

stestem-  
methodologie  
in  
sociaal-  
wetenschappelijk  
onderzoek



promotor prof dr M Albinski



©1978, J.H.L. Oud, Berg en Dal

Alle rechten voorbehouden

All rights reserved

# stelsysteem- methodologie in sociaal- wetenschappelijk onderzoek

Proefschrift

ter verkrijging van de graad van doctor  
in de sociale wetenschappen aan de  
katholieke universiteit te Nijmegen,  
op gezag van de rector magnificus,  
prof dr A J H Vendrik,  
volgens besluit van het college van  
decanen in het openbaar te verdedigen  
op 7 september 1978, des middags om 4 uur  
door

Johannes Hendricus Lodewijk Oud  
geboren te Wognum

Alfa / Nijmegen

## Inhoud

Figuren	viii
Tabellen	x
Voorwoord	xi
Hoofdstuk 1: Systeembenadering en systeem-model	1
1.1 Voorlopers van het systeem-model	1
1.2 De "general systems movement"	4
1.3 Systeembenadering: streven naar "unity of science"	10
1.4 Systeembenadering: alternatief voor "reductionisme"	20
1.5 Systeembenadering en sociaal-wetenschappelijk onderzoek	26
1.6 Het systeem-model	34
Hoofdstuk 2: Mathematische representatie: beschrijvend en verklarend	41
2.1 Van tijdgevoelig abstractie-model naar representatie-model	41
Tijdgevoelige abstractie-modellen $M$ , $M'$ , $S$ en $S'$	43
Representatie-modellen $R(M)$ , $R(M')$ , $R(S)$ en $R(S')$	55
2.2 Wetmatigheden en verklaringsrelaties	69
Verschillende soorten verklaringsrelaties, hun toetsing en oplossingsrelaties	72
Een identificatie-procedure voor lineaire tijd-invariante differentie- en differentiële relaties	90
2.3 Cross-sectioneel en tijdserieel onderzoek van verklaringsrelaties met inbegrip van feedback-perikelen	98
Geheugenloze relaties als afgeleide relaties onder de evenwichtsassumptie	98
Multirelationele verklaringsmodellen met en zonder geheugenloze feedback-loops	102

Hoofdstuk 3: Systemische verklaringsmodellen	118
3.1 Toestand-ruimte-modellen als realisaties van input-output-modellen	118
$M_{I/O}$ en $M_{\Sigma}$ , triviale en canonieke realisatie in het tijd-invariante geval	120
Lineaire $M_{I/O}$ en $M_{\Sigma}$ , minimaal-dimensionale realisatie in het eindig-dimensionale tijd-invariante geval	133
3.2 Toestand-ruimte-modellen via modellen $[A,B,C,D]$ en $[A(t),B(t),C(t),D(t)]$ : oplossingsprocedures en stabiliteit	150
Oplossing van de homogene differentie- c.q. differentiaal-vergelijking	157
Stabiliteit onder zero-input	181
Oplossing en stabiliteit onder $u \neq 0$	186
3.3 Modellen $[A,B,C,D]$ : schattingsprocedures in een bijzonder geval	193
Van differentie-model $[A,B,C,D]$ naar structurele modelvorm en omgekeerd	195
Geheugenloze coëfficiënten in de structurele modelvorm	198
De stochastische versie van differentie-model $[A,B,C,D]$	208
Consistentie, autocorrelatie en multicollineariteit	219
Interdependente structuren	228
De LISREL-benadering	245
3.4 Modellen $[A,B,C,D]$ : schatting en predictie	259
3.5 Systemische verklaringsmodellen als koppelingsmodellen van toestand-ruimte-modellen	276
Hoofdstuk 4: Enkele toepassingen	299
4.1 Een viertal modellen $[A,B,C,D]$ voor het lezen bij blinden	299
De structurele modellen I en II: specificatie en schatting	299
De modellen 1, 2, 3 en 4 en hun schatting	313
Dynamische implicaties van de geschatte modellen 1, 2, 3 en 4	318
4.2 Een model $[A,B,C,D]$ voor het lezen bij blinden op basis van de LISREL-benadering	338
Het LISREL-model: specificatie en schatting	338
Het LISREL-model als model $[A,B,C,D]$ en de dynamische implicaties van de schatting	353
4.3 De attitude t.o.v. zelfverwondend gedrag: een onderzoeksvoorstel aan de hand van een systemisch verklaringsmodel $R(S)$	361
Het onderzoeksvoorstel	361
Varianten, mogelijke uitkomsten en uitbreidingen	367



Appendix A: Computerprocedure in SPEAKEASY	375
Onderdeel 1	375
Onderdeel 2	376
Onderdeel 3	378
Onderdeel 4	379
Onderdeel 5	382
Onderdeel 6	384
Onderdeel 7	388
Appendix B: Data-matrix bij schatting van de structurele modellen I en II	392
Appendix C: Data-matrix bij schatting van het LISREL-model	394
Noten	396
Hoofdstuk 1	396
Hoofdstuk 2	404
Hoofdstuk 3	409
Hoofdstuk 4	415
Summary	416
Résumé	419
Literatuur	422
Personenregister	435
Zakenregister	439
Lijst met veelgebruikte symbolen	451

## Figuren

1.2.1: De verhouding tussen algemene systeemleer, informatie-theorie en cybernetica bij Klaus und Buhr	7
1.3.1: Toestand van relatieve onzekerheid (A) en relatieve zekerheid (B)	12
1.6.1: Interne relationele structuur van een systeem als geheel (I), van een drietal subsystemen (II) en van een partieel systeem (III)	35
1.6.2: Het elementaire black-box-model	39
1.6.3: Het uitgebreide black-box-model	39
2.1.1: De elementen-verzameling U in een tijdgevoelig abstractie-model	44
2.1.2: Een representatie-model $R(M')$ voor een micro-(structuur)-model $M'$ en een representatie-model $R(S')$ voor een macro-(black-box)-model $S'$ , symbolisch en grafisch (block-diagram-vorm) weergegeven	61
2.1.3: Veel voorkomende koppelingsrelaties met hun namen en vergelijkingen	62
2.1.4: Grafische weergave van drie systemische representatiemodellen $R(S)$ , waarin telkens een verschillende koppeling $\mathcal{S}$ van micro-verklaringsrelaties $A_\alpha$ , $A_\beta$ en $A_\gamma$ en een verschillende daaruit deduceerbare macro-verklaringsrelatie $A_\alpha$ ,	63
2.1.5: Grafische weergave van delayor en integrator met de bijbehorende vergelijkingen	64
2.2.1: Paren steekproef-getallen bij toetsing van een drietal bivariate tijd-invariante verklaringsrelaties met verschillende tijd-lags ( $\delta = 0$ , $\delta = 1$ , $\delta = 2$ )	74
2.2.2: Toetsing van een bivariate tijd-invariante differentierelatie	78
2.2.3: Het gedrag van $v_2^y(t)$ volgens differentie-vergelijking $v_2^y(t+1) - v_2^y(t) = a_{20} + a_{21} \cdot v_1^y(t) + a_{22} \cdot v_2^y(t)$ bij verschillende waarden van feedback-coëfficiënt $a_{22}$ en bij constante $v_1^y(t) = c_1$	91
3.1.1: 1-1-op-equivalente toestand-ruimte-modellen (tijd-invariant)	147
3.5.1: Een vijftal koppelingen $\mathcal{S}$ van micro-verklaringsrelaties $\rho_\alpha$ , $\rho_\beta$ en $\rho_\gamma$	279
3.5.2: Vervanging van model $\langle v_y; \rho_y \rangle$ met lineaire tijd-invariante $\rho_y$ door model $\langle v; \mathcal{S}; \rho_y \rangle$ met zero-input-response-functie $\rho_y^x$ en zero-state-response-functie $\rho_y^u$	285
3.5.3: Illustratie van de vervangingsprocedure in fig. 3.5.2 m.b.t. II in fig. 3.5.1: $\langle v; \mathcal{S}; A_\alpha \rangle$ met lineaire tijd-invariante $\rho_\alpha$ , $\rho_\beta$ , $\rho_\gamma$ wordt vervangen door $\langle v; \mathcal{S}; A_\alpha \rangle$ met zero-input-response-functies $\rho_\alpha^x$ , $\rho_\beta^x$ , $\rho_\gamma^x$ en zero-state-response-functies $\rho_\alpha^u$ , $\rho_\beta^u$ , $\rho_\gamma^u$	289

3.5.4: De feedback-loop in fig. 3.5.3 met slechts de zero-state-response-functies $\rho_{\alpha}^u$ , $\rho_{\beta}^u$ , $\rho_{\gamma}^u$	289
3.5.5: De signal-flow graph voor het block-diagram van fig. 3.5.3	295
3.5.6: De punt-eliminatie procedure aan de hand van een voorbeeld	297
4.1.1: De specificatie van structurele modellen I en II	305
4.1.2: Pijldiagrammen voor matrix $\hat{A}$ van de modellen 1 en 2 bij verwaarlozing van de coëfficiënten met de twee laagste gestandaardiseerde coëfficiënten in tabel 4.1.3	315
4.1.3: Geschatte karakteristieke excitatie-bewegingen $\hat{m}_i^0$ en vrije beweging $\sum_{i=1}^3 \hat{m}_i^0$ voor de modellen 1 (cirkeltjes), 2 (kruisjes), 3 (stippen) en 4 (curven) op basis van de eigenwaarden $\lambda_i$ in tabel 4.1.5 en begintoestand $x(t_0) = [L(t_0) \ F(t_0) \ W(t_0)]' = [45 \ 21 \ 42]'$ over 40 jaar vanaf $t_0$	320
4.1.4: Geschatte unit-response-functies $\hat{\phi}_L$ , $\hat{\phi}_F$ en $\hat{\phi}_W$ voor de modellen 1 (cirkeltjes), 2 (kruisjes), 3 (stippen) en 4 (curven) over 40 jaar vanaf $t' = 0$	325
4.1.5: Geschatte impulse-response-functies $\hat{H}_G$ , $\hat{H}_I$ , $\hat{H}_{O1}$ , $\hat{H}_{O2}$ , $\hat{H}_{O3}$ , $\hat{H}_{bG}$ en $\hat{H}_{bI}$ voor de modellen 1, 2, 3 en 4 (resp. 1e, 2e, 3e en 4e kolom) over 10 jaar vanaf $t'' = 0$	326-327
4.1.6: Geschatte zero-state-response op basis van $u_{[t_0, t_1]}$ zoals aangegeven in de tekst voor de modellen 1, 2, 3 en 4 (resp. 1e, 2e, 3e en 4e kolom) over 10 jaar vanaf $t_0$	332
4.1.7: Geschatte totale response als som van $\sum_{i=1}^3 \hat{m}_i^0$ in fig. 4.1.3 en geschatte zero-state-response in fig. 4.1.6 voor de modellen 1, 2, 3 en 4 (resp. 1e, 2e, 3e en 4e kolom) over 10 jaar vanaf $t_0$	332
4.3.1: Een deelkoppeling in koppeling $\mathcal{S}$ van de micro-verklaringsrelaties, gedefinieerd door 4.3.1	364

## Tabellen

3.2.1: Karakteristieke excitatie-bewegingen $m_i^0$ voor excitaties ongelijk aan 0 bij verschillende waarden van $\sigma_i$ en $\omega_i$ in $\lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_i$	179
4.1.1: De LSNR-schattingen $\hat{\Pi}$ voor structurele modellen I en II en de proporties verklaarde variantie $R^2$ voor ieder van de endogene variabelen L, F en W	303
4.1.2: De 2SLS-schattingen $-\hat{\Delta}$ en $-\hat{\Gamma}$ voor structurele modellen I en II en de proporties verklaarde variantie $R^2$ voor ieder van de endogene variabelen L, F en W	306
4.1.3: De schattingen van de gereduceerde vorm $\hat{\Pi}$ voor structurele modellen I en II op basis van 2SLS-schattingen $\hat{\Delta}$ en $\hat{\Gamma}$ en de proporties verklaarde variantie $R^2$ voor ieder van de endogene variabelen L, F en W	307
4.1.4: Matrices $\hat{A}$ en $\hat{B}$ van de modellen 1, 2, 3 en 4, afgeleid uit $\hat{\Pi}$ van de modellen I en II in tabel 4.1.3	314
4.1.5: De eigenwaarden van de matrices $\hat{A}$ in tabel 4.1.4 met voor model 1 en 2 tussen haakjes de bijbehorende standaardfouten	319
4.1.6: De geschatte waarden, grafisch weergegeven in fig. 4.1.7 (instituut 4), tezamen met die bij vervanging van instituut 4 door instituut 3, voor de modellen 1 en 2 tussen haakjes tevens voorzien van standaardfouten	335
4.2.1: De maximum-likelihood schatting van het LISREL-model	346-347
4.2.2: Matrices $\hat{A}$ , $\hat{B}$ en $\hat{C}$ voor model [A,B,C,D] met $D = 0$ , afgeleid uit $\hat{\Pi}$ en $\hat{\lambda}_y$ in tabel 4.1.1	355
4.2.3: Geschatte karakteristieke excitatie-bewegingen $\hat{m}_1^0$ en $\hat{m}_2^0$ en vrije beweging $\hat{m}_1^0 + \hat{m}_2^0$ op basis van de eigenwaarden $\hat{\lambda}_1$ en $\hat{\lambda}_2$ van matrix $\hat{A}$ in tabel 4.2.2 en begintoestand $\hat{x}(t_0) = [\hat{H}(t_0) \hat{L}(t_0)]' = [4.80 \quad 29.98]'$ over 10 jaar vanaf $t_0$	355
4.2.4: Geschatte zero-input-response, zero-state-response en totale response op basis van de matrices $\hat{A}$ , $\hat{B}$ en $\hat{C}$ in tabel 4.2.2, begintoestand $\hat{x}(t_0) = [4.80 \quad 29.98]'$ en $u[t_0, t_1]$ zoals aangegeven in de tekst over 10 jaar vanaf $t_0$	357
4.2.5: De geschatte gemiddelde oorspronkelijke scores $y'(t)$ over 10 jaar onder assumptie van een lineaire toename vanaf $t_0$ (medio 1971) en de geschatte oorspronkelijke scores $\hat{y}'(t) = \hat{y}(t) + y'(t)$ met $\hat{y}(t)$ de geschatte deviatie-scores van de totale response, zowel voor instituut 4 (zie tabel 4.2.4) als bij vervanging van instituut 4 door instituut 3	359

## Voorwoord

In heel verschillende takken van zowel de natuurwetenschap en de techniek als van de sociale wetenschap verschijnt een toenemend aantal publikaties, waarin het onderzoeksobject in systeem-termen wordt beschreven. De uiteenlopende herkomst van deze publikaties illustreert, dat de "systeembenadering" eerder een eigen methodologische aanpak van onderzoeksproblemen beoogt, dan dat zij een bepaald inhoudelijk terrein opeist. Kern van de systeembenadering is het algemene systeemtheoretische begrippenkader. Toepassing hiervan op de meest uiteenlopende wetenschapsgebieden heeft de onderlinge communicatie bevorderd en onderzoeksresultaten gemakkelijker overdraagbaar gemaakt.

Zadeh en Polak (1969) maken in het voorwoord van hun bundel "System theory" onderscheid tussen enerzijds de verzameling mathematische methoden, technieken en algorithmen voor systeem-analyse, ontleend aan heterogene, op onmiddellijke toepassing afgestemde gebieden van de wiskunde, en anderzijds het fundamentele deel van de mathematische systeemleer, gericht op het verschaffen van "a common abstract basis and unified conceptual framework for studying the behavior of various types and forms of systems ... It does not matter ... whether a system is electrical, mechanical, economic, biological, chemical, or whatnot in nature ... In short, it is the mathematical structure of a system, and not its physical form or area of application, that is of interest to a system theorist". De auteurs onderscheiden daarmee de mathematische systeemleer in enge zin, waarin het fundamentele begrippenkader wordt geëxpliciteerd, van de mathematische systeemleer in ruime zin, waarin ook de diverse mathematische methoden voor systeem-analyse worden behandeld.

Een nadere uitwerking van enkele uitgangspunten en doeleinden van de "general systems movement" vindt men in hoofdstuk I: "Systeembenadering en systeem-model" van deze studie. Daarin wordt onder meer benadrukt, dat de systeembenadering niet aanstuurt op een radicale breuk met de bestaande onderzoekspraktijk. Zo tonen de door Zadeh en Polak genoemde systeem-analytische methoden aan, dat voortgebouwd kan worden op bestaande benaderingswijzen en ontwikkelingen. Door het toepassen van deze methoden komt de verbinding tot stand tussen het algemene systeemtheoretische begrippenkader en concrete systemen in de empirische realiteit. Aan

zuiver theoretische analyses in systeemtermen kan via deze methoden een empirische inhoud worden gegeven.

Systeemtheoretisch georiënteerde publikaties in de sociale wetenschap beperken zich echter veelal tot een theoretische analyse van het betrokken probleemgebied. De aansluiting bij gangbare onderzoeksprocedures en verklaringsmodellen in het empirisch sociaal-wetenschappelijk onderzoek blijft vaak achterwege. Doel van deze studie is, aan te tonen dat het algemene systeemtheoretische begrippenkader ook in het empirisch sociaal-wetenschappelijk onderzoek toepasbaar is, en dat ook hier een breuk met de bestaande onderzoekspraktijk kan worden vermeden door voort te bouwen op autonome methodologische ontwikkelingen.

Met het oog hierop worden in het meest omvangrijke hoofdstuk 3 een tweetal terreinen met elkaar in verband gebracht, die tot nu toe betrekkelijk geïsoleerd waren. Enerzijds behandelt hoofdstuk 3 onderwerpen uit de wiskundige systeemleer. Dat zijn in het bijzonder toestand-ruimte-modellen, lineaire differentie- en differentiële modellen in het kader van toestand-ruimte-modellen en systemische verklaringsmodellen, opgevat als koppelingsmodellen van toestand-ruimte-modellen. Anderzijds wordt gebruik gemaakt van de sociaal-wetenschappelijke en econometrische literatuur m.b.t. recursieve en interdependente structurele modellen en van de LISREL-benadering van Jöreskog en zijn medewerkers, waarin structurele modellen worden gecombineerd met factor-analytische modellen. De laatste groep onderwerpen wordt in het ontwikkelde systeemtheoretische kader geïntegreerd om op deze wijze toepassing van de systeemleer in empirisch sociaal-wetenschappelijk onderzoek mogelijk te maken.

Bij een vergelijking met de gangbare sociaal-wetenschappelijke onderzoeksmethodologie vallen vooral twee aspecten van de systeemmethodologie bijzonder in het oog. Aan beide zal ruime aandacht worden geschonken. In de eerste plaats is dat de beschrijving van de realiteit in termen van tijdfuncties. Hierdoor kan meer dan in de sterk cross-sectioneel georiënteerde onderzoekstraditie van de sociale wetenschap rekenschap worden gegeven van het dynamisch karakter van de realiteit. In de tweede plaats legt de systeemmethodologie bijzondere nadruk op het complexe karakter van de realiteit. Van complexiteit is onder meer sprake, indien

verschillende beïnvloedingsmechanismen gelijktijdig opereren, eventueel zoals bij feedback-mechanismen in tegengestelde richtingen. Verklaringsmodellen zijn in de systeemmethodologie in principe multirelationeel van opzet en laten ruimte voor feedback-mechanismen. Een meer informele, voorbereidende bespreking van de genoemde aspecten vindt men in hoofdstuk 2. Hierin wordt nog geen gebruik gemaakt van matrix-algebraïsche formuleringen en wordt ook nog niet expliciet ingegaan op de centrale rol van het begrip toestand. Het algemene kader dat de mathematische systeemleer door specificatie van toestand-ruimte  $\Sigma$  aan verklaringsrelaties heeft kunnen geven, wordt in hoofdstuk 3 geïntroduceerd. In dat algemene kader komen de eerder besproken modellen en relaties te voorschijn als bijzondere gevallen van matrix-algebraïsche generalisaties.

Veel plaats wordt ingeruimd in het 4e en laatste hoofdstuk voor concrete voorbeelden, aan de hand waarvan de in hoofdstuk 3 ontwikkelde systeemmethodologie wordt geïllustreerd. De voorbeelden liggen voornamelijk op het terrein van het onderzoek naar braille-lezen. Daarnaast wordt een onderzoeksvorstel geformuleerd, dat betrekking heeft op de attitude t.o.v. zelfverwondend gedrag.

Het gebruik van modellen, in het bijzonder systeemmodellen, is een opvallend aspect van de systeemmethodologie. De termen "systeem" en "systeemmodel" worden echter in de literatuur in verschillende betekenissen gebruikt, wat gemakkelijk aanleiding kan geven tot verwarring. Vanaf paragraaf 2.1 zal getracht worden een scherp onderscheid te maken tussen enerzijds systeemmodel  $S$  als abstractie-model van de realiteit en anderzijds systemisch verklaringsmodel  $R(S)$  als mathematisch representatiemodel voor  $S$ . "Mathematicians use the word system to designate what we call system representation. This is in part due to the fact that they refuse to acknowledge that the problem of going from a physical system to a model and then to an useful system representation is far from trivial" (Desoer, 1970, p. 36). Zonder de term expliciet te noemen geeft Desoer in dit citaat een belangrijk argument om naast de mathematische systeemleer plaats in te ruimen voor systeemmethodologie. De systeemmethodologie zoals opgevat in deze studie, houdt zich bezig met de vraag, hoe voor een te onderzoeken deel van de realiteit een geschikt systeemmodel  $S$  wordt gekozen en hoe vervolgens voor  $S$  middels adequate mathematische methoden in termen van het algemene begrippenkader van de systeem-

leer een systemisch verklaringsmodel  $R(S)$  wordt geconstrueerd.

De aanduiding "mathematisch systeem" wordt gereserveerd voor de koppeling  $\S$  van samenstellende micro-relaties in  $R(S)$ . Om misverstand te voorkomen zullen voor de micro-relaties met bijbehorende micro-modellen, waarop  $R(S)$  wordt gebaseerd, of voor de eventueel uit  $R(S)$  afleidbare macro-relatie met bijbehorend macro-model andere termen worden gebruikt. Zo zullen input-output-modellen, toestand-ruimte-modellen en differentie- en differentiële modellen - i.h.b. de uitgebreider te behandelen modellen [A,B,C,D] - geen "systeem" of "systeem-model" worden genoemd. Nadat Zadeh (1969) aanvankelijk op p. 17 van zijn grondlegend artikel heeft gedefinieerd: "Such a combination of abstract objects (zijn term voor relaties, J.O.) will be called system", vervolgt hij op p. 18: "we shall henceforth use the term system to describe both an abstract object and a collection of abstract objects". Hieruit vloeit een nagenoeg onbeperkte uitbreiding van het mathematisch systeembegrip voort. Om dit te vermijden zal in deze studie  $\S$  uitsluitend worden opgevat als een combinatie van meerdere mathematische relaties. Ieder van de laatste representeert het gedrag van slechts één der componenten in een reëel systeem  $S$  of dat van slechts één der gesimuleerde componenten in een systeem-simulatie, die met  $\dot{S}$  zal worden aangeduid.

Weinig of geen aandacht zal worden besteed aan problemen van controle en optimalisatie, ook al is de praktische betekenis van de systeembenadering met name in de oplossing van deze problemen gelegen. Na de specificatie en de schatting van een verklaringsmodel en de voorspelling van toekomstig gedrag op basis van zo'n model zal men het gedrag vervolgens op optimale wijze willen beïnvloeden en beheersen. De sterke nadruk op modelvorming en schattingsprocedures, in hoofdstuk 4 gevolgd door een aantal illustratieve toepassingen, komt uitsluitend voort uit de overweging, dat eerst deze onderwerpen uitgewerkt moeten worden, voordat in een latere fase tot een meer systematische toepassing van controle- en optimalisatie-procedures kan worden overgegaan.

In de afgelopen jaren heb ik met velen van gedachten gewisseld over de inhoud van wat volgt. Allen, die op die manier een meer of minder directe bijdrage geleverd hebben aan de uiteindelijke tekst, ben ik



- daarvoor erkentelijk. Bijzondere dank ben ik verschuldigd aan
- prof. dr. M. Albinski voor de wijze waarop hij mij telkens wist te overreden door te zetten, zijwegen te vermijden en met name aandacht te besteden aan konkrete voorbeelden,
  - prof. dr. A.F.G. Hanken voor zijn stimulerende invloed in de werkgroep Sociale Systemen van de Systeemgroep Nederland, waardoor mijn ideeën om deze studie op te vatten vaste vorm kregen, en voor zijn kritische opmerkingen bij een eerdere versie van de hoofdstukken 1 en 2,
  - drs. J.F.J. van Leeuwe voor de vele aanwijzingen en intensieve hulp die hij heeft geboden bij de ontwikkeling van de computerprocedure in appendix A en bij het oplossen van problemen betreffende de LISREL-benadering en de toepassing van het LISREL-programma,
  - dr. M.J.C. Mommers voor de belangeloze wijze waarop hij het databestand van het blindenonderzoek ter beschikking stelde en mij wegwijs maakte in het blindenonderzoek,
  - prof. dr. ir. J.C. Willems voor de vele ideeën, die hij mij door zijn bijdrage aan de Zomercursus 1973 van de Systeemgroep Nederland aan de hand heeft gedaan op het gebied van de mathematische systeemleer, voor zijn kritische opmerkingen bij een eerdere versie van de paragrafen 3.1 en 3.2 en voor zijn oplossingen voor een aantal problemen die ik bij het schrijven van deze paragrafen ontmoette.

Bijzondere vermelding verdienen ten slotte mevr. H. Rövekamp-v.d.Sommen, die met een ongelooflijk geduld en onuitputtelijke vindingrijkheid de uiteindelijke vorm aan het manuscript gaf, en de heer W. Klink voor de vakkundige verzorging van de figuren.

## Hoofdstuk 1: Systeembenadering en systeem-model

### 1.1 Voorlopers van het systeem-model

In ons denken en spreken over de reële wereld kennen we voortdurend eigenschappen aan eenheden toe. Eenheden worden in de logica ook "elementen", "individuen" of "objecten" genoemd en in de taalkunde "subjecten"; de termen of symbolen waarmee de eigenschappen worden uitgedrukt noemt men "predikaten". Het toekennen van eigenschappen aan eenheden impliceert dat tussen beide onderscheid wordt gemaakt. In onderzoekstechnische literatuur legt men er vaak nadruk op, dat in het onderzoeksontwerp duidelijk aangegeven moet worden, wat de eenheden (personen, groepen, scholen, volkeren, organismen, cellen, moleculen, atomen, etc.) en wat de eigenschappen zijn en dat beide in eenzelfde onderzoek of redenering niet verward mogen worden: het begrip "cultuur" bijv. niet tegelijk als eigenschap van samenlevingen en zelf als eenheid beschouwen (1).

Op het eerste gezicht ligt dat onderscheid tussen eigenschappen en eenheden nogal voor de hand. Toch blijkt er een lastig taalanalytisch probleem aan vast te zitten. Om aan te geven, welke de eenheden zijn, moet men al eigenschappen hanteren. Nemen we bijv. mensen als eenheden: "menselijk" is een eigenschap die aan bepaalde dieren toekomt, "dierlijk" is een eigenschap die aan bepaalde levende wezens toekomt, etc. Steeds worden eenheden reeds door bepaalde eigenschappen gekarakteriseerd. Een eenheid gaat in zekere zin op aan zijn eigenschappen. Om toch iets over te houden, waaraan eigenschappen kunnen worden toegevoegd, dient die regressie ad infinitum ergens te worden gestuit. Aristoteles, de grondlegger van de predikaat-logica, noemde dat iets de "hyle" (oerstof), waarvan hij zegt dat het geheel zonder "morphe" (vorm) is. In de middeleeuwen ging men die oerstof (materia prima) heel aanwijsbaar interpreteren en weer opdelen in kleinste deeltjes (minima naturalia), maar voor Aristoteles was "hyle" juist dat eigenschapsloze iets waaraan niets meer te ontdekken viel.

In de praktijk van het natuur- en sociaal-wetenschappelijk onderzoek hebben we helaas niet zoveel aan dat aristotelisch eigenschappen-substraat. Iets wat in het geheel geen eigenschappen heeft kan nl. in de realiteit nooit gevonden worden, laat staan dat we er de noodzakelijke

onderzoeksoperaties op kunnen uitvoeren. We moeten de regressie al naar behoefte dus eerder een halt toeroepen. We nemen bijv. mensen, leerlingen, groepen, cellen, culturen of wat dan ook als uitgangspunt (universe of discourse) voor het toekennen van eigenschappen, d.w.z. eenheden-verzamelingen die in de strikte zin zelf al door eigenschappen zijn bepaald.

Duidelijk zal zijn dat het onderscheiden van eenheden en eigenschappen in de realiteit op tamelijk willekeurige wijze plaatsvindt. Het resultaat is steeds een abstractie-model: een bepaalde ordening van de realiteit voor logische doeleinden, waarbij noodzakelijk een groot aantal aspecten buiten beschouwing wordt gelaten. Andere abstractie-modellen zijn mogelijk, maar niettemin heeft het type abstractie-model, dat men eenheid-eigenschap-model zou kunnen noemen, een enorme invloed uitgeoefend; expliciet langs de predikaat-logica en meer impliciet langs de omgangstaal. De meest verschillende universa en de meest verschillende eigenschappen zijn gespecificeerd. Om die eigenschappen gaat het uiteindelijk, want het wetenschappelijk streven is erop gericht wetmatigheden of hele theorieën te formuleren over de wijze waarop die eigenschappen bij de eenheden van het universum samenhangen.

Universele wetmatigheden worden in de predikaat-logica als volgt uitgedrukt (2):

1.  $(x)(Fx \rightarrow Gx)$ ; bijv. "Voor alle eenheden x geldt, als x wordt verhit, zet x uit".

Het doel van wetmatigheden en theorieën is verklaring en voorspelling: verklaring van reeds bekende feiten en voorspelling van nog onbekende feiten (3).

2.  $Fm$ ; bijv. "Eenheid m wordt verhit".

Uit 1. en 2. samen (de explanans) volgt logisch-deductief 3. (het explanandum, d.w.z. het te verklaren of te voorspellen feit):

3.  $Gm$ ; bijv. "Eenheid m zet uit".

Een noodzakelijke stap op weg van eenheid-eigenschap-model naar systeem-model is het onderscheiden van relaties. In de logica komt dit tot uiting, doordat naast de enkelvoudige predikaten (predikaten gevolgd door slechts één object-naam of -variabele) meervoudige predikaten of relatie-symbolen (predikaten gevolgd door twee of meer object-namen of -variabelen) worden toegelaten. "Dirk is de zoon van Jan" hoeft dan niet meer beschouwd te worden als toevoeging van het predikaat "is de zoon

van Jan" aan het object "Dirk", maar als verbinding van de objecten "Dirk" en "Jan" door de relationele uitdrukking "zoon zijn van"; Rmn: "m is de zoon van n";  $(x)(\exists y)Rxy$ : "Iedereen heeft een vader". Terwijl de taalmiddelen van de predikaat-logica een propositie P uit de propositie-logica als het ware openbreken en daarbij objecten en predikaten blootleggen, verhoogt de taal van de relationele logica de uitdrukingskracht nog verder door bij een predikaat twee of meer objecten tegelijk te onderscheiden. Het gevolg is, dat de bewijskracht groter wordt. Bekend is het voorbeeld dat De Morgan aanhaalt voor een soort redenering waar de enkelvoudige predikaat-logica geen weg mee weet: "Alle paarden zijn dieren; derhalve zijn alle paardekoppen dierekoppen". Ook laat de enkelvoudige predikaat-logica ons in de steek als uit "A ligt tussen B en C" moet worden afgeleid "A ligt tussen C en B".

Relaties zijn onmisbaar in de wetenschapsbeoefening en zeker in de systeem-methodologie. Men vraagt zich af, waarom de relationele logica dan pas zo laat is ontstaan (4). Wolfgang Segeth merkt daarover het volgende op: "Die Beschränkung der traditionellen Logik auf Teile der einstelligen Prädikatenlogik erklärt sich philosophiehistorisch aus der von Aristoteles übernommenen Anschauung, wonach die Welt aus Substanzen und deren Eigenschaften besteht. Wissenschaftsgeschichtlich entspricht diese Beschränkung dem Zeitalter des Sammelns und Klassifizierens in den Wissenschaften. Gegenstand der Wissenschaften auf ihrer gegenwärtigen Entwicklungsstufe ist aber nicht das isolierte Ding, sondern das Ding mit seinen Eigenschaften und in seinen Beziehungen zu anderen Dingen. Dem trägt die moderne Logik durch die Prädikatenlogik beliebiger Stellenzahl Rechnung" (5). Men kan eraan toevoegen, dat traditionele predikaat-logica en aristotelische filosofie zelf weer nauw aansluiten bij de subject-predikaat-opbouw van natuurlijke talen. Pas door een meer kritische houding ten opzichte van de omgangstaal werd de ontwikkeling van de moderne logica met inbegrip van de relationele logica mogelijk.

Het toelaten van relaties resulteert in een rijker abstractie-model, waarmee nu ook structuren in de reële wereld, d.w.z. relatie-constellaties tussen eenheden, zijn te vangen. Het structuur-model blijft een abstractie-model (6), maar men kan er toch meer aspecten van de realiteit in opnemen dan in het eenheid-eigenschap-model. Een nog rijker abstractie-model, dat in de laatste jaren in toenemende mate uitgangspunt is

bij de benadering van de realiteit en in de meest diverse wetenschappen, is het systeem-model.

## 1.2 De "general systems movement"

In 1954 werd de "Society for General Systems Research" opgericht, oorspronkelijk onder de naam "Society for the Advancement of General Systems Theory". De naamsverandering in 1957 was een gevolg van het feit dat men zich realiseerde, dat die "General Systems Theory" (G.S.T.) eigenlijk nog opgebouwd moest worden. De belangrijkste promotor van de organisatie was Ludwig von Bertalanffy (theoretische biologie). Hij zegt het idee van een G.S.T. al in 1937 geopperd te hebben (7), maar er toen niet op durfde insisteren, omdat het woord "theorie" in die tijd in de biologie zo'n slechte reputatie had. Pas na de oorlog verschenen zijn eerste publikaties op het gebied van de systeemleer. Het intellectuele klimaat was veranderd: modellenbouw en abstracte generalisaties waren in de mode gekomen, zo zegt von Bertalanffy.

Het doel van de organisatie werd als volgt omschreven:

1. To investigate the isomorphy of concepts, laws, and models in various fields and to help in useful transfers from one field to another;
2. To encourage the development of adequate theoretical models in the fields which lack them;
3. To minimize the duplication of theoretical effort in different fields and
4. To promote the unity of science through improving communication among specialists" (8).

Belangrijke publikaties vindt men in de Yearbooks van de Society, waarvan het eerste in 1956 verscheen. Belangrijke namen naast von Bertalanffy zijn Kenneth Boulding (economie), Anatol Rapoport (wiskunde, biologie, psychologie), Herbert Simon (wiskunde, sociologie, econometrie), Ross Ashby (biologie, cybernetica).

Ashby publiceerde behalve op biologisch en systeemtheoretisch gebied ook het veelgebruikte handboek "An introduction to cybernetics". Zijn werk illustreert duidelijk de nauwe band, die er bestaat tussen de algemene systeemleer enerzijds en de iets oudere wetenschappen cybernetica en informatie-theorie anderzijds. Stichter van de cybernetica was

Norbert Wiener ("Cybernetics", 1948), door hem gedefinieerd als de wetenschap van "control and communication in the animal and the machine". Ashby voegde daar op de eerste pagina van zijn inleiding aan toe: "in a word, as the art of steermanship; and this book will appeal to all who would learn something of cybernetics, communication theory and methods for regulation and control". Op haar beurt maakt de cybernetica op grote schaal gebruik van de mathematische informatie-theorie, ook communicatie-theorie genoemd. Wiener hield er zich in zijn boek van 1948 uitgebreid mee bezig. Algemeen wordt echter het in hetzelfde jaar in twee delen gepubliceerde artikel van Claude Shannon ("A mathematical theory of communication", 1948) als grondslag van de mathematische informatie-theorie beschouwd (9). Hoewel het ontstaan van cybernetica en informatie-theorie in eerste instantie een antwoord was op de behoefte aan complexe wapens met automatische stuur- en controle-apparatuur en zo efficiënt mogelijke communicatie- en computer-systemen (10), heeft het toepassingsveld zich later enorm uitgebreid en op het moment zijn er weinig gebieden of wetenschappen waar de invloed van cybernetica en informatie-theorie niet op enigerlei wijze merkbaar is.

Mathematische disciplines naast de informatie-theorie, waar de systeembenadering volgens von Bertalanffy een beroep op doet, zijn:

- topologie of relationele wiskunde met inbegrip van niet-metrische gebieden zoals de graph-theorie (vanwege de centrale plaats, die relaties in de systeembenadering innemen, ligt het belang van de topologie voor de hand)
- waarschijnlijkheidstheorie (bestudeert stochastische variabelen, relaties en modellen; deterministische versies zijn te beschouwen als een bijzonder geval van stochastische)
- decisie-theorie (besliskundige modellen worden gekenmerkt door het feit, dat een of meer onafhankelijke variabelen manipuleerbaar zijn; de z.g. decisie-, beslissings-, controle- of regel-variabelen)
- speltheorie (speltheoretische modellen zijn te beschouwen als een bijzonder geval van besliskundige modellen; in de laatste komen ook niet-manipuleerbare onafhankelijke variabelen voor; in speltheoretische modellen worden alle onafhankelijke variabelen manipuleerbaar geacht)(11).

Op 29 november 1969 werd de eerste vergadering gehouden van de Systeemgroep Nederland (S.N.). Daarmee had ook Nederland een organisatie,

die qua doelstelling en opzet overeenkomt met de Society for General Systems Research. In de statuten werd het doel als volgt omschreven: "het bestuderen van systemen, hun eigenschappen, hun verschijningsvormen, hun opbouw, hun kenmerken en het bevorderen van interdisciplinaire activiteiten op basis van de systeembenadering". De Systeemgroep Nederland kent vijf werkgroepen: 1. Empirische Bedrijfsmodellen, 2. Sociale Systemen, 3. Biologische Systemen, 4. Systeemmethodologie, 5. Systemen en Organisaties. Zij tracht haar doeleinden te verwezenlijken door de jaarlijkse Engelstalige publikatie "Annals of Systems Research", door het houden van lezingen, door het jaarlijks organiseren van een Zomercursus en door de uitgave van de Nieuwsbrief.

De belangstelling voor de systeembenadering blijft niet beperkt tot het Westen. In de Oost-Europese landen is de activiteit op systeemtheoretisch gebied minstens zo groot. Er zijn echter typische terminologische verschillen. Zo ziet men in het Westen de cybernetica meestal als een specifiek gebied binnen de algemene systeemleer, zich bezig houdend met een bijzonder soort systemen: systemen met zelf-regulering door middel van ingebouwde feedback-mechanismen. In Oost-Europa is men geneigd juist de cybernetica de rol van centrale overkoepelende wetenschap toe te delen (12). In de eerste uitgave van het Oost-Duitse "Philosophisches Wörterbuch" werd de algemene systeemleer zonder meer als een van de deel-disciplines van de cybernetica aangemerkt (13). In de nieuwe uitgave is de indeling subtieler geworden. Deze is in fig. 1.2.1 weergegeven. De algemene systeemtheorie wordt hier voorgesteld als inderdaad algemener dan de informatie-theorie en deze weer als algemener dan regel-theorie en cybernetica beide. Tegelijk blijft de cybernetica echter regel-, informatie- en algemene systeemtheorie afzonderlijk en in combinatie omvatten. Deze ambivalente houding t.o.v. de cybernetica wordt in de begeleidende tekst nog onderstreept. Enerzijds heet het: "Auch die Systemtheorie entwickelt sich zu einer gegenüber der Kybernetik allgemeineren, relativ selbständigen Wissenschaft ... Die Kybernetik untersucht ... dem Umfang nach die gleiche Klasse von komplexen dynamischen Systemen wie die ... Regelungstheorie ...". Maar van de andere kant: "Alle genannten Einzeltheorien sind durch ihre Abstraktionsweise verwandt. Deshalb ist es zweckmässig, sie zusammen mit einer Reihe ähnlicher spezifischer Theorien, die ebenfalls bestimmte Seiten komplexer dynamischer Systeme

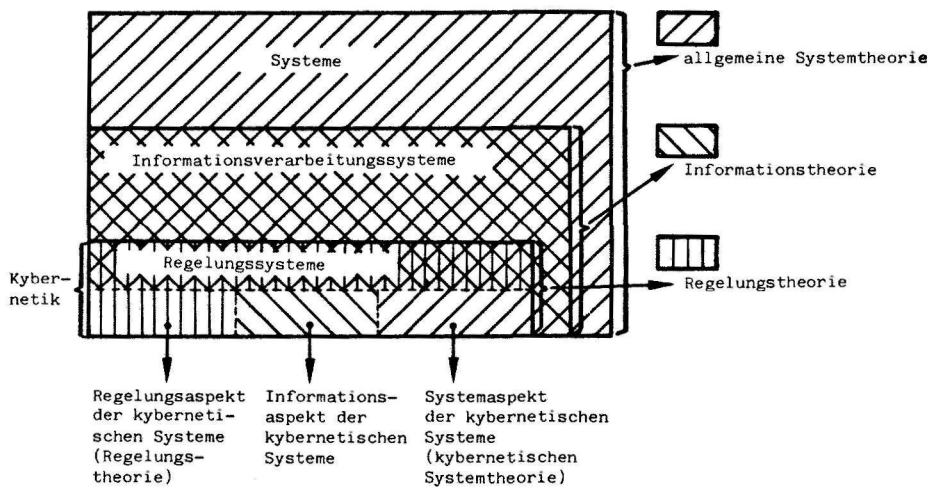


Fig. 1.2.1: De verhouding tussen algemene systeemleer, informatietheorie, regeltheorie en cybernetica bij Klaus und Buhr (1970, p. 641).



(insbesondere informationsverarbeitender und Steuerungssysteme) wider-spiegeln, in einer Gruppe, der der sog. "kybernetischen Wissenschaften" begrifflich zusammenzufassen, zu der dann vor allem allgemeine Systemtheorie, die Informationstheorie, die Regelungstheorie, ferner die Algorithmentheorie, Spieltheorie, Theorie der abstrakten Automaten, Theorie der Nerven-netze, Theorie der Steuerungsprozesse u.a. gehören. Ausgehend von diesem Umstand ist es möglich, mit folgender erweiterter Definition zu arbeiten: Kybernetik (im weiteren Sinne) sind die Wissenschaften und Gesetzmäßigkeiten der komplexen dynamischen Systeme, der Informationsprozesse, der Steuerung und der Regelung" (14). Een bijkomende onduidelijkheid in het schema is, dat "Regelungssysteme" als deelverzameling van "Informationsverarbeitungs-systeme" worden voorgesteld, terwijl men in feite ook eenvoudige regelmechanismen aantreft, die geen gebruik maken van informatie maar direkt energetisch terugkoppelen.

Men kan zich niet aan de indruk onttrekken, dat in Oost-Europa de term "cybernetica" in minstens drie verschillende betekenissen wordt gebruikt:

1. als verzamelnaam van alle wetenschappen en wetenschappelijke activiteiten met inbegrip van de zuivere wiskundige, die voor de bestudering van systemen op enigerlei wijze bruikbaar zijn,
2. als synoniem voor algemene systeemleer, de wetenschap die zich expliciet richt op systemen in het algemeen, natuurlijke of technische systemen,
3. als wetenschap van cybernetische, d.w.z. middels terugkoppeling zelfsturende systemen, vooral maar niet uitsluitend technische systemen. Meerzinnig gebruik van de term "cybernetica" is uiteraard niet verboden maar geeft gemakkelijk aanleiding tot verwarring. Beperking tot de laatstgenoemde betekenis (wetenschap van cybernetische systemen) lijkt te prefereren. Aangezien de terugkoppeling in cybernetische systemen frequent plaatsvindt middels informatie-overdracht, ligt veelvuldige toepassing van informatie-theorie voor de hand. Desondanks verdient het aanbeveling de informatie-theorie duidelijk van algemene systeemleer en cybernetica te onderscheiden.

Een opvallende manifestatie van de Oost-Europese interesse is het "Wörterbuch der Kybernetik", in 1968 uitgegeven onder redactie van Georg Klaus (15). Von Bertalanffy bleek ook erg onder de indruk over de be-

spreking van zijn systeemtheoretische publikaties door de Sovjet-geleerden Lektorsky en Sadovsky (1960) in het 5<sup>e</sup> jaarboek van de Society. Zij stonden positief tegenover de poging een algemene definitie te geven van het begrip "organized system", verschillende typen systemen logisch te klassificeren en daarvoor mathematische modellen uit te werken, maar zij kritiseerden von Bertalanffy's definitie, omdat deze meer een beschrijving zou zijn van de klasse gebeurtenissen, die men systemen zou kunnen noemen, dan een strikt logische definitie. Ook misten zij een duidelijke methodologie (16). Von Bertalanffy was met deze kritiek meer ingenomen dan met die van de logisch-positivist Buck (1956). Het gebrek aan belangstelling of zelfs de vijandige houding t.o.v. de algemene systeemleer, die hij bij de logisch-positivisten konstateerde, acht hij nogal merkwaardig, omdat zij altijd zo'n voorstanders geweest zijn van de "Unified Science", waar de G.S.T. gestalte aan wil geven (17).

Aanvankelijk werden het begrip systeem en de systeemleer als iets erg onpraktisch ervaren, iets waar een aantal zonderlingen zich in hun vrije tijd mee bezig hielden. Opvallend is de sterke stimulans, die op het moment juist uitgaat van de toegepaste wetenschap. Zo werd aan de oprichting van de Systeemgroep Nederland met name bijgedragen door ingenieurs aan de T.H.'s en de Landbouwhogeschool. Cursussen systeemleer zijn aan de T.H.'s opgenomen in de curricula. Korrelaten van de G.S.T. in de toepassings sfeer worden soms samengevat onder de naam "Systems Science". Men onderscheidt (18):

- systems engineering: wetenschappelijke planning, ontwikkeling, evaluatie en constructie van mens-machine-systemen: bijv. Hall (1962),
- operations research: wetenschappelijke controle van bestaande systemen van mensen, machines, materieel, geld, etc.: bijv. Churchman, Ackoff and Arnoff (1957),
- human engineering: wetenschappelijke adaptatie van systemen en vooral machines aan de mens om een maximum aan efficiency te bereiken met een minimum aan kosten in geld en andere offers.

Deze wetenschappen verhouden zich tot de fysische technologie als de systeembenadering meer in het algemeen tot de "mechanicistische" benadering. Opvallend is de belangrijke plaats, die de mens en de menselijke organisatie in de omschrijvingen innemen. Terwijl de technische doeleinden vroeger vrij onduidelijk en simpel waren (hogere snelheid bijv.),

vragen technici zich tegenwoordig steeds meer af, op welke doeleinden de moderne complexe mens-machine-systemen moeten worden afgestemd. Omdat bovendien dikwijls tegenstrijdige doelopvattingen leven bij de menselijke systeem-komponenten, is de behoefte bij technici aan onderzoek in samenwerking met de sociale wetenschappen niet verwonderlijk. De specialist in operations research, Ackoff, formuleerde een programma voor dergelijk interdisciplinair onderzoek ten behoeve van een op moderne leest geschoeide bedrijfs- en organisatiekunde: "Systems, organizations, and interdisciplinary research" (19). Hij schreef bovendien een inleiding in de methoden van onderzoek, gericht juist op dergelijk interdisciplinair onderzoek (20).

Samenbindend element, waaraan de organisatie-leer in belangrijke mate zijn identiteit ontleent, is de systeemtheorie met aanverwante wetenschappen. "General Systems Theory aids the study of organization in much the same way that calculus and Newtonian physics aid the study of astronomy", zei Litterer in 1969 (21) en al in 1959 stelde Mason Haire in "Modern organization theory" zonder overigens nog de systeemtheorie expliciet te noemen: "A whole group of conceptual developments bear on the problem of industrial organization. Game theory and decision theory, information theory and communication theory, group theory, and developments in motivational theory can all be focused on the central topic. Beyond the specific conceptual approaches, the growing tendency toward the making of models and a quasi-mathematical approach have radically changed the field. Indeed, the problem of organization is a very rare thing in the social sciences. It is the natural focus of several disciplines. Here we can gain the leverage of a variety of theoretical concepts, each linked to broad and different conceptual frameworks in the disciplines from which they spring" (22).

### 1.3 Systeembenadering: streven naar "unity of science"

Wat zijn nu de beweegredenen, waarom zo veel vertegenwoordigers van verschillende disciplines een gemeenschappelijke systeemtheoretische taal meenden te moeten opbouwen. In de literatuur keren aanhoudend de volgende argumenten terug:

1. het uiteenvallen van de wetenschap in onoverzichtelijk veel verschil-

lende specialismen, die elkaars taal niet meer verstaan,  
2. reductionisme, waaronder micro-reductionisme.

Op de eerste plaats de overspecialisering. Nadat de natuurkunde in 1687 met Newton's "Philosophiae naturalis principia mathematica" een zelfstandige wetenschap was geworden, volgden een groot aantal andere deelgebieden van de filosofie dit voorbeeld: chemie, biologie, economie, psychologie, sociologie, etc. Zij groeiden steeds verder uit elkaar. Ieder specificeerde zijn vooral eigen verzameling eenheden, eigenschappen, wetmatigheden en theorieën. Dikwijls leek de belangrijkste activiteit te bestaan uit het afbakenen van het eigen vakgebied, het benadrukken van eigen identiteit en typisch eigen kijk op de realiteit en het buitenhouden van indringers. "One wonders sometimes if science will not grind to stop in an assemblage of walled-in-hermits each mumbling to himself words in a private language that only he can understand", aldus Boulding in een veelgeciteerde uitspraak (23).

Ofschoon von Bertalanffy als eerste de term G.S.T. moet hebben gebruikt en ook eerder moet hebben gewezen op het belang van het systeemconcept bij het doorbreken van interdisciplinaire grenzen, was het toch in Wiener's cybernetica, dat aan die ideeën het eerst concreet gestalte werd gegeven. Aan de hand van concepten als "informatie" en "homeostase" werd concreet duidelijk, hoe de systeembenadering toepasbaar was in zowel elektro-techniek, neuro-psychologie als biologie zonder te veel afbreuk aan de specifieke complexiteit van de betrokken studie-objecten en tegelijk zonder verlies aan natuurwetenschappelijke strengheid. Aan die begrippen informatie en homeostase zal nu achtereenvolgens aandacht worden besteed.

Het begrip informatie, of liever hoeveelheid informatie, staat centraal bij de fusie tussen biologische en fysische concepten, die de cybernetica heeft gestimuleerd. Wiener en Shannon realiseerden zich ongeveer gelijktijdig de cruciale betekenis van het informatie-begrip, maar Shannon gaf er een strengere mathematische formulering aan. De rol van informatie blijkt in cybernetica en communicatie-theorie even centraal als die van energie in de klassieke fysica.

Informatie krijgt men, als onzekerheid wordt weggenomen, d.w.z. als een toestand van relatieve onzekerheid overgaat in een toestand van relatieve zekerheid (24). In een toestand van relatieve onzekerheid (A in

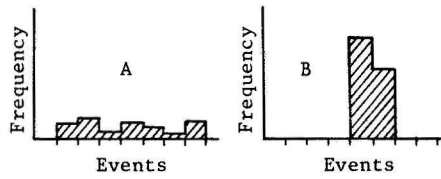


Fig. 1.3.1: Toestand van relatieve onzekerheid (A) en relatieve zekerheid (B), uit: Ashby (1968, p. 178).

fig.1.3.1) zijn de waarschijnlijkheden (p-waarden) voor de verschillende mogelijke gebeurtenissen in sterkere mate aan elkaar gelijk dan in de andere toestand, de toestand van relatieve zekerheid (B in fig.1.3.1). Onzekerheid correspondeert dus met relatieve gelijkheid van p-waarden en zekerheid met relatieve ongelijkheid van p-waarden. De informatie-theoretische maat voor zekerheid of ongelijkheid van p-waarden is:

$$\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$$

Deze bereikt het maximum 0, als één van de p-waarden 1 en alle andere dus 0 zijn (minimale spreiding in de verdeling, volstreekte zekerheid), en wordt minimaal, als alle p-waarden gelijk zijn (maximale spreiding in de verdeling, volstreekte onzekerheid).

Hoeveelheid informatie is nu de winst in zekerheid en wordt berekend door de zekerheid in de begintoestand af te trekken van die in de eindtoestand (bijv. die van B min die van A in fig.1.3.1). Shannon hield zich uitsluitend bezig met volstrekt zekere eindtoestanden (de ontvangen berichten nemen iedere onzekerheid weg). Hoeveelheid informatie (H) is bij hem daarom altijd gelijk aan:  $0 - \left( \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i \right)$  berekend over de begintoestand) of

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$$

hetgeen altijd een positief getal oplevert. Voor gelijke p-waarden (volstrekt onzekere begintoestand) bereikt H zijn maximale waarde, ook wel variëteit V genoemd:

$$H_{\max} = V = \log_2 n$$

waarin n evenals in de vorige formules het aantal mogelijke gebeurtenissen is.

$H_{\max} = V$  is te interpreteren als het aantal ja-nee-aanwijzingen (1 zo'n binaire aanwijzing correspondeert met 1 informatie-eenheid of "bit", afgeleid van "binary digit"), waarmee kan worden volstaan om uit de n mogelijkheden de juiste te weten te komen. Stel, dat  $n = 8$  en dat een ander weet welke van de 8 de juiste is, terwijl men zelf volledig in on-

zekerheid verkeert. Men heeft dan bij een efficiënte ondervragingspolitiek nooit meer dan 3 vragen met ja-nee-antwoord nodig om volledig geïnformeerd te worden. De hoeveelheid informatie, die gepaard gaat met een bekendmaking van de juiste mogelijkheid is daarom 3 bits:  $H = H_{\max} = V = \log_2 8 = 3$ .

Uiteraard wordt het maximum  $V$  niet altijd bereikt. Bij de letters van het alfabet zou  $V = \log_2 26 = 4.76$  bit per letter slechts bereikt worden, als alle letters met gelijke waarschijnlijkheden en onafhankelijk van elkaar zouden optreden. In feite treden ze niet met gelijke waarschijnlijkheden op en evenmin onafhankelijk van elkaar. Men vermoedt o.a. op grond van experimenten waarin proefpersonen werden gevraagd telkens de volgende letter te raden, dat voor de Engelse taal de feitelijke informatie-hoeveelheid  $H$  per letter slechts  $\pm 1.4$  bedraagt (25). Het verschil  $V - H$  gedeeld door  $V$  wordt de redundantie van signalen genoemd: de "overtollige" proportie. Voor het Engels  $(4.76 - 1.4)/4.76$ , d.w.z. ruim  $2/3$ . Bij een maximaal efficiënt gebruik van de letters zou men dus ruim  $2/3$  moeten kunnen missen. In de communicatie-techniek vermindert men in zo'n geval inderdaad het aantal signalen, maar worden de communicatiekanalen door z.g. ruis (noise) gestoord, dan zal men als tegenwicht tegen de ruis toch een gedeelte van die redundantie laten bestaan. In een natuurlijke taal correspondeert ruis met onduidelijk spreken of schrijven. Dankzij de grote redundantie komt de informatie meestal toch over.

Die redundantie van natuurlijke talen hangt nauw samen met allerlei grammatikale regels waar taalgebruikers zich aan houden en waardoor het aantal keuzemogelijkheden of vrijheidsgraden in het taalgebruik, dat juist bepalend is voor de informatieve inhoud, wordt ingeperkt. De redundantie geeft aan welk gedeelte overtollig is maar daarmee tevens de mate van constraint, d.w.z. de mate waarin grammatikale regels de maximaal haalbare informatie of volle variëteit inperken. Nu geldt analoog voor de wetmatigheden, die de fysica en andere wetenschappen trachten op te sporen, dat zij een gedeelte van de volle variëteit, d.w.z. van alles wat zou kunnen gebeuren, uitsluiten (26). Zowel grammatikale regels als fysische wetmatigheden vormen constraints op volle variëteiten. Deze analogie tussen fysische wetmatigheden en grammatikale regels doortrekkend (27) hebben cybernetici en informatie-theoretici een belangrijke bijdrage geleverd aan de ontwikkeling van de mo-

derne linguïstiek. Zou men erin slagen, aldus de redenering, om dat gedeelte van een natuurlijke taal dat slechts "mechanisch" gehoorzaamt aan grammatikale regels te scheiden van het eigenlijke informatieve gedeelte, dan zou men ook grammatika-machines moeten kunnen ontwikkelen om zuiver informatieve teksten in grammatikaal kloppende zinnen om te zetten. Informatie-theoretici dachten in eerste instantie aan z.g. "finite state machines". De daaruit resulterende "finite state grammars" konden niet de goedkeuring wegdragen van linguïsten als Chomsky (28), maar ze zijn wel een belangrijke aanzet geweest bij de ontwikkeling van krachtigere soorten grammatika zoals Chomsky's eigen "transformational grammar".

Het informatie-begrip heeft niet alleen een band gelegd met de linguïstiek. Frequent wordt de formeel-mathematische overeenkomst tussen de informatie-formule (H) en de entropie-formule (S) van de statistische mechanica genoemd. De 1<sup>e</sup> hoofdwet van de klassieke thermodynamica stelde, dat in een gesloten systeem de hoeveelheid energie konstant blijft, maar de 2<sup>e</sup> hoofdwet (de entropie-wet) voegde daar aan toe, dat die konstante hoeveelheid niettemin degenereert, nl. van "vrije energie", energie waar je wat mee kan doen, steeds meer irreversibel wordt omgezet in warmte-energie: aanwezige temperatuur-verschillen worden steeds meer genivelleerd. Essentieel hierbij is de beperking tot gesloten systemen. Speculaties over een uiteindelijke "warmtedood" van het heelal blijven speculaties, omdat het de vraag is, of het heelal als een gesloten systeem mag worden beschouwd. Nadat de kinetische gastheorie energetische macro-toestanden had beschreven als constellaties van molecuul-bewegingen op micro-niveau, vertaalde de statistische mechanica de 2<sup>e</sup> hoofdwet (streven naar maximale entropie) als een streven naar de meest waarschijnlijke macro-toestand. Macro-toestanden van een systeem kunnen meestal op verschillende micro-manieren gerealiseerd worden: als 2 moleculen elkaars rol overnemen zonder dat er verder iets in het systeem verandert, heeft men al een nieuwe realisatie-mogelijkheid. De meest waarschijnlijke macro-toestand is dan de macro-toestand met het grootste aantal realisatie-mogelijkheden op micro-niveau.

De overeenkomst tussen de entropie-formule (S) en Shannon's informatie-formule (H) blijkt nu, als men in de laatste de p-waarden interpreteert als de waarschijnlijkheden van de realisatie-mogelijkheden.



Zijn die waarschijnlijkheden gelijk zodat  $H$  maximaal wordt, dan gaat  $H_{\max}$  over in  $S$ , indien men  $H_{\max}$  uitdrukt in een eenheid die ongeveer  $10^{16}$  maal zo groot ( $k \ln 2$  maal zo klein) is (29). Het streven naar maximale entropie van de  $2^e$  hoofdwet (steeds grotere  $S$ ) is niets anders dan een streven naar een toestand met steeds meer realisatie-mogelijkheden (steeds grotere  $n$  in  $H_{\max}$ ) (30).

Een toestand met veel vrije energie, d.w.z. geringe entropie, zal dus slechts op weinig manieren te realiseren zijn. Zo'n toestand wordt vaak een "orde"-toestand genoemd. En in tegenstelling daarmee maximale entropie "wanorde" of "chaos". Entropie is zo eerder het tegendeel van informatie. Bij informatie gaan we immers van wanorde (veel mogelijkheden en relatief gelijke waarschijnlijkheden; onzekerheid) naar orde (weinig mogelijkheden en relatief ongelijke waarschijnlijkheden; zekerheid) (31). Dit leidde tot de gedachte om entropie-toename te beschouwen als "destructie van informatie" en omgekeerd informatie als entropie-afname. Rapoport (1969, p.92-93) geeft een verduidelijking aan de hand van een stok kaarten. Als die van de fabriek komt, d.w.z. in volmaakte orde is, weten we met zekerheid welke kaart volgt op iedere andere: de stok geeft ons volledige informatie. Naarmate we de stok meer schudden geeft die ons minder informatie. Tenslotte is de wanorde compleet en de informatie die de stok geeft over de volgende kaart nihil. Het schudproces is irreversibel, d.w.z. de wanorde kan alleen maar toenemen. Niettemin kunnen we de oorspronkelijke orde herstellen door informatie in de stok in te voeren (feeding information). Dat kan zelfs bit voor bit door het nemen van binaire beslissingen. Wetend hoe de oorspronkelijke orde was, zetten we bijv. iedere volgende kaart telkens één plaats naar voren of naar achteren. De entropie zal afnemen en uiteindelijk zal de oorspronkelijke orde worden hersteld.

Dit lijkt in strijd met de  $2^e$  hoofdwet, zoals ook Maxwell dacht, toen hij zijn befaamde duiveltje (Maxwell's demon) uitvond. In een gesloten vat, met gas gevuld en door een wand verdeeld in twee kompartimenten, zat het duiveltje bij een gaatje in de wand alle snelle moleculen uitsluitend in de éne richting en alle langzame uitsluitend in de andere richting door te laten. Volgens de kinetische gas-theorie wordt de temperatuur in het kompartiment met de snelle moleculen dan hoger en in het andere lager. De entropie van het vat als geheel zou dus afnemen.

Eigenlijk al door Szilard (1929) en later door Bridgman (1943) en Brillouin (1949) werd aangetoond, dat er geen sprake hoeft te zijn van strijdigheid met de 2<sup>e</sup> hoofdwet. Het duiveltje (een mechanisme of organisme) bevindt zich ofwel buiten het systeem en dan is het systeem niet gesloten, ofwel maakt deel uit van het systeem en dan moet het binnen het systeem de benodigde informatie vergaren over plaats en snelheid van de moleculen. Daarmee kan heel goed een entropie-toename gepaard gaan, die de entropie-afname compenseert of meer dan dat. Gesloten systemen zouden zo onderworpen blijven aan de 2<sup>e</sup> hoofdwet. Hiervan uitgaande berekende reeds Szilard, dat het vergaren van wat nu 1 bit informatie wordt genoemd minstens een entropie-toename van  $k \ln 2$  zou vergen.

Alleen al om in leven te blijven hebben organismen voldoende vrije energie nodig. Aangezien die binnen een gesloten systeem dus steeds afneemt, hetgeen uiteindelijk "entropie-dood" tot gevolg zou hebben, moeten organismen open staan naar hun omgeving. Zij moeten in de formulering van Schroedinger (1945) "negatieve entropie" (negentropie) invoeren, met name door voedsel te verteren en zonlicht op te nemen. Met dit fundamentele onderscheid tussen open en gesloten systemen werkten biologen als von Bertalanffy (1950) verder. Typische eigenschappen van levende organismen, zoals "homeostase", "finaliteit", "equifinaliteit" e.d. kregen in het kader van een "theorie van open systemen" een ruimere interpretatie dan in de cybernetica. Von Bertalanffy acht het strikt cybernetische systeem-model, dat zich hoofdzakelijk beperkt tot feedback-mechanismen en hoogstens openheid voor informatie toelaat, nog te mechanistisch voor de biologie (32). Dat neemt overigens niet weg, dat zonder de cybernetica zijn theorie van open systemen waarschijnlijk niet mogelijk zou zijn geweest.

Evenals informatie had het begrip homeostase een nauwkeurige explicatie gekregen in de cybernetica. Het was eerder geïntroduceerd door de bioloog Cannon in zijn boek: "The wisdom of the body" van 1932. In de biologie zijn er tal van de homeostatische verschijnselen. Het meest bekende is wel handhaving van de lichaamstemperatuur. Een ander voorbeeld is wat er gebeurt bij bloedingen. De haarvaten in de spieren en ledematen vernauwen, waardoor het bloed naar de meer essentiële delen van het lichaam stroomt; het organisme wordt dorstig; vloeistof uit de weefsels stroomt in de bloedvaten; het bloed bij de wond stolt; de productie van

rode bloedlichaampjes wordt verhoogd. Dat alles heeft tot gevolg, dat bloedvolume en zuurstofafgifte konstant blijven.

Homeostase of "handhaving van evenwichtstoestand" wordt in de cybernetica gerealiseerd door feedback-mechanismen. In de meet- en regeltechniek onderscheidt men ook feedforward (voorwaartskoppeling, waarbij afwijkingen al in de input worden gemeten en door een regelorgaan verwerkt), maar als grondbeginsel van sturen werd door Wiener feedback (terugkoppeling) en wel negatieve feedback (tegenkoppeling) (33) aangewezzen: de afwijkingen in de toestand (output) worden gemeten en voor verwerking teruggevoerd naar het regelorgaan. Bij een eenvoudige termostaat kan de handhaving van de evenwichtstoestand (konstante temperatuur) rechtstreeks door energie-terugkoppeling plaatsvinden, doordat bijv. de veer van een veertermometer een dekseltje oplicht om overtollige warmte te laten ontsnappen. In ingewikkeldere technische systemen zetten meetapparaten energie in informatie om en vervolgens zetten servomechanismen (bedieningsapparaten) de informatie weer in energie om. Analoge processen vinden ook in natuurlijke systemen plaats.

Wat betekent nu precies "handhaving van evenwichtstoestand" (34)? Een toestand is een punt in een z.g. toestand-ruimte, die 1-, 2- of n-dimensionaal kan zijn. De toestand-ruimte wordt gedefinieerd door het cartesisch produkt van de waardebereiken van de n relevante toestandsvaariabelen. Is bijv. zowel hoogte, lengte, breedte, temperatuur en elasticiteit relevant, dan is een bepaalde toestand een combinatie van waarden op deze 5 variabelen en de toestand-ruimte de verzameling E van alle logisch mogelijke combinaties. Een systeem beschrijft in de tijd een weg door een dergelijke toestand-ruimte.

Een evenwichtstoestand (state of equilibrium) is een element  $a$  van E, dat zonder input (storing vanuit de omgeving) identiek blijft onder een volgtijdige transformatie T:

$$T(a) = a, T^2(a) = a, \dots, T^n(a) = a$$

De opeenvolging van toestanden, die zonder input onder T aan  $a$  vooraf is gegaan, wordt samen met het eerste optreden van  $a$  de "transient" genoemd. Het gedrag van een systeem dat zo'n transient doorloopt, duidt men met dezelfde term aan. Het begrip evenwichtstoestand kan gegeneraliseerd worden naar een deelverzameling  $\eta$  van E. Een bekend voorbeeld is een cyclus: het systeem blijft dan niet in dezelfde toestand  $a$  maar repeteert

steeds een opeenvolging van de toestanden in  $\eta$ .

Handhaving van evenwichtstoestand vindt nu plaats, als het systeem na storing D vanuit de omgeving, die het systeem buiten a beweegt.

$$D(a) \neq a$$

niettemin binnen een bepaalde afstand van a blijft en uiteindelijk weer naar de oorspronkelijke a terugkeert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n D(a) = a$$

Men noemt toestand a dan (asymptotisch) "stabiel" onder D en T. Van een systeem, dat in een dergelijke toestand verkeert, zegt men dat het in de "steady state" is. De deelverzameling van E, die het waardebereik van D(a) vormt, dient duidelijk te worden aangegeven. Hoe groter die deelverzameling, hoe groter ook de stabiliteit. Het verschil met een instabiele en neutrale evenwichtstoestand kan het best verduidelijkt worden aan de hand van de drie standaardvoorbeelden. Het evenwicht van een kegel die op zijn punt staat is instabiel.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n D(a) \neq a$$

Een kogel op een horizontaal vlak komt na een verplaatsing D evenmin terug naar a, maar het evenwicht wordt neutraal genoemd, omdat precies de verplaatsing behouden blijft.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n D(a) = D(a)$$

Alleen een kubus, die iets opgetild wordt, zoekt zijn oorspronkelijke plaats weer op en zijn evenwicht is dus stabiel. Stabiele systemen onderscheiden zich niet van instabiele en neutrale systemen door het feit, dat zij uiteindelijk in een evenwichtstoestand terecht komen. Aan zichzelf overgelaten neigen nl. alle systemen naar een evenwichtstoestand: bij een één-waardige relatie T in E kan in de tijd de varieteit van mogelijke eindtoestanden voor het macro-systeem nooit toenemen (35). Waar het om gaat is de terugkeer naar een oorspronkelijke evenwichtstoestand met relatief geringe entropie. Ultra-stabiele systemen worden hierdoor gekenmerkt, dat zij onder verschillende soorten storingen D hun oorspronkelijke evenwicht kunnen handhaven en wel door verschillende aangepaste reacties T. Tot nog meer stabiliteit zijn multi-stabiele systemen - systemen opgebouwd uit meerdere relatief zelf-

standige ultra-stabiele systemen - in staat. Hoe groter de stabiliteit van een systeem, hoe meer het gedrag onder het predikaat "doelgericht" valt. In steeds sterkere mate en op steeds flexibelere wijze "tracht" het systeem immers zijn "doel", d.w.z. een bepaalde evenwichtstoestand te bereiken. Ook "finaliteit" en "equifinaliteit" (het op flexibele wijze met behulp van verschillende feedback-mechanismen handhaven van eenzelfde evenwichtstoestand) hebben op die manier in de cybernetica een nauwkeurige explicatie gekregen, ook al zal die explicatie niet met alle en dikwijls tegenstrijdige betekenissen stroken, die in het normale spraakgebruik aan deze termen worden gehecht.

Aan de hand van de besproken begrippen zal duidelijk zijn, dat de cybernetica niet slechts handelt over bepaalde specifieke systemen. Informatie, feedback, homeostase etc. treft men aan in de meest verschillende systemen "made either by Man or by Nature" (36). De cybernetica geeft in de woorden van Ashby "a single vocabulary and a single set of concepts suitable for representing the most diverse types of systems" (37). Als eerste heeft de cybernetica daarmee het nut van een algemene systeembenadering aangetoond.

Er is echter naast dit "unified science" aspekt iets anders van niet minder belang. Steeds meer krijgt de wetenschap te maken met complexe systemen en het is juist door die complexiteit dat bepaalde systemen, ogenschijnlijk in strijd met de 2<sup>e</sup> hoofdwet, in staat blijken een oorspronkelijke toestand van orde te handhaven of de orde zelfs te vergroten. "In the simpler systems, the methods of cybernetics sometimes show no obvious advantage over those that have long been known. It is chiefly when the systems become complex that the new methods reveal their power", aldus Ashby (38). Gepoogd wordt recht te doen aan die complexiteit onder handhaving van mathematische strengheid. Hiermee zijn we aanbeland bij het tweede argument voor de systeembenadering; het tegengaan van reductionisme, waaronder micro-reductionisme.

#### 1.4 Systeembenadering: alternatief voor "reductionisme"

Ondanks de voortschrijdende specialisering bleef het toch niet onopgemerkt dat vooral de fysica met behulp van het mechanisch verklaaringsmodel successen boekte. Het gevolg was, dat op grote schaal gepoogd

werd dit verklaringmodel ook in de andere wetenschappen met inbegrip van de sociale wetenschappen (psychodynamica, groepsdynamica) in te voeren: het mechanicisme was geboren. Radikale kritiek op het mechanicisme werd ingeluid in 1926 door Alfred North Whitehead in zijn werk: "Science and the modern world". Zijn kritiek kwam hard aan, niet in de laatste plaats omdat hij samen met Russell auteur was van het monumentale 3-delige "Principia mathematica" (1910-1913), dat vaak als logisch-mathematische topprestatie van deze eeuw wordt beschouwd. Volgens Whitehead was het "intellectuele kapitaal" van de gangbare wetenschapsbeoefening opgesoupeerd. Uitkomst zag hij in vervanging van het mechanisch model door een organisch model. Dit voorstel baarde nogal opzien, omdat uitbanning van het aristotelisch-teleologisch organicisme het ontstaan van de zo succesrijke fysica juist mogelijk had gemaakt.

De kracht van mechaniciistische theorieën lag in de klassieke wiskundige middelen van differentiaal- en integraalrekening. Deze blijken echter tevens beperkingen in te houden (39). In de mechanica van hemellichamen komen die nog niet tot uiting, omdat de zon in verhouding tot de planeten zo groot is, dat overal in het systeem de relaties tussen de planeten zijn te verwaarlozen. Astronomische wiskundige problemen zijn daardoor te analyseren in afzonderlijke z.g. 2-lichamen-problemen - telkens één planeet samen met de zon - die naderhand weer gekombineerd kunnen worden. De vergelijkingen zijn weliswaar niet-lineair (gravitatiekrachten zijn omgekeerd evenredig met de kwadraten van de afstanden), maar in het geval van 2 lichamen zijn die oplosbaar. Ook lineaire n-lichamen-problemen (n differentiaal-vergelijkingen met n onbekenden) zijn oplosbaar. Het niet-lineaire n-lichamen-probleem heeft tot op heden geen algemene oplossingsprocedure.

Vele problemen vertonen een graad van complexiteit, waarbij de differentiaalrekening niet kan worden toegepast zoals in de mechanica. Vooral in de biologie en de sociale wetenschap maar ook in de moderne fysica treft men dergelijke complexe systemen aan: een groot aantal eenheden en eigenschappen, die op uiterst ingewikkelde wijze aan elkaar zijn gerelateerd. Analyse in simpele problemen is uitgesloten. Het dogma van de experimentele methode "vary the factors one at a time" blijkt een onhaalbare zaak, omdat tegelijk allerlei andere factoren meevariëren (40). In het verleden werden dergelijke complexe problemen ofwel ten on-

rechte gereduceerd tot mechanische (2-lichamen-) problemen ofwel ze bleven geheel buiten de gemathematiseerde wetenschap.

Met Warren Weaver (41) dient men de georganiseerde complexiteit, waar het hier om gaat, duidelijk te onderscheiden van ongeorganiseerde complexiteit. Behalve met simpele problemen (2 lichamen tegelijk, 2 variabelen tegelijk, lineaire samenhangen) hield de klassieke wetenschap zich ook bezig met deze ongeorganiseerde of random-komplexiteit, bijv. met de complexe fysische systemen van de kinetische gas-theorie: enorme aantallen moleculen die elkaar random-shocks toedienen. Een dergelijke ongeorganiseerde complexiteit is te beschrijven met behulp van statistische middelen zoals de statistische mechanica heeft aangetoond. Voor het beschrijven van de georganiseerde complexiteit in systemen waarin een oorspronkelijke organisatiegraad (toestand van orde) gehandhaafd blijft of zelfs vergroot wordt (entropie-afname), biedt de statistiek op zichzelf echter evenmin uitkomst als de klassieke mechanica. "So today", zegt Ashby (42), "we see psychoses untreated, societies declining, and economic systems faltering, the scientist being able to do little more than to appreciate the full complexity of the subject he is studying. But", zo voegt hij eraan toe, "science today is also taking the first steps towards studying "complexity" as a subject in its own right".

Verzet tegen het mechanicisme bracht sommige filosofen zoals Bergson en biologen zoals Driesch tot vitalisme, een stroming die een beroep doet op hogere verklaringsprincipes en de mogelijkheid dat levensprocessen nog ooit te verklaren zijn met behulp van fysische en chemische processen uitsluit. Vitalisten hebben de toename in organisatiegraad (entropie-afname), zoals men die in de biologische en sociale systemen kan waarnemen en waardoor in steeds sterkere mate doelachtig gedrag gerealiseerd wordt, ooit als een inbreuk op de 2<sup>e</sup> hoofdwet beschouwd en daarmee tevens als bewijs voor hun vitalistische principes. Het bleek al gauw, dat deze redenering niet opgaat. Levende organismen zijn immers geen gesloten systemen. De voeding compenseert en overcompenseert zelfs de entropie-toename verbonden aan irreversibele fysische en chemische processen in het organisme. Daar komt nog bij, dat de gekonstateerde entropie-afname in een zich ontwikkelend organisme gedeeltelijk begrepen kan worden als informatie-afgifte van binnenuit. De informatie, die in het

embryo langs genetische weg is opgeslagen en suksessievelijk wordt afgegeven, zorgt zo voor echte zélf-organisatie (zélf-differentiatie en zélf-centralisatie), waarbij de voeding slechts als externe energetische bron optreedt. Een beroep op vitalistische principes is dus niet per se noodzakelijk, terwijl het organisme evenmin tot een gesloten mechaniek gereduceerd hoeft te worden.

De systeembenadering kan beschouwd worden als een methodologie voor de bestudering van complexiteit, waarbij zowel een reductionistisch mechanisme als een vitalistisch organicisme wordt vermeden. Boulding's (1956) hiërarchie van 9 complexiteitsniveaus geeft een indruk van de enorme taak, die de wetenschapsbeoefening nog te wachten staat en waaraan de systeem-methodologie een bijdrage tracht te leveren. Ieder hoger niveau wordt geacht ieder lager niveau in complexiteit te omvatten. Op het laagste niveau bevinden zich de statische structuren (raamwerk), op het 2<sup>e</sup> niveau de simpele dynamisch-mechanische systemen (uurwerk), op het 3<sup>e</sup> niveau de terugkoppelende regelmechanismen (termostaat), op het 4<sup>e</sup> niveau de zelfhandhavende systemen, die gekenmerkt worden door openheid naar hun omgeving en zichzelf in stand houden door middel van invoer van negatieve entropie (de levende cel), het 5<sup>e</sup> niveau is dat van planten, het 6<sup>e</sup> van dieren, op het 7<sup>e</sup> niveau komt de mens, het 8<sup>e</sup> niveau is dat van de sociale organisaties. Op het 9<sup>e</sup> niveau komt de wat merkwaardige apotheose van transcendentale systemen, waarbij Boulding opmerkt: "...even if we may be accused at this point of having build Babel to the clouds. It will be a sad day for man, when nobody is allowed to ask questions that do not have answers".

Ruwweg kan men stellen, dat de wetenschap tot het begin van deze eeuw beschikte over verifieerbare mathematische modellen voor het 1<sup>e</sup> en 2<sup>e</sup> niveau. De laatste decennia zijn er bevredigende modellen voor het 3<sup>e</sup> niveau (simpele cybernetische systemen) gekomen, terwijl recentelijk modellen voor het 4<sup>e</sup> niveau (levende cel) opvallend succes opleveren. Sinds Wundt en Comte hebben uiteraard ook psychologie en sociologie een hele ontwikkeling doorgemaakt, maar de thans beschikbare modellen voor het menselijk gedrag (7<sup>e</sup> niveau) of voor een sociale organisatie (8<sup>e</sup> niveau) zijn nog lang niet voldoende om tot ondubbelzinnige verklaringen en voorspellingen te komen.

Een vorm van reductionisme, welke nauw met mechanisme samenhangt,



is micro-reductionisme. Micro-reductie vindt plaats, als een probleem op geheel-niveau (bijv. het niveau van een organisme, groep) wordt geherformuleerd als een probleem op deel-niveau (bijv. het niveau van biologische cellen, resp. individuele personen). Evenmin als tegen een mechanisch model is tegen micro-reductie op zichzelf bezwaar aan te tekenen. Stel, dat men twee wetenschappelijke theorieën heeft, ieder met een eigen verzameling eenheden, eigenschappen, relaties en wetmatigheden. Stel, dat vervolgens blijkt, dat de eenheden in de éne theorie delen zijn van de eenheden in de andere en dat men de wetmatigheden van de laatste, de macro-theorie, logisch kan afleiden uit die van de eerste, de micro-theorie, zodat één multi-niveau-theorie ontstaat (43). De wetenschap heeft dan aan generaliserende verklaringskracht gewonnen en het doel van de wetenschap is juist verklaring en voorspelling. Helaas lopen pogingen tot micro-reductie in de praktijk vaak op een mislukking uit. Het macro-probleem blijft dan onopgelost en het moeizaam bereikte resultaat blijkt geen multi-niveau-theorie maar een nieuwe micro-theorie.

Micro-reductie kan onmogelijk als panacee voor alle wetenschappelijke problemen worden aangemerkt. Felle opponenten van micro-reductionisme, ook wel elementarisme of atomisme genaamd, zijn de "holisten". Zij maken graag gebruik van de uitspraak: "Het geheel is meer dan de som van de delen". Hun wachtwoorden zijn "Gestalt", "Ganzheit", "emergence", "field", etc. Men treft hen vooral aan in de biologie, psychologie en sociologie, maar holistische geluiden zijn soms ook te horen in een fysische of chemische kontekst: zie bijv. John Platt: "Properties of large molecules that go beyond the properties of their chemical subgroups" (1961).

Voor de sociale wetenschap heeft van Leent een interessant overzicht gegeven van de strijd tussen holisme en elementarisme (44). In zijn boek: "Sociologie, psychologie en sociale psychologie; hun opbouw, ontwikkeling en verhouding uit macro-micro-oogpunt" (1964) laat hij zien dat de strijd zich in praktisch alle sectoren van de sociale wetenschap heeft afgespeeld. Binnen de psychologie wordt de tegenstelling vaak aangeduid als die tussen "molaire" en "moleculaire" benadering (45); binnen de sociologie als die tussen "realisme" en "nominalisme" (46). Acht een holist de grens tussen sociologie en psychologie elementaristisch overschreden, wat uiteraard afhankelijk is van de wijze waarop hij die grens

ziet, dan stelt hij dat aan de kaak als "psychologisme"; in het tegengestelde geval bedient een elementarist zich van de term "sociologisme". Van Leent's eigen specialisme, de sociale psychologie, heeft nogal eens klem gezeten tussen beide kampen, aangevallen zowel door holistisch argumenterende sociologen als door elementaristisch argumenterende psychologen.

Soms speelt de strijd zich af binnen één en dezelfde wetenschapsbeoefenaar. Van Leent schildert de reductionistische ontwikkeling van George Homans (47), die van macro-niveau kwam: "The human group" (1950), maar in zijn latere publikaties het geloof in autonome sociologische wetmatigheden verliest: "Social behavior, its elementary forms" (1961). In een rede voor de American Sociological Association: "Bringing men back in" (1964) rekende Homans definitief af met het holistisch georiënteerde "structureel functionalisme" in de sociologie. Een tegengestelde ontwikkeling maakte volgens van Leent Kurt Lewin door (48). Diens "field-theoretical" benadering dreef hem naar een steeds hoger macro-niveau. Zijn groepsdynamische belangstelling betekende het eindpunt van een lange holistische reis, die op zeer laag micro-niveau was begonnen.

Van Leent ziet voor de psychologie een verband tussen micro-benadering en de experimentele traditie in deze wetenschap. De psychologie wordt volgens hem gekenmerkt door een experimenteel micro-verleden, waartegen pas later en vooral in Europa verzet is ontstaan (49). In de sociologie ziet hij een tegengestelde ontwikkeling: een oorspronkelijke maatschappij- en ideologie-kritische traditie, die vooral op macro-niveau (volkeren, maatschappijen, staatsvormen) tot zijn recht komt, gevolgd door een richting die de sociologie in dit opzicht waardevrij wil houden, meer empirisch is georiënteerd en in sterkere mate micro-sociologen aantrekt (50).

Het is hier niet de plaats om op het probleem van de waardevrijheid in te gaan. Wel zijn vele sociologen het erover eens, macro-theoretici en maatschappij-kritici maar evenzeer onderzoekstheoretici, dat het konventionele empirisch-sociologisch onderzoek een duidelijke micro-"bias" vertoont en dat daarin aan de eigenlijke opdracht van de sociologie geen recht wordt gedaan (51). Nu zijn sample-survey's en sociologisch onderzoek even moeilijk van elkaar los te denken als experimenten en psychologisch onderzoek. De vraag, of het konventionele survey-onderzoek

de oorzaak is van de gekonstateerde micro-"bias" in de sociologie, dient positief beantwoord te worden. Sample-survey's tenderen in de richting van de individuele persoon als geïsoleerde onderzoekseenheid (52): bijna altijd worden z.g. achtergrondvariabelen (geslacht, leeftijd, sociaal milieu, etc.) aan individuen met houdingen en opinies aan diezelfde individuen gekorreleerd, met het gevolg dat de sociale groep als sociale groep verdwijnt. Het gebruik van random-steekproeven, die met de sociale structuur van een groep per definitie geen rekening houden, versterkt die psychologistische tendens slechts.

De systeembenadering pretendeert een alternatief te bieden voor reductionisme en in het bijzonder voor micro-reductionisme. Zij wil een methodologie zijn voor de bestudering van complexiteit, waaronder met name ook complexe deel-geheel-verhoudingen vallen. Betekent dit nu, dat men de systeembenadering als holistisch moet karakteriseren? Ja en nee. Ja, omdat het geheel begin- en eindpunt van een systeem-analyse dient te zijn. Nee, omdat micro-reductie niet perse wordt uitgesloten. De begrippen "black box" en "reticulatie", waar zo dadelijk nader op zal worden ingegaan, geven gestalte aan die flexibele vorm van holisme. In navolging van Herbert Simon in zijn artikel: "The architecture of complexity" zou men daarom kunnen spreken van een pragmatisch holisme: "Roughly, by a complex system I mean one made up of a large number of parts that interact in a nonsimple way. In such systems, the whole is more than the sum of its parts, not in an ultimate, metaphysical sense, but in the important pragmatic sense, that, given the properties of the parts and the laws of their interaction, it is not a trivial matter to infer the properties of the whole. In the face of complexity, an in-principle reductionist may be at the same time a pragmatic holist" (53).

### 1.5 Systeembenadering en sociaal-wetenschappelijk onderzoek

Uit het voorgaande zal duidelijk zijn, dat de systeembenadering (systeem-analyse, -methodologie) in veel mindere mate op een breuk met de bestaande onderzoekspraktijk aanstuurt dan vitalisme en extreem holisme. In eerste instantie gaat het erom methodologische verworvenheden uit te bouwen, te complementeren en af te stemmen op complexiteit. Dat geldt ook voor de sociale wetenschap. In zekere zin kan men de hele sociaal-wetenschappelijke methodologie, zoals die de afgelopen decennia tot

stand is gekomen, als een poging zien om de complexiteit van het menselijk gedrag meester te worden. Zelfs de experimentele methodiek, die nog het nauwst bij de klassieke wetenschapsbeoefening aansluit, overstijgt deze ten dele door haar uitgebreide statistische arsenaal non-parametrische en parametrische toetsingsprocedures met inbegrip van de ingewikkeldere variantie-analytische. Naast toetsing van deterministische causale verbanden is daardoor ruimte gekomen voor toetsing van stochastische verbanden. Bovendien heeft de randomiseringsprocedure het mogelijk gemaakt konstant-houding van bekende externe variabelen te complementeren met controle over oneindig veel andere variabelen, die in het menselijk gedrag eveneens een rol spelen. Niet alleen de verfijnde experimentele methodiek, ook de konventionele multivariate analyse-technieken (multipelen en partiële correlatie en regressie, factor-analyse, canonische analyse, discriminant-analyse, multivariate variantie-analyse, etc.) geven al ten dele gestalte aan het idee van het complexe menselijke gedrag.

Hoewel experimentele en konventionele multivariate analyse dus in zekere zin complexiteitsgericht te noemen zijn, is er een andere meer recent ontwikkelde analyse-vorm, die nauwer aansluit bij hetgeen de systeembenadering beoogt en in vergelijking waarmee experimentele en konventionele multivariate analyse nog slechts simpel zijn:

"Par structure causale simple, nous entendons une structure causale telle qu'aucune variable explicative ne dépende causalement d'aucune autre variable explicative. Par structure causale complexe, nous entendons une structure causale qui n'est pas simple.... ces distinctions sont d'une importance méthodologique fondamentale. En effet les structures simples sont surtout caractéristiques de situations d'expérimentation dans lesquelles il est possible de répartir de façon aléatoire les effets de variables qui ne sont pas causalement dépendantes. C'est pourquoi les méthodes d'analyse de ces structures ont été développées essentiellement au contact des sciences de la nature, biologie, agronomie, etc. Elles sont au coeur de la théorie des plans expérimentaux"(54).

Met complex doelt Boudon op het onderzoeksterrein van wat vaak non-experimentele analyse wordt genoemd. Deze analyse-vorm is eveneens multivariaat maar in zoverre aan minder restricties onderhevig dan de konventionele multivariate technieken, dat geen eenduidige opdeling in afhankelijke en onafhankelijke variabelen noodzakelijk is. Variabelen

mogen in verschillende vergelijkingen van het non-experimentele verklaringsmodel nu eens als afhankelijk en dan weer als onafhankelijk optreden. De non-experimentele analyse is als bescheiden z.g. elaboratietechniek ontstaan in het kader van survey-analyse aan Lazarsfeld's "Columbia University Bureau of Applied Social Research" (55). Na Simon's bemoeienis met het begrip "spurious correlation" (56) heeft zij een eerste systematische behandeling gekregen - hoewel nog beperkt tot recursieve modellen - in Blalock's: "Causal inferences in nonexperimental research" (1964), gevolgd door een meer omvattende in Boudon's: "L'analyse mathématique des faits sociaux" (1967). Belangwekkende bijdragen werden door Blalock verzameld in: "Causal models in the social sciences" (1971). Meer recente inleidingen zijn Duncan's: "Introduction to structural equation models" (1975) en het derde deel: "Simultaneous-equation models" in het handboek van Namboodiri, Carter and Blalock (1975).

Meer dan van de vooral in de psychologie ontwikkelde multivariate technieken maakt de non-experimentele analyse gebruik van Wright's pad-analyse en van de econometrie (57). Samenwerking met econometristen leidde tot de onder redactie van Goldberger and Duncan uitgegeven reader: "Structural equation models in the social sciences" (1973). In de bijdrage hieraan van de Zweedse specialist in factor-analyse Jöreskog werd niettemin een verbinding gelegd met factor-analyse. Een recente uiteenzetting van Jöreskog's z.g. LISREL-benadering vindt men in zijn "Structural equation models in the social sciences: specification, estimation and testing" (1976). Het bijzondere van een LISREL-model is, dat de variabelen in het stelsel vergelijkingen latent mogen zijn en dat er voor ieder van deze latente variabelen (factoren) meerdere indicatoren (geobserveerde variabelen) mogen optreden.

In feite tracht de non-experimentele analyse op soortgelijke wijze als systeemleer en cybernetica tegemoet te komen aan de bezwaren tegen de experimentele methode (58). Voor de sociologie heeft de experimentele methode een waarschijnlijk nog sterkere psychologische werking dan survey-onderzoek. Zo merkt Coleman op over laboratorium-experimenten met groepen: "In short, these experiments have been extremely valuable for the study of psychology in a social setting, but less valuable for sociology itself. To see why this is so involves only examination of the design of many of the experiments. Individual behavior

is, as I suggested, the usual dependent variable, but there has seldom been systematic variation of social-structural variables as independent variables; and even less frequently has social structure been taken as the dependent variable itself, except in the sense of "communication structure" (59).

Het belang van de non-experimentele verklaringsmodellen voor de systeembenadering komt met name hierin tot uiting, dat wederkerige causale verbanden en feedback-loops erin opgenomen kunnen worden (60). Dat is zowel in zuiver statische alsook in dynamische modellen mogelijk. Het belang voor de systeembenadering wordt echter pas evident bij de dynamische modellen, d.w.z. modellen waarin variabelen in verschillende tijdsaanduidingen worden opgenomen, zodat niet alleen data voor verschillende eenheden op hetzelfde tijdstip, maar ook voor dezelfde eenheid op verschillende tijdstippen moeten worden verzameld. Voor dergelijke dynamische modellen kunnen evenwicht en stabiliteit expliciet worden gedefinieerd en onderzocht. Dynamische modellen werden in de sociologie geïntroduceerd door Simon (1952, 1955) met formalisaties van theorieën van resp. Homans en Festinger. Het belang ervan voor de systeembenadering werd sterk beklemtoond door Barton en Anderson in een publicatie van het "Columbia University Bureau of Applied Social Research" (61) en later opnieuw door Blalock (62).

Ook aan het holistisch karakter van de systeembenadering kan met behulp van de non-experimentele verklaringsmodellen gestalte worden gegeven. Op de eerste plaats door data-verzameling en analyse rechtstreeks op geheel- of macro-niveau uit te voeren: in de sociologie bijv. door niet het individu maar de groep als eenheid te nemen. Rechtstreeks op groepsniveau waargenomen eigenschappen noemen Lazarsfeld en Menzel (1961) "globaal"; anderen spreken over "emergent", "integral" of "syntalic". De moeilijkheid ermee is, dat ze vaak lastig te vinden zijn. Groepen laten zich nu eenmaal minder gemakkelijk ondervragen dan individuele personen (63). Vandaar ook het belang van de onderzoekstechnische ontwikkelingen, die het mogelijk maken macro- en micro-eenheid gelijktijdig in de analyse te betrekken: multi-niveau-analyse. Het gebruik van "geaggregeerde" macro-variabelen is in de sociologie weliswaar minder ontwikkeld dan in de economie (64), maar "analytische" variabelen - de term is van Lazarsfeld and Menzel (1961) - vindt men toch ook in de

sociologie: proporties, gemiddelden, standaard-deviaties, correlatie-coëfficiënten etc., berekend over de leden van elke groep. Als ze eenmaal geconstrueerd zijn, kunnen analytische variabelen verder op dezelfde wijze als globale variabelen in de verklaringsmodellen worden opgenomen en in feite werken heel wat tot nu toe gepubliceerde modellen in de sociologie met analytische variabelen.

Een originele sociologische bijdrage aan de multi-niveau-analyse is de contextuele analyse (65), eveneens afkomstig van het "Columbia University Bureau of Applied Social Research". Diskussies met betrekking tot de "ecological fallacy" leidden tot de gedachte, dat hoewel uit samenhang tussen analytische groepseigenschappen niet zo maar besloten mag worden tot samenhang op individueel niveau, die analytische groepseigenschappen niettemin gebruikt kunnen worden om de individuen te karakteriseren die deel van de groep uitmaken: karakterisering van een leerling bijv. door de eigenschap "zit in een klas met een hoog percentage onvoldoendes voor wiskunde" waarbij die leerling zelf erg goede cijfers voor wiskunde kan hebben.

