en X positief, d.i. $r \in X$, geld natuurlik altyd dat $\Delta X = X = X \cup$

$\{r\}$.) Dié spesiale situasie (dat $\Delta X = X \cup \{r\}$) geld egter nie in die algemeen nie. Neem byvoorbeeld die waar sin $p \leftrightarrow q$ in Figuur 14: $\Delta(p \leftrightarrow q) \equiv T$, maar $\mathrm{Mod}(p \leftrightarrow q) \cup \{r\}$ kom met die sin $p \leftrightarrow q$ ooreen.

Ons wys die leser daarop dat die versameling wêrelde $X \cup \{r^*\}$ nie in die algemeen die onwaarheid–inhoud van 'n teorie X voorstel nie. Dit volg uit die argument dat waar– of onwaarheid van teorieë nie in terme van die anti–wêreld r^* gedefinieer kan word nie. Neem maar net enige waar teorie X, dan stel $X \cup \{r^*\}$ nooit 'n onwaar teorie voor nie.

Vir die gerief van die leser gee ons nou 'n opsomming van enkele interessante feite: Vir alle $X \subseteq W$ geld:

- X is positief $\Leftrightarrow X = \Delta X$;
- X is negatief $\Leftrightarrow X = \nabla X$;
- X is positief en negatief $\Leftrightarrow X = W$ of $X = \phi$;
- X is waar $\Leftrightarrow r \in X \Leftrightarrow \nabla X = W$;
- $r^* \in X \Leftrightarrow \Delta X = W$;
- X is positief en $X \neq \phi \Longrightarrow$ X is waar;
- X is negatief en $X \neq \phi \Longrightarrow r^* \in X$;
- X is waar $\Leftrightarrow W \Leftarrow X$;
- X is waar $\Longrightarrow X \rightleftharpoons \Delta X$;
- $X \rightleftharpoons \Delta X$, $\Delta X \neq \phi \Longrightarrow$ X is waar;
- $r^* \in X \Longrightarrow X \rightleftharpoons \nabla X$;
- $X \rightleftharpoons \nabla X$, $\nabla X \neq \phi \Longrightarrow r^* \in X$;
- X is waar en $r^* \in X \Leftrightarrow X \rightleftharpoons W$.

Filosofies beskou, is die waarheidsgetrouheidordening 'n gebalanseerde ineenvlegting van die twee, skynbaar mededingende, komponente van die intuïtiewe begrip *nader–aan–die–waarheid*. Die twee komponente ter sprake is dié van *betroubaarheid* aan die een kant, en dié van *informatiwiteit* (logiese inhoud) aan die ander kant.

'n Teorie X is waar as $r \in \mathrm{Mod}(X)$. Dus, hoe meer modelle 'n teorie X het (d.i. hoe groter die versameling X is), hoe groter is die kans of waarskynlikheid dat X waar kan wees. Aan die ander kant, gaan 'n hoë mate van informatiwiteit (of deduktiewe krag) van 'n teorie hand–aan–hand met 'n klein versameling modelle. Dus, 'n teorie met min modelle gee ons baie inligting (oor die werklikheid) en 'n *toename* in *informatiwiteit* lei tot 'n *afname* in *betroubaarheid.* Dink maar net aan die sinne T en F en hulle logies ekwivalente vorme in die taal voortgebring deur $\{h, r, w\}$, waar h, r en w onderskeidelik die betekenis van "dit is warm", "dit is reënerig" en "dit is winderig" in die metataal het. Die sin $h \vee \neg h \equiv T$, wat sê "dit is warm of dit is nie warm nie", is dan baie betroubaar in die sin dat wat ook al die werklike weeromstandighede is, dié sin is altyd waar (d.i. $\mathrm{Mod}(T) = W$). T is egter glad nie informatief van aard nie, want "dit is warm of dit is nie warm nie" vertel ons niks van die kwiklesing daar buite nie. Die sin T is dan ook uit alle sinne afleibaar (d.i. $X \models T$ vir alle teorieë X). Vergelyk ons dit nou met $h \wedge \neg h \equiv F$, wat sê "dit is warm en dit is nie warm nie", verkondig laasgenoemde 'n onmoontlike situasie in die weer. F is dus baie informatief (só baie dat hy eintlik te veel sê) maar glad nie betroubaar nie, want $h \wedge \neg h$ is altyd onwaar, maak nie saak wat die werklike weertoestand is nie. (Ons maak natuurlik nie hier voorsiening vir beskrywings soos "dit is tussenin–weer" nie — wat dalk ook as "dit is warm en dit is ook nie warm nie" uitgedruk kon word.)

Hoe minder modelle 'n teorie X het, hoe kleiner is die kans dat $r \in \mathrm{Mod}(X)$ en dus dat X waar is. As X egter 'n *waar* teorie is, beteken 'n kleiner versameling modelle X 'n beter benadering van die situasie dat die reële wêreld die *enigste* model van X kan wees. Die begrip "meer informatief" het dus vir waar sinne (in die spesiale geval van volledige informasie) die betekenis van "'n groter voldoen daaraan om die *volle waarheid* te wees".

Die feit dat die relasie $X \Leftarrow Y$ 'n gebalanseerde ineenvlegting van die komponente van betroubaarheid en informatiwiteit is, word die beste geïllustreer deur die geval waar $\nabla Y \not\equiv T$ (wat beteken dat Y *onwaar* is en ook, omdat $X \Leftarrow Y$ en dus $X \subseteq$

$\nabla X \subseteq \nabla Y$, X *onwaar* is) en $\Delta Y \not\equiv F$ (sodat Y en ook, omdat $\Delta X \supseteq \Delta Y$, X nie só onwaar is nie, d.i. beide X en Y is *nie–teenstrydig*):

In die notasie van sinne kan die definisie van die relasie $X \Leftarrow Y$ geskryf word as

$$\nabla X \vDash \nabla Y \text{ en } \Delta Y \vDash \Delta X.$$

In die eerste helfte, $\nabla X \vDash \nabla Y$, van die konjunksie is die negatiewe afsluiting van X logies sterker as dié van Y. Van die twee *onwaar negatiewe afsluitings* ∇X en ∇Y van onderskeidelik X en Y, is dit dus ∇X wat die sterkste bewering maak. Y, in sy onwaar negatiewe afsluiting, lieg dus nie so erg soos X wat in sy onwaar negatiewe afsluiting erger (of "sterker") leuens vertel. In hierdie sin kan ons Y as *meer betroubaar* of *geloofwaardig* as X beskou.

Hierteenoor, vertel die tweede helfte, $\Delta Y \vDash \Delta X$, ons dat van die *waar positiewe afsluitings* ΔX en ΔY van onderskeidelik X en Y, dit ΔY is wat die sterkste logiese krag het. In hierdie sin kan Y as *meer informatief* as X beskou word.

Ter illustrasie van die voorafgaande bespreking blaai ons terug na Figuur 14 en kies $X = \neg p$ en $Y = p + q$. Dan is $p + q$ nader aan die waarheid, $p \wedge q$, as $\neg p$, want wat die negatiewe afsluitings betref is $p + q$ meer betroubaar as $\neg p$: $\nabla(\neg p) \equiv \neg p \vDash \nabla(p + q) \equiv \neg p \vee \neg q$; en wat die positiewe afsluitings betref is $p + q$ meer informatief as $\neg p$: $\Delta(p + q) \equiv p \vee q \vDash \Delta(\neg p) \equiv T$.

As ons nou die geval beskou waar *beide* X en Y sowel *positief* as *nie–teenstrydig* is (wat beteken dat $X \equiv \Delta X \not\equiv F$ en $Y \equiv \Delta Y \not\equiv F$, en wat impliseer dat $\nabla X \equiv \nabla Y \equiv T$), dan kry ons die interessante verskynsel dat

$$X \Leftarrow Y \text{ as en slegs as } Y \vDash X \text{ (3.1.4 (1))}.$$

Dus, dan is die waarheidsgetrouheid–preordening tussen sulke sinne dié van *omgekeerde afleibaarheid* en dan beteken *groter waarheidsgetrouheid* dieselfde as *sterker deduktiewe krag*. Vir 'n voorbeeld van hierdie geval kyk ons na die boonste ruit van Figuur 14 wat die nie–triviale vier van die ses positiewe sinne voorstel, d.i. die positiewe sinne T en F is nie ingesluit nie. Die sin $p \wedge q$ wat die heel naaste aan die waarheid is, het ook die sterkste logiese krag (en dus die kleinste versameling modelle) van die vier sinne in die ruit.

Vir die geval waar *beide* X en Y sowel *negatief* as *nie–teenstrydig* is (d.i. $X \equiv \triangledown X \not\equiv F$, $Y \equiv \triangledown Y \not\equiv F$, $\vartriangle X \equiv \vartriangle Y \equiv T$), geld net mooi die teenoorgestelde van die vorige geval:

$$X \Leftarrow Y \text{ as en slegs as } X \models Y \ (3.1.4\ (2)).$$

Vir sulke sinne beteken *groter waarheidsgetrouheid* dus *minder logiese inhoud.* Vir voorbeelde hiervan kyk ons nou na die onderste ruit van Figuur 14 wat die nie–triviale vier van die ses negatiewe sinne voorstel. In die ruit het die logies swakste van die vier sinne, naamlik $\neg p \vee \neg q$, die grootste waarheidsgetrouheid.

3.1.4 **Stelling** Vir enige twee sinne X en Y:

(1) As beide X en Y sowel *positief* as nie–teenstrydig is, dan

$$X \Leftarrow Y \text{ ass } Y \models X.$$

(2) As beide X en Y sowel *negatief* as nie–teenstrydig is, dan

$$X \Leftarrow Y \text{ ass } X \models Y.$$

Bewys

(1) Sê $X \Leftarrow Y$, d.i. $\triangledown X \models \triangledown Y$ en $\vartriangle Y \models \vartriangle X$. Maar, omdat $\triangledown X \equiv \triangledown Y \equiv T$, $\vartriangle X \equiv X$ en $\vartriangle Y \equiv Y$, geld $Y \models X$. Die omgekeerde geld soortgelyk.

(2) Uit die feit dat $\triangledown X \equiv X$, $\triangledown Y \equiv Y$ en $\vartriangle X \equiv \vartriangle Y \equiv T$. □

Dit beteken dat vir nie–teenstrydige positiewe sinne die volgende beskrywings dieselfde betekenis het:

het groter waarheidsgetrouheid as;

het meer logiese (deduktiewe) krag (of inhoud) as;

het kleiner (logiese) waarskynlikheid as (d.i. het 'n kleiner kans om waar te wees as);

het 'n kleiner versameling modelle as;

terwyl vir nie–teenstrydige negatiewe sinne die volgende ooreenstem:

het groter waarheidsgetrouheid as;

het minder logiese inhoud as;

het groter waarskynlikheid as (d.i. het 'n groter kans om waar te wees as);

het 'n groter versameling modelle as.

Vir sinne wat nóg positief nóg negatief is, is die waarheidsgetrouheid–preordening 'n subtiele vermenging van die twee opponerende ordeninge — afleibaarheid en omgekeerde afleibaarheid.

Stelling 3.1.4 geld duidelik net as $X \not\equiv F$ en $Y \not\equiv F$. (Onthou, ten opsigte van $\Leftarrow$, is F met geen sin (behalwe F self) vergelykbaar nie.) Met F uitgesluit is die versameling van positiewe teorieë eg bevat in die versameling van waar teorieë. Die leser mag dalk nou wonder of Stelling 3.1.4 (1), d.i. $X \Leftarrow Y$ ass $Y \vDash X$, wat geld vir alle *waar positiewe* teorieë, tot die groter versameling van *alle waar* teorieë uitgebrei kan word. Die antwoord is: NEE. Meer waar teorieë is vergelykbaar onder $\Leftarrow$ as onder $\vDash$: Beskou byvoorbeeld die sinne $q \rightarrow p$ en $p \rightarrow q$ in Figuur 14: $p \rightarrow q \Leftarrow q \rightarrow p$ (en ook $q \rightarrow p \Leftarrow p \rightarrow q$), maar $q \rightarrow p \nvDash p \rightarrow q$ (en ook $p \rightarrow q \nvDash q \rightarrow p$). As beide X en Y waar is (d.i. $\nabla X = \nabla Y = W$) en $Y \vDash X$ (d.i. $Y \subseteq X$ en dus, $\Delta Y \subseteq \Delta X$), dan geld egter $X \Leftarrow Y$. Vir die groter klas van waar teorieë, geld Stelling 3.1.4 (1) dus net in een rigting. Die leser mag dalk ook wonder of daar vir die versameling van *onwaar* sinne, enige verwantskap tussen die relasies $\Leftarrow$ en $\vDash$ bestaan. Die antwoord hierop is: NEE — selfs al sou F uit die versameling van onwaar sinne uitgesluit word: $\neg p \wedge \neg q \Leftarrow p + q$ (sien Figuur 14), maar $\neg p \wedge \neg q \nvDash p + q$ en $p + q \nvDash \neg p \wedge \neg q$; $p \wedge \neg q \vDash p + q$, maar $p \wedge \neg q \not\Leftarrow p + q$ en $p + q \not\Leftarrow p \wedge \neg q$.

Ons het aangetoon dat die waarheidsgetrouheid–preordening (of magsordening) $\Leftarrow$ tussen konfigurasies (en dus ook tussen teorieë) ook in terme van die positiewe en negatiewe afsluitings van konfigurasies gedefinieer kan word. Ons kan egter ook nog 'n ander beskrywing van $\Leftarrow$ gee — hierdie keer in terme van die *versamelings van alle positiewe en alle negatiewe sinne afleibaar uit 'n teorie.*

Laat $\mathcal{P}$ en $\mathcal{N}$ onderskeidelik die *versameling van alle positiewe* en die *versameling van alle negatiewe sinne* van ons eindige proposisionele taal aandui, d.i.

$$\mathcal{P} := \{X \mid X \equiv \Delta X\} \text{ en}$$

$$\mathcal{N} := \{X \mid X \equiv \nabla X\}.$$

Laat verder, vir enige teorie X, $\mathcal{X}$ die *deduktiewe afsluiting van* X aandui, d.i.

$$\mathcal{X} := \{S \mid X \vdash S\}$$

— die versameling van alle sinne in die taal wat uit X afleibaar is. Dan is

$$\mathcal{X} \cap \mathcal{P} = \{S \in \mathcal{P} \mid X \vdash S\}$$

die *versameling van alle positiewe sinne afleibaar uit* X; en

$$\mathcal{X} \cap \mathcal{N} = \{S \in \mathcal{N} \mid X \vdash S\}$$

die *versameling van alle negatiewe sinne afleibaar uit X.* Omdat ΔX en ∇X onderskeidelik die logies sterkste positiewe sin en die logies sterkste negatiewe sin afleibaar uit X is, kan ons ook skryf:

$$\mathcal{X} \cap \mathcal{P} = \{S \in \mathcal{P} \mid \Delta X \vdash S\} \text{ en}$$

$$\mathcal{X} \cap \mathcal{N} = \{S \in \mathcal{N} \mid \nabla X \vdash S\}.$$

Hoe logies sterker ΔX en ∇X is, hoe meer sinne is onderskeidelik uit ΔX en ∇X afleibaar en dus, hoe groter is die onderskeie versamelings $\mathcal{X} \cap \mathcal{P}$ en $\mathcal{X} \cap \mathcal{N}$. Dus,

$$\nabla X \vdash \nabla Y \text{ ass } \mathcal{X} \cap \mathcal{N} \supseteq \mathcal{Y} \cap \mathcal{N} \text{ en}$$

$$\Delta Y \vdash \Delta X \text{ ass } \mathcal{Y} \cap \mathcal{P} \supseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{P}.$$

Dit beteken dat die preordening $\Leftarrow$ ook soos volg beskryf kan word:

$$X \Leftarrow Y \text{ ass } \mathcal{X} \cap \mathcal{N} \supseteq \mathcal{Y} \cap \mathcal{N} \text{ en } \mathcal{Y} \cap \mathcal{P} \supseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{P}.$$

Sou die leser nou, in plaas van aan ΔX en ∇X, eerder aan $\mathcal{X} \cap \mathcal{P}$ en $\mathcal{X} \cap \mathcal{N}$ as onderskeidelik die positiewe en negatiewe afsluitings van X wou dink, het ons geen besware nie. Dit mag dalk selfs help om die ooreenkomste, maar ook verskille, van ons benadering van waarheidsgetrouheid met dié van Popper beter te begryp.

3.2 'N VERGELYKING VAN DIE WAARHEIDSGETROUHEID–PREORDENING MET POPPER SE DEFINISIE VAN WAARHEIDSGETROUHEID

Laat $\mathcal{T}$ en $\mathcal{F}$ respektiewelik die *versameling van alle waar* en die *versameling van alle onwaar teorieë* (*sinne*) in ons eindig voortgebringde proposisionele taal aandui. Dan dui, vir enige teorie X, $\mathcal{X} \cap \mathcal{T}$ en $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}$ onderskeidelik die *versameling van alle waar* en die *versameling van alle onwaar sinne afleibaar uit* X aan, d.i.

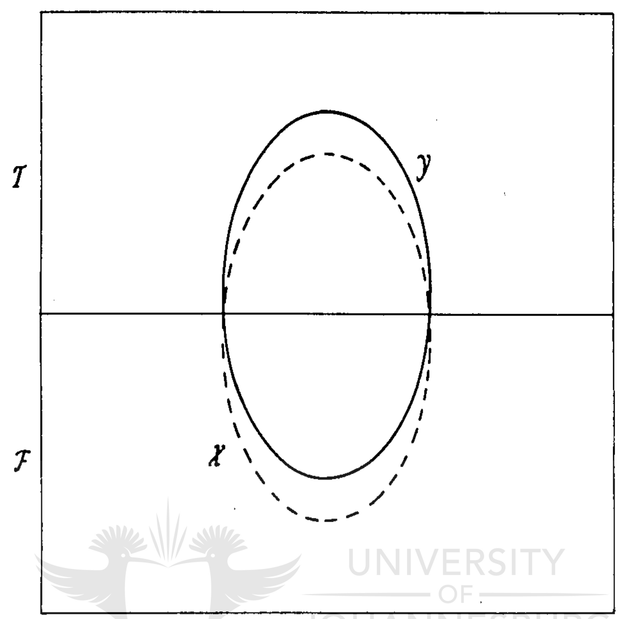
$$\mathcal{X} \cap \mathcal{T} = \{S \mid X \vDash S \text{ en } r \vDash S\} \text{ en}$$

$$\mathcal{X} \cap \mathcal{F} = \{S \mid X \vDash S \text{ en } r \vDash \neg S\}.$$

Volgens Popper se kwalitatiewe definisie is teorie Y dan meer waarheidsgetrou as X indien

$$\mathcal{X} \cap \mathcal{F} \supseteq \mathcal{Y} \cap \mathcal{F} \text{ en } \mathcal{Y} \cap \mathcal{T} \supseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{T},$$

waar, soos geïllustreer deur Figuur 15, ten minste een van die inklusies streng moet wees — 'n onmoontlike situasie, soos ontdek deur Miller en Tichý, as beide $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}$ en $\mathcal{Y} \cap \mathcal{F}$ nie–leeg is. Ons verduidelik dié argument net kortliks: Veronderstel $\mathcal{X} \cap \mathcal{F} \neq \phi$ en $\mathcal{Y} \cap \mathcal{F} \neq \phi$, d.i. daar is ten minste een onwaar sin afleibaar uit X en ten minste een onwaar sin afleibaar uit Y — dus X, sowel as Y, moet onwaar wees. Laat nou eers $\mathcal{X} \cap \mathcal{F} \supset \mathcal{Y} \cap \mathcal{F}$. Ons sal bewys $\mathcal{Y} \cap \mathcal{T} \not\supseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{T}$. Neem 'n $S \in \mathcal{X} \cap \mathcal{F}$, $S \notin \mathcal{Y} \cap \mathcal{F}$ en 'n $S' \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{F}$. Dan is S onwaar, S′ onwaar en dus $S' \rightarrow S \equiv \neg S' \vee S$ waar. Verder geld $S' \rightarrow S \in \mathcal{X} \cap \mathcal{T}$ (want $X \vDash S$ en $S \vDash S' \rightarrow S$), maar $S' \rightarrow S \notin \mathcal{Y} \cap \mathcal{T}$, want $Y \vDash S'$ en $Y \nvDash S$. Dus, $\mathcal{Y} \cap \mathcal{T} \not\supseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{T}$. Begin nou by die tweede deel van Popper se relasie en laat $\mathcal{Y} \cap \mathcal{T} \supset \mathcal{X} \cap \mathcal{T}$. Kies $S \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{T}$, $S \notin \mathcal{X} \cap \mathcal{T}$ en $S' \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{F}$. Dan is $S \wedge S'$ onwaar (want S′ is onwaar), $Y \vDash S \wedge S'$ (want $Y \vDash S$ en $Y \vDash S'$), maar $X \nvDash S \wedge S'$ (want $X \nvDash S$). Dus



Figuur 15

$S \wedge S' \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{F}$, maar $S \wedge S' \notin \mathcal{X} \cap \mathcal{F}$.

Dit blyk duidelik uit Figuur 14 dat in terme van ons definisie ($\Leftarrow$) van waarheidsgetrouheid, die vergelyking van onwaar teorieë wel moontlik is — die leser kan maar net die sinne in die onderste ruit in Figuur 14 beskou.

Vir 'n teorie X, word $\mathcal{X} \cap \mathcal{T}$ die *waarheid–inhoud* van X genoem en $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}$ die *onwaarheid–inhoud*. Ons het daarop gewys dat (in die eindige geval) $\vartriangle X \equiv \mathcal{X} \cap \mathcal{P}$ en $\triangledown X \equiv \mathcal{X} \cap \mathcal{N}$, d.i. deur konjunksie kan die versameling van alle positiewe en die versameling van alle negatiewe sinne afleibaar uit X onderskeidelik as die enkelsinne $\vartriangle X$ en $\triangledown X$ geskryf word. In dié sin kan ons $\vartriangle X$ ook die *positiewe inhoud*, en $\triangledown X$ ook die *negatiewe inhoud* van X noem (om aan te sluit by $\mathcal{X} \cap \mathcal{T}$ en $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}$).

Vir die sinne T en F geld nou die volgende: Beide T en F is positief sowel as negatief ($\Delta T \equiv \nabla T \equiv T$ en $\Delta F \equiv \nabla F \equiv F$). Die waarheid–inhoud van T is die versameling $\{T\}$, of die enkelsin T; die onwaarheid–inhoud van F is die versameling $\mathcal{F}$, of die enkelsin F. Die *waarheid–inhoud* en die *positiewe inhoud* (of positiewe afsluiting ΔT) van T is dus dieselfde; en vir F is sy *onwaarheid–inhoud* en *negatiewe inhoud* (∇F) weer dieselfde. Vergelyk ons nou die *onwaarheid–inhoud* van T met sy *negatiewe inhoud* ∇T (wat naamlik die versameling $\{T\}$ of die sin T is) sien ons dat die onwaarheid–inhoud van T 'n leë versameling is, want geen onwaar sin is uit T afleibaar nie. Elke versameling sinne (d.i. teorie) is egter logies ekwivalent aan 'n enkelsin — so ook die leë versameling. Daar bestaan dus 'n enkelsin, sê X, só dat X $\equiv \phi$ (waar ϕ nou die leë–versameling sinne is), d.i. daar bestaan 'n sin X waarvoor geld dat elke model van X ook 'n model van ϕ sal wees, en andersom: elke model van ϕ ook 'n model van X sal wees. 'n Moontlike wêreld (of valuasie), x, is 'n model van 'n versameling (sê $\mathscr{S}$) van sinne as geld: $S \in \mathscr{S} \Longrightarrow x \models S$. Vir die leë versameling sal dit dan beteken: $S \in \phi \Longrightarrow x \models S$. Aangesien daar geen sin in die leë versameling is nie, voldoen alle $x \in \mathbf{W}$ aan dié implikasie en is $\mathrm{Mod}(\phi) = \mathbf{W}$, wat beteken $\phi \equiv T$. Vir die sin T is dus ook sy *onwaarheid–inhoud logies ekwivalent* aan sy *negatiewe inhoud* ∇T. Wat die sin F betref, kry ons dié interessante situasie: sy *positiewe inhoud* $\Delta F \equiv F$ is *logies sterker* as sy *waarheid–inhoud*: Alle sinne (en dus ook alle waar sinne) is uit F afleibaar; dit beteken dat F se waarheid–inhoud die versameling $\mathcal{T}$ is. Die versameling $\mathcal{T}$ is egter 'n *konsistente versameling*, d.i. daar bestaan ten minste een valuasie v só dat $v(S) = 1$ vir alle $S \in \mathcal{T}$ (elke $S \in \mathcal{T}$ is waar, dus $r \in \mathrm{Mod}(S)$ vir alle $S \in \mathcal{T}$). Die versameling $\mathcal{T}$ kan dus nooit logies ekwivalent aan die sin F wees nie.

Elke negatiewe sin (behalwe T) is onwaar en elke positiewe sin (behalwe F) is waar. Op grond van hierdie feit en die voorafgaande betoog kan ons nou sê: vir enige teorie X geld:

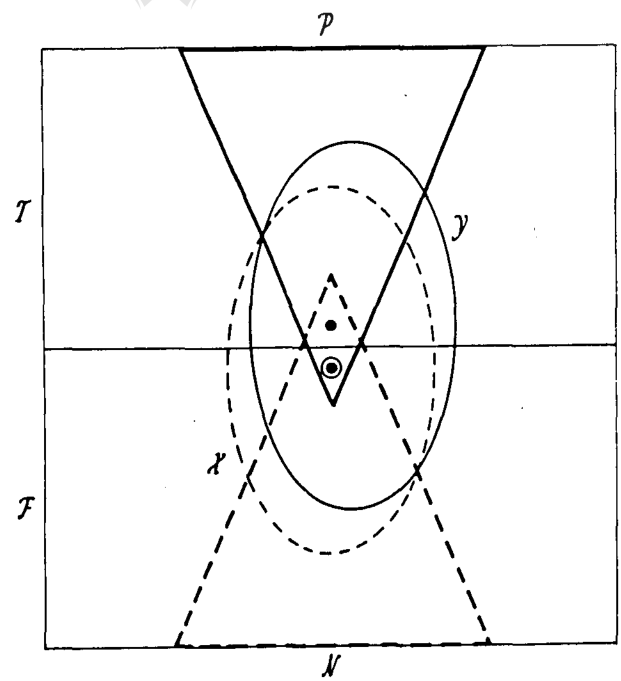
$$\nabla X \equiv \mathcal{X} \cap \mathcal{N} \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{F} \text{ en}$$

vir enige X, X $\not\equiv$ F geld:

$$\Delta X \equiv \mathcal{X} \cap \mathcal{P} \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{T}.$$

Dit beteken dat ∇X afleibaar is uit (en in sommige gevalle ekwivalent is aan) Popper se onwaarheid–inhoud van X; en soortgelyk, dat (vir X $\not\equiv$ F) ΔX logies swakker is (of ekwivalent is aan) Popper se waarheid–inhoud van X. In die sin is ons idee X $\Leftarrow$ Y, naamlik dat X 'n *logies sterker negatiewe inhoud* maar *logies swakker positiewe inhoud* as Y het, 'n variant van Popper se idee dat X 'n *logies sterker onwaarheid–inhoud* en *logies swakker waarheid–inhoud* as Y moet hê.

Figuur 16 illustreer dít wat ons propageer. (Let wel: T is die enigste waar negatiewe sin — die kolletjie in die $\mathcal{N}$–driehoek; en F is die enigste onwaar positiewe sin — die kolletjie in die $\mathcal{P}$–driehoek. Ons sluit F by $\mathcal{X}$ sowel as by $\mathcal{Y}$ uit (d.i. X $\not\equiv$ F en Y $\not\equiv$ F) — vandaar die kringetjie om die kolletjie, want soos reeds bespreek, is F, wat $\Leftarrow$ betref, met geen sin (behalwe F self) vergelykbaar nie.)



Figuur 16

In ons definisie (3.1.2) van die waarheidsgetrouheidrelasie $X \Leftarrow Y$, vereis ons nie dat ten minste een van die inklusies, $\nabla X \subseteq \nabla Y$ en $\Delta X \supseteq \Delta Y$, streng moet wees nie. Die rede hiervoor is dat vir logies nie–ekwivalente sinne X en Y (d.i. $X \not\equiv Y$), dit wel kan geld dat $\nabla X \equiv \nabla Y$ en $\Delta X \equiv \Delta Y$, wat dan beteken $X \Leftrightarrow Y$. Ons relasie $\Leftarrow$ is dus refleksief, transitief, maar nie antisimmetries nie; $\Leftarrow$ is dus 'n *preordening*, maar *nie* 'n *parsiële ordening nie.* Hierteenoor, vereis Popper in sy beskrywing van "Y is meer waarheidsgetrou as X", dat ten minste een van die inklusies $\mathcal{X} \cap \mathcal{F} \supseteq \mathcal{Y} \cap \mathcal{F}$ en $\mathcal{Y} \cap \mathcal{T} \supseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{T}$, streng moet wees.

Opsommend, die volgende paar punte: Laat X en Y enige twee teorieë wees:

- As Popper X en Y se waarheidsgetrouheid wil vergelyk, neem hy die deduktiewe afsluitings, $\mathcal{X}$ van X en $\mathcal{Y}$ van Y, en beskou dan die deelversamelings $\mathcal{X} \cap \mathcal{T}$ en $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}$ van $\mathcal{X}$; $\mathcal{Y} \cap \mathcal{T}$ en $\mathcal{Y} \cap \mathcal{F}$ van $\mathcal{Y}$.
- Ons neem die deduktiewe afsluitings $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$, maar beskou dan die deelversamelings $\mathcal{X} \cap \mathcal{P}$ en $\mathcal{X} \cap \mathcal{N}$ van $\mathcal{X}$; $\mathcal{Y} \cap \mathcal{P}$ en $\mathcal{Y} \cap \mathcal{N}$ van $\mathcal{Y}$.
- $\mathcal{X} \cap \mathcal{N} \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{F}$, en vir $X \not\equiv F$ geld ook dat $\mathcal{X} \cap \mathcal{P} \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{T}$. (As $X \equiv F$, geld: $\mathcal{X} \cap \mathcal{P} \supset \mathcal{X} \cap \mathcal{T}$.)
- As X positief is en $X \not\equiv F$ geld:

  $\mathcal{X} \cap \mathcal{P} \equiv \mathcal{X} \cap \mathcal{T} \equiv \mathcal{X}$

  As X negatief is, is $\mathcal{X} \cap \mathcal{N} \equiv \mathcal{X} \cap \mathcal{F} \equiv \mathcal{X}$.
- Volgens Popper is enige twee onwaar sinne se waarheidsgetrouheid onvergelykbaar; volgens ons — net sommige pare s'n.

In die literatuur oor waarheidsgetrouheid vind mens ook nog ander voorstelle vir die verkryging van geskikte deelversamelings van $\mathcal{T}$ en $\mathcal{F}$. Een so 'n voorstel is dié van Schurz en Weingartner se "relevance criterion" ([1987]): Hulle beperk die klas van alle logiese gevolge van 'n teorie tot "relevante" gevolge voordat dit in waar en onwaar gevolge verdeel word. In Hoofstuk 1 is hierdie benadering reeds kortliks bespreek.

3.3 WAARHEIDSGETROUHEID EN DIE DIALEKTIESE TRALIE

Elke valuasie van ons eindig voortgebringde proposisionele taal induseer 'n baie growwe preordening op die teorieë (sinne) van die taal: $X \leq Y$ as X onwaar of Y waar is onder die valuasie. Elke valuasie verdeel dus die sinne van die taal in twee kategorieë. As die valuasie die reële wêreld $r = (1,1,\ldots,1)$ is, noem ons hierdie kategorieë die *versameling van alle waar sinne* en die *versameling van alle onwaar sinne*. In die sin is die growwe preordening ook 'n baie growwe waarheidsgetrouheidordening. Dié waarheidsgetrouheid–preordening kan verfyn word deur eers elke teorie in sy "positiewe" en "negatiewe" deel te splits en dan teorieë volgens hierdie dele te vergelyk — dit lewer die waarheidsgetrouheidordening ($\mathscr{P}$W, $\Leftarrow$), wat 'n preordening is maar nie 'n parsiële ordening nie.

Een manier om van $\Leftarrow$ 'n parsiële ordening te maak, is om *ekwivalensieklasse* onder die relasie $\Leftrightarrow$ te vorm, d.i. om alle sinne wat waarheidsgetrou–ekwivalent is, in een klas te versamel. Die geïnduseerde waarheidsgetrouheidordening ($\mathscr{P}$W / $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$) van sulke ekwivalensieklasse is dan 'n *parsiële ordening.* Vir die taal voortgebring deur $\{p, q\}$, sal dit dan beteken dat die vier sinne $q \rightarrow p$, $p \leftrightarrow q$, $p \rightarrow q$ en T (vergelyk Figuur 14), of eintlik die konfigurasies waarmee hulle ooreenkom, as een element in ($\mathscr{P}$W / $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$) beskou word: Hierdie vier sinne het dieselfde positiewe afsluiting, naamlik T; asook dieselfde negatiewe afsluiting, toevallig weer T. (Met drie of meer proposisionele veranderlikes kan interessanter voorbeelde gevind word.) $\mathscr{P}$W / $\Leftrightarrow$ het dus in hierdie geval 13 elemente.

Indien 'n parsiële ordening die eienskap het dat elke twee elemente 'n *supremum* (kleinste bogrens) sowel as 'n *infimum* (grootste ondergrens) het, dan is die parsiële ordening 'n *tralie*. Uit die antisimmetriese eienskap van 'n parsiële ordening volg natuurlik dat so 'n kleinste bogrens en grootste ondergrens uniek moet wees. Dus, $(\mathscr{P}W / \Leftrightarrow, \Leftarrow)$ sal 'n tralie wees as vir alle $[X], [Y] \in \mathscr{P}W / \Leftrightarrow$ (die ekwivalensieklasse van X en Y) *sup* $\{[X], [Y]\}$ en *inf* $\{[X], [Y]\}$ bestaan. Vergelyk ons nou Figuur 14, is dit maklik om te sien dat die proses om die preordening $(\mathscr{P}W, \Leftarrow)$ tot 'n parsiële ordening $(\mathscr{P}W / \Leftrightarrow, \Leftarrow)$ saam te trek, nie 'n tralie oplewer nie: omdat die sin F met geen ander sin in terme van $\Leftarrow$ vergelykbaar is nie, bestaan *sup* $\{[\phi], [X]\}$ vir geen $\phi \neq X \in \mathscr{P}W$ nie. Die parsiële ordening $((\mathscr{P}W - \{\phi\}) / \Leftrightarrow, \Leftarrow)$ van 12 elemente is egter wel 'n tralie.

Vir drie of meer proposisionele veranderlikes is dit nie meer so maklik om uit die skets van $(\mathscr{P}W, \Leftarrow)$ vas te stel of $((\mathscr{P}W - \{\phi\}) / \Leftrightarrow, \Leftarrow)$ 'n tralie is nie — in die taal voortgebring deur $\{p_1, p_2, p_3\}$ is daar byvoorbeeld 256 logies nie–ekwivalente sinne, d.i. 256 konfigurasies. Pretorius [1988] het egter bewys dat vir $n \geq 3$ die parsiële ordening $((\mathscr{P}W - \{\phi\}) / \Leftrightarrow, \Leftarrow)$ nie 'n tralie is nie.

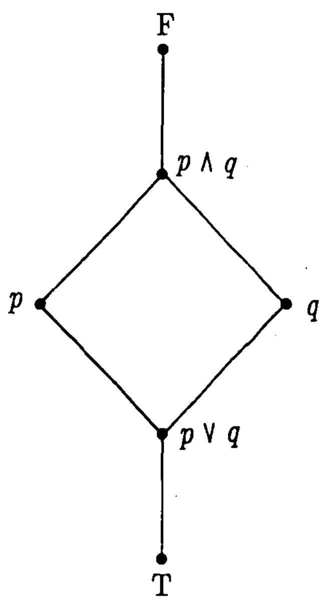
Alhoewel $((\mathscr{P}W - \{\phi\}) / \Leftrightarrow, \Leftarrow)$ nie in die algemeen 'n tralie is nie, kan $(\mathscr{P}W / \Leftrightarrow, \Leftarrow)$ en dus ook $((\mathscr{P}W - \{\phi\}) / \Leftrightarrow, \Leftarrow)$, wel in 'n *volledige distributiewe tralie ingebed* word. Ons beskryf die proses kortliks.