Dergelijke individuele eigenschappen, die afgeleid zijn van groeps-eigenschappen - analytische of globale - worden door Lazarsfeld en Menzel (1961) in tegenstelling tot de "absolute" individuele eigenschappen "contextueel" genoemd. Contextuele eigenschappen maken formulering van contextuele proposities mogelijk: een eventueel verband bijv. tussen het zitten in een klas met een bepaald percentage onvoldoendes voor wiskunde en de houding van leerlingen t.o.v. het vak wiskunde. Contextuele proposities willen groeps effecten (op de houding t.o.v. het vak wiskunde bijv.) aantonen, maar het gevaar van "spurious" effecten is uiteraard levensgroot. Daarom wordt de contextuele analyse bijna altijd multi-variëet toegepast: het verband tussen de contextuele variabele (percentage onvoldoendes in de klas) en de te verklaren variabele (houding) wordt geanalyseerd onder controle over de absolute variabele (eigen cijfer voor het vak) om op die manier het zuivere groeps effect van het individuele effect te isoleren. Wanneer het hierbij blijft, zijn er slechts 3 variabelen bij betrokken, maar er is geen enkele reden waarom contextuele variabelen niet evenals analytische variabelen in complexere verklaringsmodellen worden opgenomen.

Om misverstand te voorkomen: analytische variabelen treden uiteraard

alleen op in macro-modellen, terwijl contextuele variabelen nog altijd in micro-modellen thuishoren, hoewel ze van macro-variabelen (analytische of globale) zijn afgeleid. De macro-micro-tegenstelling dient men hierbij in strikt methodologische zin te verstaan. Methodologisch geeft het prefix "macro-" slechts aan, dat er meeromvattende eenheden optreden, waar eenheden van een lager niveau als micro-eenheden deel van uitmaken. Diezelfde micro-eenheden kunnen in een ander verband de rol van macro-eenheden vervullen. Neem bijv. gezinnen. In het ene onderzoek vormen die t.o.v. gehele samenlevingen een micro-niveau met bijbehorend micro-model, terwijl zij t.o.v. individuele gezinsleden in een ander onderzoek als macro-niveau optreden met bijbehorend macro-model.

In het begin van dit hoofdstuk werd veel nadruk gelegd op het belang van relaties in een systeem-methodologie. Tot nu toe kwamen echter vooral eigenschappen ter sprake. Een laatste onderzoekstechnische ontwikkeling die we hier ter sprake willen brengen, de structurele analyse, richt zich expliciet op relaties, bijv. relaties tussen personen. Het nieuwe element in de structurele analyse is de andere aard van de data. Eigenschappen kunnen weliswaar de meest verscheiden vormen aannemen: acties, disposities, biologische of geografische eigenschappen etc., maar altijd is er sprake van een karakterisering van een afzonderlijke eenheid: één datum per eenheid. Het aantal data bij een bepaalde eigenschap is dan ook nooit groter dan  $N$ : het aantal onderzochte eenheden. In het geval van een reflexieve binaire relatie kan het aantal data oplopen tot  $N^2$ . Bij een binair relationeel datum zijn nl. altijd 2 eenheden tegelijk betrokken:  $x$  geeft een gunstig oordeel over  $y$ ,  $x$  is vriend van  $y$ ,  $x$  werkt graag samen met  $y$ , etc.

Het begin van de structurele analyse in de sociale wetenschap gaat terug tot de sociometrische school van Moreno. De vriendschapsstructuur in een klas bijv. werd daar vastgelegd in een z.g. sociogram. De eerste pogingen tot formalisatie werden gedaan door Northway (1940) en Cook (1945): zij waren niet tevreden met het onsystematische "trial and error" karakter van het sociogram (66). Formalisatie met behulp van de z.g. sociomatrix is het eerst uitgevoerd door Forsyth and Katz (1946); later met behulp van matrix-algebra in nauwe samenwerking met elkaar door: Festinger (1949), Luce and Perry (1949), Festinger, Schachter and Back (1955) en Luce (1950). Intussen is er een heel mathematisch bouwwerk van



graph-theorie en matrix-algebra ter beschikking gekomen om aan de behoeften van de structurele analyse tegemoet te komen. Een uitgebreid overzicht vindt men in de studie van Felling: "Sociaal-netwerkanalyse" (1974).

Op zichzelf moet het mogelijk zijn relationele data op dezelfde wijze bi- en multivariaat met elkaar in verband te brengen als eigenschapsdata. Cartwright pleitte daarvoor in 1959: "... if the hypothesis advanced by Homans (1950) that interaction generates liking is correct, a graph ... should tend to have a "liking" line wherever there is an interaction line. One should also expect to find definite relations between power lines and communication lines or "formal" and "informal" lines of various sorts" (67). Bij een soortgelijke oproep 10 jaar later moet Coleman konstateren: "Computers have made the study of such structural problems simpler, but there has been relatively little use of the new technical capabilities" (68).

In feite worden graph-theorie en matrix-algebra typisch voor aggregatie gebruikt. Op meer of minder ingewikkelde wijze worden relationele data van één bepaalde soort geaggregeerd om micro-eenheden te karakteriseren (bijv. iemands status of centraliteit in een structuur) of om macro-eenheden te karakteriseren (bijv. de sociale cohesie, het evenwicht, het aantal cliëks in de structuur van de groep). In het eerste geval spreken Lazarsfeld en Menzel (1961) van "relationele" individuele eigenschappen, in het laatste geval van "structurele" groepeigenschappen. Felling (1974) geeft in afzonderlijke hoofdstukken structurele analysemodellen, die leiden tot 1) structurele, 2) relationele, 3) zowel structurele als relationele eigenschappen. Eenmaal geconstrueerd kunnen structurele en relationele variabelen op dezelfde wijze als analytische, contextuele, globale en absolute variabelen in macro- c.q. micro-verklaringsmodellen worden opgenomen. In paragraaf 3.5 zal echter ook worden ingegaan op een heel direct gebruik van graphs bij de constructie van systemische verklaringsmodellen.

Zeker niet minder dan de non-experimentele analyse worden multi-niveau-analyse en structurele analyse door de verschillende auteurs geschikt geacht om tegemoet te komen aan holistisch-systemische verlangens. Tegelijk keert echter aanhoudend terug, dat we nog pas aan het begin van een methodologische ontwikkeling staan en dat nog vele problemen wachten op een oplossing. Laten we hier volstaan met een drietal

citaten, achtereenvolgens van Lazarsfeld, Scheuch en Coleman:

"Contextual propositions go far toward catching what authors have in mind when they use such "holistic" expressions as "taking the total situation into account" and "considering structures". But, again, much work remains to be done before this somewhat vague resemblance is turned into a systematic and creative correspondence" (69);

"... Problem Beobachtungen von Einzelercheinungen und bei Einzelpersonen mit den Fragestellungen einer Systemanalyse zu verbinden die bisher ohne systematische und objektive empirische Forschung auskam ... Durch die verschiedenen Formen der Mehrebenen-Analyse (waaronder Scheuch ook structurele analyse rekent, J.O.) wird es technisch leichter Aussagen nicht-deskriptiver Art abzuleiten und zu belegen und das Instrumentarium der empirischen Sozialforschung für structurele Aussagen zu benutzen ... Die wichtigste Entwicklung ist jedoch ein wachsendes Verständnis dafür, das die üblichen Vorgehensweisen - insbesondere der Auswertung von Umfragedaten - bei den ohnehin selteren Versuchen zu einer Erklärung von Verhalten eher die Struktur von Merkmalskonstellationen bei Individuen analysierten als soziale Strukturen" (70);

"Despite the statistical convergence described earlier, there are some statistical problems which if solved would aid sociological analysis greatly. The two most important classes of such problems are those involving structure and those involving units of analysis at several levels of aggregation (for example, individual, classroom, school, city)" (71).

De conclusie moet zijn, dat de sociale wetenschap en in het bijzonder de sociologie een aantal systemisch relevante analyse-vormen ontwikkelt: non-experimentele analyse, multi-niveau-analyse (aggregatie) en structurele analyse. Deze staan bovendien niet los van elkaar. De structurele analyse wordt immers bijna altijd voor aggregatieve doeleinden gebruikt, terwijl analytische, contextuele, structurele en relationele variabelen in non-experimentele verklaringsmodellen kunnen worden opgenomen. Voordat we nu aan de hand van de genoemde analyse-vormen zullen trachten sociaal-wetenschappelijke methodologie en systeemmethodologie dichter bij elkaar te brengen, eerst een explicitering van wat hier onder "systeem" en "systeem-model" wordt verstaan.

## 1.6 Het systeem-model (72)

In toenemende mate wordt i.p.v. over "systems theory" gesproken over "systems research", "systems approach", "systems analysis" of "systems methodology". Men realiseert zich, dat het veel meer gaat om een bepaalde benaderingswijze van de realiteit dan om een specifieke inhoudelijke theorie. Het zou nl. onjuist zijn de wereld op te delen in systemen aan de ene kant en niet-systemen aan de andere kant. Alles kan systeem zijn, als we maar bereid zijn om het als systeem te beschouwen, d.w.z. als we maar bereid zijn om een stuk realiteit tot systeem te modelleren. Het resulterende "systeem-model", ook wel "Real Life System" (R.L.S.) genaamd, is evenals eenheid-eigenschap-en structuur-model een abstractie-model, maar veel rijker dan beide laatste. Voor de constructie van een systeem-model hebben we eenheden, eigenschappen en relaties nodig maar meer dan dat.

Laten we als voorbeeld ons zonnestelsel nemen. Dat bestaat uit een verzameling eenheden (zon, planeten, satellieten, eventueel asteroïden en meteoren). Al deze micro-eenheden t.o.v. het zonnestelsel als geheel worden gekarakteriseerd door micro-eigenschappen en onderling door micro-relaties. Tezamen vormen deze micro-eenheden de macro-eenheid van het systeem, die op zijn beurt gekarakteriseerd wordt door macro-eigenschappen. Een systeem bevat dus minstens 2 eenheden-niveaus: een macro-en micro-niveau. Vaak worden ook nog meso-niveaus onderscheiden. De keuze van de niveaus is uiteraard afhankelijk van het gestelde probleem. Men had even goed een hoger macro-niveau (melkweg) of een lager micro-niveau (moleculen, atomen) kunnen nemen.

Soms kan het nodig zijn op de meso-niveaus subsystemen te onderscheiden (bijv. aarde-maan). Een subsysteem is te omschrijven als een integraal deel van een meeromvattend systeem: alle eigenschappen en relaties aan en in het deel behoren tot het subsysteem. Partiële systemen zijn in zekere zin het omgekeerde: geabstraheerde gehele systemen. Slechts een gedeelte van alle eigenschappen en relaties aan en in het systeem blijven voor een partieel systeem behouden. In fig.1.6.1. is eerst de interne relationele structuur van een systeem als geheel gegeven, vervolgens van een drietal daaronder vallende subsystemen en tenslotte van een bijbehorend partieel systeem: de punten representeren micro-eenheden, de pijlen micro-relaties en de cirkels meso-eenheden.

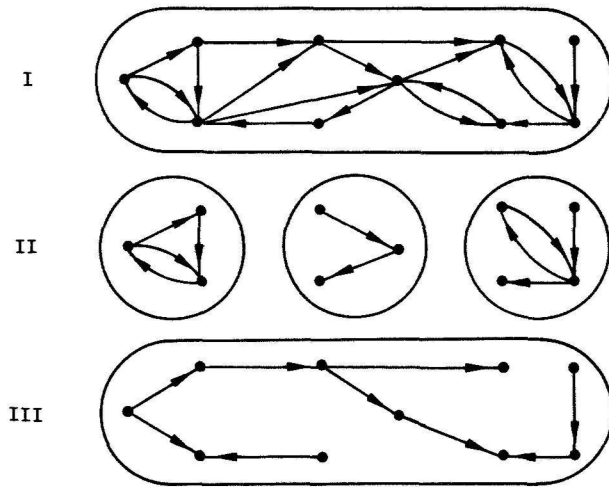


Fig. 1.6.1: Interne relationele structuur van een systeem als geheel (I), van een drietal subsystemen (II) en van een partieel systeem (III).

Blijkt een probleem niet integraal oplosbaar, dan kan het nuttig zijn tot onderscheiding van partiële systemen over te gaan, die men dan later weer poogt te integreren. Zo worden voor een bedrijf vaak de volgende partiële systemen onderscheiden: het technologisch partiële systeem (o.a. de machine-straten in de produktie-lijn), het economisch partiële systeem (o.a. de geldstroom in een bedrijf), het sociale partiële systeem (o.a. de relaties tussen de medewerkers).

Nu is de realiteit omvangrijker dan alleen het beschouwde systeem. Alles wat buiten het systeem valt, wordt omgeving (environment) genoemd. Omgeving is dus een tweede verzameling eenheden buiten de verzameling die onder het systeem zelf valt: alle sterren, planeten, satellieten buiten ons zonnestelsel bijv. Het leggen van de systeem-grens (boundary) tussen systeem en omgeving is vaak een lastig methodologisch probleem. In bepaalde wetenschapsgebieden ligt dat eenvoudiger dan in bijv. de organisatie-leer: bij bedrijfsorganisaties is het vaak de vraag, of men bepaalde relatief zelfstandige diensten nu wel of niet tot het bedrijfs-systeem moet rekenen. Toch is de keuze van geschikte systeem-grenzen van groot belang. Het vinden van een oplossing voor het onderzoeksprobleem kan ervan afhankelijk zijn.

Wordt de systeem-grens zodanig gekozen, dat de omgeving volstrekt irrelevant is voor het gestelde onderzoeksprobleem, dan spreekt men van een gesloten systeem. Zo kon de klassieke mechanica het zich permitteren de omgeving geheel buiten beschouwing te laten. Biologen, sociologen, psychologen en vele andere wetenschappers zijn minder bevoorrecht: zij hebben met essentieel open systemen te doen. Soms kan een open systeem tot een gesloten systeem worden gemaakt door het gedeelte van de omgeving, waar het systeem invloed van ondergaat, aan het systeem te koppelen. De 2<sup>e</sup> hoofdwet van de thermo-dynamica blijkt voor organische systemen niet op te gaan. Voor het organisch systeem samen met zijn omgeving - een gesloten systeem - gaat hij wel op. Bij open systemen worden de invloeden, die het systeem vanuit zijn omgeving ondergaat, input genoemd. De invloeden vanuit het systeem op de omgeving worden output genoemd.

Het pragmatisch holisme van de systeembenadering komt hierin tot uiting, dat men start vanuit het macro-niveau. De samenstellende delen van de macro-eenheid worden in eerste instantie zoveel mogelijk buiten

beschouwing gelaten. Waar het in eerste instantie om gaat, is het macro-niveau met zijn eigenschappen en samenhangen daartussen, d.w.z. het systeem als black box. Pas in tweede instantie, als op macro-niveau geen oplossing voor het gestelde probleem wordt gevonden, gaat men lagere niveaus in de analyse betrekken, d.w.z. past men box-cutting toe. De zo in de analyse betrokken eenheden van een lager niveau vormen tezamen met hun onderlinge relaties het structuur-model binnen het systeem-model. Box-cutting of reticulatie - deze laatste term vestigt tegelijk de aandacht op die onderlinge relaties - kan noodzakelijk zijn, maar als daartoe wordt overgegaan, dient in ieder geval een oplossing gevonden te worden voor het probleem, hoe de band tussen het macro-niveau en de lagere niveaus kan worden behouden. Slaagt men er niet in een bevredigende oplossing hiervoor te vinden, dan is micro-reductionisme het onvermijdelijke gevolg. Het etiket "systeembenadering" zou in dat geval het tegendeel kamoufleren.

Het begrip black box is op aardige wijze te verduidelijken aan de hand van een tweetal precies dezelfde doosjes, ieder met een drukknop (input) en een wijzer (output). Bij beide doosjes geeft de wijzer de druk aan, die op de knop wordt uitgeoefend. Uiterlijk is er geen enkel verschil en evenmin in het functioneren: bij gelijke druk gelijke uitslag van de wijzer. Opent men echter de doosjes, dan blijkt het ene geheel mechanisch en het andere electronisch te werken. Zolang het er alleen om gaat de samenhang tussen drukuitoefening en uitslag van de wijzer te achterhalen, kan men de doosjes rustig gesloten houden, d.w.z. men kan ze als black box beschouwen. In de techniek speelt de black-box-benadering een belangrijke rol. Een auto zou men kunnen repareren door hem eerst helemaal uit elkaar te halen om hem dan precies volgens de tekeningen weer op te bouwen. In het algemeen is het echter aan te raden om met de black-box-benadering te beginnen: eerst zoveel mogelijk waarnemingen op globaal macro-niveau verrichten (loopt de motor, krijgt hij benzine, is er contact, etc.) en pas daarna, zoveel als nodig, verder reticuleren, d.w.z. uit elkaar halen.

Dat de black-box-benadering niet overal en altijd toepasbaar is, blijkt overduidelijk uit het voorbeeld van een code-slot. Men zou alle combinaties kunnen aftasten (input) om te achterhalen, wanneer het slot opengaat (output), maar bij een wat ingewikkelder slot is de kans dat

men de oplossing zo binnen redelijke tijd vindt astronomisch klein. Om pragmatische redenen doet men er in zo'n geval beter aan de black box te openen om van binnenuit de werking van het mechanisme te analyseren.

In zijn elementaire vorm is het black-box-model (zie fig. 1.6.2.: een ongereticuleerd systeem of macro-eenheid, in een omgeving geplaatst, waarbij de invloeden vanuit de omgeving op de macro-eenheid als input-eigenschappen en die vanuit de macro-eenheid op de omgeving als output-eigenschappen optreden) nog tamelijk onvruchtbaar. Het omvat in wezen nauwelijks meer dan een eenheid-eigenschap-model op macro-niveau. De macro-eigenschappen worden alleen onderscheiden in input- en output-eigenschappen. Als voorbeelden van het elementaire black-box-model zijn te beschouwen het behavioristisch S-R-model (stimuli uit de omgeving worden geacht op het individu in te werken en responses van het individu op de omgeving, maar de gang van zaken binnen het individu wordt geheel buiten beschouwing gelaten) en evenzeer het survey-research-model (de invloed van achtergronds-eigenschappen zoals geslacht, leeftijd, sociaal milieu, etc. - input - op opinies en attitudes - output - wordt onderzocht, zonder dat wordt nagegaan hoe dat proces binnen het individu precies verloopt).

Nu kan het black-box-model ook zelf - zonder nog tot reticulatie over te gaan - vruchtbaarder worden gemaakt en wel door 1) de black box met toestand-eigenschappen uit te rusten en 2) de regelbare input-eigenschappen te identificeren (zie fig. 1.6.3). Juist de regelbare of beslissingseigenschappen maken de toepassing van controle- en optimalisatietechnieken middels spel-, decisie-theoretische en andere modellen mogelijk, waardoor problemen van regeling of sturing (controle) toegankelijk worden voor een mathematische behandeling. Hoewel de praktische betekenis van de systeembenadering met name in de oplossing van deze problemen is gelegen, kan er in deze publikatie verder weinig of geen aandacht aan worden besteed. Verwezen zij naar handboeken als die van Athans and Falb (1966) en van Kwakernaak and Sivan (1972).

Zeker zo belangrijk en niet in de laatste plaats met het oog op regeling is de introductie van toestand-eigenschappen, waardoor toepassing van de mathematische toestand-ruimte-modellen (state-space-models) mogelijk wordt. "Within the last several years, in particular, the phase-space or, equivalently, state-space approach has come to play a

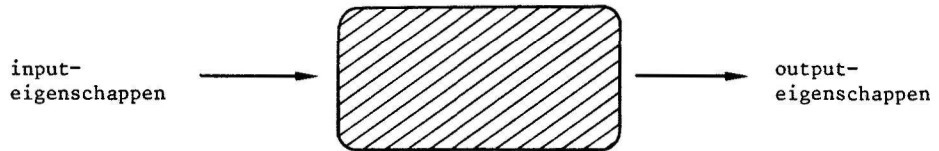


Fig. 1.6.2: Het elementaire black-box-model.



Fig. 1.6.3: Het uitgebreide black-box-model.



central role in theories of optimal control of constrained as well as unconstrained systems" (73), aldus Zadeh and Desoer in hun bekende handboek op het gebied van de mathematische systeem-leer: "Linear systems; the state space approach" (1963), dat bijna geheel aan dergelijke toestand-ruimte-modellen is gewijd.

De toestand-eigenschappen bepalen op een bepaald tijdstip tezamen de toestand van het systeem. Het begrip toestand werd voor het eerst door A.M. Turing in 1936 op formele wijze geïntroduceerd. De toestand wordt in een toestand-ruimte-model geacht voort te vloeien uit de begin-toestand en verder uit alles wat er daarna vanuit de omgeving met het systeem is gebeurd, o.a. door regelende menselijke invloed. In de toestand wordt het inwendige van het systeem (alles wat black box blijft) als resultaat van alle invloeden in het verleden samengevat maar bij voorkeur alleen voor zover op macro-niveau en voor heden en toekomst van belang. Men noemt de toestand ook wel het geheugen van het systeem.

Hiermee zijn we aan het eind gekomen van een eerste globale bespreking van het systeem-model als abstractie-model. Abstractie-modellen zijn ordeningen van de reële wereld, zodanig dat logische calculi erin interpreteerbaar worden, d.w.z. aan logische symbolen en uitdrukkingen reële semantische inhoud kunnen worden toegevoegd. Als zodanig onderscheiden abstractie-modellen (eenheid-eigenschap-, structuur- en systeem-model) zich van bijv. toestand-ruimte-modellen en van de statische en dynamische verklaringsmodellen, waar eerder sprake van was. De laatste zijn mathematische representatie-modellen, die de in de abstractie-modellen gevangen reële wereld met behulp van getallen of andere mathematische objecten representeren. In de volgende hoofdstukken zullen ook de representatie-modellen en in het bijzonder de systemische in de beschouwing worden betrokken.

## Hoofdstuk 2: Mathematische representatie: beschrijvend en verklarend

### 2.1 Van tijdgevoelig abstractie-model naar representatie-model

In paragraaf 1.1 werd het belang onderstreept van uitspraken in de vorm:  $(x)(Fx \rightarrow Gx)$ . Dergelijke universele uitspraken worden gebruikt om wetmatigheden uit te drukken en predicties uit te voeren. Is het feit, uitgedrukt door de beschrijvende uitspraak  $F_m$ , bekend, dan kan met behulp van de universele uitspraak het nog onbekende feit, uitgedrukt door de beschrijvende uitspraak  $G_m$ , worden geprediceerd.

De samenhang tussen de eigenschappen  $F$  en  $G$  is volgens zo'n universele uitspraak onveranderlijk in die zin, dat als  $F$  optreedt  $G$  ook altijd aanwezig is. Soms is in omgekeerde richting het feit  $F_m$  uitgaande van  $G_m$  weer terug te vinden, te retrodiceren zou men kunnen zeggen, maar daarvoor is de afzonderlijke uitspraak  $(x)(Gx \rightarrow Fx)$  vereist. Beide uitspraken als volgt samengevat:  $(x)(Fx \leftrightarrow Gx)$  drukken een onveranderlijke samenhang tussen  $F$  en  $G$  in twee richtingen uit, die we in navolging van Wold (1) reversibel zullen noemen. Reversibele samenhangen bieden vaak voordelen, bijv. bij feedback-mechanismen. In paragraaf 3.5 zal blijken, dat niet-reversibele samenhangen daarbij moeilijkheden kunnen veroorzaken. De genoemde reversibele en niet-reversibele samenhangen zullen we later behandelen in de vorm van relaties tussen getallen. We doen dan dus een beroep op een mathematisch model, maar klaarblijkelijk zijn dergelijke samenhangen in principe nog met behulp van louter predikaat-logische taalmiddelen rechtstreeks voor het abstractie-model te formuleren zonder een beroep te doen op een mathematisch representatie-model.

Uitspraken zoals  $(x)(Fx \rightarrow Gx)$  en  $(x)(Fx \leftrightarrow Gx)$  generaliseren en wel universeel. Zij stellen de samenhang tussen  $F$  en  $G$  niet voor één bepaalde eenheid:  $F_m \rightarrow G_m$ , ook niet voor een onbepaald aantal eenheden:  $(\exists x)(Fx \rightarrow Gx)$  maar voor iedere eenheid in het universum afzonderlijk. "Deterministische" wetmatigheden, waar het bij universele uitspraken om gaat, leggen dan ook zeer zware constraints op aan het abstractie-model: eenheden, die wel eigenschap  $F$  maar niet  $G$  bezitten, mogen in het geheel niet voorkomen. Voor veel abstractie-modellen, bijv. in de sociale wetenschap, zijn dergelijke constraints te veeleisend maar bieden de

minder stringente, die de naam "statistische" of "stochastische" wetmatigheden hebben meegekregen, meer mogelijkheden. Daarvoor is niet vereist, dat alle eenheden met F ook G bezitten, maar is het al voldoende als een bepaalde proportie (uitgedrukt in een getal, bijv. 0.9) ze bezit.

Aangezien stochastische wetmatigheden niet meer universeel generaliseren, d.w.z. niet meer voor iedere eenheid afzonderlijk gelden, zijn een abstractie-model en louter predikaat-logische taalmiddelen ook niet meer toereikend om een stochastische samenhang tot uitdrukking te brengen. We zijn gedwongen een beroep te doen op getallen (proporties, waarschijnlijkheidsfracties) om die in overeenstemming met de eisen aan waarschijnlijkheidsfuncties te stellen (2) toe te voegen aan de verzameling eenheden met G en de verzameling eenheden zonder G in de verzameling eenheden met F. Maar dat betekent, dat we behalve van een abstractie-model van de realiteit (het universum wordt in de statistiek "sample-space" genoemd en de subverzamelingen gedefinieerd door F, G, ... "events") tevens van een numeriek mathematisch representatie-model gebruik maken, i.c. een waarschijnlijkheidsmodel. Alleen in het bijzondere geval, dat alle waarschijnlijkheidsfracties de waarde 0 óf de waarde 1 aannemen, zouden we ook kunnen afzien van een dergelijk waarschijnlijkheidsmodel.

Een ander voorbeeld van wetmatigheden, die onmogelijk rechtstreeks voor een abstractie-model zijn te formuleren, zijn wetmatigheden waarbij een verschil in tijd, een eindig verschil  $\Delta t$  of een tot 0 naderend verschil  $dt$ , een rol speelt. We zullen hier wat langer bij blijven stilstaan. Op de eerste plaats omdat de vooral met statistische middelen opererende sociale wetenschap veel minder aan bestudering van verandering in de tijd heeft gedaan dan de systeem-methodologie, waar tijd en verandering juist centraal staan. Coleman pleitte in zijn artikel: "The mathematical study of change" terecht voor een meer systematische bestudering van verandering ook in de sociale wetenschap: "In fact, methods of statistics based on static models of association have been applied to the study of change. But because they are based on static models, the approach is both ad hoc and more complicated than necessary" (3). Een tweede reden om ons wat langer met het verschijnsel tijd bezig te houden is dat een abstractie-model in ieder geval zodanig moet zijn opgebouwd, dat veranderingen in de tijd geen inconsistenties tot gevolg hebben. Een abstractie-model in de tot nu toe gehanteerde vorm voldoet niet aan deze

voorwaarde. Voordat verder wordt ingegaan op de noodzaak van een mathematisch representatie-model, zal daarom eerst het abstractie-model zelf worden uitgebouwd en wel tot een "tijdgevoelig" abstractie-model.

### Tijdgevoelige abstractie-modellen $M$ , $M'$ , $S$ en $S'$

Laten we uitgaan van  $(x)Gx$ , waarin een universele aanwezigheid van  $G$  bij de eenheden van een universum wordt uitgesproken, bijv. bij alle mensen: "Voor iedere  $x$  geldt,  $x$  is sterfelijk". De constraint opgelegd aan het abstractie-model is hier veel stringenter dan bij  $(x)(Fx \rightarrow Gx)$ , want  $(x)Gx$  zou voor een universum waarin behalve mensen ook goden voorkomen niet opgaan in tegenstelling tot  $(x)(Fx \rightarrow Gx)$ : "Voor iedere  $x$  geldt, als  $x$  een mens is, is  $x$  sterfelijk". Stel nu, dat de goden op een gegeven moment ook een lid van het menselijk geslacht  $m$  het predikaat onsterfelijk verlenen: een verandering in de tijd dus. In dat geval gaat zelfs  $(x)(Fx \rightarrow Gx)$  niet meer op. Nog erger is, dat zonder wijzigingen in het abstractie-model ons uitsprakenstelsel inconsistent wordt. In het begin gold nl.  $Gm$  (" $m$  is sterfelijk"), later  $\neg Gm$  (" $m$  is onsterfelijk"), hetgeen tezamen leidt tot de strijdige uitspraak:  $Gm \ \& \ \neg Gm$ . Als alle gekozen eigenschappen bij ieder van de eenheden constant zijn over de tijd of als voor iedere eigenschap op ieder tijdstip een verschillende predikaatletter wordt gebruikt, zijn dergelijke inconsistenties te vermijden, maar dan is van bestudering van verandering in de tijd geen sprake meer. Het is misschien goed erop te wijzen, dat hetzelfde probleem zich voordoet in het kader van meet-theorieën. Hierbij gaat het erom met behulp van een meet-functie aan iedere eenheid van een abstractie-model één getal toe te wijzen. Verandert nu bijv. iemands intelligentie-niveau in de tijd, dan zou hij eerst een getal  $a$  en later een ander getal toegewezen moeten krijgen:  $f(x) = a \ \& \ f(x) \neq a$ . Ook hier bestaat blijkbaar behoefte aan een anders opgezet abstractie-model, zodanig dat aan één en dezelfde eenheid afhankelijk van het tijdstip verschillende getallen kunnen worden toegevoegd.

De oplossing, die we hier voorstellen, is in principe heel eenvoudig. Als verzameling ongedefinieerde (operationeel gedefinieerde) subjecten  $U$  nemen we i.p.v. de oorspronkelijke eenheden: mensen, dieren, cellen, etc. de elementen, waarin die eenheden uiteenvallen als we ze in de tijd - dus niet ruimtelijk - opgedeeld denken (4). Het aantal ongede-

		<u>tijdstip</u>										
		.	.	.	-2	-1	0	1	2	.	.	.
<u>eenheid</u>	$\alpha$	.	.	.	$a_{-2}$	$a_{-1}$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	.	.	.
	$\beta$	.	.	.	$b_{-2}$	$b_{-1}$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	.	.	.
	$\gamma$	.	.	.	$c_{-2}$	$c_{-1}$	$c_0$	$c_1$	$c_2$	.	.	.
	$\delta$	.	.	.	$d_{-2}$	$d_{-1}$	$d_0$	$d_1$	$d_2$	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Fig. 2.1.1: De elementen-verzameling U in een tijdgevoelig abstractie-model.

finieerde subjecten in  $U$  zal dus gelijk zijn aan het product van tijdstippen en eenheden; zie fig. 2.1.1. Op basis van  $U$  kan een tijdgevoelig abstractie-model worden opgebouwd.

Een eenheid definiëren we voortaan en wel als een verzameling van elementen:

$$2.1.1 \quad \alpha \equiv \{\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots\},$$

$$\beta \equiv \{\dots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \dots\},$$

etc.

De verzameling van alle eenheden (het vroegere universum) definiëren we als volgt:

$$2.1.2 \quad E \equiv \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots\}$$

$E$  is dus een verzameling van verzamelingen en wel een z.g. "partitie" van  $U$ , d.w.z. de leden van  $E$  sluiten elkaar wederzijds uit:

$$\alpha \cap \beta \cap \gamma \cap \delta \cap \dots = \emptyset \text{ en delen } U \text{ uitputtend op: } \alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta \cup \dots = U.$$

Analoog aan eenheden definiëren we de verzamelingen  $\tau_t$  van elementen op telkens eenzelfde tijdstip  $t$ :

$$2.1.3 \quad \tau_t \equiv \{a_t, b_t, c_t, \dots\}$$

Een alternatieve mogelijkheid om een eenheid te definiëren is in termen van een constante conjunctie van element-eigenschappen (5):

$$2.1.4 \quad \alpha \equiv \{x \in U: Fx \ \& \ Gx \ \& \ Hx \ \& \ \dots\} \text{ of } \alpha \equiv \{x \in U: Ax\} \text{ met}$$

$$Ax \equiv Fx \ \& \ Gx \ \& \ Hx \ \& \ \dots,$$

$$\beta \equiv \{x \in U: \neg Fx \ \& \ \neg Gx \ \& \ Hx \ \& \ \dots\} \text{ of } \beta \equiv \{x \in U: Bx\} \text{ met}$$

$$Bx \equiv \neg Fx \ \& \ \neg Gx \ \& \ Hx \ \& \ \dots,$$

etc.

Eén enkele constante eigenschap (bijv. geslacht) is uiteraard niet voldoende om alle eenheden van elkaar te onderscheiden, maar met een toenemend aantal (geslacht, wel of geen blauwe ogen, wel of geen blond haar, etc.) worden de mogelijkheden snel groter.

Logisch is van belang, dat onze eenheden ( $\alpha$ ,  $\beta$ , etc.)  $2^e$ -orde-subjecten zijn geworden, terwijl de rol van  $1^e$ -orde- en ongedefinieerde subjecten wordt vervuld door de elementen (de  $a$ 's,  $b$ 's, etc.). De  $2^e$ -orde-subjecten (verzamelingen) mogen rechtstreeks uit de  $1^e$ -orde-subjecten gevormd worden maar ook door bemiddeling van de  $1^e$ -orde-predikaten. Het belangrijkste axioma uit de verzamelingenleer, het specificatie-axioma, staat nl. de afzondering toe van nieuwe verzamelingen uit een bestaande verzameling (i.c.  $U$ ) op grond van iedere uitdrukking met een vrije variabele (i.c.  $Ax$ ,  $Bx$ , etc.), waarbij de leden van de nieuwe verzameling (i.c.  $\alpha$ ,  $\beta$ , etc.) precies die leden van de bestaande verzameling zijn die aan de uitdrukking voldoen (6):

$$2.1.5 \quad (x)(x \in \{x \in U: Ax\} \leftrightarrow x \in U \& Ax) \text{ of } (x)(x \in \alpha \leftrightarrow x \in U \& Ax)$$

$$(x)(x \in \{x \in U: Bx\} \leftrightarrow x \in U \& Bx) \text{ of } (x)(x \in \beta \leftrightarrow x \in U \& Bx)$$

etc.

Willen we de oorspronkelijke eenheden terugkrijgen zoals ze zijn, dan moet de keuze  $A$ ,  $B$ , etc. uiteraard aan bepaalde eisen voldoen. Zoals reeds opgemerkt, moeten o.a. voldoende eigenschappen  $F$ ,  $G$ ,  $H$ , etc. in  $A$ ,  $B$ , etc. zijn opgenomen; anders overlappen  $\alpha$ ,  $\beta$ , etc. elkaar en zouden de eenheden zich dus niet van elkaar onderscheiden (elkaar niet wederzijds uitsluiten).

De opsplitsing van het vroegere universum van eenheden in de verzameling elementen  $U$  voorkomt niet alleen inconsistenties maar laat tegelijk alle tot nu toe besproken mogelijkheden gehandhaafd. In het bijzonder blijft het mogelijk in de vorm van universele uitspraken deterministische wetmatigheden te formuleren voor de eenheden. Omdat de eenheden nu  $2^e$ -orde-subjecten zijn, zou men verwachten, dat gebruikmaking van  $2^e$ -orde-predikaten is vereist. Toch is dat niet per se noodzakelijk. Nemen we als voorbeeld de  $2^e$ -orde-uitspraak: "Voor alle eenheden  $y$  geldt, als  $y$  menselijk is, is  $y$  sterfelijk":

$$2.1.6 \quad (y)(y \in E \rightarrow (Fy \rightarrow Gy))$$

We hebben gezien, dat de eigenschappen "menselijk" en "sterfelijk" toegankelijk aan eenheden constant moeten zijn in de tijd, wil geen tegen-

spraak ontstaan. Nu wil "constant zijn in de tijd" zeggen, dat de betrokken eenheid op ieder tijdstip de eigenschap vertoont, m.a.w. als een eenheid  $y$  haar bezit, bezit een element  $x \in y$  haar en omgekeerd:

$$2.1.7 \quad (x)(y)(x \in y \ \& \ y \in E \rightarrow (Fy \leftrightarrow Fx))$$

$$(x)(y)(x \in y \ \& \ y \in E \rightarrow (Gy \leftrightarrow Gx))$$

De  $2^e$ -orde-predikaten worden zo dus tevens  $1^e$ -orde-predikaten en de universele uitspraak over eenheden is te schrijven als een universele uitspraak over elementen en omgekeerd:

$$2.1.8 \quad (x)(y)(x \in y \ \& \ y \in E \rightarrow ((Fy \rightarrow Gy) \leftrightarrow (Fx \rightarrow Gx)))$$

Bij constante eigenschappen zijn generalisaties over eenheden equivalent met generalisaties over de tijd (d.w.z. over elementen) bij eenheden.

Vervolgens kunnen ook macro-eenheden in het kader van een tijdgevoelig abstractie-model worden gedefinieerd. Het ligt voor de hand om een macro-eenheid  $\alpha'$  analoog aan basis-eenheden  $\alpha, \beta, \gamma$ , etc. op te vatten als de verzameling van macro-elementen  $a'_t$ :

$$2.1.9 \quad \alpha' \equiv \{ \dots, a'_{-2}, a'_{-1}, a'_0, a'_1, a'_2, \dots \}$$

Daarmee zijn we er nog niet, want de macro-elementen hebben we nog niet eerder gedefinieerd. Bij de volgende stap, de definiëring van macro-elementen, staan twee wegen open. We kunnen uitgaan van basis-eenheden  $\alpha, \beta, \gamma$ , etc. die een bepaalde eigenschap of combinatie van eigenschappen  $A'$  gemeen hebben of van basis-elementen  $a_t, b_t, c_t$ , etc. die  $A'$  gemeen hebben.

Beginnen we met definiëring op basis-eenheden door uit de verzameling  $E$  de verzameling  $E'$  af te zonderen van eenheden, die als micro-eenheden gaan fungeren:

$$2.1.10 \quad E' \equiv \{ y \in E: A'y \}, \text{ bijv. } \{ \alpha, \beta, \gamma \}$$

$E'$  is nog slechts een verzameling micro-eenheden en geen macro-element. Evenmin  $U'$ , de verzameling van alle elementen die tot de micro-eenheden



behoren, d.w.z. de verzameling van alle micro-elementen

2.1.11  $U' \equiv \{x \in U: (\exists y)(x \in y \ \& \ y \in E')\}$ , bijv.

$\{\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, \dots, b_{-1}, b_0, b_1, \dots, \dots, c_{-1}, c_0, c_1, \dots\}$

Macro-elementen, d.w.z. afzonderlijke verzamelingen micro-elementen, zijn

2.1.12  $a'_t \equiv \{x \in U': x \in \tau_t\}$ , bijv.

$\dots, \{a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}\}, \{a_0, b_0, c_0\}, \{a_1, b_1, c_1\}, \dots$

Rechtstreeks in termen van elementen  $x \in U$  luidt de definitie:

2.1.13  $a'_t \equiv \{x \in U: x \in \tau_t \ \& \ A'x\}$

Is  $A'$  constant en  $A'$  moet constant zijn om inconsistenties te vermijden, dan is niet moeilijk in te zien, dat beide definities equivalent zijn en dus geen aanleiding geven tot dubbelzinnigheden.

We zijn nu ook in staat om precies te formuleren, wat we onder een tijdgevoelig abstractie-model van de realiteit verstaan. In hoofdstuk 1 werden vier soorten abstractie-modellen besproken: eenheid-eigenschapsmodel, structuur-model, systeem-model en black-box-model. De eerste twee zullen we samennemen, omdat de eigenschappen in een eenheid-eigenschapsmodel slechts een bijzonder geval zijn van de relaties in een structuurmodel. Relaties kunnen binair:  $Rxy$ , ternair:  $Rxyz$ , "n-air" zijn maar ook "unair":  $Rx$  en in het laatste geval is een relatie-symbool niet meer dan een enkelvoudig predikaat:  $Fx$ , uitdrukking van een eigenschap. Over blijven: een tijdgevoelig structuur-model  $M$  c.q. micro-(structuur)-model  $M'$ , een tijdgevoelig systeem-model  $S$ , een tijdgevoelig macro-(black-box)-model  $S'$ :

2.1.14  $M \equiv \langle U; R_1, \dots, R_n \rangle$

2.1.15  $M' \equiv \langle U'; R_1, \dots, R_n \rangle$

2.1.16  $S \equiv \langle U' \cup \alpha'; R_1, \dots, R_n \rangle$

2.1.17  $S' \equiv \langle \alpha'; R_1, \dots, R_n \rangle$

In ieder van deze definities wordt een stel relaties  $R_1, \dots, R_n$  gespecificeerd. Deze relaties, die ook naar hun interpretaties per model kunnen verschillen, worden in ieder geval telkens op een verschillende subject-verzameling gedefinieerd. In  $M$  zijn alle basis-elementen toegelaten, in  $M'$  slechts micro-elementen, in  $S$  enerzijds slechts micro-elementen maar anderzijds ook macro-elementen, in  $S'$  alleen macro-elementen. Meestal wordt de omgeving  $E$  van een systeem niet in het systeem-model opgenomen. Ook in onze definitie van  $S$  is dat niet gebeurd, maar  $E$  is gemakkelijk te definiëren in termen van het verzamelingtheoretisch verschil tussen de subjecten in  $M$  en  $M'$ :

$$E \equiv \langle U \cap \sim U'; R_1, \dots, R_n \rangle$$

Een systeem-model met omgeving is tenslotte te definiëren in termen van de vereniging van de subjecten in  $M$  en  $S$ :  $\langle U \cup \alpha'; R_1, \dots, R_n \rangle$ .

Het systeem-model  $S$  in 2.1.15 bevat slechts twee niveaus: micro-niveau  $U'$  en macro-niveau  $\alpha'$ , maar de subject-verzameling in  $S$  kan zo nodig worden uitgebreid om ook meso-niveaus te omvatten:  $U' \cup U'' \cup \alpha''$  (drie niveaus met  $U''$  als meso-niveau),  $U' \cup U'' \cup U''' \cup \alpha'''$  (vier niveaus met  $U''$  en  $U'''$  als meso-niveaus), etc.  $U''$  ontstaat door met iets ingewikkeldere versies van 2.1.12

$$.1.18 \quad a'_c \equiv \{x \in U': x \in \tau_c \ \& \ A''x\},$$

$$b'_c \equiv \{x \in U': x \in \tau_c \ \& \ B''x\},$$

etc.

meso-elementen te vormen en deze in  $U''$  te verzamelen.  $A''$ ,  $B''$ , etc. moeten zodanig gekozen worden, dat de verzameling van alle meso-elementen  $U''$  een partitie van  $U'$  vormt. Op analoge wijze worden eventuele hogere meso-niveaus verkregen en tenslotte analoog aan 2.1.12 het macro-niveau.

Een model  $\tilde{S}$  voor de gezamenlijke subsystemen van een bepaalde soort ontstaat door één of meer niveaus uit de subject-verzameling van  $S$  te elimineren. Stel, dat de subject-verzameling bestaat uit  $U' \cup U'' \cup \alpha''$  (bijv. de vereniging van elementen van leerlingen, klassen en de school, van inwoners, landen en de wereld). Eliminatie van  $\alpha''$  zodat  $U' \cup U''$  (de vereniging van elementen van leerlingen en klassen, van inwoners en

landen) overblijft, resulteert dan in een  $\tilde{S}$  (klas-leerling subsystemen, land-inwoner subsystemen).

Worden zoveel niveaus geëlimineerd, dat slechts één niveau overblijft, bijv. micro-niveau  $U'$  (leerling-elementen, inwoner-elementen) of meso-niveau  $U''$  (klas-elementen, land-elementen), dan is het resulterende model uiteraard geen systeem-model en ook geen subsysteem-model meer. In het eerste geval resulteert een micro-structuur-model  $M' \equiv \langle U'; R_1, \dots, R_n \rangle$ , in het laatste geval een meso-black-box-model  $M'' \equiv \langle U''; R_1, \dots, R_n \rangle$ . In feite kan ieder systeem-model  $S$  in l-niveau-modellen worden uiteengelegd:  $M', S'; M', M'', S''; M', M'', M''', S'''$ ; etc., waarbij de  $S''''$  met één of meer accenten steeds het black-box-model voor de éne alles-overkoepelende macro-eenheid aanduidt. Het uiteindelijke doel van een systeem-analyse is juist om langs een meer of minder uitgebreid systeem-model  $S$  tot wetmatigheden te komen voor zo'n onder  $S$  vallend l-niveau-model: macro-black-box-model  $S'$  c.q.  $S''''$  of meso-black-box-model  $M''''$ . Hoewel de uitbreiding van het aantal niveaus in een systeem-model  $S$  en de daarop gebaseerde definiëring van modellen  $M''''$  en  $S''''$  van het grootste belang kunnen zijn, resulteren daaruit geen bijzondere methodologische problemen. Vandaar dat we ons zullen beperken tot de eerder genoemde modellen:  $M$  (2.1.14),  $M'$  (2.1.15),  $S$  (2.1.16) en  $S'$  (2.1.17).

De argumenten voor de introductie van een tijdgevoelig abstractie-model waren tot nu toe vooral negatief: geen inconsistenties bij veranderende eigenschappen en geen verlies aan mogelijkheden bij constante eigenschappen. Meer positief is het belangrijkste argument, dat wetmatigheden m.b.t. veranderende eigenschappen (onveranderlijke samenhangen tussen veranderlijke eigenschappen) een preciese formulering en interpretatie krijgen. Neem de wetmatigheid, waar de volgende nog tamelijk vage uitspraak op doelt: "Als iemand angst heeft, klopt zijn hart snel". Het moet hier gaan om veranderlijke eigenschappen, want iemand die angst heeft hoeft niet altijd angst te hebben en iemand die hartkloppingen heeft hoeft niet altijd hartkloppingen te hebben. Een tijdgevoelig abstractie-model is dus vereist en de uitspraak is dan als volgt te verstaan: "Voor iedere persoon  $y$  geldt op ieder tijdstip  $x$ , dat als hij op tijdstip  $x$  angst heeft, hij op tijdstip  $x$  hartkloppingen heeft". In symbolen:

2.1.19  $(x)(y)(x \in y \ \& \ y \in E \rightarrow (Fx \rightarrow Gx))$

of wat op hetzelfde neerkomt, omdat iedere  $x \in U$  tot een of andere persoon  $y \in E$  zal behoren:

2.1.20  $(x)(x \in U \rightarrow (Fx \rightarrow Gx))$

Hieruit blijkt dat bij veranderlijke eigenschappen generalisaties over eenheden opgevat dienen te worden als generalisaties over de tijd (elementen) bij eenheden.

De noodzaak van een tijdgevoelig abstractie-model is nog het meest evident bij generalisaties over slechts één enkele eenheid. Er zijn verschillende redenen, waarom onderzoek zich vaak terecht richt op één enkele eenheid (één kind, één bedrijf, één rivier) en niet tegelijk op meerdere of alle eenheden van die soort (alle kinderen, alle bedrijven, alle rivieren). Zien we af van louter beschrijvend onderzoek, dan kan een reden zijn dat het gezien de complexiteit van de betrokken eenheid al te pretentiefus voorkomt om te mikken op meer algemene uitspraken. Een even respectabele reden is, dat meer algemene uitspraken binnen de doelstelling van het onderzoek (advies aan ouders over hun kind, oplossen van afzetproblemen bij Philips, vervuilingsproblemen van de Rijn) gewoon niet interessant zijn, hoewel later eventueel kan blijken dat generalisering is toegestaan. Een heel simpele reden is tenslotte, dat de eenheid uniek is in die zin dat er maar één van voorkomt. J.W. Forrester (1971), D.H. Meadows et al. (1972) en D.L. Meadows et al. (1974) hadden bij hun systeem-analytische benadering van de wereld voor de Club van Rome klaarblijkelijk met zo'n uniek object te maken.

Het is in dit verband niet relevant, of we met een eenheid te doen hebben, die rechtstreeks als basis-eenheid is gedefinieerd (met een kind zal dat in de sociale wetenschap doorgaans wel het geval zijn) of met een macro-eenheid (de Rijn opgevat als samengestelde eenheid in een hydrologisch systeem, evenzo het Philips-concern in een bedrijfseconomisch systeem). In beide gevallen zijn generalisaties over de tijd mogelijk en nuttig. In symbolen voor een basis-eenheid  $\alpha$ :

2.1.21  $(x)(x \in \alpha \rightarrow (Fx \rightarrow Gx))$

bijv. "Als Jan angstig is, trillen zijn benen". In symbolen voor een macro-eenheid  $\alpha'$ :

$$2.1.22 \quad (x)(x \in \alpha' \rightarrow (Fx \rightarrow Gx))$$

bijv. "Is de waterstand van de Rijn beneden het aangegeven peil, dan is de vervuilingsgraad boven de kritische drempel". Ook als het gaat om één enkele eenheid is generalisatie dus mogelijk, niet over verschillende eenheden, maar over de tijd (elementen) bij die éne eenheid.

Op dit punt verschilt de systeem-methodologische benadering sterk van wat in de sociale wetenschap gebruikelijk is. In de sociale wetenschap wordt generalisatie bijna altijd verstaan als generalisatie over een grotere verzameling eenheden (liefst alle mensen, alle sociale groepen, etc.), een gevolg waarschijnlijk van een sterk cross-sectioneel gericht denken, waartoe o.a. het gebruik van de statistiek met de behoefte aan grote aantallen waarnemingen aanleiding kan hebben gegeven. Zelden wordt generalisatie over de tijd als zodanig in de beschouwing betrokken en nog minder generalisatie over de tijd bij één en dezelfde eenheid (7). Een systeem-analyse vindt zijn vertrekpunt daarentegen altijd in één bepaalde macro-eenheid behorend tot één bepaald systeem. Soms worden pogingen ondernomen de bereikte resultaten te toetsen voor één of enkele andere macro-eenheden in één of enkele andere systemen (men tracht dan te bewijzen dat zij "equivalent" zijn met het oorspronkelijke systeem (8)), maar meestal eindigt een systeem-analyse ook in generalisaties en verklaringsmodellen, op grond waarvan predicties zijn uit te voeren voor het toekomstig gedrag van één en dezelfde macro-eenheid behorend tot één en hetzelfde systeem. Het zal duidelijk zijn, dat daarbij een tijdgevoelig abstractie-model uitgangspunt moet zijn.

Voordat nu verder zal worden ingegaan op de hulp die ook een tijdgevoelig abstractie-model vaak nodig heeft van een mathematisch representatie-model, willen we eerst nog een tweetal mogelijke bezwaren tegen een tijdgevoelig abstractie-model bespreken. Het eerste bezwaar geldt het gebruik van de verzamelingenleer. De verzamelingenleer bouwt voort op de logica (d.w.z.  $1^e$ -orde predikaat-logica, waaronder begrepen de 0-voudige predikaat-logica of propositie-logica en de meervoudige predikaat-logica of relationele logica van de  $1^e$  orde), maar heeft toch niet

zo'n sterke meta-theoretische basis. Terwijl nl. de logica tegelijk consistent en volledig is, is sinds het onvolledigheidsbewijs van Kurt Gödel (1931) bekend, dat de verzamelingenleer wel consistentie kan bezitten maar niet tegelijk volledigheid (9). Consistentie houdt in, dat met behulp van de afleidingsregels van ieder paar volgens de vormingsregels juist-gevormde en elkaar ontkennende uitspraken  $P$  en  $\neg P$  er tenminste één niet bewezen kan worden; volledigheid, dat er van ieder zo'n paar tenminste één wel bewezen kan worden als één van beide altijd waar is (d.w.z. waar voor elke interpretatie in elke niet-ledige verzameling  $U$ ) (10). De volledigheid van de propositie-logica werd voor het eerst bewezen door de Amerikaan E.L. Post (1921) en van de logica als geheel door de zojuist genoemde Gödel (1930). Hoewel de volledigheid van de logica inhoudt, dat al haar uitspraken beslisbaar zijn (de altijd-ware  $P$  zijn zonder meer bewijsbaar en de soms-ware  $P$  uit toegevoegde axioma's als premissen), bestaat er geen algemene mechanische beslissingsprocedure om te bepalen of en voor welke interpretatie iedere uitspraak van de logica waar wordt. Dit beslissingsprobleem is alleen opgelost voor de propositie-logica, de enkelvoudige predikaat-logica en een aantal speciale relationele gevallen: voor alle andere relationele (meervoudige) uitspraken moeten we zelf actief naar een eventueel bewijs zoeken (bijv. in de meetkunde).

De verzamelingenleer mist niet alleen 1) een algemene mechanische beslissingsprocedure maar is bovendien 2) niet eens volledig, d.w.z. niet eens in zijn geheel beslisbaar. Wordt het specificatie-axioma in zijn klassieke vorm zonder restricties toegelaten, dan is de verzamelingenleer zelfs niet consistent (11), zoals Russell in 1902 met de na hem genoemde paradox (de verzameling van alle verzamelingen, die geen lid zijn van zichzelf) aantoonde in een brief aan Gottlob Frege. Frege dacht juist in de verzamelingenleer een onwrikbaar fundament voor de wiskunde te hebben ontdekt en zoals hij later zelf toegaf betekende Russell's vondst voor hem een enorme teleurstelling (12). Gelukkig is men er naderhand in geslaagd de consistentie te garanderen, maar altijd zullen er als gevolg van de principiële onvolledigheid ware onbeslisbare uitspraken in de verzamelingenleer overblijven. Toch kan dit nauwelijks als een reëel bezwaar tegen een tijdgevoelig abstractie-model gelden. Behalve een tijdgevoelig abstractie-model zijn nl. ook numerieke mathematische

modellen verzameling-theoretisch gedefinieerd en missen dus evenzeer volledigheid (13). Het is moeilijk aannemelijk te maken, waarom abstractie-modellen een steviger fundament zouden vereisen dan de modellen, waardoor zij gerepresenteerd worden.

Een tweede mogelijk bezwaar geldt de discrete elementen, waarvan wordt uitgegaan. Men zou kunnen stellen, dat de tijd in feite continu is en dat het daarom niet aangaat een in de tijd continu object als een verzameling discrete elementen op te vatten. Daar kan om te beginnen tegenin gebracht worden, dat de waarnemingen en metingen waar de wetenschap op berust desondanks altijd op discrete tijdstippen plaatsvinden. Maar ook afgezien daarvan is dit continuïteitsargument aan twijfel onderhevig. Is het in de wiskunde al lang niet meer toegestaan om i.v.m. het begrip continuïteit over oneindig kleine verschillen te spreken, d.w.z. het verschil  $h$  tussen 2 getallen (bijv. 2 tijdstippen representeren):

$$\Delta t = (t + h) - t = h$$

is eindig of er is geen verschil (14), voor de fysica wordt zelfs de noodzaak van limieten zoals differentiaal-quotiënt

$$\lim \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h} = \frac{df(t)}{dt}$$

d.w.z. niet werkelijk te bereiken maar slechts te benaderen waarde door het verschil-quotiënt en bovendien van het continuum (de reële getallen) als zodanig betwijfeld: "At some future time, when more is known about space and time and the other magnitudes of physics, we may find that all of them are discrete. The laws of physics would then deal solely with integers", stelde Carnap in 1966 (15). Hoewel het om praktische redenen nuttig zal blijven om m.b.t. een mathematisch representatie-model van differentiaal-rekening en de reële getallen gebruik te maken, is er geen enkele reden waarom het abstractie-model niet discreet zou worden opgezet.

Representatie-modellen  $R(M)$ ,  $R(M')$ ,  $R(S)$  en  $R(S')$

Voor het gemak zijn zojuist al even getallen als representatie van tijdstippen geïntroduceerd, maar de noodzaak daarvan is nog niet aangetoond. Laten we daarvoor aannemen dat de wetmatigheid: "Als iemand angst heeft, klopt zijn hart (terzelfder tijd) snel" zo niet opgaat, maar wel in de iets gewijzigde vorm: "Angst heeft tot gevolg, dat een tweetal seconden later hartkloppingen optreden". Een dergelijke samenhang tussen de angst bij een element  $x$  van eenheid  $y$  en hartkloppingen bij een ander element  $z$  van dezelfde  $y$  maar 2 seconden later kan al niet meer rechtstreeks voor het abstractiemodel tot uitdrukking worden gebracht. We hebben onder de taalmiddelen nl. wel een universele kwantor ( $\forall$ ) en een existentiële kwantor ( $\exists$ ) maar geen middel om precies dat element  $z \in y$  aan te wijzen dat 2 seconden later komt. Het uiterste van wat nog rechtstreeks voor abstractie-model

23  $M \equiv \langle U; R_1, R_2, R_3 \rangle$  met

$R_1 \equiv \{ \langle z, x \rangle \in U \times U : Tzx \}$  waarin  $Tzx$  staat voor:  $z$  is in tijd gelijk met of volgend op  $x$

$R_2 \equiv \{ x \in U : Fx \}$  waarin  $Fx$  staat voor:  $x$  heeft angst

$R_3 \equiv \{ x \in U : Gx \}$  waarin  $Gx$  staat voor:  $x$  heeft hartkloppingen (16)

formuleerbaar is, luidt:

24  $(\forall x)(\forall y)(\exists z) (x \in y \ \& \ y \in E \ \& \ z \in y \rightarrow (Tzx \ \& \ (Fx \rightarrow Gz)))$

of geheel verzamelingtheoretisch:

25  $(\forall x)(\forall y)(\exists z) (x \in y \ \& \ y \in E \ \& \ z \in y \rightarrow (\langle z, x \rangle \in R_1 \ \& \ (x \in R_2 \rightarrow z \in R_3)))$

"Voor ieder element  $x$  van iedere eenheid  $y$  is er een element  $z$  tot dezelfde  $y$  behorend, dat in tijd gelijk is met of volgt op  $x$  en hartkloppingen heeft, als  $x$  angst heeft". Vrij vertaald: "Als iemand angst heeft, krijgt hij vroeg of laat hartkloppingen".

Willen we niettemin aangeven, dat de hartkloppingen precies 2 seconden later komen dan de angst, dan is mathematische representatie niet te



vermijden. Nodig zijn een drietal beschrijvingsmodellen (i.c. meet-modellen)  $R^m(X_1)$ ,  $R^m(X_2)$  en  $R^m(X_3)$  (voor tijd, angst en hartkloppingen) en verklaringsmodel  $R(M)$  (voor de samenhang tussen angst en hartkloppingen en de tijd-lag daarin).

$$2.1.26 \quad R^m(X_1) \equiv \langle N_1; S_1 \rangle, \quad R^m(X_2) \equiv \langle N_2; S_2 \rangle, \quad R^m(X_3) \equiv \langle N_3; S_3 \rangle, \\ R(M) \equiv \langle V; A \rangle$$

De meet-modellen bestaan uit verzamelingen getallen:  $N_1, N_2, N_3$  met relaties of combinaties van relaties  $S_1, S_2, S_3$  daartussen en zijn bedoeld om aan ieder element  $x \in U$  in  $M$  drie getallen  $n_1 \in N_1, n_2 \in N_2, n_3 \in N_3$  toe te voegen, zodanig dat de  $S_1, S_2, S_3$  in de meet-modellen de  $R_1, R_2, R_3$  in  $M$  representeren (17). Die toevoeging van getallen aan elementen vindt plaats door middel van een bijzonder soort functies, de z.g. meetfuncties:

$$n_1 = t = f_1^m(x) \text{ (tijd); } n_2 = f_2^m(x) \text{ (angst); } n_3 = f_3^m(x) \text{ (hartkloppingen)}$$

Werden de elementen  $x$  eerst uitsluitend beschreven met behulp van  $R_1, R_2$  en  $R_3$ :

$$\langle z, x \rangle \in R_1 \text{ c.q. } \langle z, x \rangle \notin R_1; \quad x \in R_2 \text{ c.q. } x \notin R_2; \quad x \in R_3 \text{ c.q. } x \notin R_3$$

nu worden ze bovendien gemeten, d.w.z. numeriek beschreven met behulp van de meetfuncties.

De volgende stap is de definiëring van de verzameling tijdfuncties  $V$ , de subject-verzameling in  $R(M)$ :

$$2.1.27 \quad V_1 \equiv \{v_1 \in P(N_1 \times N_2): v_1 = (f: N_1 \rightarrow N_2)\} \\ V_2 \equiv \{v_2 \in P(N_1 \times N_3): v_2 = (f: N_1 \rightarrow N_3)\} \\ V \equiv V_1 \cup V_2$$

Tijdfuncties zijn evenals alle andere functies een bijzonder soort relaties en worden daarom afgezonderd uit de machtsverzameling:  $P(N_1 \times N_2)$  resp.  $P(N_1 \times N_3)$ , d.w.z. uit de verzameling van alle mogelijke relaties

van  $N_1$  in  $N_2$  resp.  $N_3$ . Het functie-vormende voorschrift zorgt ervoor, dat een  $v \in V$  ( $V$  is de verzameling van alle mogelijke functies van  $N_1$  in  $N_2$  of  $N_3$ ) aan ieder getal voor de tijd  $t \in N_1$  telkens één en ook niet meer dan één getal voor angst  $n_2 \in N_2$  resp. voor hartkloppingen  $n_3 \in N_3$  toevoegt. Het éne door  $v_1$  resp.  $v_2$  aan  $t$  toegevoegde getal  $n_2$  resp.  $n_3$  wordt algemeen aangeduid als  $v_1(t)$  resp.  $v_2(t)$ . Tijdfuncties stellen ons in staat om het gedrag van iedere eenheid  $y \in E$  over de tijd numeriek te beschrijven. Neem bijv. eenheid  $\alpha$ . Deze krijgt 2 tijdfuncties toegewezen: die tijdfunctie  $v_1 \in V_1$  waarbij voor alle  $x \in \alpha$  geldt  $t = f_1^m(x)$  &  $v_1(t) = f_2^m(x)$  en die tijdfunctie  $v_2 \in V_2$  waarbij voor alle  $x \in \alpha$  geldt  $t = f_1^m(x)$  &  $v_2(t) = f_3^m(x)$ . Laten we deze tijdfuncties  $v_{1,\alpha}$  en  $v_{2,\alpha}$  noemen. Zij beschrijven, hoe het verloop van de angst en de hartkloppingen over de tijd is bij  $\alpha$ . Bijv.:

$v_{1,\alpha}$	{	(tijd)	t	...	-2	-1	0	1	2	...
					↓	↓	↓	↓	↓	
		(angst)	$v_1(t)$	...	0	1	1	1	1	...
$v_{2,\alpha}$	{	(tijd)	t	...	-2	-1	0	1	2	...
					↓	↓	↓	↓	↓	
		(hart- kloppingen)	$v_2(t)$	...	0	0	0	1	1	...

waarbij we ervan uitgaan dat de tijd-schaal is gec calibreerd in seconden en dat een element  $x \in \alpha$  een 0 krijgt toegewezen als het geen angst heeft en een 1 als het wel angst (hartkloppingen) heeft. Een geordend paar  $\langle v_{1,\alpha}, v_{2,\alpha} \rangle$  representeert in dit geval het totale beschouwde gedrag van  $\alpha$  over de tijd.

Waar het in een verklaringsmodel  $R(M)$  uiteindelijk om gaat is de verklaringsrelatie  $A$ , een relatie tussen de tijdfuncties. Wordt deze in ons voorbeeld gedefinieerd als:

$$.1.28 \quad A \equiv \{ \langle v_1, v_2 \rangle \in V_1 \times V_2 : (t)(v_2(t+2) = v_1(t)) \}$$

dan geldt voor ieder paar  $\langle v_1, v_2 \rangle$  dat  $v_2$  gevonden kan worden als  $v_1$  is gegeven en wel door oplossing van de volgende vergelijking voor alle waarden van  $t$ :  $v_2(t+2) = v_1(t)$  of  $v_2(t+2) - v_1(t) = 0$ . In 2.1.28 maar ook elders nemen we voortaan stilzwijgend aan, dat het bereik van  $t$  de verzameling getallen voor tijd, i.c.  $N_1$ , is:  $t \in N_1$ . Zoals men kan

zien voldoet het paar  $\langle v_{1,\alpha}, v_{2,\alpha} \rangle$  zo aan de vergelijking en is dus lid van  $A$ . Zou dat het geval zijn met alle onderzochte paren  $\langle v_{1,y}, v_{2,y} \rangle$  dan is daarmee een inductief bewijs geleverd voor een bepaalde samenhang tussen angst en hartkloppingen bij de eenheden  $y \in E$  in de realiteit.  $A$  is m.a.w. niet meer alleen een mathematische relatie gedefinieerd in een verzameling functies in een mathematisch model, maar tevens te beschouwen als representatie van een wetmatigheid in de realiteit die niet rechtstreeks voor  $M$  kon worden uitgedrukt. Omdat  $A$  de verzameling is van alle paren  $\langle v_1, v_2 \rangle$  die voldoen aan

$$(t)(v_2(t+2) = v_1(t)) \quad \text{of slordiger:} \quad v_2(t+2) = v_1(t)$$

zijn ook beide laatste formules indirect uitdrukking voor de samenhang tussen angst en hartkloppingen. Voortaan kunnen we deductief uit de angst het optreden van hartkloppingen 2 seconden later prediceren. In dit speciale geval kunnen we bovendien uit het optreden van hartkloppingen de angst 2 seconden eerder weer retrodiceren, omdat  $v_2(t+2) = v_1(t)$  een reversibele mathematische relatie definieert:  $v_2(t+2)$  niet alleen een functie van  $v_1(t)$  maar ook omgekeerd  $v_1(t)$  de inverse functie van  $v_2(t+2)$ .

Nu wordt er vooral in de systeem-methodologie rekening mee gehouden, dat niet alle eenheden per se hetzelfde reageren.  $\beta$  zou bijv. langzamer kunnen reageren:  $v_2(t+3) = v_1(t)$ . In dat geval is er behoefte aan meerdere verklaringsrelaties in  $R(M)$  voor (de elementen van) verschillende eenheden  $y \in E$ . Bevat  $M$  slechts de (elementen van) eenheden  $\alpha$  en  $\beta$ , dan zou  $R(M)$  worden:

$$2.1.29 \quad R(M) - \langle V; A_\alpha, A_\beta \rangle \quad \text{met}$$

$$A_\alpha \equiv \{ \langle v_1, v_2 \rangle \in V_1 \times V_2 : (t)(v_2(t+2) = v_1(t)) \}$$

$$A_\beta \equiv \{ \langle v_1, v_2 \rangle \in V_1 \times V_2 : (t)(v_2(t+3) = v_1(t)) \}$$

De bitupels  $\langle v_1, v_2 \rangle$  in  $A_\alpha$  en  $A_\beta$  combineren nu de tijdfuncties  $v_1$  en  $v_2$  in  $V$  op verschillende manieren. In beide gevallen wordt echter gegeneraliseerd over alle  $t$ , zodat zowel  $A_\alpha$  als  $A_\beta$  als representatie van een wetmatigheid over de tijd kan gelden. Ook langs de omweg van een represen-

tatie-model is m.a.w. generalisatie over de tijd (elementen) mogelijk zonder over alle eenheden tegelijk te generaliseren.

De behoefte aan meerdere verklaringsrelaties voor verschillende eenheden is nog duidelijker, wanneer de eenheden in het abstractie-model zo heterogeen zijn, dat het zelfs geen zin zou hebben over alle eenheden tegelijk te generaliseren. In de systeem-methodologie is er frequent sprake van dergelijke heterogene eenheden, die juist worden opgenomen omdat ze elkaar aanvullen: het kantoor  $\alpha$ , de productie-afdeling  $\beta$  en de verkoop-afdeling  $\gamma$  in een bedrijf; de tuner  $\alpha$ , de versterker  $\beta$  en de luidspreker  $\gamma$  in een geluidsinstallatie. De verklaringsrelaties  $A_\alpha$ ,  $A_\beta$  en  $A_\gamma$  zullen dan alleen al van elkaar moeten verschillen omdat iedere eenheid  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$  verschillende soorten tijdfuncties krijgt toegewezen, bijv.:

$$\begin{aligned}
 30 \quad v^\alpha &\equiv v_1^\alpha \cup v_2^\alpha \\
 v^\beta &\equiv v_1^\beta \cup v_2^\beta \\
 v^\gamma &\equiv v_1^\gamma \cup v_2^\gamma \\
 v &= v^\alpha \cup v^\beta \cup v^\gamma
 \end{aligned}$$

met  $v_i^y$  voortaan als tijdfunctie-variabele waarvan het bereik tot de bijbehorende  $V_i^y$  wordt beperkt. De tijdfunctie-variabele voor geluidsterkte, zeg  $v_1^\gamma$ , zal alleen voorkomen bij luidspreker  $\gamma$  en moet dus onderscheiden worden van variabele  $v_1^\alpha$  bij tuner  $\alpha$ . Een tijdfunctie-variabele  $v_1^\alpha$  dient niet verward te worden met  $v_{1,\alpha}$ . De laatste wordt opgevat als een constante, die het feitelijk gedrag van  $\alpha$  beschrijft, terwijl de eerste een variabele is over  $V_1^\alpha$ : de verzameling van alle mogelijke gedragingen van die soort bij  $\alpha$ . Alleen  $v_{1,\alpha}$  wordt echter gerealiseerd en alleen daarvoor is de wetmatigheid  $A_\alpha$  daarom toetsbaar.

Van belang is overigens alleen, of de eenheden als heterogeen worden beschouwd, niet of ze in feite heterogeen zijn. Stel, dat we 3 personen hebben:  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$  die allen gaan schelden ( $v_2$ ) als zij geïrriteerd worden ( $v_1$ ). Op zichzelf zijn die personen in hun variabelen niet heterogeen, maar in de systeem-methodologie zal toch onderscheid gemaakt worden tussen variabelen:  $v_1^\alpha$ ,  $v_2^\alpha$ ,  $v_1^\beta$ ,  $v_2^\beta$ ,  $v_1^\gamma$ ,  $v_2^\gamma$  en verklaringsrelaties:  $A_\alpha$ ,  $A_\beta$ ,  $A_\gamma$  evenals dat het geval zou zijn bij een tuner  $\alpha$ , versterker  $\beta$  en luidspreker  $\gamma$ . Stel, dat  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$  micro-eenheden zijn en  $\alpha'$  bijbehorende macro-eenheid.

Fig.2.1.2 geeft  $R(M')$  in blok-diagram-vorm waarbij we steeds aan-  
 men dat de verklaringsrelaties  $A_y$  functioneel zijn:  $v_2^y$  telkens een func-  
 tie van  $v_1^y$ . Naast  $R(M')$  is tevens  $R(S')$  symbolisch en grafisch weergege-  
 ven. Het verschil tussen  $R(M')$  en  $R(S')$  is, dat een tijdfunctie  $v \in V$   
 en een verklaringsrelatie  $A_y$  in  $R(M')$  wordt gedefinieerd voor micro-een-  
 heden  $\alpha, \beta, \gamma$  en in  $R(S')$  voor macro-eenheid  $\alpha'$ .

Systeem-methodologische micro-reductie bestaat nu hierin, dat men  
 een koppeling  $\mathcal{S}$  (18):

$$2.1.31 \quad \mathcal{S} \equiv \langle A_\alpha, A_\beta, \dots, I_{\alpha,\beta}, I_{\alpha,\gamma}, \dots \rangle$$

aanwijst, waaruit  $A_\alpha$ , deductief volgt. Slaagt men er inderdaad in een der-  
 gelijke koppeling te vinden, dan is de wetmatigheid op macro-niveau:  $A_\alpha$ ,  
 in feite gereduceerd tot wetmatigheden op micro-niveau:  $A_\alpha, A_\beta$ , etc. Door  
 echte micro-reductie, wat iets anders is dan schijnbare micro-reductie  
 (micro-reductionisme), wint de wetenschap aan generaliserende verklarings-  
 kracht. Micro-reductie mag echter niet verabsoluteerd worden. Doel is in  
 de systeem-methodologie het opsporen van wetmatigheden op de verschillen-  
 de systeem-niveaus en micro-reductie is daarbij slechts een prettige bij-  
 komstigheid.

Zo'n koppeling  $\mathcal{S}$  is te karakteriseren als een mathematisch systeem  
 en bestaat uit twee soorten relaties: de relaties  $A_y$  en de relaties  $I_{y,z}$ .  
 We gaan dus nog een stap verder dan de geïsoleerde verklaringsrelaties  
 $A_y$ : ook koppelingsrelaties  $I_{y,z}$  worden gespecificeerd, waardoor micro-  
 verklaringsrelaties  $A_y$  en  $A_z$  met elkaar worden verbonden. Representeert  
 $A_y$  samenhang in het gedrag van één micro-eenheid,  $I_{y,z}$  representeert de  
 interactie tussen verschillende micro-eenheden. Veel voorkomende koppe-  
 lingsrelaties met hun namen en vergelijkingen zijn weergegeven in fig.  
 2.1.3. In de vergelijkingen wordt naast de koppeling van de micro-vari-  
 abelen  $v_i^y$  en  $v_j^z$  tevens voorzien in de definiëring van de macro-variabele  
 $v_k^{\alpha'}$ , op basis van de micro-variabelen. Bekende koppelingen  $\mathcal{S}$  zijn de  
serie-koppeling, aangeduid als:  $A_\alpha A_\beta A_\gamma$  en de parallel-koppeling, aange-  
 duid als:  $A_\alpha + A_\beta + A_\gamma$ ; zie fig.2.1.4. Het direct product:  $A_\alpha \times A_\beta \times A_\gamma$  vat de mi-  
 cro-verklaringsrelaties slechts samen zonder dat koppelingsrelaties optre-  
 den en is daarom geen koppeling in eigenlijke zin. Gaat Jan schelden tegen

$$R(M') \equiv \langle V; A_\alpha, A_\beta, A_\gamma \rangle$$

$$R(S') \equiv \langle V; A_{\alpha'} \rangle$$

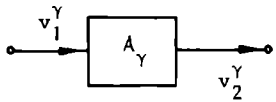
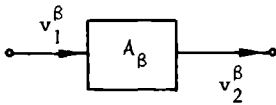
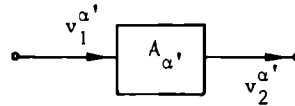
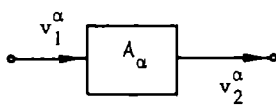


Fig. 2.1.2: Een representatie-model  $R(M')$  voor een micro-(structuur)-model  $M'$  en een representatie-model  $R(S')$  voor een macro-(black-box)-model  $S'$ , symbolisch en grafisch (blok-diagram-vorm) weergegeven.

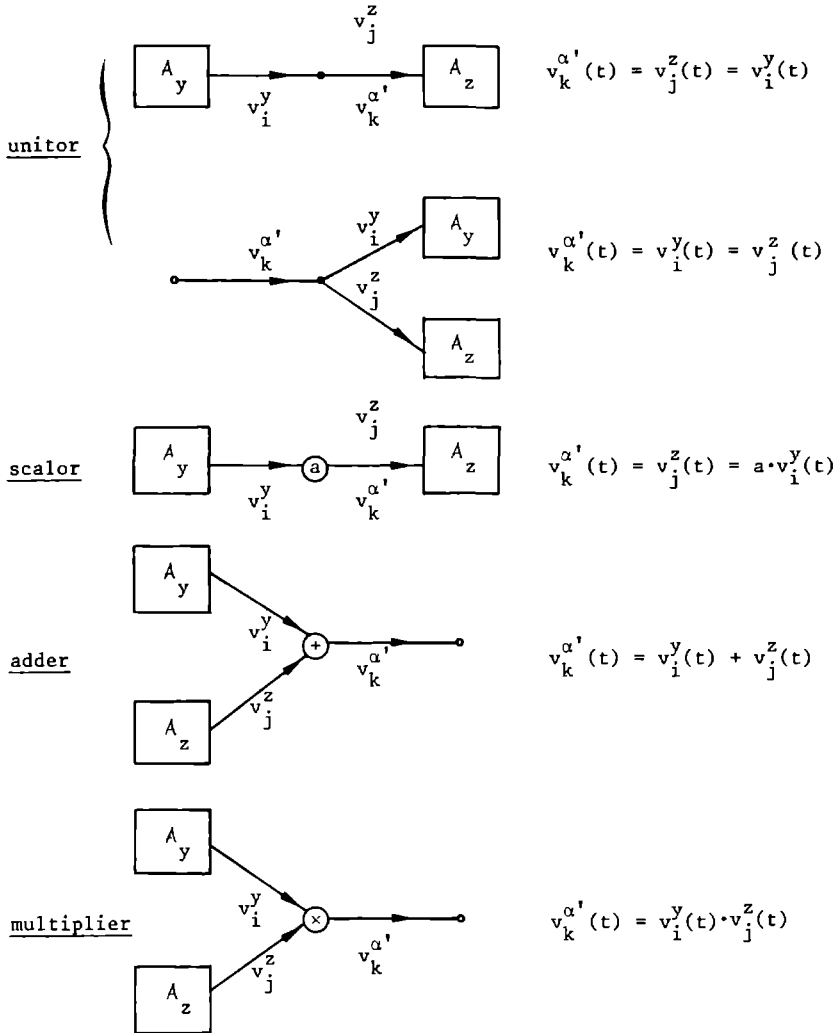
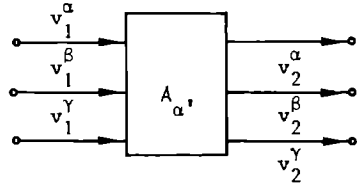
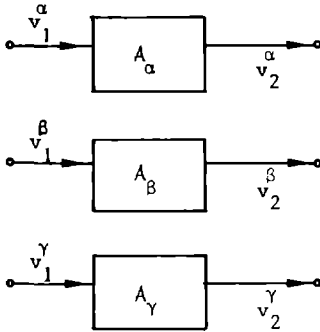
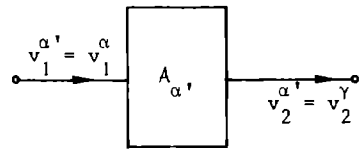
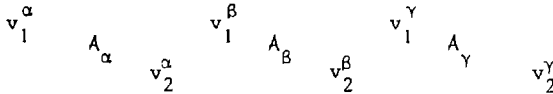


Fig. 2.1.3: Veel voorkomende koppelingsrelaties met hun namen en vergelijkingen.

Direct product:  $A_\alpha \times A_\beta \times A_\gamma$



Serie-koppeling:  $A_\alpha A_\beta A_\gamma$



Parallel-koppeling:  $A_\alpha + A_\beta + A_\gamma$

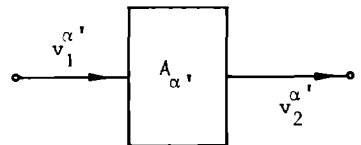
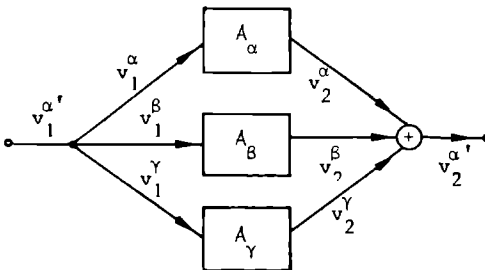


Fig. 2.1.4: Grafische weergave van drie systemische representatiemodellen  $R(S)$ , waarin telkens een verschillende koppeling  $\S$  van micro-verklaringsrelaties  $A_\alpha$ ,  $A_\beta$  en  $A_\gamma$  en een verschillende daaruit deduceerbare  $A_{\alpha'}$ .



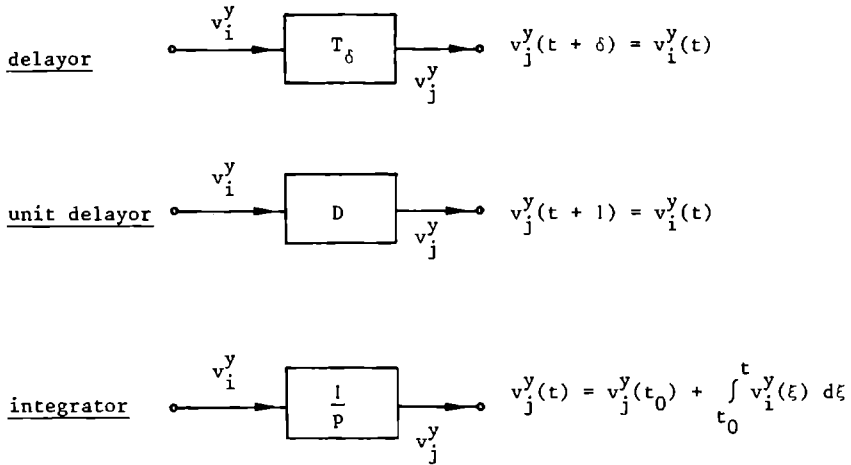


Fig. 2.1.5: Grafische weergave van delayor, unit delayor en integrator met de bijbehorende vergelijkingen.

Piet, als hij vanuit de omgeving wordt geïrriteerd en gaat Piet dan weer schelden tegen Kees, terwijl Kees tenslotte zijn heil zoekt bij iemand buiten de groep van Jan, Piet en Kees, dan is dat een voorbeeld van een serie-koppeling. Is er tussen irritatie en scheldpartij steeds een tijd-lag van 5 minuten, dan weten we voortaan, dat de groep op irritatie van Jan antwoordt met een scheldpartij van Kees na 15 minuten.

$$\begin{array}{l}
 2.1.32 \quad A_{\alpha} : v_2^{\alpha}(t+5) = v_1^{\alpha}(t) \\
 A_{\beta} : v_2^{\beta}(t+5) = v_1^{\beta}(t) \\
 A_{\gamma} : v_2^{\gamma}(t+5) = v_1^{\gamma}(t) \\
 I_{\alpha,\beta} : v_1^{\beta}(t) = v_2^{\alpha}(t) \\
 I_{\beta,\gamma} : v_1^{\gamma}(t) = v_2^{\beta}(t) \\
 v_1^{\alpha'}(t) = v_1^{\alpha}(t) \\
 v_2^{\alpha'}(t) = v_2^{\gamma}(t)
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\}
 \begin{array}{l}
 A_{\alpha'} : v_2^{\gamma}(t+15) = v_1^{\alpha}(t) \text{ of} \\
 v_2^{\alpha'}(t+15) = v_1^{\alpha'}(t)
 \end{array}$$

Van een parallel-koppeling is sprake, wanneer Jan, Piet en Kees op dezelfde irritatie vanuit de omgeving reageren met een scheldpartij, waarvan het volume de som is van wat ieder afzonderlijk produceert. De micro-verklaringsrelaties blijven hetzelfde, alleen de koppelingsrelaties met inbegrip van de relaties tussen micro- en macro-variabelen worden vervangen.

$$\begin{array}{l}
 2.1.33 \quad A_{\alpha}, A_{\beta}, A_{\gamma} : \text{zie onder 2.1.32} \\
 I_{1,\alpha\beta\gamma} : v_1^{\alpha'}(t) = v_1^{\alpha}(t) = v_1^{\beta}(t) = v_1^{\gamma}(t) \\
 I_{2,\alpha\beta\gamma} : v_2^{\alpha'}(t) = v_2^{\alpha}(t) + v_2^{\beta}(t) + v_2^{\gamma}(t)
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}} \right\}
 A_{\alpha'} : v_2^{\alpha'}(t+5) = 3 \cdot v_1^{\alpha'}(t)$$

Vergeleken met een black-box representatie-model  $R(S')$  is het voordeel van een systemisch representatie-model  $R(S)$ :

$$\begin{array}{l}
 2.1.34 \quad R(S) \equiv \langle V; A_{\alpha}, A_{\beta}, \dots, I_{\alpha,\beta}, I_{\alpha,\gamma}, \dots; A_{\alpha'} \rangle \text{ of} \\
 R(S) \equiv \langle V; S; A_{\alpha'} \rangle
 \end{array}$$

dat we veranderingen in de koppeling  $S$  kunnen doorvoeren en dan onder bepaalde voorwaarden de bijbehorende  $A_{\alpha'}$ , zonder verder onderzoek deductief

kunnen afleiden. Omgekeerd kan bijna iedere inductief gevonden  $A_{\alpha}$  (evenals welke  $A_y$  dan ook) als een meer of minder ingewikkelde  $\mathcal{S}$ , bestaande uit een voldoende aantal van ieder van de volgende 5 componenten: delays en integrators (zie fig.2.1.5) verbonden door scalors (met unitors als bijzonder geval), adders en multipliers, strikt mathematisch worden "gesynthetiseerd" (19). Wat eigenlijk black box (of wat voor eenheid dan ook) is, wordt toch vaak "systeem" genoemd als de bijbehorende verklaringsrelatie inderdaad middels zo'n mathematisch systeem  $\mathcal{S}$  is te formuleren. Aangezien verder bijna iedere verklaringsrelatie, voor wat voor eenheid of uit wat voor wetenschapsgebied dan ook, in termen van zo'n  $\mathcal{S}$  is te formuleren of te herformuleren, krijgt de mathematische systeemleer daardoor een praktisch onbeperkt toepassingsgebied.

De noodzaak van mathematische representatie-modellen zoals bijv.  $R(M)$ ,  $R(M')$ ,  $R(S)$  en  $R(S')$  werd in het voorgaande beargumenteerd aan de hand van 1) stochastische samenhangen en 2) samenhangen met geheugenwerking (waarin de tijd expliciet een rol speelt; vgl. delays en integrators). Hieruit zou de indruk kunnen ontstaan, dat een mathematisch model wellicht ook vaak is te vermijden. Onder de genoemde punten valt echter een aanzienlijk deel van wat er in de realiteit aan samenhangen is te ontdekken en in andere gevallen wegen de voordelen van de omweg over een mathematisch model bijna altijd op tegen het nadeel van de omweg zelf. Deductie zal bijna altijd sneller plaats vinden vanwege de mogelijkheid reeds bewezen wiskundige theorema's in te schakelen; langs het model worden die dan benut om onze kennis over de reële wereld te vergroten (20). Ook leidt mathematische representatie meestal tot een eenvoudiger model en eenvoudiger uitdrukkingen. "Alle mensen hebben verstand en alles wat verstand heeft is een mens" wordt uitgedrukt door  $(x)(Fx \leftrightarrow Gx)$  of  $(x)(x \in R_1 \leftrightarrow x \in R_2)$  voor abstractie-model  $M = \langle U; R_1, R_2 \rangle$ , waarin  $U$  een oneindig grote verzameling is en evenzo  $R_1$  (de verzameling van alle menselijken) en  $R_2$  (de verzameling van alle verstandigen), maar bijv. door de eenvoudige functie  $y = x$  voor representatie-model  $R(M) \equiv \langle N; S \rangle$ , waarin  $N$  slechts 2 getallen: 0 en 1 en de getalsrelatie  $S$  slechts 2  $\langle x, y \rangle$ -paren:  $\langle 0, 0 \rangle$  en  $\langle 1, 1 \rangle$  hoeft te bevatten.

Bij complexere samenhangen is het een hachelijke onderneming om van expliciete mathematische formuleringen af te zien, zoals uit een aantal goed bedoelde pogingen tot axiomatisering van sociologische theorieën

pijnlijk is gebleken. Klassiek is Zetterberg's "axiomatische" versie van Durkheim's theorie over arbeidsverdeling (21). Zetterberg dacht door de volgende uitspraken als axioma's te nemen:

"The greater the division of labor, the greater the solidarity"

"The greater the solidarity, the greater the consensus"

als theorema te kunnen afleiden:

"The greater the division of labor, the greater the consensus"

Nu is uit:

$(x)(Fx \rightarrow Gx)$

$(x)(Gx \rightarrow Hx)$

inderdaad afleidbaar:

$(x)(Fx \rightarrow Hx)$

maar de moeilijkheid met sociaal-wetenschappelijke uitspraken in de vorm: "Hoe groter ..., hoe groter ..." is, dat zij nooit als (deterministische) logische implicaties opgevat kunnen worden. Evenmin zijn ze als wiskundige functies  $f(x) = y$  (deterministische samenhang representerend) op te vatten. Worden ze wiskundig als correlaties  $r_{xy} = a$  ( $-1 < a < 1$ ) (representatie van stochastische samenhang) opgevat, dan is uit:

$$r_{xy} = a$$

$$r_{yz} = b$$

geen bepaalde

$$r_{xz} = c$$

meer afleidbaar. De correlaties van de premissen moeten al erg hoog zijn om alleen nog maar het teken van de correlatie in de conclusie af te leiden (indien beide premisse-correlaties even hoog zijn, moet  $|a|=|b| > .707$

om alleen nog maar het teken van  $c$  te kunnen bepalen) (22). Zo hoge correlaties komen in de sociale wetenschap niet vaak voor, zodat het vaak niet eens mogelijk zal zijn voor  $r_{xz}$  af te leiden:  $r_{xz} > 0$  of  $r_{xz} < 0$ . Correlationele samenhangen kunnen daarom onmogelijk door het logische implicatie-teken  $\rightarrow$  worden uitgedrukt en logisch uit elkaar afgeleid middels de transitiviteits-wet:  $(A \rightarrow B) \& (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$ .

Heel expliciet en nog wel met een beroep op Zetterberg werd deze fout gemaakt door Schwirian and Prehn (1962) en fel bekritiseerd door Duncan (1963) onder de veelzeggende titel: "Axioms or correlations?". Costner en Leik (1964) onderschreven deze kritiek in hun artikel "Deductions from "axiomatic theory"", maar gaven tegelijk de wegen aan om binnen een mathematisch kader uit de impasse te komen. Nog in 1970 deed Ronalds Maris (1970) een poging om buiten een mathematisch model om een aantal stellingen van Homans te formaliseren. Zoals Maris later zelf toegaf (1971) kwam zijn poging hierop neer, dat hij behalve de stochastische dimensie ook nog de tijd-dimensie in het implicatie-teken  $\rightarrow$  trachtte te wringen:  $A \rightarrow B$  verstaan als "A gaat vooraf aan B in een sequentie van acties". Prompt moest hij verstrikt raken in inconsistenties, zoals in de stroom van felle kritiek die op zijn eerste artikel volgde herhaalde malen werd aangetoond: Gray (1971), Turner (1971), Price (1971).

Dergelijke aperte misvattingen zijn wellicht een gevolg van het feit, dat men zich onvoldoende bewust is van het onderscheid tussen het abstractie-model van de realiteit en het (impliciet gekozen) mathematisch representatie-model en van de verschillende interpretatie van logische symbolen bij beide. Een constante  $m$  is m.b.t. het abstractie-model een naam voor een reëel subject (bijv. een persoon, een groep, een element), m.b.t. het mathematisch model een naam voor een mathematisch subject (bijv. een bepaald getal, een functie, een punt). Variabelen  $x$ ,  $y$ , etc. nemen de plaats in van dergelijke constanten maar ook niet meer dan dat. Zij hebben strikt genomen geen betekenis los van de constanten die ervoor in de plaats komen (23). Uitdrukkingen als "x is een variabele grootheid", "x is de temperatuur", "t is de tijd", "x is de oorzaak van y" zijn daarom strikt genomen onjuist: de gebruikte variabelen zijn nl. bedoeld als getalsvariabelen, maar als zodanig hebben zij niets te maken met de reële subjecten en de reële relaties tussen die subjecten zoals de temperatuurrelatie (x is warmer dan y), de tijdsrelatie (x gaat in tijd vooraf aan y),

etc., ook al representeren de getallen dan de reële subjecten rekening houdend met de reële relaties. Evenzo hebben mathematische functies  $y = f(x)$  en correlaties  $r_{xy} = a$  als zodanig niets te maken met wat zij geacht worden te representeren. Een functie is een relatie tussen getallen met  $x$  en  $y$  als getalsvariabelen. Een correlatie-coëfficiënt is een getal, op tamelijk ingewikkelde wijze gedefinieerd voor random-variabelen  $x$  en  $y$ , welke laatste functies zijn met getallen als functie-waarden (24). Van de andere kant heeft de implicatie  $(x)(Fx \rightarrow Gx)$  die voor het abstractie-model wordt geformuleerd weer niets te maken met getallen. Het is ook geen relatie maar een propositie in slechts één variabele  $x$ , waarvoor reële subjecten (bijv. personen) gesubstitueerd worden. Mathematische modellen blijken onmisbaar bij de analyse van de realiteit maar tegelijk dienen ze als zodanig duidelijk van die realiteit onderscheiden te worden.

## 2.2 Wetmatigheden en verklaringsrelaties

Zoals reeds herhaalde malen benadrukt, houdt de systeem-methodologie zich bezig met wetmatigheden waarin plaats is voor verandering in de tijd. De mathematische verklaringsrelaties, die deze wetmatigheden representeren, worden daarom steeds gedefinieerd middels tijdfunctie-waarden  $v_1^y(t)$ . In deze paragraaf zullen we een nadere precisering geven van het wetmatigheidskarakter van verklaringsrelaties en vervolgens verschillende soorten behandelen, die in de systeem-methodologie veelvuldig worden toegepast, waarbij tevens aandacht zal worden besteed aan toetsings- en identificatie-procedures. In de volgende paragraaf zal dieper worden ingegaan op cross-sectioneel en tijdserieel onderzoek van verklaringsrelaties, waarbij ook de stochastische dimensie zal worden geïntroduceerd. Hiermee hopen we een voldoende basis te hebben gelegd om in het volgende hoofdstuk het algemene kader te bespreken, dat de systeem-methodologie door introductie van het begrip "toestand" aan verklaringsrelaties heeft kunnen geven.