Laat, soos voorheen, $\mathcal{P}$ die versameling van alle positiewe, en $\mathcal{N}$ die versameling van alle negatiewe sinne van die taal voortgebring deur $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ aandui. Omdat elke sin met 'n konfigurasie, d.i. 'n versameling moontlike wêrelde, ooreenkom, kan ons aan $\mathcal{P}$ en $\mathcal{N}$ ook maar dink as die versamelings van onderskeidelik alle positiewe en alle negatiewe konfigurasies. Orden $\mathcal{P}$ en $\mathcal{N}$ (nou gesien as versamelings van konfigurasies) deur respektiewelik omgekeerde inklusie $(\supseteq)$ en inklusie $(\subseteq)$. Dan is $(\mathcal{P}, \supseteq)$ en $(\mathcal{N}, \subseteq)$ parsiële ordeninge met die sin F (of die konfigurasie ϕ) heel bo in $(\mathcal{P}, \supseteq)$ en heel onder in $(\mathcal{N}, \subseteq)$; en die sin T (of die konfigurasie W) heel onder in $(\mathcal{P}, \supseteq)$ en heel bo in $(\mathcal{N}, \subseteq)$. Elke deelversameling $\{P_i \mid i \in I\}$ van $\mathcal{P}$ en elke deelversameling $\{N_i \mid i \in I\}$ van $\mathcal{N}$ het 'n supremum en infimum:

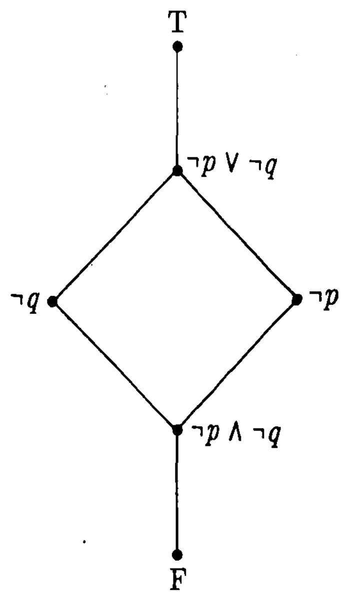
$$sup\,\{P_i \mid i \in I\} = \cap\{P_i \mid i \in I\},$$
$$inf\,\{P_i \mid i \in I\} = \cup\{P_i \mid i \in I\},$$
$$sup\,\{N_i \mid i \in I\} = \cup\{N_i \mid i \in I\} \text{ en}$$
$$inf\,\{N_i \mid i \in I\} = \cap\{N_i \mid i \in I\}.$$

$(\mathcal{P}, \supseteq)$ en $(\mathcal{N}, \subseteq)$ is dus nie slegs tralies nie, hulle is ook *volledige tralies.* Beide $(\mathcal{P}, \supseteq)$ en $(\mathcal{N}, \subseteq)$ bevredig natuurlik ook die distributiewe eienskappe, sodat ons van $(\mathcal{P}, \supseteq)$ en $(\mathcal{N}, \subseteq)$ as *volledige distributiewe tralies* kan praat. Figuur 17 illustreer $(\mathcal{P}, \supseteq)$ en Figuur 18 $(\mathcal{N}, \subseteq)$ vir onderskeidelik die ses positiewe en ses negatiewe sinne in die taal voortgebring deur $\{p, q\}$. (Wanneer ons werk in die taal voortgebring deur $\{p, q\}$, sal ons $\mathcal{P}(2)$ en $\mathcal{N}(2)$ in plaas van $\mathcal{P}$ en $\mathcal{N}$ skryf. Ons reserveer dus die notasies $\mathcal{P}$ en $\mathcal{N}$ vir die taal voortgebring deur $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.) Die annotasies in die diagramme van $\mathcal{P}(2)$ en $\mathcal{N}(2)$ dui hier die sinne eerder as die ooreenstemmende konfigurasies aan.

Volgens Stelling 3.1.4 geld vir nie–teenstrydige positiewe sinne, sê P_1 en P_2,



Figuur 17



Figuur 18

dat $P_1 \Leftarrow P_2$ ass $P_2 \models P_1$ (d.i. ass $P_2 \subseteq P_1$); en vir nie–teenstrydige negatiewe sinne, sê N_1 en N_2, dat $N_1 \Leftarrow N_2$ ass $N_1 \models N_2$ (d.i. ass $N_1 \subseteq N_2$). Sluit ons F by die versamelings $\mathcal{P}$ en $\mathcal{N}$ uit, is die ordening $\supseteq$ op $\mathcal{P}$ sowel as die ordening $\subseteq$ op $\mathcal{N}$ weer dié van die waarheidsgetrouheid–preordening. Hierdie feit blyk duidelik uit die vergelyking van Figuur 14 met Figure 17 en 18.

Die produk van die volledige distributiewe tralies $(\mathcal{P}, \supseteq)$ en $(\mathcal{N}, \subseteq)$ is weer 'n volledige distributiewe tralie. Die ordening van die produk $(\mathcal{P}, \supseteq) \times (\mathcal{N}, \subseteq)$, is die produkordening: vir alle (P_1, N_1) en $(P_2, N_2) \in (\mathcal{P}, \supseteq) \times (\mathcal{N}, \subseteq)$:

$$(P_1, N_1) \leq (P_2, N_2) \Leftrightarrow P_1 \supseteq P_2 \text{ en } N_1 \subseteq N_2,$$

en suprema en infima in hierdie tralie word gegee deur:

$$sup\,\{(P_i, N_i) \mid i \in I\} = (\cap\{P_i \mid i \in I\}, \cup\{N_i \mid i \in I\}) \text{ en}$$

$$inf\,\{(P_i, N_i) \mid i \in I\} = (\cup\{P_i \mid i \in I\}, \cap\{N_i \mid i \in I\}).$$

Ons sal hierdie produk van die tralie van positiewe teorieë met die tralie van negatiewe teorieë, die *dialektiese tralie* noem. (Die woord "dialekties" het sy oorsprong in die filosofie en beteken die bymekaarbring van die *tese* (positiewe deel) en *antitese* (negatiewe deel) van 'n argument.)

Definieer nou

$$g : (\mathcal{P}W / \Leftrightarrow, \Leftarrow) \longrightarrow (\mathcal{P}, \supseteq) \times (\mathcal{N}, \subseteq);\ \ g([X]) = (\Delta X, \nabla X).$$

Dat g 'n funksie is, is duidelik. Verder geld:

(1) g is *een–eenduidig*:

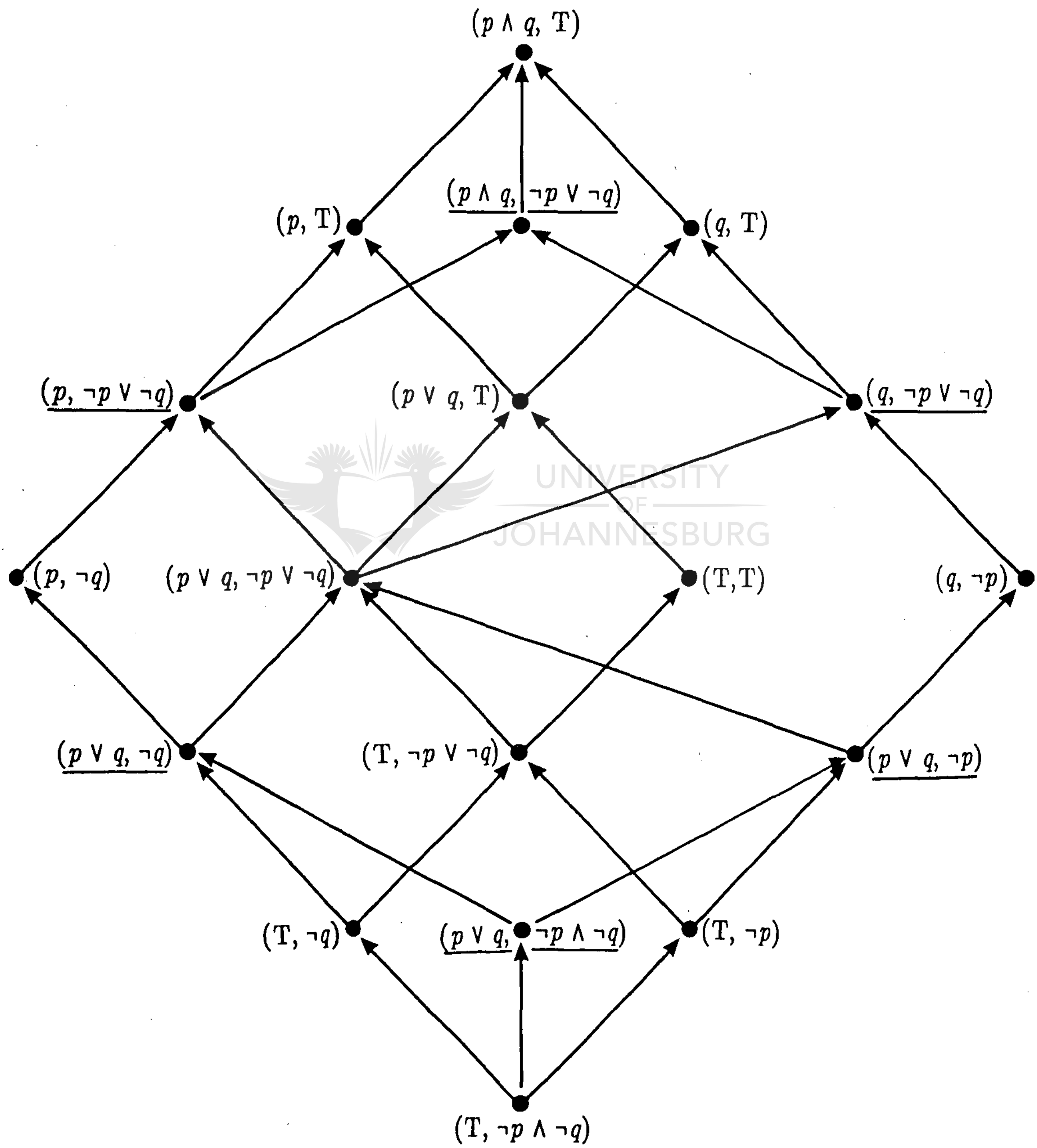
As $g([X]) = g([Y])$, is $(\Delta X, \nabla X) = (\Delta Y, \nabla Y)$, wat beteken dat $\Delta X = \Delta Y$, $\nabla X = \nabla Y$ en dus, $X \Leftrightarrow Y$ of $[X] = [Y]$;

(2) g is *isotoon* (d.i. orde–behoudend):

As $X \Leftarrow Y$ beteken dit $\Delta X \supseteq \Delta Y$ en $\nabla X \subseteq \nabla Y$. Dus, $(\Delta X, \nabla X) \leq (\Delta Y, \nabla Y)$ of $g([X]) \leq g([Y])$.

Uit (1) en (2) volg nou dat g 'n *isotone inbedding* van die parsiële ordening $(\mathcal{P}W / \Leftrightarrow, \Leftarrow)$ in die volledige distributiewe dialektiese tralie $(\mathcal{P}, \supseteq) \times (\mathcal{N}, \subseteq)$ is.

In die taal voortgebring deur $\{p,\ q\}$ is, soos reeds betoog, die parsiële ordening $((\mathscr{P}\mathrm{W} - \{\phi\}) / \Leftrightarrow, \Leftarrow)$ wel 'n tralie. Die funksie g : $((\mathscr{P}\mathrm{W} - \{\phi\}) / \Leftrightarrow, \Leftarrow) \longrightarrow \mathcal{P}(2) \times \mathcal{N}(2)$; $g([X]) = (\Delta X, \nabla X)$ is egter selfs vir hierdie geval nie 'n tralie-homomorfie nie, met ander woorde suprema en infima word nie deur g behou nie.



Figuur 19

Figuur 19 illustreer juis hierdie punt. Met twee proposisionele veranderlikes is daar ses positiewe en ses negatiewe sinne; die produk $\mathcal{P}(2) \times \mathcal{N}(2)$ het dus 36 elemente. $(\mathscr{P}\mathbf{W} - \{\phi\}) \,/\, \Leftrightarrow$, en dus ook $g[(\mathscr{P}\mathbf{W} - \{\phi\}) \,/\, \Leftrightarrow]$, het 12 elemente. Die distributiewe deeltralie (voorgestel deur Figuur 19) van $\mathcal{P}(2) \times \mathcal{N}(2)$ wat deur $g[(\mathscr{P}\mathbf{W} - \{\phi\}) \,/\, \Leftrightarrow]$ voortgebring word, het egter 18 elemente. Die ses elemente wat bykom is dié wat onderstreep is in Figuur 19.

Vir die inbedding van $(\mathscr{P}\mathbf{W} \,/\, \Leftrightarrow, \Leftarrow)$ in die dialektiese tralie $(\mathcal{P}, \supseteq) \times (\mathcal{N}, \subseteq)$, neem ons vir elke sin X (of konfigurasie **X**) sy positiewe en negatiewe afsluiting en vorm dan die paar $(\Delta\mathbf{X}, \nabla\mathbf{X})$, wat 'n element van $\mathcal{P} \times \mathcal{N}$ is. (Vir alle $\mathbf{Y} \Leftrightarrow \mathbf{X}$, d.i. alle $\mathbf{Y} \in [\mathbf{X}]$, sal natuurlik geld dat $(\Delta\mathbf{Y}, \nabla\mathbf{Y}) = (\Delta\mathbf{X}, \nabla\mathbf{X})$.) Deur die inbeddingsproses toe te pas, weet ons dus presies welke elemente van $\mathcal{P} \times \mathcal{N}$ die beeld–elemente van $\mathscr{P}\mathbf{W} \,/\, \Leftrightarrow$ is. Sou mens egter wou begin deur eers alle elemente van $\mathcal{P} \times \mathcal{N}$ te beskou, en dan die pare $(\mathbf{P}, \mathbf{N})$ $(= (\mathrm{P}, \mathrm{N})) \in \mathcal{P} \times \mathcal{N}$ uit te sonder waarvoor $\mathbf{P} = \Delta\mathbf{X}$ en $\mathbf{N} = \nabla\mathbf{X}$ vir 'n $\mathbf{X} \in \mathscr{P}\mathbf{W}$, is hierdie elemente van $\mathcal{P} \times \mathcal{N}$ nie so maklik herkenbaar nie. 'n Paar ekwivalente karakteriserings van súlke pare word in Stelling 3.3.2 gegee. Vervolgens eers 'n definiëring van die begrippe wat in die karakteriserings voorkom.

3.3.1 **Definisies** Vir alle $\mathbf{X} \subseteq (\mathbf{W}, \leq)$:

(1) *min* $\mathbf{X} := \{x \in \mathbf{X} \mid \neg(\exists x' \in \mathbf{X})(x' < x)\}$, die *versameling van alle minimale elemente in* **X**;

(2) *max* $\mathbf{X} := \{x \in \mathbf{X} \mid \neg(\exists x' \in \mathbf{X})(x' > x)\}$, die *versameling van alle maksimale elemente in* **X**;

(3) $\check{\mathbf{X}}$: die *ideaal* in $(\mathbf{W}, \leq)$, voortgebring deur **X**;

(4) $\hat{\mathbf{X}}$: die *filter* in $(\mathbf{W}, \leq)$, voortgebring deur **X**.

'n Konfigurasie, sê $U \subseteq W$, is 'n *ideaal* in $(W, \leq)$ as:

(i) $u \in U$ en $x \leq u \Longrightarrow x \in U$, d.i. U is na *onder* geslote;

(ii) $u, v \in U \Longrightarrow sup\,\{u, v\} \in U$.

Die begrip "filter" is die duaal van "ideaal". Dus, U is 'n *filter* in $(W, \leq)$ as U na *bo* geslote is en geslote is onder die neem van *infimums.*

3.3.2 **Stelling** Vir $P \in \mathcal{P}$ en $N \in \mathcal{N}$ is die volgende bewerings ekwivalent:

(1) $(\exists X \subseteq W)(P = \Delta X$ en $N = \nabla X)$;

(2) $\Delta(P \cap N) = P$ en $\nabla(P \cap N) = N$;

(3) $(\exists Y \subseteq W)(P = \Delta Y$ en $max\, N \subseteq Y \subseteq \check{N})$;

(4) $max\, N \subseteq P$ en $min\, P \subseteq N$;

(5) $(\exists Z \subseteq W)(N = \nabla Z$ en $min\, P \subseteq Z \subseteq \hat{P})$.

Bewys

(1) $\Longrightarrow$ (2): Neem aan daar bestaan 'n $X \subseteq W$ só dat $\Delta X = P$ en $\nabla X = N$. Dan is $\Delta(P \cap N) = \Delta(\Delta X \cap \nabla X) = \Delta X = P$; en $\nabla(P \cap N) = \nabla(\Delta X \cap \nabla X) = \nabla X = N$. Dus, bewering (2) geld.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Neem aan $\Delta(P \cap N) = P$ en $\nabla(P \cap N) = N$. Stel $Y = P \cap N$. Dan geld:

(i) $P \cap N \subseteq N \subseteq \check{N}$ (dus $Y \subseteq \check{N}$).

(ii) $max\, N \subseteq P \cap N$: Veronderstel $max\, N \not\subseteq P \cap N$, sê $n \in max\, N$, $n \notin P \cap N$ (d.i. $n \in N$, maar $n \notin P$, want $max\, N \subseteq N$). Volgens (2) is $N = \nabla(P \cap N)$, dus $n \in \nabla(P \cap N)$, wat beteken $n \leq x$ vir 'n $x \in P \cap N$. As $n < x$ ($\in N$), is $n \notin max\, N$ — teenstrydig met die aanname dat $n \in max\, N$; as $n = x$, is $n \in P$ — strydig met die aanname dat $n \notin P$. Die veronderstelling dat $max\, N \not\subseteq P \cap N$ lewer dus 'n teenstrydigheid en dus is $max\, N \subseteq P \cap N$.

Uit (i) en (ii) volg nou dat bewering (3) geld vir $Y = P \cap N$. (Dat $\Delta Y = P$ volg natuurlik direk uit die aanname dat (2) geld.)

(3) $\Longrightarrow$ (4): Neem aan daar bestaan 'n $Y \subseteq W$ só dat $P = \Delta Y$ en $max\, N \subseteq Y \subseteq \check{N}$. Dan geld:

(i) $max\, N \subseteq Y \subseteq \Delta Y = P$.

(ii) $min\, P \subseteq N$: Ons bewys eers $min\, P \subseteq Y$: Veronderstel $min\, P \nsubseteq Y$, sê $p \in min\, P$, $p \notin Y$. Dan is $p \notin \Delta Y$ (want as $p \in \Delta Y$ is $p \geq y$ vir 'n $y \in Y \subseteq \Delta Y \subseteq P$, wat beteken $p \notin min\, P$ (as $p > y$); of $p \in Y$ (as $p = y$)). Maar as $p \notin \Delta Y$, is $p \notin P$ en dus ook, $p \notin min\, P$ — teenstrydig met ons aanname dat $p \in min\, P$. Dus, $min\, P \subseteq Y$. Ook is $min\, P \subseteq N$: Veronderstel $min\, P \nsubseteq N$, sê $p \in min\, P$, $p \notin N$. Dit beteken $p \in Y$ (uit $min\, P \subseteq Y$). Maar, $Y \subseteq \check{N}$ (uit die aanname dat (3) geld), dus $p \notin N$ en $p \in \check{N}$, waaruit volg dat $p > y$ vir $y \in max\, N \subseteq P$. Dit is egter strydig met $p \in min\, P$. Dus, $min\, P \subseteq N$.

Uit (i) en (ii) volg nou dat bewering (4) geld.

(4) $\Longrightarrow$ (5): Neem aan $max\, N \subseteq P$ en $min\, P \subseteq N$. Stel $Z = P \cap N$. Dan geld:

(i) $\nabla(P \cap N) \subseteq \nabla N = N$; en omgekeerd, $N = \nabla N = \nabla(max\, N) \subseteq \nabla(P \cap N)$.

(ii) $min\, P \subseteq P \cap N$ en $P \cap N \subseteq P \subseteq \hat{P}$.

Dus vir $Z = P \cap N$ geld bewering (5).

(5) $\Longrightarrow$ (1): Neem aan daar bestaan 'n $Z \subseteq W$, só dat $N = \nabla Z$ en $min\, P \subseteq Z \subseteq \hat{P}$. Stel $X = P \cap Z$. Dan geld:

(i) $\Delta(P \cap Z) \subseteq \Delta P = P$; en omgekeerd, $P = \Delta P = \Delta(min\, P) \subseteq \Delta(P \cap Z)$.

(ii) $\nabla(P \cap Z) \subseteq \nabla Z = N$. Omgekeerd: As $n \in N$, is $n \in \nabla Z$, dus $n \leq z$ vir 'n $z \in Z$. Maar $Z \subseteq \hat{P}$, dus vir $z \in Z$, is $z \in P$ of $z < p$ vir 'n $p \in min\, P \subseteq P$. Daar bestaan dus 'n $w \in P \cap Z$ met $n \leq w$ (as $z \in P$, neem $w = z$, dan is $n \leq z$ vir $z \in P \cap Z$; as $z < p$ vir $p \in min\, P$, neem $w = p$, dan is $n < p \in P \cap Z$). Dus, $N \subseteq \nabla(P \cap Z)$.

Uit (i) en (ii) volg dan dat (1) geld vir $X = P \cap Z$. □

Ter illustrasie van Stelling 3.3.2 blaai ons terug na Figuur 19. In die diagram word die 18 elemente van die deeltralie van die dialektiese tralie $\mathcal{P}(2) \times \mathcal{N}(2)$ as geordende pare van sinne (eerder as konfigurasies) geskryf. Ons sal die verduideliking van Stelling 3.3.2 hierby aanpas. As X die sin is wat met die konfigurasie **X** ooreenkom, dan bedoel ons met *max* X, *min* X, $\check{\mathrm{X}}$ en $\hat{\mathrm{X}}$ maar net die sinne wat onderskeidelik met die konfigurasies *max* **X**, *min* **X**, $\check{\mathbf{X}}$ en $\hat{\mathbf{X}}$, ooreenkom. Die 12 elemente in die diagram wat nie onderstreep is nie, is die beeldelemente (onder g) van die elemente van $(\mathscr{P}\mathrm{W} - \{\phi\}) \,/ \Leftrightarrow$. Vir hierdie pare sinne moet 3.3.2 (1), en dus ook 3.3.2 (2), (3), (4) en (5), geld. Neem byvoorbeeld die paar (P, N) = $(p \vee q, \neg p \vee \neg q)$, d.i. die paar (**P**, **N**) = ({(1,1), (1,0), (0,1)}, {(1,0), (0,1), (0,0)}). $\hat{\mathbf{P}} = \check{\mathbf{N}} = \mathbf{W}$, dus $\hat{\mathrm{P}} \equiv \check{\mathrm{N}} \equiv \mathrm{T}$; en *max* **N** = *min* **P** = {(1,0), (0,1)}, dus *max* N $\equiv$ *min* P $\equiv p + q$. Dan geld:

(1) $\mathrm{P} \equiv \Delta(p + q)$ en $\mathrm{N} \equiv \nabla(p + q)$ — vergelyk Tabel 2;

(2) $\Delta(\mathrm{P} \wedge \mathrm{N}) \equiv \Delta(p + q) \equiv \mathrm{P}$ en $\nabla(\mathrm{P} \wedge \mathrm{N}) \equiv \nabla(p + q) \equiv \mathrm{N}$;

(3) $\mathrm{P} \equiv \Delta(p + q)$ en *max* $\mathrm{N} \equiv p + q \models \check{\mathrm{N}}$;

(4) *max* $\mathrm{N} \models \mathrm{P}$ en *min* $\mathrm{P} \models \mathrm{N}$;

(5) $\mathrm{N} \equiv \nabla(p + q)$ en *min* $\mathrm{P} \equiv p + q \models \hat{\mathrm{P}}$.

Dit is duidelik dat 3.3.2 (2), en dus ook die res van die ekwivalente bewerings, nie vir die onderstreepte ses elemente geld nie. Neem byvoorbeeld die paar $(p \wedge q, \neg p \vee \neg q)$: $\Delta((p \wedge q) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \equiv \Delta\mathrm{F} \equiv \mathrm{F} \not\equiv p \wedge q$.

Veronderstel Stelling 3.3.2 se bewerings geld vir twee pare $(\mathbf{P}_1, \mathbf{N}_1)$ en $(\mathbf{P}_2, \mathbf{N}_2)$ van die produk $\mathcal{P} \times \mathcal{N}$, d.i. daar bestaan 'n $\mathbf{X}_1 \subseteq \mathbf{W}$ só dat $(\mathbf{P}_1, \mathbf{N}_1) = (\Delta\mathbf{X}_1, \nabla\mathbf{X}_1)$; en daar bestaan 'n $\mathbf{X}_2 \subseteq \mathbf{W}$ só dat $(\mathbf{P}_2, \mathbf{N}_2) = (\Delta\mathbf{X}_2, \nabla\mathbf{X}_2)$. Die vraag is nou: Wanneer sal 3.3.2 se bewerings vir *sup* $\{(\mathbf{P}_1, \mathbf{N}_1), (\mathbf{P}_2, \mathbf{N}_2)\} = (\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2, \mathbf{N}_1 \cup \mathbf{N}_2) = (\Delta\mathbf{X}_1 \cap \Delta\mathbf{X}_2, \nabla\mathbf{X}_1 \cup \nabla\mathbf{X}_2)$ geld; en wanneer sal hulle vir *inf* $\{(\mathbf{P}_1, \mathbf{N}_1), (\mathbf{P}_2, \mathbf{N}_2)\} = (\mathbf{P}_1 \cup \mathbf{P}_2, \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2) = (\Delta\mathbf{X}_1 \cup \Delta\mathbf{X}_2, \nabla\mathbf{X}_1 \cap \nabla\mathbf{X}_2)$ geld? Voordat ons hierdie vraag beantwoord — eers die nodige agtergrondkennis daarvoor.

$(\mathbf{W}, \leq)$, die versameling van alle moontlike wêrelde of valuasies $\mathrm{v} : \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \longrightarrow \mathbf{2}$, georden deur die produkordening, is 'n volledige distributiewe tralie.

Suprema en infima in hierdie tralie word soos volg gedefinieer: vir $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in W$:

$$sup\,\{x, y\} := x \vee y := (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \ldots, x_n \vee y_n) \text{ en}$$

$$inf\,\{x, y\} := x \wedge y := (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \ldots, x_n \wedge y_n),$$

waar vir alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $x_i \vee y_i = sup\,\{x_i, y_i\}$ in **2** en $x_i \wedge y_i = inf\,\{x_i, y_i\}$ in **2**. Aan die hand hiervan kan ons nou die volgende definieer:

3.3.3 **Definisies** Laat $X, Y \subseteq W$.

(1) $X \check{\vee} Y := \{w \in W \mid (\exists x \in X)(\exists y \in Y)(w = x \vee y)\}$

(2) $X \hat{\wedge} Y := \{w \in W \mid (\exists x \in X)(\exists y \in Y)(w = x \wedge y)\}$.

(Die twee operasies $\check{\vee}$ en $\hat{\wedge}$ op die magsversameling $\mathscr{P}W$ is wat Chris Brink in sy publikasies (byvoorbeeld [199?] oor magstrukture) sou noem die "magsoperasies" $\vee^+$ en $\wedge^+$.)

Soos ons reeds bewys het, is $\Delta X \cup \Delta Y = \Delta(X \cup Y)$ en $\nabla X \cup \nabla Y = \nabla(X \cup Y)$. Wat deursnede betref, geld die inklusies slegs in een rigting: $\Delta X \cap \Delta Y \supseteq \Delta(X \cap Y)$ en $\nabla X \cap \nabla Y \supseteq \nabla(X \cap Y)$ — sien Afdeling 2.1. Stelling 3.3.4 (1) druk nou die deursnede van die positiewe afsluitings van X en Y in terme van die positiewe afsluiting van die konfigurasie $X \check{\vee} Y$ uit; en 3.3.4 (2) doen dieselfde vir die deursnede van die negatiewe afsluitings in terme van die negatiewe afsluiting van $X \hat{\wedge} Y$.

3.3.4 **Stelling** Vir enige $X, Y \subseteq W$:

(1) $\Delta X \cap \Delta Y = \Delta(X \check{\vee} Y)$;

(2) $\nabla X \cap \nabla Y = \nabla(X \hat{\wedge} Y)$.

Bewys

(1) $\quad w \in \Delta X \cap \Delta Y \quad \Leftrightarrow \quad w \in \Delta X$ en $w \in \Delta Y$

$\Leftrightarrow \quad (\exists x \in X)(w \geq x)$ en $(\exists y \in Y)(w \geq y)$

$\Leftrightarrow \quad (\exists x \in X)(\exists y \in Y)(w \geq x \vee y =$ (sê) $w')$

$\Leftrightarrow \quad (\exists w' \in X \check{\vee} Y)(w \geq w')$

$\Leftrightarrow \quad w \in \Delta(X \check{\vee} Y).$

(2) $\quad w \in \nabla X \cap \nabla Y \quad \Leftrightarrow \quad w \in \nabla X$ en $w \in \nabla Y$

$\Leftrightarrow \quad (\exists x \in X)(w \leq x)$ en $(\exists y \in Y)(w \leq y)$

$\Leftrightarrow \quad (\exists x \in X)(\exists y \in Y)(w \leq x \wedge y =$ (sê) $w')$

$\Leftrightarrow \quad (\exists w' \in X \hat{\wedge} Y)(w \leq w')$

$\Leftrightarrow \quad w \in \nabla(X \hat{\wedge} Y).$ □

3.3.5 **Gevolg** Beskou $(P_1, N_1) = (\Delta X_1, \nabla X_1)$ en $(P_2, N_2) = (\Delta X_2, \nabla X_2)$.

(1) As $\nabla X_1 = \nabla X_2$ (sê $N_1(= N_2) = N$), geld 3.3.2 (1) – (5) vir $(P_1 \cap P_2, N)$ en $(P_1 \cup P_2, N)$.

(2) As $\Delta X_1 = \Delta X_2$ (sê $P_1(= P_2) = P$), geld 3.3.2 (1) – (5) vir $(P, N_1 \cup N_2)$ en $(P, N_1 \cap N_2)$.

Bewys

(1) Omdat 3.3.2 (3) vir (P_1, N) geld, bestaan daar 'n $X_1' \subseteq W$ só dat $P_1 = \Delta X_1'$ en *max* $N \subseteq X_1' \subseteq \check{N}$; omdat 3.3.2 (3) vir (P_2, N) geld, bestaan daar 'n $X_2' \subseteq W$ só dat $P_2 = \Delta X_2'$ en *max* $N \subseteq X_2' \subseteq \check{N}$. Dan is $P_1 \cap P_2 = \Delta X_1' \cap \Delta X_2' = \Delta(X_1' \check{\vee} X_2')$ — uit 3.3.4 (1); en *max* $N \subseteq$ *max* $N \check{\vee}$ *max* $N \subseteq X_1' \check{\vee} X_2' \subseteq \check{N}$.

Daar bestaan dus 'n $Y \subseteq W$, naamlik $Y = X_1' \check{\vee} X_2'$, só dat $P_1 \cap P_2 = \Delta Y$ en $max\ N \subseteq Y \subseteq \check{N}$. Dus, 3.3.2 (3) (en dus 3.3.2 (1) – (5)) geld vir sup $\{(P_1, N), (P_2, N)\}$. Wat $inf\{(P_1, N), (P_2, N)\}$ betref, is $P_1 \cup P_2 = \Delta X_1' \cup \Delta X_2' = \Delta(X_1' \cup X_2')$ en $max\ N \subseteq X_1' \cup X_2' \subseteq \check{N}$. Dus, daar bestaan 'n $Z \subseteq W$, naamlik $X_1' \cup X_2'$, só dat $P_1 \cup P_2 = \Delta Z$ en $max\ N \subseteq Z \subseteq \check{N}$, wat beteken dat 3.3.2 (1) – (5) vir $inf\{(P_1, N), (P_2, N)\}$ geld.

(2) Omdat 3.3.2 (5) vir (P, N_1) en (P, N_2) geld, bestaan daar 'n $X_1' \subseteq W$ en 'n $X_2' \subseteq W$ só dat $N_1 = \nabla X_1'$ en $min\ P \subseteq X_1' \subseteq \hat{P}$; en $N_2 = \nabla X_2'$ en $min\ P \subseteq X_2' \subseteq \hat{P}$. Dan is $N_1 \cup N_2 = \nabla X_1' \cup \nabla X_2' = \nabla(X_1' \cup X_2')$ en $min\ P \subseteq X_1' \cup X_2' \subseteq \hat{P}$; en $N_1 \cap N_2 = \nabla X_1' \cap \nabla X_2' = \nabla(X_1' \hat{\wedge} X_2')$ — uit 3.3.4 (2), en $min\ P \subseteq X_1' \hat{\wedge} X_2' \subseteq \hat{P}$. Dus, daar bestaan 'n $Y \subseteq W$, naamlik $X_1' \cup X_2'$, só dat $N_1 \cup N_2 = \nabla Y$ en $min\ P \subseteq Y \subseteq \hat{P}$; en daar bestaan 'n $Z \subseteq W$, naamlik $X_1' \hat{\wedge} X_2'$, só dat $N_1 \cap N_2 = \nabla Z$ en $min\ P \subseteq Z \subseteq \hat{P}$. Stelling 3.3.2 (1) – (5) geld dus vir sup $\{(P, N_1), (P, N_2)\}$ en vir $inf\{(P, N_1), (P, N_2)\}$. □

Gevolg 3.3.5 sê dus dat as $(P_1, N_1) = (\Delta X_1, \nabla X_1)$ en $(P_2, N_2) = (\Delta X_2, \nabla X_2)$ en een van die twee komponente van (P_1, N_1) aan die ooreenstemmende komponent van (P_2, N_2) gelyk sou wees, dan is sup $\{(P_1, N_1), (P_2, N_2)\} = (\Delta U, \nabla U)$ vir 'n $U \subseteq W$; en $inf\{(P_1, N_1), (P_2, N_2)\} = (\Delta V, \nabla V)$ vir 'n $V \subseteq W$. Gevolg 3.3.6 (1) beskryf nou sup $\{(P_1, N_1), (P_2, N_2)\}$ as $N_1 = W$ of $N_2 = W$; en 3.3.6 (2) beskryf $inf\{(P_1, N_1), (P_2, N_2)\}$ as $P_1 = W$ of $P_2 = W$.

3.3.6 **Gevolg** Laat $(P_1, N_1) = (\Delta X_1, \nabla X_1)$ en $(P_2, N_2) = (\Delta X_2, \nabla X_2)$.

(1) As $X_1 \neq \phi$, $X_2 \neq \phi$ en X_1 *of* X_2 is *positief*, is

$$sup\ \{(P_1, N_1), (P_2, N_2)\} = (\Delta(X_1 \check{\vee} X_2), \nabla(X_1 \check{\vee} X_2)).$$

(2) As $X_1 \neq \phi$, $X_2 \neq \phi$ en X_1 *of* X_2 is *negatief*, is

$$inf\{(P_1, N_1), (P_2, N_2)\} = (\Delta(X_1 \hat{\wedge} X_2), \nabla(X_1 \hat{\wedge} X_2)).$$

Bewys

(1) As $X_1 \neq \phi$, $X_2 \neq \phi$ en X_1 of X_2 is positief, is $r \in X_1 \cup X_2$ en $r \in X_1 \check{\vee} X_2$. Dus, $\nabla(X_1 \cup X_2) = \nabla(X_1 \check{\vee} X_2) = \mathbf{W}$; en *sup* $\{(P_1, N_1), (P_2, N_2)\} = (\Delta X_1 \cap \Delta X_2, \nabla X_1 \cup \nabla X_2) = (\Delta(X_1 \check{\vee} X_2), \nabla(X_1 \cup X_2)) = (\Delta(X_1 \check{\vee} X_2), \nabla(X_1 \check{\vee} X_2))$.

(2) As $X_1 \neq \phi$, $X_2 \neq \phi$ en X_1 of X_2 is negatief, is $r^* \in X_1 \cup X_2$ en $r^* \in X_1 \hat{\wedge} X_2$. Dus, $\Delta(X_1 \cup X_2) = \Delta(X_1 \hat{\wedge} X_2) = \mathbf{W}$; en *inf* $\{(P_1, N_1), (P_2, N_2)\} = (\Delta X_1 \cup \Delta X_2, \nabla X_1 \cap \nabla X_2) = (\Delta(X_1 \cup X_2), \nabla(X_1 \hat{\wedge} X_2)) = (\Delta(X_1 \hat{\wedge} X_2), \nabla(X_1 \hat{\wedge} X_2))$. □

Ter illustrasie van Gevolg 3.3.6 blaai ons weer terug na Figuur 19. As die sinne X en Y onderskeidelik met die konfigurasies **X** en **Y** ooreenkom, bedoel ons met $X \check{\vee} Y$ en $X \hat{\wedge} Y$ die sinne wat respektiewelik met die konfigurasies $\mathbf{X} \check{\vee} \mathbf{Y}$ en $\mathbf{X} \hat{\wedge} \mathbf{Y}$ ooreenkom. Ons beskou eers die situasie van 3.3.6 (1). Neem $(P_1, N_1) = (p, \neg q) \equiv (\Delta(p \wedge \neg q), \nabla(p \wedge \neg q))$ en $(P_2, N_2) = (p \vee q, T) \equiv (\Delta(p \vee q), \nabla(p \vee q))$. Die sin $p \vee q$ is dus positief en daarom is $\nabla(p \vee q) \equiv T$. Dan is *sup* $\{(p, \neg q), (p \vee q, T)\} \equiv (p, T) \equiv (\Delta[(p \wedge \neg q) \check{\vee} (p \vee q)], \nabla[(p \wedge \neg q) \check{\vee} (p \vee q)])$. Dit is nou ook duidelik hoekom 3.3.6 (1) nie vir die infimum van (P_1, N_1) en (P_2, N_2) dieselfde tipe uitspraak kan lewer nie: *inf* $\{(p, \neg q), (p \vee q, T)\} \equiv (p \vee q, \neg q)$ — 'n onderstreepte inskrywing, wat beteken dat daar geen sin X bestaan só dat $p \vee q \equiv \Delta X$ en $\neg q \equiv \nabla X$. Beskou ons nou 3.3.6 (2) vir $(P_1, N_1) = (p, \neg q)$ en $(P_3, N_3) = (T, \neg p \vee \neg q) \equiv (\Delta(\neg p \vee \neg q), \nabla(\neg p \vee \neg q))$ is *inf* $\{(p, \neg q), (T, \neg p \vee \neg q)\} \equiv (T, \neg q) \equiv (\Delta[(p \wedge \neg q) \hat{\wedge} (\neg p \vee \neg q)], \nabla[(p \wedge \neg q) \hat{\wedge} (\neg p \vee \neg q)])$. Die supremum van (P_1, N_1) en (P_3, N_3), naamlik $(p, \neg p \vee \neg q)$, is nou onderstreep, wat beteken dat Stelling 3.3.2 (1) nie vir $(p, \neg p \vee \neg q)$ geld nie.

Beskou weer $(P_1, N_1) = (\Delta X_1, \nabla X_1)$ en $(P_2, N_2) = (\Delta X_2, \nabla X_2)$ vir X_1, $X_1 \subseteq$

W. Soos hierbo geïllustreer, kan daar met die beperkings van 3.3.6 (1) op X_1, X_2 nie altyd 'n $U \subsetneq W$ gevind word só dat $inf\,\{(P_1, N_1), (P_2, N_2)\} = (\Delta U, \nabla U)$; en net so, kan daar met die beperkings van 3.3.6 (2) op X_1 en X_2, nie altyd 'n $V \subsetneq W$ gevind word só dat $sup\,\{(P_1, N_1), (P_2, N_2)\} = (\Delta V, \nabla V)$. Die vraag ontstaan nou: Watter ander beperkings op X_1 en X_2 is nodig só dat daar wel so 'n U en V gevind kan word? Gevolg 3.3.7 gee die antwoord hierop.

3.3.7 **Gevolg** Laat $(P_1, N_1) = (\Delta X_1, \nabla X_1)$ en $(P_2, N_2) = (\Delta X_2, \nabla X_2)$.

(1) As $X_1 \neq \phi$, $X_2 \neq \phi$ en *beide* X_1 en X_2 is *positief*, is

$$sup\,\{(P_1, N_1), (P_2, N_2)\} = (\Delta(X_1 \cap X_2), \nabla(X_1 \cap X_2)) \text{ en}$$
$$inf\,\{(P_1, N_1), (P_2, N_2)\} = (\Delta(X_1 \cup X_2), \nabla(X_1 \cup X_2))$$

(2) As $X_1 \neq \phi$, $X_2 \neq \phi$ en *beide* X_1 en X_2 is *negatief*, is

$$sup\,\{(P_1, N_1), (P_2, N_2)\} = (\Delta(X_1 \cup X_2), \nabla(X_1 \cup X_2)) \text{ en}$$
$$inf\,\{(P_1, N_1), (P_2, N_2)\} = (\Delta(X_1 \cap X_2), \nabla(X_1 \cap X_2)).$$

Bewys

(1) Sê $X_1 \neq \phi$, $X_2 \neq \phi$ en $X_1 = \Delta X_1$, $X_2 = \Delta X_2$. Dan is $\Delta X_1 \cap \Delta X_2 = X_1 \cap X_2 = \Delta(X_1 \cap X_2)$ — sien Lemma 2.2.2; en $\nabla X_1 \cup \nabla X_2 = \nabla(X_1 \cup X_2) = \nabla(X_1 \cap X_2) = \nabla X_1 \cap \nabla X_2 = W$ (want $r \in X_1 \cap X_2$). Dus, $sup\,\{(P_1, N_1), (P_2, N_2)\} = (X_1 \cap X_2, W) = (\Delta(X_1 \cap X_2), \nabla(X_1 \cap X_2))$; en $inf\,\{(P_1, N_1), (P_2, N_2)\} = (X_1 \cup X_2, W) = (\Delta(X_1 \cup X_2), \nabla(X_1 \cup X_2))$.

(2) Sê $X_1 \neq \phi$, $X_2 \neq \phi$ en $X_1 = \nabla X_1$, $X_2 = \nabla X_2$. Dan is $\nabla X_1 \cap \nabla X_2 = \nabla(X_1 \cap X_2)$ en $\Delta X_1 \cup \Delta X_2 = \Delta(X_1 \cup X_2) = \Delta(X_1 \cap X_2) = \Delta X_1 \cap \Delta X_2 = W$ (want $r^* \in X_1 \cap X_2$). Dus, $(P_1 \cap P_2, N_1 \cup N_2) = (W, X_1 \cup X_2) = (\Delta(X_1 \cup X_2), \nabla(X_1 \cup X_2))$;

en $(P_1 \cup P_2, N_1 \cap N_2) = (W, X_1 \cap X_2) = (\Delta(X_1 \cap X_2), \nabla(X_1 \cap X_2))$. □

Daar bestaan natuurlik gevalle waar 3.3.2 se vyf bewerings nie vir (P_1, N_1) en ook nie vir (P_2, N_2) geld nie, maar wel vir $(P_1 \cap P_2, N_1 \cup N_2)$ en $(P_1 \cup P_2, N_1 \cap N_2)$ — vergelyk Figuur 19. Gevolge 3.3.5, 3.3.6 en 3.3.7 lewer net uitsprake oor $(P_1 \cap P_2, N_1 \cup N_2)$ en $(P_1 \cup P_2, N_1 \cap N_2)$ vir pare (P_1, N_1) en (P_2, N_2) waarvoor 3.3.2 (1) – (5) wel geld. Of ons met hierdie gevolge al die gevalle dek waarvoor *sup* $\{(P_1, N_1), (P_2, N_2)\}$ en *inf* $\{(P_1, N_1), (P_2, N_2)\}$ van sulke pare aan 3.3.2 (1) – (5) voldoen, is nog 'n ope vraag.

$\mathcal{P}$, die versameling van alle positiewe konfigurasies in die taal voortgebring deur $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, is 'n volledige distributiewe tralie onder die operasies $\cup$ (vir infimum) en $\cap$ (vir supremum). Die onderste (of kleinste) element in $(P, \supseteq)$ is die konfigurasie W; en die boonste (of grootste) element in $(P, \supseteq)$ is die leë–konfigurasie (ϕ). Behalwe vir W en ϕ, word al die elemente van $(P, \supseteq)$ voortgebring deur $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ met behulp van $\cup$ en $\cap$ (vergelyk Stelling 2.2.3). $(P, \supseteq)$ is dus 'n tralie van tipe $\cdot, +, 0, 1$, waar $\cdot$ op 'n infimumoperasie, $+$ op 'n supremumoperasie, 0 op 'n kleinste element en 1 op 'n grootste element dui. (0 en 1 is nul–êre operasies.) Ons spreek af om voortaan (tensy anders vermeld) alle tralies ten opsigte van tipe $\cdot, +, 0, 1$ te beskou, d.i. tralies wat altyd ook nog 'n kleinste element (0) en grootste element (1) het. Wanneer ons 'n spesifieke tralie, byvoorbeeld $\mathcal{P}$, wil beskryf, sal die simbole $\cdot, +, 0, 1$, geïnterpreteer word. Vir $(\mathcal{P}, \supseteq)$ (of kortweg: $\mathcal{P}$) geld dan: $\cdot = \cup$, $+ = \cap$, $0 = W$ en $1 = \phi$; terwyl vir $(\mathcal{N}, \subseteq)$ (of $\mathcal{N}$) geld: $\cdot = \cap$, $+ = \cup$, $0 = \phi$ en $1 = W$. Omdat, in die eindige geval, elke konfigurasie met 'n teorie (en selfs 'n enkelsin) ooreenkom; en vir alle teorieë X en Y, Mod $(X \wedge Y)$ = Mod $(X) \cap$ Mod (Y), Mod $(X \vee Y)$ = Mod $(X) \cup$ Mod (Y), kan ons die tralies $\mathcal{P}$ en $\mathcal{N}$ onderskeidelik as $(\mathcal{P}, \vee, \wedge, T, F)$ of $(\mathcal{P}, \cup, \cap, W, \phi)$; $(\mathcal{N}, \wedge, \vee, F, T)$ of $(\mathcal{N}, \cap, \cup, \phi, W)$ beskryf.

Ons kan aan $\mathcal{P}$ (en aan $\mathcal{N}$) ook dink as $\mathcal{F}(n)$ — *die vrye distributiewe tralie* *met n vrye voortbringers met tipe* $\cdot$, $+$, 0, 1. Dat $\mathcal{P}$ isomorf is aan $\mathcal{F}(n)$, kan aan die hand van die prosesse om $\mathcal{P}$ en $\mathcal{F}(n)$ te verkry, verduidelik word.

Die proses om $\mathcal{F}(n)$ te verkry verloop soos volg:

- Vorm alle moontlike terme (of woorde), t, met behulp van slegs die voortbringers, sê $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $\cdot$ en $+$; en voeg $\bar{0}$ (as kleinste element) en $\bar{1}$ (as grootste element) by. Dit lewer die absoluut vrye algebra, sê $\bar{\mathcal{F}}(n)$, voortgebring deur $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ten opsigte van die tipe $\cdot$, $+$, 0, 1.
- Vorm ekwivalensieklasse onder die volgende relasie: vir $t_1, t_2 \in \bar{\mathcal{F}}(n)$: $t_1 \sim t_2$ as en slegs as die vergelyking $t_1 = t_2$ logies afgelei kan word uit die aksiomas vir 'n distributiewe tralie. Die relasie $\sim$ is 'n *kongruensierelasie* op $\bar{\mathcal{F}}(n)$, d.i. $\sim$ is 'n ekwivalensie–relasie (refleksiewe, simmetriese en transitiewe binêre relasie) waarvoor ons kan definieer: vir alle $t_1, t_2 \in \bar{\mathcal{F}}(n)$:

  $$[t_1] \cdot [t_2] := [t_1 \cdot t_2] \text{ en } [t_1] + [t_2] := [t_1 + t_2],$$

  waar $[t] = \{t' \in \bar{\mathcal{F}}(n) \mid t' \sim t\}$; $0 := [\bar{0}]$, $1 := [\bar{1}]$.
- $\bar{\mathcal{F}}(n)/\sim$ is dan die vrye distributiewe tralie $(\mathcal{F}(n), \cdot, +, 0, 1)$ voortgebring deur $\{[a_1], [a_2], \ldots, [a_n]\}$.

Om $(\mathcal{P}, \vee, \wedge, T, F)$ te verkry, gaan ons só te werk:

- Beskou alle proposisionele sinne wat opgebou kan word uit die proposisiesimbole p_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ met behulp van slegs disjunksie en konjunksie en voeg by hierdie versameling die sinne T en F. Dit lewer die absoluut vrye algebra, sê $\bar{\mathcal{P}}$, voortgebring deur $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ met tipe $\cdot$, $+$, 0, 1.
- Vorm ekwivalensieklasse onder die volgende kongruensierelasie: vir $P_1, P_2 \in \bar{\mathcal{P}}$:

  $P_1 \doteqdot P_2$ as en slegs as P_1 en P_2, gesien as elemente van 'n distributiewe tralie, dieselfde element voorstel. ($\doteqdot$ kan ook maar as $\equiv$ — logiese ekwivalensie, beskou word, want as $P_1, P_2 \in \bar{\mathcal{P}}$ en $P_1 \equiv P_2$, dan sal P_1 en P_2 dieselfde element in 'n distributiewe tralie voorstel.)
- $\bar{\mathcal{P}}/\doteqdot$ is dan die tralie van alle logies nie–ekwivalente positiewe sinne in die

taal voortgebring deur $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$, d.i. $\bar{\mathcal{P}}/\dot{\equiv} = (\mathcal{P}, \vee, \wedge, T, F)$.

Die proses om $\mathcal{P}$ te verkry is dus isomorf aan die proses om $\mathcal{F}(n)$ te verkry. $\mathcal{P}$ is egter ook isomorf aan $\mathcal{N}$ onder die funksie wat elke element van $\mathcal{P}$ ontken, d.i. onder die funksie

$$\neg : (\mathcal{P}, \vee, \wedge, T, F) \longrightarrow (\mathcal{N}, \wedge, \vee, F, T); \;\; \neg(P) = \neg P \in \mathcal{N}.$$

Die funksie is duidelik een–eenduidig ($\neg P_1 \equiv \neg P_2 \Longrightarrow P_1 \equiv P_2$) en op $\mathcal{N}$ (vir alle $N \in \mathcal{N}$ bestaan daar 'n $P \in \mathcal{P}$ só dat $N \equiv \neg P$ — vergelyk die karakterisering (Stelling 2.2.4) van 'n negatiewe sin). Ook geld: $\neg(P_1 \vee P_2) \equiv \neg P_1 \wedge \neg P_2$ en $\neg(P_1 \wedge P_2) \equiv \neg P_1 \vee \neg P_2$ — uit De Morgan se wette. Dus, $\mathcal{P} \cong \mathcal{N}$.

$\mathcal{F}(n)$ kan ook *rekursief gekonstrueer* word: $\mathcal{F}(n+1)$ is naamlik 'n sekere (distributiewe) deeltralie van $\mathcal{F}(n) \times \mathcal{F}(n)$. Vir die bewys hiervan, benodig ons Lemma 3.3.8 — 'n resultaat in dieselfde trant as "Corollary" 20, Grätzer [1971], p. 76 (en [1978], p. 65).

3.3.8 **Lemma** Veronderstel $p(a_1, ..., a_n, \beta)$ en $p'(a_1, ..., a_n, \beta)$ is twee polinome van tipe $\cdot, +, 0, 1$ en veronderstel dat

(*1) $(\forall a_1) ... (\forall a_n)[p(a_1, ..., a_n, 0) = p'(a_1, ..., a_n, 0)]$

sowel as

(*2) $(\forall a_1) ... (\forall a_n)[p(a_1, ..., a_n, 1) = p'(a_1, ..., a_n, 1)]$

in alle distributiewe tralies geld.

Dan geld

(*3) $(\forall a_1) ... (\forall a_n)(\forall \beta)[p(a_1, ..., a_n, \beta) = p'(a_1, ..., a_n, \beta)]$

in alle distributiewe tralies.

Bewys

Dit is welbekend (Grätzer [1978]) dat elke distributiewe tralie van tipe $\cdot, +,$ isomorf is aan 'n deeltralie van ($\mathscr{P}$A, ∩, ∪), vir 'n versameling A; of (Birkhoff [1944]) isomorf ingebed kan word as 'n subdirekte produk binne (2^A, $\cdot$, +). Dit is maklik om te sien dat dieselfde resultaat geld vir tralies van tipe $\cdot$, +, 0, 1: Veronderstel naamlik dat ($\mathscr{D}$, $\cdot$, +, 0, 1) 'n distributiewe tralie is en dat $\varphi : (\mathscr{D}, \cdot, +) \longrightarrow (\mathscr{P}A, \cap, \cup)$ 'n inbedding is. Neem aan $\varphi(0) = B(\subseteq A)$ en $\varphi(1) = C(\subseteq A)$. Dan is natuurlik $B \subseteq \varphi(d) \subseteq C$ vir alle $d \in \mathscr{D}$. Die funksie $\psi : (\mathscr{D}, \cdot, +, 0, 1) \longrightarrow (\mathscr{P}(C-B), \cap, \cup, \phi, C-B)$; $\psi(d) = \varphi(d) - B$ is dan die gevraagde inbedding.

Veronderstel nou (*1) en (*2) geld vir alle distributiewe tralies. Laat $\mathscr{D}$ enige distributiewe tralie wees. Dan is $\mathscr{D}$ isomorf aan 'n deeltralie van 'n produk van die distributiewe tralie **2** = {0, 1}. Omdat **2** (*1) en (*2) bevredig, bevredig **2** ook (*3). Maar, sinne van die vorm (*3) bly behoue onder die neem van produkte en deeltralies, dus $\mathscr{D}$ bevredig ook (*3). □

3.3.9 **Stelling** Laat $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ die vrye voortbringers van ($\mathscr{F}(n)$, $\cdot$, +, 0, 1) wees. Dan is

$$\mathscr{F}: = \{(c, d) \in \mathscr{F}(n) \times \mathscr{F}(n) \mid c \leq d \text{ in } \mathscr{F}(n)\}$$

'n distributiewe deeltralie van $\mathscr{F}(n) \times \mathscr{F}(n)$ en

$$\mathscr{F} = (\mathscr{F}(n+1), \cdot, +, (0, 0), (1, 1)),$$

vry voortgebring deur $\{(a_1, a_1), (a_2, a_2), ..., (a_n, a_n), (0, 1)\}$.

Bewys

- $\mathscr{F}$ is 'n *distributiewe deeltralie* van $\mathscr{F}(n) \times \mathscr{F}(n)$: Veronderstel (c, d), (c′, d′) $\in \mathscr{F}$. Dus $c \leq d$ en $c' \leq d'$. Hieruit volg dat $c \cdot c' \leq d \cdot d'$ en $c + c' \leq d + d'$ en dus dat $(c, d) \cdot (c', d') = (c \cdot c', d \cdot d')$ en $(c, d) + (c', d') = (c + c', d + d')$ elemente van $\mathscr{F}$ is. $\mathscr{F}$ is dus 'n deeltralie van $\mathscr{F}(n) \times \mathscr{F}(n)$. Omdat $\mathscr{F}(n)$ distributief is, is $\mathscr{F}(n) \times \mathscr{F}(n)$ en dus ook $\mathscr{F}$ distributief.

• $(\mathscr{F}, \cdot, +, (0,0), (1,1))$ word *voortgebring* deur $\mathscr{V} = \{(a_1, a_1), (a_2, a_2), \ldots, (a_n, a_n), (0, 1)\}$ (waar $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ die versameling vrye voortbringers van $\mathscr{F}(n)$ is): Ons kyk eers hoe $\mathscr{F}$ se elemente kan lyk. Neem enige $(c, d) \in \mathscr{F}$; dan

$$\begin{aligned}(c, d) &= (c, c + d) \quad (\text{onthou } c \leq d)\\ &= (c, c) + (0, d)\\ &= (c, c) + [(d, d) \cdot (0, 1)], \text{ of}\\ (c, d) &= [(c, c) + (0, 1)] \cdot (d, d).\end{aligned}$$

Elke $c, d \in \mathscr{F}(n)$ is te skryf as $c = p(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $d = p'(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, waar p en p′ polinome van tipe $\cdot, +, 0, 1$ is. Dan is $(c, c) = (p(a_1, a_2, \ldots, a_n), p(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = p[(a_1, a_1), (a_2, a_2), \ldots, (a_n, a_n)]$ en $(d, d) = p'[(a_1, a_1), (a_2, a_2), \ldots, (a_n, a_n)]$. Volgens bostaande is elke $(c, d) \in \mathscr{F}$ dus te skryf as $(c, d) = q[(a_1, a_1), (a_2, a_2), \ldots, (a_n, a_n), (0, 1)]$, waar q 'n polinoom van tipe $\cdot, +, 0, 1$ is. Ons gee 'n eenvoudige voorbeeld:

$$\begin{aligned}(c, d) &= [(a_1 \cdot 1) \cdot (a_2 + a_3), (a_4 + a_5) + (a_6 \cdot 0)]\\ &= [a_1 \cdot (a_2 + a_3), (a_4 + a_5) + 0]\\ &= [a_1 \cdot (a_2 + a_3), a_4 + a_5]\\ &= [a_1 \cdot (a_2 + a_3), a_1 \cdot (a_2 + a_3)] + [(a_4 + a_5, a_4 + a_5) \cdot (0, 1)]\\ &= [(a_1, a_1) \cdot ((a_2 + a_3), (a_2 + a_3)] + [((a_4, a_4) + (a_5, a_5)) \cdot (0, 1)]\\ &= [(a_1\ a_1) \cdot ((a_2, a_2) + (a_3, a_3))] + [((a_4, a_4) + (a_5, a_5)) \cdot (0, 1)].\end{aligned}$$

$(\mathscr{F}, \cdot +, (0, 0), (1, 1))$ word dus voortgebring deur $\mathscr{V}$.

• $(\mathscr{F}, \cdot +, (0, 0), (1, 1))$ word *vry voortgebring* deur $\mathscr{V}$: Laat f enige funksie van $\mathscr{V}$ na 'n distributiewe tralie $\mathscr{D}$ wees. (Te bewys: f kan uitgebrei word tot 'n (unieke) homomorfie $\hat{f} : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{D}$.)

Definieer $\hat{f} : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{D}$;

$$\hat{f}[p[(a_1, a_1), \ldots, (a_n, a_n), (0, 1)]] = p[f(a_1, a_1), \ldots, f(a_n, a_n), f(0, 1)].$$

– Ons bewys eers dat $\hat{f}$ goed gedefinieer is (d.i. dat $\hat{f}$ 'n funksie is): Laat p en p′ twee polinome (van tipe $\cdot, +, 0, 1$) wees waarvoor

$p[(a_1, a_1), \ldots, (a_n, a_n), (0, 1)] = p'[(a_1, a_1), \ldots, (a_n, a_n), (0, 1)]$ in $\mathscr{F}$, d.i.

(*4) $p(a_1, \ldots, a_n, 0) = p'(a_1, \ldots, a_n, 0)$ in $\mathscr{F}(n)$,

en

(*5) $p(a_1, \ldots, a_n, 1) = p'(a_1, \ldots, a_n, 1)$ in $\mathscr{F}(n)$.

Vir $\hat{f}$ om 'n funksie te wees, moet in $\mathscr{D}$ geld dat

(*6) $p[f(a_1, a_1), \ldots, f(a_n, a_n), f(0, 1)] = p'[f(a_1, a_1), \ldots, f(a_n, a_n), f(0, 1)]$.

(*4) beskryf 'n verband wat in $\mathscr{F}(n)$ tussen die vrye voortbringers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ geld. Só 'n verband kan alleen geld indien dit afleibaar is uit die aksiomas vir 'n distributiewe tralie van tipe $\cdot, +, 0, 1$. (Dus, $p(a_1, \ldots, a_n, 0) \sim p'(a_1, \ldots, a_n, 0)$ volgens ons beskrywing van die proses om $\mathscr{F}(n)$ te verkry.) Dit beteken dat

$$(\forall \alpha_1) \ldots (\forall \alpha_n)[p(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0) = p'(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0)]$$

in alle distributiewe tralies moet geld. Soortgelyk volg uit (*5) dat

$$(\forall \alpha_1) \ldots (\forall \alpha_n)[p(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 1) = p'(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 1)]$$

in alle distributiewe tralies moet geld. Uit Lemma 3.3.8 volg dat

(*3) $(\forall \alpha_1) \ldots (\forall \alpha_n)(\forall \beta)[p(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta) = p'(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta)]$

in alle distributiewe tralies moet geld. Dus, in die besonder geld (*6) in $\mathscr{D}$.

Dit is maklik om te sien dat $\hat{f}$ 'n homomorfie is: Beskou $(c, d) = p[(a_1, a_1), \ldots, (a_n, a_n), (0, 1)]$ en $(c', d') = p'[(a_1, a_1), \ldots, (a_n, a_n), (0, 1)]$ uit $\mathscr{F}$. Dan is $(c, d) \cdot (c', d') = (c \cdot c', d \cdot d') = p''[(a_1, a_1), \ldots, (a_n, a_n), (0, 1)]$, waar $p'' = p \cdot p'$.

Dus,

$$\begin{aligned}\hat{f}[(c, d) \cdot (c', d')] &= p''[f(a_1, a_1), \ldots, f(a_n, a_n), f(0, 1)] \\ &= p[f(a_1, a_1), \ldots, f(a_n, a_n), f(0, 1)] \cdot \\ &\quad p'[f(a_1, a_1), \ldots, f(a_n, a_n), f(0, 1)]\end{aligned}$$

$= \hat{f}[(c, d)] \cdot \hat{f}[(c', d')]$.

Soortgelyk geld $\hat{f}[(c, d) + (c', d')] = \hat{f}[(c, d)] + \hat{f}[(c', d')]$.

— Dit is ook duidelik dat $\hat{f} \upharpoonright \mathcal{V} = f$. □

As 'n toepassing van Stelling 3.3.9 wil ons nou aantoon dat $(\mathcal{F}(3), \cdot, +, 0, 1)$ 'n distributiewe deeltralie van $(\mathcal{P}(2), \vee, \wedge, T, F) \times (\mathcal{N}(2), \wedge, \vee, F, T)$ is: $(\mathcal{F}(3), \cdot, +, 0, 1)$ is naamlik die tralie voortgebring deur $\{(p, \neg q), (\neg p, q), (T, T)\}$ en het (F, T) as grootste, en (T, F) as kleinste element: Ons weet dat $\{p, q\}$ vir $(\mathcal{P}(2), \vee, \wedge, T, F)$ en $\{\neg p, \neg q\}$ vir $(\mathcal{N}(2), \wedge, \vee, F, T)$ vry voortbring. Elke $P \in \mathcal{P}(2)$ kan dus geskryf word as $P = p(p, q)$, waar p 'n polinoom van tipe $\cdot, +, 0, 1$ is. Die bijeksie $h : \{p, q\} \longrightarrow \{p, q\}$; $h(p) = q$, $h(q) = p$ kan dus uitgebrei word tot 'n outomorfie $\hat{h} : (\mathcal{P}(2), \vee, \wedge, T, F) \longrightarrow (\mathcal{P}(2), \vee, \wedge, T, F)$; $\hat{h}(P)$ $(= \hat{h}[p(p, q)]) = p[h(p), h(q)]$. Definieer nou die isomorfie h^*: $(\mathcal{P}(2), \vee, \wedge, T, F) \longrightarrow (\mathcal{N}(2), \wedge, \vee, F, T)$; $h^*(P) = (\neg \circ \hat{h})(P)$. Dan beskryf (volgens 3.3.9) $\{(P, N) \in \mathcal{P}(2) \times \mathcal{N}(2) \mid h^*(P) \leq N \text{ in } \mathcal{N}(2)\}$ die vrye distributiewe tralie met drie voortbringers. Ons wil nou aantoon dat $(p, \neg q)$, $(q, \neg p)$, (T, T) die drie voortbringers is. Volgens 3.3.9 geld dat as $\{a_1, a_2\}$ vir $(\mathcal{F}(2), \cdot, +, 0, 1)$ vry voortbring, dan word $(\mathcal{F}(3), \cdot, +, (0, 0), (1, 1))$ vry voortgebring deur $\{(a_1, a_1), (a_2, a_2), (0, 1)\}$. Onder die isomorfie h^*, is $h^*(p) = \neg q$, $h^*(q) = \neg p$, $h^*(T) = F$ en $h^*(F) = T$. Stel ons vir $\mathcal{P}(2)$, $p = a_1$, $q = a_2$, $T = 0$ en $F = 1$ (want T is die kleinste in $\mathcal{P}(2)$ en F die grootste), word $(\mathcal{P}(2), \vee, \wedge, 0, 1)$ vry voortgebring deur $\{a_1, a_2\}$. Onder die isomorfie h^*, kan vir $\mathcal{N}(2)$, $\neg q = a_1$, $\neg p = a_2$, $F = 0$ en $T = 1$ beskou word, sodat $\{(p, \neg q), (q, \neg p), (T, T)\} = \{(a_1, a_1), (a_2, a_2), (0, 1)\}$ die versameling vrye voortbringers van $(\mathcal{F}(3), \cdot, +, (0, 0), (1, 1))$ is, waar $(0, 0) = (T, F)$ en $(1, 1) = (F, T)$.

Die diagram van $(\mathcal{F}(3), \cdot, +)$ — die vrye distributiewe tralie voortgebring deur drie vrye voortbringers met tipe $\cdot, +$, is 'n bekende diagram in die literatuur van tralieteorie (sien byvoorbeeld Balbes & Dwinger [1974], p. 90; Grätzer [1971], p.46 en [1978], p. 38). Interessant genoeg is die diagram van $(\mathcal{F}(3), \cdot, +)$ dieselfde as die diagram van Figuur 19 — die diagram van die deeltralie van $(\mathcal{P}(2), \vee, \wedge, T, F)$

$\times$ ($\mathcal{N}(2)$, $\wedge$, $\vee$, F, T) van agtien elemente, voortgebring deur die ingebedde parsieel-geordende versameling $g[(\mathcal{P}W - \{\phi\}) / \Leftrightarrow]$ ($g([X]) = (\Delta X, \nabla X)$) van 12 elemente. Die diagram van Figuur 19 is naamlik die vrye distributiewe tralie voortgebring deur $(p, \neg q)$, $(q, \neg p)$, (T, T), met tipe $\cdot$, $+$. Alle elemente, (P, N), van die diagram van Figuur 19 kan dus deur middel van $\cdot$ en $+$ in terme van $(p, \neg q)$, $(q, \neg p)$ en (T, T) geskryf word, waar $(P_1, N_1) \cdot (P_2, N_2) = (P_1 \vee P_2, N_1 \wedge N_2)$ en $(P_1, N_1) + (P_2, N_2) = (P_1 \wedge P_2, N_1 \vee N_2)$: Neem byvoorbeeld $(P, N) = (p \vee q, \neg p \vee \neg q)$. Dan is $(p \vee q, \neg p \vee \neg q) = (p \vee q, T) \cdot (p \wedge q, \neg p \vee \neg q) = (p, T) \cdot (q, T) \cdot (p \wedge q, \neg p \vee \neg q) = (p \wedge T, \neg q \vee T) \cdot (q \wedge T, \neg p \vee T) \cdot (p \wedge q, \neg p \vee \neg q) = [(p, \neg q) + (T, T)] \cdot [(q, \neg p) + (T, T)] \cdot [(p, \neg q) + (q, \neg p)]$. Voeg ons dus die pare (T, F) (as kleinste element) en (F, T) (as grootste element) by die diagram, kry ons die vrye distributiewe tralie voortgebring deur $\{(p, \neg q), (q, \neg p), (T, T)\}$ met tipe $\cdot$, $+$, 0, 1 — wat soos reeds betoog, beskryf word deur $\{(P, N) \in \mathcal{P}(2) \times \mathcal{N}(2) \mid h^*(P) \leq N \text{ in } \mathcal{N}(2))\}$.

Vir $n = 2$ kan $(\mathcal{P}W - \{\phi\}) / \Leftrightarrow$ dus in die vrye distributiewe tralie met $n + 1$ voortbringers ingebed word. Dit blyk of hierdie situasie net vir $n \leq 2$ geld: Laat $\langle g[(\mathcal{P}W - \{\phi\}) / \Leftrightarrow]\rangle$ die tralie voortgebring deur $g[(\mathcal{P}W - \{\phi\}) / \Leftrightarrow]$ aandui. Vir $n = 1$ geld dan: $\langle g[(\mathcal{P}W - \{\phi\}) / \Leftrightarrow]\rangle = g[(\mathcal{P}W - \{\phi\}) / \Leftrightarrow] \subset (\mathcal{F}(2), \cdot, +)$; en vir $n = 2$: $g[(\mathcal{P}W - \{\phi\}) / \Leftrightarrow] \subset (\mathcal{F}(3), \cdot, +)$, maar $\langle g[(\mathcal{P}W - \{\phi\}) / \Leftrightarrow]\rangle = (\mathcal{F}(3), \cdot, +)$. Dus, vir $n = 1$, is $g[(\mathcal{P}W - \{\phi\}) / \Leftrightarrow]$ nie "groot genoeg" om $(\mathcal{F}(n + 1), \cdot, +)$ voort te bring nie; vir $n = 2$ is dit wel. Vir $n \geq 3$ lyk dit egter of $g[(\mathcal{P}W - \{\phi\}) / \Leftrightarrow]$ vir $(\mathcal{F}(n + 1), \cdot, +)$ eg omvat.

'n Bekende probleem op die gebied van "vrye distributiewe tralies", is die bepaling van $|(\mathcal{F}(n), \cdot, +, 0, 1)|$, d.i. die bepaling van die aantal elemente in die vrye distributiewe tralie met n voortbringers en tipe $\cdot$, $+$, 0, 1. Uit die feit dat $(\mathcal{F}(n), \cdot, +, 0, 1) \cong (\mathcal{P}, \vee, \wedge, T, F) \cong (\mathcal{N}, \wedge, \vee, F, T)$, is die probleem om $|(\mathcal{F}(n), \cdot, +, 0, 1)|$ te bereken ekwivalent daaraan om die volgende te bepaal: die aantal

- logies nie-ekwivalente positiewe (of negatiewe) proposisionele sinne in 'n taal met n voortbringers;

- positiewe (of negatiewe) konfigurasies (of deelversamelings) van $(W, \leq)$;
- isotone (of antitone) funksies $f : 2^n \longrightarrow 2$;
- semifilters (of semi–ideale) in $(2^n, \leq)$;
- totaal ongeordende ("onafhanklike") deelversamelings ("anti–kettings") in $(2^n, \leq)$, waar die leë deelversameling ook ingesluit word. (Sien ook Dudek [1991].)

Die probleem is vir die eerste keer deur Dedekind in 1897 gestel en staan dan ook as Dedekind se probleem bekend. Dedekind self het $|(\mathcal{F}(n), \cdot, +, 0, 1)|$ bereken vir $n \leq 4$: $|(\mathcal{F}(1)| = 3$, $|(\mathcal{F}(2)| = 6$, $|(\mathcal{F}(3)| = 20$ en $|(\mathcal{F}(4)| = 168$ (almal ten opsigte van tipe $\cdot, +, 0, 1$). As reaksie hierop het Church in 1940 bewys dat $|(\mathcal{F}(5)| = 7\ 581$ en Ward in 1946 dat $|(\mathcal{F}(6)| = 7\ 828\ 354$ (Balbes & Dwinger [1971]; Grätzer [1978]; Kleitman [1969]; en Whitman [1961]). Eers in 1988 is die probleem opgelos — deur A. Kisielewicz [1988].

Ter afsluiting van hierdie afdeling wil ons aantoon dat die waarheidsgetrou-heid–preordening $\Leftarrow$, saamgetrek tot 'n parsiële ordening onder $\Leftrightarrow$, as retrak in die *kategorie van versamelings* in $\mathcal{P} \times \mathcal{N}$ sit: Vir elke $X \in \mathcal{P}W$ is $\Delta X \subseteq \Delta(\Delta X \cap \nabla X)$ en $\nabla X \subseteq \nabla(\Delta X \cap \nabla X)$ (want $X \subseteq \Delta X$ en $X \subseteq \nabla X$). Die omgekeerde geld ook: $\Delta(\Delta X \cap \nabla X) \subseteq \Delta(\Delta X) \cap \Delta(\nabla X) = \Delta X \cap W$ (vir $X \neq \phi$) $= \Delta X$; en soortgelyk, $\nabla(\Delta X \cap \nabla X) \subseteq \nabla X$ (sien Afdeling 2.1). Dus, $\Delta X = \Delta(\Delta X \cap \nabla X)$ en $\nabla X = \nabla(\Delta X \cap \nabla X)$, wat beteken $\Delta X \cap \nabla X \Leftrightarrow X$. Wat meer is, $\Delta X \cap \nabla X$ is die grootste versameling wêrelde ekwivalent aan X onder $\Leftrightarrow$, d.i. $\Delta X \cap \nabla X$ is die maksimum–element in $[X]$: $Y \in [X] \Leftrightarrow \Delta Y = \Delta X$ en $\nabla Y = \nabla X \Longrightarrow \Delta Y \cap \nabla Y = \Delta X \cap \nabla X \Longrightarrow Y \subseteq \Delta X \cap \nabla X$. In die sin kan $\Delta X \cap \nabla X$ as die "kanoniese" representant (of verteenwoordiger) van $[X]$ beskou word. Ter illustrasie kan die leser die vier waarheidsgetrou–ekwivalente sinne $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow p$, $p \longleftrightarrow q$ en T (in Figuur 14, Afdeling 3.1) beskou. Die positiewe afsluitings sowel as die negatiewe afsluitings van die vier sinne is T. Dus, vir hierdie vier sinne is $\Delta X \wedge \nabla X \equiv T$ (of ΔX

$\cap \nabla X) = W$) en is T die "kanoniese" verteenwoordiger van die ekwivalensieklas (modulo $\Leftrightarrow$) van $p \rightarrow q$, $q \rightarrow p$, $p \leftrightarrow q$ en T.

Definieer nou (soos voorheen)

$$g : (\mathscr{P}W / \Leftrightarrow, \Leftarrow) \rightarrow (\mathcal{P}, \supseteq) \times (\mathcal{N}, \subseteq);\; g([X]) = (\Delta X, \nabla X)$$

en

$$g' : \mathcal{P} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathscr{P}W / \Leftrightarrow;\; g'((P, N)) = [P \cap N].$$

Dat g 'n injeksie (d.i. 'n een–eenduidige funksie) is, is reeds bespreek. Dit is ook duidelik dat g′ 'n funksie is. g′ is egter ook 'n surjeksie (d.i. 'n op–funksie): vir elke $X \in \mathscr{P}W$ (of $[X] \in \mathscr{P}W / \Leftrightarrow$) bestaan daar 'n $(P, N) \in \mathcal{P} \times \mathcal{N}$ só dat $P = \Delta X$ en $N = \nabla X$ en dus, $g'((P, N)) = [P \cap N] = [X]$. Verder geld dat $(g' \circ g)([X]) = (g'((\Delta X, \nabla X)) = [X]$ en dus is $g \circ g' = id_{\mathscr{P}W / \Leftrightarrow}$.

Die epimorfie g′ is dus 'n retraksie, die monomorfie g 'n koretraksie en $\mathscr{P}W / \Leftrightarrow$ 'n retrak van $\mathcal{P} \times \mathcal{N}$ in die kategorie van versamelings.

Die leser sal dalk nou wonder hoekom ons juis in die kategorie van versamelings werk en nie in die kategorie van parsiële ordeninge nie. Die rede hiervoor: g is wel orde–behoudend, maar g′ nie. Ter illustrasie van hierdie punt versoek ons die leser om weer terug te blaai na Figuur 19. Selfs vir hierdie deeltralie van $\mathcal{P} \times \mathcal{N}$, voortgebring deur $g[(\mathscr{P}W - \{\phi\}) / \Leftrightarrow]$ is g′ nie orde–behoudend nie: $(p, \neg p \vee \neg q) \leq (p \wedge q, \neg p \vee \neg q)$ (in $\mathcal{P} \times \mathcal{N}$), maar $g'((p, \neg p \vee \neg q)) \equiv p \wedge \neg q \not\Leftarrow F \equiv g'((p \wedge q, \neg p \vee \neg q))$.

3.4 DIE PARSIËLE WAARHEIDSGETROUHEIDORDENING

Soos reeds bespreek, is die relasie $\Leftarrow$ nie antisimmetries op (logies ekwivalente klasse van) sinne nie. Een manier om hierdie probleem te oorbrug, is om ekwivalensieklasse onder die relasie $\Leftrightarrow$ te vorm, d.i. om die preordening $\Leftarrow$ tot 'n parsiële ordening "saam te trek" (soos bespreek in Afdeling 3.3). Hierdie proses het egter 'n *growwer* relasie tot gevolg. Ons wil nou aantoon dat dit moontlik is om 'n parsiële ordening te verkry deur die preordening $\Leftarrow$ op 'n natuurlike manier te *verfyn*. Vir hierdie verfyningsproses word die volgende begrippe benodig:

3.4.1 **Definisies** Vir alle $X \subseteq W$:

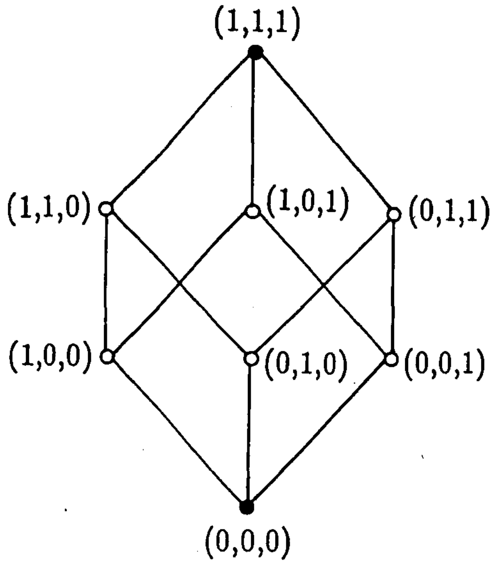
(1) $\diamond X := \vartriangle X \cap \triangledown X$, die *konvekse inhoud van* X;

(2) $\sigma X := (W - \diamond X) \cup X$, die *nie–konvekse inhoud van* X.