Sinds Hume duidelijk maakte, dat een causale wetmatigheid niet mag worden opgevat als een logische noodzakelijkheid, is de vraag naar het werkelijke karakter van wetmatigheden een van de meest bediscussieerde onderwerpen in de wetenschapsfilosofie geworden (25). Een eerste probleem

betreft de overgang van steekproef naar populatie (het inductie-probleem). Een wetmatigheid kan nooit alleen betrekking hebben op een steekproef gevallen, maar moet generaliseren over een meeromvattende populatie met in ieder geval alle toekomstige gevallen om haar doel: verklaring en voorspelling te kunnen realiseren. Uitspraken over steekproeven zijn op basis van een eindig aantal singulier-beschrijvende uitspraken met volstreekte zekerheid deductief te verifiëren. Generalisaties over meeromvattende populaties zijn hoogstens op hypothetisch-deductieve wijze te falsifiëren (als een uitspraak voor alle gevallen in de populatie geldt, dan moet zij gelden voor alle gevallen in de steekproef: blijkt zij niet te gelden voor alle gevallen in de steekproef, dan kan zij evenmin waar zijn voor alle gevallen in de populatie). Deductieve zekerheid over de waarheid van generaliserende uitspraken over populaties is nooit te verkrijgen; wel een inductieve waarschijnlijkheid, die groter zal worden naarmate meer pogingen tot falsificatie mislukken.

Het tweede probleem betreft de overgang van populatie maar mogelijke niet-feitelijke gevallen (het probleem van de z.g. "counterfactual statements", bijv. "Als de astronauten hun ruimtepak hadden uitgetrokken - wat zij in feite niet hebben gedaan - dan waren zij omgekomen"). Generalisatie over een populatie is nog niet voldoende om van een wetmatigheid te kunnen spreken. Dat blijkt uit de z.g. "accidentele generalisaties", waarvan Hempel het volgende voorbeeld geeft: "Alle lichamen van zuiver goud hebben een massa van minder dan 100.000 kilogram" (26). Een dergelijke generalisatie kan moeilijk als wetmatigheid worden aange-merkt, ook al is er nog nooit zo'n gouden lichaam van meer dan 100.000 kilogram geweest en zal er ook nooit zo'n lichaam komen. Principiële falsifieerbaarheid van een dergelijke generalisatie als wetmatigheid vereist dat we logisch-mogelijke maar niet-feitelijke gevallen in de beschouwing betrekken, bijv. het niet-feitelijke geval dat ik de aardbol tot één massief gouden lichaam zou omvormen. Maar dan blijkt de logische formulering  $(x)(Fx \rightarrow Gx)$ : "Voor alle  $x$  geldt, als  $x$  van goud is (zou zijn), is (zou) de massa van  $x$  minder dan 100.000 kilogram (zijn)" niet meer adequaat als uitdrukking van hypothetische wetmatigheden. Uit het niet-feitelijk karakter van een geval:  $\neg Fm$ , bijv. " $m$  is in feite niet van goud", volgt logisch nl. vanzelf zowel:  $Fm \rightarrow Gm$  als:  $Fm \rightarrow \neg Gm$  (27), zodat falsifieerbaarheid van  $(x)(Fx \rightarrow Gx)$  middels zo'n mogelijk niet-

feitelijk geval uitgesloten is.

We hebben klaarblijkelijk behoefte aan een formulering, die in principe vatbaar is voor falsificatie, ook als het om een niet-feitelijke falsificatie-poging, een gedachtenexperiment, gaat. Formulering langs de omweg van een mathematisch model voorziet in deze behoefte. Neem bijv. de verklaringsrelatie  $A_y : v_2^y(t) = f(v_1^y(t))$ , die bij ieder getal  $v_1^y(t) \in N_1$  voor bijv. temperatuur één en niet meer dan één getal  $v_2^y(t) \in N_2$  voor bijv. druk aanwijst. Wordt  $N_1$  op geschikte wijze gedefinieerd in termen van de verzameling reële getallen  $Re$ , dan omvat  $N_1$  ook de verzameling getallen voor al die oneindig veel logisch-mogelijke niveaus in temperatuur die nooit feitelijk zijn voorgekomen of zullen voorkomen. Ook daarvoor wordt telkens één en niet meer dan één getal voor druk aangewezen en ook daarvoor is de hypothetische wetmatigheid gerepresenteerd door  $A_y$  dus in principe falsifieerbaar. Dit vormt tevens een nieuw argument voor het gebruik van een mathematisch representatie-model.

Om aan te geven dat  $N_i$  de verzameling logisch-mogelijke getallen is voor de elementen  $x$  in elementen-populatie  $L$  ( $L$  staat voor  $U$  in  $M$ , voor een bepaald niveau  $U'$ , ...,  $\alpha'$  in  $S$  of voor een bepaalde deelverzameling van  $U$ ,  $U'$ , ...,  $U''$ , waarover we willen generaliseren) zullen we schrijven  $N_i^x$ ; typisch  $N_i^x = N_i = Re$ . Daarvan worden onderscheiden de verzameling feitelijk voorkomende getallen bij de elementen  $x \in L$  en de verzameling steekproef-getallen in de data-matrix voor de steekproef-elementen  $x \in L^s$ . De beide laatste verzamelingen zullen we resp. met  $N_{i,x}^p$  en  $N_{i,x}^s$  aanduiden.

$$\begin{aligned}
 2.2.1 \quad N_i &= N_i^x \supseteq N_{i,x}^p \supseteq N_{i,x}^s \\
 V_i &= V_i^y \supseteq V_{i,y}^p \supseteq V_{i,y}^s \\
 L^t &\supseteq L \supseteq L^s \\
 L^t &\supseteq L \supseteq L^s
 \end{aligned}$$

Bij de verzamelingen tijdfuncties worden op analoge wijze  $V_{i,y}^p$  en  $V_{i,y}^s$  van  $V_i^y = V_i$  onderscheiden:  $V_i^y$  is de verzameling logisch-mogelijke tijdfuncties voor de eenheden  $y \in L$  ( $L$  staat voor de met  $L$  corresponderende eenheden-populatie en zal slechts één lid bevatten, indien we over slechts één eenheid willen generaliseren; met bijv. macro-niveau  $L = \alpha'$  correspondeert  $L = \{\alpha'\}$ ), terwijl  $V_{i,y}^p$  de verzameling feitelijk voorko-



mende tijdfuncties is bij de eenheden  $y \in L$  en tenslotte  $V_{i,y}^s$  de verzameling tijdfuncties voor de eenheden in eenheden-steekproef  $L^s \equiv \{y \in L: (\exists x)(x \in y \ \& \ x \in L^s)\}$ .

Via de  $N_i^x$  en  $V_i^y$  worden door  $A_y$  duidelijk geldingspopulaties  $L^t$  en  $L^t$  geïnduceerd, welke meeromvattend zijn dan de generalisatie-populaties  $L$  en  $L$  en de steekproeven  $L^s$  en  $L^s$ .  $L^t$  en  $L^t$  blijven uiteraard mathematisch geïnduceerde constructies, die niet feitelijk in de realiteit aangegeven kunnen worden. Feitelijk toetsbaar (feitelijk falsifieerbaar) is  $A_y$  slechts voor eenheden  $y \in L$  en elementen  $x \in L$ . Getoetst wordt  $A_y$  slechts voor de steekproef-eenheden  $y \in L^s$  en wel in termen van de getallen  $v_{i,y}(t) = n_{i,x}^s \in N_{i,x}^s$  van de steekproef-elementen  $x \in L^s$ . In het stochastische geval wordt een meeromvattende populatie ("sample space") reeds geïmpliceerd door de specificatie van  $v_i^y(t) = n_i^x \in N_i^x$  als random-variabele. De "events" (deelverzamelingen van de "sample space")  $A_r = \{x: n_i^x \leq r\}$  met waarschijnlijkheden  $P(A_r)$  op basis waarvan de verdelingsfunctie wordt gedefinieerd (28) kunnen met uitzondering van het éne element  $x \in L$  met feitelijk gerealiseerde waarde  $v_{i,y}(t)$  slechts bestaan uit niet-feitelijke elementen  $x \in L^t$  met logisch-mogelijke waarden  $v_i^y(t)$ .

### Verschillende soorten verklaringsrelaties, hun toetsing en oplossingsrelaties

Keren we terug tot het deterministische geval met bijv.

$A_y: v_2^y(t) = f(v_1^y(t))$  als hypothetische verklaringsrelatie. Valt het toetsingsresultaat negatief uit, zodat niet ieder paar  $\langle v_{1,y}(t), v_{2,y}(t) \rangle$  voor telkens een bepaalde  $y$  en  $t$  in de data-matrix behoort tot een  $A_y$ -lid, dan kan dus zeker niet generaliseerd worden. Een mogelijke reden is dat onvoldoende variabelen  $v_i^y(t)$  in de vergelijking zijn opgenomen. I.p.v. de zojuist gegeven bivariate verklaringsrelatie zouden we een multivariate verklaringsrelatie kunnen proberen: druk niet alleen afhankelijk van temperatuur maar ook van volume; schoolprestatie niet alleen afhankelijk van intelligentie maar ook van doorzettingsvermogen; etc. Bij zo'n multivariate verklaringsrelatie, bijv.

$A_y: v_4^y(t) = f(v_1^y(t), v_2^y(t), v_3^y(t))$ , toetsen we n-tupels, i.c. 4-tupels  $\langle v_{1,y}(t), v_{2,y}(t), v_{3,y}(t), v_{4,y}(t) \rangle$ , voor telkens een bepaalde  $y$  en  $t$  in de data-matrix. Door toevoeging van de inperkende variabelen zal het

vaak mogelijk zijn een verklaringsrelatie, die oorspronkelijk alleen opging voor een bepaalde eenheid  $\alpha$  of voor bepaalde deelverzameling-eenheden  $y \in L^j$ , bijv. alleen voor gassen met één bepaald volume of voor leerlingen met één bepaalde graad doorzettingsvermogen, te generaliseren over alle  $y \in L$ .

Wat zo mogelijk wordt vermeden, is opname van tijdvariabele  $t$  als zodanig, bijv.  $A_y: v_4^y(t) = f(v_1^y(t), v_2^y(t), v_3^y(t), t)$ . Een dergelijke relatie wordt tijd-afhankelijk of tijd-variant genoemd: de verklaring die wordt gegeven voor de waarde  $v_4^y(t)$  verandert in feite met de historische tijd en dat is niet precies, wat we van een wetmatigheid verwachten: "... we share with other sciences the empirical assumption that there are no truly time-dependent laws, that the effects of history where found will be due to the specific combinations of stimulus conditions at that time, and thus will be incorporated under time-independent general laws ..." (29). Een extreem geval van zo'n tijd-variante relatie zou zijn:  $A_y: v_4^y(t) = f(t)$ , een functie dus die de tijd beschrijft: een tijdfunctie. We zoeken echter geen beschrijving maar verklaring. Waar mogelijk dienen we daarom tijd-invariante verklaringsrelaties te hypothetiseren, d.w.z. functies met uitsluitend tijdfunctie-waarden  $v_i^y(t)$  als argumentwaarden en dus geen waarden van  $t$  zelf: de  $t$ -waarden zijn dan samen met die van  $y$  uitsluitend bedoeld om de juiste  $n$ -tupels van waarden  $v_{i,y}(t)$  in de data-matrix op te sporen. Tijd-invariantie geeft bovendien in het geval van differentie- en differentiaal-vergelijkingen, waar dadelijk uitgebreid op zal worden ingegaan, eenvoudigere mathematische oplossingen. Grote mathematische voordelen biedt ook lineariteit,  $f(v_1^y(t), v_2^y(t), v_3^y(t)) = a_0 + a_1 \cdot v_2^y(t) + a_2 \cdot v_2^y(t) + a_3 \cdot v_3^y(t)$ , waarbij in het bijzonder geen machten van de  $v_i^y(t)$  voorkomen ( $f$  geen polynoom) en geen producten van verschillende  $v_i^y(t)$  ( $f$  niet multiplicatief). Bij voorkeur werkt de systeem-methodologie met lineaire tijd-invariante verklaringsrelaties. Niet-lineariteit kan vaak door toepassing van lineariseringstechnieken in lineariteit worden omgezet.

Iets ingewikkelder wordt de toetsing als i.p.v. geheugenloze verklaringsrelaties gekozen wordt voor verklaringsrelaties met geheugenwerking, i.p.v. voor 2.2.2 voor bijv. een van de relaties 2.2.3 t/m 2.2.6:

$$A_y: v_2^y(t) = f(v_1^y(t))$$

$$A_y: v_2^y(t+1) = f(v_1^y(t))$$

$$A_y: v_2^y(t+2) = f(v_1^y(t))$$

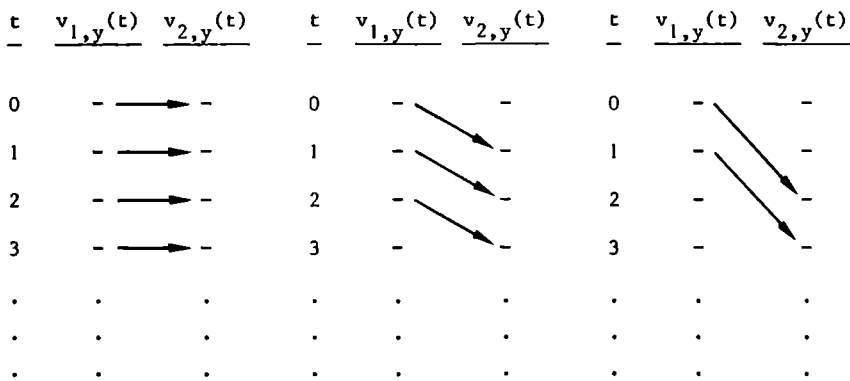


Fig. 2.2.1: Paren steekproef-getallen bij toetsing van een drietal bivariate tijd-invariante verklaringsrelaties met verschillende tijd-lags ( $\delta = 0$ ,  $\delta = 1$ ,  $\delta = 2$ ).

- 2.2.2  $A_y: v_2^y(t) = f(v_1^y(t))$
- 2.2.3  $A_y: v_2^y(t + 1) = f(v_1^y(t))$
- 2.2.4  $A_y: \frac{\Delta v_2^y(t)}{\Delta t} = f(v_1^y(t))$
- 2.2.5  $A_y: v_2^y(t + 1) - v_2^y(t) = f(v_1^y(t))$
- 2.2.6  $A_y: \frac{dv_2^y(t)}{dt} = f(v_1^y(t))$

Alleen 2.2.2 is geheugenloos, omdat alleen daar alle waarden  $v_i^y(t)$  op hetzelfde tijdstip  $t$  betrekking hebben (geheugenloze vergelijking); 2.2.3 t/m 2.2.6 vertonen geheugenwerking, omdat steeds een verschil in tijd of de limiet daarvan (2.2.6) een rol speelt en de waarde van  $v_2^y(t)$  op een later tijdstip dus afhankelijk is van een of meer tijdfunctiewaarden op een eerder tijdstip. Ervan uitgaande, dat causale beïnvloeding altijd enige tijd in beslag moet nemen, hoe weinig ook, wordt geheugenwerking vaak als eigenschap van echte wetmatigheden beschouwd. Geheugenloze verklaringsrelaties zijn in die opvatting slechts een artefact, ofwel een gevolg van een evenwichtstoestand in de waarden  $v_i^y(t)$  waardoor zij op verschillende tijdstippen  $t$  niet meer van elkaar zijn te onderscheiden, ofwel een gevolg van meetprocedures waarbij de waarden  $v_i^y(t)$  in feite niet op één ondeelbaar ogenblik  $t$  betrekking hebben maar gemiddelden zijn over tijdsintervallen die de tijd benodigd voor causale beïnvloeding overlappen: "We observe economic variables as sums or averages over relatively large periods such as years or, at best weeks or days. Even if the true disequilibrium process is not simultaneous, if its adjustment to equilibrium is sufficiently rapid, the model framed in terms of observed variables may differ insignificantly from simultaneity" (30). Louter cross-sectionele analyse, waarin alle steekproefgetallen  $v_{i,y}(t)$  op hetzelfde tijdstip  $t$  betrekking hebben, heeft dan alleen zin onder de assumptie dat het evenwicht in de causale processen inderdaad is bereikt (31) of dat de causale processen inderdaad heel snel zijn in verhouding tot het meet-interval met de geobserveerde variabelen telkens in evenwicht t.o.v. elkaar. In beide gevallen worden echter noch de assumpties noch de eigenlijke onderliggende verklaringsrelaties met

geheugenwerking getoetst. Die zijn alleen toetsbaar middels tijdserie-data of gecombineerd cross-sectionele tijdserie-data.

2.2.3 geeft de eenvoudigste vorm van geheugenwerking en onderscheidt zich alleen van 2.2.2 door de tijd-lag  $\delta = 1$ . In tijd-lagged vergelijkingen komt een constant verschil in tijd  $\Delta t = (t + h) - t = h = \delta$  voor. De toetsing (zie fig.2.2.1) onderscheidt zich van die van 2.2.2 alleen hierin, dat de getoetste paren steekproef-getallen  $\langle v_{1,y}(t), v_{2,y}(t + \delta) \rangle$  van verschillende rijen in de data-matrix moeten komen, afhankelijk van de tijd-lag  $\delta$ . De beperking in 2.2.3 tot  $\delta = 1$  is overigens nauwelijks een echte beperking te noemen, omdat ingeval  $\delta \neq 1$  de tijd altijd zodanig kan worden gheredefinieerd, dat na herdefiniëring volgt  $\delta = 1$ . De tijd-invariantie blijkt in fig. 2.2.1 hieruit, dat geen pijlen uitgaan van de waarden van  $t$ .

Zijn de functies  $f$  lineair, dan zou men de richting van de pijlen ook kunnen omkeren. Lineaire functies zijn nl. reversibel:  $v_2^y(t + 1) = 5 - 10 v_1^y(t)$  bijv. wordt omgekeerd  $v_1^y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} v_2^y(t + 1)$ . Reversibiliteit betekent, dat zowel predictief als retrodictief gebruik is toegestaan. Niet-lineaire functies hebben vaak geen omkeerfunctie (inverse) en laten dan slechts predictie óf slechts retrodictie toe. Afgezien van restrictie op het bereik van variabele  $v_2^y(t + 1)$  zou bijv. de kwadratische functie  $v_1^y(t) = [v_2^y(t + 1)]^2$  alleen retrodictie toelaten: het heden bepaalbaar op basis van de toekomst maar niet omgekeerd. Louter retrodictieve relaties worden in de systeem-methodologie ook vaak anticiperend genoemd en zouden zinvol zijn in situaties, waarin het heden zich anticiperend zou laten beïnvloeden door de toekomst. Dit is, wat vaak wordt verstaan onder "finale" beïnvloedingsprocessen, maar als we deze zien als artefacten van feitelijke causale beïnvloedingsprocessen die altijd van heden naar toekomst lopen, moeten louter retrodictieve relaties als representatie van echte wetmatigheden worden uitgesloten. Onder de causaliteitsassumptie moeten verklaringsrelaties dus predictiviteit bezitten (naar beneden gerichte pijlen) en zijn reversibiliteit en retrodictiviteit (omkeerbare pijlen) slechts prettige, formeel-mathematische toegiften (32) van bepaalde soorten relaties (bijv. lineaire functies) welke als zodanig echter niets te maken hebben met reële beïnvloedingsprocessen.

Predictiviteit vertoont een relatie voor een variabele  $v_i^y(t)$ , als de waarden van die variabele 1) deterministisch of stochastisch afhankelijk

zijn van waarden van één of meer andere variabelen (aangegeven door pijlen) en 2) die afhankelijkheid gericht is van heden naar toekomst (naar beneden gerichte pijlen). Het onbevredigende karakter van geheugenloze relaties (horizontale pijlen) komt nu ook hierin tot uiting, dat in het reversibele geval geen uitsluitel wordt gegeven over de predictieve richting: is  $v_1^y(t)$  predictor voor  $v_2^y(t)$  of misschien  $v_2^y(t)$  voor  $v_1^y(t)$ ? Predictor-keuze is alleen mogelijk op basis van "prior knowledge of direction of causality" (33), d.w.z. onder assumptie van een onderliggende verklaringsrelatie met geheugenwerking en predictiviteit. De stochastische versie van dit keuzeprobleem staat bekend onder de naam "choice of regression" (34) en heeft vooral in de econometrie tot heftige discussies aanleiding gegeven. In het stochastische geval is het probleem des te ingrijpender, omdat stochastische relaties nooit reversibel zijn (zelfs lineaire zijn niet reversibel, omdat ieder van beide richtingen een eigen regressie-lijn heeft), zodat de keuze ook niet betrekking heeft op een relatie en haar inverse maar in feite op twee afzonderlijke niet-reversibele relaties. Opnieuw is het keuze-probleem alleen oplosbaar onder assumptie van een onderliggende verklaringsrelatie met predictiviteit. In de woorden van Wold: "... the problem is not one of "choice of regression", but rather one of "choice of cause-effect hypothesis"" (35).

Vaak is het niet mogelijk de geheugenwerking op de eenvoudige wijze van tijd-lagged vergelijkingen (2.2.3) in te bouwen, maar leiden differentie-vergelijkingen (2.2.4) tot meer succes. Daarbij wordt niet de waarde van  $v_2^y(t)$  of  $v_2^y(t+h)$  zelf als functie van  $v_1^y(t)$  genomen maar het differentie-quotient

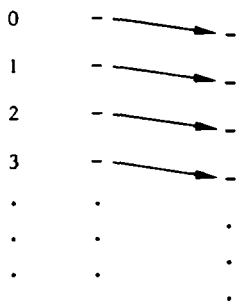
$$\frac{\Delta v_2^y(t)}{\Delta t} = \frac{v_2^y(t+h) - v_2^y(t)}{(t+h) - t} = \frac{v_2^y(t+h) - v_2^y(t)}{h}, \text{ d.w.z. de verandering}$$

in de waarde van  $v_2^y(t)$  op twee verschillende tijdstippen gedeeld door tijdsinterval  $\Delta t = h$ . Het differentie-quotient staat bekend als de gemiddelde mate van verandering ("average rate of change", bijv. snelheid als gemiddelde afgelegde weg over het tijdsinterval, bevolkingsgroei als gemiddelde toename van de bevolking over het tijdsinterval) en biedt in het algemeen meer aanknopingspunten voor de formulering van een verklaringsrelatie dan de waarde zelf (de precieze plaats op de weg op ieder tijdstip, de precieze grootte van de bevolking op ieder tijdstip).

differentievorm

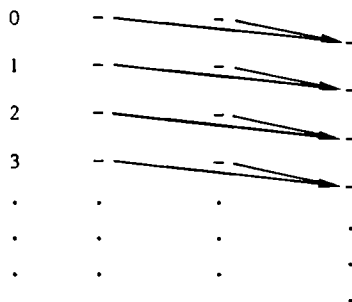
$$A_y: \Delta v_{1,2}^y(t) = v_2^y(t+1) - v_2^y(t) = f(v_1^y(t)) \quad A_y: \Delta v_{1,2}^y(t) = v_2^y(t+1) - v_2^y(t) = f(v_1^y(t), v_2^y(t))$$

$$t \quad \underline{v_{1,y}(t)} \quad \underline{\Delta v_{1,2,y}(t)}$$



$$\langle v_{1,y}(t), \Delta v_{1,2,y}(t) \rangle$$

$$t \quad \underline{v_{1,y}(t)} \quad \underline{v_{2,y}(t)} \quad \underline{\Delta v_{1,2,y}(t)}$$

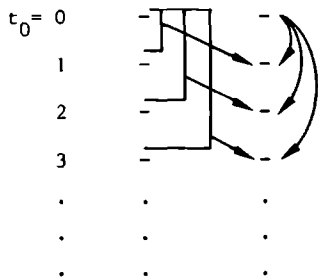


$$\langle v_{1,y}(t), v_{2,y}(t), \Delta v_{1,2,y}(t) \rangle$$

predictieve oplossingsvorm

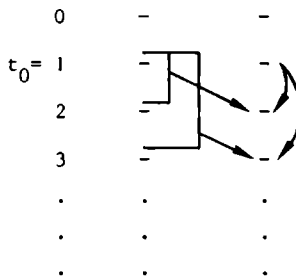
$$A_y: v_2^y(t) = s(v_2^y(t_0), v_{1,y}^y[t_0, t])$$

$$t \quad \underline{v_{1,y}(t)} \quad \underline{v_{2,y}(t)}$$



$$\langle v_{2,y}(0), v_{1,y}[0, t], v_{2,y}(t) \rangle$$

$$t \quad \underline{v_{1,y}(t)} \quad \underline{v_{2,y}(t)}$$



$$\langle v_{2,y}(1), v_{1,y}[1, t], v_{2,y}(t) \rangle$$

Fig. 2.2.2: Toetsing van een bivariate tijd-invariante differentie-relatie.

Toch wordt met differentie-quotiënten en differentie-vergelijkingen

2.2.4 minder gewerkt dan met de mathematisch gemakkelijker hanteerbare 2.2.5 en 2.2.6. 2.2.4 gaat over in 2.2.5, indien men de tijdsdifferentie  $\Delta t$  de waarde 1 laat aannemen. Laat men tegelijk de verzameling reële getallen voor tijd  $Re$  (continue tijd) een restrictie ondergaan tot de verzameling niet-negatieve gehele getallen  $Ge^{0,+} = \{0, 1, 2, \dots\}$  (discrete tijd), dan resulteren differentie-vergelijkingen met  $t \in Ge^{0,+}$  en  $\Delta t = 1$ , die het belangrijkste onderwerp vormen van de nog tamelijk recent ontwikkelde differentie-rekening en behalve in de economie ook steeds frequenter toepassing vinden in de sociale wetenschappen. Deze differentie-vergelijkingen zijn minder restrictief dan op het eerste gezicht lijkt. Uit 2.2.4 kan men nl. voor  $\Delta t = h \neq 1$  afleiden

$$\Delta v_2^y(t) = f(v_1^y(t))h$$

Onder restrictie  $t \in \{0, h, 2h, \dots\}$  en herdefiniëring van de tijd volgens  $\tau = \frac{t}{h}$  zodat  $\tau \in Ge^{0,+}$  volgt

$$v_2^y(\tau + 1) - v_2^y(\tau) = f(v_1^y(\tau))h$$

en dus een differentie-vergelijking met  $\tau \in Ge^{0,+}$  en  $\Delta \tau = 1$ .

In vergelijking met een continue-tijd tijd-lagged vergelijking onderscheidt zo'n discrete-tijd differentie-vergelijking zich bij de toetsing door twee bijzonderheden. Op de eerste plaats moeten ook de steekproef-getallen  $v_{i,y}^y(t)$  uiteraard betrekking hebben op de discrete tijdstippen  $t \in Ge^{0,+}$ , zodat de data-verzameling daarop moet worden afgestemd. Op de tweede plaats is uit het linkerlid van 2.2.5 al duidelijk, dat we bij de toetsing niet meer kunnen volstaan met slechts één steekproef-getal  $v_{2,y}^y(t)$ . Dat is een direct gevolg van het feit, dat de relatie 2.2.5 geen verklaring geeft voor waarden  $v_2^y(t)$  zelf maar slechts voor  $\Delta v_2^y(t) = v_2^y(t+1) - v_2^y(t)$ , d.w.z. voor verandering in die waarden. Het gemakkelijkst vindt toetsing plaats na oplossing van 2.2.5, d.w.z. na verandering door predictieve oplossingsrelatie

$$A_y: v_2^y(t) = s(v_2^y(t_0), v_1^y|_{[t_0, t)})$$



waarin iedere waarde  $v_2^y(t)$  op ieder tijdstip  $t$  wordt uitgedrukt als een functie  $s$  van een z.g. beginvoorwaarde  $v_2^y(t_0)$  op een begintijdstip  $t_0$  (niet noodzakelijk  $t_0 = 0$ ) en z.g. tijdfunctie-segment  $v_1^y[t_0, t] \equiv \{<k, v_1^y(k)>: t_0 \leq k < t\}$ . De oplossing van de lineaire tijd-invariante differentie-vergelijking

$$2.2.8 \quad v_2^y(t+1) - v_2^y(t) = a_{20} + a_{21} \cdot v_1^y(t)$$

is bijv.

$$2.2.9 \quad v_2^y(t) = v_2^y(t_0) + a_{20} \cdot (t - t_0) + a_{21} \cdot \sum_{k=t_0}^{t-1} v_1^y(k)$$

hetgeen iteratief gemakkelijk kan worden nagegaan:

$$v_2^y(t_0 + 1) = v_2^y(t_0) + a_{20} + a_{21} \cdot v_1^y(t_0)$$

$$v_2^y(t_0 + 2) = v_2^y(t_0 + 1) + a_{20} + a_{21} \cdot v_1^y(t_0 + 1) =$$

$$v_2^y(t_0) + a_{20} + a_{21} \cdot v_1^y(t_0) + a_{20} + a_{21} \cdot v_1^y(t_0 + 1) =$$

$$v_2^y(t_0) + a_{20} \cdot 2 + a_{21} [v_1^y(t_0) + v_1^y(t_0 + 1)]$$

$$v_2^y(t_0 + 3) = v_2^y(t_0 + 2) + a_{20} + a_{21} \cdot v_1^y(t_0 + 2) =$$

$$v_2^y(t_0) + a_{20} \cdot 3 + a_{21} [v_1^y(t_0) + v_1^y(t_0 + 1) + v_1^y(t_0 + 2)]$$

etc.

Oplossingstechnieken voor lineaire tijd-invariante differentie-vergelijkingen zijn vergevorderd. Terwijl het voordeel van de differentie-functies  $f$  de relatieve eenvoud is, is het voordeel van de meer complexe oplossingsfuncties  $s$  de predictiviteit voor alle latere waarden van de variabele in het differentie-quotiënt vanuit één bepaalde waarde op een willekeurig begintijdstip. Enkele toetsingsmogelijkheden voor verschillende begintijdstippen zijn aangegeven in fig.2.2.2. Tevens is toetsing rechtstreeks in termen van uit de steekproef-getallen berekende steekproef-differenties  $\Delta v_{2,y}^y(t) = v_{2,y}^y(t+1) - v_{2,y}^y(t)$  aangegeven.

Nu treft men differentie-vergelijkingen bijna altijd aan in een iets

uitgebreidere vorm:

$$10 \quad v_2^y(t+1) - v_2^y(t) = f(v_1^y(t), v_2^y(t))$$

waarin de differentie niet alleen een functie is van  $v_1^y(t)$  maar ook van  $v_2^y(t)$  zelf. Lineair:

$$11 \quad v_2^y(t+1) - v_2^y(t) = a_{20} + a_{21} \cdot v_1^y(t) + a_{22} \cdot v_2^y(t)$$

De afhankelijkheid van  $\Delta v_2^y(t)$  van  $v_2^y(t)$  zelf, tot uiting komend in de coëfficiënt  $a_{22}$ , is echter causaal moeilijk te interpreteren. Het is aantrekkelijk om zo'n coëfficiënt te zien als een artefact van een feedback-loop in de realiteit, d.w.z. van een situatie waarin verschillende tegengesteld gerichte causale mechanismen tegelijk opereren. Aan één relatie met  $a_{22}$  zouden dan verschillende tegelijk geldende verklaringsrelaties zonder  $a_{22}$  ten grondslag liggen. Zo zou 2.2.11 op de volgende wijze een afleiding kunnen zijn uit twee meer fundamentele vergelijkingen

$$12 \quad \begin{cases} v_2^y(t+1) - v_2^y(t) = a_{20} + a_{21} \cdot v_1^y(t) + a_{23} \cdot v_3^y(t+1) \\ v_3^y(t+1) = a_{32} \cdot v_2^y(t) \end{cases} \rightarrow v_2^y(t+1) - v_2^y(t) = a_{20} + a_{21} \cdot v_1^y(t) + a_{23} a_{32} \cdot v_2^y(t)$$

De beide eerste meer fundamentele vergelijkingen in 2.2.12 definiëren een multirelationeel verklaringsmodel met feedback-loop en de relatie gedefinieerd door 2.2.11 met feedback-coëfficiënt  $a_{22}$  zou daarvan slechts een artefact zijn. Coleman meent, dat zelfs aan de coëfficiënt  $a_{22}$  in een relatie voor bevolkingsgroei zo'n uitgebreider multirelationeel model ten grondslag moet liggen: "Even in population growth, where the variable ... is number of persons, there are implicit mechanisms, so that the rate of growth of population is not directly dependent on population size. It is dependent on the number of conception-producing interactions, which is dependent on the number of males and the number of females in a certain age segment of the population" (36). Een nieuw criterium voor het wetmatigheidskarakter van een relatie zou dus de afwezigheid van  $a_{22}$  zijn: "This can be seen as a surrogate for all the chains of feedback in the

empirical system that remain implicit in the formal system. As the formal system becomes more complete, this coefficient should approach zero" (37).

Aangezien meestal verschillende multirelationele verklaringssystemen denkbaar zijn bij eenzelfde afgeleide verklaringrelatie, verdient toetsing van de meer fundamentele relaties de voorkeur: gelden deze, dan geldt vanzelf de afgeleide relatie maar niet omgekeerd. Vaak zijn er echter geen hypothesen over fundamentele relaties, is zelfs niet bekend wat de bijkomende variabelen zoals  $v_3^y(t)$  in 2.2.12 zouden moeten inhouden of zijn er voor de laatste geen meetprocedures. In die gevallen zijn we toch aangewezen op toetsing van de afgeleide relatie. Ook toetsing van zo'n als afgeleid te beschouwen differentie-relatie (2.2.10) vindt weer het gemakkelijkst plaats na oplossing van de vergelijking, d.w.z. aan de hand van de relatie  $s$  (2.2.7) die voor willekeurige beginvoorwaarde  $v_2^y(t_0)$  aan de vergelijking voldoet. De oplossingen zijn alleen ingewikkelder: vergelijk bijv. oplossing 2.2.9 van de lineaire differentie-relatie zonder feedback-coëfficiënt (2.2.3) met oplossing 2.2.13 van de lineaire differentie-relatie met feedback-coëfficiënt (2.2.11):

$$2.2.13 \quad v_2^y(t) = (a_{22} + 1)^{t-t_0} \cdot v_2^y(t_0) + \frac{a_{20}}{a_{22}} [(a_{22} + 1)^{t-t_0} - 1] + a_{21} \sum_{k=t_0}^{t-1} (a_{22} + 1)^{(t-1)-k} \cdot v_1^y(k)$$

Evenals 2.2.9 kan 2.2.13 iteratief worden nagegaan. Zie voor toetsing weer fig. 2.2.2.

De klassieke en vooral in de natuurwetenschap toegepaste benadering van geheugenwerking is niet de differentie-rekening maar de differentiaalrekening, waarvan Newton de grondlegger was. Vóór Newton was het uitgangspunt van de wiskunde vooral statisch: getallen als abstracties van statische verzamelingen objecten, meetkundige figuren als abstracties van statische ruimtelijke vormen. Newton introduceerde als eerste op systematische wijze het begrip verandering in de wiskunde (38): verandering in tijd  $\Delta t$ , verandering in meetresultaten  $\Delta v_i^y(t)$  en hun quotiënt  $\frac{\Delta v_i^y(t)}{\Delta t}$ . Newton bleef echter niet bij het differentie-quotiënt ("average rate of change") staan, maar introduceerde vervolgens het differentiaalquotiënt: de mate van verandering op één bepaald moment  $t$  ("instantaneous

rate of change", bijv. snelheid, niet als afgelegde weg over een bepaald tijdsinterval maar als afgelegde weg op één bepaald moment). Deze wat paradoxale grootheid kreeg korte tijd later van Leibniz de notatie  $\frac{dv_i^y(t)}{dt}$ , waarin  $dt$  en  $dv_i^y(t)$  in de ogen van Leibniz "oneindig kleine aangroeiingen" voorstelden.

Het paradoxale karakter evenals Leibniz' "oneindig kleine aangroeiingen" verdwenen pas, toen

$$\frac{dv_i^y(t)}{dt} \text{ werd gedefinieerd als } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta v_i^y(t)}{\Delta t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v_i^y(t+h) - v_i^y(t)}{h} .$$

Een limiet  $h \rightarrow 0$  van een functie van  $h$ :  $\lim_{h \rightarrow 0} f(h)$  is nl. niet per se hetzelfde als  $f(0)$ , zodat de mate van verandering op moment  $t$  ook niet moet worden opgevat als de mate van verandering met  $h = 0$ . In feite hoeft  $f$  niet eens voor  $h = 0$  gedefinieerd te zijn en is dat bij differentiaal-quotiënten ook niet, omdat de noemer van een quotiënt nooit 0 mag zijn. De werkelijke betekenis van  $\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = a$  is slechts: er bestaat bij ieder willekeurig positief getal  $\epsilon$  een zodanig positief getal  $\delta(\epsilon)$ , dat uit  $0 < |h| < \delta(\epsilon)$  volgt  $|f(h) - a| < \epsilon$  (39). Evenzeer als de willekeurige waarden van  $\epsilon$  hebben waarden van  $h$ , die voldoen, betrekking op eindige getallen. Voor Leibniz' "oneindig kleine aangroeiingen" is dus geen plaats, zodat geheugenwerking ook in het geval van een differentiaal-vergelijking (2.2.6) betrekking blijft hebben op eindige verschillen in tijd  $\Delta t$  en eindige verschillen in tijdfunctie-waarden  $\Delta v_i^y(t)$  tussen  $t$  en  $t + \Delta t$ .

De zo juist gegeven definitie van het differentiaal-quotiënt  $\frac{dv_i^y(t)}{dt}$  als  $\lim_{\Delta t} \frac{\Delta v_i^y(t)}{\Delta t}$  koppelt de differentiaal-rekening aan de differentie-rekening en het is daarom niet zo verwonderlijk, dat beide vaak tot analoge resultaten leiden (40). Differentiële relaties (relaties gedefinieerd door differentiaal-vergelijkingen) en differentie-relaties komen nog in dit negatieve opzicht overeen, dat zij geen van beide gedefinieerd zijn en daarom ook geen van beide gelden voor volle (verzamelingen) continue-tijd tijdfuncties. Laten we de verzamelingen continue-tijd tijdfuncties, d.w.z. verzamelingen  $V_i = V_i^y \supset V_{i,y}^p \supseteq V_{i,y}^s$  met  $t \in \text{Re}$ , als volgt aanduiden

$$2.2.14 \quad V_i = V_i^y \supset V_{i,y}^p \supseteq V_{i,y}^s$$

Restrictie van  $t \in \text{Re}$  tot  $t \in \text{Ge}^{0,+}$  voor definiëring van differentie-relaties leidt tot verzamelingen discrete-tijd tijdfuncties, die we als volgt zullen aanduiden

$$2.2.15 \quad \bar{V}_i^y = \bar{V}_i^y \supset \bar{V}_{i,y}^p \supseteq \bar{V}_{i,y}^s$$

en alleen daarvoor gelden de differentie-relaties, zodat ook bij toetsing de paren  $\langle t, v_{i,y}(t) \rangle$  in de data-matrix moeten behoren tot een of andere  $v_{i,y} \in \bar{V}_{i,y}^s$ .

Geldt differentie-relaties niet voor de volle tijdfuncties, differentiële relaties gelden niet voor de volle verzamelingen onder 2.2.14. Niet alle continue-tijd tijdfuncties of tijdfunctie-segmenten zijn nl. differentieerbaar, d.w.z. niet voor iedere  $t$  in iedere  $v_i^y \in \bar{V}_i^y$  bestaat het differentiaal-quotiënt. Differentieerbaarheid over tijds-interval  $(t_0, t_1)$  vereist 1) dat behalve de tijd zelf ook de tijdfunctie continu is over dat interval (de tijdfunctie-waarden in het interval geen gaten en ook geen sprongen vertonen) en 2) linker- en rechter-differentiaal-quotiënt overal gelijk zijn over dat interval (de tijdfunctie-waarden geen knikken vertonen) (41). De verzamelingen van continue tijdfunctie-segmenten in de tijdfuncties van 2.2.14 zullen we aanduiden met:

$$2.2.16 \quad \bar{V}_i^c[t_0, t_1] = \bar{V}_i^c[t_0, t_1] \supset \bar{V}_{i,y}^p[t_0, t_1] \supseteq \bar{V}_{i,y}^s[t_0, t_1]$$

De verzamelingen van differentieerbare tijdfunctie-segmenten in de tijdfunctie-segmenten van 2.2.16 (differentieerbaarheid vooronderstelt continuïteit) zullen we aanduiden met:

$$2.2.17 \quad \bar{V}_i^d(t_0, t_1) = \bar{V}_i^d(t_0, t_1) \supset \bar{V}_{i,y}^p(t_0, t_1) \supseteq \bar{V}_{i,y}^s(t_0, t_1)$$

en alleen daarvoor gelden differentie-relaties wat de variabele in het differentiaal-quotiënt betreft. Bij toetsing van differentie-relaties met bijv.  $\frac{dv_2^y(t)}{dt}$  in de vergelijking wordt dan ook voorondersteld, dat de noodzakelijk discrete paren  $\langle t, v_{2,y}(t) \rangle$  in de data-matrix behoren tot een of andere  $v_{2,y}(t_0, t_1) \in \bar{V}_{2,y}^d(t_0, t_1)$ . Vooral in de sociale wetenschap, waar de meet-tijdstippen in het algemeen ver uiteen liggen, is die differentieerbaarheidsassumptie vaak erg hypothetisch. De steek-

proefverzameling  $\frac{d}{dt} \bar{v}_{2,y}(t_0, t_1)$  zou voor intervallen  $(t_0, t_1)$  rond de meet-tijdstippen zelfs leeg kunnen zijn en daarmee de differentiële relatie ontoetsbaar. Gaat men er echter van uit, dat wel aan de differentieerbaarheidssassumptie is voldaan, dan vormt een differentiaal-vergelijking een aantrekkelijk alternatief voor een differentie-vergelijking. Differentiaal-vergelijkingen zijn nl. mathematisch diepgaand onderzocht en in zoverre zeker niet restrictiever, dat  $\frac{d}{dt} \bar{v}_2^y(t_0, t_1)$  voor elke discrete  $v_2^y \in \bar{V}_2^y$  volle differentieerbare  $v_2^y(-\infty, \infty) \in \bar{V}_2^y$  met  $v_2^y(-\infty, \infty) \supset v_2^y$  bevat. Differentiële relaties verdienen overigens niet altijd de voorkeur. De gehypothetiseerde wetmatigheid voor de eenheden  $y \in L^t$  wordt adequater gerepresenteerd door een differentie-relatie, indien de causale beïnvloeding door  $v_1^y(t)$  eerder als een schoksgewijs verlopend, discreet proces moet worden opgevat dan als een continu of bij benadering continu proces. Zoals zal blijken heeft dat konsekwenties voor het resulterende gedrag van  $v_2^y(t)$ .

Een differentiële relatie is niet meer exact toetsbaar in termen van uit de data-matrix berekende differentie-quotienten. Gebruik moet worden gemaakt van de oplossingsrelatie. Oplossing van de lineaire tijd-invariante differentiaal-vergelijking zonder feedback-coëfficiënt ( $a_{22} = 0$ ):

$$2.2.18 \quad \frac{dv_2^y(t)}{dt} = a_{20} + a_{21} \cdot v_1^y(t)$$

geeft:

$$2.2.19 \quad v_2^y(t) = v_2^y(t_0) + a_{20} \cdot (t - t_0) + a_{21} \int_{t_0}^t v_1^y(\xi) d\xi$$

Oplossing van de lineaire tijd-invariante differentiaal-vergelijking met feedback-coëfficiënt ( $a_{22} \neq 0$ ):

$$2.2.20 \quad \frac{dv_2^y(t)}{dt} = a_{20} + a_{21} \cdot v_1^y(t) + a_{22} \cdot v_2^y(t)$$

geeft:

$$2.2.21 \quad v_2^y(t) = e^{a_{22} \cdot (t - t_0)} \cdot v_2^y(t_0) + \frac{a_{20}}{a_{22}} [e^{a_{22} \cdot (t - t_0)} - 1] + a_{21} \int_{t_0}^t e^{a_{22} \cdot (t - \xi)} \cdot v_1^y(\xi) d\xi$$

De predictieve oplossingsrelaties gedefinieerd door 2.2.19 en 2.2.21 geven iedere  $v_2^y(t)$  op ieder later tijdstip  $t$  als een functie van een beginvoorwaarde  $v_2^y(t_0)$  en tijdfunctie-segment  $v_1^y[t_0, t] \equiv \{ \langle \xi, v_1^y(\xi) \rangle : t_0 \leq \xi < t \}$ . Op het eerste gezicht zou toetsing nu kunnen plaatsvinden door na te gaan of de toetsingsgrootheden  $\langle v_{2,y}(t_0), v_{1,y}[t_0, t], v_{2,y}(t) \rangle$  in de data-matrix telkens behoren tot de oplossingsrelatie. De moeilijkheid met tijdfunctie-segmenten  $v_{1,y}[t_0, t]$  in de data-matrix is echter, dat zij noodzakelijk discreet zijn, terwijl voor toepassing van de integratie-operatie  $\int$  (het omgekeerde van differentiatie, soms wel anti-differentiatie genoemd, d.w.z. voor integraal  $F(x)$  van  $f(x)$  moet gelden  $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ ) bij de berekening van de bepaalde integraal  $\int_{t_0}^t f(x)dx = F(t) - F(t_0)$  in het algemeen stuksgewijze continuïteit van de functie over  $[t_0, t]$  wordt voorondersteld ( $f$  is dan integreerbaar over  $[t_0, t]$ ) en bekendheid van de functie-waarden over  $[t_0, t]$  ( $F$  kan dan eventueel gevonden worden). Met "stuksgewijs" continu wordt bedoeld, dat een eindig aantal discontinuïteitspunten toelaatbaar is. Toetsing van een differentiële relatie

$$2.2.22 \quad A_y: \frac{dv_2^y(t)}{dt} = f(v_1^y(t)) \quad \text{of} \quad \frac{dv_2^y(t)}{dt} = f(v_1^y(t), v_2^y(t))$$

aan de hand van de predictieve oplossingsrelatie

$$2.2.23 \quad A_y: v_2^y(t) = s(v_2^y(t_0), v_1^y[t_0, t])$$

is op die manier gebonden aan : 1) ieder getoetst discreet tijdfunctie-segment  $v_{2,y}(t_0, t]$  in de data-matrix maakt deel uit van een differentieerbaar tijdfunctie-segment  $v_{2,y}(t_0, t_1) \in \frac{d}{ds} v_{2,y}(t_0, t_1)$ , 2) ieder bijbehorend discreet tijdfunctie-segment  $v_{1,y}[t_0, t)$  in de data-matrix maakt deel uit van een volledig gespecificeerd (stuksgewijs) continu tijdfunctie-segment  $v_{1,y}[t_0, t_1] \in \frac{c}{vs} v_{1,y}[t_0, t_1]$ . Nemen we bijv. aan, dat  $v_{1,y}(t)$  over continu tijdsinterval  $[t_0, t_1]$  lineair met  $t$  varieert, wat over kleinere

tijdsintervallen vaak een redelijke assumptie is. Voor alle  $t \in [t_0, t_1]$  geldt dan

$$2.2.24 \quad v_{1,y}(t) = c_{1,y} + b_{1,y} \cdot t \quad \text{of vanwege} \quad v_{1,y}(t_0) = c_{1,y} + b_{1,y} \cdot t_0 \\ v_{1,y}(t) = v_{1,y}(t_0) + b_{1,y} \cdot (t - t_0)$$

Na integratie zouden 2.2.19 en 2.2.21 dan resp. overgaan in 2.2.25 en 2.2.26:

$$2.2.25 \quad v_{2,y}(t) = v_{2,y}(t_0) + a_{20} \cdot (t - t_0) + a_{21} \cdot (t - t_0) \cdot v_{1,y}(t_0) + \\ \frac{a_{21}}{2} (t - t_0)^2 b_{1,y}$$

$$2.2.26 \quad v_{2,y}(t) = e^{a_{22} \cdot (t - t_0)} \cdot v_{2,y}(t_0) + \frac{a_{20}}{a_{22}} [e^{a_{22} \cdot (t - t_0)} - 1] + \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} [e^{a_{22} \cdot (t - t_0)} - 1] v_{1,y}(t_0) + \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} \left[ \frac{1}{a_{22}} (e^{a_{22} \cdot (t - t_0)} - 1) - (t - t_0) \right] b_{1,y} \quad (42)$$

Overigens kunnen oplossingen van differentiaal-vergelijkingen ook door oplossingen van discrete-tijd differentie-vergelijkingen worden benaderd, wat vooral bij ingewikkeldere tijdfunctie-segmenten vaak een gemakkelijkere oplossingsprocedure geeft en soms zelfs de enig mogelijke. Het lijkt bijv. redelijk differentiaal-vergelijking 2.2.20 discreet te benaderen door

$$2.2.27 \quad \frac{\Delta v_2^y(t)}{\Delta t} = a_{20} + a_{21} \cdot v_1^y(t) + a_{22} \cdot v_2^y(t)$$

met  $t = \tau h$ ,  $\tau \in \mathbb{G}^{0,+}$  en  $\Delta t = h$ , zodat we  $t \in \mathbb{R}$  een restrictie laten ondergaan tot  $t \in \{0, h, 2h, \dots\}$ . De benadering zal uiteraard beter zijn, naarmate we  $\Delta t = h$  kleiner nemen. Voor een enigszins redelijke benadering zal minstens  $\Delta t < 1$  moeten zijn, zodat 2.2.27 niet is te schrijven als een normale differentie-vergelijking met  $\Delta t = 1$ . De



essentie van de benaderingsprocedure bestaat hierin, dat we 2.2.27 laten overgaan in een differentie-vergelijking met  $\Delta\tau = 1$ . Na vermenigvuldiging van beide zijden met  $\Delta t = h$  en (tijdelijke) vervanging van  $v_1^y(t)$  door  $v_1^y(\tau)$  met  $\tau = \frac{t}{h}$  wordt 2.2.27

$$2.2.28 \quad v_2^y(\tau + 1) - v_2^y(\tau) = a_{20}h + a_{21}h \cdot v_1^y(\tau) + a_{22}h \cdot v_2^y(\tau)$$

en dat is een differentie-vergelijking van de vorm 2.2.11 die volgens 2.2.13 als oplossing heeft:

$$v_2^y(\tau) = (a_{22}h + 1)^{\tau - \tau_0} \cdot v_2^y(\tau_0) + \frac{a_{20}}{a_{22}} [(a_{22}h + 1)^{\tau - \tau_0} - 1] + a_{21} \sum_{k=\tau_0}^{\tau-1} (a_{22}h + 1)^{(\tau-1)-k} \cdot v_1^y(k)h$$

Vanwege  $\tau = \frac{t}{h}$  en  $v_2^y(\tau) = v_2^y(t)$  met  $t = Th$  resp.  $v_1^y(k) = v_1^y(\xi)$  met  $\xi = kh$  krijgen we dan als benadering voor exakte oplossing 2.2.21

$$2.2.29 \quad v_2^y(t) = (a_{22}h + 1)^{\frac{t-t_0}{h}} \cdot v_2^y(t_0) + \frac{a_{20}}{a_{22}} [(a_{22}h + 1)^{\frac{t-t_0}{h}} - 1] + a_{21} \sum_{\xi=t_0}^{t-h} (a_{22}h + 1)^{\frac{t-\xi}{h} - 1} \cdot v_1^y(\xi)\Delta\xi$$

waarbij we  $h$  op het eind van de laatste term hebben geschreven als  $\Delta\xi$ :  $\Delta\xi = (\xi + h) - h = h$ . Nog steeds geldt  $t \in \{0, h, 2h, \dots\}$  evenals  $\xi \in \{t_0, t + h, t + 2h, \dots, t - h\}$ , maar hoe kleiner we  $h$  nemen, hoe meer  $t$  en  $\xi$  continuïteit benaderen. Het zal geen verwondering wekken dat in het continue geval:  $h \rightarrow 0$  en dus  $\Delta\xi \rightarrow 0$  som  $\sum_{\xi=t_0}^{t-h} f(\xi)\Delta\xi$  overgaat in  $\int_{t_0}^t f(\xi)d\xi$ .

Merkwaardig is misschien nog de overgang van de discrete vormen  $(a_{22}h + 1)^{\frac{t-t_0}{h}}$  en  $(a_{22}h + 1)^{\frac{t-\xi}{h} - 1}$  - voor  $\Delta t = h = 1$  en dus  $\xi = k$  worden deze uiteraard  $(a_{22} + 1)^{t-t_0}$  en  $(a_{22} + 1)^{(t-1)-k}$  zoals in 2.2.13 - in analoge continue vormen  $e^{a_{22} \cdot (t - t_0)}$  en  $e^{a_{22} \cdot (t - \xi)}$  met daarin het grondtal  $e \approx 2.71828$ . M.b.t. dit tweede verschil tussen oplossingen van differentie-vergelijkingen en van differentiaal-vergelijkingen bewijst

o.a. Goldberg (43) dat  $\lim_{h \rightarrow 0} (a_{22}^h + 1)^{\frac{t-t_0}{h}} = e^{a_{22} \cdot (t - t_0)}$ , terwijl

$$\lim_{h \rightarrow 0} (a_{22}^h + 1)^{\frac{t-\xi}{h}} - 1 = \lim_{h \rightarrow 0} (a_{22}^h + 1)^{\frac{t-\xi}{h}} / (a_{22}^h + 1) = e^{a_{22} \cdot (t - \xi)}$$

vanwege  $\lim_{h \rightarrow 0} (a_{22}^h + 1) = 1$ .

Concentreren we ons nu op het eerste deel van 2.2.21, de autonome verandering van  $v_2^y(t)$  over  $[t_0, t_1]$  afgezien van externe invloeden en alleen afhankelijk van impliciete feedback-mechanismen:

$$2.2.30 \quad v_2^y(t) = e^{a_{22} \cdot (t - t_0)} \cdot v_2^y(t_0)$$

(oplossing van de homogene differentiaal-vergelijking, d.w.z. de vergelijking met  $a_{20} = 0$ ,  $a_{21} = 0$  en alleen de feedback-coëfficiënt  $a_{22} \neq 0$ ). Is  $v_2^y(t_0) \neq 0$ , dan verloopt die verandering ofwel monotoon divergerend (voor  $a_{22} > 0$ ; men spreekt dan over positieve feedback of exponentiële groei) ofwel monotoon convergerend naar limiet  $v_2^y(t) = 0$  (voor  $a_{22} < 0$ ; men spreekt dan over negatieve feedback of exponentieel verval met  $v_2^y(t) = 0$  als stabiele evenwichtstoestand). Voor positieve  $h = \frac{1}{r}$  in discrete benadering

$$2.2.31 \quad v_2^y(t) = (a_{22}^h + 1)^{\frac{t-t_0}{h}} \cdot v_2^y(t_0)$$

zal de verandering van  $v_2^y(t)$  alleen dan monotoon zijn, als  $a_{22}^h > -1$  of  $a_{22} > -r$  (voor  $a_{22} < -r$  verloopt de verandering niet monotoon maar oscillerend en voor  $a_{22} = -r$  is er helemaal geen verandering). Is m.a.w. de negatieve feedback zo sterk, dat  $a_{22} \leq -r$ , dan is 2.2.31 niet meer te gebruiken als benadering van 2.2.30, tenzij we  $h$  voldoende verkleinen ( $r$  voldoende vergroten).

Voor  $h = \Delta t = 1 = r$  wordt 2.2.31

$$2.2.32 \quad v_2^y(t) = (a_{22} + 1)^{t-t_0} \cdot v_2^y(t_0)$$

en dit is de oplossing van de homogene discrete-tijd differentie-vergelijking met  $\Delta t = 1$  (zie het eerste deel van 2.2.13). Men spreekt hier van geometrische groei (voor  $a_{22} > 0$ ) en geometrisch verval (voor  $-1 < a_{22} < 0$ ). Geometrische groei (verval) vormt zo het discrete tijd  $\Delta t = 1$  analogon

van exponentiële groei (verval) met  $\Delta t \rightarrow 0$  (44).

In de aan Goldberg (45) ontleende fig. 2.2.3 is het totale gedrag van  $v_2^y(t)$  volgens de lineaire differentie-vergelijking weergegeven voor verschillende waarden van feedback-coëfficiënt  $a_{22}$  en bij constante  $v_1^y(t) = c_1$ . Indien  $v_1^y(t)$  varieert over de predictie-periode is het gedrag van  $v_2^y(t)$  uiteraard mede afhankelijk van het gedrag, dat  $v_1^y(t)$  vertoont. Lineaire differentie- en differentiaal-vergelijking komen in zoverre met elkaar overeen, dat  $v_2^y(t)$  in beide gevallen voor  $a_{22} > 0$  monotoon divergeert en voor  $a_{22} = 0$  lineair divergeert. Terwijl echter  $v_2^y(t)$  in het geval van een differentiaal-vergelijking voor alle waarden  $a_{22} < 0$  monotoon convergeert naar stabiele evenwichtstoestand  $v_2^y(t) = -(a_{20} + a_{21} \cdot c_1)/a_{22}$ , is dat bij een differentie-vergelijking alleen het geval voor  $-1 < a_{22} < 0$  onder (3). Voor  $-2 < a_{22} < -1$  onder (5) convergeert het gedrag ook naar stabiele evenwichtstoestand  $v_2^y(t) = -(a_{20} + a_{21} \cdot c_1)/a_{22}$  maar oscillerend. Voor  $a_{22} = -1$  onder (4) gaat de differentie-vergelijking over in een tijd-lagged vergelijking, voor  $a_{22} = -2$  onder (6) oscilleert het gedrag eindig (met gelijke sprongen) en voor  $a_{22} < -2$  onder (7) oscilleert het gedrag divergerend (met steeds grotere sprongen). Van de genoemde verschillen tussen differentie- en differentiaal-vergelijking dient men zich bij de keuze voor een van beide bewust te zijn.

### Een identificatie-procedure voor lineaire tijd-invariante differentie- en differentiële relaties

Met behulp van de tot nu toe besproken oplossingsvergelijkingen worden de waarden van de afhankelijke variabele  $v_{2,y}(t)$  geprediceerd en kan toetsing plaats vinden door vergelijking met de gevonden waarden. Daarbij wordt wel voorondersteld, dat de waarden van de parameters bekend zijn. Het komt echter vaak voor, dat we een verklaringsrelatie hypothetiseren zonder de parameterwaarden te specificeren: bijv. wel het lineaire tijd-invariante karakter maar met nog onbekende  $a_{20}$ ,  $a_{21}$  en  $a_{22}$ . Die moeten dan eerst op basis van een aantal steekproef-waarden  $v_{i,y}(t)$  geïdentificeerd worden (in het stochastische geval kunnen ze op basis van een eindige steekproef alleen geschat worden, maar dan is niettemin identificeerbaarheid vereist voor de geldingspopulatie als geheel). Pas

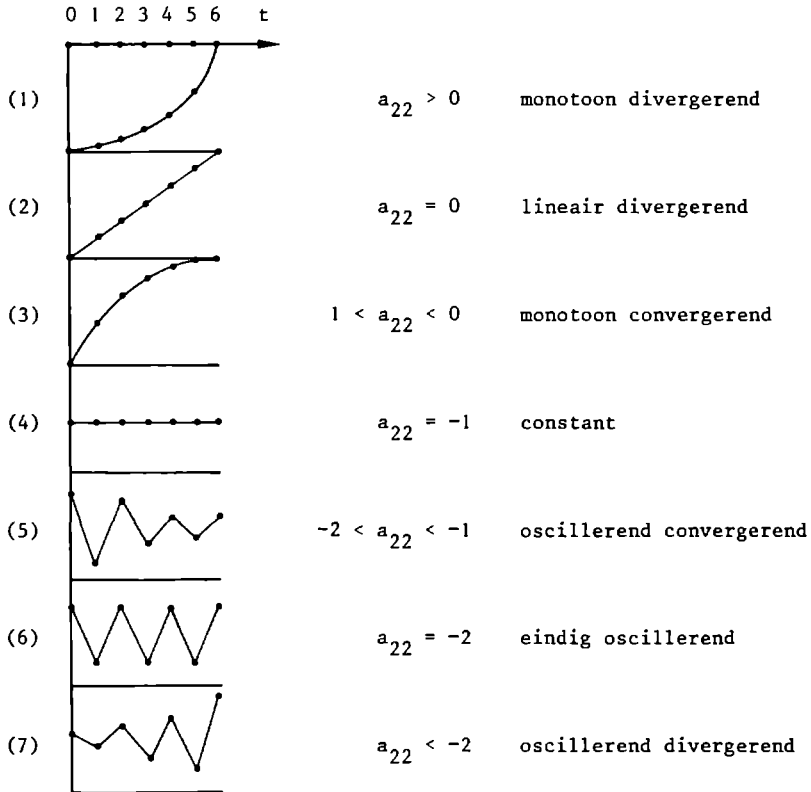


Fig. 2.2.3: Het gedrag van  $v_2^y(t)$  volgens differentie-vergelijking  $v_2^y(t+1) - v_2^y(t) = a_{20} + a_{21} \cdot v_2^y(t) + a_{22} \cdot v_2^y(t)$  bij verschillende waarden van feedback-coëfficiënt  $a_{22}$  en bij constante  $v_1^y(t) = c_1$ .

na identificatie van  $a_{20}$ ,  $a_{21}$  en  $a_{22}$  kan dan predictieve toetsing plaatsvinden aan de hand van een nieuwe set steekproef-waarden  $v_{1,y}(t)$ .

Met het oog op identificatie van  $a_{20}$ ,  $a_{21}$  en  $a_{22}$  in een lineaire differentiaal-vergelijking onder assumptie van lineair met  $t$  variërende steekproef-waarden  $v_{1,y}(t)$  (2.2.24) stellen we eerst de volgende hulpvergelijking op met hulp-coëfficiënten  $a_{22}^*$ ,  $a_{20}^*$ ,  $a_{21}^*$  en  $a_{21}^{**}$  en  $\delta$  als vast verschil in tijd tussen paren steekproef-tijdstippen  $t$  en  $t_0$  (twee interview-golven in een panel-onderzoek bijv.) (46).

$$2.2.33 \quad v_{2,y}(t) = a_{22}^* \cdot v_{2,y}(t_0) + a_{20}^* + a_{21}^* \cdot v_{1,y}(t_0) + a_{21}^{**} \cdot b_{1,y} \quad \text{of}$$

$$v_{2,y}(t_0 + \delta) = a_{22}^* \cdot v_{2,y}(t_0) + a_{20}^* + a_{21}^* \cdot v_{1,y}(t_0) + a_{21}^{**} \cdot b_{1,y}$$

De volgende set tijdserie-data voor steekproef-eenheid  $\alpha$ , waarbij ook  $b_{1,\alpha} = [v_{1,\alpha}(t_0 + \delta) - v_{1,\alpha}(t_0)]/\delta$  over regels (tijdsperioden) verschillende waarden moet aannemen

$v_{2,\alpha}(t^* + \delta)$	$v_{2,\alpha}(t^*)$	$v_{1,\alpha}(t^*)$	$b_{1,\alpha}(t^*)$
$v_{2,\alpha}(t^* + 2\delta)$	$v_{2,\alpha}(t^* + \delta)$	$v_{1,\alpha}(t^* + \delta)$	$b_{1,\alpha}(t^* + \delta)$
$v_{2,\alpha}(t^* + 3\delta)$	$v_{2,\alpha}(t^* + 2\delta)$	$v_{1,\alpha}(t^* + 2\delta)$	$b_{1,\alpha}(t^* + 2\delta)$
$v_{2,\alpha}(t^* + 4\delta)$	$v_{2,\alpha}(t^* + 3\delta)$	$v_{1,\alpha}(t^* + 3\delta)$	$b_{1,\alpha}(t^* + 3\delta)$

levert ingevuld in 2.2.33 een stelsel van 4 vergelijkingen op in 4 onbekenden. Hetzelfde geldt voor een of andere set gecombineerd cross-sectionele tijdserie-data, bijv.

$v_{2,\alpha}(t^* + \delta)$	$v_{2,\alpha}(t^*)$	$v_{1,\alpha}(t^*)$	$b_{1,\alpha}(t^*)$
$v_{2,\beta}(t^* + \delta)$	$v_{2,\beta}(t^*)$	$v_{1,\beta}(t^*)$	$b_{1,\beta}(t^*)$
$v_{2,\gamma}(t^* + \delta)$	$v_{2,\gamma}(t^*)$	$v_{1,\gamma}(t^*)$	$b_{1,\gamma}(t^*)$
$v_{2,\eta}(t^* + \delta)$	$v_{2,\eta}(t^*)$	$v_{1,\eta}(t^*)$	$b_{1,\eta}(t^*)$

Ieder van beide sets of mengvormen daarvan stellen ons in staat de waarden van de hulp-coëfficiënten  $a_{22}^*$ ,  $a_{20}^*$ ,  $a_{21}^*$  en  $a_{21}^{**}$  te bepalen. Omdat uit 2.2.26 en 2.2.33 volgt:

$$\begin{aligned}
 a_{22}^* &= e^{a_{22} \cdot (t - t_0)} &= e^{a_{22} \cdot \delta} \\
 a_{20}^* &= \frac{a_{20}}{a_{22}} [ e^{a_{22} \cdot (t - t_0)} - 1 ] &= \frac{a_{20}}{a_{22}} [ e^{a_{22} \cdot \delta} - 1 ] \\
 a_{21}^* &= \frac{a_{21}}{a_{22}} [ e^{a_{22} \cdot (t - t_0)} - 1 ] &= \frac{a_{21}}{a_{22}} [ e^{a_{22} \cdot \delta} - 1 ] \\
 a_{21}^{**} &= \frac{a_{21}}{a_{22}} \left[ \frac{1}{a_{22}} (e^{a_{22} \cdot (t - t_0)} - 1) - (t - t_0) \right] &= \frac{a_{21}}{a_{22}} \left[ \frac{1}{a_{22}} (e^{a_{22} \cdot \delta} - 1) - \delta \right]
 \end{aligned}$$

kunnen we ook de waarden van de differentiële parameters  $a_{22}$ ,  $a_{20}$  en  $a_{21}$  in 2.2.20 identificeren (voor  $\delta=1$  via iets vereenvoudigde uitdrukkingen)

$$\begin{aligned}
 34 \quad a_{22} &= \frac{\ln a_{22}^*}{\delta} & \text{voor } \delta = 1: & \quad a_{22} = \ln a_{22}^* \\
 a_{20} &= \frac{a_{20}^* \cdot a_{22}}{a_{22}^* - 1} & & \quad a_{20} = \frac{a_{20}^* \cdot \ln a_{22}^*}{a_{22}^* - 1} \\
 \left\{ \begin{aligned} a_{21} &= \frac{a_{21}^* \cdot a_{22}}{a_{22}^* - 1} \\ a_{21} &= \frac{a_{21}^{**} \cdot a_{22}}{\frac{1}{a_{22}} (a_{22}^* - 1) - \delta} \end{aligned} \right. & & \left\{ \begin{aligned} a_{21} &= \frac{a_{21}^* \cdot \ln a_{22}^*}{a_{22}^* - 1} \\ a_{21} &= \frac{a_{21}^{**} \cdot \ln a_{22}^*}{\ln a_{22}^* (a_{22}^* - 1) - 1} \end{aligned} \right. \\
 \left. \left. \begin{aligned} a_{21} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{a_{21}^* \cdot a_{22}}{a_{22}^* - 1} + \frac{a_{21}^{**} \cdot a_{22}}{\frac{1}{a_{22}} (a_{22}^* - 1) - \delta} \right] \right. & & \left. \left. \begin{aligned} a_{21} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{a_{21}^* \cdot \ln a_{22}^*}{a_{22}^* - 1} + \frac{a_{21}^{**} \cdot \ln a_{22}^*}{\ln a_{22}^* (a_{22}^* - 1) - 1} \right] \right.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

De over-identificeerbaarheid van  $a_{21}$  - 2.2.34 bevat voor  $a_{21}$  één uitdrukking op basis van  $a_{21}^*$  en één op basis van  $a_{21}^{**}$  en dus twee onafhankelijke identificatie-mogelijkheden - betekent dat in de identificatie-procedure tevens een toetsingsmogelijkheid begrepen is: voor de geldigheid van de gehypothetiseerde differentiële relatie is uiteraard vereist, dat beide gevonden waarden voor  $a_{21}$  gelijk zijn. Coleman, aan wie deze

identificatie-procedure is ontleend, suggereert voor het stochastische geval, waar de beide (geschatte) waarden van  $a_{21}$  uiteraard niet precies gelijk hoeven te zijn, de gemiddelde waarde (46).

Voor identificatie van  $a_{20}$  en  $a_{21}$  in 2.2.18 waarin feedback-coëfficiënt  $a_{22}^* = 0$  stellen we dezelfde hulpvergelijking 2.2.33 op, terwijl we op dezelfde wijze oplossen voor de waarden van  $a_{22}^*$ ,  $a_{20}^*$ ,  $a_{21}^*$  en  $a_{21}^{**}$ . Samen met 2.2.25 volgt nu uit 2.2.33

$$a_{22}^* = 1$$

$$a_{20}^* = a_{20} \cdot (t - t_0) = a_{20} \cdot \delta$$

$$a_{21}^* = a_{21} \cdot (t - t_0) = a_{21} \cdot \delta$$

$$a_{21}^{**} = \frac{a_{21}}{2} (t - t_0)^2 = \frac{a_{21}}{2} \delta^2$$

en voor de waarden van de differentiële parameters  $a_{20}$  en  $a_{21}$  in 2.2.18

$$2.2.35 \quad \left. \begin{array}{l} a_{20} = \frac{a_{20}^*}{\delta} \\ \left\{ \begin{array}{l} a_{21} = \frac{a_{21}^*}{\delta} \\ a_{21} = \frac{2a_{21}^{**}}{\delta^2} \end{array} \right. \\ \rightarrow a_{21} = \frac{1}{2} \left[ \frac{a_{21}^*}{\delta} + \frac{2a_{21}^{**}}{\delta^2} \right] \end{array} \right\} \text{voor } \delta = 1: \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{20} = a_{20}^* \\ \left\{ \begin{array}{l} a_{21} = a_{21}^* \\ a_{21} = 2a_{21}^{**} \end{array} \right. \\ \rightarrow a_{21} = \frac{1}{2} [ a_{21}^* + 2a_{21}^{**} ] \end{array} \right.$$

Over-identificatie treedt hier zowel op m.b.t.  $a_{21}$  (vanwege  $a_{21}^*$  en  $a_{21}^{**}$ ) als m.b.t.  $a_{22}^*$ , zodat nu in de identificatie-procedure nog een tweede toetsingsmogelijkheid is begrepen (de uit de steekproef-waarden opgeloste waarde van  $a_{22}^*$  moet gelijk zijn aan de afgeleide waarde  $a_{22}^* = 1$ ).

De parameter-waarden van differentie-vergelijkingen kunnen we op analoge wijze identificeren. Iteratief is na te gaan, dat oplossing 2.2.13 van differentie-vergelijking 2.2.11 voor lineair met  $t$  variërende  $v_{1,y}(t)$  wordt:

$$\begin{aligned}
 36 \quad v_{2,y}(t) &= (a_{22} + 1)^{t-t_0} \cdot v_{2,y}(t_0) + \frac{a_{20}}{a_{22}} [(a_{22} + 1)^{t-t_0} - 1] + \\
 &\quad \frac{a_{21}}{a_{22}} [(a_{22} + 1)^{t-t_0} - 1] v_{1,y}(t_0) + \\
 &\quad \frac{a_{21}}{a_{22}} \left[ \frac{1}{a_{22}} ((a_{22} + 1)^{t-t_0} - 1) - (t - t_0) \right] b_{1,y}
 \end{aligned}$$

zodat voor  $a_{22}^*$ ,  $a_{20}^*$ ,  $a_{21}^*$  en  $a_{21}^{**}$  in 2.2.33 resulteert:

$$\begin{aligned}
 a_{22}^* &= (a_{22} + 1)^{t-t_0} &= (a_{22} + 1)^\delta \\
 a_{20}^* &= \frac{a_{20}}{a_{22}} [(a_{22} + 1)^{t-t_0} - 1] &= \frac{a_{20}}{a_{22}} [(a_{22} + 1)^\delta - 1] \\
 a_{21}^* &= \frac{a_{21}}{a_{22}} [(a_{22} + 1)^{t-t_0} - 1] &= \frac{a_{21}}{a_{22}} [(a_{22} + 1)^\delta - 1] \\
 a_{21}^{**} &= \frac{a_{21}}{a_{22}} \left[ \frac{1}{a_{22}} ((a_{22} + 1)^{t-t_0} - 1) - (t - t_0) \right] &= \frac{a_{21}}{a_{22}} \left[ \frac{1}{a_{22}} ((a_{22} + 1)^\delta - 1) - \delta \right]
 \end{aligned}$$

en voor de waarden van de differentie-parameters  $a_{22}$ ,  $a_{20}$  en  $a_{21}$  in 2.2.11

$$\begin{aligned}
 37 \quad a_{22} &= a_{22}^* \frac{1}{\delta} - 1 && \text{voor } \delta = 1: && a_{22} = a_{22}^* - 1 \\
 a_{20} &= \frac{a_{20}^* \cdot a_{22}}{a_{22}^* - 1} && && a_{20} = a_{20}^* \\
 \left. \begin{aligned} a_{21} &= \frac{a_{21}^* \cdot a_{22}}{a_{22}^* - 1} \\ a_{21} &= \frac{a_{21}^{**} \cdot a_{22}}{\frac{1}{a_{22}} (a_{22}^* - 1) - \delta} \end{aligned} \right\} && && a_{21} = a_{21}^* \\
 \rightarrow a_{21} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{a_{21}^* \cdot a_{22}}{a_{22}^* - 1} + \frac{a_{21}^{**} \cdot a_{22}}{\frac{1}{a_{22}} (a_{22}^* - 1) - \delta} \right]
 \end{aligned}$$

waarbij opnieuw een toetsingsmogelijkheid is verdisconteerd m.b.t.  $a_{21}$ , althans ingeval  $\delta \neq 1$ . Voor  $\delta = 1$  is vereist  $a_{21}^{**} = 0$  en vervalt de tweede identificatiemogelijkheid van  $a_{21}$  vanwege onbepaaldheid van  $a_{21} = \frac{0 \cdot a_{22}}{0}$ .



De oplossing van differentie-vergelijking 2.2.8 waarin feedback-coëfficiënt  $a_{22} = 0$  is voor lineair met  $t$  variërende  $v_{1,y}(t)$

$$2.2.38 \quad v_{2,y}(t) = v_{2,y}(t_0) + a_{20} \cdot (t - t_0) + a_{21} \cdot (t - t_0) \cdot v_{1,y}(t_0) + \frac{a_{21}}{2} (t - t_0)(t - t_0 - 1) b_{1,y}$$

zodat voor  $a_{22}^*$ ,  $a_{20}^*$ ,  $a_{21}^*$  en  $a_{21}^{**}$  in 2.2.33 resulteert

$$a_{22}^* = 1$$

$$a_{20}^* = a_{20} \cdot (t - t_0) = a_{20} \cdot \delta$$

$$a_{21}^* = a_{21} \cdot (t - t_0) = a_{21} \cdot \delta$$

$$a_{21}^{**} = \frac{a_{21}}{2} (t - t_0)(t - t_0 - 1) = \frac{a_{21}}{2} (\delta^2 - \delta)$$

en voor de waarden van de differentie-parameters  $a_{20}$  en  $a_{21}$  in 2.2.8

$$2.2.39 \quad \begin{array}{l} a_{20} = \frac{a_{20}^*}{\delta} \\ \left\{ \begin{array}{l} a_{21} = \frac{a_{21}^*}{\delta} \\ a_{21} = \frac{2a_{21}^{**}}{\delta^2 - \delta} \end{array} \right. \\ \rightarrow a_{21} = \frac{1}{2} \left[ \frac{a_{21}^*}{\delta} + \frac{2a_{21}^{**}}{\delta^2 - \delta} \right] \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{voor } \delta = 1: \\ a_{20} = a_{20}^* \\ a_{21} = a_{21}^* \end{array}$$

waarbij ook hier een dubbele toetsingsmogelijkheid is verdisconteerd: één m.b.t.  $a_{21}$  en één m.b.t.  $a_{22}^*$ . Ingeval  $\delta = 1$  vervalt opnieuw de toetsingsmogelijkheid m.b.t.  $a_{21}$ .

Blijkens 2.2.37 en 2.2.39 ondergaan de uitdrukkingen voor differentie-parameters  $a_{22}$ ,  $a_{20}$  en  $a_{21}$  een sterke vereenvoudiging, indien we het tijdsverschil  $\delta$  tussen de voor identificatie gebruikte steekproef-waarden laten overeenkomen met het tijdsverschil in de differentie-vergelijking zelf, d.w.z.  $\delta = 1$ ; we kunnen  $a_{22}$ ,  $a_{20}$  en  $a_{21}$  dan veel direkter

identificeren middels

$$2.2.40 \quad v_{2,y}(t+1) = a_{20}^* + a_{21}^* \cdot v_{1,y}(t) + a_{22}^* \cdot v_{2,y}(t)$$

waaruit rechtstreeks in verband met differentie-vergelijking 2.2.11 resp. 2.2.8 zelf en dus zonder de omweg over oplossingsvergelijkingen volgt:

$$2.2.41 \quad \begin{cases} a_{22} = a_{22}^* - 1 & \text{voor 2.2.11 waarin } a_{22} \neq 0 \\ a_{22}^* = 1 & \text{voor 2.2.8 waarin } a_{22} = 0 \\ a_{20} = a_{20}^* \\ a_{21} = a_{21}^* \end{cases}$$

Het voordeel van de identificatie-procedure met  $\delta = 1$  in het differentie-geval is, dat in de plaats van integratie in het differentiele geval zelfs geen sommatie van  $v_{1,y}(t)$ -waarden meer nodig is, en wel omdat in het differentie-geval de toename in  $v_{2,y}(t)$  tussen  $t$  en  $t+1$  slechts afhankelijk wordt gesteld van de éne  $v_{1,y}(t)$ -waarde op het éne eerdere tijdstip  $t$ . Iedere  $v_{1,y}(t)$ -waarde in wat voor tijdfunctie-segment  $v_{1,y}[t_0, t_1]$  dan ook (lineaire maar ook onverschillig welke niet-lineaire) is m.a.w. zonder sommatie rechtstreeks bruikbaar voor identificatie van de differentie-parameters.

De oplossingsrelatie 2.2.7 met 2.2.9, 2.2.13, 2.2.19 en 2.2.21 als bijzondere gevallen voor een lineaire differentie- c.q. differentiele relatie en met 2.2.38, 2.2.36, 2.2.25 en 2.2.26 als een verdere verbijzondering voor het geval van een lineair tijdfunctie-segment  $v_{1,y}[t_0, t_1]$ , waar bij de besproken identificatie-procedure van werd uitgegaan, kan gemakkelijk multivariaat worden uitgebreid.

$$2.2.42 \quad A_y v_n^y(t) = s(v_n^y(t_0), v_1^y[t_0, t], v_2^y[t_0, t], \dots)$$

Evenzo kunnen de bijzondere gevallen en de identificatie-procedure gemakkelijk multivariaat worden uitgebreid. 2.2.42 is in feite te beschouwen als een betrekkelijk algemene formulering voor een verklaringsrelatie  $A_y$ . De betekenis van toestand-ruimte-modellen, waar de systeem-methodologie vooral mee werkt en waar in hoofdstuk 3 ruime aandacht aan wordt

geschonken, zal onder meer blijken, wanneer 2.2.42 zelf weer wordt afgeleid als een bijzonder geval van de response-functie  $\rho$  in het kader van zo'n toestand-ruimte-model. Een toestand-ruimte-model laat toe, dat  $\rho$  behalve multivariaat ook multirelationeel is, zodat verschillende verklaaringsrelaties tegelijk opgenomen kunnen worden. In hoofdstuk 3 zal tevens in dat algemenere kader meer gedetailleerd aandacht worden besteed aan identificatie- en schattingsprocedures. Bovendien zullen begrippen als lineair, tijd-invariant, geheugenloos, etc. die hier slechts informeel konden worden geïntroduceerd, een nauwkeurige definitie krijgen.

### 2.3 Cross-sectioneel en tijdserieel onderzoek van verklaaringsrelaties met inbegrip van feedback-perikelen

#### Geheugenloze relaties als afgeleide relaties onder de evenwichtsassumptie

Nu verschillende verklaaringsrelaties met geheugenwerking de revue zijn gepasseerd, zal om te beginnen worden nagegaan of daaruit onder de assumptie van evenwicht, d.w.z.  $v_1^y(t + \Delta t) = v_1^y(t) = c_1^y$  (constantie over de tijd per eenheid), inderdaad geheugenloze relaties resulteren in dezelfde variabelen en wat dergelijke geheugenloze relaties dan zeggen over de eigenlijke onderliggende relaties mét geheugenwerking. Dat is vooral van belang, omdat het huidige sociaal-wetenschappelijk onderzoek nog in zo sterke mate beperkt blijft tot louter cross-sectioneel onderzoek, waarin wel geheugenloze relaties getoetst kunnen worden maar niet rechtstreeks de eigenlijke onderliggende relaties mét geheugenwerking. We beperken ons tot lineaire tijd-invariante relaties.

onderliggende relatie  
met geheugenwerking

geheugenloze afleiding onder  
de evenwichtsassumptie

tijd-lagged relatie ( $\delta = 1$ ):

$$v_2^y(t + 1) = a_{20} + a_{21} \cdot v_1^y(t)$$

$$v_2^y(t) = a_{20} + a_{21} \cdot v_1^y(t)$$

differentie-relatie ( $a_{22} = 0$ ):

$$v_2^y(t + 1) - v_2^y(t) = a_{20} + a_{21} \cdot v_1^y(t)$$

$$0 = a_{20} + a_{21} \cdot v_1^y(t)$$

differentie-relatie ( $a_{22} \neq 0$ ):

$$v_2^y(t + 1) - v_2^y(t) = a_{20} + a_{21} \cdot v_1^y(t) + a_{22} \cdot v_2^y(t)$$

$$v_2^y(t) = \frac{a_{20}}{-a_{22}} + \frac{a_{21}}{-a_{22}} \cdot v_1^y(t)$$

4. differentieële relatie ( $a_{22} = 0$ ):

$$\frac{dv_2^y(t)}{dt} = a_{20} + a_{21} \cdot v_1^y(t) \qquad 0 = a_{20} + a_{21} \cdot v_1^y(t)$$

5. differentieële relatie ( $a_{22} \neq 0$ ):

$$\frac{dv_2^y(t)}{dt} = a_{20} + a_{21} \cdot v_1^y(t) + a_{22} \cdot v_2^y(t) \qquad v_2^y(t) = \frac{a_{20}}{-a_{22}} + \frac{a_{21}}{-a_{22}} \cdot v_1^y(t)$$

Volledige identificatie geeft louter cross-sectioneel onderzoek ons in geval 1., waar de hypothetische onderliggende verklaringsrelatie een zuiver tijd-lagged relatie is. De parameters van de geheugenloze afleiding onder de evenwichtsassumptie zijn daar geheel gelijk aan de parameters van de onderliggende verklaringsrelatie en de waarden van de laatste kunnen dan ook zonder meer middels die van de geheugenloze afleiding geïdentificeerd worden. Dat blijkt ook, wanneer we voor discrete tijd 1. zien als een bijzonder geval van 3. met  $a_{22} = -1$ . De parameters  $\alpha_{20} = \frac{a_{20}}{-a_{22}}$  en  $\alpha_{21} = \frac{a_{21}}{-a_{22}}$  in de geheugenloze afleiding onder 3. gaan voor  $a_{22} = -1$  over in  $a_{20}$  en  $a_{21}$ , zodat de laatste onder hypothese  $a_{22} = -1$  volledig identificeerbaar zijn middels  $\alpha_{20}$  en  $\alpha_{21}$ . De toetsing van een tijd-lagged relatie is aan de hand van tijdserie-data uiteraard veel diepgaander dan in cross-sectioneel onderzoek. Met name de lengte van de tijd-lag  $\delta$  wordt niet getoetst in cross-sectioneel onderzoek. In feite kan deze iedere waarde aannemen, terwijl toch dezelfde afgeleide relatie resulteert.

Blijkens 2. en 4. is cross-sectioneel onderzoek vrij zinloos bij een onderliggende differentie- of differentieële relatie waarin feedback-coëfficiënt  $a_{22}$  geheel afwezig is:  $a_{22} = 0$ . De afhankelijke variabele  $v_2^y(t)$  valt dan nl. onder de evenwichtsassumptie helemaal weg en daarmee ook een eventuele geheugenloze relatie in diezelfde variabele. Toetsing en identificatie van de verklaringsrelaties onder 2. en 4. vereisen, dat we de evenwichtsassumptie laten vallen en tijdserie-data verzamelen. Aangezien in dit bivariate geval de onafhankelijke variabele  $v_1^y(t)$  onder de evenwichtsassumptie de constante waarde  $c_1 = \frac{a_{20}}{-a_{21}}$  aanneemt, hetgeen betekent dat alle onderzochte eenheden gelijk zouden moeten zijn op die variabele, moet in dit bivariate geval de evenwichtsassumptie in het algemeen worden verworpen. Meestal zal immers al van te voren bekend

zijn, dat de eenheden van elkaar verschillen.

Gedeeltelijke identificatie is voor een onderliggende differentie- of differentiële relatie mogelijk in cross-sectioneel onderzoek, indien feedback-coëfficiënt  $a_{22} \neq 0$  zoals onder 3. en 5. Onder de assumptie van evenwicht, althans stabiel evenwicht maar instabiel evenwicht is voor meerdere eenheden tegelijk moeilijk aan te nemen, is negatieve feedback vereist:  $a_{22} < 0$  (onder 3. beperkt tot  $-1 < a_{22} < 0$  of  $-2 < a_{22} < -1$ ; zie fig. 2.2.3). De noemers in  $\alpha_{20} = \frac{a_{20}}{-a_{22}}$  en  $\alpha_{21} = \frac{a_{21}}{-a_{22}}$  zijn dan positief en de geïdentificeerde waarden van  $\alpha_{20}$  en  $\alpha_{21}$  geven de relatieve grootte van  $a_{20}$  en  $a_{21}$  (alleen voor  $a_{22} = -1$  gaan  $\alpha_{20}$  en  $\alpha_{21}$  over in  $a_{20}$  en  $a_{21}$ ). Men kan dit resultaat gemakkelijk uitbreiden tot multivariate differentie- en differentiële relaties (47): de waarden van de coëfficiënten  $\alpha_{ni}$  in geheugenloze afleiding

$$2.3.2 \quad v_n^y(t) = \alpha_{n0} + \alpha_{n1} \cdot v_1^y(t) + \alpha_{n2} \cdot v_2^y(t) + \dots$$

geven de relatieve grootte van de corresponderende parameter-waarden  $a_{ni}$ . Dankzij de aanname van impliciete feedback-mechanismen en het negatieve karakter daarvan kunnen we m.a.w. de relatieve invloed van meerdere onafhankelijke variabelen t.o.v. elkaar nagaan, ook al is dat niet mogelijk voor het feedback-effect zelf. De toetsende waarde van cross-sectioneel onderzoek is echter uiterst beperkt. Met name wordt niet nagegaan, of we inderdaad met een differentiaal-quotient

$\frac{dv_n^y(t)}{dt}$  dan wel differentie  $v_n^y(t+1) - v_n^y(t)$  te doen hebben. Ook is het mogelijk dat het in feite gaat om een differentie  $v_n^y(t+\delta) - v_n^y(t)$  met andere tijd-lag dan  $\delta = 1$ .

Nu is de beperkte waarde van cross-sectioneel onderzoek zelfs in de gevallen 1., 3. en 5. niet alleen een gevolg van het feit, dat de afgeleide vergelijking steeds dezelfde eenvoudige lineaire vorm

$$2.3.3 \quad v_2^y(t) = \alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot v_1^y(t)$$

aanneemt, waardoor het alleen op basis daarvan onmogelijk is te onderscheiden tussen 1., 3. met varianten en 5. Cross-sectioneel onderzoek weet ook niet te kiezen tussen beide relaties met verschillende

predictieve richting, die men telkens kan vormen (48). Naast de aangegeven relatie onder 3. met  $v_1^y(t)$  als onafhankelijke variabele kan men ook  $v_2^y(t)$  als onafhankelijke variabele nemen

$$v_1^y(t+1) - v_1^y(t) = b_{10} + b_{12} \cdot v_2^y(t) + b_{11} \cdot v_1^y(t) \quad (\text{differentie-vergelijking})$$

$$v_1^y(t) = \frac{b_{10}}{-b_{11}} + \frac{b_{12}}{-b_{11}} \cdot v_2^y(t) \quad (\text{geheugenloze afleiding})$$

met de volgende cross-sectioneel identificeerbare vorm

$$2.3.4 \quad v_1^y(t) = \beta_{10} + \beta_{12} \cdot v_2^y(t)$$

Het gebruik van cross-sectionele data onder de evenwichtsassumptie geeft geen antwoord op de vraag, of de relatie met parameters  $a_{20}$ ,  $a_{21}$  en  $a_{22}$  of die met parameters  $b_{10}$ ,  $b_{12}$  en  $b_{11}$  van toepassing is, zodat evenzeer onduidelijk blijft, welke set parameters voor identificatie in aanmerking komt en welk tweetal geheugenloze coëfficiënten dus als uitgangspunt genomen moet worden:  $\alpha_{20}$  en  $\alpha_{21}$  of  $\beta_{20}$  en  $\beta_{21}$ . Dit is het bekende predictor-keuze-probleem bij geheugenloze verklaringsrelaties -  $v_1^y(t)$  predictor voor  $v_2^y(t)$  of omgekeerd? - waar reeds eerder naar werd verwezen en waarvan vooral de stochastische versie ("choice of regression") paradoxale kanten vertoont. In het deterministische geval betreft het nog twee functies die elkaars inverse zijn: 2.3.4 afleidbaar uit 2.3.3 en omgekeerd. Mocht 2.3.3 niet predictief zijn maar wel 2.3.4 dan kunnen de predictieve coëfficiënten op eenvoudige wijze uit de niet-predictieve worden afgeleid middels:  $\beta_{10} = \frac{\alpha_{20}}{-\alpha_{21}}$  en  $\beta_{12} = \frac{1}{\alpha_{21}}$ . In het stochastische geval betreft het twee afzonderlijke niet-reversibele relaties, waarvan de coëfficiënten afzonderlijk geschat moeten worden.  $\beta_{12}$  geschat met  $v_2^y(t)$  als regressor en  $\beta_{12}^* = \frac{1}{\alpha_{21}}$  vanwege  $\alpha_{21}$  dus met  $v_1^y(t)$  als regressor zijn nu verschillende grootheden. "Asking "Which elasticity should we choose?" Mackeprang replied "Both!" and this is the last word of his book"((49), maar latere economen namen geen genoegen met een dergelijke dubbele definitie van prijs-elasticiteit.

Zo'n zelfde keuze-probleem doet zich voor in de test-theorie m.b.t. de mentale leeftijd MA behorend bij een test-skore. Op zichzelf kunnen

we twee stochastische relaties definiëren tussen test-skore  $v_2^y(t)$  en werkelijke leeftijd  $v_1^y(t)$ , bijv. lineaire maar dat is niet essentieel:

$$\left. \begin{aligned} 2.3.5 \quad E(v_2^y(t) | v_1^y(t)) &= f(v_1^y(t)) = \alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot v_1^y(t) \\ 2.3.6 \quad E(v_1^y(t) | v_2^y(t)) &= g(v_2^y(t)) = \beta_{10} + \beta_{12} \cdot v_2^y(t) \end{aligned} \right\} g \neq f^{-1}$$

Moeten we de mentale leeftijd bij een skore beschouwen als de gemiddelde, d.w.z. "verwachte" (expected) leeftijd in de skore-groep

$$MA(v_2^y(t)) = E(v_1^y(t) | v_2^y(t)) = \beta_{10} + \beta_{12} \cdot v_2^y(t)$$

of als de leeftijd van de leeftijdsgroep met die skore als gemiddelde skore

$$MA(v_2^y(t)) = f^{-1} [E(v_2^y(t) | v_1^y(t))] = \frac{\alpha_{20}}{-\alpha_{21}} + \frac{1}{\alpha_{21}} \cdot v_2^y(t)$$

Bij schatting wordt het probleem, moeten we  $\beta_{10}$  en  $\beta_{12}$  schatten met de test-skore  $v_2^y(t)$  als regressor of  $\beta_{10}^* = \frac{\alpha_{20}}{-\alpha_{21}}$  en  $\beta_{12}^* = \frac{1}{\alpha_{21}}$  met de leeftijd  $v_1^y(t)$  als regressor? In dit speciale geval moet de keuze duidelijk op 2.3.5 met coëfficiënten  $\alpha_{20}$  en  $\alpha_{21}$  en dus op  $\beta_{10}^*$  en  $\beta_{12}^*$  vallen, omdat in een onderliggende verklaringsrelatie hoogstens de werkelijke biologische leeftijd als oorzaak (predictor) kan optreden van test-skore maar niet omgekeerd. In andere gevallen is echter tijdserieel onderzoek vereist van mogelijke onderliggende verklaringsrelaties om tot een verantwoorde keuze van predictor (regressor) te komen.

### Multirelationele verklaringsmodellen met en zonder geheugenloze feedback-loops

Stel nu echter, dat ieder van beide relaties 2.3.3 en 2.3.4 zou kunnen bogen op zo'n onderliggende verklaringsrelatie: in de éne  $v_1^y(t)$  predictor van  $v_2^y(t)$  en tegelijk in de andere  $v_2^y(t)$  predictor van  $v_1^y(t)$ . Zowel de onderliggende relaties als de geheugenloze afleidingen vormen dan een multirelationeel model met feedback-loop. Terwijl de coëfficiënten

van het onderliggende model nog identificeerbaar zouden zijn (met behulp van tijdserie-data), zijn die van het geheugenloze model dat niet meer. Als 2.3.3 en 2.3.4 nl. tegelijk gelden, dan volgt

$$v_2^y(t) = \frac{\alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot \beta_{10}}{1 - \alpha_{21} \cdot \beta_{12}} = c_2 \quad \text{en} \quad v_1^y(t) = \frac{\beta_{10} + \beta_{12} \cdot \alpha_{20}}{1 - \alpha_{21} \cdot \beta_{12}} = c_1$$

zodat alle onderzochte eenheden behalve constante  $v_1^y(t)$ -waarden (constantie over de tijd) ook identieke constante  $v_1^y(t)$ -waarden (constantie over eenheden) zouden moeten aannemen. Dit vormt een bijzonder krachtige toetsingsmogelijkheid voor het geheugenloze model maar maakt het tegelijk niet-identificeerbaar. De beide constante waarden  $c_2$  en  $c_1$  geven nl. onvoldoende informatie om het viertal onbekende coëfficiënten  $\alpha_{20}$ ,  $\alpha_{21}$ ,  $\beta_{10}$  en  $\beta_{12}$  te identificeren. De oorzaak voor die niet-identificeerbaarheid ligt in de geheugenloze feedback -  $v_2^y(t)$  c.q.  $v_1^y(t)$  direct of indirect afhankelijk van zichzelf. Zoals dadelijk zal blijken leidt feedback mét geheugenwerking -  $v_2^y(t)$  c.q.  $v_1^y(t)$  afhankelijk van waarden van dezelfde variabele op voorgaande tijdstippen - niet tot dergelijke identificatie-problemen.