Die konvekse inhoud, $\diamond X$, van 'n versameling moontlike wêrelde X, is maar net die versameling $\{w \in W \mid (\exists x, x' \in X)(x \leq w \leq x')$ — vandaar die benaming "die konvekse inhoud van X". As X 'n konfigurasie is met "gate" tussen sy elemente, vul $\diamond X$ hierdie "gate". Ter illustrasie hiervan beskou ons die konfigurasie $X = \{(1,1,1), (0,0,0)\}$ — voorgestel deur Figuur 20, in die taal voortgebring deur die drie veranderlikes, *h*, *r* en *w*. Omdat $r = (1,1,1)$ en $r^* = (0,0,0)$ elemente van X is, is $\diamond X = W$ — al die "gate" (in hierdie geval, al die oningekleurde posisies) tussen r en r^* word dus ook ingekleur.

As X die teorie is wat met die konfigurasie X ooreenkom, d.i. Mod(X) = X, dan dui ons met $\diamond X$ en σX die teorieë aan wat onderskeidelik met $\diamond X$ en σX ooreenkom. In die eindige geval geld dus $\diamond X = \diamond(\text{Mod } X) = \text{Mod}(\diamond X)$ en $\sigma X = \sigma(\text{Mod } X) = \text{Mod}(\sigma X)$. $\diamond$ is 'n afsluitingsoperasie op $\mathcal{P}W$, dus $X \subseteq \diamond X$. In die notasie van sinne beteken dit dat die konvekse inhoud $\diamond X \equiv \vartriangle X \wedge \triangledown X$ logies afleibaar is uit X, d.i. $X \vdash \diamond X$. In Tabel 2 (Afdeling 3.1) word die konvekse inhoude $\diamond X$ en die nie–konvekse inhoude σX van die sestien logies nie–ekwivalente sinne X van die taal voortgebring deur $\{p, q\}$ gelys. Uit Tabel 2 is dit dan ook duidelik dat σ nie 'n afsluitingsoperasie op $\mathcal{P}W$ is nie: $F \vdash p \rightarrow q$, maar $\sigma(F) \nvdash \sigma(p \rightarrow q)$.

Op hierdie stadium is dit gepas om die leser te verwys na Oddie se artikel "Truthlikeness and the convexity of propositions" (in Kuipers [1987], pp. 197 – 216).



Figuur 20

Sommige van die idees wat deur Oddie bespreek (en uiteindelik as ontoereikend gekritiseer) word, toon sekere ooreenkomste met van ons begrippe. 'n Sprekende voorbeeld hiervan is die begrip "konvekse proposisie" ("convex proposition") van Goldstick en O'Neill [1988]. Die rol van hierdie begrip in die definiëring van waarheidsgetrouheid word ook deur Oddie vir die proposisionele geval ondersoek.

Ons noem 'n teorie (sin of proposisie) X konveks indien die volgende geld: as x, $x' \in \mathrm{Mod}(X)$ en $x \leq w \leq x'$ in (W, ≤), dan $w \in \mathrm{Mod}(X)$. Ons begrip van konveksiteit berus dus op die idee van *tussenliggend in die ordening van die Boole–algebra* van moontlike wêrelde. Hulle definieer, soortgelyk, 'n konvekse proposisie as 'n proposisie wat alle tussenliggende wêrelde insluit, maar 'n ander betekenis word aan "tussenliggend" geheg. Vir hulle lê 'n wêreld w *tussen* wêrelde x en x' as daar *geen korter pad* as deur w van x na x' bestaan nie (waar die "lengte" van 'n "pad" tussen twee wêrelde x, $x' \in 2^n$ bepaal word deur die aantal "aangrensende" wêrelde (d.i. wêrelde wat in net een van die n posisies van mekaar verskil) tussen x en x'). Vir elke twee wêrelde, x en x', wat vergelykbaar in (W, ≤) is, is daar egter altyd ten minste een kortpad wat x en x' verbind; en enige w wat tussen x en x' in (W, ≤) is, lê op só 'n kortpad. Die omgekeerde is nie altyd waar nie — enige twee wêrelde word immers deur 'n kortpad verbind. Dus, minder versamelings is konveks in terme van hulle beskrywing as in terme van ons beskrywing, wat daarop neerkom dat ons konvekse afsluiting $\diamond X$ in die algemeen 'n kleiner versameling van moontlike wêrelde as Oddie se "konvekse omhulling" van X is. Anders gestel: vir 'n teorie X, is die konvekse inhoud $\diamond X$ logies sterker as die "konvekse inhoud" (d.i. die konjunksie van alle konvekse sinne afleibaar uit X — soos beskryf deur Oddie) van X.

Dat ons beskrywing van konveksiteit verkieslik bo dié van Oddie mag wees, kan deur die volgende voorbeeld geïllustreer word: As beide p en q waar is, dan behoort $p \vee q$ as meer waarheidsgetrou as $\neg p \vee \neg q$ beskou te word. Dit sal wel die geval wees volgens ons beskrywing (sien Figuur 21), maar nie volgens Oddie se beskrywing nie — soos uitgewys deur Oddie self ([1987], p. 200).

In baie gevalle is $\diamond X \equiv X$, byvoorbeeld vir die sin $X = (h \wedge r) \leftrightarrow \neg w$ (sien Afdeling **2.2**) is $\vartriangle X \equiv \neg w \longrightarrow (h \wedge r)$, $\triangledown X \equiv (h \wedge r) \longrightarrow \neg w$ en dus, $\diamond X \equiv X$. As $X \equiv \diamond X$, is ♂$X \equiv T$ (d.i. ♂$\mathbf{X} = \mathbf{W}$). Aan die ander kant, as $X \not\equiv \diamond X$, is ♂$X \equiv \neg\diamond X \vee X \equiv \diamond X \longrightarrow X$ die logies swakste sin wat deur konjunksie by $\diamond X$ gevoeg kan word om 'n sin logies ekwivalent aan X te verkry:

3.4.2 **Stelling** Vir alle $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{W}$:

$\mathbf{X} = \diamond\mathbf{X} \cap$ ♂$\mathbf{X}$, d.i.

$X \equiv \diamond X \wedge$ ♂X.

Gegee **X**, en dus $\diamond\mathbf{X}$, is ♂**X** die grootste versameling moontlike wêrelde wat die vergelyking bevredig. Soortgelyk, is ♂X die logies swakste sin wat die ekwivalensie bevredig.

Bewys

Uit die definisies van $\diamond$X en ♂X is dit duidelik dat X $\equiv$ $\diamond$X $\wedge$ ♂X.

Veronderstel X $\equiv$ $\diamond$X $\wedge$ Y (Te bewys: Y $\models$ $\diamond$X $\longrightarrow$ X, d.i. as vir v $\in$ **W**, v(Y) = 1, dan moet v($\diamond$X $\longrightarrow$ X) = 1.) Neem aan v(Y) = 1 en v($\diamond$X $\longrightarrow$ X) = 0, d.i. v($\diamond$X) = 1, v(X) = 0. Dit is egter strydig met X $\equiv$ $\diamond$X $\wedge$ Y. Dus, Y $\models$ $\diamond$X $\longrightarrow$ X, wat bewys dat ♂X die logies swakste sin is waarvoor X $\equiv$ $\diamond$X $\wedge$ ♂X. □

X is dus altyd die konjunksie van sy konvekse inhoud $\diamond$X en sy nie–konvekse inhoud ♂X. Omdat X $\models$ $\diamond$X, of in terme van versamelings van moontlike wêrelde, **X** $\subseteq$ $\diamond$**X**, het $\diamond$X minder logiese krag of inhoud as X. ♂X herstel dus die verlies aan logiese inhoud op die mees ekonomiese wyse. Anders gestel: ♂**X** = (**W** – $\diamond$**X**) $\cup$ **X** beskryf benewens die elemente van **X** dié elemente van **W** wat nie modelle in $\diamond$**X** is nie, dit wil sê **W** – ♂**X** beskryf die elemente van $\diamond$**X** – **X**, d.i. die "gate" in **X** wat "opgevul" word deur $\diamond$**X**. As $\diamond$X $\equiv$ T, d.i. $\diamond$X het geen logiese inhoud nie, is natuurlik ♂X $\equiv$ X. Byvoorbeeld vir die sin X = $(h \wedge r \wedge w) \vee (\neg h \wedge \neg r \wedge \neg w)$ — geïllustreer deur Figuur 20, is $\diamond$X $\equiv$ T en ♂X $\equiv$ X; $\neg$♂X $\equiv$ $(\neg h \vee \neg r \vee \neg w) \wedge (h \vee r \vee w)$ verteenwoordig die "gate" in X wat "opgevul" word deur $\diamond$X. In die geval van twee veranderlikes, is die sinne X waarvoor $\diamond$X $\equiv$ T presies die vier waarheidsgetrou–ekwivalente sinne $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow p$, p $\longleftrightarrow$ q en T (vergelyk Tabel 2). Soos die leser teen hierdie tyd seker kon insien, is $\diamond$X $\equiv$ T as en slegs as r $\in$ **X** en r* $\in$ **X**.

In die bewys van 3.4.2 het ons op 'n stadium aangeneem v($\diamond$X $\longrightarrow$ X) = 0, vir v $\in$ **W**. Ons sal nou bewys dat dié v nooit die reële wêreld kan wees nie. Anders gestel, r $\in$ ♂**X** vir alle sinne X:

3.4.3 Stelling Vir enige sin X is

♂X (d.i. $\diamond$X $\longrightarrow$ X) altyd waar.

Bewys

Daar is twee moontlikhede:

(1) $\nabla X \not\equiv T$: Dit beteken $\nabla X \neq W$ of $r \notin \nabla X$ (en dus ook $r \notin X$). Dus, $r \notin \diamond X = \Delta X \cap \nabla X$, wat impliseer $r \in (W - \diamond X) \cup X = ♂X$. Gevolglik is $♂X$ waar.

(2) $\nabla X \equiv T$: Omdat $r \in X$, is $X \equiv \diamond X \wedge ♂X$ waar. Dus, $♂X$ is waar. □

Soos reeds betoog in die vorige afdeling, is vir alle $X \subseteq W$, $\Delta X \cap \nabla X \Leftrightarrow X$; en is $\Delta X \cap \nabla X = \diamond X$ die grootste versameling wêrelde met dié eienskap, d.i. $Y \Leftrightarrow X \Rightarrow \Delta Y \cap \nabla Y = \Delta X \cap \nabla X \Rightarrow Y \subseteq \diamond X$. (Ons kan ook bewys $\diamond X = \diamond Y \Rightarrow X \Leftrightarrow Y$: $\diamond X = \diamond Y \Rightarrow X \subseteq \diamond Y$ en $Y \subseteq \diamond X \Rightarrow X \Leftrightarrow Y$.) Vir elke $X \subseteq W$ geld dus $\nabla X \Leftarrow X \Leftrightarrow \diamond X \Leftarrow \Delta X$. As X positief is en $X \neq \phi$ (d.i. X is waar), is natuurlik $\nabla X = W$ en $\diamond X = \Delta X = X$; en as X negatief is en $X \neq \phi$, is $\Delta X = W$ en $\diamond X = \nabla X = X$. (Vir $X = \phi$ geld natuurlik $X = \Delta X = \nabla X = \diamond X$.)

Ons het bewys dat die preordening $\Leftarrow$ nie onderskei tussen sinne met dieselfde konvekse inhoude nie. Om hierdie saak reg te stel verfyn ons die preordening $\Leftarrow$ tot die parsiële ordening $\Lleftarrow$:

3.4.4 **Definisie** Vir alle $X, Y \subseteq W$:

$$
\begin{aligned}
X \Lleftarrow Y: \quad &\Leftrightarrow \quad X \Leftarrow Y \text{ en} \\
&\qquad \text{as ook } Y \Leftarrow X, \text{ dan } ♂X \supseteq ♂Y \\
(&\Leftrightarrow \quad X \Leftarrow Y \text{ en} \\
&\qquad \text{as } \diamond X = \diamond Y, \text{ dan } ♂X \supseteq ♂Y),
\end{aligned}
$$

in welke geval ons sê dat X *minder (of net so) waarheidsgetrou as* Y *in die parsiële waarheidsgetrouheidordening is.*

Die verfyning van die preordening $\Leftarrow$ tot die parsiële ordening $\boldsymbol{\Leftarrow}$ verloop dus soos volg: as $X \not\equiv Y$, maar wel $\diamond X \equiv \diamond Y$, dan $\male X \not\equiv \male Y$. (Dit volg uit die feit dat $X \equiv \diamond X \wedge \male X$ en $Y \equiv \diamond Y \wedge \male Y$.) Die nie–konvekse inhoude onderskei dus logies nie-ekwivalente sinne met dieselfde konvekse inhoude. Omdat nie–konvekse inhoude altyd waar is, is dit logies om die *logies sterkste* van die nie–konvekse inhoude as die mees waarheidsgetroue te beskou. As $\diamond X \equiv \diamond Y$ (d.i. $X \Leftrightarrow Y$) kan ons dan ook $X \boldsymbol{\Leftarrow} Y$ "eenvoudiger" definieer:

3.4.5 **Stelling** As $\diamond X \equiv \diamond Y$, dan

$$X \boldsymbol{\Leftarrow} Y \Leftrightarrow \male Y \models \male X \Leftrightarrow Y \models X.$$

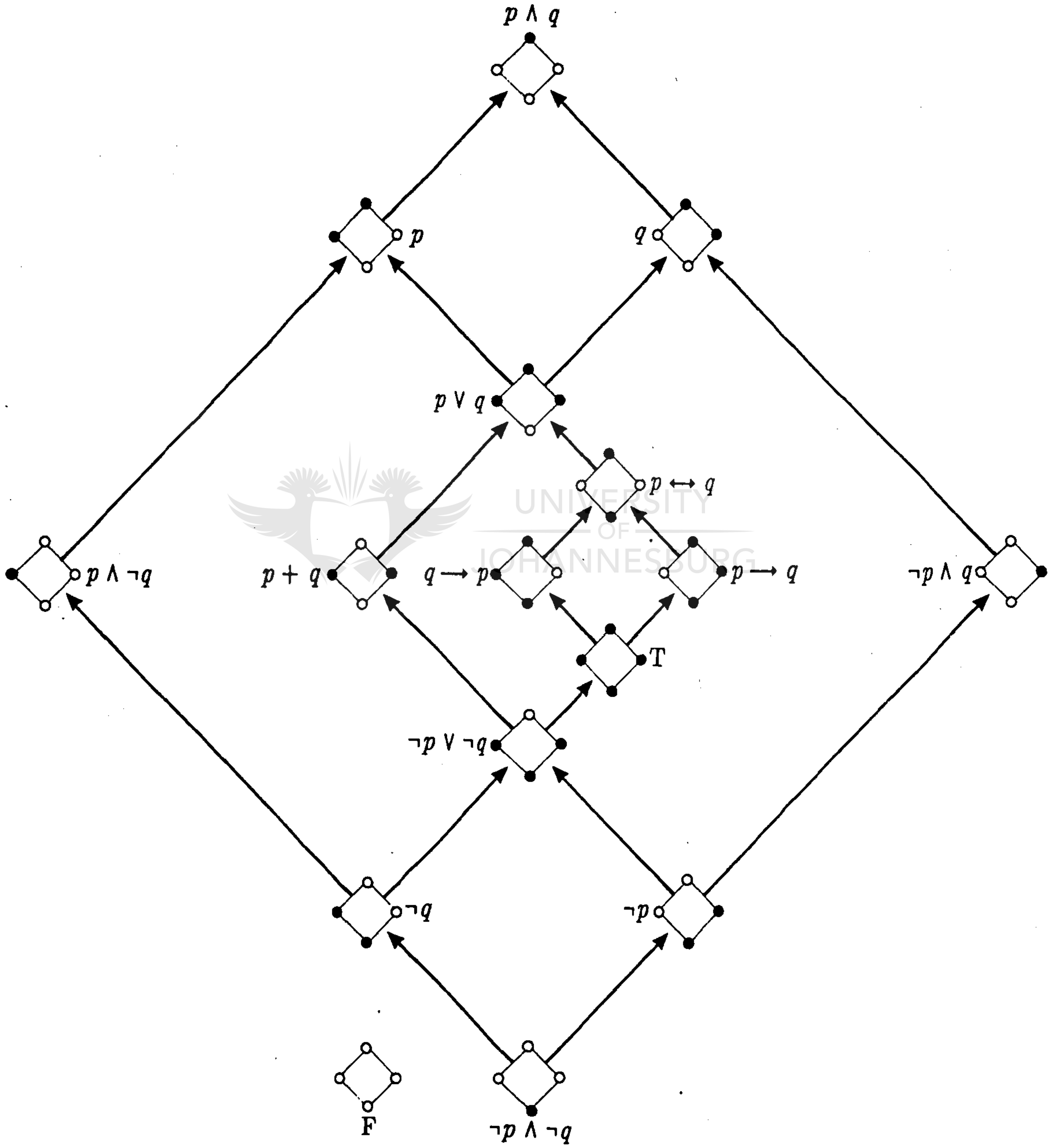
Bewys

Die eerste deel ($X \boldsymbol{\Leftarrow} Y \Leftrightarrow \male Y \models \male X$) van die ekwivalensies volg direk uit die definisie van $X \boldsymbol{\Leftarrow} Y$. Uit die feit dat $X \equiv \diamond X \wedge \male X$; $Y \equiv \diamond Y \wedge \male Y$, volg duidelik dat as $\diamond X \equiv \diamond Y$ en $\male Y \models \male X$, dan $Y \models X$. Vir die bewys van die omgekeerde gebruik ons 3.4.2: Veronderstel $\diamond X \equiv \diamond Y$ en $Y \models X$, d.i. $\diamond Y \wedge \male Y \models \diamond X \wedge \male X$ of $\diamond X \wedge \male Y \models X$. Omdat $\male X$ die logies swakste sin Z is waarvoor $\diamond X \wedge Z \models X$, moet $\male Y \models \male X$. □

Figuur 21 illustreer die parsiële waarheidsgetrouheidordening $\boldsymbol{\Leftarrow}$ van die sestien logies nie–ekwivalente teorieë in die taal voortgebring deur $\{p, q\}$. In die diagram word die versameling modelle van elk van die sestien sinne ook aangedui. Die vier sinne, $p \leftrightarrow q$, $q \rightarrow p$, $p \rightarrow q$ en T, wat dieselfde konvekse inhoude het, is hier (soos beskryf in 3.4.5) georden volgens omgekeerde (logiese) afleibaarheid. Ons wys die leser daarop dat $\boldsymbol{\Leftarrow}$ (net soos $\Leftarrow$) 'n uitbreiding van die produkordening $\leq$ op **W** is, d.i.

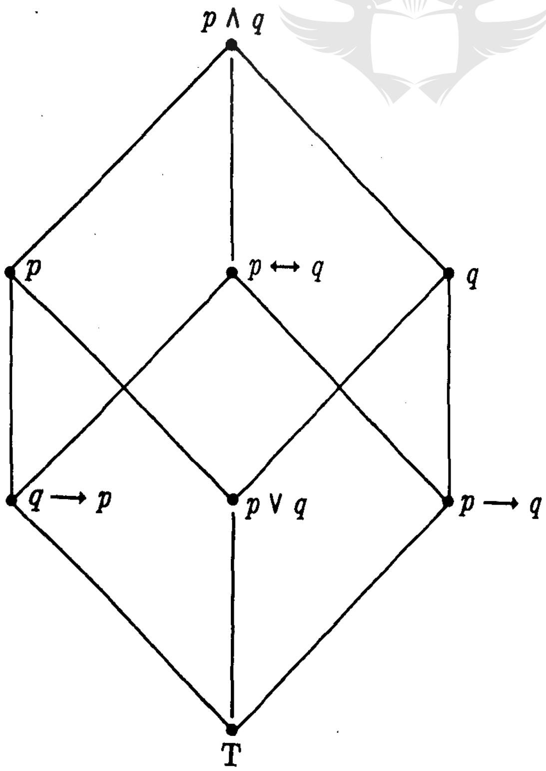
$$x \leq y \Leftrightarrow \{x\} \Leftarrow \{y\} \Leftrightarrow \{x\} \boldsymbol{\Leftarrow} \{y\}.$$

Vir alle waar positiewe sinne geld (volgens Stelling 3.1.4) X $\Leftarrow$ Y as en slegs as Y $\vdash$ X. Ons kan hierdie ekwivalensie uitbrei tot: vir alle waar positiewe sinne is

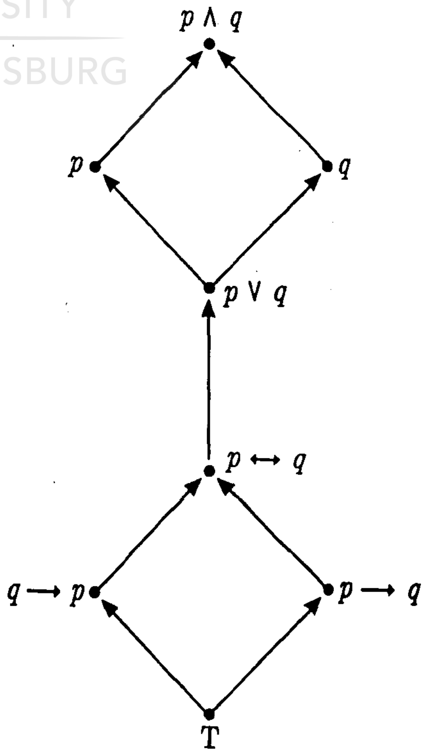


Figuur 21

X $\Leftarrow$ Y as en slegs as X $\Leftarrow$ Y as en slegs as Y $\models$ X (vir súlke sinne is X $\equiv \Delta$X, Y $\equiv \Delta$Y, ∇X $\equiv \nabla$Y $\equiv$ T, wat beteken $\diamond$X $\equiv \diamond$Y as en slegs as X $\equiv$ Y). In Afdeling **3.1** het ons bewys dat vir die groter versameling van alle waar sinne dit slegs die geval is dat Y $\models$ X $\Longrightarrow$ X $\Leftarrow$ Y en nie dat X $\Leftarrow$ Y $\Longrightarrow$ Y $\models$ X. Die leser mag dalk nou wonder of dit nie nou met die strenger ordening $\Leftarrow$ geld dat X $\Leftarrow$ Y as en slegs as Y $\models$ X. Die antwoord is weer eens: NEE. Figuur 22 illustreer die omgekeerde van die afleibaarheidsordening en Figuur 23 die parsiële waarheidsgetrouheidordening van die agt waar sinne van ons illustratiewe taal. Meer waar teorieë is vergelykbaar onder $\Leftarrow$ as onder $\models$, byvoorbeeld in Figuur 23 het ons $p \leftrightarrow q \Leftarrow p \vee q$, maar hierdie twee sinne is onvergelykbaar in Figuur 22 met betrekking tot $\models$. Natuurlik, as beide X en Y waar is (∇X = ∇Y = W) en Y $\models$ X (Y $\subseteq$ X, dus ΔY $\subseteq \Delta$X), dan X $\Leftarrow$ Y (en X $\Leftarrow$ Y).



Figuur 22



Figuur 23

Ons sluit hierdie afdeling (en hoofstuk) af deur aan te toon dat die afsluitingsoperasies $\vartriangle$ en $\triangledown$ al die formele eienskappe van die modale operator "dit is moontlik dat ..." — soos geaksiomatiseer in die modale sisteem S_4, het.

Modale logika kan kortliks beskryf word as die logika van "moontlikheid" en "noodsaaklikheid" omdat modale logika primêr die studie van sinne van die vorm "dit is moontlik dat X" en "dit is noodsaaklik dat X", is. Om die proposisielogika tot 'n modale logika uit te brei, word die taal van die proposisielogika met twee ekstra simbole toegerus: $\circ$: "dit is moontlik dat"; $\square$: "dit is noodsaaklik dat", wat as unêre operatore op die sinne van die taal optree. Die aksiomas en deduksiereëls van die proposisielogika word dan uitgebrei om dié nuwe simbole ook te kan hanteer — ons sal sulke uitbreidings (van proposisielogika na modale logika) *modale sisteme* noem. Daar bestaan 'n verskeidenheid van modale sisteme waarvan die bekendste die sisteme S_1 tot S_5 (met 'n toename in deduktiewe krag vanaf S_1 tot S_5) van C.I. Lewis is. (Sien Hughes en Cresswell [1968]; Kneale & Kneale [1966]; en Von Wright [1957].)

Die modale operatore $\circ$ en $\square$ is wedersyds definieerbaar in terme van die ander een:

$$\circ X \leftrightarrow \neg\square\neg X; \text{ en}$$

$$\square X \leftrightarrow \neg\circ\neg X.$$

'n Modale sisteem kan dus óf in terme van $\circ$, óf in terme van $\square$ beskryf word. 'n $\circ$-gebaseerde modale sisteem deduktief-ekwivalent aan Lewis se S_4 is dié van Von Wright se M', wat soos volg daar uitsien (in Hughes & Cresswell [1968]):

Aksiomas

Die aksiomas van die proposisielogika:

(A1) $(p \vee p) \rightarrow p$;

(A2) $q \rightarrow (p \vee q)$;

(A3) $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$;

(A4) $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]$;

asook:

(A5) $p \longrightarrow \circ p$;

(A6) $\circ(p \vee q) \leftrightarrow (\circ p \vee \circ q)$;

(A7) $\circ\circ p \longrightarrow \circ p$;

waar p, q en r atomiese proposisiesimbole is.

Deduksiereëls

Die deduksiereëls van die proposisielogika:

(D1) Reël van substitusie;

(D2) Modus Ponens;

asook:

(D3) $\vdash X \Longrightarrow \vdash (\neg\circ\neg X)$;

(D4) $\vdash (X \leftrightarrow Y) \Longrightarrow \vdash (\circ X \leftrightarrow \circ Y)$,

waar X en Y proposisionele sinne is en $\vdash$ X as "X is afleibaar" gelees moet word. In die lig van die deduktiewe–ekwivalensie van $\mathcal{S}_4$ en $\mathcal{M}'$, sal ons na $\mathcal{M}'$ as $\mathcal{S}_4$ verwys.

Ons sal nou bewys dat as ons die modale operator $\circ$ met die proposisionele operator $\vartriangle$ (of $\triangledown$) vervang, al die aksiomas van $\mathcal{S}_4$ (en dus ook van $\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_3$) toutologieë van die klassieke proposisielogika is; en dat al die deduksiereëls van $\mathcal{S}_4$ (en dus van $\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_3$) toutologieë behou.

3.4.6 **Stelling** Vir $\circ = \vartriangle$ (of $\triangledown$):

(1) is al die aksiomas van $\mathcal{S}_4$ toutologieë;

(2) behou al die deduksiereëls van $\mathcal{S}_4$ toutologieë.

Bewys

Ons hoef 3.4.6 (1) natuurlik slegs te bewys vir (A5) – (A7); en 3.4.6 (2) vir (D3) en

(D4) — die res van die aksiomas van S_4 is vanselfsprekend toutologieë van die proposisielogika; en die res van die deduksiereëls behou vanselfsprekend toutologieë.

Laat p en q (volgens die "reël van substitusie") enige proposisionele sinne wees.

(1) Uit die feit dat $\vartriangle$ en $\triangledown$ afsluitingsoperasies is, volg dat vir $\circ = \vartriangle$ of $\circ = \triangledown$, $\mathrm{Mod}(p \longrightarrow \circ p) = \mathbf{W}$ en $\mathrm{Mod}(\circ\circ p \longrightarrow \circ p) = \mathbf{W}$, wat bewys dat (A5) en (A7) toutologieë is. Vir $\circ = \vartriangle$ of $\triangledown$ het ons bewys dat vir enige **X** en **Y**, $\circ(\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}) = \circ\mathbf{X} \cup \circ\mathbf{Y}$ (sien Afdeling 2.1 — eienskap (4) van die afsluitingsoperasie $\vartriangle : \mathscr{P}\mathbf{W} \longrightarrow \mathscr{P}\mathbf{W}$). Hieruit volg dat $\mathrm{Mod}[\circ(p \vee q)] = \mathrm{Mod}[\circ p \vee \circ q]$ en dus dat $\mathrm{Mod}[\circ(p \vee q) \longleftrightarrow (\circ p \vee \circ q)] = \mathbf{W}$, sodat (A6) 'n toutologie is.

(2) (D3) behou toutologieë, want as X 'n toutologie is, is $X \equiv T$ (d.i. $\mathbf{X} = \mathbf{W}$), $\neg X \equiv F$, $\circ\neg X \equiv F$, en dus $\neg\circ\neg X \equiv T$. Ook (D4) behou toutologieë: as $X \longleftrightarrow Y$ 'n toutologie is, is $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ en dus $\circ\mathbf{X} = \circ\mathbf{Y}$ — gevolglik is $\circ X \longleftrightarrow \circ Y$ ook 'n toutologie. □

Die twee keuses, $\circ = \vartriangle$ of $\circ = \triangledown$, lewer dus twee interpretasies van S_4 waaronder al die stellings wat uit S_4 afgelei kan word, toutologieë van die proposisielogika is. Ons kan dus die gevolgtrekking maak dat die formele stelsel S_4 meer begrippe as net die modale begrippe aksiomatiseer.

Die volgende (deduktief sterker) modale sisteem van Lewis is die sisteem S_5 en word verkry deur aksioma (A7) met aksioma (A8) te vervang:

(A8) $\circ\neg\circ p \longrightarrow \neg\circ p$.

Ons interpretasies van $\circ$ (as $\vartriangle$ of $\triangledown$) lewer vir (A8) egter nie toutologieë van die proposisielogika nie: As p byvoorbeeld (volgens (D1)) met enige *atomiese* sin, d.i. 'n *positiewe lettersin*, vervang word geld die volgende: $\mathrm{Mod}(\vartriangle\neg\vartriangle p \longrightarrow \neg\vartriangle p) = \mathrm{Mod}(\vartriangle\neg p \longrightarrow \neg p)$ (want $\vartriangle p \equiv p$) $= \mathrm{Mod}(T \longrightarrow \neg p) = \mathrm{Mod}(\neg p) \neq \mathbf{W}$ — dus vir $\circ = \vartriangle$ is (A8) nie 'n toutologie nie. Soortgelyk kan ons aantoon dat vir o = v (A8) ook nie 'n toutologie is nie: vervang p met enige ***negatiewe lettersin***.

——oOo——

HOOFSTUK 4

DATAGETROUHEID AS ORDENINGSBEGINSEL VIR TEORIEË

There could be no fairer destiny for any ... theory than that it should point the way to a more comprehensive theory in which it lives on, as a limiting case.

— ALBERT EINSTEIN (in Popper [1969], p. 32).

In die vorige hoofstuk is 'n parsiële ordening, $\Leftarrow$, as 'n model van waarheidsgetrouheid gedefinieer. Watter model van waarheidsgetrouheid ook al vir die ordening van teorieë gebruik word; daar is altyd 'n fundamentele probleem: om te kan besluit of een teorie nader aan die waarheid as 'n ander teorie is, is *volledige kennis oor die waarheid* nodig — in welke geval dit half verspot is om enige teorie behalwe die perfekte een te oorweeg. Volledige kennis oor die waarheid is egter 'n geïdealiseerde geval — in plaas van een reële wêreld, sal ons beskikbare kennis vir ons in die algemeen 'n *versameling moontlike wêrelde* beskryf. Dit beteken dat ons in die algemeen nie so gelukkig (soos in die vorige hoofstuk) is om presies te weet watter moontlike wêreld die waarheid verteenwoordig nie — ons weet meer dikwels net dat die reële wêreld een van 'n versameling moontlike wêrelde moet wees.

Die doel met hierdie hoofstuk is dan die definiëring van ordeninge op **W** en $\mathscr{P}$**W** waarvolgens alle moontlike wêrelde en alle moontlike konfigurasies (d.i. teorieë) in die lig van sekere inligting oor die waarheid vergelyk kan word. Vir hierdie hoofstuk kan die inligting oor die waarheid *enige* konfigurasie wees, wat ons die *data* of informasie sal noem en met **D** sal aandui. Alhoewel ons aanneem dat die reële wêreld — die spesifieke wêreld wat die waarheid beskryf, altyd een van die elemente van D is, sal ons eerder van die *datagetrouheid* (of informasiegetrouheid) as die waarheidsgetrouheid van teorieë praat.

Die taal waarin ons werk is weer eens die proposisietaal voortgebring deur $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ met behulp van die konnektiewe $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$, $\leftrightarrow$ en $+$. In Afdeling **4.1** definieer ons vier ordeninge op **W** en in terme daarvan twee leksikografiese ordeninge op $\mathscr{P}$W — 'n ordening wat met 'n *dapper* benadering en 'n ordening wat met 'n *versigtige* benadering tot datagetrouheid geassosieer kan word. Die twee ordeninge se eienskappe met betrekking tot informatiwiteit en betroubaarheid word bespreek en ons toon onder andere in Afdeling 4.2 aan dat vir D = W en D = ϕ, die twee ordeninge maar net dié van omgekeerde logiese afleibaarheid en logiese afleibaarheid is. Behalwe vir die twee leksikografiese ordeninge op $\mathscr{P}$W, definieer ons ook twee produkordeninge — waarvan een 'n veralgemening van die parsiële ordening $\Leftarrow$ is.

In Afdeling 4.2 propageer ons ook die proposisionele logika as 'n model vir onsekerheid in digitale inligtingsoordrag en vind daarin 'n mooi toepassing vir ons beskrywing van datagetrouheid.

4.1 'N DAPPER EN 'N VERSIGTIGE BENADERING TOT DATAGETROUHEID

Beskou 'n injeksie f van A(+) in A(L) wat vir elke $p_i \in$ A(+), óf op p_i óf op $\neg p_i$ afbeeld. Ons kan f : A(+) $\longrightarrow$ A(L) dan uniek uitbrei tot 'n bijeksie $\hat{f}$: A(L) $\longrightarrow$ A(L), d.i. $\hat{f}\restriction$A(+) = f, met $\hat{f}(\neg p_i)$ ekwivalent aan $\neg f(p_i)$. Omdat alle sinne van die taal deur die lettersinne, $(\pm)p_i$, met behulp van konjunksie en disjunksie voortgebring word, induseer elke bijeksie $\hat{f}$: A(L) $\longrightarrow$ A(L) 'n unieke outomorfie f^* van die Boole-algebra 2^{2^n} — die Boole–algebra van alle konfigurasies of alle logies nie–ekwivalente sinne van die taal. Onder die elemente van die Boole–algebra 2^{2^n} kom natuurlik die 2n lettersinne voor; en wat f^* met die lettersinne doen, bepaal volledig wat f^* met die res van die sinne doen en $f^* \upharpoonright A(L) = \hat{f}$. Ons sal daarom al sulke geïnduseerde outomorfieë van 2^{2^n}, *letter–outomorfieë* (of kortweg: L–*outomorfieë*) noem.

Elke L–outomorfie f^* word geïnduseer deur 'n bijeksie $\hat{f} : A(L) \longrightarrow A(L)$, wat op sy beurt weer 'n uitbreiding van 'n injeksie $f : A(+) \longrightarrow A(L)$ is. Só 'n injeksie kan ook geskryf word as 'n n–tal $(f_1,f_2,...,f_n)$ van nulle en ene, waar $f_i = 1$ as $f(p_i) = p_i$ (d.i. $\hat{f}(\neg p_i) = \neg p_i$) en $f_i = 0$ as $f(p_i) = \neg p_i$ (d.i. $\hat{f}(\neg p_i) = p_i$). Só 'n n–tal gee al die nodige informasie omtrent die geïnduseerde L–outomorfie en ons spreek dan af om voortaan 'n L–outomorfie met $(f_1,f_2,...,f_n)$ aan te dui. In dié sin kan 'n L–outomorfie ook as 'n moontlike wêreld of valuasie beskou word. Skryf ons dus $(f_1,f_2,...,f_n)$ kan dit op 'n L–outomorfie of op 'n moontlike wêreld dui.

Onder die elemente van die Boole–algebra, 2^{2^n}, kom die 2^n diagramsinne voor, d.i. die sinne wat slegs een moontlike wêreld as model het. Súlke sinne is van die vorm $(\pm)p_1 \wedge (\pm)p_2 \wedge ... \wedge (\pm)p_n$. 'n L–outomorfie, $(f_1,f_2,...,f_n)$, toegepas op 'n diagramsin (of die ooreenkomstige moontlike wêreld) lewer weer 'n diagramsin: Neem byvoorbeeld $(f_1,f_2,f_3) = (0,1,0)$. Dit is die L–outomorfie wat p_1 op $\neg p_1$ afbeeld (en dus $\neg p_1$ op p_1); p_2 op p_2 (en dus $\neg p_2$ op $\neg p_2$); en p_3 op $\neg p_3$ (en dus $\neg p_3$ op p_3). Dus, $(f_1,f_2,f_3)(\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) = (0,1,0)(\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) = (0,1,0)(0,1,1) = p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3 = (1,1,0)$ — die L–outomorfie wat p_1 op p_1 ($\neg p_1$ op $\neg p_1$); p_2 op p_2 ($\neg p_2$ op $\neg p_2$); en p_3 op $\neg p_3$ ($\neg p_3$ op p_3) afbeeld.

Vir die diagramsin $p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n$ (d.i. die diagram $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ of valuasie $(1,1,...,1)$) geld natuurlik: $(f_1,f_2,...,f_n)(1,1,...,1) = (f_1,f_2,...,f_n)$ — byvoorbeeld: $(1,0,1)(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) = (1,0,1)(1,1,1) = (1,0,1)$. Dit is ook duidelik dat $(f_1,f_2,...,f_n) = (1,1,...,1)$ toegepas op enige diagramsin maar net weer die diagramsin lewer — byvoorbeeld: $(1,1,1)(p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) = p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3$; en dat $(f_1,f_2,...,f_n) = (0,0,...,0)$ toegepas op enige diagramsin (of sy ooreenkomstige valuasie), net mooi die ontkenning van elke lettersin in die diagramsin tot gevolg het: $(0,0,0)(p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) = (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$. As 'n L–outomorfie op homself toegepas word lewer dit natuurlik altyd die L–outomorfie $(1,1,...,1)$ — byvoorbeeld: $(0,1,0)(0,1,0) = (1,1,1)$.

As $x, y \in \mathbf{W}$, bestaan daar 'n unieke L–outomorfie, h, wat op x toegepas, vir y sal lewer. Ons sal hierdie unieke h sommer met $x \longmapsto y$ aandui, byvoorbeeld vir $x = (0,1,0)$, $y = (1,0,0)$, is $x \longmapsto y = (0,0,1)$. Dit is duidelik dat $x \longmapsto y = y \longmapsto x$. As $[(f_1,f_2,\ldots,f_n) \longmapsto (g_1,g_2,\ldots,g_n)] = (h_1,h_2,\ldots,h_n)$, beskryf h dus in watter posisies i, $f_i = g_i$ (d.i. as $h_i = 1$); en in watter posisies i, $f_i \neq g_i$ (d.i. as $h_i = 0$). Die L–outomorfie (of moontlike wêreld), h, meet dus hoe ver f en g van mekaar af lê, of hoe *versoenbaar*, of hoe *onversoenbaar* f en g is. Hoe groter die versameling $\{ i \mid h_i = 1\}$, hoe hoër is die graad van versoenbaarheid tussen f en g. Dit beteken dat f *totaal versoenbaar* met g is as en slegs as $f = g$, as en slegs as $(f \longmapsto g) = (1,1,\ldots,1)$; en dat f en g *totaal onversoenbaar* is as en slegs as f en g in elke posisie verskil, as en slegs as $(f \longmapsto g) = (0,0,\ldots,0)$. Die L–outomorfie $(f_1,f_2,\ldots,f_n) \longmapsto (1,1,\ldots,1)$ is natuurlik $(f_1,f_2,\ldots,f_n)$. (Vergelyk ook Heidema & Labuschagne [1990].)

Ons wil nou die idee van grade van versoenbaarheid tussen twee moontlike wêrelde gebruik om die versoenbaarheid van 'n moontlike wêreld x met ons data te definieer, waar ons data enige konfigurasie **D**, of die ooreenkomstige teorie (sin) D is:

4.1.1 **Definisie** Vir enige $x \in \mathbf{W}$ definieer ons

$$\mathbf{D}(x) := \{x \longmapsto d \mid d \in \mathbf{D}\}$$

as die *graad van versoenbaarheid van* x *met die data* **D**.

Dat **D**(x), of die ooreenkomstige teorie D(x), die mate van versoenbaarheid van x met die data meet, sal aan die hand van Tabel 3 verduidelik word: Beskou die taal voortgebring deur $\{p, q\}$ $(= \{p_1, p_2\})$. In hierdie taal is daar vier moontlike wêrelde (of L–outomorfieë) — soos in die boonste ry van die tabel. Vyf moontlike gevalle van **D** (of D) word beskou: $\mathbf{D} = \mathbf{W} = 2^2$ $(D \equiv T)$; $\mathbf{D} = \{(1,1), (1,0), (0,1)\}$ $(D \equiv p \vee q)$; $\mathbf{D} = \{(1,1), (1,0)\}$ $(D \equiv p)$; $\mathbf{D} = \{(1,1)\}$ $(D \equiv p \wedge q)$; en $\mathbf{D} = \phi$ $(D \equiv F)$.

D(x) en D(x)				
x D D	(1,1)	(1,0)	(0,1)	(0,0)
W T	**W** T	**W** T	**W** T	**W** T
{(1,1),(1,0),(0,1)} $p \vee q$	{(1,1),(1,0),(0,1)} $p \vee q$	{(1,0),(1,1),(0,0)} $q \longrightarrow p$	{(0,1),(0,0),(1,1)} $p \longrightarrow q$	{(0,0),(0,1),(1,0)} $\neg p \vee \neg q$
{(1,1), (1,0)} p	{(1,1), (1,0)} p	{(1,0), (1,1)} p	{(0,1), (0,0)} $\neg p$	{(0,0), (0,1)} $\neg p$
{(1,1)} $p \wedge q$	{(1,1)} $p \wedge q$	{(1,0)} $p \wedge \neg q$	{(0,1)} $\neg p \wedge q$	{(0,0)} $\neg p \wedge \neg q$
ϕ F	ϕ F	ϕ F	ϕ F	ϕ F

Tabel 3

Die inskrywings in die tabel gee D(x) (en die ooreenkomstige D(x)) vir die vier moontlike x'e en vyf moontlike keuses van **D** (of D).

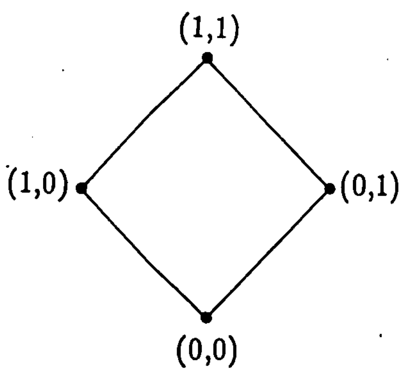
Dié vyf moontlike keuses van **D** hanteer, wat sy aantal elemente betref, al die moontlike keuses in hierdie taal en beskryf terselfdertyd gevalle van *geen* informasie tot *volledige* en selfs *teenstrydige* informasie oor die waarheid: As **D** = **W** het ons geen informasie nie, want sover ons kennis betref, weet ons net die reële wêreld moet een van die moontlike wêrelde wees, maar ons het nie die vaagste benul watter een dit nou eintlik moet wees nie. Vir $D \equiv p \vee q$ weet ons bietjie meer — die reële wêreld kan nie (0,0) wees nie, maar ons weet nog steeds nie of p of q die geval moet wees nie. In teenstelling hiermee, weet ons dat, indien $D \equiv p$, $\neg p$ definitief nie die geval is nie; oor q en $\neg q$ weet ons egter niks nie. Hierdie geval ($D \equiv p$) beskryf dus die geval van "halwe informasie": oor een van die twee proposisiesimbole het ons sekerheid. As $D \equiv p \wedge q$ het **D** slegs een element, wat volledige informasie oor die waarheid beteken — die geval soos bespreek in Hoofstuk **3**. $D = \phi$ verteenwoordig die geval van teenstrydige data $D \equiv F$ oor die waarheid. Ons sal later aantoon dat vir $D \equiv F$ en $D \equiv T$ die datagetrouheidordeninge wat ons gaan definieer, dieselfde diagramme lewer — seker nie 'n verstommende resultaat nie, want geen informasie is net so nutteloos as teenstrydige informasie.

As vir $x \in \mathbf{W}$, $D(x)$ die L–outomorfie $(1,1,\ldots,1)$ bevat, beteken dit dat x totaal versoenbaar met een moontlike wêreld in **D** is; en as $D(x)$ nie die L–outomorfie $(0,0,\ldots,0)$ bevat nie, beteken dit dat daar geen element van **D** is wat totaal in stryd, of totaal onversoenbaar, met x is nie. Anders gestel: $(1,1,\ldots,1) \in D(x)$ as en slegs as $x \in \mathbf{D}$ (of $(1,1,\ldots,1) \notin D(x)$ as en slegs as $x \in (\mathbf{W} - \mathbf{D})$ — die komplement van **D** in **W**); en $(0,0,\ldots,0) \in D(x)$ as en slegs as $x^* \in \mathbf{D}$, waar x^* die valuasie is wat presies in elke posisie die teenoorgestelde waardes van x het, d.i. $(x \longmapsto x^*) = (0,0,\ldots,0)$.

As $D \equiv F$ is $D(x) = \phi$, want daar is geen element in **D** om met 'n moontlike wêreld te vergelyk nie. Vir die geval $\mathbf{D} = \{(1,1)\}$ is dit duidelik dat (1,1) totaal versoenbaar; (1,0) en (0,1) "half" versoenbaar; en (0,0) totaal onversoenbaar met **D** is. As $\mathbf{D} = \{(1,1), (1,0)\}$ is $(1,1) \in D((1,1))$; $(1,1) \in D((1,0))$; $(0,0) \notin D((1,1))$; en $(0,0) \notin D((1,0))$ wat beteken dat (1,1) en (1,0) totaal versoenbaar met een (maar nie dieselfde) element van **D** is; en ook totaal onversoenbaar met geen element van **D** is. Die moontlike wêrelde (0,1) en (0,0) is egter totaal onversoenbaar met 'n element van $\mathbf{D} = \{(1,1), (1,0)\}$, want $(0,0) \in D((0,1))$ en $(0,0) \in D((0,0))$.

Vir $D = \{(1,1), (1,0), (0,1)\}$ is $W - D = \{(0,0)\}$ — (0,0) is dus die enigste moontlike wêreld wat nie totaal versoenbaar met 'n element van **D** is nie, terwyl (1,1) die enigste valuasie is wat nie totaal onversoenbaar met 'n element van **D** is nie: $(1,1)^* = (0,0) \notin D$. (Let wel: *nie totaal versoenbaar* beteken nie dieselfde as *totaal onversoenbaar* nie.) Vir die geval $D = W$ is daar natuurlik altyd een element $d \in D$ wat totaal versoenbaar met 'n moontlike wêreld x is, naamlik $d = x$; en een $d \in D$ wat totaal onversoenbaar met x is, naamlik $d = x^*$.

In Hoofstuk 2, Afdeling 2, is die positiewe afsluiting, ΔX, en negatiewe afsluiting, ∇X, van 'n konfigurasie $X \subseteq W$ (in die proposisielogika) in terme van die produkordening ($\leq$) op **W** beskou. Ons doen nou dieselfde vir die konfigurasie D(x) vir elke x, d.i. vir elke $x \in W$, neem ons $\Delta D(x)$ en $\nabla D(x)$ (of $\Delta D(x)$ en $\nabla D(x)$) van $D(x) \subseteq (W, \leq)$. Tabel 4 gee $\Delta D(x)$, en Tabel 5 $\nabla D(x)$ vir die vier moontlike x'e en vyf moontlike keuses vir D van Tabel 3 — waar $\Delta D(x)$ en $\nabla D(x)$ geneem word in terme van die produkordening, voorgestel deur Figuur 24.



Figuur 24

$\vartriangle D(x)$				
D \ x	(1,1)	(1,0)	(0,1)	(0,0)
T	T	T	T	T
$p \vee q$	$p \vee q$	T	T	T
p	p	p	T	T
$p \wedge q$	$p \wedge q$	p	q	T
F	F	F	F	F

Tabel 4

$\triangledown D(x)$				
D \ x	(1,1)	(1,0)	(0,1)	(0,0)
T	T	T	T	T
$p \vee q$	T	T	T	$\neg p \vee \neg q$
p	T	T	$\neg p$	$\neg p$
$p \wedge q$	T	$\neg q$	$\neg p$	$\neg p \wedge \neg q$
F	F	F	F	F

Tabel 5

In terme van $\Delta D(x)$ en $\nabla D(x)$ definieer ons nou vier preordeninge op **W** vir elke D:

4.1.2 **Definisies** Vir enige $x, y \in$ **W**:

(1) $x \le_{\bar{b}s} y :\quad \Leftrightarrow\quad \Delta D(y) \models \Delta D(x)$ en
as ook $\Delta D(x) \models \Delta D(y)$, dan $x = y$;

(2) $x \le_{\bar{b}w} y :\quad \Leftrightarrow\quad \nabla D(x) \models \nabla D(y)$;

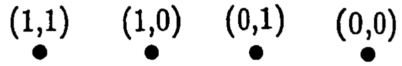
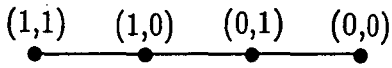
(3) $x \le_{\bar{c}s} y :\quad \Leftrightarrow\quad \nabla D(x) \models \nabla D(y)$ en
as ook $\nabla D(y) \models \nabla D(x)$, dan $x = y$;

(4) $x \le_{\bar{c}w} y :\quad \Leftrightarrow\quad \Delta D(y) \models \Delta D(x)$.

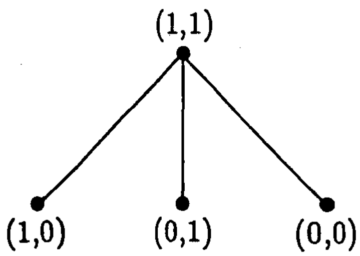
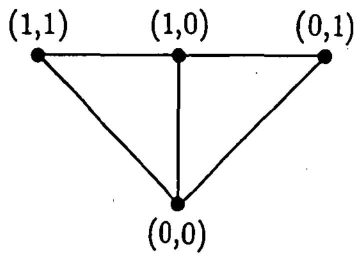
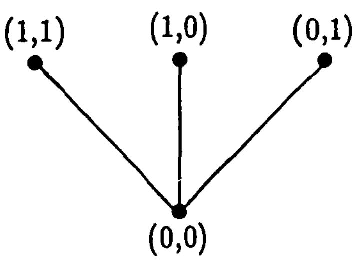
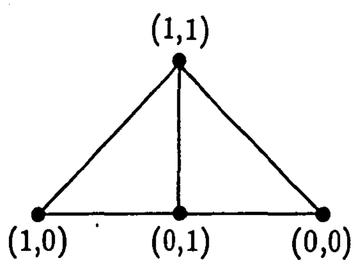
Die ordeninge $\le_{\bar{b}s}$ en $\le_{\bar{c}s}$ is versterkings van onderskeidelik $\le_{\bar{c}w}$ en $\le_{\bar{b}w}$, d.i. $x \le_{\bar{b}s} y \Longrightarrow x \le_{\bar{c}w} y$ en $x \le_{\bar{c}s} y \Longrightarrow x \le_{\bar{b}w} y$. (Let wel: $\le_{\bar{b}s}$ en $\le_{\bar{c}s}$ kan ook soos volg vertaal word: $x \le_{\bar{b}s} y \Leftrightarrow \Delta D(y) \subset \Delta D(x)$ of $x = y$; $x \le_{\bar{c}s} y \Leftrightarrow \nabla D(x) \subset \nabla D(y)$ of $x = y$.) Meer moontlike wêrelde is dus in terme van $\le_{\bar{c}w}$ ($\le_{\bar{b}w}$) as in terme van $\le_{\bar{b}s}$ ($\le_{\bar{c}s}$) vergelykbaar. Ons sal $\le_{\bar{b}s}$ en $\le_{\bar{c}s}$ *sterk ordeninge* op **W** noem — vandaar die "s" (vir sterk ("strong") of streng) in bs en cs; en $\le_{\bar{b}w}$ en $\le_{\bar{c}w}$ *swak ordeninge* — die simbool "w" dui hier op die beskrywing "weak". Wat die betekenis van "b" en "c" is, sal binnekort verduidelik word. Vir ons illustratiewe taal met twee proposisionele veranderlikes, p en q, lewer die vier ordeninge vir $D \equiv T$ en $D \equiv F$; $D \equiv p \vee q$; $D \equiv p$; en $D \equiv p \wedge q$ onderskeidelik die diagramme voorgestel in Tabelle 6, 7, 8 en 9.

As $D \equiv T$ (d.i. $D = $ **W**) is vir elke $x \in$ **W**, $(1,1,\ldots,1) \in D(x)$ en $(0,0,\ldots,0) \in D(x)$ wat beteken $\Delta D(x) \equiv \nabla D(x) \equiv T$. Alle $x \in$ **W** is dus ekwivalent in terme van die swak ordeninge, $\le_{\bar{b}w}$ en $\le_{\bar{c}w}$; en onvergelykbaar in terme van die sterk ordeninge, $\le_{\bar{b}s}$

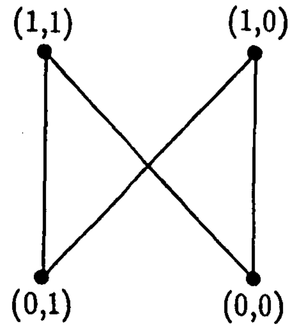
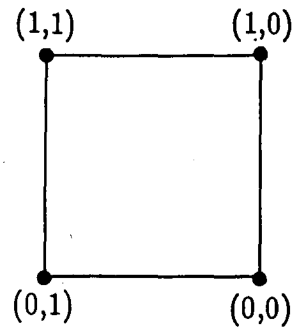
en $\leq_{cs}$. Dit is duidelik dat dié uitspraak ook vir D ≡ F geld (sien Tabel 6).

D ≡ T en D ≡ F	
$\leq_{bs}$ en $\leq_{cs}$	$\leq_{bw}$ en $\leq_{cw}$
	

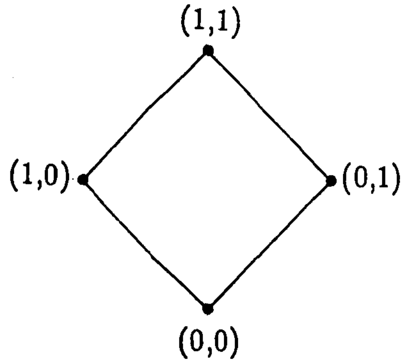
Tabel 6

D ≡ $p \vee q$	
$\leq_{bs}$	$\leq_{bw}$
	
$\leq_{cs}$	$\leq_{cw}$
	

Tabel 7

$D \equiv p$	
$<_{\bar{b}s}$ en $<_{\bar{c}s}$	$<_{\bar{b}w}$ en $<_{\bar{c}w}$
	

Tabel 8

$D \equiv p \wedge q$			
$<_{\bar{b}s}$	$<_{\bar{b}w}$	$<_{\bar{c}s}$	$<_{\bar{c}w}$
			

Tabel 9

As ons *volledige informasie* oor die waarheid het, bestaan die konfigurasie D uit slegs een moontlike wêreld, naamlik die reële wêreld, wat ons in Hoofstuk 3 as $r = (1,1,\ldots,1)$ geneem het. Al is r nou enige moontlike wêreld, het vir elke $x \in W$, $D(x)$ net een element. (As $r = (1,1,\ldots,1)$, is hierdie element van $D(x)$ natuurlik x self.) Dan is $\Delta D(x) = \Delta D(y)$, of $\nabla D(x) = \nabla D(y)$, as en slegs as $D(x) = D(y)$, as en slegs as $x = y$ en dus is $x \leq_{bs} y \Leftrightarrow x \leq_{cw} y$, $x \leq_{bw} y \Leftrightarrow x \leq_{cs} y$. As r wel as die wêreld $(1,1,\ldots,1)$ geneem word, geld verder $\Delta D(y) \vdash \Delta D(x)$ as en slegs as $x \leq y$ in die produkordening van W; en net so, $\nabla D(x) \vdash \nabla D(y)$ as en slegs as $x \leq y$ in $(W, \leq)$. Dus, as $D = \{(1,1,\ldots,1)\}$ geld:

$$x \leq_{bs} y \Leftrightarrow x \leq_{bw} y \Leftrightarrow x \leq_{cs} y \Leftrightarrow x \leq_{cw} y \Leftrightarrow x \leq y$$

— sien Tabel 9. Ons sal voortaan met "volledige informasie" altyd $D = \{(1,1,\ldots,1)\}$ bedoel.

In die algemeen geld dat as $x \notin D$ (d.i. $x \in W - D$) en $y \in D$, dat $x \leq_{cs} y$ en dus ook, $x \leq_{bw} y$: $x \notin D \Leftrightarrow (1,1,\ldots,1) \notin D(x) \Leftrightarrow \nabla D(x) \not\equiv T$; en $y \in D \Leftrightarrow (1,1,\ldots,1) \in D(y) \Leftrightarrow \nabla D(y) \equiv T$. Hieruit volg ook dat vir $x \notin D$ en $y \in D$, $y \not\leq_{bw} x$ en dus, $y \not\leq_{cs} x$; en dat alle $x \in D$ *ekwivalent* is in terme van $\leq_{bw}$, maar *onvergelykbaar* in terme van $\leq_{cs}$. In die ordeninge $\leq_{cs}$ en $\leq_{bw}$ is alle wêrelde wat nie in die data D is nie, dus eg onder alle wêrelde wat wel in D is. Soortgelyk geld dat as $x^* \notin D$ en $y^* \in D$, dat $x \not\leq_{cw} y$ en dus ook, $x \not\leq_{bs} y$: $x^* \notin D \Leftrightarrow (0,0,\ldots,0) \notin D(x) \Leftrightarrow \Delta D(x) \not\equiv T$; en $y^* \in D \Leftrightarrow (0,0,\ldots,0) \in D(y) \Leftrightarrow \Delta D(y) \equiv T$. Dit beteken dat in die ordeninge $\leq_{cw}$ en $\leq_{bs}$ 'n wêreld y wat in stryd met een element van D is, nooit bokant 'n wêreld x wat 'n mate van versoenbaarheid met alle elemente van D het, en waarvoor dus vir alle $d \in D$, $(x \longmapsto d) \neq (0,0,\ldots,0)$, geplaas sal word nie.

In Hoofstuk 3 — die geval van volledige informasie oor die waarheid — het ons die elemente van W volgens die produkordening georden. Alle afsluitingsoperasies is in terme van die produkordening gedefinieer en dus ook, indirek, alle waarheidsgetrouheidordeninge. Nóú, met ons data as enige teorie D, of enige konfigurasie D, beskou ons nog steeds die produkordening op **W** vir die bepaling van die positiewe en negatiewe afsluitings van die graad van versoenbaarheid, D(x), van $x \in \mathbf{W}$. $\Delta D(x)$ en $\nabla D(x)$, verkry op hierdie manier, word gebruik om die vier ordeninge $\leq_{bs}$, $\leq_{bw}$, $\leq_{cs}$ en $\leq_{cw}$ op **W** te definieer. Dié vier ordeninge (en nie die produkordening nie) gaan ons nou gebruik om positiewe en negatiewe afsluitingsoperasies op $\mathcal{P}\mathbf{W}$ te definieer, wat op hulle beurt weer gebruik gaan word in die definiëring van datagetrouheidordeninge van teorieë.

Dat, soos voorheen geredeneer, vir volledige informasie, d.i. vir **D** = $\{(1,1,...,1)\}$, $\leq_{bs}$, $\leq_{bw}$, $\leq_{cs}$ en $\leq_{cw}$ maar net die produkordening op **W** is, is nie bloot toevallig nie. Die doel met hierdie hoofstuk is om (vir enige data **D**), 'n algemene beskrywing van datagetrouheid te gee — die geval van volledige informasie soos beskryf in Hoofstuk **3**, waar ons D as $\{(1,1,...,1)\}$ geneem het, moet dus 'n spesiale geval van só 'n beskrywing wees.

4.1.3 **Definisies** Vir alle $X \subseteq W$:

(1) $\underset{bs}{\Delta}X := \{w \in \mathbf{W} \mid (\exists x \in X)(x \leq_{bs} w)\}$, die *sterk positiewe afsluiting van* **X**;

(2) $\underset{bw}{\nabla}X := \{w \in \mathbf{W} \mid (\exists x \in X)(w \leq_{bw} x)\}$, die *swak negatiewe afsluiting van* **X**;

(3) $\underset{cs}{\nabla}X := \{w \in \mathbf{W} \mid (\exists x \in X)(w \leq_{cs} x)\}$, die *sterk negatiewe afsluiting van* **X**;

(4) $\underset{cw}{\Delta}X := \{w \in \mathbf{W} \mid (\exists x \in X)(x \leq_{cw} w)\}$, die *swak positiewe afsluiting van* **X**.

Ons kan natuurlik ook nog $\underset{bs}{\nabla}$, $\underset{bw}{\Delta}$, $\underset{cs}{\Delta}$ en $\underset{cw}{\nabla}$: $\mathcal{P}\mathbf{W} \longrightarrow \mathcal{P}\mathbf{W}$ definieer — vir ons doeleindes is $\underset{bs}{\Delta}$, $\underset{bw}{\nabla}$, $\underset{cs}{\nabla}$ en $\underset{cw}{\Delta}$: $\mathcal{P}\mathbf{W} \longrightarrow \mathcal{P}\mathbf{W}$ egter voldoende. Die sterk positiewe afsluiting $\underset{bs}{\Delta}X$ van **X** en die swak positiewe afluiting $\underset{cw}{\Delta}X$ van **X** word dus onderskeidelik in terme van die sterk ordening $\leq_{bs}$ en swak ordening $\leq_{cw}$ op **W** gedefinieer — met $\leq_{bs}$ en

$\leq_{\bar{c}w}$ gedefinieer in terme van positiewe afsluitings in (W, $\leq$). Aan die ander kant word die sterk negatiewe afsluiting $\underset{cs}{\nabla}X$ en swak negatiewe afsluiting $\underset{bw}{\nabla}X$ van X respektiewelik aan die hand van die sterk ordening $\leq_{\bar{c}s}$ en swak ordening $\leq_{\bar{b}w}$ op W beskryf, waar $\leq_{\bar{c}s}$ en $\leq_{\bar{b}w}$ in terme van negatiewe afsluitings in (W, $\leq$) gedefinieer is. Soos die gebruik is, sal ons die teorieë wat onderskeidelik met $\underset{bs}{\Delta}X$, $\underset{bw}{\nabla}X$, $\underset{cs}{\nabla}X$ en $\underset{cw}{\Delta}X$ ooreenkom, met $\underset{bs}{\Delta}X$, $\underset{bw}{\nabla}X$, $\underset{cs}{\nabla}X$ en $\underset{cw}{\Delta}X$ aandui. Omdat die ordeninge $\leq_{\bar{b}s}$ en $\leq_{\bar{c}s}$ op W onderskeidelik versterkings van $\leq_{\bar{c}w}$ en $\leq_{\bar{b}w}$ is, geld vir alle X $\subseteq$ W: $\underset{bs}{\Delta}X \subseteq \underset{cw}{\Delta}X$ en $\underset{cs}{\nabla}X \subseteq \underset{bw}{\nabla}X$; of in die notasie van sinne: $\underset{bs}{\Delta}X \models \underset{cw}{\Delta}X$ en $\underset{cs}{\nabla}X \models \underset{bw}{\nabla}X$.

Ons noem 'n teorie X (of konfigurasie X) *sterk positief* as en slegs as $X \equiv \underset{bs}{\Delta}X$ (of $X = \underset{bs}{\Delta}X$); *sterk negatief* as en slegs as $X \equiv \underset{cs}{\nabla}X$ (of $X = \underset{cs}{\nabla}X$); *swak positief* as en slegs as $X \equiv \underset{cw}{\Delta}X$ (of $X = \underset{cw}{\Delta}X$); en *swak negatief* as en slegs as $X \equiv \underset{bw}{\nabla}X$ (of $X = \underset{bw}{\nabla}X$). In die beskrywing van konfigurasies in die algemeen (Afdeling 2.1) het ons **W** op die natuurlike manier, naamlik deur inklusie, georden. Al die begrippe (byvoorbeeld dié van 'n isotone konfigurasie) soos toe gedefinieer kan egter nou net so in terme van die spesiale ordeninge $\leq_{\bar{b}s}$, $\leq_{\bar{b}w}$, $\leq_{\bar{c}s}$ en $\leq_{\bar{c}w}$ beskryf word en sal daarom nie weer behandel word nie.

In die geval van volledige informasie oor die waarheid, d.i. $D = \{(1,1,...,1)\} = \{r\}$, lei die partisie op die versameling van alle moontlike wêrelde in $\{r\}$ en $\mathbf{W} - \{r\}$, tot 'n partisie op die sinne van die taal (in dié wat waar is in die reële wêreld en dié wat onwaar is in die reële wêreld) en induseer sodoende 'n baie growwe preordening op die sinne van die taal. (Vergelyk Afdeling 3.1.) Vir die algemene geval waar D enige konfigurasie is, lei die partisie op **W**, in D en **W** – D, tot 'n trigotomie:

4.1.4 **Definisies** Vir enige teorie X:

(1) X is D–*waar*: ass $D \models X$;

(2) X is D–*onwaar*: ass $D \models \neg X$ (ass $X \models \neg D$);

(3) X is D–*onbepaald*: ass $D \nvDash X$ en $D \nvDash \neg X$.

In die notasie van konfigurasies is X dus D–*waar* ass $D \subseteq X$ (ass $D \cap X = D$); D–*onwaar* ass $D \subseteq (W - X)$ (ass $X \subseteq (W - D)$, ass $(W - D) \cap X = X$, ass $D \cap X = \phi$); en D–*onbepaald* ass X nie D–waar of D–onwaar is nie (d.i. ass $D \cap X \neq D$ en $D \cap X \neq \phi$, ass $D \cap (W - X) \neq \phi$ en $D \cap X \neq \phi$). Die sin T is natuurlik altyd D–waar en F altyd D–onwaar. As $D = \phi$ is beide hierdie sinne en ook alle ander sinne D–waar sowel as D–onwaar, sodat ons nie 'n egte trigotomie kry nie. Beskou ons al die sinne in een van die drie klasse, D–waar, D–onwaar en D–onbepaald, as ekwivalent aan mekaar, en plaas ons elke D–onwaar sin onder elke D–onbepaalde sin; elke D–onbepaalde sin onder elke D–waar sin, kry ons 'n baie growwe preordening op die sinne van die taal. Een van die parsiële datagetrouheidordeninge wat ons nou op $\mathscr{P}W$ gaan definieer, is 'n verfyning van hierdie preordening.

4.1.5 **Definisies** Vir alle $X, Y \subseteq W$:

(1) $X \sqsubseteq_{b} Y: \quad \Leftrightarrow \quad \underset{bs}{\Delta} X \supseteq \underset{bs}{\Delta} Y$ en

as $\underset{bs}{\Delta} X = \underset{bs}{\Delta} Y$, dan $\underset{bw}{\nabla} X \subseteq \underset{bw}{\nabla} Y$ en

as ook nog $\underset{bw}{\nabla} X = \underset{bw}{\nabla} Y$, dan $X \supseteq Y$,

in welke geval ons sê dat X *minder (of net so) datagetrou as* Y *in die dapper leksikografiese datagetrouheidordening is.*

(2) $X \sqsubseteq_{c} Y: \quad \Leftrightarrow \quad \underset{cs}{\nabla} X \subseteq \underset{cs}{\nabla} Y$ en

as $\underset{cs}{\nabla} X = \underset{cs}{\nabla} Y$, dan $\underset{cw}{\Delta} X \supseteq \underset{cw}{\Delta} Y$ en

as ook nog $\underset{cw}{\Delta} X = \underset{cw}{\Delta} Y$, dan $X \subseteq Y$,

in welke geval ons sê dat X *minder (of net so) datagetrou as* Y *in die* *versigtige leksikografiese datagetrouheidordening is.*

Die ordeninge, $\underset{bs}{<}$ en $\underset{bw}{<}$ op **W**, en operasies, $\underset{bs}{\Delta}$ en $\underset{bw}{\nabla}$ op $\mathscr{P}$**W**, wat gebruik word om $\underset{b}{\sqsubseteq}$ op $\mathscr{P}$**W** te definieer, het almal 'n "b" — vir "brave" ("dapper"), "bold" en selfs "brash", in hul notasie. Hierteenoor, word die ordeninge, $\underset{cs}{<}$ en $\underset{cw}{<}$ op **W**, en operasies, $\underset{cs}{\nabla}$ en $\underset{cw}{\Delta}$ wat nodig is vir die ordening $\underset{c}{\sqsubseteq}$, uitgewys deur die "c" — vir "cautious" ("versigtig"), "circumspect" en selfs "cowardly", in hul notasie. Beide die dapper ordening, $\underset{b}{\sqsubseteq}$, en versigtige ordening, $\underset{c}{\sqsubseteq}$, is leksikografiese ordeninge: vir die relasiepaar **X** $\underset{b}{\sqsubseteq}$ **Y** vergelyk mens **X** en **Y** eers net in terme van hul sterk positiewe afsluitings $\underset{bs}{\Delta}$**X** en $\underset{bs}{\Delta}$**Y** — indien $\underset{bs}{\Delta}$**X** die konfigurasie $\underset{bs}{\Delta}$**Y** eg bevat, dan geld **X** $\underset{b}{\sqsubseteq}$ **Y**. Net as gelykheid ($\underset{bs}{\Delta}$**X** = $\underset{bs}{\Delta}$**Y**) geld is dit nodig om die swak negatiewe afsluitings $\underset{bw}{\nabla}$**X** en $\underset{bw}{\nabla}$**Y** van **X** en **Y** te vergelyk, waarvoor ons dan vereis dat dié van **X** eg bevat in dié van **Y** moet wees. As ook $\underset{bw}{\nabla}$**X** = $\underset{bw}{\nabla}$**Y**, dan word die *logies sterkste* teorie as meer datagetrou of informasiegetrou beskou.

Aan die ander kant, word vir die relasiepaar **X** $\underset{c}{\sqsubseteq}$ **Y**, eers net die sterk negatiewe afsluitings $\underset{cs}{\nabla}$**X** en $\underset{cs}{\nabla}$**Y** van **X** en **Y** beskou. Indien nodig (d.i. as $\underset{cs}{\nabla}$**X** = $\underset{cs}{\nabla}$**Y**) word ook die swak positiewe afsluitings $\underset{cw}{\Delta}$**X** en $\underset{cw}{\Delta}$**Y** vergelyk. As ook $\underset{cw}{\Delta}$**X** = $\underset{cw}{\Delta}$**Y**, is **Y** meer informasiegetrou as **X** in die versigtige ordening as **Y** *logies swakker* as **X** is.

Die leser mag dalk nou wonder hoekom ons nou juis op hierdie kombinasies van positiewe en negatiewe afsluitings besluit het vir die definiëring van datagetrouheidordening; en meer nog — juis op hierdie spesifieke volgordes in die leksikografiese definiëring daarvan. Ons antwoord hierop: ander variasies is wel ondersoek en oorweeg, maar volgens ons beskouing lewer $\underset{b}{\sqsubseteq}$ en $\underset{c}{\sqsubseteq}$ intuïtief die mees bevredigende resultate — juis omdat $\underset{b}{\sqsubseteq}$ en $\underset{c}{\sqsubseteq}$ voorsiening maak vir twee verskillende benaderings met betrekking tot die ordening (in terme van die beskikbare data) van teorieë. Dat $\underset{b}{\sqsubseteq}$ met 'n dapper benadering en $\underset{c}{\sqsubseteq}$ met 'n versigtige benadering geassosieer kan word, kan soos volg verduidelik word. In die leksikografiese ordening, $\underset{b}{\sqsubseteq}$, is die *eerste* prioriteit 'n *hoë positiewe logiese inhoud* — die teorie met die logies sterkste positiewe afsluiting word dus eers oorweeg as die beste kandidaat vir datagetrouheid. Vir hierdie eerste stap in die leksikografiese vergelyking van teorieë volgens $\sqsubseteq_b$, word die *sterk positiewe afsluitingsoperasie*, Δ_{bs}, gebruik. Die sterk positiewe afsluiting $\Delta_{bs}X$ van 'n konfigurasie X bestaan uit alle w $\in$ W waarvoor daar 'n x $\in$ X gevind kan word só dat $x <_{bs} w$. Om $\Delta_{bs}X$ te bepaal soek mens dus vir 'n moontlike wêreld w $\in$ W, 'n moontlike wêreld x $\in$ X wat "slegter" as w is. Omdat 'n *sterk* ordening op W vir hierdie "soekproses" gebruik word, gaan só 'n x moeilik gevind word. Staande in 'n sekere wêreld (w) sê mens dus (met die gebruik van die sterk positiewe afsluiting) *moeilik* dat 'n ander wêreld *slegter* is.

Die tweede prioriteit in die leksikografiese ordening, $\sqsubseteq_b$, is *lae negatiewe logiese inhoud*, wat bepaal word in terme van die *swak negatiewe afsluitingsoperasie* ∇_{bw}. Vir die bepaling van die swak negatiewe afsluiting $\nabla_{bw}X$ van 'n konfigurasie X, word vir 'n w $\in$ W, 'n x $\in$ X gesoek só dat $w <_{bw} x$, d.i. 'n x $\in$ X só dat x beter as w is. Omdat 'n *swak* ordening op W vir hierdie doel gebruik word, sal só 'n x maklik gevind word. Maak mens dus gebruik van ∇_{bw}, sal mens, staande in 'n sekere wêreld, *maklik* 'n ander wêreld as *beter* beskou.

Indien nodig, word daar in die laaste deel van die leksikografiese ordening $\sqsubseteq_b$, voorkeur gegee aan *hoë logiese inhoud*, d.i. aan *informatiwiteit.* In al drie die stappe van die ordening $\sqsubseteq_b$ word dus 'n dapperheid weerspieël.

Hierteenoor, word in die leksikografiese ordening $\sqsubseteq_c$, 'n *versigtigheid* weerspieël. As *eerste* prioriteit het die ordening, $\sqsubseteq_c$, 'n *lae negatiewe logiese inhoud* — dié word bepaal in terme van die *sterk negatiewe afsluitingsoperasie* ∇_{cs}. Die sterk negatiewe afsluiting $\nabla_{cs}X$ van 'n konfigurasie X word bepaal deur vir 'n w $\in$ W, 'n x $\in$ X te soek wat beter as w is, d.i. 'n x $\in$ X waarvoor $w <_{cs} x$. Omdat ons nou werk met 'n *sterk* ordening op W, gaan só 'n x $\in$ X moeilik gevind word. Staande in een wêreld sê mens dus nou *moeilik* dat 'n ander wêreld *beter* is.

Die tweede prioriteit in die ordening, $\sqsubseteq_c$, is *hoë positiewe logiese inhoud* wat bepaal word in terme van die *swak positiewe afsluitingsoperasie* Δ_{cw}. Vir 'n wêreld w

	Houdings teenoor teorieë	
Aspekte van die definisie	dapper $\sqsubset_{b}$	versigtig $\sqsubset_{c}$
a) Leksikografiese ordening	die eerste prioriteit is hoë positiewe lo– giese inhoud	die eerste prioriteit is lae negatiewe lo– giese inhoud
b) positiewe inhoud	Δ_{bs} word gebruik: staande in een wêreld, sê hy *moeilik* dat 'n ander wêreld *slegter* is	Δ_{cw} word gebruik: staande in een wêreld, sê hy *maklik* dat 'n ander wêreld *slegter* is
c) negatiewe inhoud	∇_{bw} word gebruik: staande in een wêreld, sê hy *maklik* dat 'n ander wêreld *beter* is	∇_{cs} word gebruik: staande in een wêreld, sê hy *moeilik* dat 'n ander wêreld *beter* is
d) logiese inhoud	in gevalle waar lo– giese inhoud alleen die deurslag moet gee, verkies hy *hoë* logiese inhoud (*informatiwiteit*)	in gevalle waar lo– giese inhoud alleen die deurslag moet gee, verkies hy *lae* logiese inhoud (*betroubaarheid*)

Tabel 10

om tot $\underset{cw}{\Delta}X$ van 'n konfigurasie X te behoort, moet $x \underset{cw}{\leq} w$ vir 'n $x \in X$. Dit beteken dat daar vir 'n $w \in W$, 'n wêreld gesoek word wat slegter as w is — dié sal maklik gevind word, want ons werk hier met 'n *swak* ordening op W. Staande in 'n wêreld w sê mens dus nou *maklik* dat 'n ander wêreld *slegter* is.