Dit identificatie-probleem als gevolg van geheugenloze feedback wordt ook niet per se opgelost door het optreden van additionele variabelen in de vergelijkingen. Stel, dat aan 2.3.3 de term  $\alpha_{23} \cdot v_3^y(t)$  en aan 2.3.4 de term  $\beta_{13} \cdot v_3^y(t)$  werd toegevoegd in additionele variabele  $v_3^y(t)$ . Er zou dan volgen

$$v_2^y(t) = \frac{\alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot \beta_{10}}{1 - \alpha_{21} \cdot \beta_{12}} + \frac{\alpha_{21} \cdot \beta_{13} + \alpha_{23}}{1 - \alpha_{21} \cdot \beta_{12}} v_3^y(t) = c_{20} + c_{23} \cdot v_3^y(t)$$

$$v_1^y(t) = \frac{\beta_{10} + \beta_{12} \cdot \alpha_{20}}{1 - \alpha_{21} \cdot \beta_{12}} + \frac{\beta_{12} \cdot \alpha_{23} + \beta_{13}}{1 - \alpha_{21} \cdot \beta_{12}} v_3^y(t) = c_{10} + c_{13} \cdot v_3^y(t)$$

De  $v_1^y(t)$ -waarden zijn vanwege het optreden van de additionele variabele  $v_3^y(t)$  niet meer noodzakelijk constant maar oplossing van dit tweetal vergelijkingen voor de vier coëfficiënten  $c_{20}$ ,  $c_{23}$ ,  $c_{10}$  en  $c_{13}$  geeft niettemin onvoldoende informatie om het zestal onbekende coëfficiënten  $\alpha_{20}$ ,  $\alpha_{21}$ ,  $\alpha_{23}$ ,  $\beta_{10}$ ,  $\beta_{12}$ ,  $\beta_{13}$  te identificeren.

Stelsels vergelijkingen met geheugenloze feedback worden in de econometrie interdependent genoemd. Het interdependentie-probleem heeft de



ontwikkeling van de econometrie minstens zo sterk beïnvloed als het regressie-keuze-probleem. Het blijkt, dat de coëfficiënten in interdependente stelsels zoals

$$2.3.7 \quad \begin{aligned} v_1^y(t) &= \alpha_{10} + \alpha_{12} \cdot v_2^y(t) + e_1^y(t) \\ v_2^y(t) &= \alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot v_1^y(t) + e_2^y(t) \end{aligned}$$

waarin nu ook ruimte is gelaten voor error-termen  $e_i^y(t)$  die invloeden van niet-opgenomen variabelen en meet-fouten samenvatten, pas identificeerbaar worden, als we op speciale wijze een speciaal soort nieuwe variabelen toevoegen, bijv.

$$2.3.8 \quad \begin{aligned} v_1^y(t) &= \alpha_{10} + \alpha_{12} \cdot v_2^y(t) + \alpha_{13} \cdot v_3^y(t) + e_1^y(t) \\ v_2^y(t) &= \alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot v_1^y(t) + \alpha_{24} \cdot v_4^y(t) + e_2^y(t) \end{aligned}$$

De nieuwe variabelen hoeven geen geheugenwerking te bevatten t.o.v. de overige variabelen, maar wel is vereist dat zij uitsluitend als predictor en nooit als predictand optreden t.o.v. de overige variabelen. Het predictor-keuze-probleem moet dus telkens uniek oplosbaar zijn ten gunste van ieder van de toegevoegde variabelen; m.b.t.  $v_3^y(t)$  mag er bijv. geen onderliggende verklaringsrelatie zijn met 2.3.9 als geheugenloze afleiding

$$2.3.9 \quad v_3^y(t) = \beta_{30} + \beta_{31} \cdot v_1^y(t) + \beta_{32} \cdot v_2^y(t) + e_3^y(t)$$

Dergelijke variabelen, die in onderliggende verklaringsrelaties alleen als predictor (oorzaak) en nooit als predictand (gevolg) optreden t.o.v. de overige variabelen en daarom geheel buiten de feedback-loops staan, worden in de econometrie exogene variabelen (in de systeem-methodologie inputwaarde-variabelen) genoemd en onderscheiden van de overige z.g. endogene variabelen. Noodzakelijke voorwaarde voor identificatie is nu, dat in iedere vergelijking het aantal weggelaten variabelen (endogene en exogene) minstens gelijk is aan het totale aantal endogene variabelen (het aantal vergelijkingen) min één (50). Hieraan is juist voldaan in 2.3.8 maar niet in 2.3.7. Stelsel 2.3.8 wordt daarom juist-identificeer-

baar genoemd en 2.3.7 niet-identificeerbaar.

Identificeerbaarheid van interdependente stelsels als 2.3.8 impliceert overigens niet, dat we op de volgende wijze tot formulering van stochastische verklaringsrelaties zouden kunnen overgaan:

$$10 \quad E(v_1^y(t) | v_2^y(t), v_3^y(t)) = \alpha_{10} + \alpha_{12} \cdot v_2^y(t) + \alpha_{13} \cdot v_3^y(t) \\ E(v_2^y(t) | v_1^y(t), v_4^y(t)) = \alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot v_1^y(t) + \alpha_{24} \cdot v_4^y(t)$$

evenmin als dat mogelijk is m.b.t. niet-identificeerbare stelsels als 2.3.7:

$$11 \quad E(v_1^y(t) | v_2^y(t)) = \alpha_{10} + \alpha_{12} \cdot v_2^y(t) \\ E(v_2^y(t) | v_1^y(t)) = \alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot v_1^y(t)$$

Zowel 2.3.10 als 2.3.11 leveren moeilijkheden op.

De in geheugenloze feedback-loops betrokken endogene variabelen kunnen nl. niet zo maar als predictoren in stochastische zin worden beschouwd. Dit hangt hiermee samen, dat uit 2.3.10 en 2.3.11 volgt voor de error-termen in 2.3.8 en 2.3.7

$$12 \quad E(e_1^y(t)) = 0; E(e_1^y(t) \cdot v_2^y(t)) = 0; E(e_1^y(t) \cdot v_3^y(t)) = 0 \\ E(e_2^y(t)) = 0; E(e_2^y(t) \cdot v_1^y(t)) = 0; E(e_2^y(t) \cdot v_4^y(t)) = 0$$

Stochastische verklaringsrelaties laten weliswaar error-komponenten toe in de waarden van de afhankelijke variabele, maar hun wetmatigheidskarakter komt juist hierin tot uiting, dat die error-komponenten aan bepaalde random-voorwaarden moeten voldoen, i.h.h.gemiddeld 0 en niet samenhangend met minstens de betrokken onafhankelijke variabelen. Bij een geheugenloze feedback-loop kan aan die laatste voorwaarde in het algemeen niet zijn voldaan, hetgeen intuïtief duidelijk wordt in 2.3.7 en 2.3.8, als men ziet dat de error-komponent  $e_1^y(t)$  van  $v_1^y(t)$  langs de tweede vergelijking in  $v_2^y(t)$  terecht komt en evenzo de error-komponent  $e_2^y(t)$  van  $v_2^y(t)$  langs de eerste vergelijking in  $v_1^y(t)$ :  $E(e_1^y(t) \cdot v_2^y(t)) \neq 0$  en  $E(e_2^y(t) \cdot v_1^y(t)) \neq 0$ . Endogene variabelen betrokken in geheugenloze feedback-loops missen dus in het algemeen de error-onaf-

hankelijkheid t.o.v. elkaar om als predictoren t.o.v. elkaar te kunnen optreden in stochastische verklaringsrelaties en zijn om dezelfde reden evenmin te gebruiken als regressors t.o.v. elkaar in normale kleinste-kwadraten schattingsprocedures (51).

Datzelfde geldt gelukkig niet voor exogene variabelen. Er is niets dat in het algemeen exogene variabelen, i.c.  $v_3^y(t)$  en  $v_4^y(t)$ , zou beletten ongecorrleerd te zijn met error-komponenten  $e_1^y(t)$  en  $e_2^y(t)$ , zodat

$$2.3.13 \quad E(v_1^y(t) | v_3^y(t), v_4^y(t)) = \gamma_{10} + \gamma_{13} \cdot v_3^y(t) + \gamma_{14} \cdot v_4^y(t)$$

$$E(v_2^y(t) | v_3^y(t), v_4^y(t)) = \gamma_{20} + \gamma_{23} \cdot v_3^y(t) + \gamma_{24} \cdot v_4^y(t)$$

zinnige hypothesen vormen in coëfficiënten  $\gamma_{ij}$ , die wel zijn te schatten met normale kleinste-kwadraten regressie-procedures. Aangezien verder de coëfficiënten  $\gamma_{ij}$  afleidbaar zijn uit de coëfficiënten  $\alpha_{ij}$  door oplossing van 2.3.8 voor  $v_1^y(t)$  en  $v_2^y(t)$  kan men stellen dat de expliciete geheugenloze feedback-loop in 2.3.8 - waardoor de endogene variabelen  $v_1^y(t)$  en  $v_2^y(t)$  op ieder tijdstip  $t$  t.o.v. elkaar in een vast evenwicht worden gehouden - behouden blijft in de coëfficiënten  $\gamma_{ij}$  hoewel slechts impliciet. "The usual terminology is to regard such endogeneous variables as "jointly determined" by the other variables in the model but while this fairly describes the arithmetic involved, it is not a fair description of the underlying causal structure ... In the supply and demand example, quantity and price are jointly determined by consumer income, among other things. The model does not give price as a cause of quantity or quantity as a cause of price, or, if it does, it does so symmetrically", aldus Fisher (52). Het stelsel vergelijkingen in de afgeleide  $\gamma_{ij}$ -coëfficiënten wordt als gereduceerde vorm onderscheiden van structurele vorm (2.3.8) in de oorspronkelijke  $\alpha_{ij}$ -coëfficiënten.

Wold, die zich zowel met het regressie-keuze- als interdependentie-probleem intensief heeft beziggehouden, nam geen genoegen met de verschuiving van de belangstelling naar de coëfficiënten  $\gamma_{ij}$  ten koste van de eveneens geheugenloze maar toch dichter bij de onderliggende verklaringsrelaties blijvende coëfficiënten  $\alpha_{ij}$ . Hij bleek in staat predictiviteit in stochastische zin ook aan geheugenloze feedback-variabelen met bijbehorende coëfficiënten  $\alpha_{ij}$  te verlenen door hun werkelijke

waarden  $v_j^y(t)$  te vervangen door de verwachte waarden  $v_j^y(t)^*$  (53). Voor 2.3.8 op de volgende wijze:

$$2.3.14 \quad E(v_1^y(t) | v_2^y(t)^*, v_3^y(t)) = \alpha_{10} + \alpha_{12} \cdot v_2^y(t)^* + \alpha_{13} \cdot v_3^y(t)$$

$$E(v_2^y(t) | v_1^y(t)^*, v_4^y(t)) = \alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot v_1^y(t)^* + \alpha_{14} \cdot v_4^y(t)$$

met daarin

$$v_1^y(t)^* = E(v_1^y(t) | v_3^y(t), v_4^y(t)) \text{ volgens 2.3.13 waarin coëfficiënten } \gamma_{ij}$$

$$v_2^y(t)^* = E(v_2^y(t) | v_3^y(t), v_4^y(t)) \quad " \quad " \quad " \quad " \quad "$$

Hiervoor geldt niet het bezwaar van 2.3.10 en is de symmetrie tussen  $v_1^y(t)$  en  $v_2^y(t)$  waarvan Fisher sprak doorbroken, omdat de predictand  $v_1^y(t)$  c.q.  $v_2^y(t)$  een andere is dan de predictor  $v_1^y(t)^*$  c.q.  $v_2^y(t)^*$ . Het belang van deze z.g. REID (reformulated interdependent)-stelsels van Wold is vooral hierin gelegen, dat het mogelijk blijkt het wetmatigheidskarakter van stochastische onderliggende verklaringsrelaties met feedback-loops te behouden voor hun geheugenloze afleidingen, zodat ook de laatste gebruikt kunnen worden voor het uitvoeren van (geheugenloze) predicties. Als verder behalve de coëfficiënten  $\gamma_{ij}$ , die vanzelf identificeerbaar zijn, ook de coëfficiënten  $\alpha_{ij}$  identificeerbaar zijn - geschat worden de  $\gamma_{ij}$  volgens normale kleinste-kwadraten regressie en de  $\alpha_{ij}$  op basis van de  $\gamma_{ij}$  volgens meer ingewikkelde methoden zoals in detail behandeld door o.a. Johnston (54) -, geven de zo cross-sectioneel geschatte waarden van de  $\alpha_{ij}$  weer de (geschatte) relatieve grootte van de corresponderende parameter-waarden  $a_{ij}$  in de onderliggende verklaringsrelaties met geheugenwerking.

De kleinste-kwadraten schatting van de  $\gamma_{ij}$ -coëfficiënten wordt de LSNR (Least Squares No Restrictions)-schatting genoemd. Op basis van de vervolgens geschatte  $\alpha_{ij}$ -coëfficiënten kan men de  $\gamma_{ij}$ -coëfficiënten opnieuw schatten. Deze schatting wordt de REDUCED-FORM-schatting genoemd en verdient bij een juiste specificatie van de structurele vorm de voorkeur boven de LSNR schatting vanwege een grotere nauwkeurigheid. Gebruikt men de REDUCED-FORM schatting voor het uitvoeren van predicties, dan wordt daarbij rekening gehouden met de restricties, die in de structurele vorm zijn vervat en welke zelf weer op de aangegeven wijze in

verband staan met de parameter-waarden  $a_{ij}$  van de onderliggende verklaringsrelaties met geheugenwerking.

Identificeerbaarheid vereiste de introductie van voldoende exogene variabelen. Van belang is, dat we de rol van exogene variabelen net zo goed kunnen laten vervullen door lagged-endogene variabelen, d.w.z. endogene variabelen maar met een eerdere tijdsaanduiding. Zo is  $v_1^y(t-1)$  t.o.v. endogene variabele  $v_1^y(t)$  lagged-endogene variabele met lag 1, hetzelfde  $v_1^y(t)$  t.o.v.  $v_1^y(t+1)$ , etc. Het predictor-keuze-probleem is vanzelf uniek oplosbaar ten gunste van toegevoegde lagged-endogene variabelen, omdat we onder de causaliteitsassumptie immers geen invloed toelaten van het heden op het verleden, de toekomst op het heden, etc. De identificatie-voorwaarde gaat nu als volgt luiden: in iedere vergelijking moet het aantal weggelaten variabelen (current-endogene, lagged endogene, current-exogene en lagged exogene) minstens gelijk zijn aan het totale aantal current-endogene variabelen (het aantal vergelijkingen) min één. We kunnen de identificatie-voorwaarde ook nog als volgt formuleren, waarbij we lagged-endogene, current-exogene en lagged-exogene variabelen tezamen gepredetermineerde variabelen noemen: in iedere vergelijking moet het aantal weggelaten gepredetermineerde variabelen minstens gelijk zijn aan het aantal opgenomen current-endogene variabelen min één (55). In de volgende stelsels is aan de identificatie-voorwaarde voldaan:

$$2.3.15 \quad \begin{aligned} v_1^y(t) &= \alpha_{10} + \alpha_{12} \cdot v_2^y(t) + \alpha_{13} \cdot v_3^y(t) + e_1^y(t) \\ v_2^y(t) &= \alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot v_1^y(t) + \alpha_{22} \cdot v_2^y(t-1) + e_2^y(t) \end{aligned}$$

met

$$\left. \begin{aligned} v_1^y(t) \\ v_2^y(t) \end{aligned} \right\} \quad \text{current-endogene variabelen}$$

$$\left. \begin{aligned} v_3^y(t) &: \text{current-exogene variabele} \\ v_2^y(t-1) &: \text{lagged-endogene variabele} \end{aligned} \right\} \quad \text{gepredetermineerde variabelen}$$

$$v_1^y(t) = \alpha_{10} + \alpha_{12} \cdot v_2^y(t) + \alpha_{13} \cdot v_3^y(t - 1) + e_1^y(t)$$

$$v_2^y(t) = \alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot v_1^y(t) + \alpha_{22} \cdot v_2^y(t - 1) + e_2^y(t)$$

met

$$\left. \begin{array}{l} v_1^y(t) \\ v_2^y(t) \end{array} \right\} \text{ current-endogene variabelen}$$

$$\left. \begin{array}{l} v_3^y(t - 1): \text{ lagged-exogene variabele} \\ v_2^y(t - 1): \text{ lagged-endogene variabele} \end{array} \right\} \text{ gepredetermineerde variabelen}$$

Formulering als stochastische verklaringsrelaties op de wijze van 2.3.13 en 2.3.14 en schatting van de  $\alpha_{ij}$  op basis van normale kleinste-kwadraten schattingen van de  $\gamma_{ij}$  vereist hier uiteraard niet alleen  $E(e_1^y(t) \cdot v_3^y(t)) = 0$  c.q.  $E(e_1^y(t) \cdot v_3^y(t - 1)) = 0$  (geen correlatie tussen error-termen en exogene variabelen) maar evenzeer  $E(e_2^y(t) \cdot v_2^y(t - 1)) = 0$  (geen correlatie tussen error-termen en lagged-endogene variabelen). Vooral het laatste levert vaak moeilijkheden op. Voor  $E(e_2^y(t) \cdot v_2^y(t - 1)) = 0$  moet o.a. voldaan zijn aan  $E(e_2^y(t + 1) \cdot e_2^y(t)) = 0$  (56) en dat betekent afwezigheid van correlatie tussen opeenvolgende error-komponenten van de met lag voorkomende endogene variabelen (geen autocorrelatie bij die variabelen). Dat autocorrelatie vaak moeilijk te vermijden is, zal intuïtief duidelijk zijn, wanneer men zich realiseert, dat error-komponenten invloeden van niet-opgenomen variabelen samenvatten. Als de waarden van die variabelen nu i.p.v. onvoorspelbaar heen en weer te fluctueren de neiging vertonen telkens over langere perioden op hetzelfde niveau te blijven, is autocorrelatie het gevolg en wel des te sterker, naarmate de afstand tussen twee tijdstippen  $t$  en  $t + 1$  (de eenheidsperiode) kleiner wordt genomen (een argument dus voor een niet al te kleine eenheidsperiode). Is niettemin aan de assumptie van non-autocorrelatie voldaan en daarvoor zijn statistische toetsen beschikbaar of zijn correctie-procedures voor autocorrelatie toegepast, dan vormen lagged-endogene variabelen een aantrekkelijk alternatief voor het verkrijgen van identificeerbaarheid zonder de noodzaak alleen daarvoor nieuwe variabelen in te moeten voeren.

Uiteraard zijn bij een stelsel met lagged-endogene variabelen voor

schatting van de coëfficiënten  $\gamma_{ij}$  en  $\alpha_{ij}$  tijdserie-data nodig en moeten we de evenwichtsassumptie laten vallen voor de met lag voorkomende endogene variabelen, omdat het lag-karakter anders slechts schijn zou zijn. De aanwezigheid van geheugenloze feedback tussen die variabelen kan dan ook niet meer een artefact zijn van evenwicht in ieder van die variabelen op zich maar hoogstens van zodanig snelle feedback-mechanismen, dat die geheel vallen binnen de meet-perioden (prijzen, hoeveelheden, etc. worden altijd gemeten als gemiddelden over jaren, weken, etc.) en die variabelen dus t.o.v. elkaar in evenwicht worden gehouden.

Stel nu echter, dat we de lagged-endogene variabelen niet gebruiken als alternatief voor exogene variabelen maar rechtstreeks om van de lastige geheugenloze feedback-loops zelf af te komen; bijv. vervanging van  $\alpha_{12} \cdot v_2^y(t)$  en  $\alpha_{21} \cdot v_1^y(t)$  in het problematische interdependente stelsel 2.3.7 door  $\alpha_{12} \cdot v_2^y(t-1)$  en  $\alpha_{21} \cdot v_1^y(t-1)$

$$2.3.16 \quad v_1^y(t) = \alpha_{10} + \alpha_{12} \cdot v_2^y(t-1) + e_1^y(t) \quad \text{of}$$

$$v_1^y(t+1) = \alpha_{10} + \alpha_{12} \cdot v_2^y(t) + e_1^y(t+1)$$

$$v_2^y(t) = \alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot v_1^y(t-1) + e_2^y(t) \quad \text{of}$$

$$v_2^y(t+1) = \alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot v_1^y(t) + e_2^y(t+1)$$

2.3.16 vertoont weliswaar een feedback-loop maar geen geheugenloze feedback-loop meer. Door van de onafhankelijke variabelen predictoren in stochastische zin te maken gaat 2.3.16 over in

$$2.3.17 \quad E(v_1^y(t) | v_2^y(t-1)) = \alpha_{10} + \alpha_{12} \cdot v_2^y(t-1) \quad \text{zodat} \quad E(e_1^y(t)) = 0 \quad \text{en}$$

$$E(e_1^y(t) \cdot v_2^y(t-1)) = 0$$

$$E(v_2^y(t) | v_1^y(t-1)) = \alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot v_1^y(t-1) \quad \text{zodat} \quad E(e_2^y(t)) = 0 \quad \text{en}$$

$$E(e_2^y(t) \cdot v_1^y(t-1)) = 0$$

Deze specificatie van iedere vergelijking als een autonome verklaringsrelatie wordt mogelijk gemaakt door de afwezigheid van geheugenloze feedback-loops. Anders dan tegen de overgang van interdependent stelsel 2.3.7 in 2.3.11 is er tegen de overgang van 2.3.16 in 2.3.17 geen alge-

meen bezwaar aan te voeren, omdat er geen algemeen beletsel is voor gepredetermineerde variabelen (exogene variabelen maar evenzeer lagged-endogene variabelen) om ongecorrleerd te zijn met de error-komponenten, i.c.  $E(e_1^y(t) \cdot v_2^y(t-1)) = 0$  en  $E(e_2^y(t) \cdot v_1^y(t-1)) = 0$ . Wel moet dan bij lagged-endogene variabelen weer zijn voldaan aan de assumptie van non-autocorrelatie, i.c.  $E(e_1^y(t-2) \cdot e_1^y(t)) = 0$  en  $E(e_2^y(t+2) \cdot e_2^y(t)) = 0$ , maar daaraan is gemakkelijker te voldoen dan aan de combinatie van  $E(e_1^y(t) \cdot v_2^y(t)) = 0$  en  $E(e_2^y(t) \cdot v_1^y(t)) = 0$  zoals 2.3.11 zou vereisen. Specificatie van 2.3.16 als 2.3.17 maakt de coëfficiënten  $\alpha_{ij}$  1) zonder meer identificeerbaar en 2) rechtstreeks vergelijkingsgewijs te schatten middels normale kleinste-kwadraten regressie en dus zonder de omweg over reduced-form coëfficiënten  $\gamma_{ij}$  en verwachte waarden  $v_j^y(t)$ \* (57). Dat is uiteraard een groot voordeel.

Er is echter meer. Bezien we het volgende meer algemene stelsel zonder geheugenloze feedback-loop

$$2.3.18 \quad \begin{aligned} v_1^y(t+1) &= \alpha_{10} + \alpha_{12} \cdot v_2^y(t) + \alpha_{11} \cdot v_1^y(t) + e_1^y(t+1) \\ v_2^y(t+1) &= \alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot v_1^y(t) + \alpha_{22} \cdot v_2^y(t) + e_2^y(t+1) \end{aligned}$$

met

$$\begin{aligned} E(v_1^y(t+1) | v_2^y(t), v_1^y(t)) &= \alpha_{10} + \alpha_{12} \cdot v_2^y(t) + \alpha_{11} \cdot v_1^y(t) \\ E(v_2^y(t+1) | v_1^y(t), v_2^y(t)) &= \alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot v_1^y(t) + \alpha_{22} \cdot v_2^y(t) \end{aligned}$$

d.w.z. twee autonome verklaringsrelaties waarin behalve een feedback-loop met geheugenwerking ook nog feedback-coëfficiënten met geheugenwerking voorkomen, dan blijkt dat we in feite te doen hebben met twee stochastische differentie-relaties, d.w.z. stochastische versies van 2.2.11 waarvoor 2.2.40 gemakkelijkste hulpvergelijking was voor identificatie van de parameter-waarden, die werden gegeven in 2.2.41. In differentie-parameters  $a_{ij}$  geschreven:

$$2.3.19 \quad \begin{aligned} v_1^y(t+1) - v_1^y(t) &= a_{10} + a_{12} \cdot v_2^y(t) + a_{11} \cdot v_1^y(t) + e_1^y(t+1) \\ v_2^y(t+1) - v_2^y(t) &= a_{20} + a_{21} \cdot v_1^y(t) + a_{22} \cdot v_2^y(t) + e_2^y(t+1) \end{aligned}$$

met

$$\begin{aligned} E(v_1^y(t+1) | v_2^y(t), v_1^y(t)) &= a_{10} + a_{12} \cdot v_2^y(t) + (a_{11} + 1) \cdot v_1^y(t) \\ E(v_2^y(t+1) | v_1^y(t), v_2^y(t)) &= a_{20} + a_{21} \cdot v_1^y(t) + (a_{22} + 1) \cdot v_2^y(t) \end{aligned}$$



Hulpvergelijkingen voor identificatie (2.2.40) in hulpcoëfficiënten  $a_{1j}^*$  worden in het stochastische geval uitgebreid met error-termen en blijken dan gelijk aan die onder 2.3.18 in  $\alpha_{1j}$ -coëfficiënten. Schatting middels kleinste-kwadrate regressie komt neer op oplossing van de stelsels normaalvergelijkingen voor de coëfficiënten  $a_{1j}^* = \alpha_{1j}$

$$\begin{aligned}
 2.3.20 \quad \Sigma v_{1,y}(t+1) &= a_{10}^* n + a_{12}^* \Sigma v_{2,y}(t) + a_{11}^* \Sigma v_{1,y}(t) \\
 \Sigma [v_{1,y}(t+1) \cdot v_{2,y}(t)] &= a_{10}^* \Sigma v_{2,y}(t) + a_{12}^* \Sigma [v_{2,y}(t)]^2 + a_{11}^* \Sigma [v_{1,y}(t) \cdot v_{2,y}(t)] \\
 \Sigma [v_{1,y}(t+1) \cdot v_{1,y}(t)] &= a_{10}^* \Sigma v_{1,y}(t) + a_{12}^* \Sigma [v_{2,y}(t) \cdot v_{1,y}(t)] + a_{11}^* \Sigma [v_{1,y}(t)]^2 \\
 \Sigma v_{2,y}(t+1) &= a_{20}^* n + a_{21}^* \Sigma v_{1,y}(t) + a_{22}^* \Sigma v_{2,y}(t) \\
 \Sigma [v_{2,y}(t+1) \cdot v_{1,y}(t)] &= a_{20}^* \Sigma v_{1,y}(t) + a_{21}^* \Sigma [v_{1,y}(t)]^2 + a_{22}^* \Sigma [v_{2,y}(t) \cdot v_{1,y}(t)] \\
 \Sigma [v_{2,y}(t+1) \cdot v_{2,y}(t)] &= a_{20}^* \Sigma v_{2,y}(t) + a_{21}^* \Sigma [v_{1,y}(t) \cdot v_{2,y}(t)] + a_{22}^* \Sigma [v_{2,y}(t)]^2
 \end{aligned}$$

Oplossing van zo'n stelsel in 2.3.20 met behulp van de aangegeven sommen over de steekproef-waarden  $v_{1,y}(t)$  in de data-matrix geeft kleinste-kwadrate-schattingen van de  $a_{1j}^*$ , d.w.z. schattingen waardoor de som van de gekwadrateerde afstanden tussen gevonden en middels de schatting berekende waarden van  $v_{1,y}(t+1)$  c.q.  $v_{2,y}(t+1)$  wordt geminimaliseerd. We kunnen in het stochastische geval de waarden van de coëfficiënten  $a_{1j}^*$  niet meer exakt identificeren maar slechts schatten volgens bijv. 2.3.20. Ook de waarden van de differentie-parameters  $a_{1j}$  kunnen we niet meer op de wijze 2.2.41 exakt identificeren maar slechts schatten volgens 2.3.21

$$\begin{aligned}
 2.3.21 \quad \hat{a}_{11} &= \hat{a}_{11}^* - 1 \quad (\hat{a}_{11}^* \approx 1 \text{ voor } a_{11} = 0) \\
 \hat{a}_{10} &= \hat{a}_{10}^* \\
 \hat{a}_{12} &= \hat{a}_{12}^* \\
 \hat{a}_{22} &= \hat{a}_{22}^* - 1 \quad (\hat{a}_{22}^* \approx 1 \text{ voor } a_{22} = 0) \\
 \hat{a}_{20} &= \hat{a}_{20}^* \\
 \hat{a}_{21} &= \hat{a}_{21}^*
 \end{aligned}$$

Het is begrijpelijk, dat juist Wold met zijn voortdurende nadruk op onderliggende causale mechanismen zo sterk heeft aangedrongen op de introductie van tijd-lagged variabelen bij het voorkomen van interdependentie-problemen. Naast de voordelen m.b.t. identificatie en schatting blijken we immers tevens te stoten op de onderliggende verklaringsrelaties met geheugenwerking zelf: uitgebreide differentie-relaties bij  $a_{11} \neq 0$  c.q.  $a_{22} \neq 0$ , eenvoudige differentie-relaties bij  $a_{11} = 0$  c.q.  $a_{22} = 0$  en louter tijd-lagged relaties bij  $a_{11} = -1$  c.q.  $a_{22} = -1$ . Wel moet aan een aantal voorwaarden zijn voldaan. Op de eerste plaats moeten we in staat zijn tijdserie-data te verzamelen en moet het mogelijk zijn de assumptie van evenwicht te laten vallen omdat de tijd-lag anders slechts schijn zou zijn. Op de tweede plaats moeten we de assumptie van non-correlatie van error-termen met exogene variabelen kunnen vervangen of uitbreiden met de zeker niet minder zware assumptie van non-autocorrelatie, tenzij we in staat zijn voor autocorrelatie te corrigeren. Op de derde plaats betekent de introductie van tijd-lag in een feedback-loop een nieuwe assumptie, nl. dat de meet-perioden der variabelen de tijd-lag niet overlappen, omdat anders zo'n tijd-lag weer schijn zou zijn met feitelijke interdependentie en eventuele niet-identificeerbaarheid als gevolg (58). Tussen de laatste assumptie en die van non-autocorrelatie zit overigens een zekere tegenstrijdigheid: om tijd-lags in feedback-loops te krijgen is het nl. nodig de eenheidsperiode voldoende klein te nemen, terwijl het vermijden van autocorrelatie juist tot de keuze van een relatief grote eenheidsperiode aanleiding geeft (59). We komen hier dadelijk op terug.

Voorafgaand een verduidelijking aan de hand van een voorbeeld uit de sociale wetenschap, waar de boven geschetste interdependentie-problemen zich typisch voordoen. Stel, dat een onderzoek onder leger-officieren

betrekking heeft op de samenhang tussen houding t.o.v. het leger:  $v_1^y(t)$ , gemeten met een attitude-schaal, en rang in het leger:  $v_2^y(t)$ , gemeten met bijv. de hoogte van het salaris. Het predictor-keuze-probleem is hier niet uniek oplosbaar: rang zou houding kunnen beïnvloeden, houding rang maar ook beide zou het geval kunnen zijn. Cross-sectioneel onderzoek met niet meer dan deze twee variabelen leidt dus tot een volledige impasse. Ideaal zou daarom zijn rechtstreeks te mikken op onderliggende verklaringsrelaties door tijdserie-data te verzamelen en deze te analyseren volgens 2.3.19, 2.3.20 en 2.3.21 met als resultaat: schattingen van de wijze waarop 1)  $v_1^y(t)$  dan wel de verandering in  $v_1^y(t)$  afhankelijk is van  $v_2^y(t)$  en  $v_1^y(t)$  op het eerdere tijdstip, 2)  $v_2^y(t)$  dan wel de verandering in  $v_2^y(t)$  afhankelijk is van  $v_1^y(t)$  en  $v_2^y(t)$  op het eerdere tijdstip. Zou dat echter op een van de zojuist genoemde bezwaren stuiten, dan leert de econometrie dat we in ieder geval niet interdependent stelsel 2.3.7 kunnen volgen maar eventueel interdependent stelsel 2.3.14 waarvoor minstens twee exogene variabelen ingevoerd moeten worden:  $v_3^y(t)$ , bijv. houding van de plaatselijke bevolking t.o.v. de legerplaats, en  $v_4^y(t)$ , bijv. leeftijd, met als resultaat: schattingen van 1)  $v_1^y(t)$ 's afhankelijkheid van  $v_2^y(t)$  en  $v_3^y(t)$  dan wel de verhouding tussen  $v_1^y(t)$ 's veranderingsafhankelijkheid van  $v_2^y(t)$  en van  $v_3^y(t)$ , 2)  $v_2^y(t)$ 's afhankelijkheid van  $v_1^y(t)$  en  $v_4^y(t)$  dan wel de verhouding tussen  $v_2^y(t)$ 's veranderingsafhankelijkheid van  $v_1^y(t)$  en van  $v_4^y(t)$ . Maar dan nog blijft onbepaald, wat de verhouding is tussen  $v_1^y(t)$ 's veranderingsafhankelijkheid van  $v_2^y(t)$  en  $v_2^y(t)$ 's veranderingsafhankelijkheid van  $v_1^y(t)$  evenals de tijd die de processen in belag nemen. Cross-sectioneel onderzoek blijft m.a.w. een gebrekkig substituut voor tijdserieel onderzoek.

Om verschillende redenen kan het zijn, dat de meet-perioden voor de opeenvolgende tijdserie-data niet klein genoeg worden genomen om geheugenloosheid met eventueel geheugenloze feedback-loops te voorkomen. Behalve het vermijden van autocorrelatie is een heel voor de hand liggende reden, dat gewoon geen andere data voorhanden zijn. In veel sectoren van de samenleving worden jaar- of maand-data verzameld en juist niet de wekelijkse of dagelijkse data, die nodig zouden zijn. De structurele vorm, die voor dergelijke data wordt geformuleerd, kan daardoor niet doorstoten tot de onderliggende differentie-relaties met kleinere tijd-lag en leent zich daardoor evenmin voor predictie met geheugenwerking vanwege

het optreden van endogene predictoren waarvan men de waarden op het te predicieren tijdstip al zou moeten kennen. Zo bijv.  $v_2^y(t+1)$  in de eerste vergelijking van 2.3.22

$$2.3.22 \quad v_1^y(t+1) = \alpha_{10} + \alpha_{12} \cdot v_2^y(t+1) + \alpha_{11} \cdot v_1^y(t) + \alpha_{13} \cdot v_3^y(t) + e_1^y(t+1)$$

$$v_2^y(t+1) = \alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot v_1^y(t+1) + \alpha_{22} \cdot v_2^y(t) + \alpha_{24} \cdot v_4^y(t) + e_2^y(t+1)$$

Wel geeft altijd de gereduceerde vorm differentie-relaties zonder current-endogene variabelen als predictoren, omdat de laatste bij de afleiding van de gereduceerde vorm juist worden geëlimineerd.

$$2.3.23 \quad v_1^y(t+1) = \gamma_{10} + \gamma_{11} \cdot v_1^y(t) + \gamma_{13} \cdot v_3^y(t) + \epsilon_1^y(t+1)$$

$$v_2^y(t+1) = \gamma_{20} + \gamma_{21} \cdot v_2^y(t) + \gamma_{24} \cdot v_4^y(t) + \epsilon_2^y(t+1)$$

De  $\gamma_{ij}$ -coëfficiënten van de gereduceerde vorm worden weer geschat volgens de normale kleinste-kwadraten procedure - LSNR - of wat bij een juiste specificatie van structurele vorm de voorkeur geniet volgens REDUCED-FORM op basis van de geschatte  $\alpha_{ij}$ -coëfficiënten van de structurele vorm. Worden vervolgens de  $\gamma_{ij}$ -coëfficiënten als hulpcoëfficiënten  $a_{ij}^*$  genomen, dan volgt op de wijze van 2.3.21 weer de schatting van differentieparameters  $a_{ij}$ .

In de vorige paragraaf werden in 2.2.37 en 2.2.39 ook identificatieprocedures gegeven voor de situatie, waarin de tijdserie-data een tijdsafstand  $\delta$  hebben ongelijk aan de tijdsdifferentie  $\Delta t = 1$  in de differentie-relatie, en in 2.3.34 en 2.2.35 voor differentiële relaties. Geheel analoog aan de overgang van 2.2.41 in 2.3.21 gaan ook deze identificatieprocedures over in schattingsprocedures, indien gebruik gemaakt wordt van hulpvergelijking 2.2.33 met toevoeging van de error-term. Moeilijkheden zullen echter optreden evenals trouwens al in het deterministische geval van de vorige paragraaf, als in een multirelationeel model zoals

2.3.23 een current-endogene variabele van de ene vergelijking als lagged-endogene predictor optreedt in een andere vergelijking. De waarden van deze predictoren op latere tijdstippen worden dan gegenereerd door het stelsel vergelijkingen als geheel en de procedures 2.2.37, 2.2.39, 2.2.34 en 2.2.35 zijn niet meer toepasbaar, omdat zij deze waar-

den als gegeven veronderstellen. Zij moeten dan vervangen worden door matrix-algebraïsche generalisaties, die besproken zullen worden in paragraaf 3.4.

Ten slotte met het oog op de assumptie van non-autocorrelatie nog een aanpassing van het onderscheid tussen cross-sectioneel en tijdserieel onderzoek en het begrip tijdserie. Van nu af aan zal bij voorkeur worden gewerkt met het volgende onderscheid:

1. verdeeld onderzoek,
2. gemengd tijdserie-onderzoek,
3. zuiver tijdserie-onderzoek.

Met verdeeld onderzoek wordt hier bedoeld, dat iedere rij van de data-matrix op een afzonderlijke onderzoekseenheid  $y = \alpha, \beta, \dots$  (bijv. persoon in een onderzoek met personen als onderzoekseenheden, groep in een onderzoek met groepen als onderzoekseenheden) betrekking heeft. Verdeeld onderzoek hoeft niet per se samen te vallen met cross-sectioneel onderzoek. Het valt samen met cross-sectioneel onderzoek, als alle waarden  $v_{i,y}(t)$  in de data-matrix tevens op hetzelfde tijdstip  $t$  betrekking hebben. Het valt niet samen met strikt cross-sectioneel onderzoek, als bijv. in iedere rij van de data-matrix zowel waarde  $v_{2,y}(t)$  als  $v_{2,y}(t-1)$  voorkomt en er voor iedere eenheid  $y$  dus data van verschillende tijdstippen afkomstig zijn. Deze tijdseries van minimale omvang zullen niet meer als tijdseries in eigenlijke zin worden beschouwd. Verdeeld onderzoek middels dergelijke oneigenlijke tijdseries is evenals tijdserie-onderzoek in eigenlijke zin geschikt voor onderzoek van differentie- en differentiële relaties, bijv. de differentie-relaties van 2.3.23. Zoals uit paragraaf 3.3 zal blijken is de assumptie van non-autocorrelatie voor dergelijke oneigenlijke tijdseries niet per se vereist. Wel is die assumptie of enige vorm van correctie voor autocorrelatie vereist in gemengd en zuiver tijdserie-onderzoek. In zuiver tijdserie-onderzoek hebben alle rijen van de data-matrix op één en dezelfde onderzoekseenheid  $y$  betrekking maar met telkens een andere waarde voor  $t$ . In gemengd tijdserie-onderzoek hebben de rijen van de data-matrix op meerdere onderzoekseenheden betrekking, maar neemt iedere onderzoekseenheid verschillende rijen met verschillende waarden voor  $t$  voor haar rekening. Gemengd tijdserie-onderzoek vormt dus een mengvorm tussen verdeeld en zuiver tijdserie-onderzoek. Zuiver en gemengd tijdserie-onderzoek

verschillen in dit opzicht fundamenteel van verdeeld onderzoek, dat dezelfde data in verschillende rijen van de data-matrix kunnen voorkomen: waarde  $v_{2,y}(t-1)$  in de ene rij bijv. als  $v_{2,y}(t)$  in de vorige regel. Het is juist deze karakteristiek, waardoor in zuiver en gemengd tijdserie-onderzoek de assumptie van non-autocorrelatie of enige vorm van correctie voor autocorrelatie volstrekt noodzakelijk is. Aan dergelijke correctie-procedures zal enige aandacht worden besteed in paragraaf 3.3. Overigens is verdeeld onderzoek meer regel dan uitzondering in de sociale wetenschap. Het blijkt vaak al moeilijk genoeg om in de plaats van verdeeld onderzoek met strikt cross-sectionele data verdeeld onderzoek met data van twee verschillende tijdstippen uit te voeren. Ook de toepassingen in hoofdstuk 4 zullen voornamelijk het verdeelde onderzoektype volgen.

### Hoofdstuk 3: Systemische verklaringssystemen

#### 3.1 Toestand-ruimte-modellen als realisaties van input-output-modellen

Verklaringssystemen  $\langle V; \hat{A} \rangle$  - zie 2.1.26 t/m 2.1.28 - nemen in de mathematische systeemleer de vorm aan van toestand-ruimte-modellen. Het is vooral de formele introductie van het toestandsbegrip, waaraan de mathematische systeemleer zijn grote bekendheid en ruime toepassingsmogelijkheden heeft te danken. Ondanks de cruciale betekenis van toestand-ruimte-modellen voor systemische verklaringssystemen verdient het aanbeveling beide uit elkaar te houden. We zullen daarom nog eens samenvatten, wat over systemen en systemische verklaringssystemen - zie vooral paragraaf 2.1 - is gezegd om vervolgens in te gaan op toestand-ruimte-modellen. De functie van toestand-ruimte-modellen binnen systemische verklaringssystemen zal in paragraaf 3.5 ter sprake komen.

We zijn de systeembenadering begonnen met de constructie van een systeem-model  $S \equiv \langle U' \cup \dots \cup \alpha^{i'}; R_1, \dots, R_n \rangle$ . Als abstractie-model voor de realiteit onderscheidt  $S$  zich van andere abstractie-modellen, doordat gelijktijdig meerdere elementen-niveaus  $L \in \{U', \dots, \alpha^{i'}\}$  corresponderend met meerdere eenheden-niveaus  $L \in \{E', \dots, \{\alpha^{i'}\}\}$  worden opgenomen. Als model voor de realiteit dient  $S$  niet met de realiteit zelf te worden verward. Wordt  $S$  toch vaak kortweg systeem (Real Life System: R.L.S.) genoemd i.p.v. systeem-model, dan is dat omdat wetenschappelijke analyse bijna per definitie verloopt langs modellen: "Since in System Theory we deal mostly with models and their representations, there will be no confusion if we follow common usage and use the word system to refer to the model under consideration. If we wish to refer to the physical object under consideration we shall always say physical system" (1).

Vervolgens hebben we de noodzaak trachten aan te tonen van mathematische representatie van  $S$ , d.w.z. van systemisch verklaringssysteem  $R(S)$ . Ook  $R(S)$  wordt vaak kortweg systeem genoemd, maar er is alle reden mathematische representatie  $R(S)$  duidelijk van  $S$  te onderscheiden: "Mathematicians use the word system to designate what we call system representation. This is in part due to the fact that they refuse to acknowledge that the problem of going from a physical system to a model and then to an useful system representation is far from trivial" (1).





in een systeem-simulatie, die met  $\dot{S}$  zal worden aangeduid. Systeem-simulerend representatie-model  $R(\dot{S})$  zullen we van systeem-representierend representatie-model  $R(S)$  onderscheiden door slechts reële eenheid(heden)  $y \in L$  van één enkel niveau  $L$  te specificeren en de zuiver mathematische relaties in  $S$  eenvoudig te nummeren:

$$3.1.2 \quad R(\dot{S}) \equiv \langle V; A_1, A_2, \dots, I_{1,2}, I_{1,3}, \dots; A_y \rangle \equiv \langle V; S; A_y \rangle$$

$R(\dot{S})$  kan uiteraard op de normale wijze in blok-diagram-vorm worden weergegeven. Soms kan  $\dot{S}$  door bijv. computer-simulatie een reële interpretatie krijgen, maar soms ook is  $\dot{S}$  in het geheel niet fysisch realiseerbaar (4).

Terminologische verwarring ontstaat als alle reële eenheden  $y$  en/of hun abstractie-modellen, waarvoor een  $R(\dot{S})$  kan worden geconstrueerd, systemen worden genoemd. Zo ongeveer alles in de realiteit zou op die manier ook zonder dat er sprake is van een abstractie-model  $S$  systeem worden genoemd en dat lijkt ons geen bijdrage aan de helderheid rond de precieze inhoud van systeem-leer en systeem-methodologie. We zullen daarom trachten de term "systeem" te beperken tot  $S$ ,  $\tilde{S}$ ,  $\dot{S}$  (systeem, subsysteem, systeem-simulatie) of met de toevoeging "mathematisch" tot  $S$ . Met name zullen we ook het onder wiskundigen zeer algemene gebruik vermijden om modellen  $\langle V; A \rangle$  in toestand-ruimte-vorm of zelfs in input-output-vorm systeem te noemen. Bijna alle verklaringmodellen zouden op die manier systemen worden, omdat ze bijna allemaal als input-output-modellen  $M_{I/O}$  of toestand-ruimte-modellen  $M_{\Sigma}$  zijn te specificeren en in de mathematische systeemleer ook als zodanig gespecificeerd moeten worden. De term "mathematisch systeem" - "To imply that the abstract object in question is a combination of other abstract objects" (5) - zullen we reserveren voor  $S$ , d.w.z. een combinatie van mathematische relaties  $A$  met ieder een bijbehorend model  $\langle V; A \rangle$ .

$M_{I/O}$  en  $M_{\Sigma}$ , triviale en canonieke realisatie in het tijd-invariante geval

Wanneer is nu  $\langle V; A \rangle$  - waarin relatie  $A$  staat voor welke  $A_i, A_y, A_{y_i}, A_y$ , in welk verklaringmodel dan ook, i.h.b. in een systemisch

verklaringsmodel - een input-output-model  $M_{I/O}$  en wanneer een toestandruimte-model  $M_{\Sigma}$ ? Laten we eerst  $\langle V; A \rangle$  nog eens specificeren:

### 3.1.3 $\langle V; A \rangle$

$$V \equiv V_1 \cup V_2$$

$$A \subseteq V_1 \times V_2$$

$$V_1 \subseteq \{v_1 \in P(T \times N_1) : v_1 = (f: T \rightarrow N_1)\}$$

$$V_2 \subseteq \{v_2 \in P(T \times N_2) : v_2 = (f: T \rightarrow N_2)\}$$

T: de tijdsas, lopend over de hele lijn  $(-\infty, \infty)$  of delen daarvan zoals bijv.  $[0, \infty)$ ; voor  $T = \text{Re}$  of bijv.  $T = \text{Re}^{0,+}$  resulteren continue-tijd tijdfuncties  $v$ , voor  $T = \text{Ge}$  of bijv.  $T = \text{Ge}^{0,+}$  discrete-tijd tijdfuncties  $v$

$N_1$ : verzameling scalaire getallen of  $m$ -vectoren; typisch  $N_1 = \text{Re}^m$

$N_2$ : verzameling scalaire getallen of  $r$ -vectoren; typisch  $N_2 = \text{Re}^r$

$A$  is dus een binaire relatie bestaande uit paren tijdfuncties  $v_1 \in V_1$  en  $v_2 \in V_2$ , waarvan de waarden  $v_1(t) \in N_1$  en  $v_2(t) \in N_2$  scalair (unidimensioneel) maar ook vectorieel (multidimensioneel) kunnen zijn. Ontdaan van alle formalismen komt het erop neer, dat  $M_{I/O}$  causaliteit introduceert in  $\langle V; A \rangle$  ( $A$  predictief of niet-anticipatief), terwijl  $M_{\Sigma}$  bovendien expliciet de geheugenwerking zichtbaar maakt. Het grote voordeel van  $M_{\Sigma}$  is, dat causale invloeden over het hele verleden  $(-\infty, t_0)$  in de toestand op het éne tijdstip  $t_0$  worden samengevat. "Although the notion of state has been formalized in the context of classical mechanics and has had great influence on the thinking and the philosophy of physics ..., it is mainly in the more recent areas of control theory and automata theory that the systematic use of models which display explicitly their memory function, i.e., the state of the system, has become the standard type of mathematical models employed ... The great progress made in the design methods for dynamical systems ... depends in a rather essential way on the fact that one is using such state space models" (6). De nu volgende meer formele typering van  $M_{I/O} \equiv \langle U, Y; F \rangle$  en  $M_{\Sigma} \equiv \langle U, \Sigma, Y; s, r \rangle$ , waarbij we ons in eerste instantie zullen beperken tot het deterministische geval, volgt voornamelijk Desoer (1970),

Willems, J.C. (1975) en Kwakernaak (1975). Grondleggende besprekingen vindt men behalve in Zadeh and Desoer (1963) onder meer ook in Nerode (1958), Arbib (1966), Kalman (1967), Salovaara (1967), Windeknecht (1967), Zadeh (1969).

Een input-output-model  $M_{I/O} \equiv \langle U, Y; F \rangle$  is een  $\langle V; A \rangle$  met georiënteerde relatie  $A$ , d.w.z.

- 1)  $A \subseteq V_1 \times V_2$  moet een functie  $F: U \rightarrow Y$  zijn van één van beide deelverzamelingen in  $V \equiv V_1 \cup V_2$ , de z.g. input-ruimte  $U$ , naar de andere deelverzameling, de z.g. output-ruimte  $Y$ ,
- 2)  $F$  moet voldoen aan het causaliteitsaxioma:

#### 3.1.4 causaliteitsaxioma

Voor alle  $u, \tilde{u} \in U$  en  $t, t' \in T$ :

$$u(t') = \tilde{u}(t') \text{ voor alle } t' < t \rightarrow (F(u))(t') = (F(\tilde{u}))(t') \text{ voor alle } t' \leq t$$

Als m.a.w. twee verschillende inputs  $u$  en  $\tilde{u}$  gelijk zijn tot aan  $t$ , dan moeten de bijbehorende outputs  $y = F(u)$  en  $\tilde{y} = F(\tilde{u})$  gelijk zijn tot en met  $t$ . Dit is de sterk-causale vorm; in de zwak-causale vorm wordt  $t' < t$  (tot aan  $t$ ) vervangen door  $t' \leq t$  (tot en met  $t$ ). Essentieel voor input-output-functie  $F$  is dus niet alleen, dat gegeven input  $u$  output  $y$  bepaald is, maar tevens moet  $y(t)$  - de waarde van output  $y$  op tijdstip  $t$  - uniek bepaald zijn, gegeven  $u$  over slechts  $(-\infty, t)$  in het sterk-causale geval c.q.  $(-\infty, t]$  in het zwak-causale geval. Men noemt dit het niet-anticipatieve karakter van  $F$ .

Bij sommige auteurs hoeft  $F$  niet per se een functionele relatie te zijn. Voor hen verschilt  $M_{I/O}$  dus slechts hierin van  $\langle V; A \rangle$ , dat één van beide deelverzamelingen in  $V$  de input-ruimte  $U$  wordt genoemd en de andere de output-ruimte  $Y$  en dat de relatie wordt gespecificeerd van  $U$  naar  $Y$ . In paragraaf 3.5 zal deze werkwijze worden gevolgd bij specificatie van de relatie op hoger niveau, waarvoor pas in tweede instantie zal worden nagegaan, of deze inderdaad bepaald (in het deterministische geval functioneel) is. In deze paragraaf zal van meet af aan een functioneel karakter worden aangenomen.

Toestand-ruimte-model  $M_{\Sigma} \equiv \langle U, \Sigma, Y; s, r \rangle$  verschilt van input-output-model  $M_{I/O} \equiv \langle U, Y; F \rangle$  door

1) toevoeging van toestand-ruimte  $\Sigma$  en vervanging van  $F$  door twee functies, t.w. toestand-overgangsfunctie (state transition function)  $s$  en uitleesfunctie (read-out function)  $r$

$\Sigma$ : een verzameling (bijv. scalaire getallen, vectoren, functies, functie-  
klassen;  $\Sigma$  bestaat dus niet per se uit functies zoals  $U$  en  $Y$ ); ieder  
lid  $x \in \Sigma$  wordt een toestand genoemd; typisch zijn  $\Sigma = \text{Re}^n$  (de verza-  
meling van  $n$ -vectoren over  $\text{Re}$ ), de discrete toestand-ruimte  $\Sigma$  (aftel-  
baar oneindige verzameling) of eindige toestand-ruimte  $\Sigma$  (eindige  
verzameling of "alfabet") van de automatentheorie; zie voor het be-  
langrijke toepassingsgebied van de automatentheorie bijv. Gill (1969a,  
1969b), Carlyle (1969) en de uitgebreide referenties in deze publika-  
ties.

$s: T_+^2 \times \Sigma \times U \rightarrow \Sigma$ ;  $T_+^2 \equiv \{ \langle t, t_0 \rangle \in T^2 : t_0 \leq t \}$ ,  $\Sigma$  en  $U$  als boven gedefi-  
nieerd; de functie-waarde  $s(\cdot, \cdot, \cdot)$  wordt gebruikt om  $x(t) \in \Sigma$  te  
definiëren:

$$3.1.5 \quad x = s(t, t_0, x_0, u) \equiv x(t)$$

d.w.z. de toestand op tijdstip  $t$  bereikt vanuit tijdstip  $t_0$  en toe-  
stand  $x_0 \in \Sigma$  als resultaat van input  $u \in U$ .

$r: \Sigma \rightarrow Y$  of  $r: \Sigma \times U \rightarrow Y$  of  $r: T \times \Sigma \rightarrow Y$  of  $r: T \times \Sigma \times U \rightarrow Y$ ;  $\Sigma$  en  $T$   
zijn als boven gedefinieerd,  $U$  is de verzameling input-waarden  $u(t)$   
 $- N_1$  óf  $N_2$ ,  $Y$  de verzameling output-waarden  $y(t) - N_2$  indien  $U = N_1$ ,  
 $N_1$  indien  $U = N_2$ :

$$3.1.6 \quad y(t) = r(t, x(t), ?)$$

d.w.z. $y(t) = r(x(t))$	toestand-bepaalde output	} invariant
$y(t) = r(x(t), u(t))$	toestand-input-bepaalde output	
$y(t) = r(t, x(t))$	toestand-bepaalde output	} variant
$y(t) = r(t, x(t), u(t))$	toestand-input-bepaalde output	

2) vervanging van het causaliteitsaxioma m.b.t.  $F$  door drie axioma's  
m.b.t.  $s$ :

3.1.7 toestand-overgangsaxioma

Voor alle  $u, \tilde{u} \in U, x_0 \in \Sigma$  en  $t, t_0, t' \in T$  met  $t_0 \leq t$ :  
 $u(t') = \tilde{u}(t')$  voor alle  $t' \in [t_0, t) \rightarrow s(t, t_0, x_0, u) =$   
 $s(t, t_0, x_0, \tilde{u})$

3.1.8 consistentie-axioma

Voor alle  $u \in U, x_0 \in \Sigma, t_0 \in T: s(t_0, t_0, x_0, u) = x_0$

3.1.9 toestand-separatie-axioma

Voor alle  $u \in U, x_0 \in \Sigma$  en  $t, t_0, t' \in T$  met  $t_0 \leq t' \leq t$ :  
 $s(t, t', s(t', t_0, x_0, u), u) = s(t, t_0, x_0, u)$  of  
 $s(t, t', x(t'), u) = s(t, t_0, x_0, u)$

Als twee verschillende inputs  $u$  en  $\tilde{u}$  gelijk zijn over interval  $[t_0, t)$ , dan moet volgens 3.1.7 voor dezelfde  $x_0$  dezelfde  $x(t)$  resulteren, zodat  $x(t)$  behalve onafhankelijk van toekomstige input  $u_{[t, \infty)}$  (s niet-anticipatief) tevens dankzij  $x_0$  onafhankelijk is van input  $u_{(-\infty, t_0)}$  voorafgaand aan  $t_0$ : toestand  $x_0$  vat al die eerdere causale invloeden samen. Op de volgende wijze wordt dat vaak in de formulering van toestand-overgangsfunctie 3.1.5 verwerkt:

$$3.1.10 \quad x(t) = s(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t)}) \quad \text{tijd-variant}$$

Volgens 3.1.8 moet begintoestand  $x(t_0)$  gelijk zijn aan  $x_0$  en volgens 3.1.9 mag het geen verschil maken, of we nu toestand  $x(t)$  rechtstreeks vanuit  $x_0$  berekenen of dat we eerst  $x(t')$  vanuit  $x_0$  berekenen en pas daarna  $x(t)$  vanuit  $x(t')$ .

Combinatie van  $s$  en  $r$  middels substitutie van 3.1.10 in 3.1.6 resulteert in een nieuwe z.g. response-functie  $\rho: T_+^2 \times \Sigma \times U \rightarrow Y$  volgens

$$3.1.11 \quad y(t) = \rho(t, t_0, x_0, u) \left\{ \begin{array}{l} y(t) = \rho(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t)}) \text{ sterk-causaal} \\ y(t) = \rho(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t]}) \text{ zwak-causaal} \end{array} \right\} \left. \vphantom{\rho(t, t_0, x_0, u)} \right\} \text{tijd-variant}$$

Substitutie van  $x(t) = s(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t]})$  in  $y(t) = r(t, x(t), u(t))$  geeft bijv.  $y(t) = r(t, s(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t]}), u(t)) = \rho(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t]})$ . Een zwak-causale  $\rho$  is het gevolg van toestand-input-bepaalde output:

$r(\cdot, \cdot, u(t))$ . Evenals in het geval van een zwak-causale  $F$  spreekt men van "feedthrough" en wordt het bijbehorende model "improper" genoemd. In een "proper" model, d.w.z. een model met sterk-causale  $F$  of  $\rho$ , heeft de output op zijn minst infinitesimaal een lag t.o.v. de input. Een extreem geval is een bron (autonoom, gesloten of inputloos model), waarin de input-ruimte  $U$  slechts één element  $u^*$  bevat en vaak wordt geschreven:  $x(t) = s(t, t_0, x_0)$  en  $y(t) = \rho(t, t_0, x_0)$ . Een extreem geval van een "improper" model is een geheugenloos model, waarin de toestand-ruimte  $\Sigma$  slechts één element  $x^*$  bevat en de output dus uitsluitend een gevolg is van "feedthrough":  $s(t, t_0, x^*, u) = x^*$  en  $\rho(t, t_0, x^*, u) = r(t, u(t))$ .

In  $\rho$  wordt geen expliciet onderscheid meer gemaakt tussen de toestand-overgang van  $x_0$  naar  $x(t)$ , waarmee functie  $s$  eerst alle geheugenwerking voor zijn rekening neemt, en het vervolgens op basis van  $x(t)$  geheugenloze uitlezen van response  $y(t)$  middels  $r$  ( $r$  kan men opvatten als een "instantane" response-functie).

$$12 \quad \left. \begin{array}{l} x(t) = s(\cdot, \cdot, x_0, \cdot) \\ y(t) = r(\cdot, x(t), \cdot) \end{array} \right\} y(t) = r(\cdot, s(\cdot, \cdot, x_0, \cdot), \cdot) = \rho(\cdot, \cdot, x_0, \cdot)$$

Van beide toestanden  $x_0$  en  $x(t)$  in  $s$  komt in  $\rho$  alleen nog  $x_0$  expliciet voor;  $\rho$  staat dan ook dichter bij input-output-functie  $F$  waarin noch  $x_0$  noch  $x(t)$  expliciet voorkomt en eventuele geheugenwerking dus geheel impliciet blijft. Een belangrijk gevolg van 3.1.9 voor  $\rho$  is de response-separatie-eigenschap:  $\rho(t, t', x(t'), u) = \rho(t, t_0, x_0, u)$ .

Voordat het verband tussen  $F$  en combinatie  $\rho$  van  $s$  en  $r$  nu nader zal worden uitgewerkt, moet eerst nog tijd-invariantie voor  $F$ ,  $s$  en  $\rho$  worden geïntroduceerd. Dat gaat met behulp van een z.g. shift-operator  $S_\tau$ , die bijv. een input  $u$  als het ware  $\tau$  tijdseenheden verder de tijd in schuift, zodat een nieuwe input  $S_\tau(u)$  met  $(S_\tau(u))(t) = u(t - \tau)$  ontstaat. Tijd-invariantie of "stationariteit" vereist op de eerste plaats, dat  $U$  en  $V$  gesloten zijn onder translaties, d.w.z. voor alle  $\tau \in T$  moet gelden:  $u \in U \rightarrow S_\tau(u) \in U$ ,  $y \in V \rightarrow S_\tau(y) \in V$ , en vervolgens

dat is voldaan aan het volgende axioma:

3.1.13 stationariteitsaxioma (tijd-invariantie-axioma) voor resp. F, s en  $\rho$

Voor alle  $u \in U$ ,  $\tau \in T$ :

$$S_\tau(F(u)) = F(S_\tau(u))$$

Voor alle  $u \in U$ ,  $x_0 \in \Sigma$  en  $t, t_0, \tau \in T$ :

$$s(t, t_0, x_0, u) = s(t + \tau, t_0 + \tau, x_0, S_\tau(u))$$

Voor alle  $u \in U$ ,  $x_0 \in \Sigma$  en  $t, t_0, \tau \in T$ :

$$\rho(t, t_0, x_0, u) = \rho(t + \tau, t_0 + \tau, x_0, S_\tau(u))$$

De waarde van de nieuwe input  $S_\tau(u)$  op het nieuwe begintijdstip  $t_0 + \tau$  is precies de waarde van de oude input op het oude begintijdstip  $t_0$ . Dezelfde input op verschillende tijdstippen toegepast mag volgens 3.1.13 geen verschillend resultaat opleveren en die tijd-invariantie wordt als volgt in de formuleringen van  $s$  en  $\rho$  onder 3.1.10 en 3.1.11 tot uitdrukking gebracht:

3.1.14  $x(t) = s(x_0, u_{[t_0, t]})$  tijd-invariant

3.1.15  $y(t) = \rho(x_0, u_{[t_0, t]})$  sterk-causaal }  
 $y(t) = \rho(x_0, u_{[t_0, t]})$  zwak-causaal } tijd-invariant

Zorgvuldige vergelijking van 3.1.14 en 3.1.15 met 2.2.42 in het vorige hoofdstuk leert, dat de daar gegeven algemene formulering van een verklaringrelatie  $A_y$  in feite een bijzonder geval is van response-functie  $\rho$

3.1.16  $x(t) = s(x_0, u_{[t_0, t]})$  s tijd-invariant }  
 $y(t) = r(x(t)) = x(t)$  r geeft toestand-identieke output }

$$y(t) = \rho(x_0, u_{[t_0, t]}) = s(x_0, u_{[t_0, t]}) = s(y(t_0), u_{[t_0, t]})$$

en wel een combinatie van een tijd-invariante  $s$  en de simpelst denkbare  $r$  (de toestand wordt in precies dezelfde vorm uitgelezen: toestand-identieke output); 3.1.16 gaat over in 2.2.42 als we  $y(t)$  unidimensioneel interpreteren als  $v_n^y(t)$  en  $u_{[t_0, t]}$  multidimensioneel als  $[v_1^y [t_0, t) \quad v_2^y [t_0, t) \quad \dots]$ . Toestand-ruimte-model  $M_\Sigma \equiv \langle U, \Sigma, Y; s, r \rangle$  geeft dus als zodanig een algemenere specificatie van verklaringsrelaties dan 2.2.42 of welke andere formulering in de paragrafen 2.2 en 2.3 dan ook; middels geëigende keuze van  $U, \Sigma, Y, s$  en  $r$  kunnen ze allemaal als bijzondere gevallen van  $\rho$  worden afgeleid.

Vanwege de grote voordelen van een toestand-ruimte-model  $M_\Sigma$  zou het natuurlijk ideaal zijn, als we altijd rechtstreeks met zo'n  $M_\Sigma$  konden beginnen. Hebben we eenmaal de beschikking over  $M_\Sigma$ , dan is het meestal een eenvoudige zaak om  $\rho$  te bepalen en zo nodig ook  $F$ , d.w.z. de  $y$  in ieder input-output-paar  $\langle u, y \rangle \in F$ , door in 3.1.11  $t_0$  voldoende vroeg te nemen:

$$7 \quad y(t) = (F(u))(t) = \rho(t, t^*, x^*, u) \quad \text{met } t^* < t_u^* \text{ voor alle } u \in U$$

Nieuw in 3.1.17 zijn oertoestand  $x^* \in \Sigma$  - populair gezegd de oorspronkelijke begintoestand waarmee het bestaan van ieder object  $y \in L$  begint - en ingangstijdstip  $t_u^*$  per input  $u \in U$ . Willems, die in zijn "Minimal realization in state space form from input/output data" (1975) het verband tussen  $M_\Sigma$  met  $\rho$  en  $M_{I/O}$  met  $F$  diepgaand heeft onderzocht, definieert  $x^*$  op basis van constante "invloedloze"  $u^*$  (7):

$$8 \quad x^* = s(t, t_0, x^*, u^*) \quad \text{voor alle } \langle t, t_0 \rangle \in T_+^2$$

$x^*$  is dus die toestand  $x \in \Sigma$ , die onder constante  $u^* \in U$  constant blijft. Behalve dat Willems op die manier de klasse van toelaatbare toestand-overgangsfuncties beperkt tot functies  $s$  waarvoor zo'n oertoestand  $x^*$  bestaat, neemt hij tevens aan, dat iedere input  $u \in U$  tot op een bepaald tijdstip  $t$  die constante "invloedloze" input-waarde  $u^*(t)$  vertoont: voor iedere  $u \in U$  bestaat er een tijdstip  $t_u^* \in T$ , zodanig dat  $u(t) = u^*(t)$  voor alle  $t < t_u^*$ , waarmee  $u^*$  en  $t_u^*$  tevens worden gedefinieerd (8). Is



aan de genoemde voorwaarden voldaan en hebben we  $x^*$  bepaald, dan kunnen we dus voor een of andere  $t^*$  met behulp van 3.1.17 uit  $M_\Sigma$  een input-output-model  $M_{I/O}$  construeren. Om aan te geven, dat  $M_{I/O}$  middels 3.1.17 afleidbaar is uit  $\langle M_\Sigma, x^* \rangle$  schrijven we

$$3.1.19 \quad \langle M_\Sigma, x^* \rangle \rightarrow M_{I/O}$$

Deze aanpak middels  $u^*$ ,  $t_u^*$ , en  $x^*$  zoals die door Willems wordt gevolgd legt voor iedere  $u \in U$  eenduidig vast, wat er gebeurt op " $t_0 = -\infty$ ", en maakt op die manier een elegante formulering mogelijk van het nu te bespreken realisatie-probleem. Benadrukt moet echter worden, dat het een van de mogelijke benaderingen is en dat niet alle auteurs op dezelfde wijze te werk gaan.

Soms hebben we alleen de beschikking over input-output-data  $\langle u(t), y(t) \rangle$  over tijdstippen  $t \in [t_0, t_1]$  en ontbreken de toestands-data  $x(t)$ . Het kan zijn dat we in  $x(t)$  als zodanig niet geïnteresseerd zijn maar dat het ons uiteindelijk slechts gaat om het effect van inputwaarden  $u(t)$  op output-waarden  $y(t)$ . Het kan ook zijn, dat  $x(t)$  een louter hypothetische variabele is, die in het geheel niet toegankelijk is voor meet-procedures, laat staan voor experimentele manipulatie (de toestand is experimenteel manipuleerbaar of "settable", als het mogelijk is de begintoestand  $x(t_0)$  op ieder begintijdstip  $t_0$  iedere waarde in de toestand-ruimte  $\Sigma$  te laten aannemen). In die gevallen is het vaak uiterst moeilijk om rechtstreeks een toestand-ruimte-model  $M_\Sigma$  te construeren. Beschikken we echter over voldoende lange input-output-segmenten  $\langle u [t_0, t_1], y [t_0, t_1] \rangle$ , bij voorkeur segmenten  $\langle u [t_u^*, t_1], y [t_u^*, t_1] \rangle$  die beginnen met ingangstijdstip  $t_u^*$ , dan is soms wel een volledige of gedeeltelijke specificatie van input-output-model  $M_{I/O}$  mogelijk. Het probleem wordt vervolgens, hoe een  $M_\Sigma$  en  $x^*$  bij volledig of gedeeltelijk gespecificeerd  $M_{I/O}$  te vinden, zodanig dat is voldaan aan 3.1.19; men noemt dit "realisatie" van  $M_{I/O}$  door  $\langle M_\Sigma, x^* \rangle$ . "The problem of realization thus consists in representing an input/output map by a mathematical model which explicitly displays the memory function. For example, Newton's law may be regarded as a realization of Copernicus' description of the motion of the planets. An input/output dynamical system describes

what happens at the terminals of a device whereas the state space realization describes a machine which realizes this input/output behavior" (9). Realisatie is dus het omgekeerde van afleiding van  $M_{I/O}$  uit  $\langle M_\Sigma, x^* \rangle$ : "To find out what  $M_{I/O}$  is realized by  $\langle M_\Sigma, x^* \rangle$  seems trivial, and it usually is. However to find a realization of a given  $M_{I/O}$  seems hard: it involves choosing  $\Sigma$ ,  $s$ ,  $r$  and  $x^*$ " (10).

Het probleem is niet slechts een of andere realisatie  $\langle M_\Sigma, x^* \rangle$  te vinden maar zo mogelijk de meest efficiënte, waarbij uitsluitend die informatie in  $\Sigma$  wordt opgenomen, die nodig is om  $M_{I/O}$  af te leiden. We zullen deze meest efficiënte of minimale realisatie niet verder verzamelingstheoretisch definiëren. Minimaliteit is echter equivalent met de volgende eigenschappen van toestand-ruimte  $\Sigma$  (11):

1)  $\Sigma$  in zijn geheel bereikbaar vanuit  $x^*$ :

3.1.20 Voor alle  $x \in \Sigma$  bestaat er een  $u \in U$ , zodanig dat  $s(t, t_0, x^*, u) = x$  voor een of andere  $\langle t, t_0 \rangle \in T_+^2$

2)  $\Sigma$  niet-reduceerbaar:

3.1.21 Voor alle  $x_1, x_2 \in \Sigma$  met  $x_1 \neq x_2$  bestaat er een  $u \in U$ , zodanig dat  $\rho(t, t_0, x_1, u) \neq \rho(t, t_0, x_2, u)$  voor een of andere  $\langle t, t_0 \rangle \in T_+^2$

Idealiter bezit  $\Sigma$  ook "connectedness":

3.1.22 Voor alle  $x, x_0 \in \Sigma$  bestaat er een  $u \in U$ , zodanig dat  $s(t, t_0, x_0, u) = x$  voor een of andere  $\langle t, t_0 \rangle \in T_+^2$

Connectedness impliceert bereikbaarheid vanuit iedere  $x \in \Sigma$  (niet slechts vanuit  $x^*$ ) en tevens controleerbaarheid naar iedere  $x \in \Sigma$ ;  $\Sigma$  wordt controleerbaar naar  $x$  genoemd, als we vanuit iedere begintoestand  $x_0 \in \Sigma$  naar beoogde toestand  $x$  kunnen sturen:

3.1.23 Voor alle  $x_0 \in \Sigma$  bestaat er een  $u \in U$ , zodanig dat  $s(t, t_0, x_0, u) = x$  voor een of andere  $\langle t, t_0 \rangle \in T_+^2$

Connectedness mag al worden aangenomen, als  $\Sigma$  controleerbaar is naar een

bepaalde  $x$  en tegelijk bereikbaarheid bezit vanuit dezelfde  $x$ ; connectedness is daarmee equivalent. Een laatste belangrijke eigenschap, die  $\Sigma$  kan bezitten, is observeerbaarheid, waarmee wordt bedoeld dat verschillende begintoestanden vroeg of laat in verschillende output-waarden tot uiting komen; observeerbaarheid aan de hand van  $u \in U$ :

- 3.1.24 Voor alle  $x_1, x_2 \in \Sigma$  met  $x_1 \neq x_2$  bestaat er een  $\langle t, t_0 \rangle \in T_+^2$ , zodanig dat  $\rho(t, t_0, x_1, u) \neq \rho(t, t_0, x_2, u)$

Niet-reduceerbaarheid (3.1.21) wordt geïmpliceerd door 3.1.24 en zeker door observeerbaarheid zonder meer, d.w.z. observeerbaarheid aan de hand van iedere  $u \in U$ .

Willems beperkt zich tot tijd-invariante  $M_{I/O}$  en bewijst, 1) dat ze alle een realisatie  $\langle M_\Sigma, x^* \rangle$  hebben, t.w. de triviale realisatie, 2) dat de triviale realisatie kan worden gereconstrueerd tot de z.g. canonieke realisatie, die minimaal is (bereikbaarheid vanuit  $x^*$  én niet-reduceerbaarheid). Tijd-invariantie maakt het mogelijk  $M_{I/O} \equiv \langle U, Y; F \rangle$  te vervangen door een eenvoudiger equivalent model  $\langle U, Y; f \rangle$  met  $f$  zodanig dat voor iedere  $t$  en translatie-input  $u^t \equiv S_{-t}(u): f(u^t) = (F(u^t))(0) = (F(u))(t)$ . De verandering van  $(F(u))(t_0) = \rho(t_0, t^*, x^*, u)$  naar  $(F(u))(t) = \rho(t, t^*, x^*, u)$  (zie 3.1.17) onder dezelfde input  $u$  wordt nu vervangen door functie-waarden  $f(u^{t_0})$  en  $f(u^t)$  voor twee verschillende translatie-inputs  $u^{t_0} = S_{-t_0}(u)$  en  $u^t = S_{-t}(u)$  van  $u$ . De triviale realisatie bestaat in essentie hieruit, dat we de inputs eenvoudig als toestanden beschouwen en middels  $s$  toestand  $x_0$  laten overgaan in een toestand  $x$ , die gelijk is aan  $u^t$  tot  $u^t(0) = u(t)$ : "in trying to store sufficient data about the past input we decided to store the whole past input" (12).

- 3.1.25 triviale realisatie  $\langle M_\Sigma, x^* \rangle$  van tijd-invariante  $M_{I/O}$

$$\Sigma \equiv U$$

$$x^* \equiv u^*$$

$$s(t, t_0, x_0, u) = x \text{ met } x \equiv u^t$$

$$\text{waarbij } u^t(t') = \begin{cases} x_0(t' - t_0 + t) & \text{voor } t' < t_0 - t \\ u(t' + t) & \text{voor } t_0 - t \leq t' < 0 \\ \text{bijv. } u^*(t') & \text{voor } t' \geq 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r(x(t)) \equiv f(v) \text{ met } v(t') = \begin{cases} (x(t))(t') \text{ voor } t' < 0 \\ \text{bijv. } u^*(t') \text{ voor } t' \geq 0 \end{cases} \\ r(x(t), u(t)) \equiv f(v) \text{ met } v(t') = \begin{cases} (x(t))(t') \text{ voor } t' < 0 \\ u(t) \text{ voor } t' = 0 \\ \text{bijv. } u^*(t') \text{ voor } t' > 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (13)$$

In de canonieke realisatie wordt  $\Sigma \equiv U$  gereduceerd door gebruik te maken van het feit, dat inputs (toestanden) ondanks verschillen tot  $t_0$  toch met ingang van  $t_0$  exact dezelfde output kunnen geven. Dergelijke verschillende inputs worden Nerode-equivalent op  $t_0$  genoemd, als zij voldoen aan 3.1.26:

3.1.26 inputs  $u_1, u_2 \in U$  Nerode-equivalent op  $t_0$   $\leftrightarrow$

voor iedere  $u \in U$  geldt  $F(v_1)(t) = F(v_2)(t)$  voor  $t \geq t_0$  met

$$v_i(t) = \begin{cases} u_i(t) \text{ voor } t < t_0 \quad (i = 1, 2) \\ u(t) \text{ voor } t \geq t_0 \end{cases}$$

Tijd-invariantie maakt het mogelijk te volstaan met Nerode-equivalentie op  $t_0 = 0$ . We zullen schrijven  $u' \sim u$  voor :  $u' \in U$  is met  $u \in U$  Nerode-equivalent op  $t_0 = 0$ ,  $u/\sim$  voor de equivalentie-klasse  $\{u' \in U: u' \sim u\}$  en  $U/\sim$  voor de verzameling van al dergelijke equivalentie-klassen. Als partitie van  $U$  bevat  $U/\sim$  uiteraard veel minder leden dan  $U$ .

3.1.27 canonieke realisatie  $\langle M_\Sigma, x^* \rangle$  van tijd-invariante  $M_{I/0}$

$$\Sigma \equiv U/\sim$$

$$x^* \equiv u^*/\sim$$

$s(t, t_0, x_0, u) = x$  met  $x \in u'/\sim$  bij  $u'$  met

$$u'(t') = \begin{cases} w_0(t' - t_0 + t) \text{ voor enige } w_0 \in x_0 \text{ en } t' < t_0 - t \\ u(t' + t) \text{ voor } t_0 - t \leq t' < 0 \\ \text{bijv. } u^*(t') \text{ voor } t' \geq 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r(x(t)) \equiv f(v) \text{ met } v(t') = \begin{cases} w(t') \text{ voor enige } w \in x(t) \text{ en } t' < 0 \\ \text{bijv. } u^*(t) \text{ voor } t' \geq 0 \end{cases} \\ r(x(t), u(t)) \equiv f(v) \text{ met } v(t') = \begin{cases} w(t') \text{ voor enige } w \in x(t) \text{ en } t' < 0 \\ u(t) \text{ voor } t' = 0 \\ \text{bijv. } u^*(t') \text{ voor } t' > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Minimaliteit - bereikbaarheid vanuit  $x^*$  (3.1.20) en niet-reduceerbaarheid (3.1.21) - is in feite een directe konsekwentie van de constructie van 3.1.27. Noodzakelijke verschillen tussen inputs  $u_1$  en  $u_2$  in verschillende Nerode-equivalentie-klassen  $u_1/\sim$  en  $u_2/\sim$  blijven beperkt tot segment  $u_{(-\infty, 0)}$ ; overigens treffen we in iedere Nerode-equivalentie-klasse iedere  $u_{[0, \infty)}$  aan, i.h.b.  $u_{[0, \infty)}^*$ . Bereikbaarheid van iedere  $u_{(-\infty, 0)}$  impliceert dan ook bereikbaarheid van de hele  $U/\sim$ . Vanwege geslotenheid onder translaties correspondeert er met iedere  $u_{(-\infty, t)}$  inderdaad een  $u_{(-\infty, 0)}$  en omgekeerd, zodat we vanuit  $u_{(-\infty, t)}^*$  de hele  $\Sigma$  kunnen bereiken. Verder betekent het gebruik van Nerode-equivalentie juist, dat er geen toestanden  $x_1, x_2 \in U$  met gelijke response voor alle  $u$  en  $\langle t, t_0 \rangle$  meer over zijn, omdat die telkens in één en dezelfde equivalentie-klasse  $x \in U/\sim$  worden gestopt en door die éne  $x = u/\sim$  worden vervangen.

Het essentiële verschil tussen de triviale en canonieke realisatie heeft betrekking op de toestand-ruimte  $\Sigma$ . In de triviale realisatie bestaat  $\Sigma$  uit functies (inputs), in de canonieke realisatie uit hele functie(input)-klassen. De toestanden van de canonieke realisatie zijn m.a.w. heel andere en ingewikkeldere objecten dan die van de triviale realisatie. Niettemin is er een belangrijke overeenkomst tussen de beide realisaties en hun toestand-ruimten: iedere toestand in de éne realisatie heeft minstens één z.g. equivalente toestand in de andere realisatie.

3.1.28 toestanden  $x \in \Sigma$  en  $\tilde{x} \in \tilde{\Sigma}$  van resp.  $M_\Sigma$  en  $\tilde{M}_\Sigma$  met dezelfde input-ruimte  $U$  equivalent op  $t_0 \leftrightarrow$

voor iedere  $u \in U$  geldt  $\rho(t, t_0, x, u) = \rho(t, t_0, \tilde{x}, u)$  voor alle  $t \geq t_0$

3.1.29 toestand-ruimte modellen  $M_\Sigma$  en  $\tilde{M}_\Sigma$  equivalent  $\leftrightarrow$

op iedere  $t_0 \in T$  is er voor iedere  $x \in \Sigma$  van  $M_\Sigma$  minstens één equivalente  $\tilde{x} \in \tilde{\Sigma}$  van  $\tilde{M}_\Sigma$  en omgekeerd voor iedere  $\tilde{x} \in \tilde{\Sigma}$  van  $\tilde{M}_\Sigma$  minstens één equivalente  $x \in \Sigma$  van  $M_\Sigma$

Equivalente  $\langle M_\Sigma, x^* \rangle$  en  $\langle \tilde{M}_\Sigma, \tilde{x}^* \rangle$  geven dezelfde verzameling input-output-paren  $\langle u, y \rangle$ , d.w.z. zij realiseren dezelfde  $M_{I/O}$ . Omgekeerd hoeven niet alle realisaties van  $M_{I/O}$  equivalent te zijn. Klaarblijkelijk zijn echter

triviale en canonieke realisatie equivalent: met iedere  $x = u$  correspondeert nl. precies één equivalente Nerode-equivalentie-klasse  $\tilde{x} = u/\sim$  en omgekeerd met iedere  $\tilde{x} = u/\sim$  één equivalente  $x = u'$ , t.w.  $u' = u$  naast eventuele andere  $u' \in u/\sim$ .

Lineaire  $M_{I/O}$  en  $M_\Sigma$ , minimaal-dimensionale realisatie in het eindig-dimensionale tijd-invariante geval

Het voordeel van de canonieke realisatie is de minimaliteit. Dat voordeel komt vooral tot uiting bij realisaties van lineaire  $M_{I/O}$ , waar minimaliteit "corresponds to the fact that the dimension of the state space as a vector space is as small as possible" (14). Een lineaire  $M_{I/O} \equiv \langle U, Y; F \rangle$  bestaat uit:

- 1) lineaire ruimten  $U$  en  $Y$  over hetzelfde veld  $F_i$  ( $U$  en  $Y$  lineaire vector-ruimten over  $F_i$ :  $U = F_i^m$ ,  $Y = F_i^r$ , typisch  $F_i = \text{Re}$ ); in een lineaire ruimte zijn optelling en scalaire vermenigvuldiging gedefinieerd, i.c. een unieke functie  $\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2$  (optelling en scalaire vermenigvuldiging van functies) voor alle functies  $v_1, v_2 \in U$  c.q.  $Y$  en alle scalaire getallen  $\alpha_1, \alpha_2 \in F_i$  volgens  $(\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2)(t) \equiv \alpha_1 \cdot v_1(t) + \alpha_2 \cdot v_2(t)$  (optelling en scalaire vermenigvuldiging van vectoren) voor alle  $t \in T$ ,
- 2) een lineaire input-output-functie  $F$ , d.w.z.

$$3.1.30 \quad F(\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2) = \alpha_1 \cdot F(u_1) + \alpha_2 \cdot F(u_2)$$

voor alle  $u_1, u_2 \in U$  en scalaire getallen  $\alpha_1, \alpha_2 \in F_i$

Een lineaire  $M_\Sigma \equiv \langle U, \Sigma, Y; s, r \rangle$  bestaat uit:

- 1) lineaire ruimten  $U, Y$  en  $\Sigma$  over hetzelfde veld  $F_i$  ( $U = F_i^m$ ,  $Y = F_i^r$ , ook in  $\Sigma$  moet op basis van  $F_i$  optelling en scalaire vermenigvuldiging zijn gedefinieerd),
- 2) een lineaire response-functie  $\rho$  (combinatie van  $s$  en  $r$ ), d.w.z.

$$3.1.31 \quad \rho(t, t_0, \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2, \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2) = \alpha_1 \cdot \rho(t, t_0, x_1, u_1) + \alpha_2 \cdot \rho(t, t_0, x_2, u_2)$$

voor alle  $u_1, u_2 \in U$  en scalaire getallen  $\alpha_1, \alpha_2 \in F_i$

Lineaire  $M_{I/O}$  laten altijd lineaire realisatie toe; triviale en canonieke realisatie zijn daar voorbeelden van, hetgeen gezien de lineaire aard van toestand-ruimten  $\Sigma \equiv U$  c.q.  $\Sigma \equiv U/\sim$  en in het licht van 3.1.17 niet verwonderlijk zal zijn. Functie-klassen-ruimte  $U/\sim$  wordt lineair, als we definiëren  $\alpha \cdot u/\sim \equiv \{u' \in U: (\exists u'') (u' = \alpha \cdot u'' \ \& \ u'' \in u/\sim)\}$  en  $u_1/\sim + u_2/\sim \equiv \{u' \in U: (\exists u'')(\exists u''') (u' = u'' + u''' \ \& \ u'' \in u_1/\sim \ \& \ u''' \in u_2/\sim)\}$ , waaruit dan voor lineaire  $M_{I/O}$  is te bewijzen  $(\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2)/\sim = \alpha_1 \cdot u_1/\sim + \alpha_2 \cdot u_2/\sim$  (optelling en scalaire vermenigvuldiging van functie-klassen).

De waarde 0 - met 0 kan afhankelijk van de plaats ook de nul-vector, nul-functie, nul-functie-klasse, etc. bedoeld zijn zoals in  $u(t) = 0$ ,  $u = 0$ ,  $u/\sim = 0$  - neemt in lineaire modellen een bijzondere plaats in: voor  $u = 0$  volgt nl. uit 3.1.30 dat ook  $y = F(0) = 0$  moet zijn; voor  $u = 0$  en  $x_0 = 0$  volgt uit 3.1.31  $y(t) = \rho(t, t_0, 0, 0) = 0$ . Het zal duidelijk zijn, dat voor lineaire  $M_{I/O}$  met  $u^* = 0$  triviale en canonieke realisatie de vorm  $\langle M_\Sigma, 0 \rangle$  met  $x^* = 0$  aannemen; ingeval  $u^* \neq 0$  en  $y^* = F(u^*) \neq 0$  na toepassing van zodanige translatie-transformaties  $\tilde{u} = T(u)$  en  $\tilde{y} = T'(y)$  op alle  $u \in U$  en  $y \in Y$ , dat  $T(u^*) = 0$  en  $T'(y^*) = 0$ . De waarde 0 wordt verder gebruikt in de volgende belangrijke konsekwenties van 3.1.31

1) decompositie-eigenschap (additieve decomposibiliteit van totale response in zero-input-response en zero-state-response)

$$3.1.32 \quad \underbrace{\rho(t, t_0, x_0, u)}_{\text{response}} = \underbrace{\rho(t, t_0, x_0, 0)}_{\text{zero-input-response}} + \underbrace{\rho(t, t_0, 0, u)}_{\text{zero-state-response}}$$

voor  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ,  $x_1 = x_0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = u$  in 3.1.31

2) zero-input-lineariteit

$$3.1.33 \quad \rho(t, t_0, \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2, 0) = \alpha_1 \cdot \rho(t, t_0, x_1, 0) + \alpha_2 \cdot \rho(t, t_0, x_2, 0)$$

voor  $u_1 = u_2 = 0$  in 3.1.31

3) zero-state-lineariteit (superpositie-eigenschap)

$$3.1.34 \quad \rho(t, t_0, 0, \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2) = \alpha_1 \cdot \rho(t, t_0, 0, u_1) + \alpha_2 \cdot \rho(t, t_0, 0, u_2)$$

voor  $x_1 = x_2 = 0$  in 3.1.31

Omgekeerd kunnen we uit de combinatie van eigenschappen 1), 2) en 3) tot lineariteit (3.1.31) besluiten. Uit 3.1.32 volgt nl.

$$\begin{array}{lll} (1) & & (3) & & (5) \\ \alpha_1 \cdot \rho(t, t_0, x_1, u_1) & = & \alpha_1 \cdot \rho(t, t_0, x_1, 0) & + & \alpha_1 \cdot \rho(t, t_0, 0, u_1) \\ (2) & & (4) & & (6) \\ \alpha_2 \cdot \rho(t, t_0, x_2, u_2) & = & \alpha_2 \cdot \rho(t, t_0, x_2, 0) & + & \alpha_2 \cdot \rho(t, t_0, 0, u_2) \end{array}$$

en daaruit

$$(3) + (4) + (5) + (6) = (1) + (2)$$

Vanwege 3.1.33 volgt (3) + (4) = (7) en vanwege 3.1.34 (5) + (6) = (8), zodat

$$\begin{array}{ll} (7) & (8) \\ \rho(t, t_0, \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2, 0) + \rho(t, t_0, 0, \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2) & = (1) + (2) \end{array}$$

Vanwege (7) + (8) =  $\rho(t, t_0, \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2, \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2)$  volgens 3.1.32 volgt dan 3.1.31.

In plaats van de canonieke realisatie met zijn ingewikkelde toestanden kan men in het lineaire geval net zo goed realisatie  $\langle M_{\Sigma}^n, 0 \rangle$  kiezen. In  $M_{\Sigma}^n$  wordt als toestand-ruimte  $\Sigma$  eenvoudig vector-ruimte  $X \equiv \mathbb{F}^n$  genomen (typisch  $\mathbb{F}^n = \mathbb{R}^n$ ) en komt de minimaliteit tot uiting in de dimensionaliteit  $n$  van ruimte  $X$ . In een realisatie  $\langle M_{\Sigma}^n, 0 \rangle$  van minimale dimensionaliteit zijn de toestanden  $n$ -vectoren met een zo klein mogelijk elementen-aantal  $n$ . Weliswaar laten alle lineaire  $M_{I/O}$  zo'n realisatie toe, maar niet altijd is de minimaal-dimensionale vector-ruimte  $X$  eindig-dimensionaal:  $n < \infty$ . Een simpel voorbeeld is een tijdsvertrager (delay-line), bijv. een bandrecorder, waarbij de output gelijk is aan de input, vertraagd met een zuivere (niet-infinitesimale) tijd-lag  $\delta$ :



$$3.1.35 \quad \begin{cases} y(t) = (F(u))(t) = u(t - \delta) \\ x(t) = s(x_0, u|_{[t_0, t)}) \\ y(t) = r(x(t)) \end{cases}$$

Stel nu, dat we functie  $u'$  in 3.1.25 op de volgende wijze vervangen door een zo minimaal mogelijke vector  $x$

$$x \equiv \begin{bmatrix} u'(0 - \Delta t) \\ u'(0 - 2\Delta t) \\ u'(0 - 3\Delta t) \\ \vdots \\ u'(0 - n\Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t - \Delta t) \\ u(t - 2\Delta t) \\ u(t - 3\Delta t) \\ \vdots \\ u(t - \delta) \end{bmatrix} \quad \text{zodat } x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t - \Delta t) \\ x_1(t - \Delta t) \\ x_2(t - \Delta t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t - \Delta t) \end{bmatrix}$$

De dimensionaliteit van het geheugen  $x$  dient in ieder geval zo groot te zijn, dat  $u(t - \delta)$  er nog niet in zit, wil de uitlees-functie  $y(t) = r(x(t)) = x_n(t)$  in staat zijn  $u(t - \delta)$  te geven. Voor discrete tijd treden er geen problemen op:  $n = \delta/\Delta t$ , maar een continue-tijd vertraginglijn  $\Delta t \rightarrow \infty$  eist een oneindig-dimensionale vector-ruimte  $X$ .