In die laaste plek word daar (indien nodig) in die ordening, $\underset{c}{\sqsubseteq}$, voorkeur gegee aan *lae logiese inhoud*, d.i. aan *betroubaarheid*. In Tabel 10 gee ons 'n opsomming van die voorafgaande bespreking oor die filosofiese aspekte met betrekking tot die ordeninge $\underset{b}{\sqsubseteq}$ en $\underset{c}{\sqsubseteq}$.

Die partisie van die sinne van die taal in D–waar, D–onwaar en D–onbepaalde sinne induseer soos reeds bespreek, 'n growwe preordening op die sinne van die taal — waarvolgens alle D–onwaar sinne onder alle D–onbepaalde sinne en laasgenoemde weer onder alle D–waar sinne is. Ons sal nou bewys (Stelling 4.1.7) dat ook die *versigtige leksikografiese* ordening $\underset{c}{\sqsubseteq}$, vir alle $D \neq F$, al die D–waar sinne bo al die D–onbepaalde sinne en dié weer bo alle D–onwaar sinne plaas. Vir die bewys van Stelling 4.1.7 maak ons gebruik van die volgende resultate:

4.1.6 **Stelling** Vir $D \neq \phi$ geld vir alle $X \subseteq W$:

(1) Vir X D–waar is $\underset{bs}{\Delta}X$ en $\underset{cw}{\Delta}X$ D–waar; $\underset{bw}{\nabla}X = \underset{cs}{\nabla}X = W$.

(2) Vir X D–onbepaald is $\underset{bs}{\Delta}X$ en $\underset{cw}{\Delta}X$ nooit D–onwaar nie; $\underset{bw}{\nabla}X = W$; $\underset{cs}{\nabla}X$ is D–onbepaald.

(3) Vir X D–onwaar is $\underset{bw}{\nabla}X$ en $\underset{cs}{\nabla}X$ D–onwaar.

Bewys

(1) As $D \subseteq X$, dan $D \subseteq \underset{bs}{\Delta}X, \underset{cw}{\Delta}X, \underset{bw}{\nabla}X, \underset{cs}{\nabla}X$. Vir alle $w \in W$ bestaan daar 'n $x \in X$

só dat w $\underset{cs}{\leq}$ x (as w $\in$ **W** – D, neem enige x $\in$ D, dan is ∇D(w) $\subset$ ∇D(x) = **W**; as w $\in$ D, neem x = w). Dus, $\underset{cs}{\nabla \mathbf{X}}$ = **W** en gevolglik, $\underset{bw}{\nabla \mathbf{X}}$ = **W**.

(2) **X** $\cap$ **D** $\neq$ ϕ impliseer $\underset{bs}{\Delta \mathbf{X}}$ $\cap$ **D** $\neq$ ϕ en dus, $\underset{cw}{\Delta \mathbf{X}}$ $\cap$ **D** $\neq$ ϕ. Vir alle w $\in$ **W** bestaan daar 'n x $\in$ **X** (naamlik x $\in$ D) só dat ∇D(w) $\subseteq$ ∇D(x), d.i. w $\underset{bw}{\leq}$ x — dus $\underset{bw}{\nabla \mathbf{X}}$ = **W**. Maar vir w $\in$ **D** – **X** is daar geen x $\in$ **X** só dat w $\underset{cs}{\leq}$ x, d.w.s. ∇D(w) $\subset$ ∇D(x) of w = x, nie. Dus, vir só 'n w geld w $\notin$ $\underset{cs}{\nabla \mathbf{X}}$, sodat **D** $\cap$ $\underset{cs}{\nabla \mathbf{X}}$ $\neq$ **D** en **D** $\cap$ $\underset{cs}{\nabla \mathbf{X}}$ $\neq$ ϕ. Gevolglik is $\underset{cs}{\nabla \mathbf{X}}$ D–onbepaald.

(3) **X** D–onwaar impliseer (1,1,...,1) $\notin$ D(x) vir alle x $\in$ **X**. Vir alle w $\in$ **D** is daar dus geen x $\in$ **X** só dat ∇D(w) = **W** $\subseteq$ ∇D(x), d.w.s. só dat w $\underset{bw}{\leq}$ x nie. Vir alle w $\in$ **D** geld dus w $\notin$ $\underset{bw}{\nabla \mathbf{X}}$, sodat **D** $\cap$ $\underset{bw}{\nabla \mathbf{X}}$ = ϕ, en gevolglik ook **D** $\cap$ $\underset{cs}{\nabla \mathbf{X}}$ = ϕ. $\underset{bw}{\nabla \mathbf{X}}$ en $\underset{cs}{\nabla \mathbf{X}}$ is dus beide **D**–onwaar. □

Die leksikografiese ordeninge $\underset{c}{\sqsubseteq}$ en $\underset{b}{\sqsubseteq}$ is duidelik parsiële ordeninge, want X $\underset{c}{\sqsubseteq}$ Y en Y $\underset{c}{\sqsubseteq}$ X as en slegs as X ≡ Y (en soortgelyk vir $\underset{b}{\sqsubseteq}$). As X $\not\equiv$ Y beteken X $\underset{c}{\sqsubseteq}$ Y (en X $\underset{b}{\sqsubseteq}$ Y) dus dat "Y "eg" meer datagetrou as X is", d.i. dat X $\underset{c}{\sqsubset}$ Y (en X $\underset{b}{\sqsubset}$ Y).

4.1.7 **Stelling** Vir D $\not\equiv$ F geld vir alle D–onwaar X, D–onbepaalde Y en D–waar Z:

$$X \underset{c}{\sqsubset} Y \underset{c}{\sqsubset} Z.$$

Bewys

X $\underset{c}{\sqsubset}$ Y: Uit stelling 4.1.6 (3) volg dat $\underset{cs}{\nabla \mathbf{X}}$ $\subseteq$ (**W** – **D**). Vir 'n willekeurige x $\in$ $\underset{cs}{\nabla \mathbf{X}}$ geld nou die volgende: x $\in$ **W** – **D**, d.i. (1,1,...,1) $\notin$ D(x), wat beteken dat ∇D(x) $\neq$ **W**. Omdat **Y** $\cap$ **D** $\neq$ ϕ (want Y is D–onbepaald), bestaan daar 'n y $\in$ **Y** (naamlik y $\in$ **D**) só dat $\nabla D(x) \subset \nabla D(y) = W$. Dus, $x \underset{cs}{\leq} y$ vir 'n $y \in Y$ sodat $x \in \underset{cs}{\nabla} Y$ en gevolglik, $\underset{cs}{\nabla} X \subseteq \underset{cs}{\nabla} Y$. Verder geld dat $\underset{cs}{\nabla} Y \nsubseteq \underset{cs}{\nabla} X$: Uit 4.1.6 (2) volg dat $\underset{cs}{\nabla} Y \cap D \neq \phi$. Vir $y \in \underset{cs}{\nabla} Y \cap D$ bestaan daar dus geen $x \in X$ só dat $\nabla D(y)$ (= W) $\subset \nabla D(x)$ of $y = x$ nie (want X is D–onwaar en gevolglik $(1,1,...,1) \notin D(x)$ vir alle $x \in X$), d.i. daar bestaan geen $x \in X$ só dat $y \underset{cs}{\leq} x$ nie. Dit beteken $y \notin \underset{cs}{\nabla} X$ waaruit volg dat $\underset{cs}{\nabla} X \subset \underset{cs}{\nabla} Y$ en dus $X \underset{c}{\sqsubset} Y$.

$Y \underset{c}{\sqsubset} Z$: $\underset{cs}{\nabla} Y \cap D \neq \phi$ en $\underset{cs}{\nabla} Y \cap D \neq D$. Beskou 'n $y \in \underset{cs}{\nabla} Y$. As $y \in D$, bestaan daar 'n $z \in Z$ (naamlik $z = y$ — want Z is D–waar en dus $D \subseteq Z$) só dat $y \underset{cs}{\leq} z$ en dus $y \in \underset{cs}{\nabla} Z$. As $y \notin D$, bestaan daar 'n $z \in Z$ (naamlik $z \in D$) só dat $\nabla D(y) \subset \nabla D(z) = W$, d.i. $y \underset{cs}{\leq} z$, en gevolglik $y \in \underset{cs}{\nabla} Z$. Dus, $\underset{cs}{\nabla} Y \subseteq \underset{cs}{\nabla} Z$. Dié inklusie is egter streng, want $D \cap Y \neq D$, maar $D \subseteq \underset{cs}{\nabla} Z$. Daar bestaan dus 'n $z \in D \subseteq \underset{cs}{\nabla} Z$, $z \notin Y$. Vir so 'n z bestaan daar dan geen $y \in Y$ só dat $\nabla D(z)$ (= W) $\subset \nabla D(y)$ of $z = y$ nie. Dit beteken $z \notin \underset{cs}{\nabla} Y$. Dus, $\underset{cs}{\nabla} Y \subset \underset{cs}{\nabla} Z$ waaruit volg dat $Y \underset{c}{\sqsubset} Z$. □

Die versigtige parsiële ordening, $\underset{c}{\sqsubset}$, is dus 'n verfyning van die growwe preordening wat behoedsaam alle D–onwaar sinne onder alle D–onbepaalde sinne; en laasgenoemde onder alle D–waar sinne plaas. In teenstelling hiermee, sal in terme van die dapper ordening, $\underset{b}{\sqsubset}$, 'n D–onwaar sin soms bo 'n D–onbepaalde sin; en selfs onverskrokke bo 'n D–waar sin geplaas word.

In plaas van parsiële leksikografiese ordeninge op $\mathscr{P}W$, kan mens ook parsiële *produkordeninge* definieer, waarmee ons bedoel dat in plaas van om aan een afsluitingsoperasie prioriteit te gee, 'n positiewe en negatiewe afsluitingsoperasie gelyke gewig kan dra. Die mees interessante produkordeninge, volgens ons bevinding, is dié wat juis van $\underset{b}{\sqsubset}$ en $\underset{c}{\sqsubset}$ produkordeninge maak:

4.1.8 **Definisies** Vir alle $X, Y \subseteq W$:

(1) $X \underset{b}{\prec} Y$: $\Leftrightarrow$ $\underset{bs}{\Delta} X \supseteq \underset{bs}{\Delta} Y$, $\underset{bw}{\nabla} X \subseteq \underset{bw}{\nabla} Y$ en

as gelykheid in albei gevalle geld, dan $Y \subseteq X$,

in welke geval ons sê dat X *minder (of net so) datagetrou as* Y *in die dapper datagetrouheidprodukordening is.*

(2) $X \prec_c Y : \quad \Leftrightarrow \quad \nabla X_{cs} \subseteq \nabla Y_{cs},\ \Delta X_{cw} \supseteq \Delta Y_{cw}$ en
as gelykheid in albei gevalle geld, dan $X \subseteq Y$,

in welke geval ons sê dat X *minder (of net so) datagetrou as* Y *in die versigtige datagetrouheidprodukordening is.*

Omdat $\prec_b$ gegrond is op dieselfde ordeninge op W as $\sqsubseteq_b$, is $\prec_b$ vir dieselfde redes as $\sqsubseteq_b$, 'n dapper ordening. Soortgelyk, kan $\prec_c$ weer met 'n versigtige benadering geassosieer word. Dit is duidelik dat $\prec_b$ en $\prec_c$ versterkings van onderskeidelik $\sqsubseteq_b$ en $\sqsubseteq_c$ is, d.i. $X \prec_b Y \Rightarrow X \sqsubseteq_b Y$ en $X \prec_c Y \Rightarrow X \sqsubseteq_c Y$. In terme van $\sqsubseteq_b$ kan 'n D–onwaar sin byvoorbeeld bo 'n D–onbepaalde en selfs bo 'n D–waar sin geplaas word: $X \sqsubseteq_b F$ vir alle X: $\Delta F_{bs} \equiv F \vdash \Delta X_{bs}$. Alhoewel die ordening $\prec_b$ dapper is, is dit egter nie só dapper soos sy roekelose neef $\sqsubseteq_b$ nie. Stelling 4.1.9 (1) wys dat in terme van $\prec_b$, geen D–onwaar sin bokant 'n D–onbepaalde, en nog minder bokant 'n D–waar sin geplaas word nie. 'n D–onbepaalde sin kan egter wel nog (in terme van $\prec_b$) bokant 'n D–waar sin geplaas word (sien Afdeling 4.2).

Volgens Stelling 4.1.7, is in terme van $\sqsubseteq_c$, alle D–waar sinne bokant alle D–onbepaalde sinne, wat weer bo alle D–onwaar sinne is. Sommige van hierdie relasies verdwyn in $\prec_c$: in terme van $\prec_c$ is nie meer alle D–onwaar sinne vergelykbaar met alle D–onbepaalde sinne nie en ook nie alle D–onbepaalde sinne meer vergelykbaar met alle D–waar sinne nie. Dit geld egter nog steeds in $\prec_c$ (soos in $\sqsubseteq_c$) dat geen D–onwaar sin bokant 'n D–onbepaalde sin geplaas word nie, en ook geen D–onbepaalde sin bo 'n D–waar sin nie (4.1.9 (2)) — behalwe as $D \equiv F$.

4.1.9 **Stelling** Vir $D \not\equiv F$ geld vir alle D–onwaar X, D–onbepaalde Y en D–waar Z:

(1) $Z \underset{\bar{b}}{\not\prec} X$ en $Y \underset{\bar{b}}{\not\prec} X$;

(2) $Z \underset{\bar{c}}{\not\prec} Y$, $Y \underset{\bar{c}}{\not\prec} X$ en $Z \underset{\bar{c}}{\not\prec} X$.

Bewys

(1) Volgens Stelling 4.1.6 (3) is $\underset{bw}{\nabla X}$ D–onwaar, d.i. $\underset{bw}{\nabla X} \cap D = \phi$, wat impliseer $\underset{bw}{\nabla X} \neq \mathbf{W}$. Volgens 4.1.6 (1) en (2) is $\underset{bw}{\nabla Z} = \underset{bw}{\nabla Y} = \mathbf{W}$ sodat $\underset{bw}{\nabla X} \subset \underset{bw}{\nabla Z}$ en $\underset{bw}{\nabla X} \subset \underset{bw}{\nabla Y}$, waaruit volg dat $Z \underset{\bar{b}}{\not\prec} X$ en $Y \underset{\bar{b}}{\not\prec} X$.

(2) Volgens Stelling 4.1.7 geld $X \underset{c}{\sqsubset} Y \underset{c}{\sqsubset} Z$ — dus $Z \underset{\bar{c}}{\not\sqsubseteq} Y$, $Y \underset{\bar{c}}{\not\sqsubseteq} X$ en $Z \underset{\bar{c}}{\not\sqsubseteq} X$; en gevolglik $Z \underset{\bar{c}}{\not\prec} Y$, $Y \underset{\bar{c}}{\not\prec} X$ en $Z \underset{\bar{c}}{\not\prec} X$. □

In die volgende afdeling sal bogenoemde resultate aan die hand van voorbeelde in 'n eenvoudige taal vir verskillende keuses vir D geïllustreer word. Ons vertrou dat die voorbeelde nie net meer lig sal werp op die eienskappe van $\underset{\bar{b}}{\sqsubset}$, $\underset{\bar{c}}{\sqsubset}$, $\underset{\bar{b}}{\prec}$ en $\underset{\bar{c}}{\preceq}$ nie, maar ook op die filosofiese aspekte met betrekking tot hierdie relasies.

4.2 TUSSEN (OMGEKEERDE) LOGIESE AFLEIBAARHEID EN WAARHEIDSGETROUHEID

Vir sowel die geval van *geen informasie* oor die waarheid ($D \equiv T$) as die geval van *teenstrydige* informasie ($D \equiv F$), is al die elemente van $\mathbf{W} = 2^n$ onvergelykbaar in terme van die sterk ordeninge, $\underset{\bar{b}s}{<}$ en $\underset{\bar{c}s}{<}$, op $\mathbf{W}$ (vergelyk Tabel 6 in die vorige afdeling); dus $\underset{bs}{\Delta}\mathbf{X} = \underset{cs}{\nabla}\mathbf{X} = \mathbf{X}$ vir alle $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{W}$. Gevolglik is die *dapper leksikografiese ordening* $\sqsubseteq_{b}$ in dié twee gevalle maar net dié van *omgekeerde logiese afleibaarheid* ($\dashv$); terwyl die *versigtige leksikografiese ordening* $\sqsubseteq_{c}$ dié van *logiese afleibaarheid* is. Dit wil sê:

$$X \sqsubseteq_{b} Y \Leftrightarrow Y \models X \text{ en}$$
$$X \sqsubseteq_{c} Y \Leftrightarrow X \models Y.$$

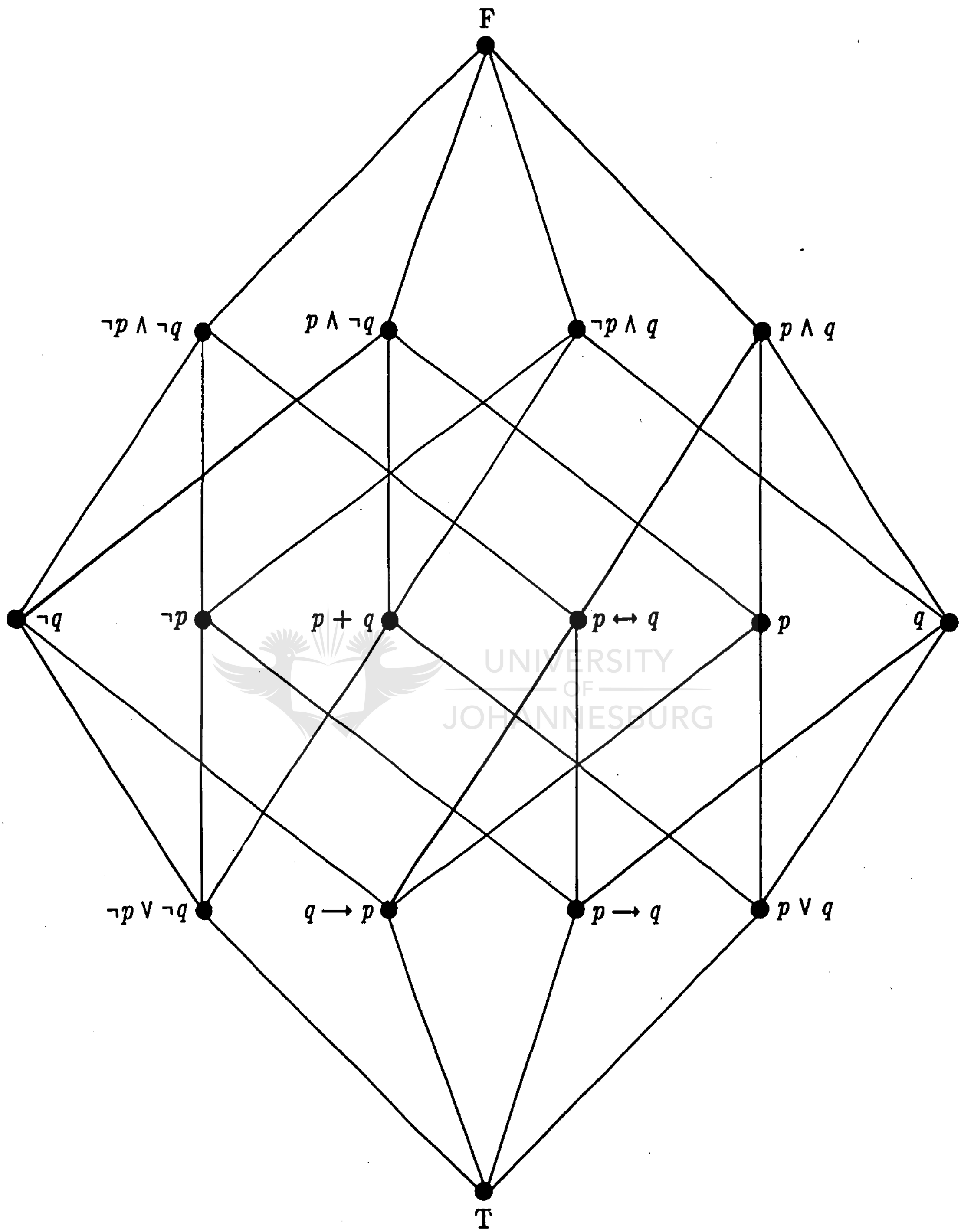
Alle $x \in \mathbf{W}$ is vir $D \equiv T$ of $D \equiv F$ ekwivalent in terme van die swak ordeninge $\leq_{bw}$ en $\leq_{cw}$ op $\mathbf{W}$ (sien Tabel 6), wat beteken dat vir alle $\phi \neq \mathbf{X} \subseteq \mathbf{W}$, $\underset{bw}{\nabla}\mathbf{X} = \underset{cw}{\Delta}\mathbf{X} = \mathbf{W}$. Gevolglik is vir alle X, Y $\not\equiv$ F:

$$X \preceq_{b} Y \Leftrightarrow Y \models X \text{ en}$$
$$X \preceq_{c} Y \Leftrightarrow X \models Y.$$

Let wel: Die sin F is vir alle $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{W}$, met *geen* ander sin in terme van die produkordeninge, $\preceq_{b}$ en $\preceq_{c}$, vergelykbaar nie. Aan die ander kant geld vir alle $\mathbf{X}, \mathbf{D} \subseteq \mathbf{W}$: $X \sqsubseteq_{b} F$ en $F \sqsubseteq_{c} X$, d.i. F is bokant alle teorieë in $\sqsubseteq_{b}$ en onderkant alle teorieë in $\sqsubseteq_{c}$.

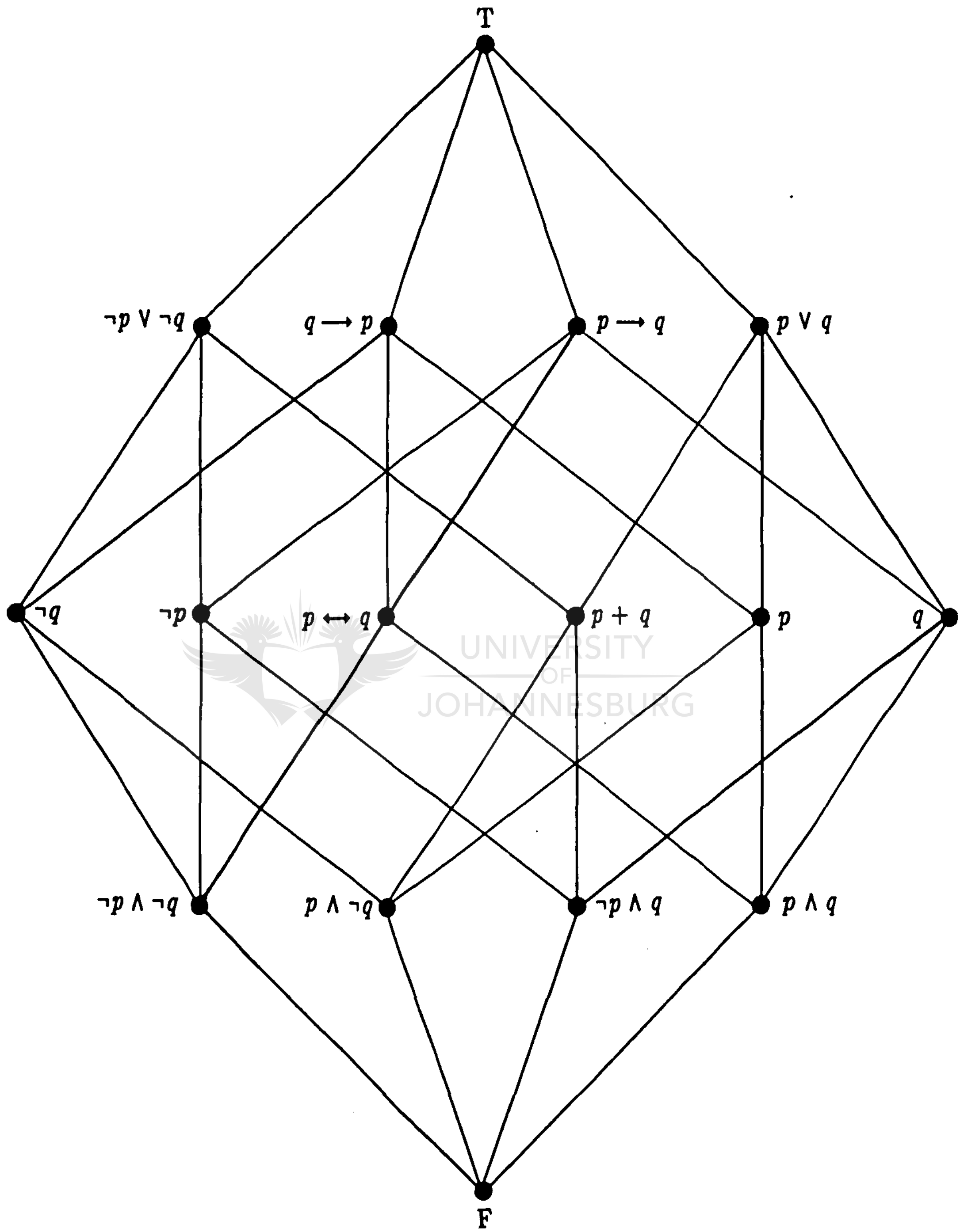
In die geval van geen informasie ($D \equiv T$) of teenstrydige informasie ($D \equiv F$), is Y dus 'n beter teorie as X in die dapper of progressiewe model, $\sqsubseteq_{b}$, van datagetrouheid, as Y meer *informatief* as X is (en dieselfde geld vir $\preceq_{b}$ as X, Y $\not\equiv$ F). Hierteenoor is Y beter as X in die versigtige of konserwatiewe model, $\sqsubseteq_{c}$ (en $\preceq_{c}$, as X, Y $\not\equiv$ F), as Y meer *betroubaar* as X is. Omdat die groter konfigurasie 'n beter kans het om die onbekende reële wêreld te bevat, verkies die konserwatiewe persoon telkens die groter bo die kleiner konfigurasie. Die progressiewe persoon, aan die ander kant, verkies 'n teorie wat baie sê — al sou dit "baie lieg" beteken.

Ter illustrasie van die ordeninge $\sqsubseteq_{b}$, $\sqsubseteq_{c}$, $\preceq_{b}$ en $\preceq_{c}$ beskou ons die taal voortgebring deur $\{p, q\}$. Figuur 25 illustreer die ordening $\dashv$ (d.i. $\sqsubseteq_{b}$ vir $D \equiv T$ en $D \equiv F$) van omgekeerde logiese afleibaarheid, van die sestien logies nie–ekwivalente sinne in hierdie taal. Die diagram van die ordening $\models$ (d.i. $\sqsubseteq_{c}$ vir $D \equiv T$ en $D \equiv F$) is presies net die omgekeerde van Figuur 25 en word deur Figuur 26 geïllustreer. Vir $D \equiv T$ en $D \equiv F$ is die diagramme van $\preceq_{b}$ en $\preceq_{c}$ dieselfde as dié van onderskeidelik $\sqsubseteq_{b}$ en $\sqsubseteq_{c}$ behalwe dat,



Figuur 25

($\sqsubseteq$ vir D ≡ T en D ≡ F)



Figuur 26

($\underset{c}{\sqsubseteq}$ vir D ≡ T en D ≡ F) in teenstelling met die situasie in $\sqsubseteq_{\bar b}$ en $\sqsubseteq_{\bar c}$, F met geen ander sin in $\prec_{\bar b}$ en $\prec_{\bar c}$ vergelykbaar is nie.

As D ≡ T, is T die enigste D–waar sin en F die enigste D–onwaar sin. Figure 25 en 26 is dan 'n duidelike illustrasie van Stellings 4.1.7, 4.1.9 en die besprekings daarom: In terme van $\sqsubseteq_{\bar c}$ is alle D–onwaar sinne onder alle D–onbepaalde sinne en alle D–onbepaalde sinne onder alle D–waar sinne (Figuur 26); terwyl in die ordening $\sqsubseteq_{\bar b}$ die D–onwaar sin F bo al die D–onbepaalde sinne en D–waar sin T is (Figuur 25). Omdat (vir D ≡ T) die lyne na F die enigste lyne is wat verdwyn as die ordening $\sqsubseteq_{\bar b}$ na $\prec_{\bar b}$ versterk word, is dit duidelik dat volgens 4.1.9 (1) geen D–onwaar sin in $\prec_{\bar b}$ bokant 'n D–waar of D–onbepaalde sin is nie — al die D–onbepaalde sinne is egter bokant die D–waar sinne. Laasgenoemde gebeur duidelik nie in $\prec_{\bar c}$ nie — geen D–onbepaalde sin is bo 'n D–waar sin nie, wat klop met 4.1.9 (2).

Vir D ≡ F, is alle sinne D–waar, maar ook D–onwaar. Uit Figure 25 en 26 is dit nou duidelik hoekom ons hierdie geval in die formulerings van 4.1.7 en 4.1.9 uitgesluit het.

Die volgende geval wat ons wil illustreer is dié van D ≡ $p \vee q$, d.i. D = {(1,1), (1,0), (0,1)}. D ≡ $p \vee q$ verteenwoordig die geval van data waarvolgens ons oor geen lettersin uitspraak kan lewer nie, d.i. ons het geen idee of (±)p of (±)q in die reële wêreld voorkom nie — ons weet slegs dat (0,0) nie die reële wêreld is nie (of dat $\neg p \wedge \neg q$ nie die geval is nie).

Tabel 11 gee vir D ≡ $p \vee q$, die sterk positiewe afsluitings $\underset{bs}{\Delta}X$, swak negatiewe afsluitings $\underset{bw}{\nabla}X$, sterk negatiewe afsluitings $\underset{cs}{\nabla}X$ en swak positiewe afsluitings $\underset{cw}{\Delta}X$ van die sestien logies nie–ekwivalente sinne X — soos geneem in terme van respektiewelik $<_{\bar b s}$, $<_{\bar b w}$, $\leq_{\bar c s}$ en $\leq_{\bar c w}$ geïllustreer in Tabel 7. Ons dui ook vir elke X aan of dit D–waar (•), D–onwaar (o) of D–onbepaald is. Dít sal ons ook in die diagramme van $\sqsubseteq_{\bar b}$, $\prec_{\bar b}$, $\sqsubseteq_{\bar c}$ en $\prec_{\bar c}$ aandui deur die posisies van D–waar, D–onwaar en D–onbepaalde sinne onderskeidelik met •, o en ◐ voor te stel. Aan die hand van Tabel 11 sal ons nou stapsgewys die proses wat lei tot die tekening van die dapper leksikografiese ordening $\underset{b}{\sqsubseteq}$ vir $D \equiv p \vee q$ — geïllustreer deur Figuur 29 — beskryf.

Die eerste vereiste vir die relasiepaar $X \underset{b}{\sqsubseteq} Y$ om te geld, is dat $\underset{bs}{\Delta}X \supseteq \underset{bs}{\Delta}Y$. As eerste stap in die konstruksie van $\underset{b}{\sqsubseteq}$ orden ons dus eers al die sterk positiewe afsluitings van die konfigurasies volgens omgekeerde inklusie. Dit beteken niks anders nie as dat ons $\mathcal{P}_s$ — die versameling van sterk positiewe sinne, dit wil sê sinne X waarvoor $X \equiv \underset{bs}{\Delta}X$, volgens omgekeerde logiese afleibaarheid orden. Figuur 27 illustreer $(\mathcal{P}_s, \dashv)$ vir ons illustratiewe taal.

Die volgende stap in die konstruksie van $\underset{b}{\sqsubseteq}$ is om die leksikografiese produk $(\mathcal{P}_s, \dashv)$ @ $(\mathcal{N}_w, \vdash)$ te vorm — waar $\mathcal{N}_w$ die versameling van alle swak negatiewe sinne is, d.i. al die sinne X waarvoor $X \equiv \underset{bw}{\nabla}X$. Die leksikografiese produk $(\mathcal{P}_s, \dashv)$ @ $(\mathcal{N}_w, \vdash)$ word verkry deur vir elke $P \in \mathcal{P}_s$, al die sinne X_i waarvoor $\underset{bs}{\Delta}X_i = P$, se swak negatiewe afsluitings $\underset{bw}{\nabla}X_i$ met P af te paar. Die ordening op die leksikografiese produk is die leksikografiese ordening: vir alle $(P_1, N_1), (P_2, N_2) \in (\mathcal{P}_s, \dashv)$ @ $(\mathcal{N}_w, \vdash)$:

$$(P_1, N_1) \ll (P_2, N_2) \Leftrightarrow P_2 \vdash P_1 \text{ en as } P_1 \equiv P_2, \text{ dan } N_1 \vdash N_2.$$

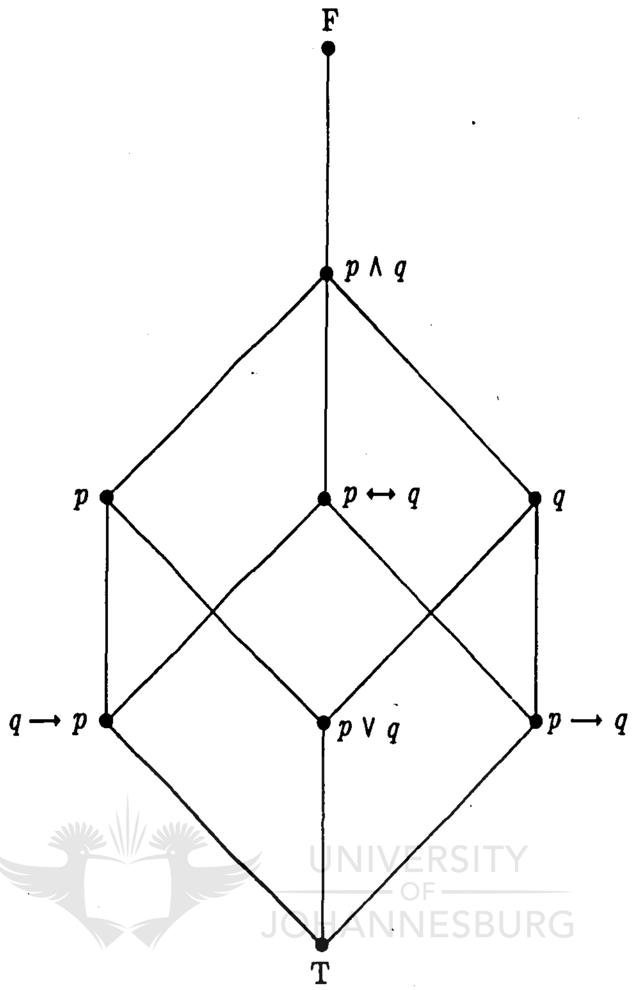
(As D sodanig is dat elke sin sterk positief is, kom $\mathcal{P}_s$ met $\mathcal{P}W$ ooreen, d.i. $\mathcal{P}_s$ is die versameling van alle sinne, en dan is hierdie stap (om $(\mathcal{P}_s, \dashv)$ @ $(\mathcal{N}_w, \vdash)$ te beskou) natuurlik onnodig.)

Volgens Tabel 11 is daar byvoorbeeld twee sinne X, naamlik p en $p \wedge \neg q$, waarvoor $\underset{bs}{\Delta}X = p$. Dit lewer die pare $(p, \underset{bw}{\nabla}(p))$ en $(p, \underset{bw}{\nabla}(p \wedge \neg q))$. In die produk $(\mathcal{P}_s, \dashv)$ @ $(\mathcal{N}_w, \vdash)$ is dié twee pare egter een en dieselfde element, want $\underset{bw}{\nabla}(p) \equiv \underset{bw}{\nabla}(p \wedge \neg q) \equiv$ T. Hierteenoor is vir $p \leftrightarrow q \in \mathcal{P}_s$, $p \leftrightarrow q \equiv \underset{bs}{\Delta}(p \leftrightarrow q) \equiv \underset{bs}{\Delta}(\neg p \wedge \neg q)$ — wat die elemente $(p \leftrightarrow q, \underset{bw}{\nabla}(p \leftrightarrow q)) = (p \leftrightarrow q, \mathrm{T})$ en $(p \leftrightarrow q, \underset{bw}{\nabla}(\neg p \wedge \neg q)) = (p \leftrightarrow q, \neg p \wedge \neg q)$ van $\mathcal{P}_s$ @ $\mathcal{N}_w$ tot gevolg het. Omdat $\neg p \wedge \neg q \vdash \mathrm{T}$ is $(p \leftrightarrow q, \neg p \wedge \neg q)$ onder $(p \leftrightarrow q, \mathrm{T})$ in $(\mathcal{P}_s, \dashv)$ @ $(\mathcal{N}_w, \vdash)$ — geïllustreer deur Figuur 28.