Niettemin is een uitzonderlijk groot aantal lineaire, tijd-invariante  $M_{I/O}$  realisabel met  $n < \infty$ . We zullen behalve de eindig-dimensionale  $M_{\Sigma}^n$  zelf ook de daarmee realiseerbare  $M_{I/O}$  eindig-dimensionaal noemen en ons met Willems (15) tot dergelijke modellen beperken.  $n < \infty$  betekent, dat iedere toestandsvector  $x \in X$  kan worden geschreven als een lineaire combinatie  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot b_i$  van  $n$  lineair-onafhankelijke vectoren  $b_i \in F^n$  en  $n$  gewichten  $\alpha_i \in F$ , bijv.

$$\begin{bmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} b_1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} b_2 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{bmatrix} b_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Kiezen we het stel vectoren  $\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$  zodanig, dat telkens het  $i$ -de element in  $b_i$  1 is en de rest 0, dan geldt  $\alpha_i = x_i$  en gaat de zero-input-response  $\rho(t, t_0, x_0, 0)$  voor  $x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot b_i = \sum_{i=1}^n x_i(t_0) \cdot b_i$  wegens 3.1.33 over in

$$\rho(t, t_0, x_0, 0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \rho(t, t_0, b_i, 0) = \sum_{i=1}^n x_i(t_0) \cdot \rho(t, t_0, b_i, 0)$$

hetgeen meestal geschreven wordt als

$$\rho(t, t_0, x_0, 0) = \sum_{i=1}^n x_i(t_0) \cdot \phi_i(t, t_0)$$

of in matrix-vorm

$$36 \quad \rho(t, t_0, x_0, 0) = \phi(t, t_0)x(t_0) \quad \text{met } \phi(t, t_0) \text{ een } m \times n\text{-matrix}$$

en in het tijd-invariante geval, waar de waarden van de  $n$   $m$ -vectoren  $\phi_i(t, t_0)$  slechts afhankelijk zijn van het tijdsverschil  $t - t_0$ , als

$$37 \quad \rho(t, t_0, x_0, 0) = \phi(t - t_0)x(t_0) = \phi(t')x(t_0) \quad \text{met } t' = t - t_0$$

In het tijd-invariante geval zijn er slechts  $n$   $m$ -dimensionale tijd-functies  $\phi_i$  en ieder heeft een eenvoudige interpretatie: het is de zero-input-response-functie voor begin-toestand  $x_0 = b_i$  op tijdstip  $t' = 0$ . We zullen deze  $n$  zero-input-response-functies  $\phi_i$  unit-response-functies noemen. Om voor  $M_{\Sigma}^n$  minimale dimensionaliteit te verkrijgen, is het zaak het aantal functies te beperken tot lineair-onafhankelijke functies, basis-functies genoemd en tezamen een basis voor  $M_{\Sigma}^n$ . Zijn de  $n$  functies  $\phi_i$  niet lineair-onafhankelijk, dan moet er een deelverzameling van  $n'$  functies  $\phi_j$  zijn met  $n' < n$  en  $j = 1, 2, \dots, n'$ , zodat 1)  $\phi_1, \dots, \phi_{n'}$  lineair-onafhankelijk zijn, d.w.z.  $\sum_{j=1}^{n'} \alpha_j \cdot \phi_j = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n'} = 0$ , en 2) ieder van de  $n$  functies  $\phi_i$  kan worden geschreven als een lineaire combinatie van  $\phi_1, \dots, \phi_{n'}$ , d.w.z.  $\phi_i = \sum_{j=1}^{n'} \alpha_{ij} \cdot \phi_j$ . Stel

$$\phi(t') = \phi'(t')\Gamma \text{ met } \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{n'+1,1} & \dots & \alpha_{n1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_{n'+1,2} & \dots & \alpha_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{n'+1,n'} & \dots & \alpha_{nn'} \end{bmatrix}$$

Substitutie in 3.1.37 geeft

$$\rho(t, t_0, x_0, 0) = \phi'(t')\Gamma x(t_0)$$

of

$$\rho(t, t_0, x_0, 0) = \phi'(t')x'(t_0) \text{ met } x'(t_0) = \Gamma x(t_0)$$

De beperking van  $\phi$  met  $n$  functies tot  $\phi'$  met  $n'$  functies leidt dus tevens tot een beperking van  $n$ -dimensionale toestand  $x$  tot  $n'$ -dimensionale toestand  $x'$ , waarbij de nieuwe minimaal-dimensionale  $x'$  als  $x' = \Gamma x$  aan de oude  $x$  is gerelateerd.

Een tijd-invariante minimaal-dimensionale  $M_{\Sigma}^n$  heeft dus 1) een verzameling  $\phi$  (ook te interpreteren als een geordende verzameling of als een matrix-functie) van lineair-onafhankelijke zero-input-responses  $\phi_i$ , waaruit iedere zero-input-response middels lineaire combinatie kan worden opgebouwd, en 2) een toestand-ruimte  $\Sigma = X = F_i^n$ , waarvan de dimensionaliteit  $n$  niet groter is dan het aantal functies  $\phi_i$  in basis  $\phi$ . Hieruit is gemakkelijk te bewijzen, dat een dergelijke  $M_{\Sigma}^n$  observeerbaar - 3.1.24 voor alle  $u \in U$  - moet zijn. Zou dat nl. niet het geval zijn, dan zou voor minstens één input  $u$  en één paar verschillende toestanden  $x_1 \neq x_2$  voor alle  $\langle t, t_0 \rangle$  moeten gelden

$$\rho(t, t_0, x_1, u) = \rho(t, t_0, x_2, u)$$

of vanwege 3.1.32 en 3.1.37

$$\phi(t')x_1 + \rho(t, t_0, 0, u) = \phi(t')x_2 + \rho(t, t_0, 0, u)$$

en dat zou betekenen

$$\phi(t')x_1 = \phi(t')x_2 \quad \text{of} \quad \phi(t')(x_1 - x_2) = 0$$

Vanwege de lineaire onafhankelijkheid van de functies in  $\phi$  kan het laatste alleen als  $x_1 = x_2$ , hetgeen in strijd is met de aanname. Uit de observeerbaarheid volgt vanzelf niet-reduceerbaarheid (3.1.21) van  $\Sigma$ .

Analoog aan de analyse van  $x_0$  als een lineaire combinatie  $\sum_{i=1}^n x_i(t_0) \cdot b_i$  van vectoren  $b_i$  kan u worden geanalyseerd als een lineaire combinatie van tijdfuncties  $f_{ik}$ , t.w. inputs met ieder slechts een (unit-)impulse op tijdstip  $t = k$  in rij (deel-input)  $i$  en voor de rest geheel 0. Analoog aan de herschrijving van de zero-input-response  $\rho(t, t_0, x_0, 0) = \sum_{i=1}^n x_i(t_0) \cdot \rho(t, t_0, b_i, 0) = \sum_{i=1}^n x_i(t_0) \cdot \phi_i(t, t_0)$  kan dan wegens 3.1.34 de zero-state-response worden herschreven

$$\rho(t, t_0, 0, u) = \sum_{k=t_0}^t \sum_{i=1}^r u_i(k) \cdot \rho(t, t_0, 0, f_{ik}) = \sum_{k=t_0}^t \sum_{i=1}^r u_i(k) \cdot H_i(t, k)$$

of in matrix-vorm

$$\rho(t, t_0, 0, u) = \sum_{k=t_0}^t H(t, k)u(k) \quad \text{met } H(t, k) \text{ een } m \times r\text{-matrix}$$

Iedere kolom  $i$  in  $H(t, k)$  geeft de  $m$  deel-output-waarden op tijdstip  $t$  voor een geïsoleerde  $i$ -impulse op tijdstip  $k$ . In het tijd-invariante geval hangt impulse-response  $H(t, k)$  slechts af van het tijdsverschil  $t - k$  en schrijven we  $H(t - k)$ . Er zijn dan slechts  $r$   $m$ -dimensionale tijdfuncties  $H_i$  met waarden  $H_i(t'')$  voor tijdstippen  $t'' = t - k$ . Ieder is te interpreteren als de zero-state-response-functie voor een  $i$ -impulse op tijdstip  $t'' = 0$ . Gebruik makend van de éne tijdfunctie  $H$  met waarden  $H(t'')$

$$3.1.38 \quad \rho(t, t_0, 0, u) = \sum_{k=t_0}^t H(t - k)u(k) = \sum_{k=t_0}^{t-1} H(t - k)u(k) + H(0)u(t)$$

althans voor discrete tijd ( $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\Delta k = 1$ ).

Voor continue tijd wordt geïntegreerd over tijdstippen  $\xi \in \mathbb{R}$ , waarbij de  $u \in \mathcal{U}$ ,  $G$  met waarden  $G(t'') = G(t - \xi)$  en de  $y \in \mathcal{Y}$  worden beperkt tot stuksgewijs continue tijdfuncties:

$$3.1.39 \quad \rho(t, t_0, 0, u) = \int_{t_0}^t H(t - \xi)u(\xi)d\xi = \int_{t_0}^t G(t - \xi)u(\xi)d\xi + G_0u(t)$$

De impulse-response  $H(t'')$

$$3.1.40 \quad H(t'') = G(t'') + G_0\delta(t'')$$

bevat hier het product van matrix  $G_0$ , welke niet met matrix  $G(0)$  moet worden verward, met delta-functie  $\delta(t'') = \delta(t - \xi)$ . De delta-functie definieert voor continue tijd de (unit-)impulse.  $G(t'')$  geeft de impulse-response op tijdstip  $t$  voor impulse  $\delta(\tau - \xi)$  op tijdstip  $\tau = \xi$  maar bevat zelf geen delta-functies. De term  $G_0\delta(t'')$  is nodig om  $u$  ook op tijdstip  $t$  een bijdrage aan  $\rho(t, t_0, 0, u)$  te laten leveren middels  $G_0u(t)$  in 3.1.39 evenals dat middels  $H(0)u(t)$  gebeurt in 3.1.38.  $H(0)$  en  $G_0$  definiëren dus voor resp. discrete en continue tijd "feedthrough" met een zwak-causale  $\rho$  als resultaat. Uiteraard is in 3.1.39 toegestaan  $H(t'') = G(t'')$  of  $G_0 = 0$  evenals in 3.1.38  $H(0) = 0$  met een sterk-causale  $\rho$  als resultaat. De vorm  $\int_{t_0}^t G(t - \xi)u(\xi)d\xi + G_0u(t)$  in 3.1.39 geeft overigens geen algemene definitie voor lineaire continue-tijd zero-state-response-functies, zelfs niet voor de tijd-invariante, maar omvat wel alle eindig-dimensionale tijd-invariante gevallen, waar het realisatie-probleem toe werd beperkt. Oneindig-dimensionaal zou het realisatie-probleem worden, indien  $G_0\delta(t'')$  werd vervangen door  $\sum_{k=0}^{\infty} G_k\delta(t'' - \tau_k)$  en  $G_0u(t)$  door  $\sum_{k=0}^{\infty} G_ku(t - \tau_k)$  met een reeks getallen  $\tau_k$  ( $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots$  en  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \infty$ ). Iedere  $\tau_k \geq \tau_1$  met  $G_k \neq 0$  zou een zuivere tijd-lag tot gevolg hebben en daardoor een oneindig-dimensionaal realisatie-probleem opleveren.

Combinatie van 3.1.37 en 3.1.38 c.q. 3.1.39 middels 3.1.32 geeft de volgende uitdrukking voor lineaire response-functie  $\rho$ , waarin evenals in 3.1.37  $x_0 = x(t_0)$  is gekozen.

$$3.1.41 \quad \rho(t, t_0, x_0, u) \left\{ \begin{array}{l} = \phi(t - t_0)x(t_0) + \sum_{k=t_0}^{t-1} H(t - k)u(k) + H(0)u(t) \\ = \underbrace{\phi(t - t_0)x(t_0)}_{\text{zero-input-response}} + \underbrace{\int_{t_0}^t G(t - \xi)u(\xi)d\xi + G_0u(t)}_{\text{zero-state-response}} \end{array} \right.$$

Kiezen we oertoestand  $x^* = 0$  in realisatie  $\langle M_{\Sigma}^n, 0 \rangle$  van lineaire, eindig-dimensionale en tijd-invariante  $M_{I/0}$ , dan volgt voor 3.1.17 wegens 3.1.38 c.q. 3.1.39

$$3.1.42 \quad \rho(t, t^*, 0, u) \begin{cases} = (F(u))(t) = \sum_{k=t^*}^{t-1} H(t-k)u(k) + H(0)u(t) \\ = (F(u))(t) = \int_{t^*}^t G(t-\xi)u(\xi)d\xi + G_0u(t) \end{cases}$$

De response-separatie-eigenschap betekent

$$\rho(t, t^*, 0, u) = \rho(t, t_0, x_0, u)$$

en vanwege 3.1.42 en 3.1.41

$$\begin{aligned} \sum_{k=t^*}^{t-1} H(t-k)u(k) + H(0)u(t) &= \phi(t-t_0)x(t_0) + \sum_{k=t_0}^{t-1} H(t-k)u(k) + H(0)u(t) \\ \int_{t^*}^t G(t-\xi)u(\xi)d\xi + G_0u(t) &= \phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t G(t-\xi)u(\xi)d\xi + G_0u(t) \end{aligned}$$

Kiezen we voor  $u$  de impuls  $f_{ik}$  c.q.  $f_{i\xi}$  - in het laatste geval dus een delta-functie - voor een willekeurig tijdstip  $k < t_0$  c.q.  $\xi < t_0$  met tijdsverschil  $t_0 - k = \alpha$  c.q.  $t_0 - \xi = \alpha$ , dan volgt

$$H_i(t' + \alpha) = \phi(t')x(t_0)$$

$$G_i(t' + \alpha) = \phi(t')x(t_0)$$

Iedere functie  $H_i$  c.q.  $G_i$  in response-functie 3.1.41 is klaarblijkelijk te schrijven als een bepaalde lineaire combinatie van de  $n$  basis-functies. In matrix-vorm samengevat

$$\left. \begin{array}{l} H(t' + \alpha) \\ G(t' + \alpha) \end{array} \right\} = \phi(t')X \quad \text{met } X \text{ een } n \times r\text{-matrix}$$

Omgekeerd moeten de basis-functies in overeenstemming met dit verband worden gekozen.

Van de beide functies  $r$  en  $s$ , waarin  $\rho$  moet worden gesplitst om realisatie  $\langle M_{\Sigma}^n, 0 \rangle$  te verkrijgen, volgt  $r$  direct uit  $\rho$  als instantane response-functie  $y(t) = r(t, x(t), u(t)) = \rho(t, t, x(t), u)$  en dus vanwege 3.1.41

$$3.1.43 \quad y(t) = \begin{cases} \phi(0)x(t) + H(0)u(t) \\ \phi(0)x(t) + G_0u(t) \end{cases}$$

Zadeh en Desoer (16) laten voor unidimensionele in- en output zien, hoe op basis van resp.  $\phi$  en  $H$  c.q.  $G$  in  $\rho$  ook  $\phi$  en  $H$  in  $s$  afgeleid kunnen worden

$$3.1.44 \quad x(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0)x(t_0) + \sum_{k=t_0}^{t-1} H(t - k)u(k) \\ \phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t - \xi)u(\xi)d\xi \end{cases}$$

$\phi(t')$  van de orde  $n \times n$  wordt de toestand-overgangsmatrix genoemd en kan onder gelijktijdige transformatie van  $\phi(t')$  en  $X$  zo worden gekozen, dat  $\phi(t_0 - t_0) = \phi(0) = I$ .

De door Zadeh en Desoer gevolgde benadering via de basis-functies is overigens nogal abstract van aard en in ieder geval moeilijk praktisch uitvoerbaar. Praktischer en niet beperkt tot unidimensionele in- en output zijn de nog tamelijk recent ontwikkelde procedures, die uit  $H$  rechtstreeks de matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en  $D$  berekenen, waarin  $s$  en  $r$  kunnen worden uitgedrukt. Vanwege de toestand-separatie-eigenschap geldt voor  $s$

$$x(t) = s(t, t_0, x_0, u) = s(t, t - 1, x(t - 1), u)$$

en dat betekent voor de eerste regel van 3.1.44 (discrete tijd)

$$x(t) = \phi(1)x(t - 1) + H(1)u(t - 1)$$

of iteratief van  $t$  naar  $t + 1$

$$x(t + 1) = \phi(1)x(t) + H(1)u(t)$$

Aangezien voor  $t_0 = t$  uit de eerste regel van 3.1.44 volgt

$$x(t) = \Phi(0)x(t) \quad \text{met } \Phi(0) = I$$

kunnen we  $s$  op de volgende wijze uitdrukken in de vorm van een differentie-vergelijking (toestand-differentie-vergelijking):

$$x(t+1) - x(t) = \Phi(1)x(t) - \Phi(0)x(t) + H(1)u(t) \quad \text{of}$$

$$\Delta x(t) = (\Delta \Phi(0))x(t) + H(1)u(t)$$

De tweede regel van 3.1.44 wordt in de vorm van een differentiaal-vergelijking (toestand-differentiaal-vergelijking):

$$\frac{d}{dt} x(t) = \left(\frac{d}{dt} \Phi(0)\right)x(t) + H(0)u(t)$$

hetgeen vaak geschreven wordt als

$$\dot{x}(t) = \dot{\Phi}(0)x(t) + H(0)u(t)$$

waarin de punt de aanduiding voor het differentiaal-quotiënt vervangt. Realisatie  $\langle M_{\Sigma}^n, 0 \rangle$  van lineaire, eindig-dimensionale en tijd-invariante  $M_{I/O}$  kan daarom in het geval van discrete tijd  $t \in \mathbb{Z}$  de volgende differentie-vorm worden gegeven:

$$45 \quad \Delta x(t) = (\Delta \Phi(0))x(t) + H(1)u(t)$$

$$y(t) = \Phi(0)x(t) + H(0)u(t)$$

en in het geval van continue tijd  $t \in \mathbb{R}$  de volgende differentiële vorm:

$$46 \quad \dot{x}(t) = \dot{\Phi}(0)x(t) + H(0)u(t)$$

$$y(t) = \Phi(0)x(t) + G_0 u(t)$$

De 4 matrices  $\Delta \Phi(0)$ ,  $H(1)$ ,  $\Phi(0)$  en  $H(0)$  c.q.  $\dot{\Phi}(0)$ ,  $H(0)$ ,  $\Phi(0)$  en  $G_0$  zijn constanten vanwege de tijd-invariantie en worden daarom ook als A, B, C en D aangeduid:



$$3.1.47 \quad \begin{aligned} \Delta x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \rightarrow x(t+1) = \tilde{A}x(t) + Bu(t) \quad \text{met } \tilde{A} = (A + I) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

$$3.1.48 \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Het bijbehorende model, gedefinieerd door 3.1.47 c.q. 3.1.48, wordt met  $[A, B, C, D]$  aangeduid.

Willems (17) heeft op gedetailleerdwijze laten zien, hoe de minimale dimensionaliteit  $n$  en de matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en  $D$  voor een input-output-functie  $F$  van de vorm 3.1.49 c.q. 3.1.50 worden gevonden.

$$3.1.49 \quad (F(u))(t) = \left. \begin{aligned} &\sum_{k=-\infty}^{t-1} H(t-k)u(k) + H(0)u(t) \end{aligned} \right\} \text{ zie 3.1.42 voor } t_* = -\infty$$

$$3.1.50 \quad (F(u))(t) = \left. \begin{aligned} &\int_{-\infty}^t G(t-\xi)u(\xi)d\xi + G_0u(t) \end{aligned} \right\}$$

Willems leidt  $s$ ,  $r$  en  $\rho$  dus af uit  $H(t'')$  c.q.  $G(t'')$  en  $G_0$ . Zijn rekenprocedures vooronderstellen, dat de input-output-functie  $F$  in input-output-model  $\langle u, y; F \rangle$  in de vorm van impulse-response  $H(t'')$  c.q. de samenstellende elementen  $G(t'')$  en  $G_0$  in  $H(t'') = G(t'') + G_0\delta(t'')$  is gegeven. Dat betekent voor discrete tijd, dat strikt genomen de matrices  $H(t'') = H(t-k)$  gegeven moeten zijn voor impulsen op tijdstip  $k = t$  en ieder eerder tijdstip  $k < t$  tot  $k = -\infty$ . In het algemeen zal echter de impulse-response  $H(t-k)$  afnemen, naarmate de tijdsafstand  $t'' = t-k$  groter is, en voor  $t'' > a$  bij een bepaalde tijdsafstand  $a$  geheel tot 0 reduceren. In de praktijk heeft men dan ook vaak voldoende aan de impulse-response  $H(t'')$  over een eindig tijdsinterval. Analoog geldt dit voor continue tijd.  $G(t'')$  in de impulse-response moet hier in ieder geval voldoen aan:

$$\int_0^{\tau} \|G(t'')\| dt'' < \infty \quad \text{voor alle } \tau \in \text{Re}$$

waarin als norm  $\|G(t'')\|$  van matrix  $G(t'')$  kan worden genomen het getal

$$\|G(t'')\| = \max_i \sum_{j=1}^r |g_{ij}|$$

met  $|g_{ij}|$  de absolute cel-waarde in rij  $i$  en kolom  $j$ .

Realisatie  $\langle M_{\Sigma}^n, 0 \rangle$  van minimale dimensionaliteit  $n$  bezit niet alleen observeerbaarheid - 3.1.24 voor alle  $u \in U$  - zoals eerder aan de hand van de  $n$  basis-functies bewezen en daardoor niet-reduceerbaarheid (3.1.21) maar tevens bereikbaarheid vanuit  $x^* = 0$  (3.1.20). Vormt men uit de  $n$  opeenvolgende matrices  $B, \tilde{A}B, \tilde{A}^2B, \dots, \tilde{A}^{n-1}B$  (discrete tijd) c.q.  $B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$  (continue tijd) de supermatrix

$$Q = [B | \tilde{A}B | \tilde{A}^2B | \dots | \tilde{A}^{n-1}B] \quad \text{c.q.} \quad Q = [B | AB | A^2B | \dots | A^{n-1}B]$$

dan kan uit de minimale dimensionaliteit worden afgeleid voor de z.g. bereikbaarheidsindex Rang  $Q$  van  $[A, B, C, D]$

### 3.1.51 Rang $Q = n$

De  $nr$  kolommen van  $Q$  omvatten dus  $n$  lineair onafhankelijke vectoren  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , die daarom een basis vormen voor de toestand-ruimte  $X = F_1^n$ , zodat iedere toestandsvector  $x \in X$  als een lineaire combinatie van deze vectoren in  $Q$  kan worden geschreven

$$x = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n] \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_n \end{bmatrix}$$

met  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  de gewichten voor  $x$  bij de gekozen basis  $\langle q_1, q_2, \dots, q_n \rangle$ . Hieruit volgt, dat iedere  $x \in X$  in een eindig tijds-interval  $[t_0, t_1]$  bereikbaar is vanuit  $x^* = 0$ . Voor discrete tijd is niet meer dan  $n$  stappen. Volgens 3.1.47 kan men nl. vanuit  $x(t_0) = x^* = 0$  iteratief afleiden

$$x(t_0 + 1) = Bu(t_0)$$

$$x(t_0 + 2) = Bu(t_0 + 1) + \tilde{A}Bu(t_0)$$

.

.

$$x(t_0 + n) = Bu(t_0 + n - 1) + \tilde{A}Bu(t_0 + n - 2) + \dots + \tilde{A}^{n-1}Bu(t_0)$$

of

$$3.1.52 \quad x(t_1) = Bu(t_1 - 1) + \tilde{A}Bu(t_1 - 2) + \dots + \tilde{A}^{n-1}Bu(t_1 - n) = Q\bar{u}$$

waarin  $\bar{u}$  de nr-kolomvector is, bestaande uit de elementen van de n r-dimensionale input-waarden  $u(t_1 - 1), u(t_1 - 2), \dots, u(t_1 - n)$ . Zijn de kolommen i, j, ..., m van Q lineair onafhankelijk, dan wordt willekeurige  $x \in X$  als  $x(t_1)$  op tijdstip  $t_1$  bereikt, indien in  $\bar{u}$  voor die elementen i, j, ..., m de bijbehorende  $\gamma$ -gewichten voor x worden gekozen en alle overige elementen worden gelijkgesteld met 0. Voor continue tijd wordt de bereikbaarheid vanuit  $x^* = 0$  op analoge wijze bewezen. Het tijdsinterval  $[t_0, t_1]$  met  $t_1 \neq t_0$  kan hier echter willekeurig klein worden gekozen.

Aangezien niet-reduceerbaarheid en bereikbaarheid vanuit  $x^* = 0$  tezamen equivalent zijn met minimaliteit (11), bezit realisatie  $\langle M_{\Sigma}^n, 0 \rangle$  van minimale dimensionaliteit n dus evenals de canonieke realisatie minimaliteit. Nu zijn alle minimale realisaties 1-1-op-equivalent (18) en dat verduidelijkt zowel de aard van  $\langle M_{\Sigma}^n, 0 \rangle$  als van de canonieke realisatie.

3.1.53 tijd-invariante toestand-ruimte-modellen  $M_{\Sigma}$  en  $\tilde{M}_{\tilde{\Sigma}}$  1-1-op-equivalent (zie fig. 3.1.1):

voor iedere  $x \in \Sigma$  van  $M_{\Sigma}$  is er één en niet meer dan één equivalente  $\tilde{x} \in \tilde{\Sigma}$  van  $\tilde{M}_{\tilde{\Sigma}}$  en omgekeerd:

$\Sigma$  en  $\tilde{\Sigma}$  zijn verbonden middels 1-1-op-functie  $T: \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$

met  $\tilde{x} = Tx$  en  $x = T^{-1}\tilde{x}$  equivalent, d.w.z.

$\tilde{s}(\cdot, \cdot, \tilde{x}_0, \cdot) = Ts(\cdot, \cdot, T^{-1}\tilde{x}_0, \cdot)$  en

$s(\cdot, \cdot, x_0, \cdot) = T^{-1}\tilde{s}(\cdot, \cdot, Tx_0, \cdot)$  en

$r(x(t), ?) = r(T^{-1}\tilde{x}(t), ?)$

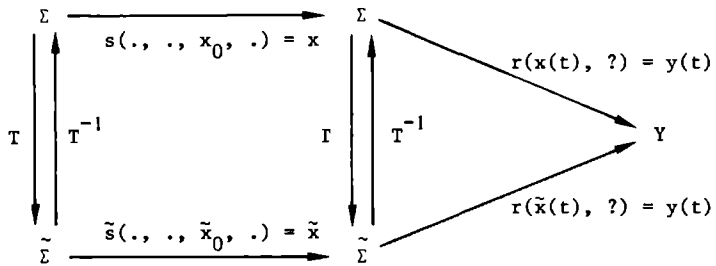


Fig. 3.1.1: 1-1-op-equivalente toestandsruimte-modellen (tijdinvariant).

Het betekent, dat  $\langle M_{\Sigma}^n, 0 \rangle$  niet alleen equivalent is met de canonieke realisatie zoals de canonieke op haar beurt met de triviale equivalent is, maar dat er met iedere toestand (n-vector)  $x \in Fi^n$  één en niet meer dan één equivalente toestand (input-klasse)  $x \in U/\sim$  correspondeert en omgekeerd. Het effect van 1-1-op-functie  $T: Fi^n \rightarrow U/\sim$  is niets anders dan een "relabeling" van de elementen in de toestand-ruimten van  $\langle M_{\Sigma}^n, 0 \rangle$  en de canonieke realisatie. Alles wat bewijsbaar is voor  $\langle M_{\Sigma}^n, 0 \rangle$  is in termen van de nieuwe toestand-ruimte bewijsbaar voor de canonieke realisatie en omgekeerd. Zo bezit de canonieke realisatie bijv. evenals  $\langle M_{\Sigma}^n, 0 \rangle$  observeerbaarheid.

De observeerbaarheid van  $\langle M_{\Sigma}^n, 0 \rangle$  kan ten slotte worden benut om bij toepassingen begintoestand  $x(t_0)$  af te leiden op een bepaald gewenst tijdstip  $t_0$ . Zonder die mogelijkheid zou men input  $u$  over het hele tijds-interval vanaf  $t^* < t_u^*$  moeten kennen om vanuit  $x^* = 0$  op  $t^*$   $x(t) = s(t, t^*, x^*, u)$  en  $y(t) = \rho(t, t^*, x^*, u)$  op  $t$  te kunnen bepalen. Het toestand-ruimte-model zou dan nauwelijks voordelen bieden boven het input-output-model, waarbij eveneens de hele input  $u$  vanaf  $t^* < t_u^*$  bekend moet zijn om  $y(t) = (F(u))(t)$  te bepalen. Observeerbaarheid aan de hand van iedere  $u \in U$  betekent, dat iedere  $u \in U$  een of ander segment  $u_{[t_0, t_1]}$  omvat, zodat verschillende begintoestanden  $x(t_0)$  tot verschillende output-segmenten  $y_{[t_0, t_1]}$  leiden en dus omgekeerd bij  $y_{[t_0, t_1]}$  slechts één en dezelfde  $x(t_0)$  kan behoren. Vanwege de tijd-invariantie moet er bovendien voor iedere willekeurige  $t_0$  een tijdsinterval  $[t_0, t_1]$  zijn, zodat  $x(t_0)$  uit  $u_{[t_0, t_1]}$  en  $y_{[t_0, t_1]}$  afleidbaar is. Gebruik wordt gemaakt van supermatrix  $P$

$$P = \begin{bmatrix} C \\ \sim \\ CA \\ \sim \\ CA^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sim \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{c.q.} \quad P = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

en van de z.g. observeerbaarheidsindex Rang  $P$  van  $[A, B, C, D]$ , waarvoor vanwege de minimale dimensionaliteit kan worden bewezen

3.1.54 Rang  $P = n$ 

zodat de  $n$  kolommen van  $P$  lineair onafhankelijk zijn. Voor discrete tijd heeft men niet meer dan  $n$  stappen nodig, welke volgens 3.1.47 iteratief berekend kunnen worden.

$$\begin{aligned} y(t_0) &= Cx(t_0) + Du(t_0) \\ &= Cx(t_0) + H(0)u(t_0) \end{aligned}$$

·  
·  
·

$$\begin{aligned} y(t_1 - 1) &= CA^{\tilde{n}-2}x(t_0) + C \sum_{k=t_0}^{t_1-2} A^{\tilde{n}-k-2} Bu(k) + Du(t_1 - 1) \\ &= CA^{\tilde{n}-2}x(t_0) + \sum_{k=t_0}^{t_1-2} H(t_1 - k - 1)u(k) + H(0)u(t_1 - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t_1) &= CA^{\tilde{n}-1}x(t_0) + C \sum_{k=t_0}^{t_1-1} A^{\tilde{n}-k-1} Bu(k) + Du(t_1) \\ &= CA^{\tilde{n}-1}x(t_0) + \sum_{k=t_0}^{t_1-1} H(t_1 - k)u(k) + H(0)u(t_1) \end{aligned}$$

Aan het eind van iedere regel vindt men blijkens 3.1.41 de zero-state-response. Het geheel kan worden geschreven als

$$\bar{y} = Px(t_0) + R\bar{u}$$

waarin  $m$ -kolomvector  $\bar{y}$  een kolomsgewijze schrijfwijze voor output-segment  $y[t_0, t_1]$  is en analoog  $n$ -kolomvector  $\bar{u}$  voor input-segment  $u[t_0, t_1]$ . Berekenen we de zero-state-response  $R\bar{u}$  en trekken we deze af van  $\bar{y}$ , dan is de resulterende zero-input-response  $\bar{y}_-$

$$3.1.55 \quad \bar{y}_- = \bar{y} - R\bar{u} = Px(t_0)$$

wegens 3.1.54 een lineaire combinatie van de  $n$  lineair onafhankelijke kolom-vectoren in  $P$ . Begintoestand  $x(t_0)$  wordt gevonden door de bijbehorende gewichten te berekenen en in te vullen. Analoog gaat men te werk voor continue tijd. Het tijdsinterval  $[t_0, t_1]$  met  $t_1 \neq t_0$  kan hier echter willekeurig klein worden gekozen.

2. Toestand-ruimte-modellen via modellen  $[A, B, C, D]$  en  $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$ :  
oplossing procedures en stabiliteit

Modellen  $[A, B, C, D]$  met constante matrices  $A, B, C, D$  - zie 3.1.47 c.q. 3.1.48 - bezitten een hoge graad van algemeenheid. Zo zijn differentie-vergelijkingen 2.2.8 en 2.2.11 met hun oplossingen 2.2.9 en 2.2.13 in feite bijzondere gevallen van 3.1.47 met de oplossing daarvan. Differentiaal-vergelijkingen 2.2.18 en 2.2.20 met hun oplossingen 2.2.19 en 2.2.21 zijn in feite bijzondere gevallen van 3.1.48 met de oplossing daarvan. 3.1.47 gaat bijv. over in 2.2.11

$$\Delta v_2^y(t) = a_{20} + a_{21} \cdot v_1^y(t) + a_{22} \cdot v_2^y(t)$$

door voor matrices  $A, B, C, D$ , input-waarde  $u(t)$  en output-waarde  $y(t)$  te kiezen:

$$\begin{aligned} A &= [a_{22}] & u(t) &= \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0^y(t) \\ v_1^y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ v_1^y(t) \end{bmatrix} \\ B &= [a_{20} \ a_{21}] \\ C &= [1] & y(t) &= [v_2^y(t)] \\ D &= [0 \ 0] \end{aligned}$$

Een constante coëfficiënt zoals  $a_{20}$  wordt verwerkt middels pseudo-variabele  $v_0^y(t)$

$$\Delta v_2^y(t) = a_{20} \cdot v_0^y(t) + a_{21} \cdot v_1^y(t) + a_{22} \cdot v_2^y(t)$$

welke kunstmatig de waarde 1 wordt gegeven voor alle tijdstippen  $t$ , d.w.z. voor  $u_1$  wordt de unit-input gekozen.

Ook differentie- en differentiaal-vergelijkingen van hogere orde kunnen middels pseudo-variabelen in  $[A, B, C, D]$  worden ondergebracht. Neem bijv. 2<sup>e</sup>-orde differentie-vergelijking

$$3.2.1 \quad \Delta^2 v_2^y(t) = a_{20} \cdot v_0^y(t) + a_{21} \cdot v_1^y(t) + a_{22} \cdot v_2^y(t)$$

welke ook is te schrijven als

$$\Delta_1^2 v_2^y(t) - a_{22} \cdot v_2^y(t) = a_{20} \cdot v_0^y(t) + a_{21} \cdot v_1^y(t)$$

Vanwege

$$\Delta_1^2 v_2^y(t) = \Delta_1 [\Delta_1 v_2^y(t)] = [v_2^y(t+2) - v_2^y(t+1)] - [v_2^y(t+1) - v_2^y(t)] = v_2^y(t+2) - 2v_2^y(t+1) + v_2^y(t)$$

luit een alternatieve formulering

$$v_2^y(t+2) - 2v_2^y(t+1) - (a_{22} - 1) \cdot v_2^y(t) = a_{20} \cdot v_0^y(t) + a_{21} \cdot v_1^y(t)$$

Algemene formuleringen voor een  $n^e$ -orde differentie-vergelijking luiden

$$3.2.2 \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1^n v_2^y(t) + \alpha_1 \cdot \Delta_1^{n-1} v_2^y(t) + \alpha_2 \cdot \Delta_1^{n-2} v_2^y(t) + \dots + \alpha_{n-1} \cdot \Delta_1 v_2^y(t) + \alpha_n \cdot v_2^y(t) = \\ \beta_0 \cdot v_0^y(t) + \beta_1 \cdot v_1^y(t) \\ v_2^y(t+n) + \alpha_1 \cdot v_2^y(t+n-1) + \alpha_2 \cdot v_2^y(t+n-2) + \dots + \alpha_{n-1} \cdot v_2^y(t+1) + \\ \alpha_n \cdot v_2^y(t) = \beta_0 \cdot v_0^y(t) + \beta_1 \cdot v_1^y(t) \end{array} \right.$$

Keuze van pseudo-variabelen  $x_1(t) = \Delta_1^{n-1} v_2^y(t)$ ,  $x_2(t) = \Delta_1^{n-2} v_2^y(t)$ , ...,

$x_{n-1}(t) = \Delta_1 v_2^y(t)$ ,  $x_n(t) = v_2^y(t)$  in de eerste formulering onder 3.2.2

geeft het volgende stelsel van  $n$  vergelijkingen

$$\Delta_1 x_1(t) = -\alpha_1 \cdot x_1(t) - \alpha_2 \cdot x_2(t) - \dots - \alpha_{n-1} \cdot x_{n-1}(t) - \alpha_n \cdot x_n(t) + \beta_0 \cdot v_0^y(t) + \beta_1 \cdot v_1^y(t)$$

$$\Delta_1 x_2(t) = x_1(t)$$

.

.

.

$$\Delta_1 x_{n-1}(t) = x_{n-2}(t)$$

$$\Delta_1 x_n(t) = x_{n-1}(t)$$

dat van de vorm  $\Delta_1 x(t) = Ax(t) + Bu(t)$  - zie 3.1.47 - is met  $A$ ,  $B$  en  $u(t)$

zoals aangegeven onder 3.2.3. Keuze van pseudo-variabelen



$x_1(t) = v_2^y(t + n - 1)$ ,  $x_2(t) = v_2^y(t + n - 2)$ , ...,  $x_{n-1}(t) = v_2^y(t + 1)$ ,  
 $x_n(t) = v_2^y(t)$  in de tweede formulering onder 3.2.2 geeft op analoge wijze  
 aanleiding tot een stelsel van de vorm  $x(t) = \tilde{A}x(t) + Bu(t)$  - zie 3.1.47 -  
 met  $\tilde{A}$ , B en  $u(t)$  zoals aangegeven onder 3.2.3

$$3.2.3 \quad \text{A c.q. } \tilde{A} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} v_0^y(t) \\ v_1^y(t) \end{bmatrix}$$

Op deze wijze gaat 3.1.47 over in 3.2.1 door keuze van

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{22} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{c.q. } \tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & (a_{22} - 1) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} v_0^y(t) \\ v_1^y(t) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{20} & a_{21} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y(t) = [v_2^y(t)]$$

$$C = [0 \quad 1]$$

$$D = [0 \quad 0]$$

Aan de hand van de oplossing zal blijken, dat  $[A, B, C, D]$  een lineair  
 toestand-ruimte-model  $M_\Sigma$  definieert. De lineariteitsassumptie is echter  
 minder restrictief dan op het eerste gezicht lijkt. Niet-lineaire ver-  
 gelijkingen kunnen nl. lineair zijn in geschikte transformaties van een  
 of meer variabelen. Veelgebruikte transformaties zijn de logaritmische  
 en reciproke

$$w_i^y(t) = \log v_i^y(t) \quad w_i^y(t) = \frac{1}{v_i^y(t)}$$

Ook polynomen en vergelijkingen met multiplicatieve termen kunnen middels transformaties gelineariseerd worden, bijv.

$$\Delta v_3^y(t) = a_{31} \cdot v_1^y(t) + a_{32} \cdot v_2^y(t) + b_{31} [v_1^y(t)]^2 + b_{32} [v_2^y(t)]^2 + a_{312} \cdot v_1^y(t) \cdot v_2^y(t)$$

middels transformaties

$$w_1^y(t) = [v_1^y(t)]^2$$

$$w_2^y(t) = [v_2^y(t)]^2$$

$$w_{12}^y(t) = v_1^y(t) \cdot v_2^y(t)$$

tot

$$\Delta v_3^y(t) = a_{31} \cdot v_1^y(t) + a_{32} \cdot v_2^y(t) + b_{31} \cdot w_1^y(t) + b_{32} \cdot w_2^y(t) + a_{312} \cdot w_{12}^y(t)$$

Voorts kunnen de invloeden van niet-metrische variabelen worden gelineariseerd middels een speciaal soort pseudo-variabelen, de z.g. "dummy"-variabelen. Stel, dat het gaat om de invloed van de 4 seizoenen, bijv. in een economische relatie. De seizoensvariabele, die  $k = 4$  waarden aanneemt, wordt dan vervangen door  $k - 1 = 3$  dummy-variabelen  $z_1^y(t)$ ,  $z_2^y(t)$  en  $z_3^y(t)$ , bijv.

$$\Delta v_2^y(t) = a_{20} \cdot v_0^y(t) + c_{21} \cdot z_1^y(t) + c_{22} \cdot z_2^y(t) + c_{23} \cdot z_3^y(t) + a_{21} \cdot v_1^y(t)$$

Afhankelijk van het seizoen wordt aan de dummy-variabelen tezamen met de unit-variabele  $v_0^y(t)$  kunstmatig het volgende patroon van waarde-combinaties toegekend

	$v_0^y(t)$	$z_1^y(t)$	$z_2^y(t)$	$z_3^y(t)$	invloed
lente	1	0	0	0	$a_{20}$
zomer	1	1	0	0	$a_{20} + c_{21}$
herfst	1	0	1	0	$a_{20} + c_{22}$
winter	1	0	0	1	$a_{20} + c_{23}$

Onder de toegekende combinaties wordt de lente-Invloed op  $\Delta v_1^y(t)$  gegeven door  $a_{20}$ , de zomer-Invloed door  $a_{20} + c_{21}$ , etc.

Zo dadelijk zullen naast  $[A, B, C, D]$  ook  $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$  met tijdsafhankelijke matrices  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  en  $D(t)$  en  $[f(\cdot, \cdot, t)$ ,  $g(\cdot, \cdot, t)]$  worden geïntroduceerd.  $[f(\cdot, \cdot, t)$ ,  $g(\cdot, \cdot, t)]$  definiëert in tegenstelling tot  $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$  en  $[A, B, C, D]$  een niet-lineair toestand-ruimte-model  $M_\Sigma$ . Een laatste belangrijke eigenschap van de lineaire  $M_\Sigma$ , gedefinieerd door  $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$  en  $[A, B, C, D]$ , is nu, dat zij bruikbaar zijn om zo'n niet-lineair  $M_\Sigma$  rond een bepaalde nominale oplossing (uitgange- of werkoplossing) \* te benaderen. De benadering is "tot op eerste orde", hetgeen exakt gedefinieerd kan worden. Vaak wordt als \* een oplossing gekozen met de input en toestand in evenwicht:  $u^*(t) = c_1$  en  $x^*(t) = c_2$  voor alle  $t \in T$ . Indien dan tevens  $f$  en  $g$  onafhankelijk van  $t$  zijn en het niet-lineaire model dus tijd-invariant, wordt ook het gelineariseerde model  $M_\Sigma^*$  rond \* tijd-invariant en dus uitdrukbaar in  $[A, B, C, D]$ .  $M_\Sigma^*$  en bijbehorende  $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$  of  $[A, B, C, D]$  worden gedefinieerd in termen van afwijkingswaarden  $\Delta u(t) \in U$ ,  $\Delta x(t) \in \Sigma$ ,  $\Delta y(t) \in Y$  t.o.v. van oplossing \*. Uitgaande van begintoestand  $\Delta x(t_0) = x(t_0) - x^*(t_0)$  en input-waarden  $\Delta u(t) = u(t) - u^*(t)$  voor alle  $t \in T$ , worden de toestanden  $x(t)$  en output-waarden  $y(t)$  van het niet-lineaire model voor alle  $t_0 \leq t < \infty$  tot op eerste orde benaderd middels

$$x(t) = x^*(t) + \Delta x(t)$$

$$y(t) = y^*(t) + \Delta y(t)$$

$[A, B, C, D]$  is een bijzonder geval van  $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$

$$\begin{aligned} 3.2.4 \quad \Delta \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.2.5 \quad \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

terwijl  $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$  weer een bijzonder geval is van algemeen differentie-model c.q. differentieel model  $[f(\cdot, \cdot, t)$ ,  $g(\cdot, \cdot, t)]$

$$3.2.6 \quad \begin{aligned} \Delta x(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t) \end{aligned}$$

$$3.2.7 \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t) \end{aligned}$$

Bij de formulering van oplossingen voor  $[f(\dots, t), g(\dots, t)]$ ,  $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$  en  $[A, B, C, D]$  beperken we ons tot modellen met  $t \in Ge^{0,+}$  (differentie-model),  $t \in Re^{0,+}$  (differentieel model),  $x(t) \in Re^n$ ,  $u(t) \in Re^r$  en  $y(t) \in Re^m$ . De beperking tot niet-negatieve  $t$ -waarden is nauwelijks een echte beperking te noemen, omdat de tijd altijd zodanig gedefinieerd kan worden, dat het vroegste relevante tijdstip  $t^*$  groter of gelijk aan 0 wordt gekozen. De beperking tot reële waarden in de vectoren  $x(t)$ ,  $u(t)$  en  $y(t)$  is in de praktijk evenmin erg restrictief, omdat in de sociale wetenschap complexe meet-waarden zelden of nooit voorkomen. Om met behulp van de fundamentele stelling van differentiaal-vergelijkingen een unieke oplossing te garanderen zijn verder bepaalde restricties vereist m.b.t.  $f$  en  $g$  in 3.2.7 (19). Tenslotte definiëren we nog input-ruimte  $U$ , output-ruimte  $V$  en toestand-ruimte  $\Sigma$

$U$ : de verzameling van (stuksgewijs continue) functies van  $T = Ge^{0,+}$

( $T = Re^{0,+}$ ) in input-waarden-verzameling  $U = Re^r$  (19)

$V$ : de verzameling van (stuksgewijs continue) functies van  $T = Ge^{0,+}$

( $T = Re^{0,+}$ ) in output-waarden-verzameling  $Y = Re^m$

$\Sigma$ : de verzameling toestanden  $X = Re^n$

Oplossingsprocedures, stabiliteitsvormen en -voorwaarden vindt men onder meer in: Zadeh and Desoer (1963), Polak (1969), Polak and Wong (1970), Desoer (1970), Willems, J.L. (1970), Kwakernaak and Sivan (1972), Hirsch and Smale (1974).

De oplossingen van 3.2.6 en 3.2.7 luiden:

$$3.2.8 \quad x(t) = x(t_0) + \int_{k=t_0}^{t-1} f(x(k), u(k), k)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

$$3.2.9 \quad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(\xi), u(\xi), \xi) d\xi$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

$x(t)$  is wat de input  $u \in U$  betreft uitsluitend afhankelijk van waarden  $u(k)$  met  $k \in [t_0, t)$  c.q.  $u(\xi)$  met  $\xi \in [t_0, t)$ . Tezamen met de uniekheid wordt hierdoor voldaan aan toestand-overgangsaxioma 3.1.7 en zijn 3.2.8 en 3.2.9 klaarblijkelijk te schrijven als:

$$3.2.10 \quad x(t) = s(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t)}) \quad \text{zie 3.1.10}$$

$$y(t) = r(t, x(t), u(t)) \quad \text{zie 3.1.6}$$

Aan consistentie-axioma 3.1.8 wordt voldaan door in de eerste regel van 3.2.8 c.q. 3.2.9  $t = t_0$  en  $x(t_0) = x_0$  te nemen. Aangezien diezelfde eerste regel is te schrijven als

$$x(t) = x(t_0) + \sum_{k=t_0}^{t-1} f(x(k), u(k), k) + \sum_{k=t'}^{t-1} f(x(k), u(k), k) \quad \text{of}$$

$$x(t) = x(t') + \sum_{k=t'}^{t-1} f(x(k), u(k), k)$$

c.q.

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t'} f(x(\xi), u(\xi), \xi) d\xi + \int_{t'}^t f(x(\xi), u(\xi), \xi) d\xi \quad \text{of}$$

$$x(t) = x(t') + \int_{t'}^t f(x(\xi), u(\xi), \xi) d\xi$$

is eveneens voldaan aan toestand-separatie-axioma 3.1.9. Model  $[f(\cdot, \cdot, t), g(\cdot, \cdot, t)]$  definieert dus een toestand-ruimte-model  $M_{\Sigma} \equiv \langle U, \Sigma, Y; s, r \rangle$  en evenzo de bijzondere gevallen  $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$  en  $[A, B, C, D]$ .

Oplossing 3.2.8 c.q. 3.2.9 van  $[f(\cdot, \cdot, t), g(\cdot, \cdot, t)]$  zal zo dadelijk voor de gevallen  $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$  en  $[A, B, C, D]$  een meer expliciete formulering krijgen. Voor andere gevallen is een expliciete formulering soms moeilijk of niet te vinden. Aan de hand van 3.2.8 kan  $x(t)$

ook iteratief worden berekend door de opeenvolgende waarden  $x(t_0)$ ,  $x(t_0 + 1)$ ,  $x(t_0 + 2)$ , ... in  $\sum_{k=t_0}^{t-1} f(x(k), u(k), k)$  te substitueren. Dat kan uiteraard het gemakkelijkst per digitale rekenmachine. De waarde van  $x(t)$  in 3.2.9 wordt per digitale rekenmachine benaderd door de tijdsas in zeer kleine deeltjes  $\Delta\xi = h$  op te delen,  $\int_{t_0}^t f(x(\xi), u(\xi), \xi)d\xi$  te vervangen door de uitdrukking  $\sum_{\xi=t_0}^{t-h} f(x(\xi), u(\xi), \xi)\Delta\xi = \sum_{\xi=t_0}^{t-h} f(x(\xi), u(\xi), \xi)h$  met  $\xi = t_0, t_0 + h, t_0 + 2h, \dots, t - h$  en de opeenvolgende waarden  $x(t_0)$ ,  $x(t_0 + h)$ ,  $x(t_0 + 2h)$ , ...,  $x(t - h)$  in die uitdrukking te substitueren. In dit primitieve rekenschema moet  $h$  doorgaans zeer klein worden genomen om een redelijke benadering te krijgen. Uitgebreide verfijningen op dit rekenschema zijn echter mogelijk.

### Oplossing van de homogene differentie- c.q. differentiaal-vergelijking

Bij het zoeken naar een meer expliciete oplossing voor  $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$  en  $[A, B, C, D]$  worden de tijdsafhankelijke matrices  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ ,  $D(t)$  en de constante matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , die resp. van de orde  $n \times n$ ,  $n \times r$ ,  $m \times n$ ,  $m \times r$  zijn, bekend verondersteld en hun elementen beperkt tot reële getallen:  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$ ,  $d(t)$  waarden van (stuksgewijs continue) functies van de tijd  $T = \text{Re}^{0,+}$  in  $\text{Re}$  en  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  constante waarden uit  $\text{Re}$ . De beperking tot reële waarden lijkt overigens voor de sociale wetenschap niet al te restrictief. In eerste instantie zoeken we naar een oplossing voor de z.g. homogene differentie- c.q. differentiaal-vergelijking. De homogene differentie-vergelijking bij 3.2.4 en de homogene differentiaal-vergelijking bij 3.2.5 luiden resp.

$$3.2.12 \quad \Delta x(t) = A(t)x(t)$$

$$3.2.13 \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

In de homogene vergelijking wordt afgezien van de term  $B(t)u(t)$ . De oplossing van de homogene vergelijking geeft dus de autonome ontwikkeling van de toestand  $x(t)$  onder zero-input (de z.g. vrije beweging). We

beschouwen nu  $n$  bijzondere toestanden  $x_0 \in \text{Re}^n$ , nl. de  $n$  toestanden  $b_i$  met ieder slechts 1 in de  $i$ -de rij en voor de rest geheel 0:

$$\begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & b_3 \dots & b_n \\ \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Noemen we de  $n \times n$ -matrix, gedefinieerd door  $b_1, \dots, b_n, X_0$ , dan geldt dus:  $X_0 = I$ . We beschouwen vervolgens de homogene matrix-differentievergelijking 3.2.14 c.q. matrix-differentiaal-vergelijking 3.2.15

$$3.2.14 \quad \frac{\Delta X(t)}{1} = A(t)X(t)$$

$$3.2.15 \quad \dot{X}(t) = A(t)X(t)$$

en de oplossing  $X(t)$  van 3.2.14 c.q. 3.2.15 voor beginvoorwaarde

$$3.2.16 \quad X(t_0) = X_0 = I$$

Kolom  $i$  van de oplossingsmatrix  $X(t)$  geeft de toestand  $x(t)$  op tijdstip  $t$  voor  $x(t_0) = x_0 = b_i$  als begintoestand.  $X(t)$ , die zowel aan 3.2.14 c.q. 3.2.15 als aan 3.2.16 voldoet, wordt toestand-overgangsmatrix genoemd, aangeduid met  $\Phi(t, t_0)$  en is door 3.2.17 c.q. 3.2.18 volledig gedefinieerd.

$$3.2.17 \quad \frac{\Delta \Phi(t, t_0)}{1} = A(t)\Phi(t, t_0) \quad \Phi(t_0, t_0) = I$$

$$3.2.18 \quad \dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0) \quad \Phi(t_0, t_0) = I$$

Is toestand-overgangsmatrix  $\Phi(t, t_0)$  bij matrix  $A(t)$  eenmaal gevonden, dan wordt de oplossing van homogene vergelijking 3.2.12 c.q. 3.2.13 gegeven door

$$19 \quad x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0)$$

Uit 3.2.19 volgt nl.  $\Delta x(t) = \Delta \Phi(t, t_0)x(t_0)$  c.q.  $\dot{x}(t) = \dot{\Phi}(t, t_0)x(t_0)$  en hieruit vanwege 3.2.17 c.q. 3.2.18  $\Delta x(t) = A(t)\Phi(t, t_0)x(t_0)$  c.q.  $\dot{x}(t) = A(t)\Phi(t, t_0)x(t_0)$ , hetgeen vanwege 3.2.19 geschreven kan worden als 3.2.12 c.q. 3.2.13. Oplossing 3.2.19 voldoet dus aan 3.2.12 c.q. 3.2.13 maar tevens aan de beginvoorwaarde, aangezien voor  $t = t_0$  wordt gevonden  $x(t_0) = \Phi(t_0, t_0)x(t_0) = Ix(t_0) = x(t_0)$ .

Is bijv.  $A(t)$  in 3.2.13 als volgt

$$A(t) = \begin{bmatrix} -t & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix}$$

dan wordt  $\Phi(t, t_0)$  gegeven door

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}(t^2-t_0^2)} & 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}(t^2-t_0^2)} & 1 \end{bmatrix}$$

$\Phi(t, t_0)$  voldoet nl. aan 3.2.18, aangezien

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t, t_0) &= \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}[e^{-\frac{1}{2}(t^2-t_0^2)}] & \frac{d}{dt} 0 \\ \frac{d}{dt}[1 - e^{-\frac{1}{2}(t^2-t_0^2)}] & \frac{d}{dt} 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}[-\frac{1}{2}(t^2-t_0^2)] \cdot e^{-\frac{1}{2}(t^2-t_0^2)} & 0 \\ \frac{d}{dt}[-\frac{1}{2}(t^2-t_0^2)] \cdot -e^{-\frac{1}{2}(t^2-t_0^2)} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -t \cdot e^{-\frac{1}{2}(t^2-t_0^2)} & 0 \\ t \cdot e^{-\frac{1}{2}(t^2-t_0^2)} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

gelijk is aan

$$A(t)\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} -t & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}(t^2-t_0^2)} & 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}(t^2-t_0^2)} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \cdot e^{-\frac{1}{2}(t^2-t_0^2)} & 0 \\ t \cdot e^{-\frac{1}{2}(t^2-t_0^2)} & 0 \end{bmatrix}$$



en

$$\Phi(t_0, t_0) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}(t_0^2 - t_0^2)} & 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}(t_0^2 - t_0^2)} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Uiteraard kan  $\Phi(t, t_0)$  analoog aan  $x(t)$  in 3.2.8 c.q. 3.2.9 iteratief berekend of benaderd worden

$$3.2.20 \quad \Phi(t, t_0) = \Phi(t_0, t_0) + \sum_{k=t_0}^{t-1} A(k)\Phi(k, t_0) = I + \sum_{k=t_0}^{t-1} A(k)\Phi(k, t_0)$$

$$3.2.21 \quad \Phi(t, t_0) = \Phi(t_0, t_0) + \int_{t_0}^t A(\xi)\Phi(\xi, t_0)d\xi = I + \int_{t_0}^t A(\xi)\Phi(\xi, t_0)d\xi$$

De benadering van 3.2.21 luidt  $\Phi(t, t_0) = I + \sum_{\xi=t_0}^{t-h} A(\xi)\Phi(\xi, t_0)h$ . De opeenvolgende waarden  $\Phi(t_0, t_0) = I$ ,  $\Phi(t_0 + 1, t_0)$ ,  $\Phi(t_0 + 2, t_0)$ , ...,  $\Phi(t-1, t_0)$  en  $A(t_0)$ ,  $A(t_0 + 1)$ ,  $A(t_0 + 2)$ , ...,  $A(t-1)$  c.q.  $\Phi(t_0, t_0) = I$ ,  $\Phi(t_0 + h, t_0)$ ,  $\Phi(t_0 + 2h, t_0)$ , ...,  $\Phi(t-h, t_0)$  en  $A(t_0)$ ,  $A(t_0 + h)$ ,  $A(t_0 + 2h)$ , ...,  $A(t-h)$  worden in de uitdrukking achter het  $\Sigma$ -teken gesubstitueerd.

In geval  $[A, B, C, D]$  bevat homogene vergelijking 3.2.22 c.q. 3.2.23 de constante matrix  $A$

$$3.2.22 \quad \Delta x(t) = Ax(t) \rightarrow x(t+1) = \tilde{A}x(t) \text{ met } \tilde{A} = (A + I)$$

$$3.2.23 \quad \dot{x}(t) = Ax(t)$$

en is er voor  $\Phi(t, t_0)$  een algemene expliciete uitdrukking in die constante matrix  $A$

$$3.2.24 \quad \Phi(t, t_0) = \Phi(t - t_0) = \tilde{A}^{t-t_0} \text{ met } \tilde{A} = (A + I)$$

$$3.2.25 \quad \Phi(t, t_0) = \Phi(t - t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

$\Phi(t, t_0)$  in 3.2.24 bij A in 3.2.22 voldoet aan 3.2.17 aangezien

$\Delta \Phi(t, t_0) = \tilde{A}^{t+1-t_0} - \tilde{A}^{t-t_0} = (\tilde{A} - I)\tilde{A}^{t-t_0} = A \cdot \tilde{A}^{t-t_0}$  gelijk is aan  
 $A(t)\Phi(t, t_0) = A\Phi(t, t_0) = A \cdot \tilde{A}^{t-t_0}$  en  $\Phi(t_0, t_0) = \tilde{A}^{t_0-t_0} = I$ . Voorts  
 wordt  $e^M$  gedefinieerd door de oneindige reeks

$e^M = I + M + \frac{1}{2!} M^2 + \frac{1}{3!} M^3 + \dots$ . Hiervan gebruik makend voldoet  $\Phi(t, t_0)$   
 in 3.2.25 bij A in 3.2.23 aan 3.2.18, aangezien

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t, t_0) &= \frac{d}{dt} e^{A \cdot (t-t_0)} = \\ & \frac{d}{dt} [I + A \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2!} A^2 \cdot (t - t_0)^2 + \frac{1}{3!} A^3 \cdot (t - t_0)^3 + \dots] = \\ & 0 + A \quad + \quad A^2 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2!} A^3 \cdot (t - t_0)^2 + \dots = \\ & A [ I \quad + \quad A \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2!} A^2 \cdot (t - t_0)^2 + \dots ] = \\ & A \cdot e^{A \cdot (t-t_0)} \end{aligned}$$

gelijk is aan

$$A(t)\Phi(t, t_0) = A\Phi(t, t_0) = A \cdot e^{A \cdot (t-t_0)}$$

en

$$\Phi(t_0, t_0) = e^{A \cdot (t_0-t_0)} = e^{A \cdot 0} = I$$

Is bijv. A in 3.2.23 van de volgende eenvoudige vorm

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{bmatrix}$$

dan wordt  $\Phi(t - t_0)$  volgens 3.2.25 gegeven door de volgende matrix met  
 convergente reeksen als elementen

$$\begin{aligned} \Phi(t - t_0) &= e^{A \cdot (t - t_0)} = I + A \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2!} A^2 \cdot (t - t_0)^2 + \\ & \quad \frac{1}{3!} A^3 \cdot (t - t_0)^3 + \dots = \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{array}{cc} 1 - \frac{1}{2!} a \cdot (t - t_0)^2 + & (t - t_0) - \frac{1}{3!} a \cdot (t - t_0)^3 + \\ \frac{1}{4!} a^2 \cdot (t - t_0)^4 - \dots & \frac{1}{5!} a^2 \cdot (t - t_0)^5 - \dots \\ -a \cdot (t - t_0) + \frac{1}{3!} a^2 \cdot (t - t_0)^3 - & 1 - \frac{1}{2!} a \cdot (t - t_0)^2 + \\ \frac{1}{5!} a^3 \cdot (t - t_0)^5 + \dots & \frac{1}{4!} a^2 \cdot (t - t_0)^4 - \dots \end{array} \right]$$

hetgeen geschreven kan worden als

$$\phi(t - t_0) = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{a} \cdot (t - t_0)) & \frac{1}{\sqrt{a}} \sin(\sqrt{a} \cdot (t - t_0)) \\ -\sqrt{a} \cdot \sin(\sqrt{a} \cdot (t - t_0)) & \cos(\sqrt{a} \cdot (t - t_0)) \end{bmatrix}$$

vanwege

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \dots \\ \sin x &= x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots \end{aligned}$$

De reeksontwikkeling van  $e^{A \cdot (t-t_0)}$  wordt vooral toegepast om  $\phi(t - t_0)$  te berekenen middels een digitale rekenmachine. De waarde van  $\phi(t - t_0)$  wordt dan benaderd door een eindig aantal termen te nemen. Een andere vaak toepasbare methode om  $\phi(t - t_0)$  te berekenen maakt gebruik van de lineaire algebra en berust op diagonalisering van de constante  $n \times n$ -matrix A, d.w.z. herschrijving van A als

$$3.2.26 \quad A = B \Lambda B^{-1}$$

$$\text{waarin } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{met op de diagonaal de z.g.}$$

eigenwaarden  $\lambda_i$  van A en waarin  $B = [b_1, b_2, \dots, b_n]$  met daarin de z.g. eigenvectoren  $b_i$  van A. De bij een bepaalde eigenwaarde  $\lambda_i$  behorende eigenvector  $b_i \neq 0$  van n elementen wordt tot op een constante c na bepaald door

$$3.2.27 \quad Ab_i = \lambda_i b_i \rightarrow (A - \lambda_i I)b_i = 0$$

Als dit stelsel van  $n$  vergelijkingen in  $n$  onbekenden oplosbaar is, voldoet behalve de gevonden  $b_i \neq 0$  zelf ook iedere  $cb_i$ :  $(A - \lambda_i I)b_i = 0 \rightarrow (A - \lambda_i I)cb_i = 0$ . Vaak kiest men  $b_i$  met "unit-length", d.w.z. onder de additionele restrictie  $b_i^T b_i = \sum_{j=1}^n (b_{ji})^2 = 1$ . Het stelsel heeft volgens de lineaire algebra alleen dan een oplossing  $b_i \neq 0$  - de kolommen van  $(A - \lambda_i I)$  zijn alleen dan lineair afhankelijk - als de determinant  $|A - \lambda_i I|$  van  $(A - \lambda_i I)$  gelijk aan 0 is (20). Voor  $n \times n$ -matrix  $A$  kan  $|A - \lambda_i I| = 0$  worden geschreven als een  $n^e$ -graads polynoom in  $\lambda_i$ , de z.g.  karakteristieke vergelijking van  $A$

$$3.2.28 \quad |A - \lambda_i I| = \lambda_i^n + \alpha_{n-1} \lambda_i^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda_i + \alpha_0 = 0$$

Voor  $2 \times 2$ -matrix  $A$  bijv.

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{matrix} = (a_{11} - \lambda_i)(a_{22} - \lambda_i) - a_{12}a_{21} = \\ \lambda_i^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda_i + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \end{matrix}$$

$$\text{De wortels } \lambda_1, \lambda_2 = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2}$$

zijn de eigenwaarden. Heeft  $n \times n$ -matrix  $A$   $n$  verschillende eigenwaarden (wortels)  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , d.w.z.  $\lambda_i \neq \lambda_j$  ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n; i \neq j$ ), dan vormen volgens de lineaire algebra de bijbehorende  $n$  eigenvectoren  $b_1, b_2, \dots, b_n$  een lineair onafhankelijk stelsel, zodat  $n \times n$ -matrix  $B$  non-singulier is, d.w.z.  $|B| \neq 0$ , en de inverse matrix  $B^{-1}$ , gedefinieerd door  $B^{-1}B = I$ , bestaat.  $B^{-1}$  wordt bijv. berekend in termen van determinant  $|B|$  en cofactoren  $c_{ij}$  (20)

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} C^t = \begin{bmatrix} \frac{c_{11}}{|B|} & \frac{c_{21}}{|B|} & \dots & \frac{c_{n1}}{|B|} \\ \frac{c_{12}}{|B|} & \frac{c_{22}}{|B|} & \dots & \frac{c_{n2}}{|B|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{c_{1n}}{|B|} & \frac{c_{2n}}{|B|} & \dots & \frac{c_{nn}}{|B|} \end{bmatrix}$$

$B^{-1}$  is dus  $\frac{1}{|B|}$  maal de getransponeerde cofactoren-matrix  $C = [c_{ij}]$  bij matrix  $B = [b_{ij}]$ .

Vanwege  $B^{-1}B = I$  bestaat er tussen de rij-vectoren  $b_i^*$  in  $B^{-1} = \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_n^* \end{bmatrix}$  en de kolom-vectoren  $b_j$  in  $B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n]$

het verband

$$b_i^* b_j = \begin{cases} 1 & \text{als } i = j \\ 0 & \text{als } i \neq j \end{cases}$$

Hieruit volgt in combinatie met 3.2.27

$$\begin{aligned} B^{-1}AB &= B^{-1}A[b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n] = B^{-1}[Ab_1 \ Ab_2 \ \dots \ Ab_n] = \\ &= B^{-1}[\lambda_1 b_1 \ \lambda_2 b_2 \ \dots \ \lambda_n b_n] = \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_n^* \end{bmatrix} \times [\lambda_1 b_1 \ \lambda_2 b_2 \ \dots \ \lambda_n b_n] = \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = A$$

Door beide zijden van  $B^{-1}AB = A$  te premultiplieren met  $B$  en te postmultiplieren met  $B^{-1}$  volgt dan de diagonalisering van  $A$ :  $B(B^{-1}AB)B^{-1} = BAB^{-1}$  of  $A = BAB^{-1}$ . Hieruit volgt onmiddellijk  $A^2 = BAB^{-1}BAB^{-1} = BA^2B^{-1}$  en algemeen

$$3.2.29 \quad A^r = BA^r B^{-1}$$

Daarmee is op de eerste plaats aantoonbaar, dat voor discrete tijd de toestand-overgangsmatrix  $\Phi(t - t_0) = \tilde{A}^{t-t_0}$  (3.2.24) na diagonalisering

$A = B\Lambda B^{-1}$  kan worden berekend middels

$$3.2.30 \quad \tilde{A}^{t-t_0} = B\tilde{\Lambda}^{t-t_0}B^{-1} \quad \text{waarin} \quad \tilde{A} = (A + I) \quad \text{en} \quad \tilde{\Lambda} = (\Lambda + I)$$

Immers  $\tilde{A}^r = (A + I)^r = A^r + \alpha_1 A^{r-1} + \alpha_2 A^{r-2} + \dots + I$  met coëfficiënten  $\alpha_k$  van de binomiale expansie. Met behulp van 3.2.29 volgt dan

$$\begin{aligned} \tilde{A}^r &= B\Lambda^r B^{-1} + \alpha_1 B\Lambda^{r-1} B^{-1} + \alpha_2 B\Lambda^{r-2} B^{-1} + \dots + I = \\ &B\Lambda^r B^{-1} + B\alpha_1 \Lambda^{r-1} B^{-1} + B\alpha_2 \Lambda^{r-2} B^{-1} + \dots + I = \\ &B(\Lambda^r + \alpha_1 \Lambda^{r-1} + \alpha_2 \Lambda^{r-2} + \dots + I)B^{-1} = B(\Lambda + I)^r B^{-1} = \\ &B\tilde{\Lambda}^r B^{-1} \end{aligned}$$

Op de tweede plaats blijkt voor continue tijd  $\Phi(t - t_0) = e^{A \cdot (t-t_0)}$  van 3.2.25 berekenbaar middels

$$3.2.31 \quad e^{A \cdot (t-t_0)} = B e^{\Lambda \cdot (t-t_0)} B^{-1}$$

aangezien

$$e^{A\alpha} = I + A\alpha + \frac{1}{2!} A^2 \alpha^2 + \frac{1}{3!} A^3 \alpha^3 \dots$$

en dus vanwege 3.2.29

$$\begin{aligned} e^{A\alpha} &= BB^{-1} + B\Lambda B^{-1}\alpha + \frac{1}{2!}(B\Lambda^2 B^{-1})\alpha^2 + \frac{1}{3!}(B\Lambda^3 B^{-1})\alpha^3 + \dots = \\ &B(I + \Lambda\alpha + \frac{1}{2!} \Lambda^2 \alpha^2 + \frac{1}{3!} \Lambda^3 \alpha^3 + \dots)B^{-1} = \\ &B e^{\Lambda\alpha} B^{-1} \end{aligned}$$

3.2.30 en 3.2.31 geven relatief simpele berekeningsprocedures voor de toestandsovergangsmatrix, omdat machtsverheffing van een diagonaal-matrix eenvoudig neerkomt op machtsverheffing van de diagonaal-elementen. Zo kan de matrix  $\tilde{\Lambda}^{t-t_0} = (\Lambda + I)^{t-t_0}$  in 3.2.30 direct worden opgeschreven

$$3.2.32 \quad \tilde{\Lambda}^{t-t_0} = (\Lambda + I)^{t-t_0} = \begin{bmatrix} (\lambda_1 + 1)^{t-t_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\lambda_2 + 1)^{t-t_0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (\lambda_n + 1)^{t-t_0} \end{bmatrix}$$

en evenzo de matrix  $e^{\Lambda \cdot (t-t_0)}$  in 3.2.31

$$3.2.33 \quad e^{\Lambda \cdot (t-t_0)} = I + \Lambda \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2!} \Lambda^2 \cdot (t - t_0)^2 + \frac{1}{3!} \Lambda^3 \cdot (t - t_0)^3 + \dots =$$

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \cdot (t-t_0)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 \cdot (t-t_0)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n \cdot (t-t_0)} \end{bmatrix}$$

$$\text{vanwege } 1 + \lambda_i \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2!} \lambda_i^2 \cdot (t - t_0)^2 + \frac{1}{3!} \lambda_i^3 \cdot (t - t_0)^3 + \dots = e^{\lambda_i \cdot (t-t_0)}$$

Nemen we als voorbeeld om  $\Phi(t - t_0) = e^{A \cdot (t-t_0)}$  middels diagonalisering te berekenen weer de eenvoudige matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda_i I| = \begin{vmatrix} -\lambda_i & 1 \\ -a & -\lambda_i \end{vmatrix} = \lambda_i^2 + a = 0 \rightarrow \lambda_i = \pm \sqrt{-a}$$

Indien  $a > 0$  betreft het hier complexe eigenwaarden, die altijd in z.g. geconjugeerde paren  $\lambda_i, \lambda_i^* = \sigma_i \pm j\omega_i$  voorkomen:  $j$  het imaginaire getal  $\sqrt{-1}$ ,  $\omega_i$  het imaginaire gedeelte en  $\sigma_i$  het reële gedeelte, i.c.

$$\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_1, \lambda_1^* = \sigma_1 \pm j\omega_1 = 0 \pm j\sqrt{a} = \pm j\sqrt{a}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\sqrt{a} & 0 \\ 0 & -j\sqrt{a} \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_1 I)b_1 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -j\sqrt{a} & 1 \\ -a & -j\sqrt{a} \end{bmatrix} b_1 = 0 \rightarrow b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j\sqrt{a} \end{bmatrix}$$

Paar complexe eigenwaarden hebben paar complexe eigenvectoren, die eveneens geconjugeerd voorkomen, zodat  $b_2$  snel gevonden wordt en vervolgens  $B^{-1}$  kan worden bepaald

$$b_1, b_2 = b_1, b_1' = r_1 \pm js, = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \pm j \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{a} \end{bmatrix} \rightarrow b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -j\sqrt{a} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j\sqrt{a} & -j\sqrt{a} \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2j\sqrt{a}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2j\sqrt{a}} \end{bmatrix}$$

Ook  $b_i^*$  en  $b_i'^*$  komen altijd geconjugeerd voor, i.c.

$$b_1^*, b_2^* = b_1^*, b_1'^* = \frac{1}{2}(r_1^* \pm js^*) = \frac{1}{2}([1 \ 0] \pm j[0 \ -\frac{1}{\sqrt{a}}])$$

Uit  $\Lambda$  volgt onmiddellijk

$$e^{\Lambda \cdot (t-t_0)} = \begin{bmatrix} e^{j\sqrt{a} \cdot (t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{-j\sqrt{a} \cdot (t-t_0)} \end{bmatrix}$$

en hieruit resulteert tenslotte de waarde van  $e^{\Lambda \cdot (t-t_0)}$  door vermenigvuldiging  $B e^{\Lambda \cdot (t-t_0)} B^{-1}$ . Uitwerking van

$$B e^{\Lambda \cdot (t-t_0)} B^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{j\sqrt{a} \cdot (t-t_0)} + e^{-j\sqrt{a} \cdot (t-t_0)}) & \frac{1}{2j\sqrt{a}}(e^{j\sqrt{a} \cdot (t-t_0)} - e^{-j\sqrt{a} \cdot (t-t_0)}) \\ \frac{1}{2}j\sqrt{a}(e^{j\sqrt{a} \cdot (t-t_0)} - e^{-j\sqrt{a} \cdot (t-t_0)}) & \frac{1}{2}(e^{j\sqrt{a} \cdot (t-t_0)} + e^{-j\sqrt{a} \cdot (t-t_0)}) \end{bmatrix}$$



middels de reeksen

$$e^{j\sqrt{a} \cdot (t-t_0)} = 1 + j\sqrt{a} \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2!}(j\sqrt{a})^2 \cdot (t - t_0)^2 + \\ \frac{1}{3!}(j\sqrt{a})^3 \cdot (t - t_0)^3 + \dots$$

$$e^{-j\sqrt{a} \cdot (t-t_0)} = 1 + (-j\sqrt{a}) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2!}(-j\sqrt{a})^2 \cdot (t - t_0)^2 + \\ \frac{1}{3!}(-j\sqrt{a})^3 \cdot (t - t_0)^3 + \dots$$

geeft

$$Be^{A \cdot (t-t_0)} B^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2!}a \cdot (t - t_0)^2 + & (t - t_0) - \frac{1}{3!}a \cdot (t - t_0)^3 + \\ \frac{1}{4!}a^2 \cdot (t - t_0)^4 - \dots & \frac{1}{5!}a^2 \cdot (t - t_0)^5 - \dots \\ -a \cdot (t - t_0) + \frac{1}{3!}a^2 \cdot (t - t_0)^3 - & 1 - \frac{1}{2!}a \cdot (t - t_0)^2 + \\ \frac{1}{5!}a^3 \cdot (t - t_0)^5 + \dots & \frac{1}{4!}a^2 \cdot (t - t_0)^4 - \dots \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\sqrt{a} \cdot (t - t_0)) & \frac{1}{\sqrt{a}} \sin(\sqrt{a} \cdot (t - t_0)) \\ -\sqrt{a} \cdot \sin(\sqrt{a} \cdot (t - t_0)) & \cos(\sqrt{a} \cdot (t - t_0)) \end{bmatrix}$$

zodat berekening van  $\Phi(t - t_0)$  met behulp van diagonalisering  $A = B\Lambda B^{-1}$  middels  $Be^{A \cdot (t-t_0)} B^{-1}$  inderdaad dezelfde waarde oplevert als die rechtstreeks in termen van  $e^{A \cdot (t-t_0)}$  door een voldoende voortgezette reeksontwikkeling.

Benadrukt moet worden, dat de besproken diagonaliseringsmethode niet altijd toepasbaar is, omdat  $B^{-1}$  niet altijd bestaat en berekend kan worden.  $B^{-1}$  bestaat dan en alleen dan, indien de  $n$  eigenvectoren in  $B$  lineair-onafhankelijk zijn. Zoals reeds opgemerkt is een voldoende voorwaarde hiervoor, dat de  $n$  eigenwaarden van  $n \times n$ -matrix  $A$  alle verschillend zijn. Bestaat  $B^{-1}$ , dan is overigens niet alleen een simpele berekening van  $\Phi(t - t_0)$  mogelijk maar kunnen praktisch alle eigenschappen van  $A$ , toestand-overgangsmatrix  $\Phi(t - t_0)$  en vrije beweging  $x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0)$

op simpele wijze in termen van de  $n$  eigenwaarden,  $n$  eigenvectoren en  $n$  rij-vectoren  $b_i^*$  in  $B^{-1}$  worden geanalyseerd.

Zo is vanwege de diagonaal-vorm van  $\Lambda$  in  $A = B\Lambda B^{-1}$  matrix  $A$  te schrijven in de z.g. spectraal-vorm

$$3.2.34 \quad A = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i b_i^*$$

d.w.z. te ontbinden in de  $n$  matrices  $\lambda_i b_i b_i^*$ , die ontstaan door vermenigvuldiging van de  $i$ -de kolom-vector  $b_i$  in  $B$  met de  $i$ -de rij-vector  $b_i^*$  in  $B^{-1}$  en het resultaat met de  $i$ -de eigenwaarde  $\lambda_i$ . Op die manier wordt  $\phi(t - t_0)$  voor resp. discrete en continue tijd in spectraal-vorm

$$3.2.35 \quad \phi(t - t_0) = \tilde{A}^{t-t_0} = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + 1)^{t-t_0} b_i b_i^*$$

$$\phi(t - t_0) = e^{A \cdot (t-t_0)} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i \cdot (t-t_0)} \cdot b_i b_i^*$$

Het feit, dat de  $n$  eigenvectoren in  $B$  worden verondersteld een lineair onafhankelijk stelsel te vormen, betekent dat iedere toestand  $x \in \text{Re}^n$  als een lineaire combinatie van de eigenvectoren kan worden uitgedrukt:  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot b_i$ . De overgang van toestand  $x(t_0)$  naar  $x(t)$  is op die manier te schrijven als de overgang van  $\sum_{i=1}^n \alpha_i(t_0) \cdot b_i$  naar  $\sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \cdot b_i$ . Vanwege

$$b_i^* b_j = \begin{cases} 1 & \text{als } i = j \\ 0 & \text{als } i \neq j \end{cases}$$

is verder te bewijzen voor het product van rij-vector  $b_i^*$  met  $x$ :

$$b_i^* x = b_i^* (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_i b_i + \dots + \alpha_n b_n) = \alpha_i$$

en dat betekent  $\alpha_i(t) = b_i^* x(t)$  en  $\alpha_i(t_0) = b_i^* x(t_0)$ . Beide zijden van de vrije beweging

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = \tilde{A}^{t-t_0} x(t_0) = \\ \quad \left[ \sum_{j=1}^n (\lambda_j + 1)^{t-t_0} b_j b_j^* \right] x(t_0) \\ x(t) = e^{\Lambda \cdot (t-t_0)} x(t_0) = \\ \quad \left[ \sum_{j=1}^n e^{\lambda_j \cdot (t-t_0)} b_j b_j^* \right] x(t_0) \end{array} \right.$$

met  $b_i^*$  premultipliserend volgt dan

$$\begin{aligned} \alpha_i(t) &= [(\lambda_i + 1)^{t-t_0} b_i^*] x(t_0) = (\lambda_i + 1)^{t-t_0} \alpha_i(t_0) = \\ & \quad \alpha_i(t_0) \cdot (\lambda_i + 1)^{t-t_0} \\ \alpha_i(t) &= [e^{\lambda_i \cdot (t-t_0)} b_i^*] x(t_0) = e^{\lambda_i \cdot (t-t_0)} \alpha_i(t_0) = \\ & \quad \alpha_i(t_0) \cdot e^{\lambda_i \cdot (t-t_0)} \end{aligned}$$

Vervolgens met  $b_i$  postmultipliserend

$$\begin{aligned} \alpha_i(t) \cdot b_i &= \alpha_i(t_0) \cdot (\lambda_i + 1)^{t-t_0} b_i \\ \alpha_i(t) \cdot b_i &= \alpha_i(t_0) \cdot e^{\lambda_i \cdot (t-t_0)} b_i \end{aligned}$$

en daarna sommerend om  $x(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \cdot b_i$  te krijgen, resulteert

$$x(t) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \alpha_i(t_0) \cdot (\lambda_i + 1)^{t-t_0} b_i \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i(t_0) \cdot e^{\lambda_i \cdot (t-t_0)} b_i \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t_0) \cdot m_i(t - t_0)$$

De vrije beweging  $x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0)$ , oplossing van homogene vergelijking 3.2.22 c.q. 3.2.23 met constante  $A$ , is m.a.w. te schrijven als een eenvoudige lineaire combinatie van z.g. karacteristieke bewegingen (modes)  $m_i$ :

$$m_i(t - t_0) = (\lambda_i + 1)^{t-t_0} b_i \quad (\text{discrete tijd})$$

$$m_i(t - t_0) = e^{\lambda_i \cdot (t-t_0)} b_i \quad (\text{continue tijd})$$

Iedere karakteristieke beweging wordt geheel onafhankelijk van de begintoestand  $x(t_0)$  door slechts één eigenwaarde-eigenvector-paar  $\langle \lambda_i, b_i \rangle$  bepaald en is in het geval, dat  $\langle \lambda_i, b_i \rangle$  reële waarden bevat, gemakkelijk grafisch weer te geven.

De begintoestand bepaalt, of en in welke mate iedere karakteristieke beweging wordt geëxciteerd, en wel middels de z.g. excitatie  $\alpha_i(t_0) = b_i^* x(t_0)$ . Men kan deze opnemen in n-dimensionale excitatie-vector  $\alpha(t_0)$ . Excitatie-vector  $\alpha(t_0)$  staat als volgt in verband met begintoestand  $x(t_0)$

$$3.2.36 \quad \alpha(t_0) = B^{-1} x(t_0) \rightarrow x(t_0) = B \alpha(t_0)$$

Afhankelijk van de aard van de eigenwaarden (reëel of complex) kan men functies  $m_i^0$  definiëren

$$m_i^0(t - t_0) = \alpha_i(t_0) \cdot m_i(t - t_0) \quad (\lambda_i \text{ reëel})$$

$$m_i^0(t - t_0) = \alpha_i(t_0) \cdot m_i(t - t_0) + \alpha_i^!(t_0) \cdot m_i^!(t - t_0) \quad (\lambda_i, \lambda_i^! \text{ geconjugueerd complex})$$

die we karakteristieke excitatie-bewegingen zullen noemen. Zij zijn zoals dadelijk zal blijken alle reëel en kunnen daardoor ook in het geval van complexe eigenwaarden gemakkelijk grafisch worden weergegeven. Bij k paren complexe eigenwaarden wordt zo de vrije beweging een eenvoudige som van de  $n - k$  karakteristieke excitatie-bewegingen, die uit de  $n$  karakteristieke bewegingen resulteren

$$3.2.37 \quad x(t) = \sum_{i=1}^{n-k} m_i^0(t - t_0)$$

Op de betekenis van de vrije beweging in deze vorm zal nader worden ingegaan, nadat eerst aan  $m_i^0(t - t_0)$  in het meer algemene geval van complexe eigenwaarden een expliciete uitdrukking in reële termen is gegeven.

In het geval van geconjugueerd complexe eigenwaarden met bijbehorende geconjugueerd complexe eigenvectoren

$$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i \quad b_i = r_i + js_i$$

$$\lambda_i' = \sigma_i - j\omega_i \quad b_i' = r_i - js_i$$

stellen we voor  $b_i^*$  en  $b_i^{*'}$

$$b_i^* = \frac{1}{2}(r_i^* + js_i^*)$$

$$b_i^{*'} = \frac{1}{2}(r_i^* - js_i^*)$$

waaruit vanwege  $b_i^* b_i = b_i^{*'} b_i' = 1$  en  $b_i^* b_i' = b_i^{*'} b_i = 0$  kan worden afgeleid

$$r_i^* r_i = -s_i^* s_i = 1 \quad r_i^* s_i = s_i^* r_i = 0$$

Stellen we verder

$$\alpha_i^R(t_0) = r_i^* x(t_0) \quad \alpha_i^S(t_0) = s_i^* x(t_0)$$

dan volgt voor de excitaties  $\alpha_i(t_0)$  en  $\alpha_i'(t_0)$

$$\alpha_i(t_0) = b_i^* x(t_0) = \frac{1}{2}[\alpha_i^R(t_0) + j\alpha_i^S(t_0)]$$

$$\alpha_i'(t_0) = b_i^{*'} x(t_0) = \frac{1}{2}[\alpha_i^R(t_0) - j\alpha_i^S(t_0)]$$

en in het bijzondere geval  $\omega_i = 0$  (de beide eigenwaarden vallen samen in één enkele volledig reële eigenwaarde), d.w.z.  $\lambda_i = \lambda_i' = \sigma_i$ ,  $b_i = b_i' = r_i$ ,  $\alpha_i(t_0) = \alpha_i'(t_0) = \frac{1}{2}\alpha_i^R(t_0)$  en  $m_i(t - t_0) = m_i'(t - t_0)$

$$\begin{aligned} m_i^O(t - t_0) &= \alpha_i(t_0) \cdot m_i(t - t_0) + \alpha_i'(t_0) \cdot m_i'(t - t_0) = \\ &= 2\alpha_i(t_0) \cdot m_i(t - t_0) = \\ &= \alpha_i^R(t_0) \cdot m_i(t - t_0) \quad \text{met } m_i(t - t_0) = \begin{cases} (\sigma_i + 1)^{t-t_0} r_i \\ e^{\sigma_i \cdot (t-t_0)} r_i \end{cases} \end{aligned}$$

Deze  $m_i^O(t - t_0)$  heeft inderdaad exakt dezelfde vorm als die, welke eerder voor één enkele reële eigenwaarde werd gegeven. Het enige verschil is, dat  $\alpha_i(t_0)$ ,  $\lambda_i$  en  $b_i$  hier te voorschijn komen in de notatie  $\alpha_i^R(t_0)$ ,  $\sigma_i$  en  $r_i$ . Aangezien de imaginaire gedeelten  $\alpha_i^S(t_0)$ ,  $\omega_i$  en  $s_i$  echter

feitelijk afwezig zijn, is er voor de notatie in reële gedeelten  $\alpha_i^r(t_0)$ ,  $\sigma_i$  en  $r_i$  geen aanleiding en kan deze worden vervangen door die in  $\alpha_i(t_0)$ ,  $\lambda_i$  en  $b_i$ . Dat de hier optredende excitaties  $\alpha_i(t_0) = \alpha_i^r(t_0) = \alpha_i^s(t_0)$  ieder slechts de helft zijn van de éne eerder optredende  $\alpha_i(t_0)$ , is in overeenstemming met de verschillende afleidingen van  $m_i^o(t - t_0)$ : hier als gewogen som van het tweetal (gelijke)  $m_i(t - t_0)$  vermenigvuldigd met het tweetal (gelijke) gewichten  $\alpha_i(t_0)$ , eerder als het product van  $m_i(t - t_0)$  met één  $\alpha_i(t_0)$ .

Indien  $\omega_i \neq 0$  (het imaginaire gedeelte ongelijk aan 0 en dus twee verschillende eigenwaarden) treden in de termen van de som  $m_i^o(t - t_0)$  verschillende excitaties, eigenwaarden en eigenvectoren op, die alle complexe grootheden  $a \pm jb$  zijn met imaginair gedeelte  $b$  ongelijk aan 0. De uitwerking van deze som, waarbij het imaginair getal  $j = \sqrt{-1}$  weer kan worden geëlimineerd zodat slechts reële termen resulteren, wordt aanmerkelijk vereenvoudigd en geeft bovendien een gemakkelijker interpreteerbare  $m_i^o(t - t_0)$ , indien we voor sommige van de  $a \pm jb$  trigonometrische uitdrukkingen kiezen in het complexe vlak ( $a$  op de reële  $x$ -as en  $b$  op de imaginaire  $y$ -as) middels 1) het lijnstuk  $OP$ , dat punt  $P = \langle a, b \rangle$  met de oorsprong  $O$  verbindt, en 2) de hoek, die  $OP$  met de positieve helft van de  $x$ -as maakt. Zo kan men bij  $\lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_i$

$$\lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_i = \eta_i(\cos \theta_i \pm j \sin \theta_i)$$

$\eta_i$  (de lengte van  $OP$ ) en  $\theta_i$  (de hoek van  $OP$  met de positieve helft van de  $x$ -as) berekenen volgens

$$\eta_i = \sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2}; \quad \cos \theta_i = \frac{\sigma_i}{\eta_i}; \quad \sin \theta_i = \frac{\omega_i}{\eta_i}$$

zodat inderdaad  $\eta_i \cos \theta_i = \sigma_i$  en  $\eta_i \sin \theta_i = \omega_i$ . Analoog worden voor discrete tijd lijnstuk  $\tilde{\eta}_i$  en hoek  $\tilde{\theta}_i$  berekend bij  $(\lambda_i + 1) = \tilde{\sigma}_i \pm j\omega_i$

$$(\lambda_i + 1) = \tilde{\sigma}_i \pm j\omega_i = \tilde{\eta}_i(\cos \tilde{\theta}_i \pm j \sin \tilde{\theta}_i) \quad \text{met } \tilde{\sigma}_i = \sigma_i + 1:$$

$$\tilde{\eta}_i = \sqrt{\tilde{\sigma}_i^2 + \omega_i^2}; \quad \cos \tilde{\theta}_i = \frac{\tilde{\sigma}_i}{\tilde{\eta}_i}; \quad \sin \tilde{\theta}_i = \frac{\omega_i}{\tilde{\eta}_i}$$

Tenslotte berekenen we lijnstuk  $\rho_i(t_0)$  en hoek  $\phi_i(t_0)$  bij excitaties  $\alpha_i(t_0) = \frac{1}{2}[\alpha_i^r(t_0) \pm j\alpha_i^s(t_0)]$

$$\alpha_i(t_0) = \frac{1}{2}[\alpha_i^R(t_0) \pm j\alpha_i^S(t_0)] = \frac{1}{2}[\rho_i(t_0)(\cos \phi_i(t_0) \pm j \sin \phi_i(t_0))]:$$

$$\rho_i(t_0) = \sqrt{(\alpha_i^R(t_0))^2 + (\alpha_i^S(t_0))^2}; \quad \cos \phi_i(t_0) = \frac{\alpha_i^R(t_0)}{\rho_i(t_0)}; \quad \sin \phi_i(t_0) = \frac{\alpha_i^S(t_0)}{\rho_i(t_0)}$$

Gebruik makend van de stelling van Moivre, volgens welke

$$z = \tilde{\eta}(\cos \tilde{\theta} \pm j \sin \tilde{\theta}) \rightarrow z^k = \tilde{\eta}^k(\cos k\tilde{\theta} \pm j \sin k\tilde{\theta})$$

vinden we dan voor discrete tijd de gezochte vorm van  $m_i^0(t - t_0)$  in louter reële termen

$$3.2.38 \quad m_i^0(t - t_0) = \rho_i(t_0) \cdot \tilde{\eta}_i^{t-t_0} \cdot f_i^0(t - t_0) = \\ \rho_i(t_0) \cdot (\tilde{\sigma}_i^2 + \omega_i^2)^{\frac{1}{2}(t-t_0)} \cdot f_i^0(t - t_0) \quad \text{waarin}$$

$$f_i^0(t - t_0) = \cos(\tilde{\theta}_i \cdot (t - t_0) + \phi_i(t_0))r_i - \sin(\tilde{\theta}_i \cdot (t - t_0) + \phi_i(t_0))s_i$$

en vanwege definitie  $e^{\pm j\omega} = \cos \omega \pm j \sin \omega$  voor continue tijd

$$3.2.39 \quad m_i^0(t - t_0) = \rho_i(t_0) \cdot e^{\sigma_i \cdot (t-t_0)} \cdot f_i^0(t - t_0) \quad \text{waarin}$$

$$f_i^0(t - t_0) = \cos(\omega_i \cdot (t - t_0) + \phi_i(t_0))r_i - \sin(\omega_i \cdot (t - t_0) + \phi_i(t_0))s_i$$

De vorm  $f_i^0(t - t_0)$  in  $m_i^0(t - t_0)$  bevat de superpositie van twee verschillende gefaseerde sinusoidale golfbewegingen:  $\cos x = -\sin(x + \frac{3}{2}\pi)$  met  $\frac{3}{2}\pi = 270^\circ$ . Aangezien  $\cos x$  en  $\sin x$  oscilleren tussen 1 en -1, oscilleren  $\cos(x)r_i$  en  $\sin(x)s_i$  resp. tussen  $r_i$  en  $-r_i$  en tussen  $s_i$  en  $-s_i$ . Evenals van de samenstellende golfbewegingen wordt de fase van de superpositie middels  $\phi_i(t_0)$  door de begintoestand bepaald en de frequentie vanwege periode-duur  $T_p = 2\pi/\tilde{\theta}_i$  c.q.  $T_p = 2\pi/\omega_i$  door  $\tilde{\theta}_i$  c.q.  $\omega_i$ : hoe groter  $\tilde{\theta}_i$  (3.2.38) c.q.  $\omega_i$  (3.2.39), hoe groter de frequentie. Na iedere periode  $T_p$  resulteert weer dezelfde waarde als aan het begin: bijv.

$\cos(\tilde{\theta}_i \cdot (t' + kT_p) + \phi_i(t_0)) = \cos(\tilde{\theta}_i \cdot t' + \phi_i(t_0) + k2\pi) = \cos(\tilde{\theta}_i \cdot t' + \phi_i(t_0))$  voor iedere  $k \in \text{Ge}$ . Ingeval  $\tilde{\eta}_i = 1$  c.q.  $\sigma_i = 0$  is ook de amplitude van totale golfbeweging  $m_i^0(t - t_0)$  constant en middels  $\rho_i(t_0)$  afhankelijk van de begintoestand; ingeval  $\tilde{\eta}_i > 1$  c.q.  $\sigma_i > 0$  wordt de golfbeweging steeds

sterker en ingeval  $\tilde{\eta}_i < 1$  c.q.  $\sigma_i < 0$  steeds zwakker.