Al wat nou nog gedoen moet word om $\underset{b}{\sqsubseteq}$ te konstrueer, is om met die behoud van die ordening in die leksikografiese produk, vir elke $(P, N) \in (\mathcal{P}_s, \dashv)$ @ $(\mathcal{N}_w, \vdash)$ al die sinne X waarvoor $\underset{bs}{\Delta}X \equiv P$ en $\underset{bw}{\nabla}X \equiv N$, volgens omgekeerde logiese afleibaarheid te

$D \equiv p \vee q$				
X	$\underset{b\,s}{\Delta X}$	$\underset{b\,w}{\nabla X}$	$\underset{c\,s}{\nabla X}$	$\underset{c\,w}{\Delta X}$
$\overset{\bullet}{T}$	T	T	T	T
p	p	T	$q \rightarrow p$	T
q	q	T	$p \rightarrow q$	T
$p \wedge q$	$p \wedge q$	T	$p \leftrightarrow q$	$p \wedge q$
$p \overset{\bullet}{\vee} q$	$p \vee q$	T	T	T
$p \rightarrow q$	$p \rightarrow q$	T	$p \rightarrow q$	T
$q \rightarrow p$	$q \rightarrow p$	T	$q \rightarrow p$	T
$p \leftrightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	T	$p \leftrightarrow q$	T
$\neg p$	$p \rightarrow q$	T	$\neg p$	T
$\neg q$	$q \rightarrow p$	T	$\neg q$	T
$\neg p \overset{\circ}{\wedge} \neg q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	T
$\neg p \wedge q$	q	T	$\neg p$	T
$p \wedge \neg q$	p	T	$\neg q$	T
$\neg p \vee \neg q$	T	T	$\neg p \vee \neg q$	T
$p + q$	$p \vee q$	T	$\neg p \vee \neg q$	T
$\overset{\circ}{F}$	F	F	F	F

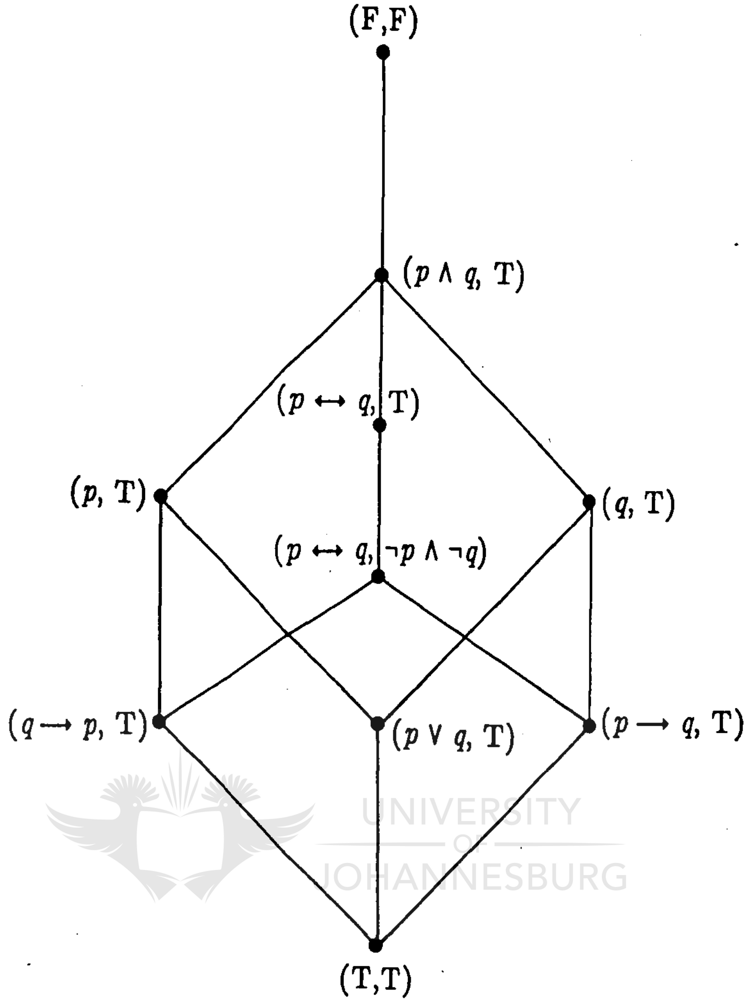
Tabel 11



Figuur 27

orden. 'n Sin X sal dan volgens hierdie laaste stap onder 'n sin Y wees as en slegs as $X \sqsubseteq_{b} Y$. Ter illustrasie van die laaste stap in die konstruksie van $\sqsubseteq_{b}$, beskou ons die paar $(p \vee q, \mathrm{T})$ van $(\mathcal{P}_s, \dashv)$ @ $(\mathcal{N}_w, \vdash)$: die sinne X waarvoor $\underset{bs}{\Delta X} = p \vee q$ en $\underset{bw}{\nabla X} = \mathrm{T}$, is die sinne $p \vee q$ en $p + q$ (sien Tabel 11); omdat $p + q \vdash p \vee q$ geld $p \vee q \sqsubseteq_{b} p + q$. Figuur 29 illustreer die dapper leksikografiese ordening $\sqsubseteq_{b}$ vir $D \equiv p \vee q$.

Vir die relasiepaar $X \prec_{b} Y$ moet $\underset{bs}{\Delta Y} \vdash \underset{bs}{\Delta X}$ *en* $\underset{bw}{\nabla X} \vdash \underset{bw}{\nabla Y}$. Die eerste deel ($\underset{bs}{\Delta Y} \vdash \underset{bs}{\Delta X}$) van bostaande konjunksie geld alreeds as $X \sqsubseteq_{b} Y$. Dit beteken dat as $X \sqsubseteq_{b} Y$ geld $X \not\prec_{b} Y$ as en slegs as $\underset{bw}{\nabla X} \nvdash \underset{bw}{\nabla Y}$. Om die leksikografiese ordening $\sqsubseteq_{b}$ tot die produk - ordening $\prec_{b}$ te versterk, is dus nie moeilik nie: vir elke relasiepaar $X \sqsubseteq_{b} Y$ kyk ons net

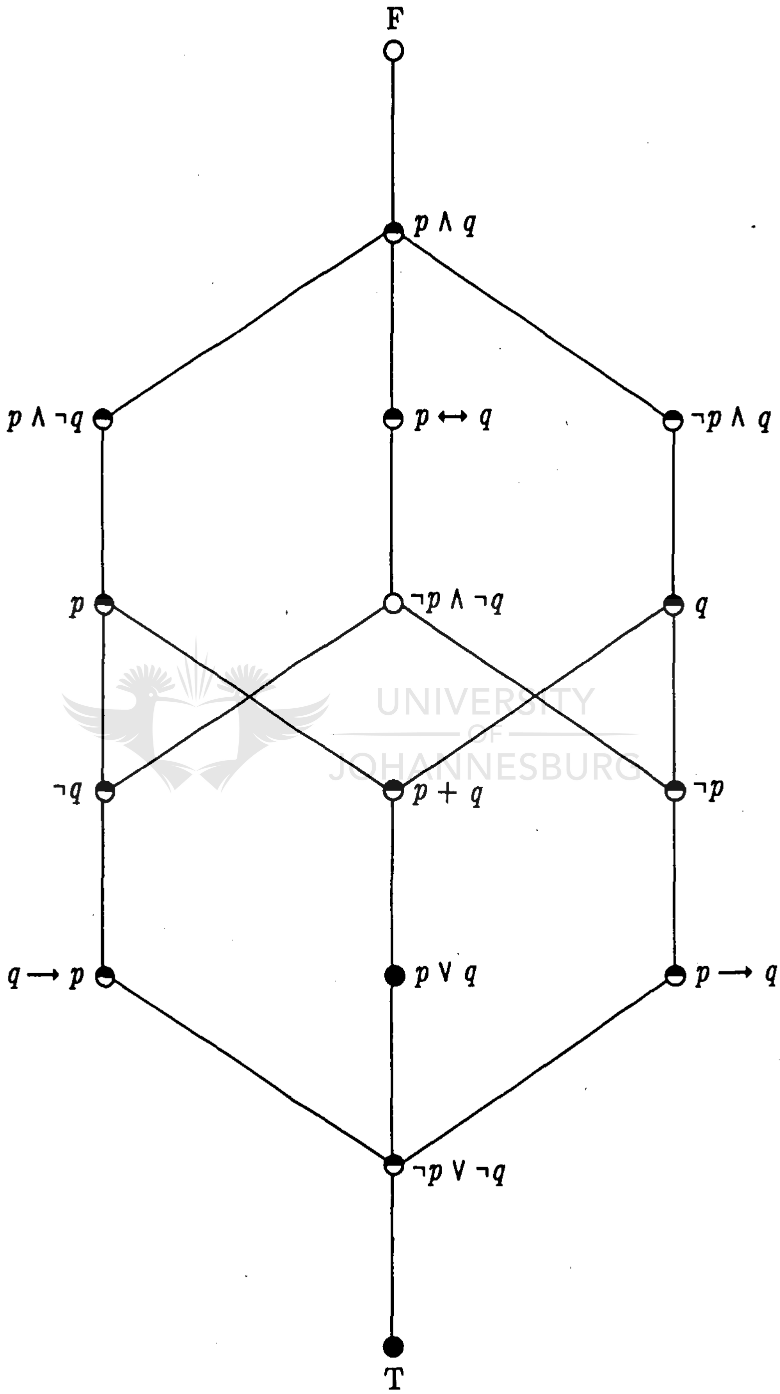


Figuur 28

of $\underset{bw}{\nabla X} \vdash \underset{bw}{\nabla Y}$ — indien wel, dan $X \underset{\bar{b}}{\prec} Y$. (As $\underset{bw}{\nabla X} \equiv \underset{bw}{\nabla Y}$ en $X \underset{\bar{b}}{\sqsubseteq} Y$ impliseer dit natuurlik $\underset{bs}{\Delta X} \supseteq \underset{bs}{\Delta Y}$ of $\underset{bs}{\Delta X} = \underset{bs}{\Delta Y}$ en $Y \subseteq X$.) Ons kan dus $\underset{\bar{b}}{\prec}$ konstrueer deur $(\mathcal{P}_s, \dashv)$ @ $(\mathcal{N}_w, \vdash)$ in plaas van leksikografies, komponentsgewys te orden: vir alle $(P_1, N_1), (P_2, N_2) \in \mathcal{P}_s$ @ $\mathcal{N}_w$:

$$(P_1, N_1) \leq (P_2, N_2) \Leftrightarrow P_2 \vdash P_1 \text{ en } N_1 \vdash N_2;$$

en dan soos vir $\underset{\bar{b}}{\sqsubseteq}$, vir elke $(P, N) \in \mathcal{P}_s$ @ $\mathcal{N}_w$, alle X waarvoor $\underset{bs}{\Delta X} \equiv P$ en $\underset{bw}{\nabla X} \equiv N$ volgens omgekeerde logiese afleibaarheid te orden. Lyne in Figuur 28 wat met hierdie versterkte ordening van $\mathcal{P}_s$ @ $\mathcal{N}_w$ uitgeskakel word, is byvoorbeeld dié tussen



Figuur 29

($\sqsubseteq_D$ vir D $\equiv p \vee q$)

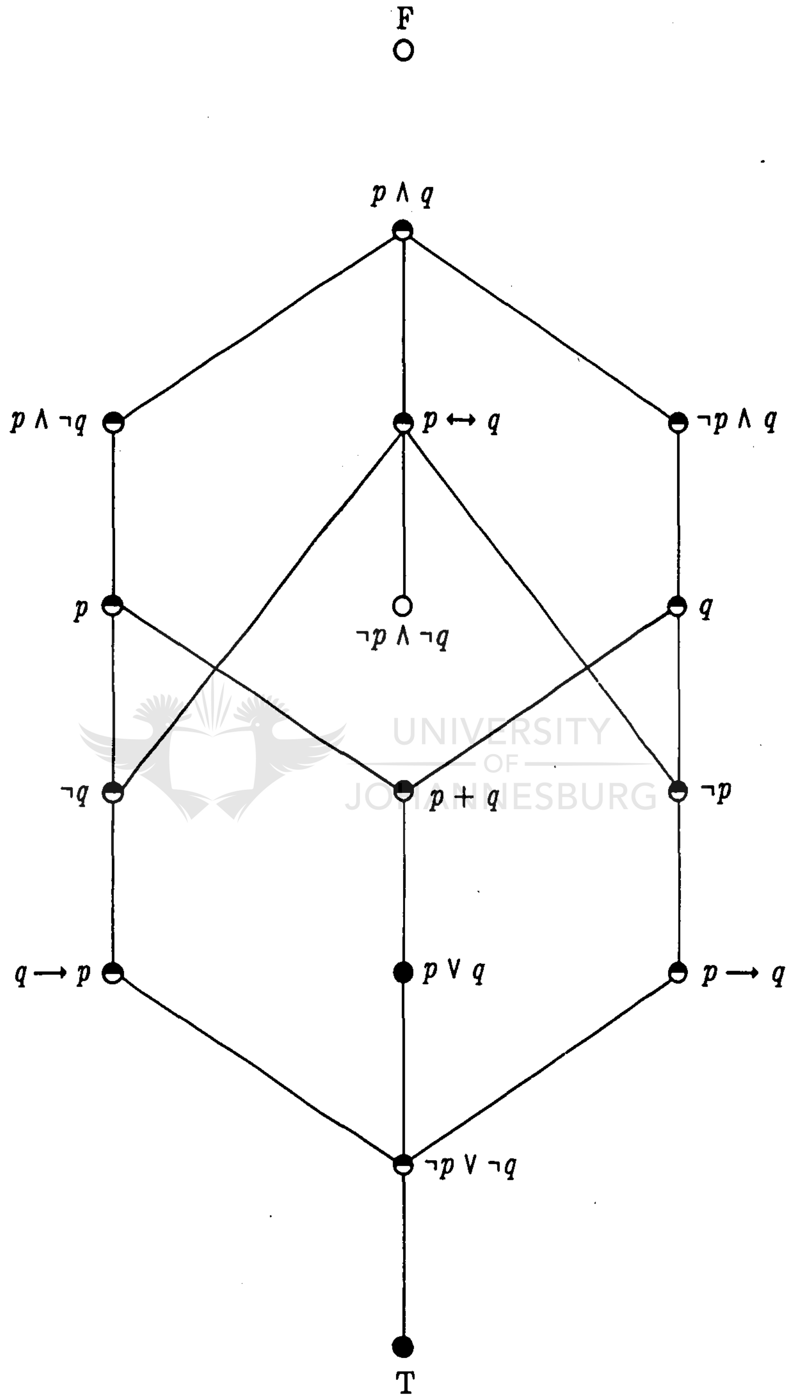
$(p \wedge q, \mathrm{T})$ en (F, F); tussen $(p \longrightarrow q, \mathrm{T})$ en $(p \leftrightarrow q, \neg p \wedge \neg q)$; en tussen $(q \longrightarrow p, \mathrm{T})$ en $(p \leftrightarrow q, \neg p \wedge \neg q)$. Omdat ons sinne wat volgens transitiwiteit vergelykbaar is nie ook met 'n lyn verbind nie, kan ons natuurlik nie sonder meer lyne uitvee nie — "nuwe" lyne moet dikwels "oues" vervang: die lyn tussen $(p \longrightarrow q, \mathrm{T})$ en $(p \leftrightarrow q, \neg p \wedge \neg q)$ word weggeneem, maar dié tussen $(p \longrightarrow q, \mathrm{T})$ en $(p \leftrightarrow q, \mathrm{T})$ moet behou word. Die diagram van $\preceq_{b}$ vir $\mathrm{D} \equiv p \vee q$ word deur Figuur 30 geïllustreer. Let op, dat in teenstelling met $\sqsubseteq_{b}$, is $\neg p \not\preceq_{b} \neg p \wedge \neg q$.

Vir die konstruksie van die versigtige ordeninge $\sqsubseteq_{c}$ (leksikografies) en $\preceq_{c}$ (produk) gebruik ons metodes, soortgelyk aan dié vir die konstruering van $\sqsubseteq_{b}$ en $\preceq_{b}$. Die proses vir $\sqsubseteq_{c}$ is kortliks as volg: Beskou die leksikografiese produk $(\mathcal{N}_{s}, \vDash)$ @ $(\mathcal{P}_{w}, \Dashv)$ van die sterk negatiewe sinne (al die sinne X waarvoor $X \equiv \nabla_{cs}X$) met die swak positiewe sinne (alle sinne X waarvoor $X \equiv \Delta_{cw}X$), en orden dit leksikografies: vir alle $(N_1, P_1), (N_2, P_2) \in (\mathcal{N}_{s}, \vDash)$ @ $(\mathcal{P}_{w}, \Dashv)$:

$$(N_1, P_1) \ll (N_2, P_2) \Leftrightarrow N_1 \vDash N_2 \text{ en as } N_1 \equiv N_2, \text{ dan } P_2 \vDash P_1.$$

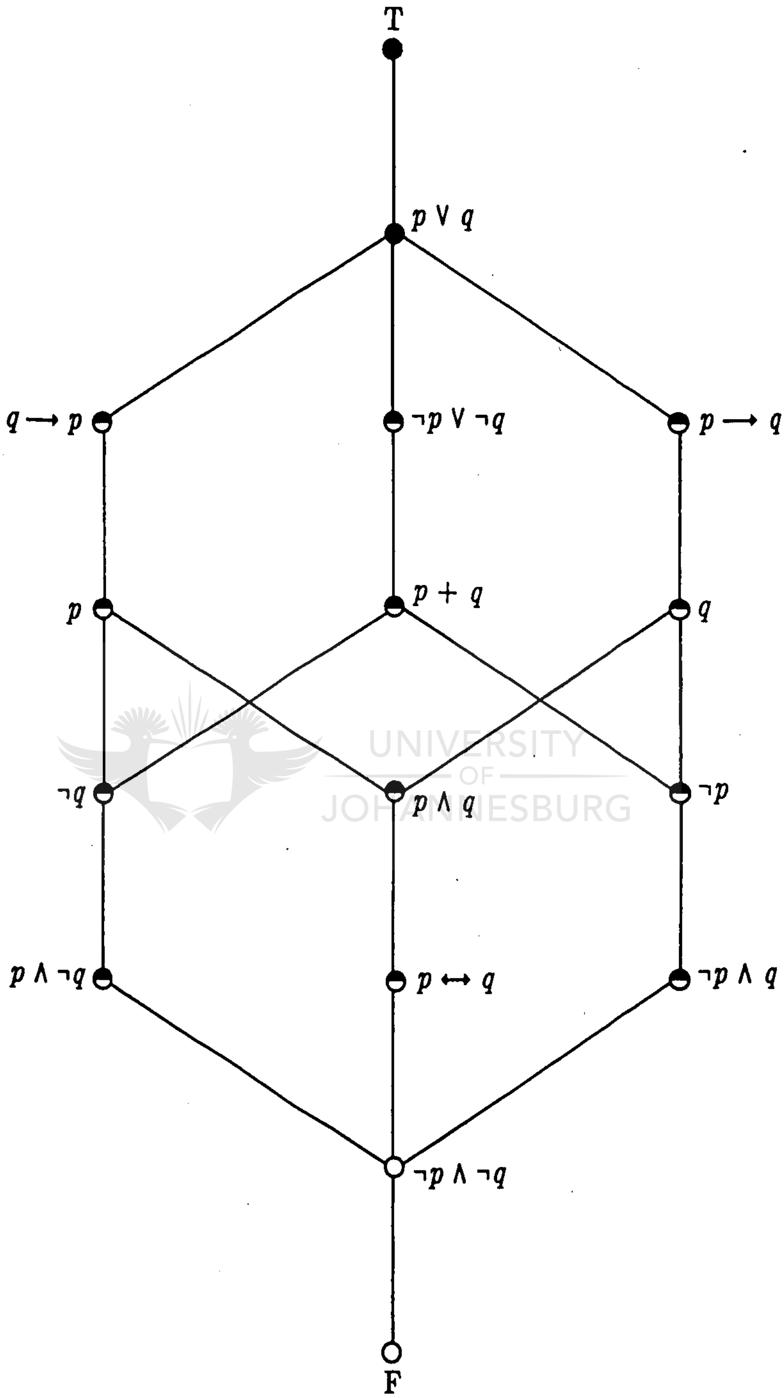
Met die behoud van dié ordening word vir elke $(N, P) \in (\mathcal{N}_{s}, \vDash)$ @ $(\mathcal{P}_{w}, \Dashv)$ al die sinne X waarvoor $\nabla_{cs}X \equiv N$ en $\Delta_{cw}X \equiv P$ volgens logiese afleibaarheid georden. $\preceq_{c}$ word verkry deur al dié relasiepare $X \sqsubseteq_{c} Y$ te neem waarvoor $\Delta_{cw}Y \vDash \Delta_{cw}X$. Figuur 31 illustreer $\sqsubseteq_{c}$ en Figuur 32 $\preceq_{c}$ vir $\mathrm{D} \equiv p \vee q$. Met behulp van Tabel 11 behoort dit vir die leser duidelik te wees hoekom byvoorbeeld $p \wedge q \sqsubseteq_{c} p$ en $p \wedge q \not\preceq_{c} p$.

Die dapper karakter van die datagetrouheidordening, $\sqsubseteq_{b}$, is duidelik te bespeur in sy diagram vir $\mathrm{D} \equiv p \vee q$ (Figuur 29): Die D–onwaar sin, $\neg p \wedge \neg q$, wat geen wêreld met die data deel nie word bó sinne verkies wat een (byvoorbeeld $\neg p$), twee (byvoorbeeld $p \longrightarrow q$) en selfs drie (byvoorbeeld T) wêrelde met D deel. Dat vir laasgenoemde drie sinne $\mathrm{T} \sqsubseteq_{b} (p \longrightarrow q) \sqsubseteq_{b} \neg p$, wys juis hoe 'n geringe rol die "deel van wêrelde met D" in hierdie ordening speel. Die sin $\neg p \wedge \neg q$ word daarom nie as beter as $p \vee q$ beskou nie — maar ook nie as slegter nie. Dat dié ordening informatiwiteit hoog aanslaan, word duidelik deur die relasie paar $p \vee q \sqsubseteq_{b} p + q$ geïllustreer: $p \vee q$ en $p + q$ het dieselfde sterk positiewe afsluitings en dieselfde swak negatiewe afsluitings;



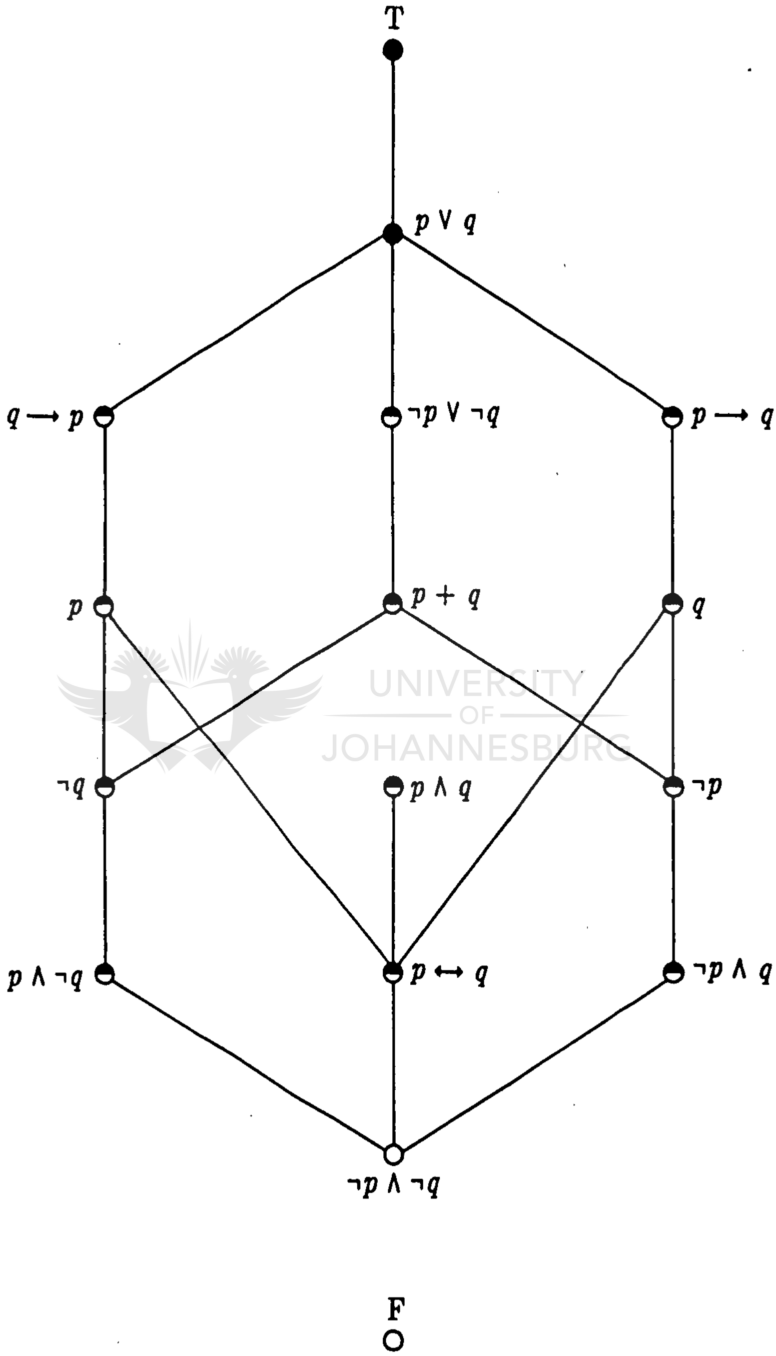
Figuur 30

($\prec_5$ vir D $\equiv p \vee q$)



Figuur 31

($\underset{\overline{c}}{\sqsubset}$ vir D $\equiv p \vee q$)



Figuur 32

($\underset{c}{\prec}$ vir D $\equiv p \vee q$)

$p + q$ het egter sterker deduktiewe krag as $p \vee q$ en word daarom eerder verkies.

Die versigtige leksikografiese ordening $\underset{c}{\sqsubseteq}$ (Figuur 31) daarenteen, plaas $p + q$ onder $\neg p \vee \neg q$ omdat $\neg p \vee \neg q$ 'n logies swakker sin is. Die klem op betroubaarheid kom ook in die relasiepaar $p \vee q \underset{c}{\sqsubseteq} \mathrm{T}$ na vore. Die "deel van wêrelde met D" is dan ook vir hierdie ordening, in teenstelling met $\underset{b}{\sqsubseteq}$, belangrik: nóú geld $\neg p \underset{c}{\sqsubseteq} (p \longrightarrow q) \underset{c}{\sqsubseteq} \mathrm{T}$.

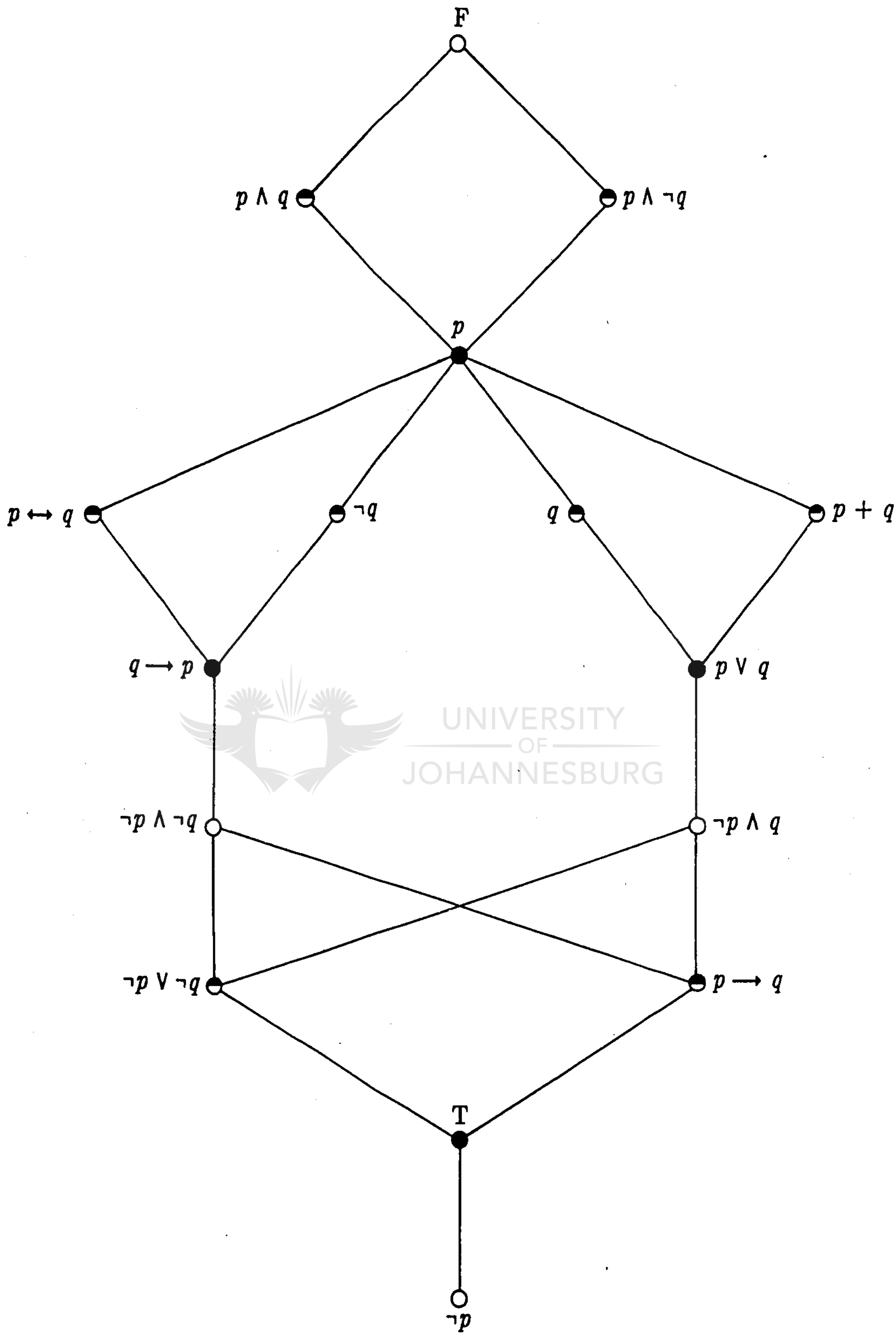
In die taal voortgebring deur $\{p, q\}$, verteenwoordig die keuse $\mathrm{D} \equiv p$ die geval van "halwe" informasie oor die waarheid: $\mathrm{D} = \{(1,1), (1,0)\}$ bestaan nie net uit die helfte van die moontlike wêrelde van $\mathbf{W} = \mathbf{2}^2$ nie, maar is ook die modelle van één van die twee atomiese lettersinne. Vir $\mathrm{D} = \{(1,1), (1,0)\}$ weet ons dus dat die reële wêreld (wat ons nie ken nie) 'n model van p moet wees; en dus nie 'n model van $\neg p$ nie. Omdat die "waarheid" vir sover dit ons kennis aangaan deur óf $(1,1)$ óf $(1,0)$ beskryf kan word, het ons geen idee of q of $\neg q$ moet geld nie. In dié sin gee ons data dus uitspraak oor twee van die vier lettersinne. Ons sal die ordeninge $\underset{b}{\sqsubseteq}$, $\underset{c}{\sqsubseteq}$, $\underset{b}{\preceq}$ en $\underset{c}{\preceq}$ van die sestien logies nie–ekwivalente sinne van ons illustratiewe taal vir $\mathrm{D} \equiv p$ nou illustreer en bespreek.

In tabel 12 word (vir hierdie geval — $\mathrm{D} \equiv p$) die sterk positiewe afsluiting $\underset{bs}{\Delta}X$, swak negatiewe afsluiting $\underset{bw}{\nabla}X$, sterk negatiewe afsluiting $\underset{cs}{\nabla}X$ en swak positiewe afsluiting $\underset{cw}{\Delta}X$ (soos geneem in terme van die ordeninge voorgestel in Tabel 8 in Afdeling 4.1) van elkeen van die sestien sinne X gegee. Volgens die tabel is die sinne T, p, $p \vee q$ en $q \longrightarrow p$ D–waar (die sinne met •), terwyl $\neg p$, $\neg p \wedge \neg q$, $\neg p \wedge q$ en F D–onwaar (die sinne met o) is — die res van die sinne is natuurlik D–onbepaald. $\mathcal{P}_s$, $\mathcal{N}_w$, $\mathcal{N}_s$ en $\mathcal{P}_w$ is nou onderskeidelik die versamelings $\{\mathrm{T}, p, p \wedge q, p \vee q, q \longrightarrow p, p \wedge \neg q, \mathrm{F}\}$; $\{\mathrm{T}, \neg p, \mathrm{F}\}$; $\{\mathrm{T}, p \longrightarrow q, \neg p, \neg p \wedge \neg q, \neg p \wedge q, \neg p \vee \neg q, \mathrm{F}\}$; en $\{\mathrm{T}, p, \mathrm{F}\}$.

Volgens die dapper leksikografiese ordening $\underset{b}{\sqsubseteq}$ (geïllustreer deur Figuur 33) word die sinne, $p \wedge q$ en $p \wedge \neg q$, wat presies deur een (maar verskillende) element van D bevredig word, roekeloos as beter as die sin p geëvalueer omdat $\underset{bs}{\Delta}(p \wedge q)$, $\underset{bs}{\Delta}(p \wedge \neg q) \subset \underset{bs}{\Delta}(p)$. Die D–onwaar sinne, $\neg p \wedge \neg q$ en $\neg p \wedge q$, wat in hierdie ordeninge as meer

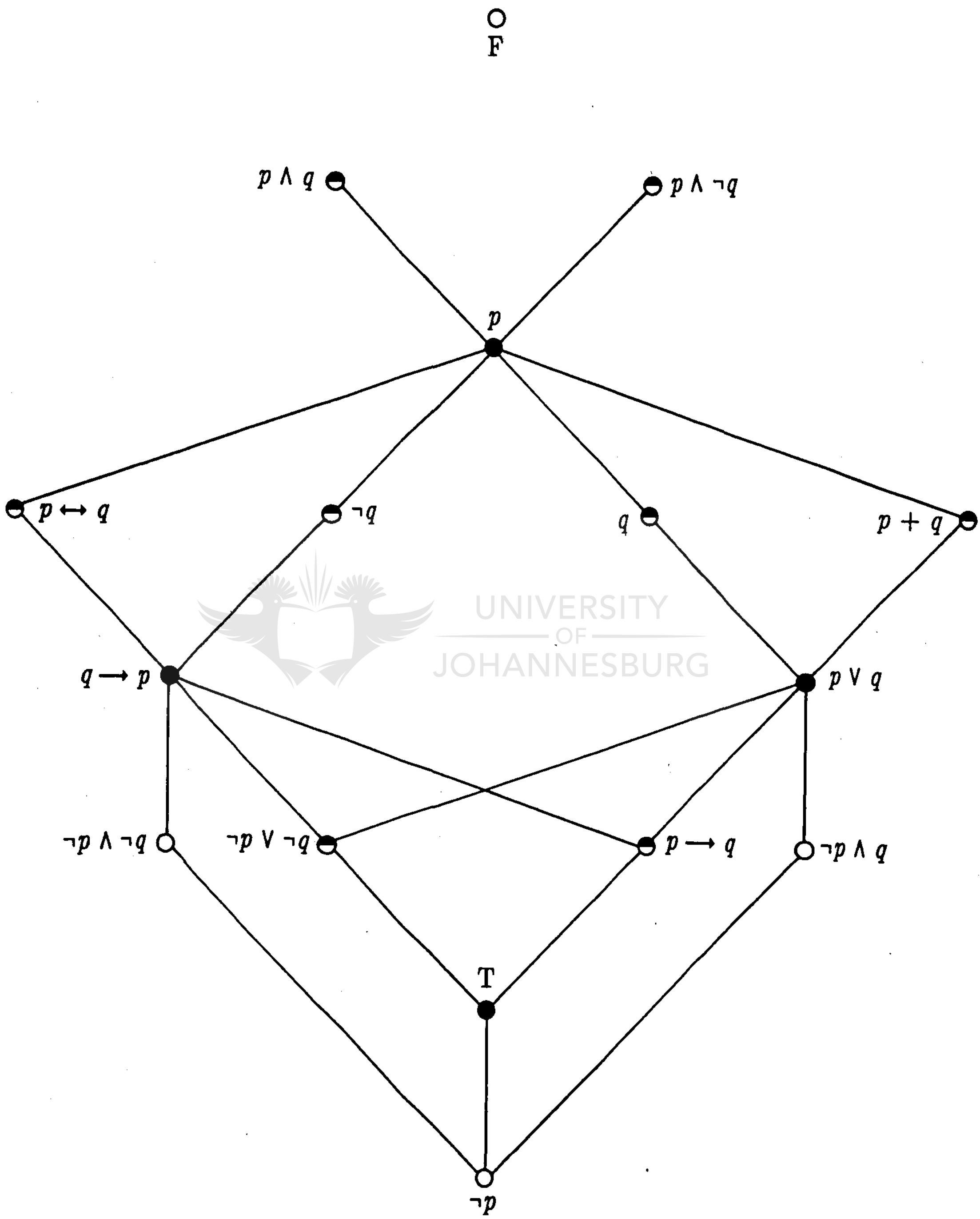
$D \equiv p$				
X	$\underset{bs}{\Delta X}$	$\underset{bw}{\nabla X}$	$\underset{cs}{\nabla X}$	$\underset{cw}{\Delta X}$
$\overset{\bullet}{T}$	T	T	T	T
$\overset{\bullet}{p}$	p	T	T	p
q	$p \vee q$	T	$p \rightarrow q$	T
$p \wedge q$	$p \wedge q$	T	$p \rightarrow q$	p
$p \overset{\bullet}{\vee} q$	$p \vee q$	T	T	T
$p \rightarrow q$	T	T	$p \rightarrow q$	T
$q \overset{\bullet}{\rightarrow} p$	$q \rightarrow p$	T	T	T
$p \leftrightarrow q$	$q \rightarrow p$	T	$p \rightarrow q$	T
$\overset{\circ}{\neg p}$	T	$\neg p$	$\neg p$	T
$\neg q$	$q \rightarrow p$	T	$\neg p \vee \neg q$	T
$\neg p \overset{\circ}{\wedge} \neg q$	$q \rightarrow p$	$\neg p$	$\neg p \wedge \neg q$	T
$\neg p \overset{\circ}{\wedge} q$	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	T
$p \wedge \neg q$	$p \wedge \neg q$	T	$\neg p \vee \neg q$	p
$\neg p \vee \neg q$	T	T	$\neg p \vee \neg q$	T
$p + q$	$p \vee q$	T	$\neg p \vee \neg q$	T
$\overset{\circ}{F}$	F	F	F	F