Een drietal extreme gevallen van  $\lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_i$  verdient speciale aandacht vanwege de bijbehorende karakteristieke excitatie-bewegingen  $m_i^0$ :

$$1) \sigma_i = -1 \rightarrow \begin{cases} (\lambda_i + 1) = \pm j\omega_i \\ \tilde{\theta}_i = \frac{1}{2}\pi \end{cases}$$

waarvoor 3.2.38 overgaat in

$$3.2.40 \quad m_i^0(t - t_0) = \rho_i(t_0) \cdot |\omega_i|^{t-t_0} [\cos(\frac{1}{2}\pi \cdot (t - t_0) + \phi_i(t_0)) r_i - \sin(\frac{1}{2}\pi \cdot (t - t_0) + \phi_i(t_0)) s_i]$$

$$2) \sigma_i = 0 \rightarrow \lambda_i = \pm j\omega_i$$

waarvoor 3.2.39 overgaat in

$$3.2.41 \quad m_i^0(t - t_0) = \rho_i(t_0) [\cos(\omega_i \cdot (t - t_0) + \phi_i(t_0)) r_i - \sin(\omega_i \cdot (t - t_0) + \phi_i(t_0)) s_i]$$

$$3) \omega_i = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_i = \sigma_i \\ (\lambda_i + 1) = \tilde{\sigma}_i \\ \tilde{\theta}_i = 0 \\ b_i = r_i \\ s_i = 0 \end{cases}$$

waarvoor 3.2.38 en 3.2.39 overgaan in

$$3.2.42 \quad m_i^0(t - t_0) = \begin{cases} \alpha_i^r(t_0) \cdot \tilde{\sigma}_i^{t-t_0} r_i \\ \alpha_i^r(t_0) \cdot e^{\tilde{\sigma}_i \cdot (t-t_0)} r_i \end{cases}$$

of

$$m_i^0(t - t_0) = \begin{cases} \alpha_i(t_0) \cdot (\lambda_i + 1)^{t-t_0} b_i \\ \alpha_i(t_0) \cdot e^{\lambda_i \cdot (t-t_0)} b_i \end{cases}$$

Het betreft hier de gevallen, waarin  $\lambda_i + 1$  c.q.  $\lambda_i$  volledig imaginair of volledig reëel is. In 3.2.40 hangt de amplitude-verandering over de tijd



niet meer van  $\sigma_i$  maar nog slechts van de absolute waarde van  $\omega_i$  af. Verder is vanwege  $\theta_i = \frac{1}{2}\pi$  de periode-duur hier precies  $T_p = 4$ , zodat bijv.  $\cos(\frac{1}{2}\pi \cdot (t - t_0) + \phi_i(t_0))$  over opeenvolgende sequenties van 4 discrete tijdstippen  $t \in Ge^{0,+}$  precies de waarden-sequentie 1, 0, -1, 0 doorloopt. Indien  $\omega_i = 1$  is de beweging eindig oscillerend (constante amplitude, bepaald door  $\rho_i(t_0)$ ). In 3.2.38 was voor een eindig oscillerende beweging meer vereist:  $\bar{\eta}_i = \sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2} = 1$ . In tegenstelling tot discrete tijd (3.2.38 en 3.2.40) is voor continue tijd (3.2.39) de amplitude-verandering slechts van  $\sigma_i$  en nooit van  $\omega_i$  afhankelijk, terwijl alleen  $\omega_i$  de periode-duur  $T_p$  bepaalt: voor bijv.  $\omega_i = 1$  is  $T_p = 2\pi \approx 6.28$ . Als  $\sigma_i = 0$ , liggen de beide volledig imaginaire eigenwaarden  $\lambda_i = \pm j\omega_i$  geheel op de imaginaire as van het complexe vlak en ontstaat voor continue tijd bijv. 3.2.41 een eindig oscillerende beweging. Ingeval  $\omega_i = 0$  blijft slechts één volledig reële eigenwaarde  $\lambda_i = \sigma_i$  over, geheel op de reële as van het complexe vlak liggend. Het zal geen verwondering wekken, dat dan de sinusoidale glofbeweging geheel vervalt en 3.2.42 precies het product van één excitatie en één karakteristieke reële beweging oplevert, waardoor het zoals eerder opgemerkt voor de hand ligt de notatie met  $\alpha_i(t_0)$ ,  $\lambda_i$  en  $b_i$  te kiezen.

Nemen we als voorbeeld weer de eerder besproken  $2 \times 2$ -matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{bmatrix}$$

met het tweetal volledig imaginaire eigenwaarden

$$\lambda_1, \lambda_2 = \pm j\sqrt{a}, \lambda_1' = \pm j\sqrt{a}, \text{ d.w.z. } \sigma_1 = 0, \omega_1 = \sqrt{a}$$

waarvoor eerder werd berekend

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{a} \end{bmatrix}, \quad r_1^* = [1 \quad 0], \quad s_1^* = [0 \quad -\frac{1}{\sqrt{a}}]$$

en waarvoor

$$\rho_1(t_0) = \frac{\sqrt{(\alpha_1^r(t_0))^2 + \alpha_1^s(t_0)^2}}{\sqrt{(x_1(t_0))^2 + \frac{1}{a}(x_2(t_0))^2}} = \frac{\sqrt{(r_1^*x(t_0))^2 + (s_1^*x(t_0))^2}}{\sqrt{(x_1(t_0))^2 + \frac{1}{a}(x_2(t_0))^2}}$$

$$\cos \phi_1(t_0) = \frac{\alpha_1^r(t_0)}{\rho_1(t_0)} = \frac{r_1^*x(t_0)}{\rho_1(t_0)} = \frac{x_1(t_0)}{\rho_1(t_0)}$$

$$\sin \phi_1(t_0) = \frac{\alpha_1^s(t_0)}{\rho_1(t_0)} = \frac{s_1^*x(t_0)}{\rho_1(t_0)} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{a}} x_2(t_0)}{\rho_1(t_0)}$$

Vanwege  $\sigma_1 = 0$  is 3.2.41 van toepassing en omdat  $A$  een  $2 \times 2$ -matrix is, geeft  $m_1^0(t - t_0)$  volgens 3.2.37 tevens de hele toestand  $x(t)$ :

$$x(t) = \rho_1(t_0) \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{a} \cdot (t - t_0) + \phi_1(t_0)) & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \sin(\sqrt{a} \cdot (t - t_0) + \phi_1(t_0)) & \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{a} \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$\rho_1(t_0) \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{a} \cdot (t - t_0) + \phi_1(t_0)) \\ -\sqrt{a} \sin(\sqrt{a} \cdot (t - t_0) + \phi_1(t_0)) \end{bmatrix}$$

Nu volgt hieruit vanwege  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$  en  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ :

$$x(t) = \rho_1(t_0) \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{a} \cdot (t - t_0)) \cdot \cos \phi_1(t_0) - \sin(\sqrt{a} \cdot (t - t_0)) \cdot \sin \phi_1(t_0) \\ -\sqrt{a} [\sin(\sqrt{a} \cdot (t - t_0)) \cdot \cos \phi_1(t_0) + \cos(\sqrt{a} \cdot (t - t_0)) \cdot \sin \phi_1(t_0)] \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\sqrt{a} \cdot (t - t_0)) \cdot x_1(t_0) + \frac{1}{\sqrt{a}} \sin(\sqrt{a} \cdot (t - t_0)) \cdot x_2(t_0) \\ -\sqrt{a} \sin(\sqrt{a} \cdot (t - t_0)) \cdot x_1(t_0) + \cos(\sqrt{a} \cdot (t - t_0)) \cdot x_2(t_0) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\sqrt{a} \cdot (t - t_0)) & \frac{1}{\sqrt{a}} \sin(\sqrt{a} \cdot (t - t_0)) \\ -\sqrt{a} \sin(\sqrt{a} \cdot (t - t_0)) & \cos(\sqrt{a} \cdot (t - t_0)) \end{bmatrix} x(t_0)$$

en dus weer dezelfde vrije beweging  $x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0)$  als eerder rechtstreeks via  $A$  in  $x(t) = e^{A \cdot (t - t_0)}x(t_0)$  en via de afzonderlijke eigenwaarden  $\lambda_1, \lambda_2$  op de diagonaal van  $\Lambda$  in  $x(t) = Be^{\Lambda \cdot (t - t_0)}B^{-1}$  werd verkregen. In de vorm van karakteristieke excitatie-beweging 3.2.41 wordt echter onmiddellijk duidelijk, dat zowel  $x_1(t)$  als  $x_2(t)$  een simpele

sinusoïdale beweging volgen met periode-duur  $2\pi/\sqrt{a}$  en bij uitdrukking van beide in de cosinus-functie

$$x_1(t) = \rho_1(t_0) [\cos(\sqrt{a} \cdot (t - t_0) + \phi_1(t_0))] \\ x_2(t) = -\rho_1(t_0) \cdot \sqrt{a} [\sin(\sqrt{a} \cdot (t - t_0) + \phi_1(t_0))] = \\ \rho_1(t_0) \cdot \sqrt{a} [\cos(\sqrt{a} \cdot (t - t_0) + \phi_1(t_0) + \frac{1}{2}\pi)]$$

fasen  $\phi_1(t_0)$  en  $\phi_1(t_0) + \frac{1}{2}\pi$  en constante amplituden  $\rho_1(t_0)$  en  $\rho_1(t_0) \cdot \sqrt{a}$ : beide oscilleren dus eindig,  $x_2(t)$  echter met een grotere amplitude dan  $x_1(t)$ .

Een overzicht van verschillende soorten karakteristieke excitatiebewegingen  $m_i^0$  bij verschillende waarden van  $\sigma_i$  en  $\omega_i$  in  $\lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_i$  is opgenomen in tabel 3.2.1. De tabel onderscheidt met name convergerende van divergerende en monotone van oscillerende bewegingen. Een grafische verduidelijking van deze cruciale bewegingstegenstellingen vindt men in fig. 2.2.3, althans voor discrete tijd met een geometrisch verlopende groei of afname. Voor continue tijd met een exponentieel verlopende groei of afname zijn de tegenstellingen geheel analoog. Additionele informatie m.b.t. iedere  $m_i^0$  verkrijgt men door de waarden  $m_i^0(t - t_0)$  over een korter of langer tijdsinterval  $[t_0, t_1]$  exakt te berekenen middels 3.2.38 c.q. 3.2.39 of - ingeval  $\omega_i = 0$  - 3.2.42 en de resultaten grafisch weer te geven.

Gedetailleerde kennis van de  $m_i^0$ , welke nog betrekkelijk inzichtelijk zijn en tegelijk beperkt in aantal ( $i = 1, \dots, n - k$ ), maakt het mogelijk om na te gaan, hoe daaruit de vaak grillig gevormde vrije beweging  $x(t) = \sum_{i=1}^{n-k} m_i^0(t - t_0)$  - 3.2.37 - als een eenvoudige som wordt opgebouwd. Met name is daarbij van belang, welk aandeel iedere  $m_i^0$  in die som heeft. Een belangrijke praktische konsekwentie van 3.2.38, 3.2.39, 3.2.42 en 3.2.37 is nl., dat men zelf door manipulatie van de begintoestand  $x(t_0)$  het aandeel van de resulterende  $m_i^0$  kan beïnvloeden en daardoor binnen bepaalde grenzen ook de vrije beweging. Bijv. kan men divergerende  $m_i^0$  een klein en convergerende een groot aandeel geven om zo al te snelle divergentie van de toestand  $x(t)$  en daardoor indirect van de output te voorkomen. Deze beïnvloedingsmogelijkheid via de begintoestand  $x(t_0)$  is geheel onafhankelijk van die via de input, waarvan het effect later in deze paragraaf zal worden behandeld.

$\lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_i$	discrete tijd	continue tijd
	$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}_i = \sigma_i + 1 = \\ \tilde{\eta}_i \cdot \cos \tilde{\theta}_i \\ \tilde{\eta}_i = \sqrt{\tilde{\sigma}_i^2 + \omega_i^2} \end{array} \right.$	
$\omega_i = 0$		
$\sigma_i > 0$	monotoon divergerend (geometrisch)	monotoon divergerend (exponentieel)
$\sigma_i = 0$	constant (excitatie- afhankelijke waarde)	constant (excitatie- afhankelijke waarde)
$\sigma_i < 0$		monotoon naar 0 convergerend (exponentieel)
$-1 < \sigma_i < 0$	monotoon naar 0 convergerend (geometrisch)	
$\sigma_i = -1$	constant 0 (excitatie- onafhankelijk)	
$-2 < \sigma_i < -1$	oscillerend naar 0 converge- rend (geometrisch); $T_p = 2$	
$\sigma_i = -2$	eindig oscillerend (excita- tie-afhankelijke amplitude); $T_p = 2$	
$\sigma_i < -2$	oscillerend divergerend (geometrisch); $T_p = 2$	
$\omega_i \neq 0$		
$\sigma_i > 0$	oscillerend divergerend (geometrisch); $T_p = 2\pi/\tilde{\theta}_i$	oscillerend divergerend (exponentieel); $T_p = 2\pi/\omega_i$
$\sigma_i = 0$	oscillerend divergerend (geometrisch); $T_p = 2\pi/\tilde{\theta}_i$	eindig oscillerend (excitatie- afhankelijke amplitude); $T_p = 2\pi/\omega_i$
$\sigma_i < 0$		oscillerend naar 0 convergerend (exponentieel); $T_p = 2\pi/\omega_i$
$\tilde{\eta}_i > 1$	oscillerend divergerend (geometrisch); $T_p = 2\pi/\tilde{\theta}_i$ ( $T_p = 4$ voor $\sigma_i = -1$ )	
$\tilde{\eta}_i = 1$	eindig oscillerend (excita- tie-afhankelijke amplitude); $T_p = 2\pi/\tilde{\theta}_i$	
$\tilde{\eta}_i < 1$	oscillerend naar 0 converge- rend (geometrisch); $T_p = 2\pi/\tilde{\theta}_i$ ( $T_p = 4$ voor $\sigma_i = -1$ )	

Tabel 3.2.1: Karakteristieke excitatie-bewegingen  $m_i^0$  voor excitaties onge-  
lijik aan 0 bij verschillende waarden van  $\sigma_i$  en  $\omega_i$  in

Weliswaar zijn het blijkens 3.2.42 de excitaties  $\alpha_i(t_0)$  en blijkens 3.2.38 c.q. 3.2.39 de uit de excitaties  $\alpha_i^r(t_0)$  en  $\alpha_i^s(t_0)$  afgeleide  $\rho_i(t_0)$ , die het aandeel van  $m_i^0(t - t_0)$  in de vrije beweging  $x(t)$  bepalen, maar die excitaties zijn op hun beurt uitsluitend van  $x(t_0)$  afhankelijk en dus vanuit  $x(t_0)$  manipuleerbaar. Zij zijn bovendien in die zin onafhankelijk van elkaar, dat men bij iedere gewenste combinatie van excitatie-waarden de daarvoor vereiste begintoestand kan berekenen.

De wijze, waarop de excitaties van  $x(t_0)$  afhankelijk zijn, blijkt uit de eerder gegeven formules

$$\alpha_i(t_0) = b_i^* x(t_0)$$

$$\alpha_i^r(t_0) = r_i^* x(t_0) \quad \alpha_i^s(t_0) = s_i^* x(t_0)$$

$$\rho_i(t_0) = \sqrt{(\alpha_i^r(t_0))^2 + (\alpha_i^s(t_0))^2}$$

$$\cos \phi_i(t_0) = \frac{\alpha_i^r(t_0)}{\rho_i(t_0)} \quad \sin \phi_i(t_0) = \frac{\alpha_i^s(t_0)}{\rho_i(t_0)}$$

Het probleem is, hoe omgekeerd voor een bepaald stel gewenste  $\alpha_i(t_0)$ - en  $\rho_i(t_0)$ -waarden de vereiste begintoestand  $x(t_0)$  moet worden berekend. De gewenste  $\rho_i(t_0)$ -waarden leggen de  $\alpha_i^r(t_0)$ - en  $\alpha_i^s(t_0)$ -waarden overigens nog niet geheel vast. Iedere gewenste  $\rho_i(t_0)$ -waarde laat nog de vrijheid open een bepaalde gewenste fase  $\phi_i(t_0)$  te kiezen: uit  $\cos \phi_i(t_0)$  en  $\sin \phi_i(t_0)$  volgen dan de  $\alpha_i^r(t_0)$ - en  $\alpha_i^s(t_0)$ -waarden en hieruit middels de eerder gegeven formule

$$\alpha_i(t_0) = \frac{1}{2} [\alpha_i^r(t_0) + j\alpha_i^s(t_0)]$$

$$\alpha_i^!(t_0) = \frac{1}{2} [\alpha_i^r(t_0) - j\alpha_i^s(t_0)]$$

de betrokken  $\alpha_i(t_0)$ - en  $\alpha_i^!(t_0)$ -waarden. Deze worden tezamen met alle andere gewenste  $\alpha_i(t_0)$ -waarden opgenomen in n-dimensionale excitatie-vector  $\alpha(t_0)$ , waaruit door toepassing van 3.2.36 op eenvoudige wijze de vereiste n-dimensionale begintoestand  $x(t_0)$  wordt verkregen

$$x(t_0) = B\alpha(t_0)$$

In de praktijk wordt vaak de voorkeur gegeven aan een convergerende vrije beweging, welke klaarblijkelijk wordt gerealiseerd door in  $\alpha(t_0)$  alleen die  $\alpha_i(t_0)$  ongelijk aan 0 te kiezen met corresponderende convergerende  $m_i^0$  - zie tabel 3.2.1 - en door de bijbehorende  $x(t_0) = B\alpha(t_0)$  te kiezen. Zoals dadelijk zal blijken realiseert een asymptotisch stabiel model  $[A,B,C,D]$  voor iedere  $x_0 = x(t_0)$  en niet slechts voor  $x_0 = x(t_0) = B\alpha(t_0)$  een convergerende vrije beweging. Indien een convergerende vrije beweging op prijs wordt gesteld, biedt een asymptotisch stabiel model  $[A,B,C,D]$  daarom grote voordelen. De besproken procedure geeft echter de mogelijkheid om ook voor andere dan asymptotisch stabiele modellen  $[A,B,C,D]$  de vrije beweging te laten convergeren middels de keuze van een gemakkelijk te berekenen begintoestand  $x(t_0)$ .

### Stabiliteit onder zero-input

De eigenwaarden  $\lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_i$  van A spelen behalve bij de oplossing van de homogene vergelijking en bij de analyse en beïnvloeding van de vrije beweging tevens een belangrijke rol bij de bestudering van stabiliteit van  $[A,B,C,D]$ . Zonder gebruikmaking van die eigenwaarden is de bestudering van stabiliteit veel moeilijker. Zo heeft Blalock heel wat ruimte nodig om slechts een aantal noodzakelijke stabiliteitsvoorwaarden te formuleren (22).

Bij de definiëring van stabiliteitsvormen vooronderstellen we het bestaan van een evenwichtstoestand  $x^*$ :  $x^*(t) = c_1$  voor alle  $t \in T$ , onder een bepaalde constante input  $u^*$ :  $u^*(t) = c_2$  voor alle  $t \in T$ . Bovendien is het in de modellen  $[A(t),B(t),C(t),D(t)]$  en  $[A,B,C,D]$  gemakkelijk voor  $u^*$  steeds de zero-input  $u^* = 0$  te nemen. Onder  $u^* = 0$  in  $[A(t),B(t),C(t),D(t)]$  en  $[A,B,C,D]$  is nultoestand  $x^* = 0$  klaarblijkelijk evenwichtstoestand, aangezien oplossing  $x(t) = \phi(t, t_0)x(t_0)$  (de vrije beweging) van de homogene vergelijking (de vergelijking onder zero-input  $u^* = 0$ ) voor  $x(t_0) = x^* = 0$  waarde  $x(t) = 0$  geeft voor alle  $t_0$  en  $t \geq t_0$ . Indien niet nader gespecificeerd zal in de modellen  $[A(t),B(t),C(t),D(t)]$  en  $[A,B,C,D]$  evenwichtstoestand  $x^*$ , in het bijzonder evenwichtstoestand  $x^* = 0$ , steeds worden opgevat als  $x^*$  onder  $u^* = 0$ .

Een evenwichtstoestand  $x^*$  onder  $u^*$  in een differentie- c.q. differentieel model  $[f(.,.,t), g(.,.,t)]$  met toestand-ruimte  $X = \mathbb{R}^n$  heet

- 3.2.43 stabiel i.s.L. (stabiel in de zin van Lyapunow), als er onder  $u^*$  voor iedere  $t_0$  en ieder willekeurig klein getal  $\epsilon > 0$  een (van  $t_0$  en  $\epsilon$  afhankelijk) getal  $\delta > 0$  bestaat, zodanig dat iedere begintoeestand  $x_0 = x(t_0)$  binnen (n-dimensionale) bol met straal  $\delta$  rond  $x^*$  in  $X$  een oplossing  $x(t)$  oplevert, die voor alle  $t \geq t_0$  blijft binnen bol met straal  $\epsilon$  rond  $x^*$  in  $X$ ,
- 3.2.44 asymptotisch stabiel, als 1)  $x^*$  stabiel i.s.L. is en 2) er onder  $u^*$  voor iedere  $t_0$  een (van  $t_0$  afhankelijk) getal  $\gamma > 0$  bestaat, zodanig dat iedere  $x_0 = x(t_0)$  binnen een bol met straal  $\gamma$  rond  $x^*$  in  $X$  een oplossing  $x(t)$  oplevert, die naar  $x^*$  convergeert, d.w.z. vanaf een bepaald tijdstip  $t_0 + \tau$  willekeurig dicht bij  $x^*$  komt en blijft ( $\tau$  afhankelijk van  $t_0$ ,  $x_0$  en willekeurig gekozen afstand van  $x^*$ ),
- 3.2.45 totaal asymptotisch stabiel, als 1)  $x^*$  stabiel i.s.L. is en 2) onder  $u^*$  iedere  $x_0 = x(t_0)$  in  $X$  een oplossing  $x(t)$  oplevert, die naar  $x^*$  convergeert.

Stabiliteit i.s.L., voor het eerst door de Russische wiskundige Lyapunow (1893) streng gedefinieerd, houdt vrij vertaald in: ondanks een bepaalde storing, waardoor de toestand van  $x^*$  wordt wegbewogen, blijft de toestand niettemin binnen een bepaalde afstand van  $x^*$ . Asymptotische stabiliteit vereist meer: na een storing binnen bepaalde grenzen moet de toestand vanaf een bepaald moment bovendien weer naar  $x^*$  terugkeren. Essentieel is voor beide stabiliteitsvormen, dat zij worden gelocaliseerd binnen toestand-ruimte  $X$ : de storingen mogen de toestand niet buiten straal  $\delta$  bewegen om de gewenste afstand  $\epsilon$  te bewaren c.q. niet buiten straal  $\gamma$  om convergentie te bereiken. Als  $\delta$  c.q.  $\delta$ ,  $\gamma$  en  $\tau$  niet van  $t_0$  afhangen, noemt men de stabiliteit i.s.L. c.q. de asymptotische stabiliteit uniform. Het nieuwe element bij totale asymptotische stabiliteit is, dat de convergentie naar  $x^*$  niet slecht optreedt voor begintoestanden  $x(t_0)$  binnen straal  $\gamma$  rond  $x^*$  maar voor welke  $x(t_0)$  binnen toestand-ruimte  $X$  dan ook. Het is gemakkelijk in te zien, dat zo'n totaal asymptotisch stabiele toestand  $x^*$  altijd de enige evenwichtstoestand onder  $u^*$  in het model is. Dat betekent voor modellen  $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$  en  $[A, B, C, D]$ , dat  $x^* = 0$  de enig mogelijke totaal asymptotisch stabiele

toestand is. Bovendien impliceert in deze modellen asymptotische stabiliteit van  $x^* = 0$  totale asymptotische stabiliteit van  $x^* = 0$ , zodat  $x^* = 0$  tevens de enig mogelijke asymptotisch stabiele toestand is. Verder is het stabiliteitskarakter van willekeurige evenwichtstoestanden  $x^*$  (steeds onder  $u^* = 0$ ) hier altijd gelijk aan dat van  $x^* = 0$ . Afhankelijk van het stabiliteitskarakter van  $x^* = 0$  worden modellen  $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$  en  $[A, B, C, D]$  daarom ook zelf (al dan niet uniform) stabiel i.s.L. of (al dan niet uniform) (totaal) asymptotisch stabiel genoemd (23).

Een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor (totale) asymptotische stabiliteit van  $[A, B, C, D]$  in termen van de eigenwaarden van matrix A luidt:

$$3.2.46 \quad \text{alle eigenwaarden } \lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_i \text{ van A hebben } \tilde{\eta}_i = \sqrt{\tilde{\sigma}_i^2 + \omega_i^2} < 1$$

(discrete tijd met  $\tilde{\sigma}_i = \sigma_i + 1$ )

$$3.2.47 \quad \text{alle eigenwaarden } \lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_i \text{ van A hebben } \sigma_i < 0$$

(continue tijd)

De voorwaarde geldt algemeen en dus niet slechts, indien A lineair-onafhankelijke eigenvectoren of verschillende eigenwaarden heeft. In het complexe vlak betekent voorwaarde 3.2.47, dat alle eigenwaarden links van de imaginaire y-as (in de "open left-half plane") moeten liggen, aangezien hun reëel deel  $\sigma_i$  strikt-negatief moet zijn. Deze eis wordt ook in 3.2.46 aan de eigenwaarden gesteld, maar bovendien moeten ze hier liggen binnen een cirkel met straal 1 (in de "open unit disk") rond het punt  $\langle \sigma = -1, \omega = 0 \rangle$  op de reële x-as, omdat dan en alleen dan  $\tilde{\eta}_i = \sqrt{\tilde{\sigma}_i^2 + \omega_i^2} < 1$ .

Vanwege het somkarakter van 3.2.37 zal de voorwaarde in het licht van tabel 3.2.1 geen verwondering wekken. Is er slechts één divergerende karakteristieke excitatie-beweging, d.w.z. één  $\tilde{\eta}_i = \sqrt{\tilde{\sigma}_i^2 + \omega_i^2} > 1$  c.q.  $\sigma_i > 0$ , dan zal deze vanwege het somkarakter van 3.2.37 na kortere of langere tijd de overhand krijgen in oplossing  $x(t)$  en zal voor alle  $x(t_0)$  met excitaties ongelijk aan 0 oplossing  $x(t)$  dus t.o.v.  $x^* = 0$  gaan divergeren. Ook excitatie-afhankelijke constante of eindig oscillerende karakteristieke excitatie-bewegingen, d.w.z.  $\tilde{\eta}_i = \sqrt{\tilde{\sigma}_i^2 + \omega_i^2} = 1$  c.q.  $\sigma_i = 0$ , leveren weliswaar voor zeer bepaalde  $x(t_0)$  oplossing  $x(t) = x^* = 0$  op, maar laten  $x(t)$  voor excitaties ongelijk aan 0 niet convergeren. Alleen als alle karakteristieke excitatie-bewegingen naar  $x^* = 0$  convergeren



c.q. excitatie-onafhankelijk constant de waarde  $x^* = 0$  aannemen, convergeert oplossing  $x(t)$  voor iedere  $x_0 = x(t_0)$  naar  $x^* = 0$  en is  $[A, B, C, D]$  (totaal) asymptotisch stabiel. Nemen we als voorbeeld weer de  $2 \times 2$ -matrix  $A$  met  $\lambda_1, \lambda_2 = \sigma_1 \pm j\omega_1 = \pm j\sqrt{a}$  en  $a > 0$ . Voor continue tijd is ieder model  $[A, B, C, D]$  met een dergelijke  $A$  stabiel i.s.L., d.w.z. de excitatiebeweging oscilleert eindig vanwege  $\sigma_1 = 0$ ,  $\omega_1 = \sqrt{a} \neq 0$  en  $x(t)$  blijft dus voor alle  $x(t_0)$  en  $t \geq t_0$  binnen een bepaalde afstand van  $x^* = 0$ , maar vanwege  $\sigma_1 = 0$  niet (totaal) asymptotisch stabiel. Voor discrete tijd vereist stabiliteit i.s.L.  $\tilde{\eta}_1 = \sqrt{\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\omega}_1^2} \leq 1$  en (totale) asymptotische stabiliteit  $\tilde{\eta}_1 = \sqrt{\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\omega}_1^2} < 1$ , aan welke eisen vanwege  $\tilde{\sigma}_1 = 1$  en  $\tilde{\omega}_1 = \sqrt{a} > 0$  niet kan worden voldaan.

Een noodzakelijke én voldoende voorwaarde voor stabiliteit i.s.L. van  $[A, B, C, D]$  luidt:

- 3.2.48 I alle eigenwaarden  $\lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_i$  van  $A$  hebben  $\tilde{\eta}_i = \sqrt{\tilde{\sigma}_i^2 + \tilde{\omega}_i^2} \leq 1$  en  
 II die met  $\tilde{\eta}_i = \sqrt{\tilde{\sigma}_i^2 + \tilde{\omega}_i^2} = 1$  hebben multipliciteit 1 in de minimale polynoom van  $A$   
 (discrete tijd met  $\tilde{\sigma}_i = \sigma_i + 1$ )
- 3.2.49 I alle eigenwaarden  $\lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_i$  van  $A$  hebben  $\sigma_i \leq 0$  en  
 II die met  $\sigma_i = 0$  hebben multipliciteit 1 in de minimale polynoom van  $A$   
 (continue tijd)

Ook deze voorwaarde geldt algemeen. Voor de vereiste toevoeging van het minder inzichtelijke deel II zij verwezen naar de specialistische literatuur (24). De karakteristieke vergelijking van  $A$  (3.2.28)

$$|A - \lambda_i I| = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_i + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_i^{n-1} + \lambda_i^n = \sum_{k=0}^n \alpha_k \lambda_i^k = 0 \quad \text{met } \alpha_n = 1$$

kan ook worden geschreven als

$$(\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_2) \dots (\lambda_i - \lambda_n) = \prod_{k=1}^n (\lambda_i - \lambda_k) = 0$$

of ook als

$$\prod_{k=1}^{\sigma} (\lambda_i - \lambda_k)^{m_k} = 0$$

waarin  $\sigma$  het aantal verschillende (distinct) eigenwaarden aangeeft en  $m$  het aantal keren, dat de betrokken distinct eigenwaarde voorkomt. Bij vervanging van  $\lambda_i$  door matrix  $A$  geldt volgens het Cayley-Hamilton theorema

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k A^k = \prod_{k=1}^n (A - \lambda_k I) = \prod_{k=1}^{\sigma} (A - \lambda_k I)^{m_k} = 0 \quad \text{met } A^0 = I \text{ en } \alpha_n = 1$$

Bij verkleining van  $m_k$  tot  $m'_k \leq m_k$ , zodanig dat blijft gelden

$$\prod_{k=1}^{\sigma} (A - \lambda_k I)^{m'_k} = 0$$

heet de bijbehorende karakteristieke vergelijking in minimale  $m'_k$ :

$$\prod_{k=1}^{\sigma} (\lambda_i - \lambda_k)^{m'_k} = 0 \quad \text{de minimale polynoom van } A \text{ en iedere minimale } m'_k \text{ de}$$

multipliciteit van de betrokken distinct eigenwaarde. Zo hebben bijv. de matrices

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

alle dezelfde karakteristieke polynoom  $(\lambda_i - 2)^4$  maar resp.  $(\lambda_i - 2)$ ,  $(\lambda_i - 2)^2$ ,  $(\lambda_i - 2)^3$ ,  $(\lambda_i - 2)^4$  als minimale polynoom: de éne distinct eigenwaarde 2 heeft resp. multipliciteit 1, 2, 3 en 4. De  $2 \times 2$ -matrix  $A$  met eigenwaarden  $\lambda_1, \lambda_2 = \sigma_1 \pm j\omega_1 = \pm j\sqrt{a}$  en  $a > 0$  voldoet niet alleen vanwege  $\sigma_1 = 0$  aan deel I van 3.2.49 maar tevens aan deel II, aangezien  $+j\sqrt{a} \neq -j\sqrt{a}$  en dus beide distinct eigenwaarden multipliciteit 1 hebben.

De tot nu toe genoemde stabiliteitsvormen en -voorwaarden hebben slechts betrekking op  $u^* = 0$  en zijn slechts geëxpliciteerd voor  $[A, B, C, D]$ . Zo dadelijk zal worden ingegaan op stabiliteitsvormen en -voorwaarden onder  $u \neq 0$  en zal speciale aandacht worden geschonken aan de stabiliteit van  $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$ , nadat eerst de oplossing van modellen  $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$  en  $[A, B, C, D]$  onder  $u \neq 0$  een meer expliciete formulering heeft gekregen.

Oplossing en stabiliteit onder  $u \neq 0$ 

Voor een meer expliciete oplossing van  $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$  zoeken we eerst de unieke oplossing voor de toestand- differentie-vergelijking c.q. -differentiaal-vergelijking in 3.2.4 c.q. 3.2.5. Deze luidt:

$$3.2.50 \quad x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \sum_{k=t_0}^{t-1} \Phi(t, k+1)B(k)u(k)$$

c.q.

$$3.2.51 \quad x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \xi)B(\xi)u(\xi)d\xi$$

Door nl. van beide zijden de differentie te nemen volgt uit 3.2.50

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= \Delta \Phi(t, t_0)x(t_0) + \Delta \sum_{k=t_0}^{t-1} \Phi(t, k+1)B(k)u(k) = \\ &= \Delta \Phi(t, t_0)x(t_0) + \sum_{k=t_0}^t \Phi(t+1, k+1)B(k)u(k) - \sum_{k=t_0}^{t-1} \Phi(t, k+1)B(k)u(k) = \\ &= \Delta \Phi(t, t_0)x(t_0) + \Phi(t+1, t+1)B(t)u(t) + \sum_{k=t_0}^{t-1} \Delta \Phi(t, k+1)B(k)u(k) \end{aligned}$$

en hieruit door toepassing van 3.2.17

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= A(t)\Phi(t, t_0)x(t_0) + B(t)u(t) + \sum_{k=t_0}^{t-1} A(t)\Phi(t, k+1)B(k)u(k) = \\ &= A(t) [\Phi(t, t_0)x(t_0) + \sum_{k=t_0}^{t-1} \Phi(t, k+1)B(k)u(k)] + B(t)u(t) \end{aligned}$$

hetgeen vanwege 3.2.50 kan geschreven worden als de differentie-vergelijking

$$\Delta x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

in 3.2.4. Oplossing 3.2.50 voldoet dus aan de differentie-vergelijking en tevens aan de beginvoorwaarde, aangezien voor  $t = t_0$  netjes  $x(t_0) = x(t_0)$

te voorschijn komt. Op analoge wijze kan worden bewezen, dat 3.2.51 de gezochte unieke oplossing voor differentiaal-vergelijking

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

in 3.2.5 is. De meer expliciete oplossing van  $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$  luidt dus

$$3.2.52 \quad x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \sum_{k=t_0}^{t-1} \Phi(t, k+1)B(k)u(k)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

c.q.

$$3.2.53 \quad x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \xi)B(\xi)u(\xi)d\xi$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

en definieert een toestand-ruimte-model  $M_{\Sigma} \equiv \langle U, \Sigma, Y; s, r \rangle$  waarvan de response-functie  $y(t) = \rho(t, t_0, x_0, u)$  de volgende meer expliciete vorm aanneemt

$$3.2.54 \quad y(t) = \underbrace{C(t)\Phi(t, t_0)x(t_0)}_{\text{zero-input-response}} + \underbrace{C(t) \sum_{k=t_0}^{t-1} \Phi(t, k+1)B(k)u(k) + D(t)u(t)}_{\text{zero-state-response}}$$

$$3.2.55 \quad y(t) = \underbrace{C(t)\Phi(t, t_0)x(t_0)}_{\text{zero-input-response}} + \underbrace{C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \xi)B(\xi)u(\xi)d\xi + D(t)u(t)}_{\text{zero-state-response}}$$

Deze  $\rho$  bezit klaarblijkelijk lineariteit - zie 3.1.31 t/m 3.1.34 - zodat  $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$  een lineair toestand-ruimte-model  $M_{\Sigma}$  definieert. De formulering in termen van unit-response-matrix  $\Phi(t, t_0)$  en impulse-response-matrix  $H(t, k)$  c.q.  $H(t, \xi)$ , waartoe lineariteit aanleiding geeft

$$3.2.56 \quad y(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \sum_{k=t_0}^t H(t, k)u(k)$$

c.q.

$$3.2.57 \quad y(t) = \phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t, \xi)u(\xi)d\xi$$

laat zien, dat geldt

$$3.2.58 \quad \phi(t, t_0) = \begin{cases} C(t)\phi(t, t_0) & \text{voor } t_0 < t \\ C(t) & \text{voor } t_0 = t \end{cases}$$

en

$$3.2.59 \quad H(t, k) = \begin{cases} C(t)\phi(t, k+1)B(k) & \text{voor } k < t \\ D(k) & \text{voor } k = t \end{cases}$$

c.q.

$$3.2.60 \quad H(t, \xi) = C(t)\phi(t, \xi)B(\xi) + D(\xi)\delta(t - \xi) \quad \text{voor } \xi \leq t$$

Opvallend is de centrale rol van de toestand-overgangsmatrix, niet slechts onder zero-input  $u^* = 0$  in de vrije beweging  $x(t) = \phi(t, t_0)x(t_0)$  - 3.2.19 - maar klaarblijkelijk ook in de oplossing onder  $u \neq 0$ .

Door toepassing van 3.2.24 c.q. 3.2.25 volgen nu onmiddellijk de expliciete uitdrukkingen voor  $s$ ,  $r$ ,  $\rho$ ,  $\phi$  en  $H$  ingeval  $[A, B, C, D]$  met constante matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en  $D$ .

$$3.2.61 \quad x(t) = \tilde{A}^{t-t_0} x(t_0) + \sum_{k=t_0}^{t-1} \tilde{A}^{t-k-1} B u(k) \quad \text{met } \tilde{A} = (A + I)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

c.q.

$$3.2.62 \quad x(t) = e^{A \cdot (t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A \cdot (t-\xi)} B u(\xi) d\xi$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$3.2.63 \quad y(t) = \underbrace{CA^{\sim t-t_0} x(t_0)}_{\text{zero-input-response}} + \underbrace{C \sum_{k=t_0}^{t-1} A^{\sim t-k-1} Bu(k)}_{\text{zero-state-response}} + Du(t)$$

c.q.

$$3.2.64 \quad y(t) = \underbrace{Ce^{A \cdot (t-t_0)} x(t_0)}_{\text{zero-input-response}} + \underbrace{C \int_{t_0}^t e^{A \cdot (t-\xi)} Bu(\xi) d\xi}_{\text{zero-state-response}} + Du(t)$$

$$3.2.65 \quad \phi(t') = \begin{cases} CA^{\sim t'} & \text{voor } t' > 0 \\ C & \text{voor } t' = 0 \end{cases}$$

c.q.

$$3.2.66 \quad \phi(t') = \begin{cases} Ce^{At'} & \text{voor } t' > 0 \\ C & \text{voor } t' = 0 \end{cases}$$

$$3.2.67 \quad H(t'') = \begin{cases} CA^{\sim t''-1} B & \text{voor } t'' > 0 \\ D & \text{voor } t'' = 0 \end{cases}$$

c.q.

$$3.2.68 \quad H(t'') = Ce^{At''} B + D\delta(t'') \quad \text{voor } t'' \geq 0$$

$[A, B, C, D]$  definieert vanwege het optreden van tijdsverschillen:  $t - t_0 = t'$ ,  $t - k = t''$  c.q.  $t - \xi = t''$  klaarblijkelijk een tijd-invariant lineair toestand-ruimte-model  $M_{\Sigma}$ . Opvallend is de centrale rol van matrix  $A$ , ook onder  $u \neq 0$ . De eigenschappen van het model zijn in belangrijke mate afhankelijk van  $A$ , in het bijzonder het stel eigenwaarden in de bijbehorende diagonaal-matrix  $\Lambda$ .

Het is gemakkelijk na te gaan, dat oplossing 2.2.13 van differentievergelijking 2.2.11 in feite een bijzonder geval is van 3.2.63 en oplossing 2.2.21 van differentiaal-vergelijking 2.2.20 in feite een bijzonder geval van 3.2.64, zoals aan het begin van deze paragraaf werd gesteld. Invulling van de daar gegeven waarden  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $u(t)$  en  $y(t)$  in 3.2.63 geeft nl.

$$v_2^y(t) = (a_{22} + 1)^{t-t_0} \cdot v_2^y(t_0) + \sum_{k=t_0}^{t-1} (a_{22} + 1)^{(t-1)-k} [a_{20} + a_{21} \cdot v_1^y(k)]$$

en vervolgens

$$v_2^y(t) = (a_{22} + 1)^{t-t_0} \cdot v_2^y(t_0) + a_{20} \sum_{k=t_0}^{t-1} (a_{22} + 1)^{(t-1)-k} + a_{21} \sum_{k=t_0}^{t-1} (a_{22} + 1)^{(t-1)-k} \cdot v_1^y(k)$$

Aangezien  $\sum_{k=t_0}^{t-1} (a_{22} + 1)^{(t-1)-k} = \frac{1}{a_{22}} [(a_{22} + 1)^{t-t_0} - 1]$ , hetgeen o.a.

iteratief is na te gaan, resulteert 2.2.13. Door invulling van dezelfde waarden van A, B, C, D, u(t) en y(t) in 3.2.64 resulteert op analoge wijze 2.2.21. Een en ander onderstreept nog eens het algemene karakter van model [A,B,C,D] met zijn oplossing.

Een eigenschap, die een differentie- c.q. differentieel model kan bezitten en met name bij toepassingen van grote praktische betekenis kan zijn, is stabiliteit en wel stabiliteit onder  $u \neq 0$ . Onderscheid wordt gemaakt tussen b.i.b.o.-stabiliteit (begrensd-input-begrensd-output-stabiliteit) en i.o.-stabiliteit (input-output-stabiliteit). Model  $[f(.,.,t), g(.,.,t)]$  heet

3.2.69 b.i.b.o.-stabil, als er voor iedere begintoestand  $x_0 = x(t_0)$  in X en ieder begrensd input-segment  $u_{[t_0, \infty)}$  een getal  $N < \infty$  bestaat (van  $x_0$  en  $u_{[t_0, \infty)}$  afhankelijk), dat grens is van output-segment  $y_{[t_0, \infty)}$  bij  $u_{[t_0, \infty)}$ .

3.2.70 i.o.-stabil, als er voor iedere begintoestand  $x_0 = x(t_0)$  in X en ieder getal  $M < \infty$  een getal  $N < \infty$  bestaat (van  $x_0$  en M afhankelijk), dat grens is van alle output-segmenten  $y_{[t_0, \infty)}$  bij alle input-segmenten  $u_{[t_0, \infty)}$  met grens M.

Input-segment  $u_{[t_0, \infty)}$  wordt begrensd door grens M, als u(t) voor alle  $t \geq t_0$  binnen een straal  $M < \infty$  rond  $u^* = 0$  in (r-dimensionale) input-waarden-ruimte U blijft; output-segment  $y_{[t_0, \infty)}$  wordt begrensd door grens N, als y(t) voor alle  $t \geq t_0$  binnen een straal  $N < \infty$  rond  $y^* = 0$  in

(m-dimensionale) output-waarden-ruimte  $Y$  blijft. I.o.-stabiliteit impliceert uiteraard b.i.b.o.-stabiliteit, terwijl bovendien voor  $[A,B,C,D]$  kan worden bewezen, dat asymptotische stabiliteit i.o.-stabiliteit impliceert (25). Voorwaarde 3.2.46 c.q. 3.2.47 is dus tevens voldoende voorwaarde voor i.o.-stabiliteit van  $[A,B,C,D]$ , hoewel niet altijd noodzakelijk. Als voldoende én noodzakelijke voorwaarde geldt 3.2.46 c.q. 3.2.47 slechts voor die modellen  $[A,B,C,D]$ , die bereikbaar zijn vanuit  $x^* = 0$  (3.1.20) en observeerbaar (3.1.24 voor alle  $u \in U$ ). Definiëren we  $n \times n$ -matrix  $Q$  en  $n \times n$ -matrix  $P$ , voor continue tijd (voorwaarde 3.2.47) als volgt

$$Q = [B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B]$$

$$P = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Voor discrete tijd (voorwaarde 3.2.46) wordt  $A$  telkens vervangen door  $\tilde{A}$ . Bereikbaarheid vanuit  $x^* = 0$  en observeerbaarheid van  $[A,B,C,D]$  zijn equivalent met resp. Rang  $Q = n$  en Rang  $P = n$  (de rang is het aantal lineair onafhankelijke kolommen of rijen van een matrix). Voor die modellen is bewijsbaar, dat i.o.-stabiliteit asymptotische stabiliteit impliceert (26), en is 3.2.46 c.q. 3.2.47 behalve voldoende tevens noodzakelijke voorwaarde voor i.o.-stabiliteit.

Stabiliteitsvoorwaarden voor  $[A(t),B(t),C(t),D(t)]$  (27) zijn veel moeilijker en veel minder expliciet te formuleren dan voor  $[A,B,C,D]$ . Zij vereisen met name voor iedere  $t_0$  en  $t \geq t_0$  kennis van toestand-overgangsmatrix  $\Phi(t, t_0)$  en niet slechts van  $A(t)$ . Voldoende en noodzakelijk voor stabiliteit i.s.L. is, dat er voor iedere  $t_0$  een grens  $M$  (van  $t_0$  afhankelijk) bestaat voor  $\Phi(t, t_0)$ , d.w.z.

$$3.2.71 \quad \|\Phi(t, t_0)\| \leq M \text{ voor alle } t \geq t_0$$

Voldoende en noodzakelijk voor asymptotische stabiliteit is, dat 3.2.71 en tegelijk 3.2.72 geldt:



$$3.2.72 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t, t_0)\| = 0$$

Hieruit volgt voor 3.2.56 en 3.2.57 vanwege  $\phi(t, t_0) = C(t)\phi(t, t_0)$  volgens 3.2.58:

$$3.2.73 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=t_0}^t H(t, k)u(k)$$

$$3.2.74 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t H(t, \xi)u(\xi)d\xi$$

De response  $y(t)$  van een asymptotisch stabiel model  $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$  is dus uiteindelijk nog slechts van de input  $u$  en de impulse-response  $H$  afhankelijk en niet meer van de begintoestand  $x(t_0)$ . Voldoende en noodzakelijk voor uniform asymptotische stabiliteit is, dat er twee positieve constante getallen  $c_1$  en  $c_2$  bestaan, zodat

$$3.2.75 \quad \|\phi(t, t_0)\| \leq c_1 \cdot e^{-c_2 \cdot (t-t_0)} \quad \text{voor alle } t_0 \text{ en } t \geq t_0$$

Het probleem van de voorwaarden voor i.o.-stabiliteit is niet volledig opgelost (28). Bij uniform asymptotische stabiliteit is echter voldoende voorwaarde, dat er grenzen  $M_1$ ,  $M_2$  en  $M_3$  bestaan voor matrices  $B(t)$ ,  $C(t)$  en  $D(t)$ , d.w.z.

$$3.2.76 \quad \begin{aligned} \|B(t)\| &\leq M_1 && \text{voor alle } t \\ \|C(t)\| &\leq M_2 && \text{voor alle } t \\ \|D(t)\| &\leq M_3 && \text{voor alle } t \end{aligned}$$

In 3.2.71, 3.2.75 en 3.2.76 kan als norm  $\|.\|$  van de matrices worden genomen

$$\max_i \sum_j |a_{ij}|$$

met  $|a_{ij}|$  de absolute celwaarde in rij  $i$  en kolom  $j$  van de matrix. De gegeven stabiliteitsresultaten gelden uiteraard behalve voor  $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$  tevens voor bijzonder geval  $[A, B, C, D]$ , waarvoor echter tevens meer expliciete formuleringen gegeven konden worden.

### 3.3 Modellen [A,B,C,D]: schattingsprocedures in een bijzonder geval

Het bijzondere geval, waarop de procedures in deze paragraaf van toepassing zijn, doet zich voor, indien 1) het model [A,B,C,D] een differentie-model is (discrete tijd) en men 2) beschikt over data met  $\delta = 1$  als vast tijdsverschil tussen opeenvolgende waarnemingstijdstippen (twee of meer interview-golven in een panel-onderzoek bijv., waartussen het tijdsverschil  $\delta$  in termen van het model 1 is). Het tijdsverschil  $\delta$  tussen waarnemingstijdstippen moet dus overeenstemmen met de tijdsdifferentie  $\Delta t = 1$  in het model. De te behandelen procedures zijn hoofdzakelijk ontwikkeld in de econometrie (29). Aan het eind van deze paragraaf zal aandacht worden besteed aan verwante procedures, die recentelijk zijn ontwikkeld door een groep rond de Zweedse statisticus Joreskog (30) en die expliciet rekening houden met een tweetal situaties, die zich in de sociale wetenschap frequent voordoen:

- 1) het optreden van meetfouten in de data,
- 2) het optreden van een of meer latente variabelen (hypothetische constructs), welke middels een groter aantal door meetfouten gekenmerkte variabelen worden gemeten

In de volgende paragraaf zal worden aangegeven, hoe de genoemde procedures gebruikt kunnen worden in de gevallen, dat de tijdsdifferentie  $\Delta t = 1$  in het model niet overeenstemt met het tijdsverschil  $\delta$  tussen waarnemingstijdstippen ( $\delta \neq 1$ ) of het te schatten model [A,B,C,D] een differentieel model is (continue tijd).

Alle te behandelen procedures beperken zich tot constante parameterwaarden en daardoor tot modellen [A,B,C,D]. De tijdsafhankelijke matrices in [A(t),B(t),C(t),D(t)] vormen voor de sociale wetenschap een vrijwel onopgelost probleem. In [A,B,C,D] kan echter een soort "pseudo-tijd-variantie" worden ingevoerd door als een van de deel-inputs  $u_1$  in de tijd zelf te nemen:  $u_1(t) = t$  of  $u_1(t) = t - c$  met  $c$  een constante, dan wel in het geval van verschillende onderzoekseenheden (verdeeld onderzoek; zie de laatste alinea van paragraaf 2.3) de leeftijd:  $u_1(t) = t - t_u^*$  met  $t_u^*$  het aanvangs- of geboorte-tijdstip, d.w.z. het ingangstijdstip van input  $u$  voor de betrokken onderzoekseenheid. Een dergelijke pseudo-tijd-variantie wordt in de econometrie frequent toegepast met meestal een aanzienlijke verbeterde model-"fit" als resultaat. Opname van de tijd is

uiteraard niet zinvol in cross-sectioneel onderzoek, waar alle data op hetzelfde tijdstip  $t$  betrekking hebben; opname van tijd én leeftijd niet in zuiver tijdserie-onderzoek (zie de laatste alinea van paragraaf 2.3), aangezien de leeftijd hier slechts een constante  $c$  verschilt van de tijd.

Een ander middel om de toepasbaarheid van  $[A, B, C, D]$  te verruimen is de introductie van z.g. tijd-lagged deel-inputs in  $u$ :  $u_{i-1}(t) = u_i(t-1)$ ,  $u_{i-2}(t) = u_i(t-2)$ , etc., waardoor verschillende opeenvolgende waarden  $u_i(t)$ ,  $u_i(t-1)$ ,  $u_i(t-2)$ , etc. van feitelijk dezelfde deel-input  $u_i$  in de differentie- c.q. differentiaal-vergelijking kunnen worden opgenomen, zonder dat de algemene formulering wijziging behoeft. Deze blijft

$$\Delta x(t) = Ax(t) + Bu(t) \rightarrow x(t+1) = \tilde{A}x(t) + Bu(t) \quad \text{met } \tilde{A} = (A + I)$$

c.q.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Ook de oplossingen en stabiliteitscondities behouden dezelfde algemene formulering. In een differentie-vergelijking is het bovendien mogelijk  $u_{i+1}(t) = u_i(t+1)$  op te nemen, zodat  $x(t+1) = \tilde{A}x(t) + Bu(t)$  als pseudo-formulering zou optreden voor

$$x(t+1) = \tilde{A}x(t) + \dots + b_{i-1}u_i(t-1) + b_iu_i(t) + b_{i+1}u_i(t+1) + \dots$$

waarin  $x(t+1)$  en  $u_i(t+1)$  op hetzelfde tijdstip  $t+1$  betrekking hebben. Men kan zo bijv. het consumptie-niveau  $x(t+1)$  in het jaar  $t+1$  behalve van het inkomen in voorafgaande jaren  $t$ ,  $t-1$ ,  $t-2$ , etc. tevens afhankelijk stellen van het inkomen  $u_i(t+1)$  in hetzelfde jaar  $t+1$ . Ook deze werkwijze met z.g. tijd-anticiperende deel-inputs in  $u$  vindt in de econometrie veelvuldig toepassing. Wel moet men er rekening mee houden, dat de specificatie van een tijd-anticiperende deel-input bij een uitlees-vergelijking

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

met coëfficiënten in de betrokken kolom van  $D$  ongelijk aan 0, zou impliceren, dat het heden  $y(t)$  zou worden beïnvloed door de toekomst  $u_i(t+1)$ .

Om te voldoen aan causaliteitsaxioma 3.1.4 moeten de coëfficiënten in de betrokken kolom van D a priori op 0 worden gesteld.

Het bijzondere geval, dat in deze paragraaf zal worden behandeld: differentie-model [A,B,C,D] met  $\delta = 1$  tussen opeenvolgende waarnemings-tijdstippen, is nog relatief simpel. Bij een tijdsverschil tussen waarnemingstijdstippen groter of kleiner dan 1 verdient het daarom aanbeveling eerst het differentie-model [A,B,C,D] te proberen met de tijd zodanig gheherdefinieerd, dat  $\delta = 1$ , voordat tot de ingewikkeldere en later te behandelen procedures met  $\delta \neq 1$  wordt overgegaan. In de econometrie wordt een dergelijke overeenstemming tussen het tijdsverschil  $\Delta t = 1$  in de differentie  $\Delta x(t) = x(t+1) - x(t)$  van het model (bijv. het verschil in inkomen tussen jaar  $t+1$  en jaar  $t$ ) en het tijdsverschil in de observatie-data (bijv. jaardata) bijna altijd gerealiseerd, zodat  $\delta = 1$  en de relatief eenvoudige identificatie- en schattingsprocedures van deze paragraaf worden toegepast.

#### Van differentie-model [A,B,C,D] naar structurele modelvorm en omgekeerd

Voor de formulering van differentie-model [A,B,C,D] in 3.1.47

$$3.3.1 \quad \begin{aligned} \Delta x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \rightarrow x(t+1) = \tilde{A}x(t) + Bu(t) \quad \text{met } \tilde{A} = A + I \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \rightarrow y(t+1) = Cx(t+1) + Du(t+1) \end{aligned}$$

kiezen we de vereenvoudigde schrijfwijze

$$3.3.2 \quad \begin{aligned} x_1 &= \tilde{A}x_0 + Bu_0 \quad \text{met } x_1 \equiv x(t+1), x_0 \equiv x(t), u_0 \equiv u(t) \\ y_1 &= Cx_1 + Du_1 \quad \text{met } y_1 \equiv y(t+1), x_1 \equiv x(t+1), u_1 \equiv u(t+1) \end{aligned}$$

en vervolgens combineren we beide vergelijkingen in

$$3.3.3 \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}$$

hetgeen eenvoudiger is te schrijven als

$$3.3.4 \quad \bar{y} = \bar{C}\bar{y} + \bar{A}\bar{z}^y + \bar{B}\bar{z}^u \quad \text{met } \bar{y} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad \bar{z}^y \equiv \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \quad \bar{z}^u \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} \equiv \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

$$= \bar{C}\bar{y} + \bar{D}\bar{z} \quad \text{met } \bar{z} \equiv \begin{bmatrix} \bar{z}^y \\ \bar{z}^u \end{bmatrix}, \quad \bar{D} \equiv \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \end{bmatrix}$$

De variabelen in vector  $\bar{y}$  worden in de econometrie current-endogeen genoemd en vallen in het kader van differentie-model  $[A, B, C, D]$  uiteen in  $n$  huidige toestand-variabelen  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) en  $m$  huidige output-waarde-variabelen  $y_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). De variabelen in vector  $\bar{z}$  hebben in de econometrie gepredetermineerd. Zij omvatten 1) de lagged-endogene variabelen in vector  $\bar{z}^y$ , uiteenvallend in  $n$  lagged toestand-variabelen  $x_{0i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) en  $m$  lagged output-waarde-variabelen  $y_{0i}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) en 2) de exogene variabelen in vector  $\bar{z}^u$ , uiteenvallend in  $r$  input-waarde-variabelen  $u_{1i}$  ( $i = 1, \dots, r$ ) en  $r$  lagged input-waarde-variabelen  $u_{0i}$  ( $i = 1, \dots, r$ ). Uit 3.3.4 volgt

$$3.3.5 \quad (I - \bar{C})\bar{y} - \bar{D}\bar{z} = 0 \quad \text{met } (I - \bar{C}) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -C & I \end{bmatrix}, \quad -\bar{D} = \begin{bmatrix} -\tilde{A} & 0 & -B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D \end{bmatrix}$$

hetgeen een bijzonder geval is van algemeen model

$$3.3.6 \quad \Delta\bar{y} + \Gamma\bar{z} = 0 \quad \text{met } \Delta \text{ een vierkante matrix}$$

Formulering 3.3.6 wordt in de econometrie aangeduid als de structurele modelvorm. Uit 3.3.5 volgt

$$3.3.7 \quad \bar{y} = (I - \bar{C})^{-1}\bar{D}\bar{z} \quad \text{met } (I - \bar{C})^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ C & I \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 & B & 0 \\ C\tilde{A} & 0 & CB & D \end{bmatrix}$$

hetgeen een bijzonder geval is van hetgeen in de econometrie de gereduceerde modelvorm wordt genoemd:

$$3.3.8 \quad \bar{y} = \Pi \bar{z} \quad \text{met} \quad \Pi = -\Delta^{-1} \Gamma$$

Hierin zijn alle afhankelijkheden voor endogene vector  $\bar{y}$ , van zichzelf in  $\Delta$  en van de gepredetermineerde vector  $\bar{z}$  in  $\Gamma$ , gereduceerd tot afhankelijkheden in  $\Pi$  van uitsluitend de gepredetermineerde vector  $\bar{z}$ .

Omgekeerd kan uit de structurele vorm 3.3.6 en de gereduceerde vorm 3.3.8 van ieder willekeurig model met lagged-endogene variabelen een model [A,B,C,D] worden afgeleid. Om dit te bereiken moeten in 3.3.3 op de vereiste plaatsen de waarden 0 ontstaan. Daartoe splitst men de current-endogene vector  $\bar{y}$  in 3.3.6 in twee deel-vectoren  $x_1$  en  $y_1$  door alleen die variabelen in  $y_1$  te kiezen

- 1) die blijkens  $\Delta$  niet van enige andere variabele in  $y_1$  en blijkens  $\Gamma$  niet van enige variabele in lagged-endogene  $\bar{z}^y = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \\ y_0 \\ 0 \end{bmatrix}$  en van enige variabele in  $u_0$  afhankelijk zijn,
- 2) waarvan blijkens  $\Delta$  geen enkele variabele in de overblijvende deel-vector  $x_1$  afhankelijk is, terwijl bovendien geen enkele variabele in  $x_1$  afhankelijk is van de bij  $y_1$  behorende lagged-endogene deel-vector  $y_0$ . Zijn er in deel-vector  $x_1$ , die zo ontstaat, variabelen afhankelijk van  $u_1$ , dan wordt de zojuist besproken procedure met tijd-anticiperende deel-inputs toegepast en komen de betrokken coëfficiënten in B terecht en worden bepaalde coëfficiënten in D a priori op 0 gesteld.

Zijn er geen variabelen in  $\bar{y}$ , die aan 1) én 2) voldoen, dan kan men één of meer variabelen  $x_{1i}$  in  $y_1$  kiezen door de definitiorische gelijkstelling  $y_{1i} \equiv x_{1i}$  (bijv. variabelen  $x_{1i}$ , waarin men speciaal is geïnteresseerd) en stelt men in overeenstemming daarmee  $C = I$  en  $D = 0$ . Zijn er wel van dergelijke variabelen in  $\bar{y}$  en heeft men  $\bar{y}$  in 3.3.6 de vorm  $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$  gegeven

en  $\bar{z}$  de vorm  $\begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \\ y_0 \\ 0 \\ u_0 \\ 0 \\ u_1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , dan krijgen  $\Delta$  en  $\Gamma$  de volgende vorm

$$3.3.9 \quad \Delta = \begin{bmatrix} K & 0 \\ -C & I \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} -L & 0 & -M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D \end{bmatrix}$$

zodat men C en D onmiddellijk kan bepalen. Indien  $K = I$ , zodat er geen

geheugenloze afhankelijkheden bestaan tussen (toestand-)variabelen  $x_{i1}$ , volgen tevens onmiddellijk  $A = \tilde{A} - I$  en B:

$$3.3.10 \quad \Delta = (I - \bar{C}) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -C & I \end{bmatrix}, \quad \Gamma = -\bar{D} = \begin{bmatrix} -\tilde{A} & 0 & -B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D \end{bmatrix}$$

Indien  $K \neq I$ , zodat er inderdaad geheugenloze afhankelijkheden zijn tussen (toestand-)variabelen  $x_{i1}$ , is de structurele vorm alleen niet voldoende maar moet ter completering van  $[A, B, C, D]$  ook de gereduceerde vorm worden bepaald. Evenmin als  $[A, B, C, D]$  kent de gereduceerde vorm geheugenloze afhankelijkheden tussen (toestand-)variabelen  $x_{i1}$ , omdat in vector  $\bar{z}$  van gepredetermineerde variabelen alleen lagged (toestand-)variabelen  $x_{0i}$  en geen currente (toestand-)variabelen  $x_{i1}$  voorkomen.  $\Pi$  kan dan ook als volgt worden gebruikt om A en B te bepalen

$$3.3.11 \quad \Pi = -\Delta^{-1}\Gamma = - \begin{bmatrix} K^{-1} & 0 \\ CK^{-1} & I \end{bmatrix} \Gamma = \begin{bmatrix} K^{-1}L & 0 & K^{-1}M & 0 \\ CK^{-1}L & 0 & CK^{-1}M & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 & B & 0 \\ C\tilde{A} & 0 & CB & D \end{bmatrix}$$

Samenvattend komt het bepalen van de matrices  $A = \tilde{A} - I$ , B, C en D dus neer op 1) een zodanige (her)definiëring van de matrices  $\Delta$  en  $\Gamma$  in 3.3.6 dat C en D volgens 3.3.9 te voorschijn komen en 2) bepaling van matrix  $\Pi$  in 3.3.8 om  $A = \tilde{A} - I$  en B volgens 3.3.11 te verkrijgen.

### Ceheugenloze coëfficiënten in de structurele modelvorm

De geheugenloze coëfficiënten in K van structurele vorm 3.3.9 gaan via gereduceerde vorm 3.3.11 op in  $\tilde{A} = K^{-1}L$  en  $B = K^{-1}M$ . Men kan zich afvragen wat de functie van de geheugenloze K-coëfficiënten en de betrokken structurele vergelijkingen is, indien zij geen zelfstandige rol meer vervullen in de gereduceerde vorm en in  $[A, B, C, D]$ . Er zijn vier soorten structurele vergelijkingen en in ieder van hen kunnen K-coëfficiënten voorkomen:

- 1) definitiorische vergelijkingen (identiteiten),
- 2) institutionele/technologische vergelijkingen,
- 3) evenwichtstellende vergelijkingen (quasi-identiteiten),
- 4) gedragsvergelijkingen.

Voorbeelden van definitiorische vergelijkingen zijn:

$A \equiv Y + T$  (aangeboden geldsom  $A \equiv$  nationaal inkomen  $Y +$  industriële belastingen  $T$ )

$V \equiv C + I + G$  (gevraagde geldsom  $V \equiv$  consumptie  $C +$  investeringen  $I +$  overheidsuitgaven  $G$ )

Stel, dat  $Y$ ,  $I$  en  $C$  endogene (toestand-)variabelen en  $T$  en  $G$  exogene variabelen zijn. Bij overbrenging van de endogene variabelen naar het linkerlid

$$A - Y = T$$

$$V - C - I = G$$

blijken dus een drietal coëfficiënten in  $K$  a priori op  $-1$  gesteld. De enige functie van definitiorische vergelijkingen is, dat zij middels de introductie van pseudo-variabelen - i.c.  $A$  en  $V$  - eenvoudigere formuleringen mogelijk maken elders in het model. Door de pseudo-variabelen elders in het model steeds te vervangen - i.c.  $A$  door  $Y + T$  en  $V$  door  $C + I + G$  - kan men zonder bezwaar de definitiorische vergelijkingen uit het model verwijderen en verdwijnen tevens de geheugenloze coëfficiënten uit  $K$ , zodat  $K$  steeds meer de vorm van eenheidsmatrix  $I$  gaat aannemen. Dat geldt in principe ook voor institutionele en technologische vergelijkingen, waarvan de coëfficiënt-waarden eveneens a priori worden vastgesteld. Neem bijv. de institutionele vergelijking

$$T = .2S \rightarrow T - .2S = 0$$

die aangeeft, hoe groot door toedoen van de overheid de belasting  $T$  is als percentage van de verkoop  $S$ . Men kan  $T$  steeds vervangen door  $.2S$  en de institutionele vergelijking met coëfficiënt  $.2$  uit het model verwijderen. Niettemin heeft het voordelen om  $T$  en de institutionele vergelijking in de structurele vorm te handhaven. Een institutionele regeling of technologische stand van zaken kan immers veranderen ( $.2$  wordt bijv. verhoogd tot  $.25$ ), in welk geval het model langs de structurele vergelijking snel kan worden aangepast.



Zoals Meissner (31) in aansluiting op Wold's ideeën over recursiviteit en interdependentie op overtuigende wijze heeft aangetoond, dienen evenwichtstellende vergelijkingen scherp onderscheiden te worden van enerzijds definitieve vergelijkingen als echte formele identiteiten en anderzijds gedragsvergelijkingen als echte empirische vergelijkingen. Neem bijv. het type evenwichtstellende vergelijking m.b.t. vraag en aanbod, dat ter afsluiting van veel econometrische modellen wordt aange troffen.

$$A = V \rightarrow A - V = 0$$

Het betreft hier geen echte identiteit, omdat geen nieuwe pseudo-variabele wordt geïntroduceerd, maar evenmin betreft het een echte gedragsvergelijking, omdat vraag  $V$  en aanbod  $A$ , die hier a priori aan elkaar gelijk worden gesteld, dat in de empirische realiteit allerm minst hoeven te zijn. Evenwichtstellende vergelijkingen kan men opvatten als geheugenloze afleidingen uit aanpassingsvergelijkingen (gedragsvergelijkingen met geheugenwerking) onder de evenwichtsassumptie. Zo zou men  $A = V$  kunnen afleiden uit aanpassingsvergelijking

$$3.3.12 \quad p(t + 1) = p(t) + \gamma[V(t) - A(t)]$$

waarin de rente (geldprijs)  $p$  op het nieuwe tijdstip  $t + 1$  afhankelijk wordt gesteld van de rente op het eerdere tijdstip  $t$  en het verschil tussen geldvraag  $V$  en geldaanbod  $A$  op tijdstip  $t$ . Onder de evenwichtsassumptie  $p(t + 1) - p(t) = 0$  verdwijnt variabele  $p$  uit de vergelijking - eventueel zelfs uit het hele model - en volgt  $A(t) = V(t)$  of  $A = V$ . De oorspronkelijk gepredetermineerde variabelen  $V(t)$  en  $A(t)$  worden daardoor endogeen, zodat op de betrokken plaats in  $K$  coëfficiënt  $-1$  verschijnt. De coëfficiënt zou weer uit  $K$  verdwijnen na vervanging van  $A$  door  $V$  of  $V$  door  $A$  en verwijdering van  $A = V$  uit het model maar ook bij vervanging van  $A = V$  door aanpassingsvergelijking 3.3.12, waarin immers geen geheugenloze coëfficiënten voorkomen.

Het is van belang erop te wijzen, dat in de gegeven interpretatie van evenwichtstellende vergelijkingen zoals m.b.t. vraag en aanbod geen strikt evenwicht (constantie over de tijd) voor de betrokken variabelen

$V(t)$  en  $A(t)$  wordt aangenomen. Evenwicht in deze restrictieve zin wordt slechts voor  $p(t)$  aangenomen;  $V(t)$  en  $A(t)$  mogen over de tijd veranderen, als zij maar in waarde aan elkaar gelijk blijven. Een nog minder restrictieve interpretatie zal zo dadelijk worden gegeven, wanneer  $\bar{p}(t)$ ,  $\bar{V}(t)$  en  $\bar{A}(t)$  als geobserveerde variabelen van  $p(t)$ ,  $V(t)$  en  $A(t)$  worden onderscheiden: een strikt evenwicht is dan voor geen van de variabelen  $p(t)$ ,  $V(t)$  en  $A(t)$  vereist en zelfs geen strikte gelijkheid tussen  $A(t)$  en  $V(t)$ .

Evenwichtstellende vergelijkingen introduceren gemakkelijk geheugenloze feedback-loops in de modelstructuur en deze bevorderen op hun beurt stabiliteit van  $[A,B,C,D]$ . Het volgende eenvoudige model moge dit verduidelijken:

$$\begin{aligned}
 13 \quad A(t+1) &= \alpha P(t+1) + \beta P(t) \rightarrow P(t+1) = \frac{1}{\alpha} A(t+1) - \frac{\beta}{\alpha} P(t) \\
 V(t+1) &= \gamma P(t+1) + \kappa P(t) \\
 A(t+1) &= V(t+1)
 \end{aligned}$$

Hierin worden geldaanbod  $A$  en geldvraag  $V$  afhankelijk gesteld van de winst  $P$  in hetzelfde en het voorafgaande jaar, terwijl het model wordt afgesloten met de evenwichtstellende vergelijking  $A = V$ , die de volgende geheugenloze feedback-loop introduceert:

$$P(t+1) \rightarrow V(t+1) \rightarrow A(t+1) \rightarrow P(t+1)$$

Geschreven in structurele vorm:

$$\Delta \begin{bmatrix} P(t+1) \\ V(t+1) \\ A(t+1) \end{bmatrix} + \Gamma \begin{bmatrix} P(t) \\ V(t) \\ A(t) \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} P(t+1) \\ V(t+1) \\ A(t+1) \end{bmatrix} - L \begin{bmatrix} P(t) \\ V(t) \\ A(t) \end{bmatrix} = 0$$

luiden de matrices  $\Delta = K$  en  $\Gamma = -L$

$$14 \quad \Delta = K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ -\gamma & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Gamma = -L = - \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{\alpha} & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Voor gereduceerde vorm 
$$\begin{bmatrix} P(t+1) \\ V(t+1) \\ A(t+1) \end{bmatrix} = \Pi \begin{bmatrix} P(t) \\ V(t) \\ A(t) \end{bmatrix}$$
 geldt dan

$$3.3.15 \quad \Pi = -\Delta^{-1}\Gamma = K^{-1}L = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\alpha-\gamma} & \frac{1}{\alpha-\gamma} & \frac{1}{\alpha-\gamma} \\ \frac{\alpha\gamma}{\alpha-\gamma} & \frac{\alpha}{\alpha-\gamma} & \frac{\gamma}{\alpha-\gamma} \\ \frac{\alpha\gamma}{\alpha-\gamma} & \frac{\alpha}{\alpha-\gamma} & \frac{\alpha}{\alpha-\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{\alpha} & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\kappa-\beta}{\alpha-\gamma} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha\kappa-\beta\gamma}{\alpha-\gamma} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha\kappa-\beta\gamma}{\alpha-\gamma} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{A} = A + I$$

Uit karakteristieke vergelijking

$$|A - \lambda_i I| = \left(\frac{\kappa-\beta}{\alpha-\gamma} - 1 - \lambda_i\right)(-1 - \lambda_i)^2 = 0$$

volgen als eigenwaarden van A

$$\lambda_1 = \frac{\kappa-\beta}{\alpha-\gamma} - 1 \quad (\tilde{\sigma}_1 = \frac{\kappa-\beta}{\alpha-\gamma}; \omega_1 = 0)$$

$$\lambda_2 = -1 \quad (\tilde{\sigma}_2 = 0; \omega_2 = 0)$$

$$\lambda_3 = -1 \quad (\tilde{\sigma}_3 = 0; \omega_3 = 0)$$

welke aan stabiliteitsvoorwaarde 3.2.46 voldoen, indien  $\sqrt{\tilde{\sigma}_1^2} = \sqrt{\frac{(\kappa-\beta)^2}{(\alpha-\gamma)^2}} < 1$ ,

d.w.z. indien voor de absolute verschillen  $|\kappa - \beta|$  en  $|\alpha - \gamma|$  geldt:  $|\kappa - \beta| < |\alpha - \gamma|$ . Dit laatste is o.a. van toepassing in het voor de hand liggende geval, dat de afhankelijkheden  $\beta$  en  $\kappa$  m.b.t. eerderd tijdstip  $t$  evenredig kleiner zijn dan de afhankelijkheden  $\alpha$  en  $\gamma$  m.b.t. current tijdstip  $t + 1$ .

Vervanging van evenwichtstellende  $A(t+1) = V(t+1)$  in 3.3.13 door bijv. eenvoudige ontwikkeling van de winst  $P(t+1) = \zeta P(t)$  geeft 3.3.16, een model-structuur zonder geheugenloze feedback-loop

als mogelijk ingebouwd stabiliteitsmechanisme

$$\begin{aligned}
 16 \quad P(t+1) &= \zeta P(t) \\
 V(t+1) &= \gamma P(t+1) + \kappa P(t) \\
 A(t+1) &= \alpha P(t+1) + \beta P(t)
 \end{aligned}$$

Voor  $\Delta = K$  en  $\Gamma = -L$  geldt nu

$$17 \quad \Delta = K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\gamma & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Gamma = -L = - \begin{bmatrix} \zeta & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

zodat

$$\begin{aligned}
 18 \quad \Pi = -\Delta^{-1}\Gamma = K^{-1}L &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \zeta & 0 & 0 \\ \gamma\zeta + \kappa & -1 & 0 \\ \alpha\zeta + \beta & 0 & -1 \end{bmatrix} = \tilde{A} = A + I
 \end{aligned}$$

en uit

$$|A - \lambda_1 I| = (\zeta - 1 - \lambda_1)(-1 - \lambda_1)^2 = 0$$

volgt

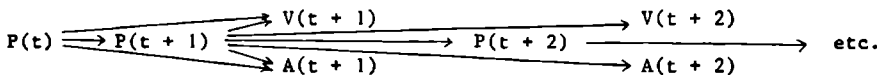
$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \zeta - 1 \quad (\tilde{\sigma}_1 = \zeta; \omega_1 = 0) \\
 \lambda_2 &= -1 \quad (\tilde{\sigma}_2 = 0; \omega_2 = 0) \\
 \lambda_3 &= -1 \quad (\tilde{\sigma}_3 = 0; \omega_3 = 0)
 \end{aligned}$$

welke aan stabiliteitsvoorwaarde 3.2.46 voldoen, indien  $\sqrt{\tilde{\sigma}_1^2} = \sqrt{\zeta^2} < 1$ .

In dit geval is stabiliteit dus alleen afhankelijk van een stabiele winstontwikkeling -  $V(t+1)$  en  $A(t+1)$  volgen  $P(t)$  met resp. factor  $\gamma\zeta + \kappa$  en  $\alpha\zeta + \beta$  - en doen de structurele coëfficiënten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  en  $\kappa$  niet ter zake.

Het probleem met evenwichtstellende vergelijkingen is, dat zij wellicht ten onrechte evenwicht aannemen en stabiliteit introduceren. Anders dan definitieve, institutionele en technologische vergelijkingen kunnen zij volgens Meissner dan ook niet "schadlos aus dem Model genommen werden", maar moeten ze zo mogelijk door "Verhaltensgleichungen ersetzt werden" (32). Aan de hand van het bekende model I, dat Klein in "Economic fluctuations in the United States 1921-1941" (33) beschrijft, heeft Meissner laten zien dat een dergelijke vervanging kan leiden tot instabiliteit van een oorspronkelijk stabiel model [A,B,C,D]. Hij concludeert: "Dieselben Daten stützen also einmal einen instabilen und zum anderen einen stabilen (und damit erstrebenswerten) Zustand: Die stabile ökonomische Welt wird durch den Modellansatz in die Realität, d.h. in die Datenreihe hineinprojektiert, das damit antizipierbare Ergebnis kann als von der Realität bestätigtes Alibi für die Stabilität der (kapitalistischen) Wirtschaftsordnung interpretiert werden" (34).

Met zijn wantrouwen tegen evenwichtstellende vergelijkingen en de causaal moeilijk te interpreteren geheugenloze feedback-loops, die daar gemakkelijk het gevolg van zijn, sluit Meissner zich bewust aan bij Wold, die sterke nadruk legde op de voordelen van recursieve modelstructuren, door hem CC (Causal Chain)-structuren genoemd, in tegenstelling tot interdependente model-structuren. In recursieve model-structuren komen geen geheugenloze feedback-loops voor, hetgeen zich uit in een z.g. driehoekige matrix  $\Delta$  (alle elementen boven de diagonaal 0) of een zodanige matrix  $\Delta$ , dat rijen en kolommen een herschikking toelaten, waaruit een driehoekige  $\Delta$  ontstaat. Driehoekig zijn alle matrices  $\Delta = \begin{bmatrix} K & 0 \\ -C & I \end{bmatrix}$  met een driehoekige K, in het bijzonder  $K = I$ . Het gevolg van een driehoekige K en dus  $\Delta$  is, dat de variabelen in een causale keten zijn te ordenen. Zo impliceert bijv. de driehoekige  $\Delta = K$  van 3.3.16-3.3.17 de causale keten:



3.3.13-3.3.14 bevat geen driehoekige  $\Delta = K$  en vormt daarom een interdependente structuur, waarvan de variabelen niet in een causale keten

zijn te ordenen. Een belangrijk voordeel van een recursieve structuur is, dat de structurele vorm zelf bruikbaar is voor (geheugenloze) predictie volgens het keten-principe en daarbij maximale causale informatie verschaft. Bij een interdependente structuur zijn zonder Wold's speciale voorzieningen - zie 2.3.74 - alleen de gereduceerde vorm en  $[A, B, C, D]$  bruikbaar voor predictie. Daarbij is  $[A, B, C, D]$  overigens meer informatief dan de gereduceerde vorm:  $[A, B, C, D]$  geeft de output-variabelen als (geheugenloze) uitleesfuncties van o.a. currente toestand-variabelen en niet zoals de gereduceerde vorm als functies van uitsluitend gepredetermineerde variabelen, waarbij de stap over currente toestand-variabelen wordt overgeslagen:

K-coëfficiënten komen tenslotte zelfs in gedragsvergelijkingen voor, bijv.  $\alpha$  en  $\gamma$  in de vergelijkingen voor A en V van 3.3.16. Hun optreden in gedragsvergelijkingen is op te vatten als het gecombineerde resultaat van twee omstandigheden, die men in de sociale wetenschappen vaak zal aantreffen:

- 1) geobserveerde variabelen, die in feite sommen of gemiddelden geven over het hele observatie-interval met lengte  $\delta$  in plaats van waarden voor één enkel tijdstip  $t$  (zo wordt bijv. nationaal inkomen gemeten over het hele jaar en niet als een geïsoleerde waarde  $Y$  voor 1 januari van dat jaar),
- 2) onderliggende "ware" gedragsvergelijkingen met een tijdsverschil  $\Delta t$ , dat aanmerkelijk kleiner is dan lengte  $\delta$  van het observatie-interval.

Deze beschouwingwijze in termen van geobserveerde variabelen van de vorm

$$\bar{Y}(t) = \sum_{k=1}^n Y(t + k\Delta t)\Delta t \quad \text{met } n = \frac{\delta}{\Delta t} \quad \text{en } \Delta t \ll \delta = 1$$

en onderliggende gedragsvergelijkingen met  $\Delta t \ll \delta = 1$  blijkt tevens aan de eerder besproken evenwichtstellende vergelijkingen een minder restrictieve interpretatie te geven. Onderliggende gedragsvergelijking

$$3.3.19 \quad p(t + 1) = ap(t + 1 - \Delta t) + b_1V(t) + b_2A(t) + \\ p(t + 1) - p(t + 1 - \Delta t) = (a - 1)p(t + 1 - \Delta t) + b_1V(t) + b_2A(t)$$

zou onder de evenwichtsassumpties  $p(t + 1) = p(t + 1 - \Delta t)$ ,  $V(t + 1) = V(t)$  en  $A(t + 1) = A(t)$  opleveren:

$$3.3.20 \quad p(t+1) = \frac{b_1}{-(a-1)} V(t+1) + \frac{b_2}{-(a-1)} A(t+1)$$

zodat onder deze restrictieve assumpties in cross-sectioneel onderzoek de relatieve grootte van de coëfficiënten  $b_1$  en  $b_2$  bepaald zou kunnen worden aan de hand van de coëfficiënten  $\beta_1 = \frac{b_1}{-(a-1)}$  en  $\beta_2 = \frac{b_2}{-(a-1)}$  voor zowel  $p(t)$ ,  $V(t)$ ,  $A(t)$  als  $\bar{p}(t)$ ,  $\bar{V}(t)$ ,  $\bar{A}(t)$ .

$$3.3.21 \quad p(t) = \beta_1 V(t) + \beta_2 A(t) \rightarrow \bar{p}(t) = \beta_1 \bar{V}(t) + \beta_2 \bar{A}(t)$$

Deze onderzoeksmogelijkheid van 3.3.19 aan de hand van geheugenloze afleiding 3.3.21 werd eerder besproken in paragraaf 2.3. In tijdserie-onderzoek en onder minder restrictieve assumpties m.b.t. K (35) kan men gebruik maken van:

$$3.3.22 \quad \bar{p}(t+1) = \bar{a}\bar{p}(t+1) + \bar{b}_1\bar{V}(t) + \bar{b}_2\bar{A}(t) \rightarrow \\ -(\bar{a}-1)\bar{p}(t+1) = \bar{b}_1\bar{V}(t) + \bar{b}_2\bar{A}(t)$$

als limiterende benadering van 3.3.19 voor  $\Delta t \rightarrow 0$  en  $n \rightarrow \infty$ . Indien  $\Delta t$  in 3.3.19 voldoende klein is (het aanpassingsmechanisme voldoende snel), zijn de verschillen tussen coëfficiënten  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}_1$  en  $\bar{b}_2$  in 3.3.22 en de onderliggende coëfficiënten  $a$ ,  $b_1$  en  $b_2$  in 3.3.19 te verwaarlozen. Door a priori te stellen  $a \approx \bar{a} = 1$  en  $b_1 \approx \bar{b}_1 = \bar{b}_2 \approx b_2$  volgt evenwichtstellende vergelijking  $\bar{A} = \bar{V}$ . Evenwicht blijkt in deze interpretatie betrekking te hebben op het wegvallen van geobserveerde variabele  $\bar{p}(t+1)$  uit 3.3.22 met  $\bar{A} = \bar{V}$  als resultaat, maar behoeft geen strikt evenwicht  $p(t+1) - p(t+1 - \Delta t) = 0$  en strikte gelijkheid  $A = V$  te impliceren binnen ieder observatie-interval en van observatie-interval naar observatie-interval. Wel wordt het gedrag van deze variabelen via de assumpties m.b.t. K en via  $a \approx \bar{a} = 1$  en  $b_1 \approx \bar{b}_1 = \bar{b}_2 \approx b_2$  aan bepaalde grenzen gebonden.

Breiden we onderliggende gedragsvergelijking 3.3.19 uit door toevoeging van een tweede variabele in tijdsaanduiding  $(t+1 - \Delta t)$

$$3.3.23 \quad p(t+1) = a_1 p(t+1 - \Delta t) + a_2 q(t+1 - \Delta t) + b_1 V(t) + b_2 A(t)$$

met als limiterende benadering

$$3.3.24 \quad -(\bar{a}_1 - 1)\bar{p}(t + 1) = \bar{a}_2\bar{q}(t + 1) + \bar{b}_1\bar{v}(t) + \bar{b}_2\bar{A}(t) +$$

$$\bar{p}(t + 1) = \frac{\bar{a}_2}{-(\bar{a}_1 - 1)} \bar{q}(t + 1) + \frac{\bar{b}_1}{-(\bar{a}_1 - 1)} \bar{v}(t) + \frac{\bar{b}_2}{-(\bar{a}_1 - 1)} \bar{A}(t)$$

dan ontstaat voor  $a_1 \approx \bar{a}_1 = 1$

$$3.3.25 \quad \bar{q}(t + 1) = \beta_1\bar{v}(t) + \beta_2\bar{A}(t)$$

$$\text{met } \beta_1 = \frac{\bar{b}_1}{-\bar{a}_2}, \beta_2 = \frac{\bar{b}_2}{-\bar{a}_2} \quad \text{en voor } a_1 \approx \bar{a}_1 \neq 1$$

$$3.3.26 \quad \bar{p}(t + 1) = \alpha\bar{q}(t + 1) + \beta_1\bar{v}(t) + \beta_2\bar{A}(t)$$

$$\text{met } \alpha = \frac{\bar{a}_2}{-(\bar{a}_1 - 1)}, \beta_1 = \frac{\bar{b}_1}{-(\bar{a}_1 - 1)}, \beta_2 = \frac{\bar{b}_2}{-(\bar{a}_1 - 1)}. \text{ Aan de hand van } \alpha, \beta_1$$

en  $\beta_2$  kan men weer de relatieve grootte van de onderliggende coëfficiënten  $a_2$ ,  $b_1$  en  $b_2$  bepalen. Anders dan 3.3.25 bevat 3.3.26 echter de geheugenloze coëfficiënt  $\alpha$ : 3.3.26 is m.a.w. een gedragsvergelijking met een coëfficiënt in  $K$ .

Het gebruik van geobserveerde variabelen, die gemiddelden of sommen geven over observatie-intervallen, gecombineerd met aanpassingsmechanismen, die veel minder tijd  $\Delta t$  in beslag nemen dan lengte  $\delta$  van het observatie-interval, heeft klaarblijkelijk tot gevolg, dat modelstructuren met een geheugenloze  $K \neq I$  niet zijn te vermijden zonder verlies aan informatie. Voor dergelijke structuren, bijv. recursieve met driehoekige  $K \neq I$  en interdependente met niet-driehoekige  $K \neq I$ , verschilt structurele vorm 3.3.9 fundamenteel van gereduceerde vorm 3.3.11, in zoverre  $\Delta$  en  $\Gamma$  van 3.3.9 niet zonder meer uit  $\Pi$  van 3.3.11 kunnen worden afgeleid (voor  $K = I$  zijn  $\Delta$  en  $\Gamma$  uit  $\Pi$  afleidbaar vanwege  $L = K^{-1}L$ ,  $M = K^{-1}M$  en  $C = CK^{-1}LL^{-1}$  indien althans  $L^{-1}$  bestaat). Weliswaar is het, indien  $\bar{A}^{-1}$  bestaat, mogelijk  $[A, B, C, D]$  zonder gebruik van  $\Delta$  en  $\Gamma$  rechtstreeks uit  $\Pi$  af te leiden vanwege  $C = \bar{C}\bar{A}\bar{A}^{-1}$ , maar zoals nog zal blijken ontstaan in het stochastische geval in het algemeen betere schattingen van  $\Pi$  als eerst  $\Delta$  en  $\Gamma$  van de structurele vorm worden geschat en pas daaruit  $\Pi$  volgens  $\hat{\Pi} = -\hat{\Delta}^{-1}\hat{\Gamma}$  (36). Het model  $[A, B, C, D]$ , dat tenslotte wordt afgeleid of geschat, houdt in zoverre het midden tussen de structurele en gereduceerde vorm, dat van beide soorten geheugenloze coëfficiënten in  $\Delta$  van



de structurele vorm alleen de K-coëfficiënten worden gereduceerd, terwijl de eveneens geheugenloze C-coëfficiënten (uitlees-coëfficiënten) behouden blijven. De vergelijkingen, waar de C-coëfficiënten deel van uitmaken, zijn in het algemeen op te vatten ofwel als geheugenloze gedragsvergelijkingen ofwel als definitiorische vergelijkingen (indien bijv. a priori werd gesteld  $C = I$  en  $D = 0$ ).

Een voorstel om toch zonder verlies aan informatie structuren met  $K \neq I$  om te vormen tot structuren met  $K = I$  of in ieder geval interdependente structuren tot recursieve structuren bestaat hierin, dat een kleiner observatie-interval  $\delta$  wordt genomen, zodat  $\Delta t = \delta$ , en dat tegelijk de tijd en het model zodanig worden geherdefinieerd, dat  $\Delta t = \delta = 1$ . Een dergelijke omvorming kan behalve een gemakkelijker te interpreteren causale structuur tevens tot doel hebben de bijzondere schattingsproblemen te vermijden in het geval van interdependente structuren en gebruik te maken van de simpele schattingsprocedures voor recursieve structuren. Afgezien van het feit, dat het vaak niet mogelijk zal zijn data te verkrijgen over kleinere observatie-intervallen, betekent de keuze van kleinere en dus frequentere observatie-intervallen dat de kans op autocorrelatie groter wordt, waarmee niet minder lastige schattingsproblemen zijn verbonden. De conclusie moet zijn, dat voor identificatie en schatting van  $[A, B, C, D]$  niet alleen identificatie- en schattingsprocedures voor  $\Pi$  noodzakelijk zijn, maar tevens voor  $\Delta$  en  $\Gamma$  van zowel recursieve als interdependente structuren.

#### De stochastische versie van differentie-model $[A, B, C, D]$

Beschouwen we nu stochastisch differentie-model  $[A, B, C, D]$ , waarmede in de sociale wetenschap bijna altijd op aangewezen zal zijn. In de stochastische versie zijn de variabelen in vector  $x_1$  en  $y_1$  niet mathematisch met waarden die zelf als lineaire functie-waarden van  $x_0, u_0, x_1$  en  $u_1$  worden gespecificeerd, maar random-variabelen, waarvan de (conditionele) verwachtingswaarden als dergelijke functie-waarden worden gespecificeerd. In overeenstemming hiermee en tevens niet uitsluitend, dat ook de variabelen in  $x_0, u_0$  en  $u_1$  random-variabelen zijn, vervangen we 3.3.2 door stochastische specificatie

$$3.3.27 \quad \begin{aligned} E(x_1 | x_0, u_0) &= \tilde{A}x_0 + Bu_0 \\ E(y_1 | x_1, u_1) &= Cx_1 + Du_1 \end{aligned}$$

Deze specificatie in termen van conditionele verwachtingswaarden laat

toe, dat geobserveerde waarden van random-vector  $\bar{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

niet meer exakt voorspelbaar zijn. In overeenstemming hiermee worden in structurele en gereduceerde modelvorm 3.3.6 en 3.3.8 vectoren  $\bar{e}$  en  $\bar{v}$  met error-termen (onverklaarde gedeelten) toegelaten.

$$3.3.28 \quad \Delta \bar{y} + \Gamma \bar{z} = \bar{e}$$

met

$$\Delta = \begin{bmatrix} K & 0 \\ -C & I \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} -L & 0 & -M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D \end{bmatrix}$$

$$\bar{y} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \bar{z} \equiv \begin{bmatrix} z^y \\ z^u \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} z_1^y \\ z_2^y \\ \vdots \\ z_1^u \\ z_2^u \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \bar{e} \equiv \begin{bmatrix} e_{x_1} \\ e_{y_1} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$3.3.29 \quad \bar{v} = \Pi \bar{z} + \bar{v}$$

met

$$\Pi = -\Delta^{-1}\Gamma = \begin{bmatrix} K^{-1}L & 0 & K^{-1}M & 0 \\ CK^{-1}L & 0 & CK^{-1}M & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 & B & 0 \\ \tilde{C}\tilde{A} & 0 & CB & D \end{bmatrix},$$

$$\bar{v} = \bar{y} - \Pi \bar{z} = \Delta^{-1}\bar{e}$$

In plaats van formulering 3.3.28 en 3.3.29 wordt voor steekproef-data vaak

$$3.3.30 \quad \begin{aligned} Y\Delta' + Z\Gamma' &= E \\ Y &= Z\Pi' + V \end{aligned}$$

gekozen in termen van de deelmatrices Y en Z van data-matrix [Y Z] en de error-waarden-matrix E c.q. V:

$$Y = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & y_1 & y_2 & \dots \\ y_{1,1} & y_{2,1} & \dots & y_{k+1,1} & y_{k+2,1} & \dots \\ y_{1,2} & y_{2,2} & \dots & y_{k+1,2} & y_{k+2,2} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} y_{.1} \\ y_{.2} \\ \vdots \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & y_1 & y_2 & \dots \\ y_1. & y_2. & \dots & y_{k+1}. & y_{k+2}. & \dots \end{bmatrix}$$

$$Z = [Z^Y \quad Z^U]$$

met

$$Z^Y = \begin{bmatrix} x_0^y & x_0^z & \dots & y_0^y & y_0^z & \dots \\ z_{1,1}^y & z_{2,1}^y & \dots & z_{k+1,1}^y & z_{k+2,1}^y & \dots \\ z_{1,2}^y & z_{2,2}^y & \dots & z_{k+1,2}^y & z_{k+2,2}^y & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} z_{.1}^y \\ z_{.2}^y \\ \vdots \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_0^y & x_0^z & \dots & y_0^y & y_0^z & \dots \\ z_{1.}^y & z_{2.}^y & \dots & z_{k+1.}^y & z_{k+2.}^y & \dots \end{bmatrix}$$

$$Z^U = \begin{bmatrix} u_0^1 & u_0^2 & \dots & u_0^1 & u_0^2 & \dots \\ z_{1,1}^u & z_{2,1}^u & \dots & z_{1+1,1}^u & z_{1+2,1}^u & \dots \\ z_{1,2}^u & z_{2,2}^u & \dots & z_{1+1,2}^u & z_{1+2,2}^u & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} z_{.1}^u \\ z_{.2}^u \\ \vdots \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u_0^1 & u_0^2 & \dots & u_0^1 & u_0^2 & \dots \\ z_{1.}^u & z_{2.}^u & \dots & z_{1+1.}^u & z_{1+2.}^u & \dots \end{bmatrix}$$

$$E = Y\Delta' + Z\Gamma' =$$

$$\begin{bmatrix} e_{x_1} & e_{x_2} & \dots & e_{y_1} & e_{y_2} & \dots \\ e_{1,1} & e_{2,1} & \dots & e_{k+1,1} & e_{k+2,1} & \dots \\ e_{1,2} & e_{2,2} & \dots & e_{k+1,2} & e_{k+2,2} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} e_{.1} \\ e_{.2} \\ \vdots \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} e_{x_1} & e_{x_2} & \dots & e_{y_1} & e_{y_2} & \dots \\ e_{1.} & e_{2.} & \dots & e_{k+1.} & e_{k+2.} & \dots \end{bmatrix}$$

$$V = Y - Z\Pi' = E(\Delta^{-1})' =$$

$$\begin{bmatrix} v_{x_1} & v_{x_2} & \dots & v_{y_1} & v_{y_2} & \dots \\ v_{1,1} & v_{2,1} & \dots & v_{k+1,1} & v_{k+2,1} & \dots \\ v_{1,2} & v_{2,2} & \dots & v_{k+1,2} & v_{k+2,2} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} v_{.1} \\ v_{.2} \\ \vdots \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} v_{x_1} & v_{x_2} & \dots & v_{y_1} & v_{y_2} & \dots \\ v_{1.} & v_{2.} & \dots & v_{k+1.} & v_{k+2.} & \dots \end{bmatrix}$$

Iedere  $i$ -de rij  $[y_{.i} \ z_{.i}] = [y_{.i} \ z_{.i}^y \ z_{.i}^u]$  van data-matrix  $[Y \ Z] = [Y \ Z^y \ Z^u]$  bevat een volledig stel geobserveerde waarden van alle modelvariabelen in kolom-vectoren  $\bar{y}$  en  $\bar{z}$  van 3.3.28 en 3.3.29. Aangezien deze kolom-vectoren dus corresponderen met rij-vectoren  $y_{.i}$  en  $z_{.i}$  van de data-matrix, worden in 3.3.30 matrices  $\Delta$ ,  $\Gamma$  en  $\Pi$  vervangen door hun getransponeerden  $\Delta'$ ,  $\Gamma'$  en  $\Pi'$ . Middels 3.3.30 worden de waarden in endogene data-matrix  $Y$  ten dele verklaard door de waarden in gepredetermineerde data-matrix  $Z$ . Voor bijv. element  $y_{j,i}$  van  $Y$  geldt:  $y_{j,i} = z_{.i}\pi_j' + v_{j,i}$  of  $y_{j,i} = \pi_j z_{.i}' + v_{j,i}$ , d.w.z. endogene waarde  $y_{j,i}$  wordt opgevat als een gewogen som van de gepredetermineerde waarden in  $z_{.i}$  volgens gewichten in de  $j$ -de rij van  $\Pi$  plus een onverklaard error-gedeelte  $v_{j,i}$ . De matrices  $E$  en  $V$  bevatten op corresponderende plaatsen de onverklaarde gedeelten van die waarden in  $Y$ .

De vergelijkingen 3.3.30 definiëren alleen dan een niet-triviaal verklaringsmodel en de coëfficiënten kunnen alleen dan geschat worden, als de error-waarden in  $E$  en  $V = E(\Delta^{-1})'$  aan bepaalde stochastische assumpties voldoen, bijv. aan

$$3.3.31 \quad I \quad E(E) = \begin{bmatrix} E(e_{1,1}) & E(e_{2,1}) & \dots \\ E(e_{1,2}) & E(e_{2,2}) & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} = 0 \rightarrow E(V) = E(E)(\Delta^{-1})' = 0$$

$$II \quad E(e_{.i}' e_{.i'}) = \begin{bmatrix} E(e_{1,i} e_{1,i'}) & E(e_{1,i} e_{2,i'}) & \dots \\ E(e_{2,i} e_{1,i'}) & E(e_{2,i} e_{2,i'}) & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} = 0 \text{ voor alle } i \neq i' \rightarrow$$

$$E(v_{.i}' v_{.i'}) = \Delta^{-1} E(e_{.i}' e_{.i'}) (\Delta^{-1})' = 0 \text{ voor alle } i \neq i'$$

$$III \quad E(e_{.i}' e_{.i'}) = \begin{bmatrix} E(e_{1,i}^2) & E(e_{1,i} e_{2,i}) & \dots \\ E(e_{1,i} e_{2,i}) & E(e_{2,i}^2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} =$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \text{ voor alle } i \rightarrow$$

$$E(v_{.i}' v_{.i'}) = \Delta^{-1} \Sigma (\Delta^{-1})' \text{ voor alle } i$$

IV multi-normaal verdeelde  $e_{j,i} \rightarrow$  multi-normaal verdeelde  $v_{j,i}$

In deze assumpties worden de steekproef-error-waarden  $e_{j,i}$  beschouwd als realisaties van random-variabelen. De assumpties stellen bepaalde eisen aan deze random-variabelen, d.w.z. aan de waarschijnlijkheidsverdelingen van mogelijke error-waarden, waarvan de gerealiseerde  $e_{j,i}$  c.q.  $v_{j,i}$  er telkens slechts één is.

Assumptie I is altijd noodzakelijk, terwijl assumptie III in het kader van multirelationele modellen zeer algemeen wordt gesteld en er ook hier niet van zal worden afgeweken. Op assumptie IV zal echter pas later een beroep worden gedaan, terwijl assumptie II later ten dele zal worden afgezwakt. Toevoeging van assumptie IV is onder meer noodzakelijk, indien men statistisch wil toetsen of interval-schatting wil uitvoeren.

Assumptie I is de belangrijkste en stelt, dat de verwachte waarden  $E(e_{j,i})$  c.q.  $E(v_{j,i})$  nul moeten zijn. De waarden in exogene matrix  $Z^u$  kunnen bijna altijd worden opgevat als vaste waarden, zo niet als waarden van mathematische variabelen en dus per definitie vast dan in ieder geval als vaste waarden van random-variabelen. In verdeeld onderzoek (zie de laatste alinea van paragraaf 2.3) is er bovendien geen bezwaar tegen om de waarden in lagged-endogene matrix  $Z^y$  op te vatten als vaste waarden. Er volgt dan onmiddellijk  $E(e_{j,i} z_{j',i'}) = 0$  voor alle  $e_{j,i}$  en alle gepredetermineerde elementen in  $Z$ . Breiden we niettemin met het oog op mogelijke random-waarden in  $Z$  assumpties 3.3.31 uit volgens

- 3.3.32 I  $E(E|Z) = E(E) = 0 \rightarrow E(V|Z) = E(E|Z)(\Delta^{-1})' = 0$   
 II  $E(e'_{.i} e_{.i} | Z) = E(e'_{.i} e_{.i}) = 0$  voor alle  $i \neq i' \rightarrow$   
 $E(v'_{.i} v_{.i} | Z) = \Delta^{-1} E(e'_{.i} e_{.i} | Z) (\Delta^{-1})' = 0$  voor alle  $i \neq i'$   
 III  $E(e'_{.i} e_{.i} | Z) = E(e'_{.i} e_{.i}) = \Sigma$  voor alle  $i \rightarrow$   
 $E(v'_{.i} v_{.i} | Z) = \Delta^{-1} E(e'_{.i} e_{.i} | Z) (\Delta^{-1})' = \Delta^{-1} \Sigma (\Delta^{-1})'$  voor alle  $i$   
 IV multi-normaal verdeelde  $e_{j,i}$ , gegeven  $Z \rightarrow$  multi-normaal verdeelde  $v_{j,i}$ , gegeven  $Z$

dan volgt onder assumptie I voor resp. structurele en gereduceerde modelvorm in 3.3.30

3.3.33  $E(Y\Delta' | Z) + Z\Gamma' = 0$

3.3.34  $E(Y|Z) = Z\Pi'$ 

Vaste waarden vormen uiteraard een bijzonder geval met  $E(Y\Delta'|Z) = E(Y\Delta')$  en  $E(Y|Z) = E(Y)$ . 3.3.34 is voldoende om via  $\Pi$  in 3.3.29 de toestand-differentie-vergelijking  $E(x_1|x_0, u) = \tilde{A}x_0 + B u$  in 3.3.27 af te leiden.

Anders dan structurele vorm 3.3.33, waarin de current-endogene  $y_j$ , slechts gemeenschappelijk afhankelijk ("jointly dependent") zijn van  $Z$ , valt gereduceerde vorm 3.3.34 uiteen in vergelijkingen  $E(y_j|Z) = Z\pi_j'$  met telkens één afhankelijke  $y_j$ . Daardoor kan voor vaste waarden onder assumptie I (3.3.31) en voor random-waarden onder assumptie I (3.3.32) de normale kleinste-kwadraten-procedure worden toegepast om per vergelijking een zuivere schatting  $\hat{\pi}_j'$  te verkrijgen van iedere coëfficiënt-vector  $\pi_j'$  in de gereduceerde vorm. De kleinste-kwadraten-schatter is  $\hat{\pi}_j' = (Z'Z)^{-1}Z'y_j$ , en dankt zijn naam aan het feit, dat hij de grootheid  $v_{j\cdot}' v_{j\cdot} = (y_{j\cdot} - Z\hat{\pi}_j')(y_{j\cdot} - Z\hat{\pi}_j')$  minimaliseert. Indien van bepaalde coëfficiënten in  $\pi_j'$  a priori bekend is, dat zij 0 zijn, kunnen bij de schatting de betrokken kolommen uit  $Z$  worden verwijderd en bevat  $\hat{\pi}_j'$  vanwege de inperking van  $Z$  tot  $Z_j$  dus ook minder geschatte coëfficiënten.

Zoals voor vaste waarden onder assumptie I (3.3.31) volgt voor random-waarden onder assumptie I (3.3.32):  $E(e_{j,i}z_{j',i'}) = 0$  voor alle  $j$ ,  $i$ ,  $j'$  en  $i'$ , d.w.z. alle  $e_{j,i}$  zijn ongecorrleerd met alle gepredetermineerde elementen. Deze eis van non-correlatie is noodzakelijk, maar niet voldoende voor zuivere schatting. Voldoende is assumptie I. Toevoeging van assumptie II en III geeft als matrix van sampling-varianties en -covarianties van  $\hat{\pi}_j'$

$$\text{var}(\hat{\pi}_j) = E[(\hat{\pi}_j - \pi_j)'(\hat{\pi}_j - \pi_j)] = \sigma_{vj}^2(Z'Z)^{-1}$$

en als zuivere schatter daarvan

$$\widehat{\text{var}}(\hat{\pi}_j) = s_{vj}^2(Z'Z)^{-1} \quad \text{met} \quad s_{vj}^2 = \frac{v_{j\cdot}' v_{j\cdot}}{n - k}$$

( $n$  het aantal rijen in de data-matrix;  $k$  het aantal geschatte coëfficiënten). Hierin is  $s_{vj}^2$  een zuivere schatter van  $\sigma_{vj}^2$  en residuele vector

$v_j = y_j - Z\hat{\pi}_j'$  een zuivere schatter van error-waarden-vector  $v_j$ .

Een moeilijkheid doet zich voor in zuiver tijdserie-onderzoek evenals in gemengd tijdserie-onderzoek (zie de laatste alinea van paragraaf 2.3). Niet alleen moeten de waarden in lagged-endogene matrix  $Z^Y$  dan worden opgevat als random-waarden (de waarden in rij  $i + 1$  van  $Z^Y$  zijn gelijk aan de random-waarden in rij  $i$  van  $Y$ ), maar tegelijk zijn niet alle  $e_{j,i}$  onafhankelijk van alle elementen in  $Z^Y$ . Dit vanwege het feit, dat  $e_{j,i}$  als deel van  $y_{j,i}$  ook deel uitmaakt van lagged-endogene  $z_{j,i+1}^y = y_{j,i}$  in de volgende observatie-periode  $i + 1$ , etc., zodat de verwachting is  $E(e_{j,i} z_{j,i+1}^y) \neq 0$ ,  $E(e_{j,i} z_{j,i+2}^y) \neq 0$ , etc., en dus  $E(E|Z) \neq 0 \rightarrow E(V|Z) \neq 0$ . Die afhankelijkheid zal ernstiger zijn, naarmate de invloed van de lagged-endogene variabelen groter is in vergelijking met die van de exogene variabelen. Er is echter geen bezwaar tegen om voor iedere rij  $i$  afzonderlijk te specificeren

$$3.3.35 \quad I \quad E(e_{.i}|z_{.i}) = 0 \rightarrow E(v_{.i}|z_{.i}) = 0 \quad \text{voor alle } i$$

hetgeen impliceert  $E(E'Z) = 0$ ; in  $E'Z$  worden uitsluitend termen  $e_{j,i}$  en  $z_{j,i}$  van dezelfde rij  $i$  vermenigvuldigd en opgeteld. Uit 3.3.35 volgt nu

$$3.3.36 \quad E(y_{.i}\Delta'|z_{.i}) + z_{.i}\Gamma' = 0 \quad \text{voor alle } i$$

$$3.3.37 \quad E(y_{.i}|z_{.i}) = z_{.i}\Pi' \quad \text{voor alle } i$$

en gereduceerde vorm 3.3.37 is al voldoende om de toestand-differentie-vergelijking af te leiden. Overigens wordt hiermee nog niet het schattingsprobleem opgelost. Zuiver en gemengd tijdserie-onderzoek levert in het geval van lagged-endogene variabelen geen zuivere  $\pi_j$ -schattingen op, maar zoals dadelijk zal blijken zijn de kleinste-kwadraten-schatters onder bepaalde consistentie-voorwaarden consistent.

Afleiding uit 3.3.36 van de uitlees-vergelijking  $E(y_1|x_1, u_1) = Cx_1 + Du_1$  is minder eenvoudig dan van de toestand-differentie-vergelijking uit

3.3.37, althans indien  $\Delta \neq I$ . Voor  $\Delta = I$  zijn structurele en gereduceerde vorm aan elkaar gelijk met  $-\Gamma = \Pi =$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D \end{bmatrix} \quad \text{en kan dus ook}$$

de uitleesvergelijking met  $C = 0$  uit 3.3.37 worden afgeleid. De moeilijk-

heid met  $\Delta = \begin{bmatrix} K & 0 \\ -C & I \end{bmatrix}$ , waarin  $C \neq 0$  en/of  $K \neq I$ , schuilt hierin, dat

de waarden in  $y_{.i}$  door  $\Delta$  mede afhankelijk worden gesteld van de current-endogene vector  $y_{.i}$  zelf en dat daardoor niet zonder meer specificatie  $E(e_{.i}|y_{.i}, z_{.i}) = 0$  toepasbaar is om af te leiden  $E(y_{.i}|x, u) = Cx + Du$ . Uit  $E(e_{.i}|y_{.i}, z_{.i}) = 0$  zou nl. volgen  $E(e_{j,i}|y_{j',i}) = 0$  voor alle  $j$  en  $j'$ , d.w.z. alle  $e_{j,i}$  zouden ongecorrleerd moeten zijn met alle current-endogene  $y_{j',i}$ . Niet alleen zou dus moeten gelden  $E(E'Z) = 0$  maar tevens  $E(E'Y) = 0$ . Dat is in het algemeen niet de verwachting, aangezien in de structurele vorm  $e_{j,i}$  langs  $y_{j,i}$  invloed kan uitoefenen op andere current-endogene  $y_{j',i}$ . Neem het volgende eenvoudige model, waarin voor iedere rij  $i$  wordt gespecificeerd

$$\begin{aligned} y_j + a y_{j'} + b z &= e_j & \text{zodat } \Delta &= \begin{bmatrix} 1 & a \\ a' & 1 \end{bmatrix} \text{ en } \Gamma = \begin{bmatrix} b \\ b' \end{bmatrix} \\ a' y_j + y_{j'} + b' z &= e_{j'} \end{aligned}$$

en  $y_{j'}$ , als volgt samenhangt met  $e_j$

$$y_{j'} = \frac{-a'}{1 - a'a} e_j + \frac{a'b - b'}{1 - a'a} z + e_{j'}$$

In het algemeen hoeft evenmin te gelden  $E(e_{j,i}|e_{j',i}) = 0$ . Assumptie III eist slechts, dat deze covarianties tezamen met de varianties  $E(e_{j,i}^2)$  constant zijn over rijen  $i$ :  $E(e_{.i}' e_{.i}) = \Sigma$  en niet noodzakelijk:  $E(e_{.i}' e_{.j}) = \sigma_j^2 I$ . Stel nu echter, dat  $K$  driehoekig is, hetgeen een driehoekige  $\Delta$  impliceert, en dat inderdaad een diagonale  $\Sigma = \sigma_j^2 I$  wordt aangenomen. De combinatie van een driehoekige  $\Delta$  met waarden 1 op de diagonaal en een diagonale  $\Sigma$  definieert een recursieve modelstructuur, bijv.

$$\begin{aligned} y_1 &= e_1 & \text{met } \Delta &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix} & \text{ en } \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \\ a_2 y_1 + y_2 &= e_2 \\ a_3 y_1 + a_{32} y_2 + y_3 &= e_3 \end{aligned}$$

Beide zijden van gereduceerde vorm 3.3.31 vermenigvuldigend met  $E'$  en vervolgens de verwachting nemend volgt vanwege  $E(E'Z) = 0$

$$E(E'Y) = E(E'Z\Pi') + E(E'V) = E(E'Z)\Pi' + E(E'V) = E(E'V)$$



en vanwege  $V = E(\Delta^{-1})'$  en implicatie  $E(E'E) = \Sigma$  van assumptie III

$$E(E'Y) = \Sigma(\Delta^{-1})'$$

In het voorbeeld is  $\Delta^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 1 & 0 \\ -a_{31} + a_{32}a_{21} & -a_{32} & 1 \end{bmatrix}$  en

$$E(E'Y) = \begin{bmatrix} E(e_1y_1) & E(e_1y_2) & E(e_1y_3) \\ E(e_2y_1) & E(e_2y_2) & E(e_2y_3) \\ E(e_3y_1) & E(e_3y_2) & E(e_3y_3) \end{bmatrix} =$$

$$\Sigma(\Delta^{-1})' = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & -a_{21}\sigma_2^2 & -a_{31}\sigma_3^2 + a_{32}a_{21}\sigma_3^2 \\ 0 & \sigma_2^2 & -a_{32}\sigma_3^2 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{bmatrix}$$

waarin de  $e_jy_j$ , staan voor gesommeerde  $e_{j,i}y_{j,i}$ , over rijen  $i$ . Matrix  $E(E'Y)$  is klaarblijkelijk bovendiagonaal-driehoekig en dat geldt voor alle recursieve structuren, d.w.z alle structuren met een onderdiagonaal-driehoekige  $\Delta$  en een diagonale  $\Sigma$ . Iedere  $e_j$  in zo'n structuur is ongecorrleerd met de onafhankelijke current-endogene variabelen  $y_j$ , die een volgnummer  $j' < j$  hebben. Daardoor is er geen bezwaar tegen om per  $e_{j,i}$  te stellen in termen van bijbehorende deelvector

$$y_{\cdot i} \equiv [y_{1,i} \ y_{2,i} \ \dots \ y_{j-1,i}] \quad \text{van } y_{\cdot i}$$

$$3.3.38 \quad I \ E(e_{j,i} | y_{\cdot i}, z_{\cdot i}) = 0 \rightarrow E(v_{j,i} | z_{\cdot i}) = 0 \quad \text{voor alle } i \text{ en } j$$

hetgeen impliceert  $E(e_{j,i}^2 | y_{\cdot i}, z_{\cdot i}) = 0$  voor  $W_j \equiv [Y \ Z]$ . Op basis van I (3.3.38) kan 3.3.36 worden vervangen door

$$3.3.39 \quad E(y_{j,i} | y_{\cdot i}, z_{\cdot i}) + y_{\cdot i} \delta_j^i + z_{\cdot i} \gamma_j^i = 0 \quad \text{voor alle } i \text{ en } j$$

waarin de current-endogene variabelen  $y_{j,i}$  dus niet alleen gemeenschappelijk afhankelijk zijn van de gepredetermineerde elementen in  $z_{\cdot i}$  maar waarin iedere individuele  $y_{j,i}$  afhangt van de gepredetermineerde elementen in  $z_{\cdot i}$  en de current-endogene elementen in de bijbehorende

deelvector  $y_{\cdot i}$ . 3.3.39 is voldoende om via 3.3.28 de uitleesvergelijking  $E(y_1 | x_1, u_1) = Cx_1 + Du_1$  af te leiden. Bovendien kan ieder stel  $\delta_j$  en  $\gamma_j$ -coëfficiënten volgens de normale kleinste-kwadraten-procedure worden geschat en wel middels schatter  $\xi_j' = (W_j' W_j)^{-1} W_j' y_j$ , waarin  $\zeta_j \equiv [-\delta_j' \quad -\gamma_j']$ . In het geval van lagged-endogene variabelen in zuiver en gemengd tijdserie-onderzoek zijn de schattingen niet zuiver omdat in het algemeen  $E(E_j | W_j) \neq 0$  met  $E_j \equiv \xi_j$ , maar onder bepaalde voorwaarden zijn ze consistent. In verdeeld onderzoek is uiteraard niet uitgesloten, dat  $E(E_j | W_j) = 0$  geldt, in welk geval de schattingen zuiver zijn en onder de consistentie-voorwaarden tevens consistent.

Niet iedere  $\Delta$  is driehoekig, zodat niet iedere  $\Delta$  in een recursieve structuur past. Wel past iedere  $\Delta$  in een block-recursieve structuur, gedefinieerd door

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{s1} & \Delta_{s2} & \Delta_{s3} & \dots & \Delta_{ss} \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Sigma_{ss} \end{bmatrix}$$

Altijd kan immers worden geschreven  $\Delta = \begin{bmatrix} K & 0 \\ -C & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & 0 \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix}$  met  $\Delta_{ss} =$

$\Delta_{22} = I$ . Soms laat  $K$  een verdere block-recursieve opsplitsing toe, eventueel door herordening van de endogene variabelen. Een block-recursieve structuur valt zonder bezwaar uiteen in deelstructuren  $k = 1, \dots, s$  ( $1_k$  het volgnummer van de eerste vergelijking in deelstructuur  $k$ ).

$$Y_k \Delta'_{kk} + Z_k \Gamma'_{kk} = E_k \quad \text{met } Z_k \equiv \begin{bmatrix} Y_k \\ Z \end{bmatrix} \text{ en } \Gamma_{kk} = [\Delta_{k1} \quad \dots \quad \Delta_{k,k-1} \quad \Gamma_k]$$

$$Y_1 \Delta'_{11} + Z_1 \Gamma'_{11} = E_1$$

$$Y_2 \Delta'_{22} + Z_2 \Gamma'_{22} = E_2$$

$$\vdots$$

$$Y_s \Delta'_{ss} + Z_s \Gamma'_{ss} = E_s$$

die ieder van de vorm 3.3.30 zijn en waarvoor telkens zonder bezwaar assumptie I kan worden gesteld, analoog aan 3.3.38 voor individuele recursief geordende vergelijkingen  $j$ . Aangezien de laatste deelstructuur  $\Delta = I$  heeft, zijn structurele en gereduceerde

vorm hier aan elkaar gelijk met  $\Pi_{ss} = -\Gamma_{ss} = [C \ D]$  en kan onder assumptie I middels gereduceerde vorm 3.3.37 de gezochte uitleesvergelijking  $E(y_1 | x_1, u) = Cx_1 + Du$  worden afgeleid. Onder bepaalde voorwaarden geeft de normale kleinste kwadraten-procedure consistente schattingen  $\hat{\pi}_{ss,j}$  voor ieder van de vergelijkingen  $j = 1_s, 1_s + 1, \dots = n, \dots, n + m$  in deelstructuur s. Onder voorwaarde  $E(E_s | Z_s) = 0$  zijn deze schattingen zuiver.

Samenvattend volgt onder assumptie I uit de gereduceerde vorm de toestand-differentie-vergelijking  $E(x_1 | x_0, u) = \tilde{A}x_0 + Bu_0$ . Deze valt uiteen in n deelvergelijkingen, waarvan de coëfficiënten per deelvergelijking volgens de normale kleinste kwadraten-procedure geschat kunnen worden. Wordt de structurele vorm in 3.3.30 opgevat als block-recursief, dan volgt onder assumptie I, geformuleerd voor het laatste block van m vergelijkingen, de uitleesvergelijking  $E(y_1 | x_1, u) = Cx_1 + Du_1$ . Deze valt uiteen in m deelvergelijkingen, waarvan de coëfficiënten weer per vergelijking volgens de normale kleinste kwadraten-procedure geschat kunnen worden. Onder de consistentie-voorwaarden zijn de schattingen van verdeeld onderzoek, die mogelijk zuiver zijn, en de schattingen van zuiver en gemengd tijdserie-onderzoek, die wat de toestand-differentie-vergelijking betreft onzuiver en wat de uitleesvergelijking betreft mogelijk zuiver zijn, consistent.

Rest nog de bespreking van schattingsprocedures voor  $\Delta$  en  $\Gamma$  in het geval van een interdependente (niet-recursieve) structuur en voor  $\Delta_{kk}$  en  $\Gamma_{kk}$  in het geval van een of meer interdependente deelstructuren. Anders dan in het recursieve geval zijn de schattingen  $\hat{\Delta}$  en  $\hat{\Gamma}$ , verkregen volgens de gewone kleinste-kwadraten-procedure (OLS: Ordinary Least Squares) op iedere vergelijking afzonderlijk, hier inconsistent. In de plaats van OLS zijn ingewikkeldere schattingsprocedures noodzakelijk (2SLS: Two Stage Least Squares, LIML: Limited Information Maximum Likelihood, 3SLS: Three Stage Least Squares, FIML: Full Information Maximum Likelihood). Evenals in het recursieve geval ontstaat hier via de schattingen  $\hat{\Delta}$  en  $\hat{\Gamma}$  een nauwkeurigere schatting  $\hat{\Pi} = -\hat{\Delta}^{-1}\hat{\Gamma}$  van de gereduceerde vorm en daardoor nauwkeurigere schattingen  $\hat{A}$  en  $\hat{B}$  dan via directe OLS-schatting  $\hat{\Pi}$ . De winst in nauwkeurigheid is vaak aanzienlijk. Ook indien men niet is geïnteresseerd in de structurele schattingen  $\hat{\Delta}$  en  $\hat{\Gamma}$  van de onderliggende causale structuur, maar alleen in schatting  $[\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}]$  van het daaruit afgeleide toestand-ruimte-model, is het gebruik van de

ingewikkeldere schattingsprocedures bij een juiste specificatie van  $\Delta$  en  $\Gamma$  dus sterk aan te bevelen bij interdependente structuren. Vooraf echter nog een aantal algemene problemen, die al bij de vergelijkingswijze OLS-schatting van de gereduceerde vorm en van recursieve structuren moeilijkheden kunnen veroorzaken en bovendien opgelost moeten zijn, indien tot de ingewikkeldere schattingsprocedures van interdependente structuren wordt overgegaan.

### Consistentie, autocorrelatie en multicollineariteit

Een eerste probleem betreft de consistentie. De consistentie-voorwaarden luiden

- 3.3.40 A)  $\text{plim} \left( \frac{1}{n} Z'Z \right) = \Sigma_{ZZ}$   
 B)  $\text{plim} \left( \frac{1}{n} E'Z \right) = 0 \rightarrow \text{plim} \left( \frac{1}{n} V'Z \right) = 0$   
 C)  $\text{plim} \left( \frac{1}{n} E'E \right) = \Sigma \rightarrow \text{plim} \left( \frac{1}{n} V'V \right) = \Delta^{-1} \Sigma (\Delta^{-1})'$

d.w.z. bij nadering van steekproefgrootte  $n$  (het aantal rijen in de data-matrix) tot  $\infty$  nadert

- A) matrix  $\frac{1}{n} Z'Z$  tot een eindige, constante matrix  $\Sigma_{ZZ}$ ,  
 B) matrix  $\frac{1}{n} E'Z$  (de covariantie-matrix tussen error-waarden  $e_{j,i}$  en gepredetermineerde waarden  $z_{j',i}$  over rijen  $i$ ) tot 0 en  
 C) matrix  $\frac{1}{n} E'E$  tot matrix  $\Sigma$  van assumptie III (3.3.32).

De consistentie van de eerder besproken OLS-schatters  $\hat{\pi}_j$ ,  $\hat{\zeta}_j$  en  $\hat{\pi}_{ss,j}$ , d.w.z.

- 3.3.41  $\text{plim} \hat{\pi}_j = \pi_j$   
 3.3.42  $\text{plim} \hat{\zeta}_j = \zeta_j$   
 3.3.43  $\text{plim} \hat{\pi}_{ss,j} = \pi_{ss,j}$

volgt onder assumpties I (3.3.35) c.q. I (3.3.38), A en B (3.3.40); van  $\hat{\zeta}_j$  en  $\hat{\pi}_{ss,j}$  onder toevoeging van III (3.3.32) en C (3.3.40). De consistentie van OLS-schatting  $\hat{\pi}_j' = (Z'Z)^{-1} Z'y_j$  voor coëfficiënt-vector  $\pi_j'$  in gereduceerde-vorm-vergelijking  $y_j = Z\pi_j' + v_j$  volgt recht-

$$\text{streeks na herschrijving } \hat{\pi}_j' = (Z'Z)^{-1}Z'(Z\pi_j' + v_{j.}) = (Z'Z)^{-1}(Z'Z)\pi_j' + (Z'Z)^{-1}(Z'v_{j.}) = \pi_j' + (Z'Z)^{-1}(Z'v_{j.}) = \pi_j' + \left(\frac{1}{n}Z'Z\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}Z'v_{j.}\right)$$

$$\begin{aligned}\text{plim } \hat{\pi}_j' &= \pi_j' + \text{plim } \left(\frac{1}{n}Z'Z\right)^{-1} \cdot \text{plim } \left(\frac{1}{n}Z'v_{j.}\right) \\ &= \pi_j' + \Sigma_{ZZ}^{-1} \cdot 0 \\ &= \pi_j'\end{aligned}$$

aangezien voorwaarde B voor iedere kolom  $e_{j.}$  in  $E$  stelt  $\text{plim } \left(\frac{1}{n}Z'e_{j.}\right) = 0$  en dus voor iedere kolom  $v_{j.}$  in  $V$   $\text{plim } \left(\frac{1}{n}Z'v_{j.}\right) = 0$ . De OLS-schatting  $\hat{\zeta}_j' = (W_j'W_j)^{-1}W_j'y_{j.}$  voor coëfficiënt-vector  $\zeta_j'$  in recursieve structurele vorm-vergelijking  $y_{j.} = W_j\zeta_j' + e_{j.}$  geeft na herschrijving en het nemen van de waarschijnlijkheidslimiet

$$\text{plim } \hat{\zeta}_j' = \zeta_j' + \text{plim } \left(\frac{1}{n}W_j'W_j\right)^{-1} \cdot \text{plim } \left(\frac{1}{n}W_j'e_{j.}\right)$$

Matrix  $W_j'W_j = \begin{bmatrix} Y & Z \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} Y & Z \end{bmatrix}$  maakt deel uit van matrix

$$[Y \ Z]'[Y \ Z] = \begin{bmatrix} Y'Y & Y'Z \\ Z'Y & Z'Z \end{bmatrix}$$

waarin

$$Y'Y = (Z\Pi' + V)'(Z\Pi' + V) = (V' + \Pi Z')(Z\Pi' + V) = V'Z\Pi' + V'V + \Pi Z'Z\Pi' + \Pi Z'V$$

$$Y'Z = V'Z + \Pi Z'Z$$

of vanwege  $V = E(\Delta^{-1})'$

$$Y'Y = \Delta^{-1}E'Z\Pi' + \Delta^{-1}E'E(\Delta^{-1})' + \Pi Z'Z\Pi' + \Pi Z'E(\Delta^{-1})'$$

$$Y'Z = \Delta^{-1}E'Z + \Pi Z'Z$$

De waarschijnlijkheidslimiet nemend resulteert vanwege voorwaarden A, B en C een eindige, constante matrix

$$\text{plim}\left\{\frac{1}{n}[Y \ Z]'[Y \ Z]\right\} = \begin{bmatrix} \Delta^{-1}\Sigma(\Delta^{-1})' + \Pi\Sigma_{ZZ}\Pi' & \Pi\Sigma_{ZZ} \\ \Sigma_{ZZ}\Pi' & \Sigma_{ZZ} \end{bmatrix}$$

zodat ook  $\text{plim}(\frac{1}{n} W_j' W_j)^{-1}$  een eindige, constante matrix is. Op analoge wijze als eerder voor recursieve structuren uit  $E(E'Z) = 0$  bovendiagonaal-driehoekige  $E(E'Y) = \Sigma(\Delta^{-1})'$  werd afgeleid en dus  $E(W_j' e_{j.}) = 0$ , wordt voor die structuren uit  $\text{plim}(\frac{1}{n} E'Z) = 0$  bovendiagonaal-driehoekige  $\text{plim}(\frac{1}{n} E'Y) = \Sigma(\Delta^{-1})'$  en dus  $\text{plim}(\frac{1}{n} W_j' e_{j.}) = 0$  afgeleid. Hiermee is niet alleen de consistentie van  $\hat{\zeta}_j$  maar tevens van  $\hat{\pi}_{ss,j}$  bewezen. De gereduceerde vormen  $Y = Z\Pi' + V$  en  $Y_s = Z_s \Pi_s' + V_s$  in het geval van een block-recursieve structuur met  $\Delta_{ss} = I$  en  $\Pi_{ss} = -\Gamma_{ss} = -[\Delta_{s1} \dots \Delta_{s,s-1} \Gamma_s']$  kunnen nl. worden samengevoegd tot een recursieve structuur  $[Y \ Y_s] \tilde{\Delta}' + Z \tilde{\Gamma}' = \tilde{E}$ , waarin

$$\tilde{\Delta} = \begin{bmatrix} I & & & 0 \\ \Delta_{s1} & \dots & \Delta_{s,s-1} & I \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} -\Pi \\ \Gamma_s \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \tilde{E} = \begin{bmatrix} V \\ V_s \end{bmatrix}$$

en  $\hat{\pi}_{ss,j}$  is voor deze structuur klaarblijkelijk te schrijven als een  $\hat{\zeta}_j$ .

Onder assumpties I (3.3.35) c.q. I (3.3.38), onafhankelijke  $e_{.i}$  en  $e_{.i'}$ , - dus niet slechts ongecorrleerde zoals in II (3.3.32) -, III (3.3.32) en A , B , C (3.3.40) kan men asymptotische sampling-varianties en -covarianties afleiden (37):

$$\text{asy var}(\hat{\pi}_j) = \frac{1}{n} \text{plim}[n(\hat{\pi}_j - \pi_j)'(\hat{\pi}_j - \pi_j)] = \frac{1}{n} \sigma_j^2 \Sigma_{ZZ}^{-1}$$

$$\text{asy var}(\hat{\zeta}_j) = \frac{1}{n} \text{plim}[n(\hat{\zeta}_j - \zeta_j)'(\hat{\zeta}_j - \zeta_j)] = \frac{1}{n} \sigma_j^2 \text{plim}(\frac{1}{n} W_j' W_j)^{-1}$$

waarvoor de volgende OLS-schatters consistent zijn

$$\widehat{\text{var}}(\hat{\pi}_j) = s_j^2 (Z'Z)^{-1} \quad \text{met} \quad s_j^2 = \frac{v_j' \cdot v_j}{n-k}$$

$$\widehat{\text{var}}(\hat{\zeta}_j) = s_j^2 (W_j' W_j)^{-1} \quad \text{met} \quad s_j^2 = \frac{e_j' \cdot e_j}{n-k}$$

waarin  $v_j = y_j - Z\hat{\pi}_j'$ ,  $e_j = y_j - W_j\hat{\zeta}_j'$ ,  $n$  het aantal rijen in de data-matrix en  $k$  het aantal geschatte coëfficiënten.

Voorwaarde A eist, dat de waarden in gepredetermineerde matrix  $Z$  binnen bepaalde grenzen blijven, ook als de steekproefgrootte nadert tot  $\infty$ . Dit zal zelden moeilijkheden opleveren in verdeeld onderzoek, omdat de waarden in  $Z$  dan bijna altijd opgevat kunnen worden als vaste, eindige

waarden. In tijdserie-onderzoek zullen om dezelfde reden evenmin moeilijkheden ontstaan m.b.t. exogene deelmatrix  $Z^u$ . De waarden in rijen  $i = 2, 3, \dots$  van lagged-endogene matrix  $Z^y$  moeten dan echter worden opgevat als random-waarden, gegenereerd door het model zelf. Theil (38) toont aan, dat de consistentie-voorwaarden in dat geval de assumptie van een asymptotisch stabiel model inhouden, d.w.z.  $[A, B, C, D]$  moet voldoen aan stabiliteitsvoorwaarde 3.2.46: alle eigenwaarden van  $\tilde{A}$  hebben  $\sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2} < 1$ . In tijdserie-onderzoek doet zich dus de vervelende omstandigheid voor, dat bij verwerping van de stabiliteitshypothese tegelijk de schatting  $[\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}]$  van het model niet meer als consistent beschouwd kan worden. De inconsistentie zal overigens ernstiger zijn voor de coëfficiënt-schattingen van die vergelijkingen, waar de invloed van lagged-endogene variabelen groot is in vergelijking met die van de overige variabelen en waar de instabiliteit vooral gelokaliseerd moet worden.

Een tweede probleem betreft de diagonaal-waarden van matrices  $E(e_{.i} e_{.i})$  in assumptie II. Deze diagonaalwaarden (seriële covarianties) moeten evenals de andere waarden 0 zijn en ook dat zal in verdeeld onderzoek zelden moeilijkheden opleveren. In tijdserie-onderzoek bevatten de diagonaal-waarden autocovarianties, waaruit de autocorrelaties (correlaties tussen error-waarden  $e_{.j,i}$  van dezelfde variabele  $j$  bij dezelfde onderzoekseenheid  $\alpha$  voor paren verschillende tijdstippen  $i$  en  $i'$ ) worden berekend en het is vaak erg onrealistisch om deze op 0 te stellen, zeker indien de tijdstippen  $i = 1, 2, \dots$  elkaar snel opvolgen (de eenheidsperiode  $\delta = 1$  betrekkelijk klein is gekozen). Toetsen voor autocorrelatie (39) maken gebruik van de residuele vector van de OLS-schatting, voor bijv. OLS-schatting  $\hat{\zeta}_j$  de residuele vector

$$e_{.j} = y_{.j} - W_{.j} \hat{\zeta}_j$$

De traditionele Durbin-Watson-toets, die grootheid

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n (e_{j,i} - e_{j,i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_{j,i}^2}$$

toetst (40), is niet toepasbaar voor vergelijkingen met lagged-afhankelijke variabelen als onafhankelijke variabelen. Een door Durbin ontwik-

kelde toets voor grote steekproeven (zeg  $n > 30$ ), waarbij de lagged-afhankelijke variabele als onafhankelijke variabele toelaatbaar is, maakt gebruik van de geschatte autocorrelatie zelf

$$r = \frac{\sum_{i=2}^n e_{j,i} e_{j,i-1}}{n-1 \sum_{i=1}^n e_{j,i}}$$

en toetst vervolgens grootheid

$$h = r \sqrt{\frac{n}{1 - n \cdot \hat{\text{var}}(\hat{\delta})}}$$

waarin  $\hat{\text{var}}(\hat{\delta})$  de geschatte sampling-variantie van de geschatte coëfficiënt  $\hat{\delta}$  bij lagged-afhankelijke vector  $z_j^y$  is (41). Moeilijkheden ontstaan voor:  $n \cdot \hat{\text{var}}(\hat{\delta}) \geq 1$ . Een algemenere, eveneens door Durbin ontwikkelde toets, die met de laatste toets asymptotisch equivalent is, bestaat hierin, dat een nieuwe vergelijking wordt opgesteld met  $e_{j,i}$  als afhankelijke variabele en  $e_{j,i-1}$  plus alle oorspronkelijke onafhankelijke variabelen als onafhankelijke variabelen, en dat vervolgens een gewone t- of F-toets wordt uitgevoerd m.b.t. de geschatte coëfficiënt bij  $e_{j,i-1}$  (42).

De gevolgen van seriële correlatie voor OLS-schatting zijn ernstig (43). Door seriële correlatie is de sampling-variantie van OLS-schatter  $\hat{\pi}_j$ ,  $\hat{\zeta}_j$  c.q.  $\hat{\pi}_{ss,j}$  bijna altijd onnodig groot, terwijl de OLS-variantie-schatter  $\hat{\text{var}}(\hat{\pi}_j)$ ,  $\hat{\text{var}}(\hat{\zeta}_j)$  c.q.  $\hat{\text{var}}(\hat{\pi}_{ss,j})$  onzuiver en inconsistent is, ook al is de OLS-schatter zelf zuiver of consistent. Meestal gaat het om onderschatting van de werkelijke sampling-variantie, zodat de OLS-variantie-schatter volstrekt onbruikbaar is evenals de daarop gebaseerde t- of F-toets. In tijdserie-onderzoek heeft de lagged-afhankelijke variabele in combinatie met seriële correlatie (autocorrelatie) tot gevolg dat de OLS-schatter ook zelf zijn consistentie verliest. Autocorrelatie op zich maakt de OLS-schatter dus nog niet onzuiver of inconsistent en evenmin is inconsistentie het gevolg van de lagged-afhankelijke variabele op zich. Het is juist de combinatie van autocorrelatie en lagged-afhankelijke variabele, waardoor in zuiver en gemengd tijdserie-onderzoek een gewijzigde schattingsprocedure volstrekt noodzakelijk is. Johnston



vermeldt onderzoek van Malinvaud, waarin de inconsistentie door toevoeging van exogene variabelen aan de vergelijking de neiging had af te nemen, maar in de meeste gevallen niettemin significant bleef (44).

Een veelgebruikte schattingsprocedure in het geval van autocorrelatie bestaat hierin, dat de oorspronkelijke vergelijking, bijv. 3.3.44 waarin  $z_i$  en 1 (eenheidsvariabele bij  $\beta_0$ ) als onafhankelijke variabelen optreden

$$3.3.44 \quad y_{j,i} = \beta_0 + \beta_1 z_i + e_{j,i}$$

of 3.3.45 waarin bovendien de lagged-afhankelijke variabele  $y_{j,i-1} = z_{j,i}^y$  als onafhankelijke variabele optreedt

$$3.3.45 \quad y_{j,i} = y_{j,i-1} + \beta_0 + \beta_1 z_i + e_{j,i}$$

wordt gecombineerd met een of andere expliciete assumptie over de aard van de autocorrelatie, bijv. met het simpele 1<sup>e</sup>-orde autoregressie-schema

$$3.3.46 \quad e_{j,i} = \rho e_{j,i-1} + \epsilon_{j,i} \quad |\rho| < 1$$

Zo nodig worden schema's van hogere orde toegepast. Indien de error-term  $\epsilon_{j,i}$  in de resulterende vergelijking

$$3.3.47 \quad \begin{cases} y_{j,i} = \beta_0 + \beta_1 z_i + \rho e_{j,i-1} + \epsilon_{j,i} \\ e_{j,i-1} = y_{j,i-1} - \beta_0 - \beta_1 z_{i-1} \\ y_{j,i} = \rho y_{j,i-1} + \beta_0(1 - \rho) + \beta_1 z_i - \beta_1 \rho z_{i-1} + \epsilon_{j,i} \end{cases}$$

c.q.

$$3.3.48 \quad \begin{cases} y_{j,i} = \beta y_{j,i-1} + \beta_0 + \beta_1 z_i + \rho e_{j,i-1} + \epsilon_{j,i} \\ e_{j,i-1} = y_{j,i-1} - \beta y_{j,i-2} - \beta_0 - \beta_1 z_{i-1} \\ y_{j,i} = (\beta + \rho) y_{j,i-1} - \beta \rho y_{j,i-2} + \beta_0(1 - \rho) + \beta_1 z_i - \beta_1 \rho z_{i-1} + \epsilon_{j,i} \end{cases}$$

geen autocorrelatie meer vertoont, zijn voor de OLS-schatter en de OLS-variantie-schatter van de coëfficiënten  $\rho$ ,  $\beta_0(1 - \rho)$ ,  $\beta_1$  en  $-\beta_1\rho$  in 3.3.47 c.q.  $(\beta + \rho)$ ,  $-\beta\rho$ ,  $\beta_0(1 - \rho)$ ,  $\beta_1$ ,  $-\beta_1\rho$  in 3.3.48 de negatieve gevolgen van autocorrelatie niet van toepassing.

Er zijn vervolgens twee mogelijkheden. Op de eerste plaats kan men eenvoudig het oorspronkelijke model wijzigen door vergelijking 3.3.44 te vervangen door 3.3.47, waarin lagged-afhankelijke  $y_{j,i-1}$  en lagged-onafhankelijke  $z_{i-1}$  als additionele onafhankelijke variabelen voorkomen, c.q. 3.3.45 door 3.3.48, waarin bovendien  $y_{j,i-2}$  als onafhankelijke variabele voorkomt. Om  $y_{j,i-2}$  met een lag van twee perioden in te passen in [A,B,C,D] wordt de procedure gebruikt zoals aangegeven tussen 3.2.2 en 3.2.3:  $y_{j,i-2}$  wordt vervangen door pseudo-variabele  $y'_{j,i-1}$  met een lag van slechts één periode en 3.3.48 wordt als volgt gesplitst in twee vergelijkingen

$$3.3.49 \quad y_{j,i} = (\beta + \rho)y_{j,i-1} - \beta\rho y'_{j,i-1} + \beta_0(1 - \rho) + \beta_1 z_i - \beta\rho z_{i-1} + \epsilon_{j,i}$$

$$y'_{j,i} = y_{j,i-1}$$

De éne endogene variabele wordt op die manier vervangen door een tweetal endogene (toestands)variabelen.

Indien 3.3.47 wordt herschreven als

$$3.3.50 \quad [y_{j,i} - \rho y_{j,i-1}] = \beta_0[1 - \rho] + \beta_1[z_i - \rho z_{i-1}] + \epsilon_{j,i}$$

c.q. 3.3.48 als

$$3.3.51 \quad [y_{j,i} - \rho y_{j,i-1}] = \beta[y_{j,i-1} - \rho y_{j,i-2}] + \beta_0[1 - \rho] + \beta_1[z_i - \rho z_{i-1}] + \epsilon_{j,i}$$

ontstaat een vergelijking met exact dezelfde structuur als oorspronkelijk vergelijking 3.3.44 c.q. 3.3.45 maar zonder de problematische error-term  $\epsilon_{j,i}$ , terwijl de waarden  $y_{j,i}$ ,  $1$ ,  $z_i$  en in 3.3.45 bovendien  $y_{j,i-1}$  zijn vervangen door getransformeerde waarden  $[y_{j,i} - \rho y_{j,i-1}]$ ,  $[1 - \rho]$ ,  $[z_i - \rho z_{i-1}]$ ,  $[y_{j,i-1} - \rho y_{j,i-2}]$ . Langs deze vergelijking kan men schattingen verkrijgen voor de coëfficiënten in de oorspronkelijke vergelijking door gebruik te maken van de volgende tweestapsprocedure (45). In de

eerste stap worden volgens OLS de coëfficiënten in 3.3.47 c.q. 3.3.48 geschat zoals eerder aangegeven. Alleen schatting  $\hat{\rho}$  - voor 3.3.48 verkregen middels  $\hat{\rho} = -(-\hat{\beta}_1 \rho / \hat{\beta}_1)$  - wordt gebruikt om vervolgens waarden  $[y_{j,i} - \hat{\rho} y_{j,i-1}]$ ,  $[1 - \hat{\rho}]$ ,  $[z_i - \hat{\rho} z_{i-1}]$ ,  $[y_{j,i-1} - \hat{\rho} y_{j,i-2}]$  te berekenen. In de tweede stap worden deze waarden in 3.3.50 c.q. 3.3.51 gesubstitueerd en de coëfficiënten volgens OLS geschat: de schatter is onder de consistentie-voorwaarden consistent.

Een derde probleem betreft multicollineariteit. Onderscheid wordt gemaakt tussen perfecte en bijna-perfecte multicollineariteit. Perfecte collineariteit houdt in, dat minstens één van de kolommen van onafhankelijke matrix  $Z$ ,  $Z_j$  of  $Z_s$  kan worden uitgedrukt als een lineaire combinatie van andere kolommen en doet zich bijv. voor als de steekproefwaarden van twee of meer onafhankelijke variabelen aan elkaar gelijk zijn. Het gevolg van perfecte multicollineariteit is, dat de OLS-schatter niet berekend kan worden. Lineaire afhankelijkheid tussen de  $k$  kolommen van bijv.  $Z$  betekent  $\text{Rang}(Z) < k$  en dus  $\text{Rang}(Z'Z) < k$ , zodat matrix  $Z'Z$  singulier is en de inverse  $(Z'Z)^{-1}$  in OLS-schatter  $\hat{\pi}_j = (Z'Z)^{-1} Z'y_j$  niet bestaat. In het geval van bijna-perfecte multicollineariteit bestaat de OLS-schatter wel, maar is de sampling-variantie  $\text{var}(\hat{\pi}_j) = \sigma_j^2 (Z'Z)^{-1}$  dermate groot, dat de schatter praktisch onbruikbaar wordt. Anders dan autocorrelatie is multicollineariteit geen consistentie- maar een nauwkeurigheidprobleem. De schattingen vertonen grote varianties. Door toevoeging van slechts enkele rijen aan de data-matrix kunnen enorme verschuivingen optreden en de afwijkingen m.b.t. verschillende coëfficiënten zijn onderling vaak sterk gecorreleerd.

Een oplossing voor het multicollineariteitsprobleem in het geval van twee (of meer) identieke kolommen  $z_1 = z_2$  of bijna-identieke kolommen  $z_1 \approx z_2$  bestaat hierin, dat men in de plaats van de effecten van de beide variabelen afzonderlijk hun gemeenschappelijk effect schat na eliminatie van één van beide variabelen:  $\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 = (\beta_1 + \beta_2) z_1$  of  $\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 \approx (\beta_1 + \beta_2) z_1$ . Het zo geschatte gemeenschappelijk effect moet uiteraard niet worden verward met de effecten van ieder van de variabelen afzonderlijk.

Multicollineariteit treedt typisch op bij het gebruik van onafhankelijke variabelen, die in feite één en dezelfde variabele zijn maar met verschillende lags, bijv.  $z_1 = u(t)$ ,  $z_2 = u(t - 1)$ ,  $z_3 = u(t - 2)$ , ...

Hiervoor zal gemakkelijk gelden:  $z_1 \approx z_2 \approx z_3 \dots$ . Onder bepaalde assumpties heeft deze vorm van multicollineariteit een elegante oplossing, die sterke verwantschap vertoont met de zo juist gegeven oplossing van het autocorrelatie-probleem.

Meestal neemt het effect af, naarmate de lag groter wordt. Vaak is het dan niet onredelijk om de assumptie te volgen, die aan de methode van Koyck (46) ten grondslag ligt:  $\beta_2 = \lambda\beta_1$ ,  $\beta_3 = \lambda^2\beta_1$ , ... met  $0 < \lambda < 1$ . Deze assumptie impliceert een onbeperkt aantal lagged variabelen in de vergelijking, waarvan het effect echter met het toenemen van de lag meer of minder snel nadert tot 0. Per rij  $i$  van de data-matrix luidt de vergelijking

$$3.3.52 \quad y_{j,i} = \beta_0 + \beta_1 z_{1,i} + \lambda\beta_1 z_{2,i} + \lambda^2\beta_1 z_{3,i} + \dots + e_{j,i}$$

of algemener met bovendien lagged-afhankelijke  $z_{j,i}^y$  en een additionele onafhankelijke  $z_{k,i}$

$$3.3.53 \quad y_{j,i} = \beta z_{j,i}^y + \beta_0 + \beta_1 z_{1,i} + \lambda\beta_1 z_{2,i} + \lambda^2\beta_1 z_{3,i} + \dots + \beta_k z_{k,i} + e_{j,i}$$

Voor een hypothetische data-matrix met een onbeperkt aantal rijen (perioden)  $i$ ,  $i-1$ ,  $i-2$ , ... per onderzoekseenheid geldt

$z_{2,i} = z_{1,i-1}$ ,  $z_{3,i} = z_{1,i-2}$ , ... en gaan 3.3.52 en 3.3.53 over in resp.

$$3.3.54 \quad \begin{cases} y_{j,i} = \beta_0 + \beta_1 z_{1,i} + \lambda\beta_1 z_{1,i-1} + \lambda^2\beta_1 z_{1,i-2} + \dots + e_{j,i} \\ \lambda y_{j,i-1} = \lambda\beta_0 + \lambda\beta_1 z_{1,i-1} + \lambda^2\beta_1 z_{1,i-2} + \lambda^3\beta_1 z_{1,i-3} + \dots + \lambda e_{j,i-1} \\ y_{j,i} - \lambda y_{j,i-1} = \beta_0(1-\lambda) + \beta_1 z_{1,i} + (e_{j,i} - \lambda e_{j,i-1}) \end{cases}$$

$$3.3.55 \quad \begin{cases} y_{j,i} = \beta y_{j,i-1} + \beta_0 + \beta_1 z_{1,i} + \lambda\beta_1 z_{1,i-1} + \lambda^2\beta_1 z_{1,i-2} + \dots + \beta_k z_{k,i} + e_{j,i} \\ \lambda y_{j,i-1} = \lambda\beta y_{j,i-2} + \lambda\beta_0 + \lambda\beta_1 z_{1,i-1} + \lambda^2\beta_1 z_{1,i-2} + \lambda^3\beta_1 z_{1,i-3} + \dots + \lambda\beta_k z_{k,i} + \lambda e_{j,i-1} \\ y_{j,i} - \lambda y_{j,i-1} = \beta y_{j,i-1} - \lambda\beta y_{j,i-2} + \beta_0(1-\lambda) + \beta_1 z_{1,i} + \beta_k z_{k,i} - \lambda\beta_k z_{k,i-1} + (e_{j,i} - \lambda e_{j,i-1}) \end{cases}$$

waaruit de hele lagged-onafhankelijke serie  $z_{1,i-1} = z_{2,i}$ ,  $z_{1,i-2} = z_{3,i}$ , ..., die voor de multicollineariteit verantwoordelijk was, is geëlimineerd en vervangen door de éne lagged-afhankelijke  $y_{j,i-1}$  in 3.3.54 c.q.  $y_{j,i-2}$  in 3.3.55. Onder additionele assumptie 3.3.56

$$3.3.56 \quad e_{j,i} = \lambda e_{j,i-1} + \epsilon_{j,i}$$

hetgeen een bijzonder geval is van 3.3.46 met  $\rho = \lambda$ , volgen

$$3.3.57 \quad y_{j,i} = \lambda y_{j,i-1} + \beta_0(1 - \lambda) + \beta_1 z_{1,i} + \epsilon_{j,i}$$

$$3.3.58 \quad y_{j,i} = (\beta + \lambda)y_{j,i-1} - \beta\lambda y_{j,i-2} + \beta_0(1 - \lambda) + \beta_1 z_{1,i} + \beta_k z_{k,i} \\ - \lambda\beta_k z_{k,i-1} + \epsilon_{j,i}$$

welke bijzondere gevallen zijn van 3.3.47 en 3.3.48. Zij kunnen dan ook op analoge wijze verder worden behandeld. Over additionele assumptie 3.3.56 stelt Theil: "It should be admitted that the exact fulfillment of  $\rho = \lambda$  is unlikely in any real situation, but procedures may be useful even when the underlying conditions are violated to a limited degree" (47). Iteratieve procedures voor  $\rho \neq \lambda$ , bijv.  $\rho = 0$ , bestaan, maar zijn uiterst lastig en tijdrovend.

### Interdependente structuren

Keren we nu terug tot het schattingsprobleem in het geval van een interdependente structuur. Schattingsprocedures voor  $\Delta$  en  $\Gamma$  in een interdependente structuur vooronderstellen, dat het identificatie-probleem is opgelost. Ook recursieve structuren evenals de gereduceerde vormen van beide soorten structuren moeten uiteraard identificeerbaar zijn, maar zoals dadelijk zal blijken zijn zij dat per definitie. Voor matrix  $[Y \ Z]' [Y \ Z]$ , die rechtstreeks uit de data-matrix  $[Y \ Z]$  wordt afgeleid en op basis waarvan schattingen  $\hat{\Delta}$  en  $\hat{\Gamma}$  evenals  $\hat{\Pi}$  worden berekend, is eerder bewezen:

3.3.59  $\text{plim } S = S$

$$\text{met } S = \frac{1}{n} [Y \ Z]' [Y \ Z],$$

$$S = \begin{bmatrix} \Delta^{-1} \Sigma (\Delta^{-1})' + \Pi \Sigma_{ZZ} \Pi' & \Pi \Sigma_{ZZ} \\ \Sigma_{ZZ} \Pi' & \Sigma_{ZZ} \end{bmatrix}$$

waarbij gebruik wordt gemaakt van gereduceerde vorm  $Y = Z\Pi' + E$ . Vanwege  $\Pi = -\Delta^{-1}\Gamma$  kunnen we de matrix  $S$  ook schrijven in termen van structurele vorm  $Y\Delta' + Z\Gamma' = E$

$$3.3.60 \quad S = \begin{bmatrix} \Delta^{-1} \Sigma (\Delta^{-1})' + \Delta^{-1} \Gamma \Sigma_{ZZ} \Gamma' (\Delta^{-1})' & -\Delta^{-1} \Gamma \Sigma_{ZZ} \\ -\Sigma_{ZZ} \Gamma' (\Delta^{-1})' & \Sigma_{ZZ} \end{bmatrix}$$

Het identificatie-probleem bestaat nu hierin, dat weliswaar iedere structuur  $Y\Delta' + Z\Gamma' = E$  één en niet meer dan één  $S$  oplevert, maar dat omgekeerd bij eenzelfde  $S$  verschillende structuren kunnen horen. In feite geeft vermenigvuldiging van  $Y\Delta' + Z\Gamma' = E$  met iedere willekeurige non-singuliere matrix  $F \neq I$  van dezelfde orde als  $\Delta$  een nieuwe structuur met matrices  $\Delta_F = F\Delta \neq \Delta$  en  $\Gamma_F = F\Gamma \neq \Gamma$

$$Y\Delta_F' + Z\Gamma_F' = EF' \quad \text{of} \quad Y(F\Delta)' + Z(F\Gamma)' = (EF')$$

waaruit exakt dezelfde matrix  $S_F = S$  resulteert:

$$S_F = \begin{bmatrix} (F\Delta)^{-1} (F\Sigma F') (\Delta^{-1} F^{-1})' & -(\Delta^{-1} F^{-1}) (F\Gamma) \Sigma_{ZZ} \\ + (F\Delta)^{-1} (F\Gamma) \Sigma_{ZZ} (F\Gamma)' (\Delta^{-1} F^{-1})' & \\ -\Sigma_{ZZ} (F\Gamma)' (\Delta^{-1} F^{-1})' & \Sigma_{ZZ} \end{bmatrix} = S$$

vanwege  $F^{-1}F = F'(F^{-1})' = I$ . Matrix  $S$  - en a fortiori schatting  $S$  - geeft dus op zich onvoldoende informatie om matrices  $\Delta$  en  $\Gamma$  van willekeurige getransformeerde matrices  $\Delta_F = F\Delta$  en  $\Gamma_F = F\Gamma$  te onderscheiden. De betrokken structuren worden "observatieel equivalent" genoemd. In het bijzonder is voor  $F = \Delta^{-1}$  de structurele vorm met de gereduceerde vorm observatieel equivalent:

$$Y(\Delta^{-1}\Delta)' + Z(\Delta^{-1}\Gamma)' = E(\Delta^{-1})' \rightarrow Y = Z\Pi' + V$$

Noemen we het aantal kolommen in data-matrix  $[Y \ Z]$   $s$ , zodat 3.3.60 een stelsel van  $\frac{1}{2}s(s+1)$  vergelijkingen vormt in de elementen van matrices  $\Delta$ ,  $\Gamma$ ,  $\Sigma$  en  $\Sigma_{ZZ}$ , dan zijn de te schatten coëfficiënten in  $\Delta$  en  $\Gamma$  slechts identificeerbaar - d.w.z. te onderscheiden van de coëfficiënten op de corresponderende plaatsen in  $\Delta_F$  en  $\Gamma_F$ , in het bijzonder in  $\Delta_F = I$  en  $\Gamma_F = -\Pi$  van de gereduceerde vorm - indien dit stelsel van  $\frac{1}{2}s(s+1)$  vergelijkingen oplosbaar is voor de betrokken coëfficiënten. Een coëfficiënt heet ongeïdentificeerd, juist-geïdentificeerd of over-geïdentificeerd, indien het stelsel resp. niet oplosbaar, op slechts één manier oplosbaar of op verschillende manieren oplosbaar is voor de betrokken coëfficiënt. Oplosbaarheid vereist bepaalde a priori restricties op de elementen in  $\Delta$ ,  $\Gamma$ ,  $\Sigma$  en  $\Sigma_{ZZ}$  (0-waarden of andere vastgestelde waarden, gelijkstellingen of andere afhankelijkheden). Het zal duidelijk zijn, dat een algemene noodzakelijke voorwaarde voor totale identificeerbaarheid (alle te schatten elementen, waaronder die in  $\Delta$  en  $\Gamma$ , juist-geïdentificeerd of over-geïdentificeerd) is, dat het aantal onafhankelijk te schatten elementen (bijv. gelijkgestelde elementen worden dus slechts één keer geteld) - zeg  $\kappa$  - niet groter is dan het aantal vergelijkingen in 3.3.60:  $\kappa \leq \frac{1}{2}s(s+1)$ . Noemen we het aantal kolommen in  $Y$   $p$  en in  $Z$   $q$ , zodat  $s = p + q$  en het totale aantal elementen in de matrices  $\Delta$ ,  $\Gamma$ ,  $\Sigma$  en  $\Sigma_{ZZ}$  gelijk is aan  $p^2 + pq + \frac{1}{2}p(p+1) + \frac{1}{2}q(q+1) = p^2 + \frac{1}{2}s(s+1)$ , dan zal ook de volgende algemene noodzakelijke en voldoende voorwaarde geen verwondering wekken: de a priori restricties op de  $p^2 + \frac{1}{2}s(s+1)$  elementen in  $\Delta$ ,  $\Gamma$ ,  $\Sigma$  en  $\Sigma_{ZZ}$  zijn zodanig, dat als enig toelaatbare transformatie  $F$  overblijft de identiteitstransformatie  $F = I$ .

Het is nu gemakkelijk in te zien, dat een recursieve structuur ( $\Delta$  driehoekig met waarden 1 op de diagonaal,  $\Sigma$  diagonaal) per definitie identificeerbaar is. De matrices  $\Delta$  en  $\Sigma$  bevatten hier resp. slechts  $\frac{1}{2}(p^2 - p)$  en  $p$  te schatten elementen, zodat voor het totale aantal te schatten elementen  $\kappa$  in  $\Delta$ ,  $\Gamma$ ,  $\Sigma$  en  $\Sigma_{ZZ}$  geldt:  $\kappa = \frac{1}{2}(p^2 - p) + pq + p + \frac{1}{2}q(q+1) = \frac{1}{2}s(s+1)$ . Bovendien geldt  $F = I$ . Als nl.  $\Delta_F = F\Delta$  evenals  $\Delta$  driehoekig moet zijn met waarden 1 op de diagonaal, moet hetzelfde gelden voor  $F$ . Dit gecombineerd met de eis, dat de boven- en onderdiagonaal-elementen in  $\Sigma_F = F\Sigma F'$  0 moeten zijn, betekent  $F = I$ .

In het geval van een interdependente structuur is het bewijs voor  $F = I$  vaak moeilijk te leveren. Evenzo is feitelijke oplossing van het stelsel (niet-lineaire) vergelijkingen 3.3.60 meestal erg lastig en niet zelden ontbreken expliciete oplossingen voor bepaalde elementen. Om deze reden worden in de literatuur identificatie-voorwaarden gegeven voor bijzondere soorten interdependente structuren. Voor structuren met 1) uitsluitend lineaire restricties (0-waarden of andere vastgestelde waarden, gelijkstellingen of andere lineaire afhankelijkheden) op 2) uitsluitend de coëfficiënten in  $\Delta$  en  $\Gamma$  gelden de rang-voorwaarde (noodzakelijk en voldoende) en de gemakkelijker te hanteren orde-voorwaarde (noodzakelijk). Deze voorwaarden worden toegepast op iedere structurele vergelijking afzonderlijk. De rang-voorwaarde maakt gebruik van het verband tussen structurele-vorm- en gereduceerde-vorm-coëfficiënten

$$\Pi = -\Delta^{-1}\Gamma \quad \text{of} \quad \Delta\Pi + \Gamma = 0 \quad \text{of}$$

$$3.3.61 \quad AB = 0 \quad \text{met} \quad A = \begin{bmatrix} \Delta & \Gamma \end{bmatrix} \quad \text{van de orde } p \times (p + q),$$

$$B = \begin{bmatrix} \Pi \\ I \end{bmatrix} \quad \text{van de orde } (p + q) \times q$$

De elementen van B mogen identificeerbaar worden geacht, aangezien  $\Pi$  in de gereduceerde vorm altijd identificeerbaar is (in de gereduceerde vorm geldt  $\Delta = I$  en dus alleen voor  $F = I$ :  $\Delta_F = F\Delta = I$ ). Ieder van de rijen  $j = 1, \dots, p$  van 3.3.61

$$3.3.62 \quad \alpha_j B = 0 \quad \text{met} \quad \alpha_j = [\delta_{j1} \dots \delta_{jp} \quad \gamma_{j1} \dots \gamma_{jq}] \quad \text{en} \quad \delta_{jj} = 1$$

vormt zonder a priori restricties een stelsel van  $q$  vergelijkingen in  $p + q - 1$  onbekenden, nl. de  $p + q - 1$  onbekende structurele coëfficiënten in de  $j$ -de structurele vergelijking (uiteeraard geldt a priori voor  $\delta_{jj}$  bij de afhankelijke vector  $y_j$ :  $\delta_{jj} = 1$ , zodat  $p + q$  met 1 moet worden verminderd). De  $q$  vergelijkingen zijn vanwege  $\text{Rang } B = q$  ( $\text{Rang } B \leq q$ , omdat B slechts  $q$  kolommen bevat, en  $\text{Rang } B \geq q$ , omdat B in de eenheidsmatrix I van de orde  $q \times q$  lineair onafhankelijke rijen bevat) lineair onafhankelijk maar te gering in aantal om oplossingen te geven voor alle  $p + q - 1$  coëfficiënten in  $\alpha_j$ . Stel, dat  $p = 3$  en  $q = 4$  en dat op de



coëfficiënten in  $\alpha_j$  2 restricties:  $\delta_{j1} = 0$  en  $\delta_{j2} = \frac{1}{2}\delta_{j3}$  zijn gesteld. De laatste worden middels matrix  $\phi_j$  van de orde  $(3 + 4) \times 2 = 7 \times 2$

$$\phi_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

als volgt aan 3.3.62 toegevoegd:

$$3.3.63 \quad \alpha_j [B \quad \phi_j] = 0$$

Zo'n stelsel 3.3.63 is dan en alleen dan oplosbaar voor alle coëfficiënten in  $\alpha_j$ , indien is voldaan aan de rang-voorwaarde, die de volgende twee equivalente formuleringen kent (48)

$$3.3.64 \quad \text{Rang}[B \quad \phi_j] = p + q - 1 \leftrightarrow \text{Rang } A \cdot \phi_j = \text{Rang}[\Delta \quad \Gamma] \cdot \phi_j = p - 1$$

De tweede formulering is in het algemeen gemakkelijker hanteerbaar, omdat daarin geen kennis van  $\Pi$  wordt voorondersteld. De rang-voorwaarde garandeert zowel het bestaan als de uniciteit van de oplossing. Een hogere rang betekent, dat geen oplossing mogelijk is vanwege strijdigheid in het stel restricties in combinatie met  $\Pi$ . Een lagere rang impliceert dat het stelsel onoplosbaar is in de zin van niet uniek-oplosbaar (onderidentificatie).

Aan 3.3.64 kan alleen zijn voldaan, indien het aantal lineaire restricties (het aantal kolommen in  $\phi_j$ ) minstens gelijk is aan  $p - 1$ . Deze noodzakelijke voorwaarde staat bekend als de orde-voorwaarde:

$$3.3.65 \quad \text{Kolom-aantal } \phi_j \geq p - 1$$

Indien de restricties uitsluitend 0-waarden betreffen, d.w.z. het weglaten van variabelen uit de structurele vergelijking, en het aantal weggelaten variabelen  $R$  wordt genoemd, is 3.3.65 ook als volgt te formuleren:

$$R \leq p - 1$$

Schrijven we  $R = (p - p') + (q - q')$ :  $p'$  het aantal opgenomen current-endogene variabelen,  $(p - p')$  het aantal weggelaten current-endogene variabelen,  $q'$  het aantal gepredetermineerde variabelen,  $(q - q')$  het aantal weggelaten gepredetermineerde variabelen, dan volgt uit  $(p - p') + (q - q') \geq p - 1$  de meest populaire formulering van de orde-voorwaarde:

$$3.3.66 \quad q - q' \geq p' - 1$$

d.w.z. het aantal weggelaten gepredetermineerde variabelen in de structurele vergelijking moet minstens gelijk zijn aan het aantal opgenomen current-endogene variabelen min één. De orde-voorwaarde is ook bruikbaar om na toepassing van de rang-voorwaarde onderscheid te maken tussen juist- en over-identificeerbare vergelijkingen. Voor over-identificeerbaarheid is vereist, dat in 3.3.65 of 3.3.66 het teken  $>$  van toepassing is: kolom-aantal  $\phi_j > p - 1$  of  $q - q' > p' - 1$ .

Lineair stelsel 3.3.63 is gemakkelijker oplosbaar dan 3.3.60. Na toepassing van orde- en rang-voorwaarde om de juist-identificeerbaarheid over-identificeerbaarheid of niet-identificeerbaarheid van de structurele vergelijking als geheel te onderzoeken, is het in het algemeen niet moeilijk om met behulp van 3.3.63 na te gaan, welke van de te schatten coëfficiënten juist-geïdentificeerd, over-geïdentificeerd of niet-geïdentificeerd is. Een juist-geïdentificeerde coëfficiënt heeft één, een over-geïdentificeerde coëfficiënt meerdere en een niet-geïdentificeerde coëfficiënt geen oplossing in  $\Pi$ -coëfficiënten. Voor bijv.  $p = 2$  en  $q = 2$ , d.w.z.

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \alpha_1 = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \gamma_{11} & \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \delta_{12} & \gamma_{11} & \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} \delta_{21} & \delta_{22} & \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{21} & 1 & \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}$$

en restricties  $\gamma_{11} = 0$ ,  $\gamma_{12} = 0$  op de eerste vergelijking, d.w.z.

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

geeft  $\alpha_1 [B \ \phi_1] = \alpha_1 \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & 0 & 0 \\ \pi_{21} & \pi_{22} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$  de vergelijkingen

$$\begin{aligned} \pi_{11} + \delta_{12}\pi_{21} + \gamma_{11} &= 0 & \text{of} & & \pi_{11} + \delta_{12}\pi_{21} &= 0 \\ \pi_{12} + \delta_{12}\pi_{22} + \gamma_{21} &= 0 & & & \pi_{12} + \delta_{12}\pi_{22} &= 0 \\ & & & & \gamma_{11} &= 0 \\ & & & & \gamma_{12} &= 0 \end{aligned}$$

en dus voor  $\delta_{12}$  een tweetal uitdrukkingen in termen van  $\Pi$ -coëfficiënten:

$$\delta_{12} = -\frac{\pi_{11}}{\pi_{21}} = -\frac{\pi_{12}}{\pi_{22}}$$

Aangezien van

$$A \cdot \phi_1 = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \phi_1 = \begin{bmatrix} 1 & \delta_{12} & 0 & 0 \\ \delta_{21} & 1 & \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}$$

de rang 1 is dus niet kleiner maar ook niet groter dan  $p - 1 = 1$ , bevat het tweetal uitdrukkingen voor  $\delta_{12}$  geen strijdigheid en is  $\delta_{12}$  dus overgeïdentificeerd.

Johnston (49) heeft laten zien, hoe de rang-voorwaarde op eenvoudige wijze kan worden uitgebreid om behalve lineaire restricties op  $\Delta$ - en  $\Gamma$ -coëfficiënten ook 0-restricties op diagonaal-elementen  $\sigma_j^2$  in  $\Sigma$  toe te laten, hetgeen van toepassing is bij vergelijkingen zonder error-term  $e_j$  (deterministische verbanden, definities, etc.)

$$\begin{aligned} 3.3.67 \quad \text{Rang}[A \cdot \phi_j \quad \Sigma] &= p - 1 & \text{indien} & & \sigma_j^2 &= 0 \\ \text{Rang } A \cdot \phi_j &= p - 1 & & & \text{indien} & \sigma_j^2 \neq 0 \end{aligned}$$

Deze noodzakelijke en voldoende voorwaarde verschilt alleen voor de vergelijkingen met  $\sigma_j^2 = 0$  van 3.3.64. Nemen we als voorbeeld met  $p = 2$ ,  $q = 1$ ,

$$A = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \gamma_{11} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \gamma_{21} \end{bmatrix} \text{ en } \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \text{ de restricties } \delta_{12} = 0, \sigma_2^2 = 0$$

De eerste structurele vergelijking met  $\sigma_1^2 \neq 0$  is geïdentificeerd vanwege

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A \cdot \phi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_{21} \end{bmatrix} \text{ en Rang } A \cdot \phi_1 = 1. \text{ Voor de tweede structurele}$$

vergelijking met  $\sigma_2^2 = 0$  ( $e_2 = 0$ ), zodat tevens  $\sigma_{12} = 0$ , gelden geen restricties op de coëfficiënten  $\delta_{21}$  en  $\gamma_{21}$  en dus

$\phi_2 = 0, A \cdot \phi_2 = 0, [A \cdot \phi_2 \quad \Sigma] = [0 \quad \Sigma], \text{Rang}[0 \quad \Sigma] = \text{Rang } \Sigma$ . Aangezien de rang van  $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  1 is, is ook de tweede vergelijking geïdentificeerd.

De identificeerbaarheid van structuren met definitiorische vergelijkingen wordt overigens het gemakkelijkst onderzocht door eerst de definitiorische vergelijkingen te elimineren middels substitutie van de gedefinieerde variabelen in de gedragsvergelijkingen van de structuur en de identificatie-procedures toe te passen op de nieuwe structuur met minder variabelen en minder vergelijkingen (een kleinere  $p$ ). Dezelfde procedure is uiteraard toepasbaar bij technologische vergelijkingen, evenwichtsvergelijkingen, etc. Bij exakte vergelijkingen met onbekende coëfficiënten (exakte gedragsvergelijkingen) dient de procedure in de vorige alinea te worden gevolgd.

Het eigenlijke schattingsprobleem bij interdependente structuren bestaat hierin, dat OLS anders dan in het geval van een recursieve structuur geen consistente schatting geeft van  $\zeta_j$  (onder  $\zeta_j$  verstaan we de vector  $-\alpha_j$  zonder  $-\delta_{jj} = -1$  en zonder de op 0 gestelde coëfficiënten  $-\delta_{jj}$ , en  $-\gamma_{jj}$ ). Al eerder is erop gewezen, dat voor interdependente structuren niet kan worden aangenomen, dat error-term  $e_j$  en onafhankelijke current-endogene variabelen  $y_j$ , ongecorrleerd zijn. Er kan dus niet worden aangenomen  $E(W_j' e_j) = 0$  en evenmin  $\text{plim}(\frac{1}{n} W_j' e_j) = 0$ , ook al geldt  $E(Z_j' e_j) = 0$  en  $\text{plim}(\frac{1}{n} Z_j' e_j) = 0$  (in  $W_j = [Y_j \quad Z_j]$  bevat  $Y_j$  de vectoren  $y_j$ , bij de coëfficiënten  $-\delta_{jj} \neq 0$  en  $Z_j$  de vectoren  $z_j$ , bij de coëfficiënten  $-\gamma_{jj} \neq 0$ ). Toch is  $\text{plim}(\frac{1}{n} W_j' e_j) = 0$  noodzakelijk voor een consistente OLS-schatter  $\hat{\zeta}$  zoals  $\text{plim}(\frac{1}{n} Z_j' e_j) = 0$  noodzakelijk is voor een consistente OLS-schatter  $\hat{\pi}_j$ . De consistentie van OLS voor een recursieve

structuur - vanwege de typische aard van een recursieve structuur kan worden bewezen  $\text{plim}(\frac{1}{n} W_j' e_j) = 0$  - komt dus voor een interdependente structuur te vervallen.

In het speciale geval van uitsluitend lineaire restricties op  $\Delta$ - en  $\Gamma$ -coëfficiënten zou men kunnen trachten iedere  $\alpha_j [B \ \phi_j] = 0$  (3.3.63) op te lossen voor  $\alpha_j$  na substitutie van een consistente schatting  $\hat{\Pi}$  in  $B = \Pi$ , d.w.z. iedere  $\alpha_j [B \ \phi_j] = 0$  te vervangen door  $\hat{\alpha}_j [\hat{B} \ \phi_j] = 0$

met  $\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{\Pi} \\ I \end{bmatrix}$  en op te lossen voor de te schatten coëfficiënten in  $\hat{\alpha}_j$ .

Deze procedure wordt ILS (Indirect Least Squares) genoemd en geeft, indien toepasbaar, na samenvoeging van de  $\hat{\alpha}_j$  tot  $\hat{A} = [\hat{\Delta} \ \hat{\Gamma}]$  consistente schattingen  $\hat{\Delta}$  en  $\hat{\Gamma}$ . De toepasbaarheid van ILS blijft echter beperkt tot juist-geïdentificeerde vergelijkingen. Een over-geïdentificeerde vergelijking heeft minstens één coëfficiënt in  $\alpha_j$  met verschillende oplossingen in termen van  $\Pi$ -coëfficiënten. In termen van  $\Pi$ -coëfficiënten geven deze oplossingen uiteraard dezelfde waarden, maar substitutie van  $\Pi$  door  $\hat{\Pi}$  resulteert bijna zeker in oplossingen met verschillende waarden voor over-geïdentificeerde coëfficiënten. De rang van  $\hat{\Pi}$  is nl. in het over-geïdentificeerde geval bijna zeker groter dan van  $\Pi$ .

Algemener toepasbare procedures worden ofwel op iedere structurele vergelijking afzonderlijk toegepast: 2SLS (Two Stage Least Squares) en LIML (Limited Information Maximum Likelihood) ofwel op het stelsel structurele vergelijkingen als geheel: 3SLS (Three Stage Least Squares) en FIML (Full Information Maximum Likelihood). We zullen ons in eerste instantie beperken tot de relatief eenvoudige 2SLS en 3SLS. Een nadeel van de maximum-likelihood procedures is, dat een multi-normale verdeling van de  $e_{j,i}$  - assumptie IV (3.3.32) - wordt aangenomen. Onder deze assumptie bewijst Theil (50) trouwens, dat de LIML- en 2SLS-schatter in de limiet exakt dezelfde verdeling hebben en evenzo de FIML- en 3SLS-schatter. Een FIML-procedure zal aan het eind van deze paragraaf ter sprake komen bij de LISREL-benadering. Daarin worden meet-fouten in de variabelen van het model toegelaten en zijn de relatief eenvoudige 2SLS en 3SLS niet meer toepasbaar.

De essentie van 2SLS bestaat in de vervanging van de problematische  $Y_j$  in  $W_j = [Y_j \ Z]$  door de betrokken submatrix  $\hat{Y}_j$  van de schatting  $\hat{Y}$ ,

verkregen uit schatting  $\hat{\Pi}$  van de gereduceerde vorm

$$3.3.68 \quad \hat{Y} = Z\hat{\Pi}' \quad \text{met } \hat{\Pi}' = (Z'Z)^{-1}Z'Y$$

De eerste stap van 2SLS omvat dus OLS-schatting

$$\hat{Y}_j = Z\hat{\pi}'_j = Z(Z'Z)^{-1}Z'Y_j$$

en de tweede stap OLS-schatting

$$\hat{\zeta}'_j = (\hat{W}'_j\hat{W}_j)^{-1}\hat{W}'_jy_j. \quad \text{met } \hat{W}_j = [\hat{Y}_j \quad Z_j]$$

Theil (51) heeft laten zien, dat  $\hat{\zeta}'_j$  ook rechtstreeks in termen van  $W_j$  geschreven kan worden:

$$3.3.69 \quad \hat{\zeta}'_j = [W'_jZ(Z'Z)^{-1}Z'W_j]^{-1}W'_jZ(Z'Z)^{-1}Z'y_j. \quad \text{met } W_j = [Y_j \quad Z_j]$$

evenals de bijbehorende schatter:  $\hat{\text{var}}(\hat{\zeta}_j) = s_j^2(\hat{W}'_j\hat{W}_j)^{-1}$  van:  $\text{asy var}(\hat{\zeta}_j) = \frac{1}{n} \text{plim}[n(\hat{\zeta}_j - \zeta_j)'(\hat{\zeta}_j - \zeta_j)]$

$$3.3.70 \quad \hat{\text{var}}(\hat{\zeta}_j) = s_j^2[W'_jZ(Z'Z)^{-1}Z'W_j]^{-1}$$

Verder geeft hij voor de asymptotische sampling-covarianties tussen coëfficiënten in verschillende vergelijkingen:  $\text{asy cov}(\hat{\zeta}_j, \hat{\zeta}_{j'}) = \frac{1}{n} \text{plim}[n(\hat{\zeta}_j - \zeta_j)'(\hat{\zeta}_{j'} - \zeta_{j'})]$  de schatter (52):

$$3.3.71 \quad \text{côv}(\hat{\zeta}_j, \hat{\zeta}_{j'}) = s_{jj'}, [W'_jZ(Z'Z)^{-1}Z'W_j]^{-1}W'_jZ(Z'Z)^{-1}Z'W_{j'}, [W'_jZ(Z'Z)^{-1}Z'W_{j'}]^{-1}$$

De schatters  $s_j^2$  en  $s_{jj'}$ , van varianties en covarianties  $\sigma_j^2$  en  $\sigma_{jj'}$ , vindt men op de betrokken plaatsen in matrix

$$3.3.72 \quad \hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} s_1^2 & s_{12} & \dots \\ s_{12} & s_2^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \frac{1}{n}(\hat{E}'\hat{E}) \quad (53) \quad \text{met in } \hat{E} \text{ de residuele vectoren } e_j = y_j - W_j\hat{\zeta}'_j$$

De 2SLS-schatters 3.3.69 t/m 3.3.72 zijn onder dezelfde voorwaarden consistent als die voor  $\Pi$ , waarop zij zijn gebaseerd, maar zij missen de eventuele zuiverheid van de laatste.

Vervangt men in 3.3.69, 3.3.70 en 3.3.71  $W_j$  door  $Z$ , dan volgt

$$\hat{\zeta}_j = (Z'Z)^{-1}Z'y_j = \hat{\pi}_j'$$

$$\text{vâr}(\hat{\zeta}_j) = s_{vj}^2(Z'Z)^{-1} = \text{vâr}(\hat{\pi}_j)$$

$$\text{côv}(\hat{\zeta}_j, \hat{\zeta}_{j'}) = s_{jj'}(Z'Z)^{-1} = \text{côv}(\hat{\pi}_j, \hat{\pi}_{j'})$$

d.w.z. precies de OLS-schatters van de gereduceerde vorm, die men als volgt in matrix-vorm kan samenvatten voor alle vergelijkingen  $j$  tezamen:

$$3.3.73 \quad \hat{\Pi} = [(Z'Z)^{-1}Z'Y]' \quad (\text{zie } 3.3.68)$$

$$3.3.74 \quad \text{vâr}(\hat{\Pi}) = \hat{\Sigma} \otimes (Z'Z)^{-1} = \begin{bmatrix} s_{v1}^2(Z'Z)^{-1} & s_{v12}(Z'Z)^{-1} & \dots \\ s_{v12}(Z'Z)^{-1} & s_{v2}^2(Z'Z)^{-1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$3.3.75 \quad \text{waarin } \hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} s_{v1}^2 & s_{v12} & \dots \\ s_{v12} & s_{v2}^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \frac{1}{n-k} (\hat{V}'\hat{V}) \quad \text{met } \hat{V} = Y - Z\hat{\Pi}'$$

of bij verwaarlozing van  $k$ :  $\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} (\hat{V}'\hat{V})$ . OLS-schatting van de gereduceerde vorm is dus een bijzonder geval van 2SLS-schatting bij vervanging van  $W_j$  door  $Z$  en met behulp van 3.3.73 t/m 3.3.75 gemakkelijk uit te voeren. Matrix  $\text{vâr}(\hat{\Pi})$ , die van de orde  $(pq) \times (pq)$  is en waarvan de typische vorm resulteert door het z.g. Kronecker-product  $\otimes$  te nemen van  $p \times p$ -matrix  $\hat{\Sigma}$  en  $q \times q$ -matrix  $(Z'Z)^{-1}$  (in die volgorde), geeft in de diagonaal de sampling-variantie-schatters van de  $pq$  coëfficiënten in  $\Pi$ : eerst van de  $q$  coëfficiënten in de vergelijking  $j = 1$ , vervolgens van

de  $q$  coëfficiënten in de vergelijking  $j = 2$ , etc. Buiten de diagonaal vindt men de *sampling-covariantie-schatters*, zowel tussen coëfficiënten in eenzelfde vergelijking als tussen die in verschillende vergelijkingen. Nemen we de  $p$  rijen van  $\Pi$  op in één lange rij van de orde  $1 \times pq$

$$\pi = [\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \dots \ \pi_p] = [\pi_{11} \ \pi_{12} \ \dots \ \pi_{1q} \ \pi_{21} \ \pi_{22} \ \dots \ \pi_{2q} \ \pi_{31} \ \pi_{32} \ \dots \ \pi_{pq}]$$

dan is matrix  $\hat{v}\hat{a}r(\hat{\Pi})$  een schatter van

$$\text{asy var}(\hat{\Pi}) = \frac{1}{n} \text{plim}[n(\hat{\Pi} - \pi)'(\hat{\Pi} - \pi)]$$

Na berekening van de 2SLS-schatters 3.3.69, 3.3.70 en 3.3.71 voor alle vergelijkingen  $j$ ,  $j' = 1, \dots, p$  kan men deze opnemen in matrices  $\hat{A}$  en  $\hat{v}\hat{a}r(\hat{A})$ , resp. van de orde  $p \times (p + q)$  en  $p(p + q) \times p(p + q)$

$$3.3.76 \quad \hat{A} = [\hat{\Delta} \ \hat{\Gamma}]$$

$$3.3.77 \quad \hat{v}\hat{a}r(\hat{A}) = \begin{bmatrix} \hat{v}\hat{a}r(\hat{\alpha}_1) & \text{c}\hat{o}v(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2) & \dots \\ \text{c}\hat{o}v(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2) & \hat{v}\hat{a}r(\hat{\alpha}_2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

om vervolgens nieuwe schattingen  $\hat{\Pi}$ ,  $\hat{v}\hat{a}r(\hat{\Pi})$  en  $\hat{\Sigma}$  te berekenen volgens

$$3.3.78 \quad \hat{\Pi} = -\hat{\Delta}^{-1}\hat{\Gamma}$$

$$3.3.79 \quad \hat{v}\hat{a}r(\hat{\Pi}) = \hat{D}'\hat{v}\hat{a}r(\hat{A})\hat{D} \quad \text{met } \hat{D} = (\hat{\Delta}^{-1})' \otimes \hat{B} \quad \text{waarin}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{\Pi} \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{\Delta}^{-1}\hat{\Gamma} \\ I \end{bmatrix} \quad \text{en hierin } I \text{ van de orde } q \times q$$

$$3.3.80 \quad \hat{\Sigma} = \hat{\Delta}^{-1}\hat{\Sigma}(\hat{\Delta}^{-1})' \quad \text{met } \hat{\Sigma} \text{ volgens 3.3.72}$$

Onder de voorwaarde van een juiste specificatie van  $\Delta$  en  $\Gamma$  zijn de coëfficiënt-schatters volgens 3.3.78 in het algemeen nauwkeuriger dan rechtstreeks volgens 3.3.73. Formule 3.3.79 geeft de bijbehorende *sampling-variantie-schatters* in de diagonaal en werd althans in deze expliciete vorm voor het eerst afgeleid door Goldberger, Nagar and Odeh (54) in 1961 onder multi-normaliteit - assumptie IV (3.3.32) - als additionele



assumptie.

Samenvattend bestaat het totale schattingsproces uit de volgende stappen. Expliciet of impliciet (in 2SLS-schatters 3.3.69 t/m 3.3.72) wordt in feite begonnen met een voorlopige schatting van de gereduceerde vorm volgens 3.3.73 t/m 3.3.75. Deze schatting wordt LSNR (Least Squares No Restrictions) genoemd, omdat in het geheel geen restricties op  $\Pi$  worden gesteld, noch langs  $\Delta$  en  $\Gamma$  noch rechtstreeks op  $\Pi$ . Een expliciete LSNR-schatting is altijd aan te bevelen om eventuele autocorrelatie en multicollineariteit op te sporen en deze problemen te ondervangen, voordat de volgende stappen worden ondernomen. In de tweede stap worden via de 2SLS-schatters de schattingen 3.3.76 en 3.3.77 van de structurele vorm gebruikt om een nieuwe en in het algemeen nauwkeurigere schatting van de gereduceerde vorm te verkrijgen middels 3.3.78 t/m 3.3.80. In overeenstemming met 3.3.28 en 3.3.29 en zoals eerder voor het deterministische geval uiteengezet aan de hand van 3.3.9 en 3.3.10 wordt tenslotte de schatting  $[\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}]$  bepaald (waarin  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  en  $\hat{D}$  uiteraard andere matrices aanduiden dan in 3.3.76, 3.3.77 en 3.3.79):

$$3.3.81 \quad \hat{\Delta} = \begin{bmatrix} \hat{K} & 0 \\ -\hat{C} & I \end{bmatrix}, \quad \hat{\Gamma} = \begin{bmatrix} -\hat{L} & 0 & -\hat{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\hat{D} \end{bmatrix}$$

$$3.3.82 \quad \hat{\Pi} = -\hat{\Delta}^{-1}\hat{\Gamma} = \begin{bmatrix} \hat{A} & 0 & \hat{B} & 0 \\ \hat{C}\hat{A} & 0 & \hat{C}\hat{B} & \hat{D} \end{bmatrix} \quad \text{met } \hat{A} = \hat{A} + I$$

In feite komt de bepaling van  $[\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}]$  dus eenvoudig neer op splitting van structurele matrix  $[\hat{\Delta} \quad \hat{\Gamma}]$  en gereduceerde matrix  $\hat{\Pi} = -\hat{\Delta}^{-1}\hat{\Gamma}$  in deelmatrixes, zodat  $\hat{A} = \hat{A} - I$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  en  $\hat{D}$  te voorschijn komen. Indien  $[\hat{\Delta} \quad \hat{\Gamma}]$  en  $\hat{\Pi} = -\hat{\Delta}^{-1}\hat{\Gamma}$  niet de vereiste verdeling van 0-matrixes laten zien, zoals aangegeven in 3.3.81 en 3.3.82, kan altijd door herordening van variabelen en definiëring van nieuwe (pseudo-)variabelen een dergelijke structuur worden gecreëerd. De procedure daartoe is tussen 3.3.8 en 3.3.9 uiteengezet en wordt uiteraard het gemakkelijkst uitgevoerd al voorafgaand aan het identificatie- en schattingsproces bij de definiëring van structurele vorm  $\Delta \bar{y} + \Gamma \bar{z} = \bar{e}$  volgens 3.3.28. Het identificatie- en schattingsproces zelf wordt vereenvoudigd door alle 0-kolommen in  $\Gamma$  tijdens dit proces te elimineren, zodat het aantal gebruikte gepredetermineerde variabelen  $q$  in feite kleiner is dan het totale aantal  $n + m + 2r$

variabelen in gepredetermineerde vector  $\bar{z}$  (n lagged toestand-variabelen in  $x_0$ , m lagged output-variabelen in  $y_1$ , r lagged input-variabelen in  $u_0$  en r huidige input-variabelen in  $u_1$ ). In het bijzonder kunnen de m lagged output-variabelen in  $y_1$  altijd worden geëlimineerd. De output-variabelen in  $y_1$  worden juist gekenmerkt door het feit, dat geen  $\bar{y}$ -variabele van hun waarden op het vorige tijdstip afhangt. De  $y_1$ -variabelen spelen in het schattingsproces dan ook geen rol, tenzij men aan de hand van de geschatte waarden de hypothese van 0-waarden wil toetsen.

In appendix A is een computerprocedure in SPEAKEASY-statements opgenomen, waarmee voorde voorbeelden in hoofdstuk 4 de verschillende schattingen werden uitgevoerd. Onderdeel LSNR geeft als output o.a. PI, SF, SV en V, d.w.z.  $\hat{\Pi}$  (3.3.73), de bijbehorende matrix van standaardfouten of wortels uit de diagonaal-elementen van  $\hat{v}\hat{a}r(\hat{\Pi})$  (3.3.74),  $\hat{\Sigma}_V$  en  $\hat{V}$  (3.3.75). Onderdeel 2SLS/OLS (55) geeft ZE1, SF1, ZE2, SF2, ..., S en E, d.w.z. de schattingen  $\hat{z}_j$  (3.3.69) met bijbehorende standaardfouten of wortels uit de diagonaal-elementen van  $\hat{v}\hat{a}r(\hat{z}_j)$  (3.3.70),  $\hat{\Sigma}$  en  $\hat{E}$  (3.3.72). Onderdeel REDUCED FORM geeft o.a. DA, GA, PI, SV en V, d.w.z.  $\hat{A}$  en  $\hat{\Gamma}$  (3.3.76) en  $\hat{\Pi}$  (3.3.82) met de bijbehorende  $\hat{\Sigma}_V$  en  $\hat{V}$ . Ook berekent REDUCED FORM de matrix van standaardfouten SF bij  $\hat{P}\hat{I}$ , d.w.z. de wortels uit de diagonaal-elementen van  $\hat{v}\hat{a}r(\hat{\Pi})$  (3.3.79). Door vervanging van slechts één statement verkrijgt men met 2SLS/OLS de OLS-schattingen i.p.v. de 2SLS-schattingen.

Indien een block-recursieve structuur kan worden aangenomen met minimaal twee blocks, corresponderend met resp. de toestands-differentie en de uitleesvergelijking in destochastische versie van [A,B,C,D]

$$E\left(\begin{matrix} x_1 \\ x_0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x_0 \\ u_0 \end{matrix}\right) = K^{-1}Lx_0 + K^{-1}Mu_0 = \tilde{A}x_0 + Bu_0$$

$$E\left(\begin{matrix} y_1 \\ y_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x_1 \\ x_1 \end{matrix}, \begin{matrix} u_1 \\ u_1 \end{matrix}\right) = Cx_1 + Du_1$$

kunnen wat het eerste block betreft ook de m huidige output-variabelen in  $y_1$  en de r huidige input-variabelen in  $u_1$  worden geëlimineerd en wat het tweede block betreft de n lagged toestand-variabelen in  $x_0$  en de r lagged input-variabelen in  $u_0$ . Bij de afleiding van de stochastische versie werd een dergelijke block-recursieve structuur aangenomen. 3.3.78 en 3.3.79 voor resp. het eerste en het tweede block gaan over in

$$3.3.83 \quad \hat{\Pi}_{11} = -\hat{\Delta}_{11}^{-1} \hat{\Gamma}_{11} = [\hat{A} \quad \hat{B}]; \text{v\ddot{a}r}(\hat{\Pi}_{11}) = \text{v\ddot{a}r}([\hat{A} \quad \hat{B}])$$

$$3.3.84 \quad \hat{\Pi}_{22} = -\hat{\Gamma}_{22} = [\hat{C} \quad \hat{D}]; \text{v\ddot{a}r}(\hat{\Pi}_{22}) = \text{v\ddot{a}r}([\hat{C} \quad \hat{D}])$$

waarbij de variantie-schatters in  $\text{v\ddot{a}r}([\hat{A} \quad \hat{B}])$  voor de coëfficiënten in  $[\hat{A} \quad \hat{B}]$  weer rijgewijs zijn geordend in de diagonaal van  $\text{v\ddot{a}r}([\hat{A} \quad \hat{B}])$  en de covariantie-schatters op de betrokken plaatsen buiten de diagonaal; het verband tussen  $[\hat{C} \quad \hat{D}]$  en  $\text{v\ddot{a}r}([\hat{C} \quad \hat{D}])$  is analoog.