Tabel 12



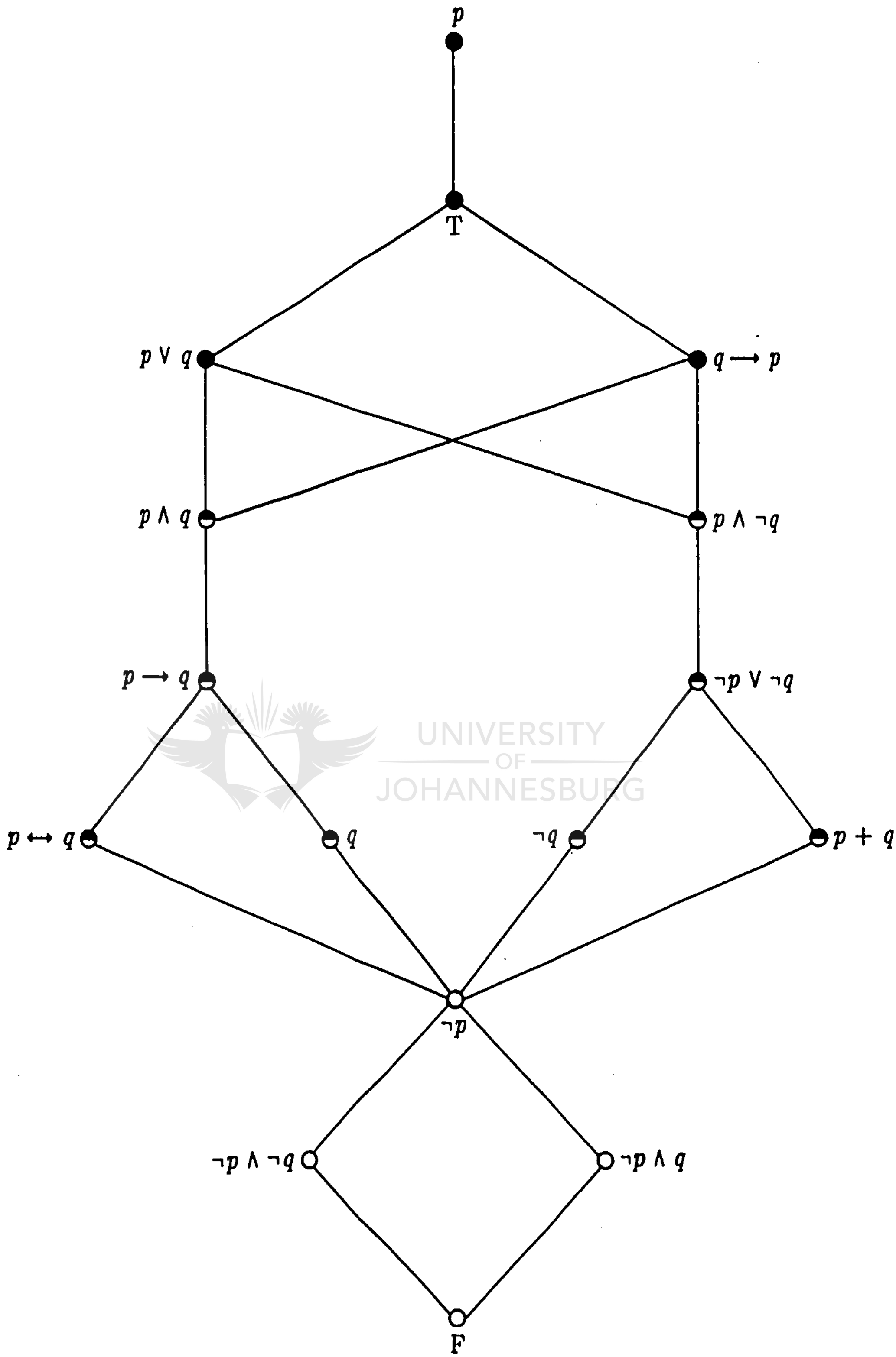
Figuur 33

($\sqsubseteq_{b}$ vir D $\equiv p$)



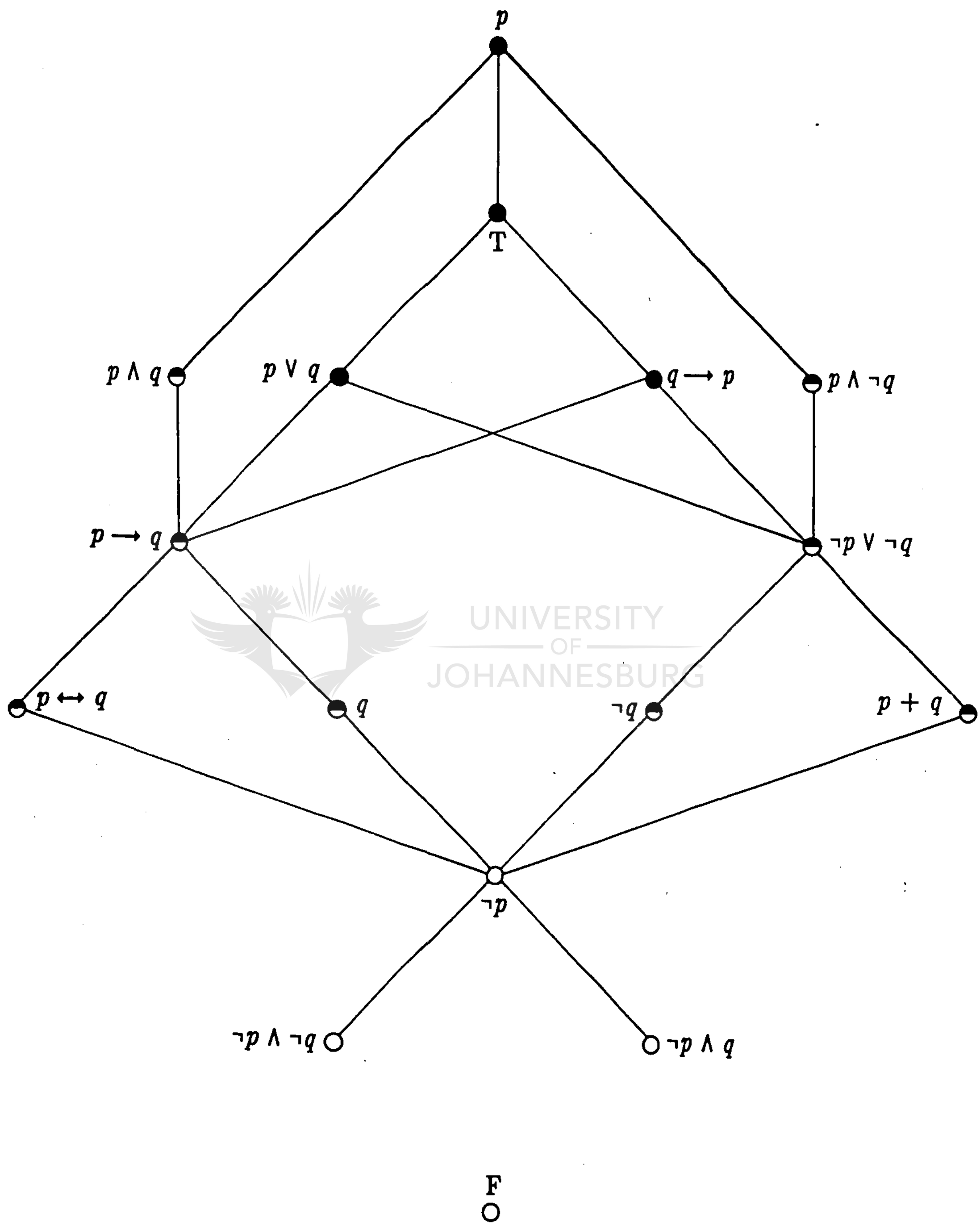
Figuur 34

($\prec_{D}$ vir D ≡ p)



Figuur 35

($\sqsubseteq_c$ vir D ≡ p)



Figuur 36

($\preceq_{\mathrm{c}}$ vir D $\equiv p$)

datagetrou as byvoorbeeld die D–waar sin T beskou word, kan volgens Stelling 4.1.9 (1) in die dapper produkordening $\underset{b}{\prec}$ (geïllustreer deur Figuur 34) nie meer bokant T, $p \longrightarrow q$ of $\neg p \vee \neg q$ geplaas word nie.

In die versigtige leksikografiese ordening $\underset{c}{\sqsubseteq}$ (Figuur 35) word die sin $D \equiv p$ bokant alle sinne geplaas — ook bokant T, want $\underset{bs}{\Delta}(T) \supset \underset{bs}{\Delta}(p)$. Let op watter posisies die sinne $p \wedge q$ en $p \wedge \neg q$ in hierdie ordening beklee. Die versterkte weergawe ($\underset{c}{\prec}$) word deur Figuur 36 geïllustreer. Interessant genoeg het ons dat $p \longrightarrow q \underset{b}{\sqsubseteq} \neg p \wedge q$, $\neg p \wedge q \underset{c}{\sqsubseteq} p \longrightarrow q$, maar $p \longrightarrow q \underset{b}{\not\prec} \neg p \wedge q$ en $\neg p \wedge q \underset{b}{\not\prec} p \longrightarrow q$. Vir $p \wedge q$ en $p \vee q$ geld weer: $p \vee q \underset{b}{\sqsubseteq} p \wedge q$, $p \wedge q \underset{c}{\sqsubseteq} p \vee q$, $p \wedge q \underset{c}{\not\prec} p \vee q$ en $p \vee q \underset{c}{\not\prec} p \wedge q$.

Die laaste geval wat ons wil bespreek is die geval van volledige informasie oor die waarheid, waar ons soos afgespreek, die informasie as $D = \{(1,1,\ldots,1)\}$ neem. In Hoofstuk 3 het ons die preordening $\Leftarrow$ en parsiële ordening $\Leftarrow$ gebruik om die waarheidsgetrouheid van teorieë te evalueer. Ons wil nou aantoon dat in hierdie geval die dapper datagetrouheidordening $\underset{b}{\prec}$ maar net die waarheidsgetrouheidordening $\Leftarrow$ is.

Soos reeds betoog, is vir $D = \{(1,1,\ldots,1)\}$, d.i. vir $D = p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$, die sterk ordeninge, $\underset{bs}{<}$ en $\underset{cs}{<}$, en die swak ordening, $\underset{bw}{<}$ en $\underset{cw}{<}$, op W maar net die produkordening. Vir elke teorie X is sy sterk en swak positiewe afsluitings dus maar net sy positiewe afsluiting (soos beskryf in Hoofstuk 2, Afdeling 2) — dus $\underset{bs}{\Delta}X \equiv \underset{cw}{\Delta}X \equiv \Delta X$; en soortgelyk, $\underset{cs}{\nabla}X \equiv \underset{bw}{\nabla}X \equiv \nabla X$. In die besonder is vir die sestien logies nie–ekwivalente sinne van ons illustratiewe taal, ΔX en ∇X soos gelys in Tabel 2, Afdeling 3.1. Vir volledige informasie is natuurlik alle sinne óf D–waar óf D–onwaar en dan praat ons sommer net van *waar* en *onwaar* (in plaas van byvoorbeeld D–waar). In Figuur 37 (die illustrasie van $\underset{b}{\sqsubseteq}$) kan die leser duidelik sien dat heelwat onwaar sinne as meer datagetrou (of dan meer waarheidsgetrou) as waar sinne in die dapper ordening $\underset{b}{\sqsubseteq}$ beskou word. Die sin $p \wedge q$ wat in die illustratiewe taal die volle waarheid verteenwoordig is egter behalwe vir die sin F, "beter" as al die sinne; terwyl die sin

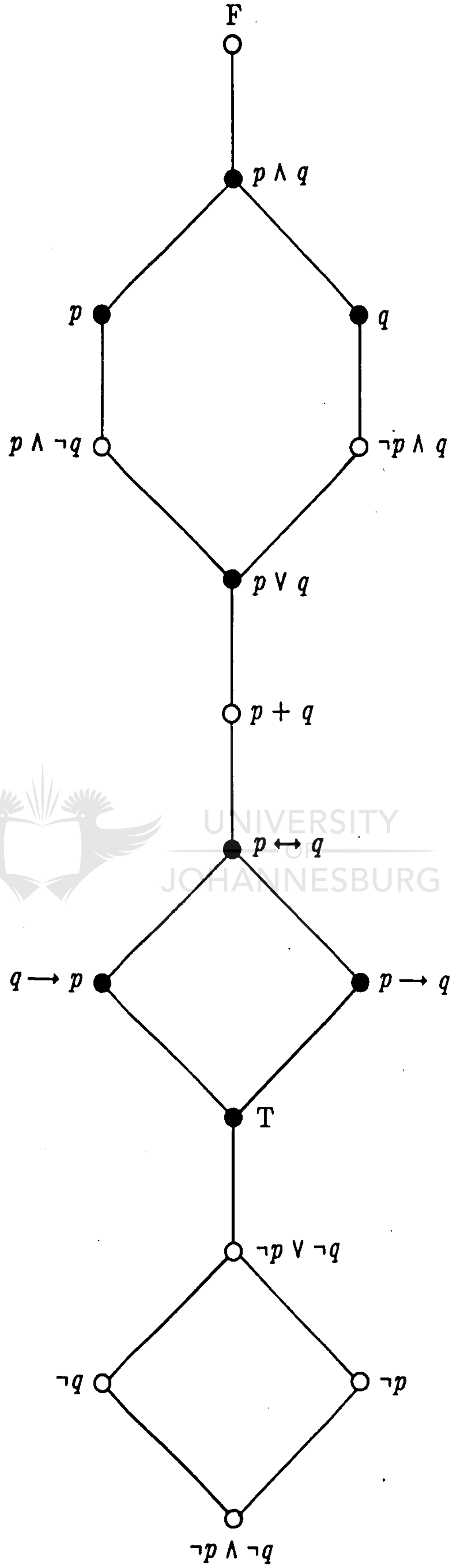
$\neg p \wedge \neg q$, wat die "anti–waarheid" verkondig, heel laaste in die ry van "nader–aan–die–waarheid" staan.

Volgens Stelling 3.4.5 (Afdeling 3.4) geld vir alle teorieë X, Y, dat as $\diamond X \equiv \diamond Y$ (d.i. $\Delta X \equiv \Delta Y$ en $\nabla X \equiv \nabla Y$) dan $X \Leftarrow Y$ ass $Y \vdash X$. Dit beteken niks anders nie as dat vir die geval van volledige informasie oor die waarheid, die dapper datagetrouheidprodukordening $\preceq_D$, maar net die parsiële waarheidsgetrouheidordening $\Leftarrow$ is. Vir ons illustratiewe taal lewer $\preceq_D$ dus die ordening van Figuur 21 (Afdeling 3.4).

Figuur 38 illustreer die versigtige leksikografiese ordening $\sqsubseteq_C$ van die sestien logies nie–ekwivalente sinne van ons illustratiewe taal vir $D \equiv p \wedge q$. Soos ons nou al van hierdie ordening kan verwag, word die sin $p \wedge q$ heel bo geplaas en ook alle waar sinne bokant alle onwaar sinne. Interessant genoeg is die boonste vyf sinne in die diagram georden volgens omgekeerde logiese afleibaarheid, terwyl die onderste vier sinne in die diagram volgens logiese afleibaarheid georden is. (Die boonste vyf is natuurlik positief en die onderste vier negatief.) Die sinne T, $q \rightarrow p$, $p \rightarrow q$ en $p \leftrightarrow q$ is die enigste sinne wat dieselfde positiewe sowel as dieselfde negatiewe afsluitings het (wat vir dié eenvoudige taal — positiewe en negatiewe afsluitings, die sin T is). Dit beteken dat dié vier sinne die enigste posisies is waar die diagram van $\preceq_C$ (Figuur 39) van dié van $\preceq_D$ (Figuur 21 in Afdeling 3.4) kan verskil: in Figuur 21 word die vier sinne volgens omgekeerde logiese afleibaarheid georden; in Figuur 39 volgens logiese afleibaarheid. Dit is interessant om daarop te let dat $p \leftrightarrow q \sqsubseteq_D p + q$, $p + q \sqsubseteq_C p \leftrightarrow q$, maar dat dié twee sinne onvergelykbaar is met betrekking tot $\preceq_D$ en $\preceq_C$.

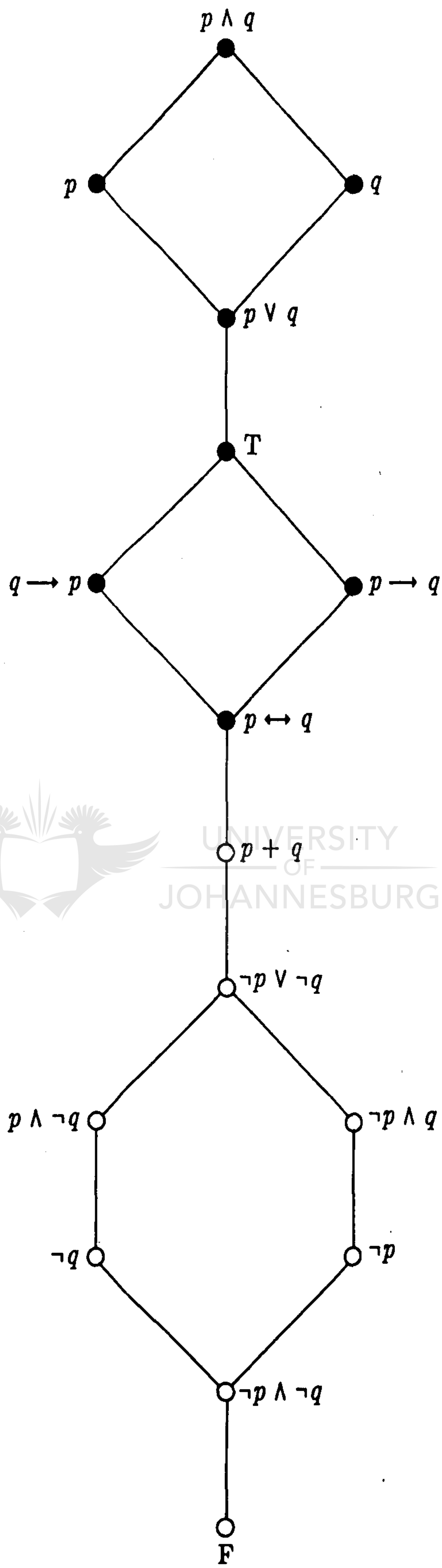
Behalwe vir die illustrasies van die leksikografiese ordeninge, $\sqsubseteq_D$ en $\sqsubseteq_C$, en die produkordeninge, $\preceq_D$ en $\preceq_C$, wil ons in hierdie afdeling ook die leser oortuig van die toepassingsmoontlikhede van ons teorie oor datagetrouheid in digitale inligtingsoordrag. Ons sal begin deur aan te toon dat die proposisionele logika as model vir onsekerheid in digitale inligtingsoordrag kan dien.

Digitale inligtingsoordrag handel kortliks oor die oorseining van boodskappe



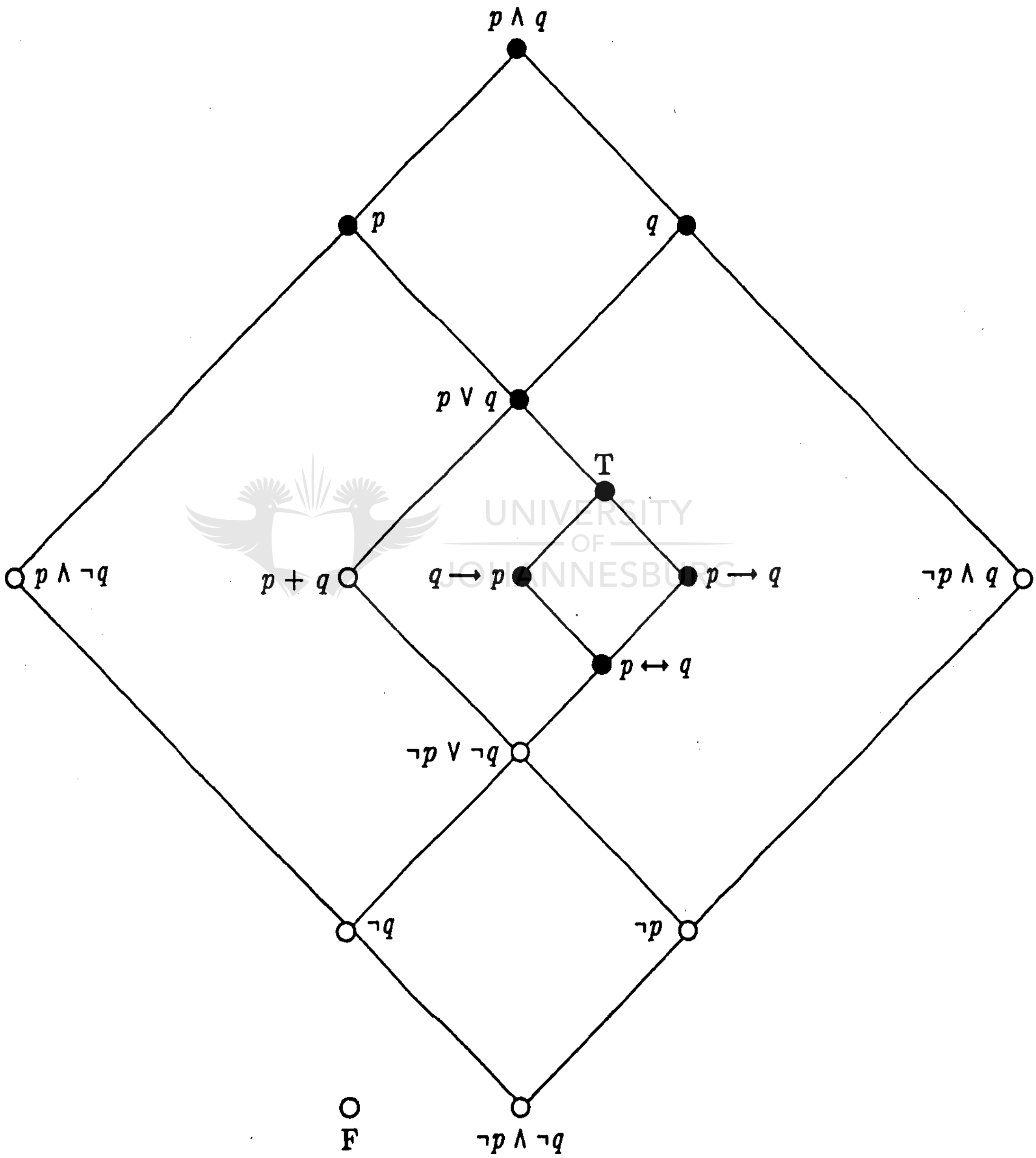
Figuur 37

($\sqsubseteq_{\mathrm{D}}$ vir D $\equiv p \wedge q$)



Figuur 38

($\underset{c}{\sqsubseteq}$ vir D $\equiv p \wedge q$)



Figuur 39

($\preceq_{\mathrm{c}}$ vir D $\equiv p \wedge q$)

wat gekodeer is as 'n eindige string simbole — gekies uit enige eindige alfabet. Enige eindige alfabet kan egter in terme van die Boole–algebra **2** = {0, 1} gekodeer word, sodat ons sonder verlies aan algemeenheid die alfabet as {0, 1} kan neem. Vir ons doel sal ons aanneem dat die lengte van die boodskappe bekend is — meer spesifiek; ons veronderstel die boodskappe is van lengte n. Elke boodskap is dus maar net 'n n–tal nulle en ene; of 'n moontlike wêreld of valuasie v : $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \rightarrow \{0, 1\}$.

Die sender stuur die boodskap deur 'n sekere kanaal aan die ontvanger. Wanneer daar ruis (of versteurings) in die kanaal van oorseining voorkom, kan dit gebeur dat die boodskap foutief oorgesein word, en wat dan in die omruil van simbole manifesteer: $0 \longmapsto 1$, $1 \longmapsto 0$. Ons gee 'n eenvoudige voorbeeld: 'n Gekodeerde deeltjie van 'n satellietfoto (as boodskap), sê (1,0,0,1), word deur die lugruimte (as kanaal) na 'n ontvanger op die aarde gestuur. As gevolg van versteurings, soos weerlig, word die boodskap foutief as (1,1,0,0) ontvang.

In die geval van boodskappe met lengte n, is daar in totaal 2^n moontlike boodskappe — waarvan, in beginsel, enigeen by die ontvanger kan uitkom. Afhangende van die data waaroor hy (of sy of dit) beskik, het die ontvanger 'n sekere graad van (on)sekerheid oor die korrekte boodskap wat op 'n spektrum, van totale sekerheid aan die een kant, tot totale onsekerheid aan die ander kant, kan varieer:

- *Totale sekerheid:* die ontvanger het volledige data oor die korrekte boodskap en weet dus *presies watter een* van die 2^n moontlike n–talle die korrekte boodskap is.
- *Totale onsekerheid:* die ontvanger het geen of teenstrydige data — vir sover hy weet kan die boodskap *enigeen* van die 2^n moontlikhede wees.
- *Tussenin:* die ontvanger weet die korrekte boodskap moet *een van 'n versameling* boodskappe wees.

Elke moontlike toestand van die ontvanger se kennis (en dus van sy (on)sekerheid) oor die korrekte boodskap is dus maar net 'n versameling boodskappe (moontlike wêrelde of valuasies), d.i. 'n konfigurasie, of sin in die proposisietaal met n voortbringers. Die proposisielogika kan dus gebruik word om onsekerheid in digitale inligtingsoordrag uit te druk.

Op grond van sy kennis (data) oor die korrekte boodskap, kan die ontvanger nou sekere *vermoedens* uitspreek (of *raaiskote* waag) oor wat die korrekte boodskap moet wees, waarmee ons bedoel dat die ontvanger vermoed (of raai) dat die korrekte boodskap een van 'n sekere versameling boodskappe moet wees. Dus, met 'n raaiskoot of vermoede bedoel ons weer eens maar net een of ander konfigurasie, wat natuurlik weer met 'n proposisie ooreenkom. Ons beskrywing van informasiegetrouheid stel die ontvanger dan in staat om in die lig van sy kennis oor die korrekte boodskap, nie alleenlik alle moontlike boodskappe asook alle moontlike raaiskote (d.i. versamelings moontlike boodskappe) te vergelyk nie — hy kan boonop 'n persoonlike stempel op die vergelykingsproses plaas. Daarmee bedoel ons dat ons beskrywing van informasiegetrouheid voorsiening maak vir die ontvanger met 'n dapper ingesteldheid sowel as vir die een met 'n meer versigtige benadering. Natuurlik vereis sekere situasies 'n meer konserwatiewe benadering, terwyl die ontvanger met ander situasies maar sy nek bietjie kan uitsteek (sonder die vrees dat hy "onthoof" sal word in die proses). Ons gee 'n eenvoudige voorbeeld:

Veronderstel ons werk met boodskappe van lengte n = 2. Dan is $\mathbf{W} = 2^n = \{(1,1), (1,0), (0,1), (0,0)\}$ — die versameling van alle moontlike boodskappe van lengte 2. Ons neem aan dat die ontvanger oor inligting beskik waarvolgens hy weet die korrekte boodskap moet (1,1) of (1,0) wees, d.i. $\mathbf{D} = \{(1,1), (1,0)\}$. Werk ons met die proposisietaal voortgebring deur $\{p, q\}$, beteken dit $D \equiv p$. Veronderstel p en q dra onderskeidelik die betekenisse van "val basis P aan" en "val basis Q aan". Dan kom die elemente van $\mathbf{W} = 2^n$ met die volgende boodskappe ooreen: (1,1): val basis P en basis Q aan; (1,0): val basis P aan, maar nie basis Q nie; (0,1): val basis Q aan, nie basis P nie; en (0,0): moenie basis P aanval nie en ook nie basis Q nie. Volgens sy beskikbare inligting weet die ontvanger (veronderstel hy is 'n weermaggeneraal) net dat hy basis P moet aanval, oor basis Q is hy in die duister. Vir 'n generaal wie se bevordering afhang van 'n suksesvolle aanslag, is hierdie onvolledige inligting 'n nagmerrie — moet hy nou basis Q aanval of nie. Afhangende van die erns van die situasie en sy eie ingesteldheid besluit hy dan op ordeninge op **W** om uiteindelik alle moontlike raaiskote te orden en hom sodoende te help in sy besluitnemingsproses.

'n Verantwoordelike generaal sal waarskynlik die belangrikheid en sterkte van basisse P en Q oorweeg voordat hy besluit of die situasie hom tot 'n dapper of versigtige benadering leen. Sou hy besluit dit is beter om liewers nie waaghalsig te wees nie ('n derde wêreldoorlog kan miskien deur sy optrede om basis Q aan te val ontketen word) sal hy volgens Figuur 35 (of Figuur 36 as hy ekstra versigtig is) die raaiskoot {(1,1), (1,0)} (d.i. p) bo byvoorbeeld {(1,1)} (d.i. $p \wedge q$) oorweeg. Hitler se manne aan die ander kant, sou waarskynlik minder versigtig wees om basis Q aan te val (want hulle sou dit tog uiteindelik een of ander tyd moes doen) en dan eerder een van die dapper ordeninge ($\sqsubset_{б}$ of $\prec_{б}$) gebruik om hulle besluitnemingsproses te rig — volgens Figure 33 en 34 sou hulle dan $p \wedge q$ bo p oorweeg.

In die geval van sulke eenvoudige voorbeelde (boodskappe met lengte 2) mag dit vir die leser onnodig voorkom om byvoorbeeld vir D = {(1,1), (1,0)} raaiskote soos {(0,1), (0,0)} te oorweeg, omdat die "beste" raaiskote so duidelik uitkenbaar is (nie dat daar nie generaals is wat wel heeltemal in stryd met die inligting sal handel nie — ons sal liewers nie voorbeelde noem nie). Vir gevalle met boodskappe van langer lengtes (wat 'n proposisietaal met meer veranderlikes beteken) is dit egter nié so maklik om die beste raaiskote uit te ken nie en dan kom ons informasiegetrouheid-ordeninge wel handig te pas.

——oOo——

SLOTOPMERKINGS

Die hele verhaal oor die waarheidsgetrouheid– en datagetrouheidordeninge van teorieë het afgespeel binne die raamwerk van 'n baie eenvoudige proposisionele taal. Ons hoop om in die nabye toekoms die ordeningrelasies en hul eienskappe in groter diepte te ondersoek — ons beoog onder andere om hulle ook vir teorieë in die taal van die predikaatlogika te definieer en bestudeer. Argumente vir die bestudering van eenvoudige teorieë in die studie van waarheidsgetrouheid bestaan daar egter wel — as iemand byvoorbeeld Popper se idee aan eenvoudige voorbeelde getoets het, sou dit nie 'n dekade geneem het om die probleem in sy definisie raak te sien nie.

Die bestudering van toepassingsmoontlikhede in onder andere die Psigologie, is 'n verdere beoogde navorsingsprojek. Daar bestaan alreeds wiskundige modellerings vir die teorieë oor voorkeure (sien Moutafakis [1987]) en dit skyn of ons ordeningrelasies ook in hierdie veld aangewend kan word.

Ons het aangetoon dat vir die geval van geen informasie (d.i. $D \equiv T$), die dapper ordening, $\sqsubseteq_{b}$, met omgekeerde logiese afleibaarheid ooreenkom; en die versigtige ordening, $\sqsubseteq_{c}$, met logiese afleibaarheid. Ons ordeninge, $\sqsubseteq_{c}$ en $\sqsubseteq_{b}$, is dus veralgemenings van die gewone afleibaarheidsrelasie. As gevolg van hierdie feit is daar ook nog 'n ander belowende toepassingsmoontlikheid van ons ordeningrelasies — naamlik in die studie van deduktiewe databasisse waar mens die gewone afleibaarheidsrelasie met $\sqsubseteq_{b}$ of $\sqsubseteq_{c}$ kan vervang.

——oOo——

LITERATUURVERWYSINGS

ACKERMANN, R.J. [1976]: *The Philosophy of Karl Popper.* University of Massachusetts, Amherst.

BALBES, R. & DWINGER, P. [1974]: *Distributive Lattices.* University of Missouri Press, Missouri.

BARWISE, J. (ed.) [1977]: *Handbook of Mathematical Logic.* (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 90.) North–Holland, Amsterdam.

BIRKHOFF, G. [1944]: "Subdirect unions in Universal Algebra", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **49**, pp. 567 – 568.

BRINK, C. [1989]: "Verisimilitude: Views and reviews", *History and Philosophy of Logic*, **10**, pp. 181 – 201.

BRINK, C. [199?]: "Power Structures", *Algebra Universalis*, te verskyn.

BRINK, C. & HEIDEMA, J. [1987]: "A Verisimilar ordering of theories phrased in a propositional language", *The British Journal for the Philosophy of Science*, **38**, pp. 533 – 549.

BRINK, C. & HEIDEMA, J. [1989]: "A Verisimilar ordering of propositional theories: the infinite case", *Technical report series of the Automated Reasoning Project*, TR – ARP – 1/89, Australian National University, Canberra.

BRINK, C. & HEIDEMA, J. [1991]: "Verisimilitude by power relations: a response to Oddie", *The British Journal for the Philosophy of Science*, 42, pp. 101 – 104.

BRINK, C.; PRETORIUS, J.P.G. & VERMEULEN, J.J.C. [1991]: "Verisimilitude via Vietoris", *Research Reports*, RR 117 May 1991, Department of Mathematics, University of Cape Town.

BURGER (née Engelbrecht), I.C. & HEIDEMA, J. [1990]: "Positive and Negative Contents of Theories: another approach to Verisimilitude", *Structures in Mathematical Theories* (*Reports of the San Sebastian International Symposium*), September, pp. 45 – 49.

BURGER, I.C. & HEIDEMA, J. [199?]: "Comparing theories by their Positive and Negative Contents", *The British Journal for the Philosophy of Science*, te verskyn.

CHANG, C.C. & KEISLER, H.J. [1991] (Third Edition): *Model Theory.* (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 73.) North–Holland, Amsterdam.

DUDEK, J. [1991]: "Dedekind's numbers characterize distributive lattices", *Algebra Universalis*, 28, pp. 36 – 39.

ECKERMANN, J.P. [1911]: *Gespräche mit Goethe in den letzten Jahren seines Lebens.* Deutsche Bibliothek, Berlin.

ECKERMANN, J.P. [1971]: *Conversations with Goethe.* Dent, London.

GOLDSTICK, D. & O'NEILL, B. [1988]: " 'Truer' ", *Philosophy of Science*, **55**, pp. 583 – 597.

GRÄTZER, G. [1971]: *Lattice Theory: First Concepts and Distributive Lattices.* Freeman, San Francisco.

GRÄTZER, G. [1978]: *General Lattice Theory.* Birkhäuser Verlag, Basel.

HARRIS, J. [1974]: "Popper's definitions of 'Verisimilitude'", *The British Journal for the Philosophy of Science*, **25**, pp. 160 – 166.

HEIDEMA, J. & LABUSCHAGNE, W.A. [1990]: "Data–dependance of semantic information", *South African Computer Journal*, no. **3**, pp. 39 – 44.

HUGHES, G.E. & CRESSWELL, M.J. [1968]: *An introduction to Modal Logic.* Methuen, London.

KISIELEWICZ, A. [1988]: "A solution of Dedekind's problem on the number of isotone Boolean functions", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **386**, pp. 139 – 144.

KLEITMAN, D. [1969]: "On Dedekind's problem: The number of monotone Boolean functions, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **21**, pp. 677 – 682.

KNEALE, W. & KNEALE, M. [1966]: *The Development of Logic.* Oxford University Press, Oxford.

KUHN, T.S. [1970]: *The Structure of Scientific Revolutions.* (International Encylopedia of Unified Science, Vol. 2, no. 2.) Chicago University Press, Chicago.

KUIPERS, T.A.F. (ed.) [1987]: *What is Closer–to–the Truth?* (Poznan Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities, Vol. 10.) Editions Rodopi, Amsterdam.

MILLER, D. [1974]: "Popper's qualitative theory of Verisimilitude", *The British Journal for the Philosophy of Science*, **25**, pp. 166 – 177.

MOUTAFAKIS, N.J. [1987]: *The Logics of Preference: A study of Prohairetic Logics in Twentieth Century Philosophy.* D. Reidel, Dordrecht.

NIINILUOTO, I. [1987]: *Truthlikeness.* (Synthese Library, Vol. 185.) D. Reidel, Dordrecht.

ODDIE, G. [1986]: *Likeness to Truth.* (The University of Western Ontario Series in Philosophy of Science, Vol. 30.) D. Reidel, Dordrecht.

ODDIE, G. [1987]: "Truthlikeness and the convexity of propositions", in KUIPERS [1987], pp. 197 – 216.

ODDIE, G. [1990]: "Verisimilitude by power relations", *The British Journal for the Philosophy of Science*, 41, pp. 129 – 135.

POPPER, K.R. [1969]: *Conjectures and Refutations: The Growth of Scientific Knowledge.* Routledge & Kegan Paul, London.

POPPER, K.R. [1972]: *Objective Knowledge.* Oxford University Press, Oxford.

PRETORIUS, J. [1988]: "The power structure of a lattice" (ongepubliseerde artikel), Department of Mathematics, University of Cape Town..

SCHILPP, P.A. (ed.) [1974]: *The Philosophy of Karl Popper.* (The Library of Living Philosophers, Volume XIV, Book 1.) Open Court, La Salle.

SCHURZ, G. & WEINGARTNER, P. [1987]: "Verisimilitude defined by relevant consequence–elements: a new reconstruction of Popper's original idea", in KUIPERS [1987], pp. 47 – 69.

TICHÝ, P. [1974]: "On Popper's definitions of Verisimilitude", *The British Journal for the Philosophy of Science*, 25, pp. 155 – 160.

TICHÝ, P. [1976]: "Verisimilitude redefined", *The British Journal for the Philosophy of Science*, 27, pp. 25 — 42.

VON WRIGHT, G.H. [1957]: *Logical Studies.* Routledge & Kegan Paul, London.

WALKER, J. [1984]: "Isotone relations and the Fixed–point Property for posets", *Discrete Mathematics*, 48, pp. 275 – 288.

WHITMAN, P.M. [1961]: "Status of word problems for lattices", *Lattice Theory* (*Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Vol. II, pp. 17 – 21), American Mathematical Society, Rhode Island.

——oOo——

INDEKS VAN NOTASIES

INDEKS VAN NOTASIES (VERVOLG)

INDEKS VAN NOTASIES (VERVOLG)

INDEKS VAN NOTASIES (VERVOLG)

——oOo——

INDEKS VAN BEGRIPPE

INDEKS VAN BEGRIPPE (VERVOLG)

INDEKS VAN BEGRIPPE (VERVOLG)

INDEKS VAN BEGRIPPE (VERVOLG)

——oOo——

INDEKS VAN TABELLE

——oOo——

INDEKS VAN FIGURE

INDEKS VAN FIGURE (VERVOLG)

——oOo——