De vraag is natuurlijk, of een dergelijke block-recursieve structuur terecht wordt aangenomen. Vereist is

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

en daaraan is in ieder geval voldaan, indien de uitlees-vergelijkingen voor de afzonderlijke output-variabelen in  $\underline{y}$  alle exakt zijn (bijv. definities in termen van toestand-variabelen in  $\underline{x}$ )

$$\underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u} \quad (\text{bijv. } \underline{y} = C\underline{x})$$

zodat  $e_{\underline{y}} = 0$  en

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In de gevallen, dat  $e_{\underline{y}} \neq 0$ , verdient het aanbeveling eerst  $\hat{\Sigma}$  (3.3.72) voor de totale structuur te berekenen en na te gaan, of de waarden in  $\hat{\Sigma}_{12}$  inderdaad rond 0 schommelen en kleiner zijn dan de waarden in  $\hat{\Sigma}_{11}$  en  $\hat{\Sigma}_{22}$ . Die variabelen in  $\underline{y}$ , die voor  $\Sigma_{12} \neq 0$  verantwoordelijk zijn, kan men aan  $\underline{x}$  toevoegen en daarvoor in de plaats gedefinieerde variabelen in  $\underline{y}$  opnemen. De toegevoegde variabelen in de nieuwe  $\underline{x}$  waren eerder middels  $C$  afhankelijk gesteld van bepaalde  $\underline{x}$ -variabelen; zij worden in de nieuwe structuur afhankelijk gesteld van die  $\underline{x}$ -variabelen, waarvan die bepaalde  $\underline{x}$ -variabelen middels  $A$  afhankelijk waren gesteld. Indien de toegevoegde variabelen in de nieuwe  $\underline{x}$  bovendien middels  $D$  afhankelijk waren gesteld van bepaalde  $\underline{u}$ -variabelen, worden de laatste in de nieuwe structuur als

tijd-anticiperende inputs toegevoegd aan  $u_0$ . In het laatste geval bevatten A en B in de nieuwe structuur niet alleen meer rijen, maar bevat B bovendien meer kolommen (de betrokken kolommen in de nieuwe D worden a priori op 0 gesteld). De nieuwe structuur is block-recursief. Een block-recursieve structuur van minimaal twee deelstructuren, waarvoor resp. een toestand-differentie-vergelijking  $E(x_1|x_0, u) = \tilde{A}x_0 + Bu_0$  en een uitlees-vergelijking  $E(y_1|x_1, u) = Cx_1 + Du_1$  afleidbaar zijn, kan dus altijd worden aangenomen dan wel geconstrueerd.

De matrices  $\Sigma_{kk}$  van de block-recursieve deelstructuren kunnen al dan niet diagonaal zijn. Inspectie van 2SLS-schatting  $\hat{\Sigma}_{kk}$  volgens 3.3.72 geeft daarvoor aanwijzingen door na te gaan, of de elementen buiten de diagonaal inderdaad rond 0 schommelen en kleiner zijn dan die op de diagonaal. Een diagonale  $\Sigma_{kk}$ , gecombineerd met een driehoekige  $\Delta_{kk}$ , impliceert een recursieve deelstructuur, waarvoor OLS toepasbaar is. OLS is vanzelf toepasbaar voor de laatste deelstructuur (corresponderend met de uitleesvergelijking), omdat daar de structurele vorm vanwege  $\Delta_{kk} = I$  gelijk is aan de gereduceerde vorm, d.w.z.  $\Pi_{kk} = -\Gamma_{kk}$ , en als gevolg daarvan 2SLS overgaat in OLS. Indien toepasbaar verdient OLS de voorkeur. Onder multi-normaliteit - IV (3.3.32) - zijn de bedoelde OLS-schaters  $[\hat{\Delta}_{kk} \hat{\Gamma}_{kk}]$  en  $\hat{\Pi}_{kk} = -\hat{\Gamma}_{kk}$  maximum-likelihood en bezitten dus ook de optimale eigenschappen van maximum-likelihood schatters (56). Voor niet-recursieve deelstructuren (evenals bij de eerste schatting van de totale structuur) is 2SLS toepasbaar, maar geeft 3SLS betere (nauwkeurigere) schattingen, indien  $\Sigma_{kk}$  niet-diagonaal is en tegelijk minstens één vergelijking overgeïdentificeerd. Toepassing van 3SLS (of een andere full-information procedure) in de plaats van OLS of 2SLS is bovendien noodzakelijk bij lineaire restricties op coëfficiënten in verschillende vergelijkingen tegelijk of lineaire restricties, die met bepaalde waarschijnlijkheidsgrenzen worden gesteld (onzekere a priori informatie).

De derde stap, die 3SLS aan 2SLS toevoegt, luidt

$$3.3.85 \quad \hat{\zeta}' = [W'(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes \tilde{Z})W]^{-1} W'(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes Z)y$$

met variantie-schatster

$$3.3.86 \quad \widehat{\text{var}}(\hat{\zeta}) = [W'(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes \tilde{Z})W]^{-1}$$

waarin  $\hat{\Sigma}$  de 2SLS-schatter (3.3.72) is en waarin

$$y = [y'_1 \quad y'_2 \quad \dots]' \text{ en}$$

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & 0 & \dots \\ 0 & W_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

worden samengesteld uit  $y_j$  en  $W_j$  in 2SLS-formule 3.3.69 voor  $j = 1, 2, \dots$ , terwijl  $\bar{Z} = Z(Z'Z)^{-1}Z'$ . Rij-vector  $\zeta$  bevat alle coëfficiënten van alle betrokken vergelijkingen, beginnend met de eerste coëfficiënt van de eerste vergelijking en eindigend met de laatste coëfficiënt van de laatste vergelijking. Stel nu, dat voor bijv.  $\zeta = [\delta_{12} \quad \gamma_{12} \quad \delta_{21} \quad \gamma_{21}]$  de volgende lineaire restricties zijn gesteld:

- 1)  $\delta_{12}$  ligt bijna zeker tussen .65 en .85, te vertalen in: de puntschatting van  $\delta_{12}$  is .75 met standaardfout .05,
- 2)  $\delta_{21}$  is bijna zeker gelijk aan  $\delta_{12}$ : de puntschatting van  $\delta_{21} - \delta_{12}$  is 0 met standaardfout .01,
- 3)  $\gamma_{21}$  is bijna zeker gelijk aan driemaal  $\delta_{21}$ : de puntschatting van  $\gamma_{21} - 3\delta_{21}$  is 0 met standaardfout .01,

welke a priori informatie wordt samengevat in

$$3.3.87 \quad r' = \phi' \zeta' + v'_0, \quad E(v'_0) = 0, \quad E(v'_0 v_0) = V_0$$

In het voorbeeld geldt

$$r' = \begin{bmatrix} .75 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \phi' \zeta' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{12} \\ \gamma_{12} \\ \delta_{21} \\ \gamma_{21} \end{bmatrix}, \quad v_0 = \begin{bmatrix} -.0025 & -.0003 & 0 \\ -.0003 & .0001 & 0 \\ 0 & 0 & .0001 \end{bmatrix}$$

$V_0$  voorziet tevens in een a priori correlatie van  $-.0003/\sqrt{.0025 \times .0001} = -.60$  tussen de a priori schattingen van  $\delta_{12}$  en  $\delta_{21} - \delta_{12}$ : een onderschatting van  $\delta_{12}$  wordt dus geacht samen te hangen met een overschatting van  $\delta_{21} - \delta_{12}$ . Rekening houdend met 3.3.87 worden de 3SLS-schatters

$$3.3.88 \quad \hat{\zeta}' = [W'(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes \tilde{Z})W + \phi V_0^{-1} \phi']^{-1} [W'(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes \tilde{Z})y + \phi V_0^{-1} r']$$

$$3.3.89 \quad \widehat{\text{var}}(\hat{\zeta}) = [W'(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes \tilde{Z})W + \phi V_0^{-1} \phi']^{-1}$$

Exakte lineaire restricties van de vorm

$$3.3.90 \quad R' = \phi' \zeta'$$

leiden als volgt tot verbeterde schattingen  $\hat{\zeta}'_*$  en  $\widehat{\text{var}}(\hat{\zeta}_*)$

$$3.3.91 \quad \hat{\zeta}'_* = \hat{\zeta}' + C\phi(\phi'C\phi)^{-1}(R' - \phi'\hat{\zeta}') \quad \text{met } C = \widehat{\text{var}}(\hat{\zeta})$$

$$3.3.92 \quad \widehat{\text{var}}(\hat{\zeta}_*) = C - C\phi(\phi'C\phi)^{-1}\phi'C$$

3SLS (3.3.85) geeft geen betere schattingen dan 2SLS en gaat in feite over in 2SLS, indien  $\Sigma(\hat{\Sigma})$  diagonaal is en/of alle vergelijkingen juist-geïdentificeerd zijn. Verder vereist de 3SLS-schatter een niet-singuliere  $\Sigma(\hat{\Sigma})$ , omdat gebruik wordt gemaakt van inverse  $\Sigma^{-1}(\hat{\Sigma}^{-1})$ . Dit laatste is de reden, dat geen coëfficiënten van exakte vergelijkingen in  $\zeta$  opgenomen mogen worden. Exakte vergelijkingen (bijv. definities) worden m.a.w. buiten het schattingsproces gehouden. Ook als aan deze voorwaarden wordt voldaan, blijft de winst van 3SLS t.o.v. 2SLS in het algemeen nogal beperkt, tenzij restricties over verschillende vergelijkingen worden opgenomen in formules 3.3.88 en 3.3.91.

### De LISREL-benadering

Een moeilijkheid in sociaal-wetenschappelijk onderzoek is, dat de geobserveerde variabelen vaak meetfouten bevatten, d.w.z. gedeeltelijk onbetrouwbaar zijn. Het gebruik van gepredetermineerde variabelen met meetfouten in de tot nu toe besproken schattingsprocedures leidt tot onzuivere en inconsistente schatters (58). De z.g. LISREL (Linear Structural Relationships)-benadering van Jöreskog en Sörbom biedt in principe

een oplossing voor het gebruik van variabelen, die gedeeltelijk onbetrouwbaar en eventueel invalide zijn. De modelspecificatie in deze benadering omvat in feite drie modellen: een tweetal factor-analytische modellen, waarin middels 1) latente gepredetermineerde variabelen (gepredetermineerde factoren) en 2) latente endogene variabelen (endogene factoren) plaats wordt ingeruimd voor onbetrouwbaarheid en invaliditeit van de betrokken geobserveerde variabelen, en 3) een lineair structureel model, gedefinieerd in termen van de latente variabelen. Duiden we de geobserveerde en latente gepredetermineerde vector aan met resp.  $w$  en  $\omega$  en de geobserveerde en latente endogene vector met resp.  $y$  en  $\eta$ , dan kunnen de drie modellen als volgt worden geformuleerd

$$\begin{aligned}
 3.3.93 \quad w &= \Lambda_w \omega + e_w \quad (\text{gepredetermineerd factor-analytisch model}) \\
 \Delta \eta + \Gamma w &= e \quad (\text{latent structureel model}) \\
 y &= \Lambda_y \eta + e_y \quad (\text{endogeen factor-analytisch model})
 \end{aligned}$$

De beide factor-analytische modellen worden ook in één enkel model samengenomen

$$\underline{y} = \Lambda \underline{\eta} + e_y \quad \text{waarin } \underline{y} = \begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_w & 0 \\ 0 & \Lambda_y \end{bmatrix}, \underline{\eta} = \begin{bmatrix} \omega \\ \eta \end{bmatrix}, e_y = \begin{bmatrix} e_w \\ e_y \end{bmatrix}$$

In de handleiding van de recente versie III van het LISREL-computerprogramma, waarmee de schattingen kunnen worden uitgevoerd, stellen Jöreskog en Sörbom: "The LISREL model consists of two parts: the measurement model and the structural equation model. The measurement model specifies how the latent variables or hypothetical constructs are measured in terms of the observed variables and is used to describe the measurement properties (validities and reliabilities) of the observed variables. The structural equation model specifies the causal effects and the amount of unexplained variance" (59). Van belang is, dat de geobserveerde  $w$ - en  $y$ -variabelen worden opgevat als deviatie-skores van feitelijk gemeten  $w'$ - en  $y'$ -variabelen, d.w.z.  $w = w' - E(w')$  en  $y = y' - E(y')$  zodat  $E(w) = 0$  en  $E(y) = 0$ , en dat ook van de latente  $\omega$ - en  $\eta$ -variabelen de oorsprong wordt gekozen volgens  $E(\omega) = 0$  en  $E(\eta) = 0$ . Samenvattend:  $E(y) = E(\underline{\eta}) = 0$

M.b.t. het meetmodel wordt door Jöreskog en Sörbom de assumptie  $E(e_{\underline{y}}\eta') = 0$  gesteld en m.b.t. het structureel model de assumptie  $E(e\omega') = 0$ . De eerste assumptie valt uiteen in  $E(e_{\underline{w}}\omega') = E(e_{\underline{y}}\eta') = E(e_{\underline{w}}\eta') = E(e_{\underline{y}}e') = 0$ , d.w.z. alle meetfouten moeten ongecorrleerd zijn met alle latente variabelen. In samenhang met structurele vergelijking  $\Delta\eta + \Gamma\omega = e$  volgt hieruit  $E(e_{\underline{w}}e') = E(e_{\underline{y}}e') = 0$  of  $E(e_{\underline{y}}e') = 0$ , d.w.z. alle meetfouten moeten ook ongecorrleerd zijn met alle structurele error-komponenten. Het laatste impliceert voor het totale als volgt samengevat LISREL-model

$$\bar{\Delta}\bar{y} + \bar{\Gamma}\bar{\omega} = \bar{e} \quad \text{waarin } \bar{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ \Delta_{\underline{y}} & I \end{bmatrix}, \bar{y} = \begin{bmatrix} \eta \\ \underline{y} \end{bmatrix}, \bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma \\ \Gamma_{\underline{y}} \end{bmatrix}, \bar{e} = \begin{bmatrix} e \\ e_{\underline{y}} \end{bmatrix} \quad \text{en}$$

$$\text{hierin } \Delta_{\underline{y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\Lambda_{\underline{y}} \end{bmatrix}, \underline{y} = \begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix}, \Gamma_{\underline{y}} = \begin{bmatrix} -\Lambda_w \\ 0 \end{bmatrix}, e_{\underline{y}} = \begin{bmatrix} e_w \\ e_y \end{bmatrix}$$

een block-recursieve structuur vanwege block-driehoekige  $\bar{\Delta}$  en block-diagonale  $\bar{\Sigma}$

$$\bar{\Sigma} = E(\bar{e}\bar{e}') = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Theta \end{bmatrix} \quad \text{waarin } \Sigma = E(ee'), \Theta = E(e_{\underline{y}}e_{\underline{y}}')$$

M.b.t. ieder van beide block-recursieve deelstructuren stellen we assumptie I:  $E(e|\omega) = 0$  en  $E(e_{\underline{y}}|\eta) = 0$ , waaruit niet slechts de door Jöreskog en Sörbom gestelde assumpties  $E(e\omega') = 0$  en  $E(e_{\underline{y}}\eta') = 0$  volgen maar tevens voor de vergelijkingen in 3.3.93 de stochastische specificaties

$$E(\eta|\omega) = -\Delta^{-1}\Gamma\omega = \Pi\omega$$

$$E(w|\omega) = \Lambda_w\omega$$

$$E(y|\eta) = \Lambda_y\eta$$

waarin de eerste regel de gereduceerde vorm van het latent structureel model betreft.

De LISREL-benadering blijkt zo toepasbaar om de parameter-waarden te schatten van een stochastisch differentie-model [A,B,C,D] met latente input-vector  $\tilde{u}_0$  bij geobserveerde input-vector  $u_0$  en latente toestandsvector  $\tilde{x}_0$  en  $\tilde{x}_1$  bij (geobserveerde) output-vectoren  $y_0$  en  $y_1$ , indien 1) wordt gespecificeerd  $D = 0$ , 2) voor de endogene variabelen in  $y_1$  een



factor-analytisch model wordt gedefinieerd met factor-matrix  $\Lambda_y = C$ , 3) voor de gepredetermineerde variabelen in  $y_0$  en  $y_1$  een additioneel factor-analytisch model met factor-matrix  $\Lambda_w$ , waar matrix C deel van uitmaakt, 4) de geobserveerde variabelen worden opgenomen in de vorm van deviatie-scores:

$$3.3.94 \quad \begin{bmatrix} y_0 - E(y_0) \\ u_0 - E(u_0) \end{bmatrix} = \Lambda_w \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{u}_0 \end{bmatrix} + e_w \quad \text{met } \Lambda_w = \begin{bmatrix} C & O \\ O & F \end{bmatrix}$$

$$\Delta \tilde{x}_1 + \Gamma \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{u}_0 \end{bmatrix} = e \quad \text{met } \left\{ \begin{array}{l} \Delta = K \\ \Gamma = [-L \quad -M] \end{array} \right\} \rightarrow \Pi = -\Delta^{-1}\Gamma = \begin{bmatrix} K^{-1}L & K^{-1}M \\ \tilde{A} & B \end{bmatrix}$$

$$y_1 - E(y_1) = \Lambda_y \tilde{x}_1 + e_y \quad \text{met } \Lambda_y = C$$

Vanwege het feit, dat de lagged toestand-variabelen in  $\tilde{x}_0$  hier evenals de current-endogene toestand-variabelen in  $\tilde{x}_1$  latent zijn en dus ongeobserveerd, spelen de geobserveerde lagged output-variabelen in  $y_0$  een niet minder essentiële rol dan de geobserveerde currente output-variabelen in  $y_1$ . Bij de schatting kunnen de  $y_0$ -variabelen evenmin als de  $y_1$ -variabelen worden geëlimineerd. Met het oog op het tijdsafhankelijke karakter van matrix C in [A,B,C,D] moet C bovendien in de beide factor-analytische modellen als gelijk worden opgevat. Aangezien het LISREL-programma gelijkheidsrestricties toelaat (bovendien vaste waarden, maar geen andere lineaire of niet-lineaire restricties) kan met die gelijkheid bij de schatting rekening worden gehouden.

Deze factor-analytische benadering, waarin onbekende coëfficiënten bij onbekende (latente) toestand-variabelen in samenhang met de rest van het LISREL-model middels geobserveerde waarden moeten worden geschat, doet denken aan het realisatie-probleem zoals besproken in paragraaf 1 van dit hoofdstuk. Ook hier ging het om de bepaling van een onbekend model voor onbekende (niet-geobserveerde) toestand-variabelen op basis van geobserveerde input- en output-waarden. De relaties tussen beide zijn tot nu toe onvoldoende onderzocht. Een verschil is in ieder geval, dat de factor-analytische benadering in tegenstelling tot de besproken deterministische benadering van het realisatie-probleem stochastisch van aard is. Verder wordt in 3.3.94 slechts rekening gehouden met output- en input-waarden op twee verschillende tijdstippen, terwijl de realisatie-

theorie in principe het hele verleden in de beschouwing betreft. Wellicht is het mogelijk om beide beter op elkaar af te stemmen, zodat de realisatie-theorie via factor-analyse gemakkelijker toepassing zou kunnen vinden in het sociaal-wetenschappelijk onderzoek. Met name zouden de relaties met de stochastische realisatie-theorie en het Kalman-filter nader onderzocht moeten worden; zie bijv. Willems, J.C. (1978).

Onder assumptie I volgt uit 3.3.94 stochastisch differentie-model  $[A, B, C, D]$  met  $D = 0$ . In de oorspronkelijke notatie met tijds aanduidingen  $t$  en  $t + 1$ :

$$3.3.95 \quad E(\tilde{x}(t+1) | \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) = A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) \\ E(y(t) | \tilde{x}(t)) = E(y(t)) + C\tilde{x}(t)$$

Het gebruik van deviatie-skores heeft tot gevolg, dat in de uitlees-vergelijking van 3.3.95 de vector  $E(y(t))$  moet worden toegevoegd, die uiteraard bij het doen van predicties niet mag worden vergeten. Deze vector  $E(y(t))$  wordt hier opgevat als tijd-variant. In het algemeen is het immers onrealistisch om aan te nemen, dat het gemiddelde (lees: verwachte) niveau van de output-variabelen over bijv. een groep personen constant blijft over de tijd. De toepasbaarheid van het LISREL-programma zou overigens sterk worden vergroot, indien de verandering van  $E(y(t))$  over de tijd zelf een verklaring zou krijgen in het model, waarbij de assumptie  $E(w) = E(y) = E(u) = E(\eta) = 0$  zou moeten vervallen. Een aanzet daartoe is gegeven in het eveneens door Jöreskog en Sörbom ontwikkelde programma COFAMM (Confirmatory Factor Analysis with Model Modification) (60). Daarmee kunnen verschillen in gemiddelde latente niveaus (gemiddelde factorskores) in verschillende groepen worden geschat. Onzeker is echter nog volgens Jöreskog (persoonlijke mededeling), of de assumpties van een COFAMM-model toelaten, dat verschillende groepen worden vervangen door eenzelfde groep op verschillende tijdstippen. Een COFAMM-model mist bovendien de structurele vergelijking, die met het oog op een model  $[A, B, C, D]$  essentieel is. Het probleem van vector  $E(y(t))$  en schatting  $\overline{y(t)}$  van deze vector om predicties  $y(t)$  uit te voeren voor een bepaalde onderzoekseenheid  $i$  verdwijnt overigens, indien men slechts geïnteresseerd is in  $i$ 's verwachte afwijking  $E[(y(t) - E(y(t))) | \tilde{x}(t)]$  t.o.v. gemiddeld groepsniveau  $E(y(t))$  en niet in zijn verwachte niveau  $E(y(t) | \tilde{x}(t))$  zelf. Zo zijn ouders vaak meer geïnteresseerd in relatieve

predictie, d.w.z. of en hoeveel de leerprestaties van hun kinderen boven het gemiddelde zullen liggen, dan in het absolute niveau van die prestaties.

Bij het doen van predicties op basis van 3.3.95 aan de hand van schattingen  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  en  $\hat{C}$  van  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  en  $\tilde{C}$  zijn behalve additionele schatting  $y(\bar{t})$  van het verwachte niveau  $E(y(t))$  over de totale onderzoeksgroep op toekomstig tijdstip  $t$  tevens schattingen van de latente niveaus (factor-scores)  $\tilde{x}(t_0)$  en  $\tilde{u}(t_0)$  voor onderzoekseenheid  $i$  op begintijdstip  $t_0$  vereist. Ook indien het doel slechts relatieve predictie is, zijn deze schattingen noodzakelijk. Mulaik (61) suggereert Bartlett's methode

$$3.3.96 \quad \hat{\omega}_i = (\Lambda'_w \Theta_w^{-1} \Lambda_w)^{-1} \Lambda'_w \Theta_w^{-1} w_i$$

waarin vector  $w_i$  staat voor de geobserveerde (gepredetermineerde) vector van  $i$  (op tijdstip  $t_0$ ) en  $\Theta_w$  voor de (diagonale) matrix van  $e_w$ -varian-ties. De Bartlett-schatter  $\hat{\omega}_i$  voor de latente niveaus van de  $i$  is maximum-likelihood voor bekende  $\Lambda_w$  en  $\Theta_w$  en multi-normaal verdeelde  $w_i$ . In de praktijk zijn  $\Lambda_w$  en  $\Theta_w$  uiteraard niet bekend, maar worden zij vervan-gen door (LISREL-)schattingen  $\hat{\Lambda}_w$  en  $\hat{\Theta}_w$ .

Terwijl zoals gebruikelijk in factor-analyse de oorsprong van de latente variabelen wordt vastgesteld door  $E(\omega) = 0$  en  $E(\eta) = 0$ , is de keuze van de meet-eenheid vrij in de LISREL-benadering, zodat de latente variabelen niet per se worden gemeten als standaard-scores, waarvoor  $\sigma_{\omega_j} = 1$  en  $\sigma_{\eta_j} = 1$ , maar kunnen worden gemeten als deviatie-scores in een willekeurige meet-eenheid per latente variabele. Als meet-eenheid van zo'n latente variabele kiest Jöreskog meestal die van een der betrokken geobserveerde variabelen door in de factor-matrix de betrokken coëffici-ent a priori op 1 te stellen (62). Middels andere waarden dan 1 kan men echter ook andere meet-eenheden met ieder een eigen  $\sigma_{\omega_j}$  en  $\sigma_{\eta_j}$  kiezen.

Altijd kunnen de gestandaardiseerde coëfficiënten, d.w.z. de coëffi-ciënten die zouden resulteren na standaardisatie van de  $\omega$ - en  $\eta$ -variabe-len, worden berekend evenals dat buiten het LISREL-kader mogelijk is m.b.t. een structureel model  $\Delta y + \Gamma w = e$  in geobserveerde  $y$ - en  $w$ -varia-belen en bijv. in het kader van pad-analyse gebruikelijk (63):

$$3.3.97 \quad \Delta_{st} = (SD_y)^{-1} \Delta (SD_y); \quad \Gamma_{st} = (SD_y)^{-1} \Gamma (SD_w); \quad \Pi_{st} = (SD_y)^{-1} \Pi (SD_w)$$

De diagonale matrices  $SD_y$  en  $SD_w$  bevatten op de diagonaal de standaard-deviaties  $\sigma_{y_j}$  en  $\sigma_{w_j}$  en geven middels 3.3.97 de matrices  $\Delta_{st}$ ,  $\Gamma_{st}$  en  $\Pi_{st}$  met gestandaardiseerde coëfficiënten bij de matrices  $\Delta$ ,  $\Gamma$  en  $\Pi$  met niet-gestandaardiseerde coëfficiënten. De computer-procedure in appendix A berekent schattingen  $\hat{\Delta}_{st}$ ,  $\hat{\Gamma}_{st}$  en  $\hat{\Pi}_{st}$  onder de namen DASTA, GASTA en PISTA. De moeilijkheid in het kader van een LISREL-model  $\Delta\eta + \Gamma\omega = e$  is, dat de  $\omega$ - en  $\eta$ -variabelen latent zijn en dus ook hun standaard-deviaties in  $SD_\eta$  en  $SD_\omega$ . De standaard-deviaties volgen uit de latente variantie-covariantie-matrices  $\Phi = E(\omega\omega')$  en  $\Sigma = E(ee')$ , waarvoor het LISREL-programma schattingen geeft. Voor de variantie-covariantie-matrix  $E(\eta\eta')$  geldt

$$E(\eta\eta') = E[(-\Delta^{-1}\Gamma\omega + \Delta^{-1}e)(-\Delta^{-1}\Gamma\omega + \Delta^{-1}e)'] = \\ E[(\Pi\omega + \Delta^{-1}e)(\omega'\Pi' + e'(\Delta^{-1})')] ]$$

en vervolgens onder assumptie  $E(e\omega') = 0$ , d.w.z. geen correlatie tussen structurele error-komponenten en latente gepredetermineerde variabelen

$$3.3.98 \quad E(\eta\eta') = \Pi\Phi\Pi' + \Delta^{-1}\Sigma(\Delta^{-1})', \quad \text{met } \Phi = E(\omega\omega')$$

zodat

$$3.3.99 \quad SD_\eta = \sqrt{\text{diag}[\Pi\Phi\Pi' + \Delta^{-1}\Sigma(\Delta^{-1})']}; \quad SD_\omega = \sqrt{\text{diag } \Phi};$$

$$\Delta_{st} = (SD_\eta)^{-1}\Delta(SD_\eta); \quad \Gamma_{st} = (SD_\eta)^{-1}\Gamma(SD_\omega); \quad \Pi_{st} = (SD_\eta)^{-1}\Pi(SD_\omega)$$

Indien gewenst berekent het LISREL-programma de schattingen  $\hat{\Delta}_{st}$ ,  $\hat{\Gamma}_{st}$  en  $\hat{\Pi}_{st}$ . Gestandaardiseerde coëfficiënten maken het mogelijk effecten van verschillende variabelen met elkaar te vergelijken binnen eenzelfde onderzoekspopulatie en vormen op die manier een nuttige aanvulling op de niet-gestandaardiseerde coëfficiënten. Aangezien standaard-deviaties niet gelijk hoeven zijn binnen verschillende populaties is men overigens bij het vergelijken van de effecten van dezelfde variabelen binnen verschillende populaties aangewezen op de niet-gestandaardiseerde coëfficiënten zoals door Blalock bij herhaling werd benadrukt (64).

Behalve latente variabelen kan men in de structurele vergelijking van een LISREL-model ook geobserveerde variabelen opnemen. Latente variabelen zal men immers alleen willen definiëren voor onbetrouwbare en/of invalide geobserveerde variabelen. De procedure voor opname van geobserveerde variabelen in de structurele vergelijking kan het best worden verduidelijkt aan de hand van het extreme geval, dat uitsluitend geobserveerde variabelen worden opgenomen. In dat geval wordt gespecificeerd  $\Lambda_w = \Lambda_y = I$  en  $e_w = e_y = 0$ , gaat het LISREL-model over in een konventioneel structureel model  $\Delta y + \Gamma w = e$  voor de geobserveerde  $y$  en  $w$  zelf en wordt de maximum-likelihood schattingsprocedure van het LISREL-programma equivalent met de procedure, die in de econometrie bekend staat als FIML (65). Uiteraard kunnen de specificaties  $\Lambda_w = \Lambda_y = I$  en  $e_w = e_y = 0$  ook gedeeltelijk worden doorgevoerd.

In een LISREL-model wordt onderscheid gemaakt tussen twee soorten fouten (error-komponenten): meet-fouten  $e_w$  en  $e_y$  met bijbehorende variantie-covariantie-matrices  $\Theta_w$  en  $\Theta_y$  en structurele fouten in de wijze waarop de latente variabelen aan elkaar zijn gerelateerd met bijbehorende variantie-covariantie-matrix  $\Sigma$ . Een belangrijk voordeel van de LISREL-benadering is, dat deze totaal verschillende soorten fouten niet alleen theoretisch van elkaar worden onderscheiden, maar dat in principe ook de mogelijkheid bestaat beide afzonderlijk te schatten. Bovendien laat de LISREL-benadering geobserveerde variabelen toe, die alleen meet-fouten vertonen en in hun latente componenten exakt, d.w.z. zonder fouten  $e$  aan elkaar zijn gerelateerd. Eenvoudige versies van dergelijke modellen worden o.a. door Kendall and Stuart (66) besproken. Wellicht, omdat in een konventioneel structureel model meet-fouten noodgedwongen in de  $e$  van de structurele vergelijking  $\Delta y + \Gamma w = e$  moeten worden opgenomen, is de toepasbaarheid of benaderingswijze toepasbaarheid van modellen met  $e = 0$  en dus  $\Sigma = 0$  nauwelijks onderzocht in de sociale wetenschap. In een LISREL-model kan echter gelijktijdig worden gespecificeerd  $\Theta_y \neq 0$  en  $\Theta_w \neq 0$  en is er dus geen principieel bezwaar tegen om te specificeren  $\Sigma = 0$  of om bepaalde diagonaal-elementen en bijbehorende rijen en kolommen van  $\Sigma$  op 0 te stellen. De plausibiliteit daarvan kan worden beoordeeld aan de hand van een eerste schatting zonder 0-restricties in  $\Sigma$  door na te gaan, of de betrokken elementen van  $\hat{\Sigma}$  inderdaad verwaarloosbaar klein zijn.

Het LISREL-programma geeft bovendien een maat voor "goodness of fit" (hoe beter de "fit", hoe kleiner de waarde), waarvan de waarde bij nieuwe schattingen met meer restricties (bijv. 0-restricties op elementen in  $\Sigma$ ) in het algemeen zal toenemen. De restricties van een plausibel model vereisen een beperkte toename. Voor onafhankelijke en multi-normaal verdeelde geobserveerde waarden  $\begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix}$  kan de toename in grote steekproeven worden getoetst als  $\chi^2$  met een aantal vrijheidsgraden, dat gelijk is aan het verschil in de aantallen vrijheidsgraden van de afzonderlijke "goodness of fit"-waarden, die bij de toename zijn betrokken. Naar het oordeel van Jöreskog is deze  $\chi^2$ -toets voor de toename anders dan die voor afzonderlijke waarden robuust tegen afwijkingen van multi-normaliteit (persoonlijke mededeling). Aanwijzingen, welke restricties voor een gebrekkige "fit" (hoge toename) verantwoordelijk zijn, verkrijgt men uit hoge waarden op de betrokken plaatsen in de "First Order Derivatives", die de nieuwste versie III van het LISREL-programma volgend op de "Maximum Likelihood Solution" voor alle elementen in alle parameter-matrices geeft.

Terwijl Kendall and Stuart in hun modellen slechts één geobserveerde variabele per latente variabele toelaten (en omgekeerd) en zich evenals de traditionele factor-analyse beperken tot diagonale matrices  $\Theta_w$  en  $\Theta_y$  (meet-fouten onderling ongecorrleerd), zijn in LISREL-III in principe ook niet-diagonale matrices  $\Theta_w$  en  $\Theta_y$  toelaatbaar en was al in LISREL-II de koppeling van het aantal geobserveerde variabelen aan het aantal latente variabelen vervallen. Behalve de essentiële assumpties  $E(e\omega') = 0$  en  $E(e_w\omega') = E(e_y\eta') = E(e_w\eta') = E(e_y\omega') = 0$  (alle meet-fouten ongecorrleerd met alle latente variabelen) handhaaft LISREL-III tevens  $E(e_y e_w') = 0$  (endogene meet-fouten ongecorrleerd met gepredetermineerde meet-fouten). Deze laatste assumptie is niet erg plausibel, indien onder de gepredetermineerde variabelen lagged-endogene variabelen voorkomen. Jöreskog en Sörbom onderkennen dit probleem in een publikatie over de analyse van longitudinale data (67) en stellen de volgende herformulering voor van het oorspronkelijke model 3.3.93 om voor  $\Theta_{y,w} = E(e_y e_w') \neq 0$  plaats in te ruimen

$$3.3.100 \quad \underline{y} = \Lambda \underline{\eta} + \underline{e}_y \quad \text{waarin } \underline{y} = \begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_w & 0 \\ 0 & \Lambda_y \end{bmatrix}, \underline{\eta} = \begin{bmatrix} \omega \\ \eta \end{bmatrix}, \underline{e}_y = \begin{bmatrix} e_w \\ e_y \end{bmatrix}$$

$$\text{terwijl } \Theta = E(\underline{e}_y \underline{e}_y') = \begin{bmatrix} \Theta_w & \Theta'_{y,w} \\ \Theta_{y,w} & \Theta_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Delta} \underline{\eta} = \underline{e} \quad \text{waarin } \underline{\Delta} = \begin{bmatrix} \Gamma & 0 \\ \Gamma & \Delta \end{bmatrix}, \underline{e} = \begin{bmatrix} \omega \\ e \end{bmatrix}$$

$$\text{terwijl } \underline{\Sigma} = E(\underline{e} \underline{e}') = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \Sigma \end{bmatrix}$$

In feite vat de herformulering het oorspronkelijke model samen in een enkelvoudig factor-analytisch model met één factor-matrix  $\Lambda$ , één geobserveerde vector  $\underline{y}$  en één vector  $\underline{\eta}$  van latente variabelen, die moeten voldoen aan restricties zoals gespecificeerd in matrix  $\underline{\Delta}$ . Het LISREL-programma kent een optie voor een dergelijk speciaal model, zodat schattingen van de parameter-waarden in  $\Lambda$ ,  $\Theta$ ,  $\underline{\Delta}$  en  $\underline{\Sigma}$  verkregen kunnen worden met inbegrip van die in deel-matrix  $\Theta_{y,w}$  van  $\Theta$ . Aan assumptie  $E(e\omega') = 0$  wordt voldaan door in matrix  $\underline{\Sigma}$  op de aangegeven plaatsen deel-matrices gelijk aan 0 te specificeren.

Interessant is dat deze herformulering tevens kan worden gebruikt om voor ons model  $[A,B,C,D]$  de restrictie  $D = 0$  te laten vallen en wel door 1) uitbreiding van  $w$  en  $\omega$  met currente input-variabelen in resp.  $\underset{1}{u}$  en  $\tilde{\underset{1}{u}}$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 - E(y_0) \\ u_0 - E(u_0) \\ u_1 - E(u_1) \\ y - E(y) \end{bmatrix} \quad \underline{\eta} = \begin{bmatrix} \omega \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_1 \\ x \\ \eta \end{bmatrix}$$

en 2) de volgende specificatie van  $\Lambda$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_w & 0 \\ \Lambda_{y,w} & \Lambda_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & D & 0 \\ 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ C \end{bmatrix}$$

De enig overblijvende restrictie, die de LISREL-benadering oplegt aan [A,B,C,D], is de meting van de input- en output-variabelen en daardoor tevens van de toestand-variabelen als deviatie-skores. Daar staat als belangrijk voordeel tegenover, dat de toestand-variabelen onbekend (latent) mogen zijn en eventueel ook de input-variabelen, welke middels matrix F in verband worden gebracht met geobserveerde input-variabelen.

Naast de genoemde voordelen heeft de LISREL-benadering ook een aantal minder aantrekkelijke kanten, die te maken hebben met het ingewikkelde karakter van de identificatie- en schattingsprocedure en waardoor de praktische toepasbaarheid wel eens te wensen overlaat. De identificeerbaarheid van een LISREL-model kan niet worden bepaald aan de hand van een aantal algemene regels zoals in het geval van een konventioneel structureel model, maar moet rechtstreeks worden onderzocht aan de hand van de voor het betrokken model afgeleide variantie-covariantie-matrix S van geobserveerde variabelen. Deze matrix S is bovendien veel ingewikkelder van vorm dan die gegeven in 3.3.60 voor een konventioneel structureel model. Onder assumptie  $E(e\omega') = 0$  volgt voor  $E(\eta\eta')$  uitdrukking 3.3.98 en onder assumptie  $E(e_y\eta') = 0$  m.b.t.  $y = \Lambda_y\eta + e_y$  voor  $S_{yy} = E(yy')$

$$S_{yy} = E[(\Lambda_y\eta + e_y)(\eta'\Lambda_y' + e_y')] = \Lambda_y E(\eta\eta')\Lambda_y' + \Theta_y = \Lambda_y (\Delta^{-1}\Sigma(\Delta^{-1})' + \Pi\Phi\Pi')\Lambda_y' + \Theta_y$$

Op analoge wijze volgen  $S_{wy}$  en  $S_{ww}$  en wordt de totale matrix S voor LISREL-model 3.3.93

$$S = \begin{bmatrix} S_{yy} & S'_{wy} \\ S_{wy} & S_{ww} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_y (\Delta^{-1}\Sigma(\Delta^{-1})' + \Pi\Phi\Pi')\Lambda_y' + \Theta_y & -\Lambda_y \Pi\Phi\Lambda_w' \\ -\Lambda_w \Phi\Pi'\Lambda_y' & \Lambda_w \Phi\Lambda_w' + \Theta_w \end{bmatrix}$$



en na herschrijving van  $\Pi = -\Delta^{-1}\Gamma$  in termen van de structurele matrices  $\Delta$  en  $\Gamma$

$$3.3.101 \quad S = \begin{bmatrix} \Lambda_y (\Delta^{-1} \Sigma (\Delta^{-1})') + \Delta^{-1} \Gamma \Phi \Gamma' (\Delta^{-1})' \Lambda_y' + \Theta_y & -\Lambda_y \Delta^{-1} \Gamma \Phi \Lambda_w' \\ -\Lambda_w \Phi \Gamma' (\Delta^{-1})' \Lambda_y' & \Lambda_w \Phi \Lambda_w' + \Theta_w \end{bmatrix}$$

Voor speciaal LISREL-model 3.3.100 volgt

$$3.3.102 \quad S = \Lambda \underline{\Delta}^{-1} \underline{\Sigma} (\underline{\Delta}^{-1})' \Lambda' + \Theta$$

3.3.101 c.q. 3.3.102 vormt een stelsel van  $\frac{1}{2}s(s+1)$  vergelijkingen:  $s = p + q$  ( $p$   $y$ -variabelen en  $q$   $w$ -variabelen) c.q.  $s = p$  ( $p$   $y$ -variabelen). Identificeerbaarheidsonderzoek vereist, dat deze vergelijkingen worden uitgeschreven en dat wordt nagegaan, of het stelsel oplosbaar is voor de onafhankelijk te schatten parameter-waarden in de 8 parameter-matrices  $\Lambda_y$ ,  $\Lambda_w$ ,  $\Delta$ ,  $\Gamma$ ,  $\Phi$ ,  $\Sigma$ ,  $\Theta_y$  en  $\Theta_w$  c.q. de 4 parameter-matrices  $\Lambda$ ,  $\underline{\Delta}$ ,  $\underline{\Sigma}$  en  $\Theta$ . Het aantal parameters in deze matrices is uiteraard veel groter dan  $\frac{1}{2}s(s+1)$  en dat betekent, dat minstens zoveel restricties (het LISREL-programma laat slechts vastgestelde waarden zoals 0-waarden of gelijkstellingen toe) moeten zijn gesteld, dat slechts  $r \leq \frac{1}{2}s(s+1)$  onafhankelijk te schatten parameter-waarden overblijven (parameter-waarden betrokken in gelijkstellingen worden slechts één keer geteld).

Over het identificatie-probleem stellen Jöreskog en Sörbom: "The solution ... is often complicated and tedious and explicit solutions for all  $\theta$ 's (onafhankelijk te schatten parameter-waarden, J.O.) seldom exist... Fortunately, however, there is one way in which the computer program checks the identification status of the model. At the starting point of the Fletcher-Powell iterations ..., the program computes the information matrix for all the independent unknown parameters. If this matrix is positive definite it is almost certain that the model is identified ... On the other hand, if the information matrix is singular, the model is not identified (68).

De problemen, die men kan tegenkomen bij de schatting, zijn wellicht nog groter dan die bij het identificeerbaarheidsonderzoek. De ingewikkeldheid van de iteratieve maximum-likelihood schattingsprocedure

die wordt toegepast (69) heeft tot gevolg, dat slechts met betrekkelijk kleine modellen kan worden gewerkt. Het maximum aantal  $y$ -variabelen, dat het LISREL-programma toelaat, is 15 en hetzelfde maximum geldt voor het aantal  $w$ -variabelen. Dat betekent voor bijv. een gemiddelde van 3 geobserveerde variabelen per latente variabele niet meer dan 5 latente endogene variabelen en 5 latente gepredetermineerde variabelen. Ook voor kleinere modellen is de vereiste computertijd vaak aanzienlijk en neemt snel toe bij toename van het aantal te schatten parameter-waarden. De schattingsprocedure evalueert nl. bij iedere iteratie alle te schatten parameter-waarden. De ingewikkeldheid is de reden, dat econometristen in het kader van de konventionele structurele modellen, die nog relatief eenvoudig zijn, geneigd zijn af te zien van de maximum-likelihood schatter. Theil stelt bijv.: "This estimator is only rarely used because it has to be solved from a very complicated set of estimation equations... The 3SLS technique is much simpler, however, and is therefore to be preferred to the maximum-likelihood technique" (70) en Johnston: "It is computationally the most expensive of all the estimation methods, and in addition it is likely to run into trouble ... in anything other than fairly small models... We will not present the details here as the resultant equations are computationally expensive and the least used of all simultaneous estimation methods" (71).

Het LISREL-programma stelt ook hoge eisen aan de input-data, d.w.z. aan 1) de variantie-covariantie-matrix  $S$ , berekend voor de geobserveerde variabelen in de steekproef, en aan 2) de initiële oplossing, die de onderzoeker door het invullen van beginwaarden in de parameter-matrices zelf moet verschaffen en waaruit op de wijze van 3.3.101 c.q. 3.3.102 de initiële schatting  $\hat{S}$  van  $S$  wordt berekend. Tijdens het iteratie-proces worden op basis van de telkens hernieuwde parameter-schattingen telkens nieuwe schattingen  $\hat{S}$  berekend, waarbij wordt gezocht naar een steeds kleinere afwijking tussen  $\hat{S}$  en  $S$ , berekend volgens "fitting"-functie  $F$ . Het iteratie-proces wordt voortgezet, totdat  $F$  een minimum heeft bereikt, d.w.z. totdat de eerste-orde afgeleiden van  $F$  (bij benadering) 0 zijn en de parameter-schattingen in dit minimum van  $F$  vormen de oplossing. Terwijl de 3SLS-procedure geen oplossing gaf in het geval van een singuliere 2SLS-schatting  $\hat{E}$ , moet hier om te beginnen de matrix  $S$  niet-singulier zijn. Tevens moet de initiële schatting  $\hat{S}$  niet-singu-

lier zijn om de minimalisatie-procedure te laten starten. Vanwege het grote aantal ingevulde beginwaarden is vaak moeilijk te bepalen, welke voor een singuliere initiële  $\hat{S}$  verantwoordelijk zijn en hoe zij veranderd moeten worden. Tijdens het minimalisatie-proces zoekt het programma bij het voorkomen van een singuliere  $\hat{S}$  zelf verder in de richting van een oplossing met niet-singuliere  $\hat{S}$ . Niet iedere initiële oplossing met niet-singuliere  $\hat{S}$  is overigens even goed. De auteurs stellen: "If there are several minima of F there is no guarantee that the method will converge to the absolute minimum" (72) en dat betekent dat de initiële oplossing zo veel mogelijk in de buurt van de uiteindelijke oplossing gekozen moet worden. Dat verkort verder het iteratie-proces en spaart daardoor computertijd. Een goede initiële oplossing zal overigens moeilijk te vinden zijn, indien nog weinig over het onderzoeksobject bekend is.

Na een eerste serie z.g. "steepest descent" iteraties wordt de informatie-matrix (een functie van de tweede-orde afgeleiden van F) berekend. Dit is de derde matrix die niet-singulier moet zijn en wel met het oog op identificeerbaarheid. Op basis van de inverse van de informatie-matrix (de eenheidsmatrix in het geval van een singuliere informatie-matrix) volgen de Fletcher-Powell iteraties, die echter kunnen worden afgebroken zonder dat het minimum van F is gevonden en waarbij de handleiding nogal cryptisch opmerkt: "'serious problems" have been encountered and the minimization of the function cannot continue. One reason for this may be erroneous input data" (73). In het minimum van F kan men opnieuw de inverse van de informatie-matrix laten berekenen, waaruit een matrix wordt berekend die overeenkomt met 3.3.77 in het geval van een konventioneel structureel model en niet alleen standaardfouten oplevert voor alle parameter-schattingen maar tevens op de wijze van 3.3.79 gebruikt kan worden om standaard-fouten voor de gereduceerde vorm  $\hat{\Pi} = -\hat{\Delta}^{-1}\hat{\Gamma}$  af te leiden. De oplossing in het minimum van F kan overigens onbruikbaar zijn. Het programma laat nl. oplossingen toe met matrices  $\hat{\Phi}$ ,  $\hat{\Sigma}$ ,  $\hat{\Theta}_y$  en  $\hat{\Theta}_w$ , waarin negatieve diagonaal-waarden (variantie-schattingen) voorkomen. Dit kan duiden op een verkeerd model maar ook zou het gevonden minimum een ander kunnen zijn dan het absolute minimum.

Een laatste opmerking betreft de assumpties van onafhankelijke en multi-normaal verdeelde geobserveerde waarden, waar nogal wat discussie

over is ontstaan. Deze assumpties zijn uiteraard noodzakelijk bij toetsing (middels de "goodness of fit"-maat, toename in de "goodness of fit"-maat, standaard-fouten), maar worden tevens gebruikt om de schatter in het (absolute) minimum van F als maximum-likelihood schatter af te leiden. Soms kunnen maximum-likelihood schatters verdelingsvrij worden afgeleid, maar in een persoonlijke mededeling aan Mulaik gaf Jöreskog te kennen, dat dit hier niet het geval hoeft te zijn (74). Wel gaf hij elders aan, dat in het kader van een konventioneel structureel model zonder meet-foutenmulti-normaliteit van  $\begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix}$  kan worden vervangen door multi-normaliteit van  $e$  zonder verdelingsassumptie m.b.t.  $w$ . Zijn standpunt is, dat de betekenis van de genoemde assumpties wordt overdreven (persoonlijke mededeling). De toets voor toename in de "goodness of fit"-maat is naar zijn mening robuust tegen afwijkingen van multi-normaliteit, terwijl de schatter in het minimum van F ook onafhankelijk van de afleiding van F uit de likelihood-functie een consistente schatter is. Dat zou zelfs het geval zijn in zuiver en gemengd tijdserie-onderzoek met lagged-endogene variabelen: "The assumption of independent observations rules out dynamic models which include lagged endogenous variables with measurement errors. In that case, the method to be described is consistent, but not maximum likelihood. When measurement errors are absent ... no difficulty arises" (75).

#### 3.4 Modellen [A,B,C,D]: schatting en predictie

Voor het bijzondere geval van de vorige paragraaf, waarin 1) [A,B,C,D] een differentie-model is en 2) men beschikt over data met  $\delta = 1$  als vast tijdsverschil tussen opeenvolgende waarnemingstijdstippen, volgt schatting  $[\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}]$  rechtstreeks uit de schattingen  $\hat{A}$ ,  $\hat{\Gamma}$  en  $\hat{\Pi} = -\hat{A}^{-1}\hat{\Gamma}$  van structurele en gereduceerde model-vorm zoals aangegeven in 3.3.81 t/m 3.3.84 en nader gepreciseerd in de omringende tekst. In de andere gevallen -  $\delta \neq 1$  of [A,B,C,D] een differentieel model - concentreren de moeilijkheden zich op de matrices A en B van de toestand-differentie-vergelijking, waarvoor schattingen  $\hat{A}$  en  $\hat{B}$  niet meer rechtstreeks uit  $\hat{\Pi}$  afleidbaar zijn. Men kan echter gebruik maken van

Coleman's tweestaps-procedure (76), die eerder in 2.2.33 t/m 2.2.39 werd uiteengezet voor het geval van een enkelvoudige differentie- c.q. differentiaal-vergelijking.

Coleman gaat uit van de assumptie van lineair met t variërende input-waarden  $u(t)$

$$3.4.1 \quad u(t) = c + t \cdot b \quad \text{of vanwege } u(t_0) = c + t_0 \cdot b$$

$$u(t) = u(t_0) + (t - t_0) \cdot b$$

Deze assumptie is over intervallen  $[t_0, t_1]$  van beperkte lengte  $\delta = t_1 - t_0$  vaak (benaderingsgewijs) niet onredelijk. Onder deze assumptie wordt ieder betrokken input-segment  $u_{[t_0, t_1]}$  bepaald door het volgende tweetal: beginwaarden-vector  $u(t_0)$  op  $t_0$  en hellingscoëfficiënten-vector  $b_{[t_0, t_1]}$  over  $[t_0, t_1]$ , zodat  $u_{[t_0, t_1]}$  door dit tweetal kan worden vervangen. De assumptie gaat per definitie op voor constante input-waarden  $u_i(t) = c_i$ , bijv. allerlei achtergrondvariabelen zoals geslacht, sociaal milieu, etc., in welk geval  $u_i(t_0) = c_i$  en  $b_{i[t_0, t_1]} = 0$ . Ook andere variabelen nemen over observatie-intervallen soms constante waarden aan, zodat  $u_i(t)$  tijdens zo'n interval kan worden vervangen door  $u_i(t_0)$ . Verandering van observatie-interval naar observatie-interval impliceert hier overigens, dat eindwaarde  $u_i(t_1) = u_i(t_0 + \delta)$  van interval  $[t_0, t_1]$ , welke als beginwaarde  $u_i(t'_0) = u_i(t_1)$  optreedt van volgend interval  $[t'_0, t'_1]$ , ongelijk moet zijn aan beginwaarde  $u_i(t_0)$ . Men kan echter zonder bezwaar lineariteitsassumptie 3.4.1 beperken tot input-segmenten  $u_{[t_0, t_1]}$  en dus tot  $t_0 \leq t < t_1$  in de intervallen  $[t_0, t_1]$ .

Zoals besproken aan het begin van de vorige paragraaf levert tijd-anticiperende deel-input  $u_{i+1}(t) = u_i(t + \alpha)$  met  $0 < \alpha \leq \delta$  in een differentie-model  $[A, B, C, D]$  geen moeilijkheden op voor het geval  $\delta = 1$  en dus  $\alpha = 1$ , indien althans de betrokken kolom van  $D$  a priori op 0 wordt gesteld. Ook voor  $\delta \neq 1$  ontstaan in een differentie-model  $[A, B, C, D]$  bij gebruikmaking van Coleman's procedure geen moeilijkheden, indien onder dezelfde voorwaarde m.b.t.  $D$  wordt gekozen  $\alpha = 1$  en men behalve over de waarden  $u_{i+1}(t_0) = u_i(t_0 + 1)$  tevens beschikt over de hellingscoëfficiënten  $b_{i+1[t_0, t_1]} = b_{i[t_0+1, t_1+1]}$  c.q.  $b_{i+1[t_0, t_1]} = b_{i[t_0+1, t_1]}$ . Moeilijkheden ontstaan evenmin, indien niet-anticiperende  $u_i(t_0)$  vanwege bijzon-

dere omstandigheid  $b_{i[t_0, t_1]} = 0$  c.q.  $b_{i[t_0, t_1]} = 0$  gelijk is aan anticiperende  $u_i(t_0 + \alpha)$ , zodat de keuze tussen anticiperende of niet-anticiperende beginwaarde geen verschil maakt. In alle andere gevallen zijn tijd-anticiperende deel-inputs echter niet toelaatbaar in Coleman's procedure, in het bijzonder niet voor de aantrekkelijke keuze  $\alpha = \delta$  met  $u_{i+1}(t_0) = u_i(t_1)$ . De reden is, dat de waarde van  $x(t_1)$  bij de berekening op basis van  $u_{[t_0, t_1]}$  mede bepaald zou worden door waarden  $u_{i+1}(t) = u_i(t + \alpha)$  met  $t + \alpha > t_1$ , hetgeen strijdig zou zijn met causaliteitsaxioma 3.1.4. Wel is iedere tijd-lagged deel-input  $u_{i-k}(t) = u_i(t - \alpha_k)$  met  $\alpha_k > 0$  toelaatbaar, in het bijzonder  $u_{i-k}(t) = u_i(t - k\delta)$  met  $\alpha_k = k\delta$ . De lagged waarden  $u_{i-k}(t_0) = u_i(t_0 - \alpha_k)$  worden gecombineerd met bijbehorende lagged hellingscoëfficiënten  $b_{i-k[t_0, t_1]} = b_{i[t_0 - \alpha_k, t_1 - \alpha_k]}$  c.q.  $b_{i-k[t_0, t_1]} = b_{i[t_0 - \alpha_k, t_1 - \alpha_k]}$  ter vervanging van lagged input-segmenten  $u_{i-k[t_0, t_1]} = u_{i[t_0 - \alpha_k, t_1 - \alpha_k]}$  c.q.  $u_{i-k[t_0, t_1]} = u_{i[t_0 - \alpha_k, t_1 - \alpha_k]}$ .

Onder assumptie 3.4.1 over intervallen  $[t_0, t_1]$  volgt uit oplossing 3.2.61 en 3.2.62 van differentie-vergelijking  $\Delta x(t) = Ax(t) + Bu(t)$  en differentiaal-vergelijking  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  voor alle  $t \in [t_0, t_1]$

$$3.4.2 \quad x(t) = \tilde{A}^{t-t_0} x(t_0) + [\tilde{A}^{t-t_0} - I]A^{-1}Bu(t_0) + \\ [(\tilde{A}^{t-t_0} - I)A^{-1} - (t - t_0)I]A^{-1}Bb_{[t_0, t_1]}$$

$$\text{met } \tilde{A} = A + I$$

$$3.4.3 \quad x(t) = e^{A \cdot (t-t_0)} x(t_0) + [e^{A \cdot (t-t_0)} - I]A^{-1}Bu(t_0) + \\ [(e^{A \cdot (t-t_0)} - I)A^{-1} - (t - t_0)I]A^{-1}Bb_{[t_0, t_1]}$$

althans indien  $A^{-1}$  bestaat. In het bijzondere geval  $A = 0$  ( $\tilde{A} = I$ ) volgt resp.

$$3.4.4 \quad x(t) = x(t_0) + (t - t_0)Bu(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)(t - t_0 - 1)Bb_{[t_0, t_1]}$$

$$3.4.5 \quad x(t) = x(t_0) + (t - t_0)Bu(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 Bb_{[t_0, t_1]}$$

Opname van pseudo-variabele  $u_1(t_0) = 1$  in  $u(t_0)$  verklaart, waarom 3.4.2 t/m 3.4.5 één term minder bevatten dan 2.2.36, 2.2.26, 2.2.38 en 2.2.25 in het geval van een enkelvoudige vergelijking. Indien assumptie 3.4.1 voor bepaalde deel-inputs wordt beperkt tot intervallen  $[t_0, t_1]$ , worden de betrokken  $b_{i[t_0, t_1]}$  in  $b_{[t_0, t_1]}$  vervangen door  $b_{i[t_0, t_1]}$ . Een belangrijk voordeel van de  $b_{i[t_0, t_1]}$  is echter, dat zij eenvoudig uit de opeenvolgende paren waarnemingen  $u_i(t_0)$  en  $u_i(t_1)$  in de data-matrix berekend kunnen worden middels  $b_{i[t_0, t_1]} = [u_i(t_1) - u_i(t_0)] / (t_1 - t_0)$ . Van op deze wijze berekende waarden  $b_{i[t_0, t_1]}$  zal verder worden uitgegaan, maar in voorkomende gevallen kan men ze zonder bezwaar vervangen door waarden  $b_{i[t_0, t_1]}$ , i.h.b. bij constante input-waarden over  $[t_0, t_1]$  door 0.

Nemen we nu aan, dat alle onderzochte observatie-intervallen  $[t_0, t_1]$  bij alle onderzoekseenheden dezelfde lengte  $\delta = t_1 - t_0$  hebben en dat het onderzoek waarnemingen  $x_1 \equiv x(t_0 + \delta)$ ,  $x_0 \equiv x(t_0)$ ,  $u_1 \equiv u(t_0 + \delta)$  en  $u_0 \equiv u(t_0)$  en  $b_0 \equiv \frac{1}{\delta}(u_1 - u_0)$  oplevert voor alle observatie-intervallen bij alle eenheden. De gegeven oplossingen van de differentie- c.q. differentiaal-vergelijking worden in het stochastische geval vervangen door stochastische versies

$$3.4.6 \quad E(x_1 | x_0, u_0, b_0) = \tilde{A}^\delta x_0 + [\tilde{A}^\delta - I] A^{-1} B u_0 + \\ [(\tilde{A}^\delta - I) A^{-1} - \delta I] A^{-1} B b_0 \quad \text{met } \tilde{A} = A + I$$

$$3.4.7 \quad E(x_1 | x_0, u_0, b_0) = e^{A\delta} x_0 + [e^{A\delta} - I] A^{-1} B u_0 + \\ [(e^{A\delta} - I) A^{-1} - \delta I] A^{-1} B b_0$$

$$3.4.8 \quad E(x_1 | x_0, u_0, b_0) = x_0 + \delta B u_0 + \frac{1}{2} \delta (\delta - 1) B b_0$$

$$3.4.9 \quad E(x_1 | x_0, u_0, b_0) = x_0 + \delta B u_0 + \frac{1}{2} \delta^2 B b_0$$

en deze treden dus in de plaats van  $E(x_1 | x_0, u_0) = A x_0 + B u_0$  in 3.3.27, indien  $\delta \neq 1$  of  $[A, B, C, D]$  een differentieel model. Uitbreiding van  $\bar{z}^u$  in  $\bar{z}$  van 3.3.28 en  $Z^u$  in  $Z$  van 3.3.30 tot

$$z_*^u = \begin{bmatrix} u_0 \\ b_0 \\ u_1 \end{bmatrix} \quad z_*^u = [z_{1.}^u \quad z_{2.}^u \quad \dots \quad z_{1+1.}^u \quad z_{1+2.}^u \quad \dots \quad z_{21+1.}^u \quad z_{21+2.}^u \quad \dots]$$

leidt tot een structureel model  $\Delta \bar{y} + \Gamma \bar{z} = \bar{e}$ , waarvoor  $\Gamma$  en  $\Delta$  in 3.3.28 en  $\Pi$  in 3.2.29 als volgt gewijzigd moeten worden

$$3.4.10 \quad \Gamma = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & u_0 & b_0 & u_1 \\ -L_* & 0 & -M_* & -M_{**} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -D \end{bmatrix} \quad \Delta = \begin{bmatrix} K_* & 0 \\ -C & I \end{bmatrix}$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} K_*^{-1} L_* & 0 & K_*^{-1} M_* & K_*^{-1} M_{**} & 0 \\ CK_*^{-1} L_* & 0 & CK_*^{-1} M_* & CK_*^{-1} M_{**} & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_* & 0 & B_* & B_{**} & 0 \\ \tilde{C} A_* & 0 & CB_* & CB_{**} & D \end{bmatrix}$$

en waarvoor onder aanname van een block-recursieve structuur specificieerbaar is

$$3.4.11 \quad E(x_1 | x_0, u_0, b_0) = \tilde{A}_* x_0 + B_* u_0 + B_{**} b_0 = \tilde{A}_* x_0 + [B_* \quad B_{**}] \begin{bmatrix} u_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$E(y_1 | x_1, u_1) = Cx_1 + Du_1$$

Op de wijze zoals aangegeven in de vorige paragraaf kan men schattingen  $\hat{\Delta}$ ,  $\hat{\Gamma}$  en  $\hat{\Pi}$  verkrijgen en dus een schatting  $[\hat{A}_*, [\hat{B}_* \hat{B}_{**}], \hat{C}, \hat{D}]$  voor dit hulpmodel  $[A_*, [B_* \quad B_{**}], C, D]$ . Combinatie van 3.4.11 met 3.4.6 t/m 3.4.9 suggereert als schatteurs van A en B in het onderliggende model  $[A, B, C, D]$

$$3.4.12 \quad \underline{A \neq 0 (\hat{A} \neq I)} \quad \underline{A = 0 (\hat{A} = I)}$$

differentie-model

$$\hat{A} = \frac{1}{\hat{\delta}} \hat{\tilde{A}}_* - I = \hat{V}(\hat{\tilde{A}}_*) \hat{V}^{-1} - I$$

$$\hat{B}_1 = [\hat{\tilde{A}}_* - I]^{-1} \hat{B}_*$$

$$\hat{B}_2 = \hat{A}[(\hat{\tilde{A}}_* - I)\hat{A}^{-1} - \delta I]^{-1} \hat{B}_{**}$$

$$\hat{B}_1 = \frac{1}{\hat{\delta}} \hat{B}_*$$

$$\hat{B}_2 = \frac{2}{\hat{\delta}^2 - \hat{\delta}} \hat{B}_{**}$$

differentieel model

$$\hat{A} = \frac{1}{\hat{\delta}} \ln \hat{\tilde{A}}_* = \frac{1}{\hat{\delta}} \hat{V}(\ln \hat{\tilde{A}}_*) \hat{V}^{-1}$$

$$\hat{B}_1 = \hat{A}[\hat{\tilde{A}}_* - I]^{-1} \hat{B}_*$$

$$\hat{B}_2 = \hat{A}[(\hat{\tilde{A}}_* - I)\hat{A}^{-1} - \delta I]^{-1} \hat{B}_{**}$$

$$\hat{B}_1 = \frac{1}{\hat{\delta}} \hat{B}_*$$

$$\hat{B}_2 = \frac{2}{\hat{\delta}^2} \hat{B}_{**}$$



$\hat{\Lambda}_*$ ,  $\hat{\Lambda}_*^{-1}$  en  $\ln \hat{\Lambda}_*$  zijn diagonale matrices met op de diagonaal resp. de eigenwaarden  $\hat{\lambda}_{i*}$  van  $\hat{A}_*$ , daaruit berekende  $\hat{\lambda}_{i*}^{-1}$  en  $\ln \hat{\lambda}_{i*}$ ;  $\hat{V}$  is de matrix met kolomsgewijs de eigenvectoren bij de eigenwaarden van  $\hat{A}_*$ .  $A = 0$  ( $\tilde{A}_* = I$ ) impliceert een heel speciaal model zonder afhankelijkheden met geheugenwerking (in het bijzonder geen expliciete of impliciete feedback-loops) tussen de endogene variabelen; bij schatting van het hulpmodel worden de  $x_1$ -waarden vervangen door  $(x_1 - x_0)$ -waarden (z.g. winst-skores) zonder dat verder van de  $x_0$ -waarden gebruik wordt gemaakt.

De overidentificatie van  $B$ , middels  $B_1$  én  $B_2$ , althans voor kolommen waarvoor  $b_{01} \neq 0$ , impliceert voor die kolommen een additionele schatting in  $\hat{B}_2$ , die overigens niet dezelfde waarde hoeft op te leveren als in  $\hat{B}_1$ . Coleman suggereert een combinatie van beide schatters middels de gewichten  $w_1 = w_2 = .50$ , maar er is geen reden waarom niet met bijv. zodanige gewichten  $w_1$  en  $w_2$  zou worden gewerkt - uiteraard onder de restrictie  $w_1 + w_2 = 1$  - dat de percentages verklaarde variantie in de endogene variabelen worden gemaximaliseerd en in ieder geval niet veel lager uitkomen dan bij  $[\hat{A}_*, [\hat{B}_* \hat{B}_{**}], \hat{C}, \hat{D}]$ . Voor de voorbeelden in hoofdstuk 4 werden middels het betreffende onderdeel 4 van de computer-procedure in appendix A op basis van schattingen  $\hat{A}_*$ ,  $\hat{B}_*$  en  $\hat{B}_{**}$  o.a. de matrices  $\hat{A}$  en  $\hat{B}$  berekend; onder de namen AD en BD voor een differentie-model met  $\delta \neq 1$  en onder de namen ADD en BDD voor een differentieel model met  $\delta = 1$ . De gewichten komen voor onder de namen W1 en W2 en  $\delta$  onder de naam DELTA.

Over de eigenschappen van de schatters  $\hat{A}$  en  $\hat{B}$  in 3.4.12 is overigens weinig bekend, terwijl bovendien variantie-schatters ontbreken, zodat geen standaard-fouten berekend kunnen worden. Variantie-schatters en standaard-fouten zijn niettemin van groot belang in predictie-onderzoek. Vandaar dat het wellicht aanbeveling verdient om predicties op basis van schatting  $[\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}]$  van het onderliggende model te complementeren met predicties op basis van schatting  $[\hat{A}_*, [\hat{B}_* \hat{B}_{**}], \hat{C}, \hat{D}]$  van het hulpmodel, waarvoor de variantie-schatters op de wijze zoals aangegeven in 3.3.79 van de vorige paragraaf berekend worden. Hulpmodel  $[A_*, [B_* B_{**}], C, D]$  wordt dan in feite gehanteerd als een differentie-model  $[A, B, C, D]$  met inputs  $u$ , waarvan de waarden op de opeenvolgende (discrete) tijdstippen niet slechts de oorspronkelijke deel-input-waarden  $u_1(t)$  zelf bevatten, maar ook de waarden  $b_1(t)$  als pseudo-deel-input-waarden. Hierdoor kan de tijd

zonder veel bezwaar zodanig worden gedefinieerd, dat  $\delta = 1$ .

Predictie-onderzoek aan de hand van schattingen  $[\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}]$  van modellen  $[A, B, C, D]$  vereist toepassing van de procedures in paragraaf 3.2. In het bijzonder zijn van belang de toestand-overgangsfunctie in 3.2.61 en 3.2.62, die het gedrag van de toestand beschrijft vanaf een bepaald begintijdstip  $t_0$  tot en met een gewenst eindtijdstip  $t_1$ , aan de hand van begintoestand  $x(t_0)$  en input-segment  $u_{[t_0, t_1]}$ , en de response-functie 3.2.63 en 3.2.64, die hetzelfde doet m.b.t. de output. De functies zijn opgebouwd uit twee additieve componenten, waarvan men het gedrag afzonderlijk kan bestuderen: de zero-input komponent voor het effect van uitsluitend de begintoestand en de zero-state komponent voor het effect van uitsluitend de input (de zero-input komponent in de toestand-overgangsfunctie wordt ook vrije beweging genoemd). De zero-input-response wordt op haar beurt opgebouwd uit de unit-response-functies in 3.2.65 en 3.2.66 en de zero-state-response uit de impulse-response-functies in 3.2.67 en 3.2.68. De impulse-response- en unit-response-functies stellen in staat na te gaan, wat het effect is op latere tijdstippen  $t''$  c.q.  $t'$  van een verhoging van slechts één eenheid in één bepaalde deel-input c.q. -toestand op slechts één bepaald tijdstip  $t'' = 0$  c.q.  $t' = 0$ . Het betreft bij de impulse-response het effect van een niet-volgehouden eenheidsverhoging in de betrokken deel-input en bij de unit-response-functies het effect van de zich na een eenheidsverhoging in de betrokken deel-toestand autonoom ontwikkelende toestand.

In alle genoemde functies, waarvoor op de gebruikelijke wijze stochastische versies worden geformuleerd, speelt de toestand-overgangsmatrix  $\tilde{A}^{t-t_0}$  c.q.  $e^{A \cdot (t-t_0)}$  en daardoor de matrix  $A$  een essentiële rol. De n eigenwaarden van  $n \times n$ -matrix  $A$  bepalen, indien alle bijbehorende n eigenvectoren lineair onafhankelijk zijn, ieder op simpele wijze een karakteristieke beweging  $m_i$ . Deze  $m_i$  worden geheel onafhankelijk van elkaar geëxciteerd in  $n-k$  karakteristieke excitatie-bewegingen  $m_i^0$  - zie 3.2.38, 3.2.39, 3.2.42 en tabel 3.2.1 - die ieder gemakkelijk grafisch zijn weer te geven en waaruit de vrije beweging als een eenvoudige som (3.2.37) kan worden opgebouwd en gevisualiseerd. Via de eigenvectoren kan men de begintoestand  $x(t_0)$  opsporen - zie 3.2.36 - die nodig is om middels excitaties  $\alpha_i(t_0)$  het aandeel van bepaalde karakteristieke excitatie-bewegingen in de vrije beweging en daardoor het verloop van de vrije beweging zelf te beïnvloeden. De eigenwaarden beslissen bovendien langs voorwaarden 3.2.46 t/m 3.2.49 over soorten stabiliteit of instabiliteit, die het

model kan vertonen en laten in het geval van  $n$  lineair-onafhankelijke eigenvectoren op gemakkelijke wijze volgens 3.2.30 en 3.2.31 de toestand-overgangsmatrix berekenen. Het verdient dus aanbeveling om voorafgaand aan het eigenlijke predictie-onderzoek de eigenwaarden van  $A$  vast te stellen.

De moeilijkheid bij een stochastisch model  $[A, B, C, D]$  is, dat men in het algemeen slechts de beschikking kan krijgen over een schatting  $\hat{A}$  van  $A$  en daardoor slechts over een schatting  $\langle \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n \rangle$  van het stel eigenwaarden  $\langle \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \rangle$ . Om verantwoord stabiliteits- en predictie-onderzoek uit te voeren, rekening houdend met sampling-fluctuaties, zou men voor iedere  $\hat{\lambda}_i = \hat{\sigma}_i \pm j\hat{\omega}_i$  moeten beschikken over een variantie-schatting, in het geval van een differentie-model  $[A, B, C, D]$  over  $\hat{v}\hat{a}r(\hat{\eta}_i)$  met  $\hat{\eta}_i = \sqrt{\hat{\sigma}_i^2 + \hat{\omega}_i^2}$  (zie 3.2.46). Zo'n  $\hat{v}\hat{a}r(\hat{\eta}_i)$  werd voor het rechtstreeks volgend differentie-model  $[A, B, C, D]$  met  $\Delta t = 1 = \delta$ , waarbij  $\hat{A}$  deel uitmaakt van  $\hat{\Pi}$ , afgeleid door Theil en Boot in hun artikel: "The final form of econometric equation systems" (77) en toegepast in stabiliteits- en predictie-onderzoek voor het bekende model I van Klein. De asymptotische variantie-schatting  $\hat{v}\hat{a}r(\hat{\eta}_i)$ , die zij afleiden en die voor  $\omega_i = 0$  overgaat in  $\hat{v}\hat{a}r(\hat{\sigma}_i) = \hat{v}\hat{a}r(\hat{\sigma}_i) = \hat{v}\hat{a}r(\hat{\lambda}_i)$ , maakt gebruik van 1) de bij  $\hat{A} = \hat{A} + I$  behorende  $n^2 \times n^2$ -matrix  $\hat{v}\hat{a}r(\hat{A})$ , die men kan vinden als deel-matrix van  $\hat{v}\hat{a}r(\hat{\Pi})$  in 3.3.79, en 2) de cofactoren-matrix  $C_i$  van matrix  $\hat{A} - \hat{\lambda}_i I$  (78).  $C_i$  kan geschreven worden als  $C_i = C_i^* + jC_i^{**}$ , waarin  $C_i^* = [c_{hk,i}^*]$  en  $C_i^{**} = [c_{hk,i}^{**}]$  beide reëel zijn.

$$C_i^* = \begin{bmatrix} c_{11,i}^* & c_{12,i}^* & \dots & c_{1n,i}^* \\ c_{21,i}^* & c_{22,i}^* & \dots & c_{2n,i}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1,i}^* & c_{n2,i}^* & \dots & c_{nn,i}^* \end{bmatrix} \quad C_i^{**} = \begin{bmatrix} c_{11,i}^{**} & c_{12,i}^{**} & \dots & c_{1n,i}^{**} \\ c_{21,i}^{**} & c_{22,i}^{**} & \dots & c_{2n,i}^{**} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1,i}^{**} & c_{n2,i}^{**} & \dots & c_{nn,i}^{**} \end{bmatrix}$$

Vervolgens worden berekend  $G_i = [g_{hk,i}]$  en  $H_i = [h_{hk,i}]$ , waarin

$$g_{hk,i} = \left[ \left( \sum_{h=1}^n c_{hh,i}^* \right) c_{hk,i}^* + \left( \sum_{h=1}^n c_{hh,i}^{**} \right) c_{hk,i}^{**} \right] / \left[ \left( \sum_{h=1}^n c_{hh,i}^* \right)^2 + \left( \sum_{h=1}^n c_{hh,i}^{**} \right)^2 \right]$$

$$h_{hk,i} = \left[ - \left( \sum_{h=1}^n c_{hh,i}^{**} \right) c_{hk,i}^* + \left( \sum_{h=1}^n c_{hh,i}^* \right) c_{hk,i}^{**} \right] / \left[ \left( \sum_{h=1}^n c_{hh,i}^* \right)^2 + \left( \sum_{h=1}^n c_{hh,i}^{**} \right)^2 \right]$$

en worden  $G_i$  en  $H_i$  opgenomen in lange vectoren  $g_i$  en  $h_i$  van de orde  $1 \times n^2$

$$g_i = [g_{11,i} \ g_{12,i} \ \dots \ g_{1n,i} \ g_{21,i} \ g_{22,i} \ \dots \ g_{2n,i} \ \dots \ g_{n1,i} \ g_{n2,i} \ \dots \ g_{nn,i}]$$

$$h_i = [h_{11,i} \ h_{21,i} \ \dots \ h_{1n,i} \ h_{21,i} \ h_{22,i} \ \dots \ h_{2n,i} \ \dots \ h_{n1,i} \ h_{n2,i} \ \dots \ h_{nn,i}]$$

De schatter luidt nu

$$3.4.13 \quad \widehat{\text{var}}(\widehat{\eta}_i) = (v_i g_i + w_i h_i) \cdot \widehat{\text{var}}(\widehat{A}) \cdot (v_i g_i + w_i h_i)'$$

$$\text{waarin } v_i = \widehat{\sigma}_i / \widehat{\eta}_i = \cos \widehat{\theta}_i$$

$$w_i = \widehat{\omega}_i / \widehat{\eta}_i = \sin \widehat{\theta}_i$$

Middels het betreffende onderdeel 5 van de computerprocedure in appendix A werden voor de voorbeelden in hoofdstuk 4 o.a. eigenwaarden  $\widehat{\lambda}_i$ , variantie-schatters  $\widehat{\text{var}}(\widehat{\eta}_i)$  en standaard-fouten  $\sqrt{\widehat{\text{var}}(\widehat{\eta}_i)}$  berekend onder de namen EYALS, VETAI en SFETAI.

Een tweetal eigenwaarden van A in Klein's model I had als schatting

$$\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 = \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_1' = -.240 \pm .353j \rightarrow \begin{cases} \widehat{\sigma}_1 = -.240, \widehat{\sigma}_1 = .760 \\ \widehat{\omega}_1 = .353 \\ \widehat{\eta}_1 = .838 \\ \widehat{\theta}_1 = 24^\circ 55' \cdot \arcsin = .435 \end{cases}$$

en zou dus volgens tabel 3.2.1 een oscillerende karakteristieke excitatie-beweging met een periode-duur van  $2\pi/.435 = 11.4$  jaar opleveren, die naar 0 convergeert en volgens voorwaarde 3.2.46 geen gevaar voor instabiliteit inhoudt. Echter 3.4.13 gaf  $\widehat{\text{var}}(\widehat{\eta}_1) = .0497$ , hetgeen een asymptotische standaard-fout impliceert van .22. De auteurs concluderen, dat  $\widehat{\eta}_1$  "differs hardly significant from 1. This implies that this model describes the American economy as a system which is close to instability and, in fact, leaves the question of stability open" (79).

De auteurs introduceren in hun artikel ook de z.g. "final form" van een model, die wordt afgeleid uit de gereduceerde vorm. Stel, dat matrix  $\Pi$  van de gereduceerde vorm uiteenvalt in 3 deel-matrices  $D_1$ ,  $D_2$  en  $D_3$

volgens

$$y(t+1) = D_1 y(t) + D_2 z(t+1) + D_3 z(t) + e(t)$$

Theil en Boot en later Theil (80) leiden eerst uit deze differentievergelijking iteratief als oplossing af

$$\begin{aligned} y(t) &= D_1^{t-t_0} y(t_0) + \\ &\quad D_2 z(t) + (D_1 D_2 + D_3) z(t-1) + D_1 (D_1 D_2 + D_3) z(t-2) + \dots + \\ &\quad D_1^{t-t_0-2} (D_1 D_2 + D_3) z(t_0+1) + D_1^{t-t_0-1} D_3 z(t_0) + \\ &\quad e(t) + D_1 e(t-1) + \dots + D_1^{t-t_0-1} e(t_0+1) \\ &= D_1^{t-t_0} y(t_0) + D_2 z(t) + \sum_{k=1}^{t-t_0} D_1^{k-1} (D_1 D_2 + D_3) z(t-k) + \sum_{k=0}^{t-t_0} D_1^k e(t-k) \end{aligned}$$

Onder stabiliteitsvoorwaarde 3.2.46, toegepast op de eigenwaarden van  $D_1 - I$ , geldt voor  $t' = t - t_0$ :  $\lim_{t' \rightarrow \infty} D_1^{t'} = 0$  en volgt voor  $t' \rightarrow \infty$  de finale vorm

$$y(t) = D_2 z(t) + \sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k-1} (D_1 D_2 + D_3) z(t-k) + \sum_{k=0}^{\infty} D_1^k e(t-k)$$

Bij interpretatie van de waarden in  $z(t+1)$  als tijd-anticiperende deel-input-waarden blijkt de oplossing te schrijven in termen van de response-functie voor stochastisch differentie-model  $[A, B, C, D]$

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= Ax(t) + Bu(t) + e_x(t+1) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + e_y(t) \end{aligned}$$

indien wordt gespecificeerd

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A + I = D_1 & e_x(t) &= e(t) \\ B &= [D_2 \quad D_3] & u(t) &= \begin{bmatrix} z(t+1) \\ z(t) \end{bmatrix} \\ C &= I \\ D &= 0 & e_y(t) &= 0 \end{aligned}$$

Blijkens  $z(t+1)$  in  $u(t)$  wordt klaarblijkelijk voorzien in een tijd-anticiperende deel-input. De response-functie 3.2.63, waaraan bij een stochastisch verband error-termen moeten worden toegevoegd

$$3.4.15 \quad y(t) = C\tilde{A}^{t-t_0}x(t_0) + C \sum_{k=t_0}^{t-1} \tilde{A}^{t-k-1}Bu(k) + Du(t) + \\ C \sum_{k=t_0}^{t-1} \tilde{A}^{t-k-1}e_x(k+1) + e_y(t)$$

luidt voor dit bijzondere geval

$$y(t) = \tilde{A}^{t-t_0}y(t_0) + \sum_{k=t_0}^{t-1} \tilde{A}^{t-k-1}Bu(k) + \sum_{k=t_0}^{t-1} \tilde{A}^{t-k-1}e(k+1) =$$

$$\tilde{A}^{t-t_0}y(t_0) + Bu(t-1) + \tilde{A}Bu(t-2) + \tilde{A}^2Bu(t-3) + \dots + \\ \tilde{A}^{t-t_0-2}Bu(t_0+1) + \tilde{A}^{t-t_0-1}Bu(t_0) + \sum_{k=t_0}^{t-1} \tilde{A}^{t-k-1}e(k+1) =$$

$$D_1^{t-t_0}y(t_0) + D_2z(t) + D_3z(t-1) + \\ D_1D_2z(t-1) + D_1D_3z(t-2) + \\ D_1D_2z(t-2) + D_1D_3z(t-3) + \dots + \\ D_1^{t-t_0-2}D_2z(t_0+2) + D_1^{t-t_0-2}D_3z(t_0+1) + \\ D_1^{t-t_0-1}D_2z(t_0+1) + D_1^{t-t_0-1}D_3z(t_0) + \sum_{k=t_0}^{t-1} \tilde{A}^{t-k-1}e(k+1) =$$

$$D_1^{t-t_0}y(t_0) + D_2z(t) + \sum_{k=1}^{t-t_0} D_1^{k-1}(D_1D_2 + D_3)z(t-k) + \sum_{k=0}^{t-t_0} D_1^k e(t-k) - \\ D_1^{t-t_0}D_2z(t_0)$$

en geeft dus de oplossing, die door Theil en Boot werd afgeleid, althans bij verwaarlozing van de term  $D_1^{t-t_0}D_2z(t_0)$  met daarin het effect van  $z(t_0)$  als tijd-anticiperende deel-input  $z(t_0-1+1)$  op het voorafgaande tijdstip  $t_0-1$ . Bovendien blijkt de finale vorm te schrijven als een functie van de impulse-response  $H$  van  $[A, B, C, D]$ . Analoog aan 3.2.73 volgt nl. onder stabiliteitsvoorwaarde 3.2.46

$$3.4.14 \quad \lim_{t' \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t' \rightarrow \infty} \sum_{k=t_0}^t H(t-k)u(k) + \left[ \lim_{t' \rightarrow \infty} C \sum_{k=t_0}^{t-1} \tilde{A}^{t-k-1} e_x(k+1) + e_y(t) \right]$$

of voor het bijzondere model van Theil en Boot met  $C = I$ ,  $D = H(0) = 0$  en  $e_y(t) = 0$

$$\lim_{t' \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t' \rightarrow \infty} \sum_{k=t_0}^{t-1} H(t-k)u(k) + \lim_{t' \rightarrow \infty} \sum_{k=t_0}^{t-1} \tilde{A}^{t-k-1} e(k+1)$$

hetgeen bij verwaarlozing van  $D_1^{t-t_0} D_2 z(t_0)$  een andere schrijfwijze voor hun finale vorm is vanwege  $\tilde{A} = D_1$  en dus

$$\sum_{k=t_0}^{t-1} \tilde{A}^{t-k-1} e(k+1) = \sum_{k=0}^{t-t_0} D_1^k e(t-k)$$

terwijl volgens 3.2.67 voor  $C = I$

$$\sum_{k=t_0}^{t-1} H(t-k)u(k) = \sum_{k=t_0}^{t-1} \tilde{A}^{t-k-1} B u(k) = D_2 z(t) + \sum_{k=1}^{t-t_0} D_1^{k-1} (D_1 D_2 + D_3) z(t-k) - D_1^{t-t_0} D_2 z(t_0)$$

Met tijd-anticiperende deel-inputs wordt in de econometrie frequent gewerkt. In het geval van zo'n tijd-anticiperende deel-matrix  $B_+$  in matrix  $B = [B_+ \ B_0]$  verdient het aanbeveling om behalve  $H$

$$H(t'') = \begin{cases} \tilde{C} \tilde{A}^{t''-1} B & \text{voor } t'' > 0 \\ D & \text{voor } t'' = 0 \end{cases}$$

en waarin het tijd-anticiperende deel  $D_+$  van  $D = [D_+ \ D_0]$  uiteraard gelijk aan 0 moet zijn, tevens functie  $\tilde{H}$  te berekenen

$$3.4.15 \quad \tilde{H}(t'') = \begin{cases} \tilde{C} \tilde{A}^{t''-1} (\tilde{A} B_+ + B_0) & \text{voor } t'' > 0 \\ \tilde{C} B_+ + D_0 & \text{voor } t'' = 0 \end{cases}$$

$\tilde{H}$  vat de tijd-anticiperende effecten en de niet-tijd-anticiperende effecten van dezelfde input-waarden op het volgende tijdstip samen en bezit daarom slechts de helft van het aantal kolommen van  $H$ . Voor het model van Theil en Boot met  $\tilde{A} = D_1$ ,  $B = [B_+ \ B_0] = [D_2 \ D_3]$ ,  $C = I$  en  $D = 0$

$$\begin{aligned}\tilde{H}(0) &= D_2 \\ \tilde{H}(1) &= D_1 D_2 + D_3 \\ \tilde{H}(2) &= D_1 (D_1 D_2 + D_3) \\ \tilde{H}(3) &= D_1^2 (D_1 D_2 + D_3) \\ &\vdots\end{aligned}$$

De elementen in ieder van de kolommen van  $\tilde{H}(0)$  beschrijven het onmiddellijke effect van een toename van één eenheid in de betrokken input-variabele en werden door Goldberger "impact multipliers" genoemd (81). De elementen van  $\tilde{H}(1)$ ,  $\tilde{H}(2)$ , ... noemde hij "interim multipliers" en zij beschrijven van dezelfde (niet-volgehouden) toename het effect op latere tijdstippen 1, 2, .... Aannemend, dat  $A^{-1}$  bestaat, worden de "total multipliers"

$$\begin{aligned}6 \quad G &= \lim_{t' \rightarrow \infty} \sum_{k=t_0}^t \tilde{H}(t-k) = \lim_{t' \rightarrow \infty} [CB_+ + D_0 + C(I + \tilde{A} + \tilde{A}^2 + \dots + \tilde{A}^{t'}) (\tilde{A}B_+ + B_0)] = \\ &CB_+ + D_0 + C(I - \tilde{A})^{-1} (\tilde{A}B_+ + B_0) = \\ &CB_+ + D_0 - CA^{-1} (\tilde{A}B_+ + B_0)\end{aligned}$$

Zij beschrijven het totale, uiteindelijke effect van een volgehouden toename van één eenheid over een onbeperkt lange periode. Voor het model van Klein en Boot met  $B = [B_+ \ B_0] = [D_2 \ D_3]$  geldt  $G = (I - D_1)^{-1} (D_2 + D_3)$ . Voor  $B = B_0$  en  $D = D_0$  (geen tijd-anticiperende deel-inputs) en voor continue tijd (tijd-anticiperende deel-inputs niet toelaatbaar) wordt 3.4.16

$$7 \quad G = D - CA^{-1}B$$

Bij constante input -  $u(t) = c$  voor alle  $t \geq t_0$  - kan men, nog steeds asymptotische stabiliteit 3.4.16 c.q. 3.4.17 en het bestaan van  $A^{-1}$  aannemend, de zero-state en tevens totale response  $y(t)$  voor  $t \rightarrow \infty$  berekenen middels  $Gc$ .

Een laatste probleem in predictie-onderzoek op basis van schatting  $[\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}]$  van een stochastisch model  $[A, B, C, D]$  is het bepalen van standaardfouten voor de geprediceerde waarden  $\hat{x}(t)$  en  $\hat{y}(t)$ . We beperken ons weer tot differentie-modellen  $[A, B, C, D]$  met  $\Delta t = 1 = \delta$ . Gebruik makend van 3.3.82

$$\begin{bmatrix} x(t_0 + 1) \\ y(t_0 + 1) \end{bmatrix} = \Pi \begin{bmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ u(t_0) \\ u(t_0 + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 & B & 0 \\ \tilde{C}\tilde{A} & 0 & CB & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ u(t_0) \\ u(t_0 + 1) \end{bmatrix}$$



Hierin kan  $\Pi$  zonder verlies aan algemeenheid worden beperkt tot

$$\Pi = \begin{bmatrix} \tilde{A} & B & 0 \\ \tilde{C} & CB & D \end{bmatrix}$$

en indien  $C = I$  en  $D = 0$  of indien men alleen geïnteresseerd is in geprediceerde waarden  $\hat{x}(t)$  tot

$$\Pi = [\tilde{A} \quad B]$$

Is  $\hat{\Pi}$  de LSNR-schatting,  $Z_0$  de matrix van  $x(t_0)$ -,  $u(t_0)$ - en  $u(t_0 + 1)$ -waarden - zie 3.3.30 - op basis waarvan de schatting is uitgevoerd en  $z_0$  de kolom-vector van  $x(t_0)$ -,  $u(t_0)$ - en  $u(t_0 + 1)$ -waarden op basis waarvan wordt geprediceerd, dan wordt de variantie-covariantie-matrix van predictie-fouten geschat door (82)

$$\text{v\hat{a}r} \begin{bmatrix} \hat{x}(t_0 + 1) \\ \hat{y}(t_0 + 1) \end{bmatrix} = (1 + z_0'(Z_0'Z_0)^{-1}z_0) \hat{\Sigma}_v$$

waarin  $\hat{\Sigma}_v$  volgens 3.3.75 wordt verkregen uit  $Z_0$ ,  $\hat{\Pi}$  en de matrix  $Y$  van  $x(t_0 + 1)$ - en  $y(t_0 + 1)$ -waarden. Goldberger, Nagar en Odeh (83) gaven voor het geval  $\hat{\Pi}$  als  $\hat{\Pi} = -\hat{\Delta}^{-1}\hat{\Gamma}$  is bepaald uit  $[\hat{\Delta} \quad \hat{\Gamma}]$  van de structurele vorm de schatter

$$\text{v\hat{a}r} \begin{bmatrix} \hat{x}(t_0 + 1) \\ \hat{y}(t_0 + 1) \end{bmatrix} = F_0 \cdot \text{v\hat{a}r}(\hat{\Pi}) \cdot F_0' + \hat{\Sigma}_v$$

waarin  $\text{v\hat{a}r}(\hat{\Pi})$  wordt gegeven door 3.3.79,  $\hat{\Sigma}_v$  door 3.3.80 en waarin  $F_0$  als volgt wordt opgebouwd uit  $z_0$

$$F_0 = \begin{bmatrix} z_0' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_0' & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & z_0' \end{bmatrix}$$

Geschatte standaard-fouten voor de geprediceerde waarden  $\begin{bmatrix} \hat{x}(t_0 + 1) \\ \hat{y}(t_0 + 1) \end{bmatrix}$

verkrijgt men als de wortels uit de diagonaal-elementen van

$$\text{vâr} \begin{bmatrix} \hat{x}(t_0 + 1) \\ \hat{y}(t_0 + 1) \end{bmatrix} .$$

De schatters zijn zuiver en/of consistent onder dezelfde voorwaarden waaronder  $\hat{\Pi}$ ,  $\text{vâr}(\hat{\Pi})$  en  $\hat{\Sigma}$  in 3.3.73 t/m 3.3.75 c.q. 3.3.78 t/m 3.3.80 dat zijn.

Onder twee additionele voorwaarden kunnen de schatters naar latere tijdstippen  $t$  worden gegeneraliseerd

$$3.4.18 \quad \text{vâr} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix} = (1 + z'_{t-1} (Z'_0 Z_0)^{-1} z_{t-1}) \hat{\Sigma}_v$$

$$3.4.19 \quad \text{vâr} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix} = F_{t-1} \cdot \text{vâr}(\hat{\Pi}) \cdot F'_{t-1} + \hat{\Sigma}_v$$

De eerste voorwaarde is, dat het model  $[A, B, C, D]$  voor die latere tijdstippen blijft gelden (tijd-invariant is over de betrokken perioden); met name moeten de assumpties m.b.t. error-komponenten voor toekomstige  $e_x(t)$  en  $e_y(t)$  blijven gelden. De tweede voorwaarde is, dat de waarden van de gepredetermineerde variabelen in  $z_{t-1}$  c.q.  $F_{t-1}$  exakt zijn en dus niet middels schatting verkregen. Bij schatting, bijv. indien de lagged-endogene waarden in  $z_{t-1}$  als  $\hat{x}(t-1)$  iteratief worden gegenereerd door  $[\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}]$  zelf, zullen de geschatte standaard-fouten een onderschatting vormen van de werkelijke standaard-fouten. De totale onderschatting zal groter zijn, naarmate de iteratief ontwikkelde reeks  $\hat{x}(t_0 + 1)$ ,  $\hat{x}(t_0 + 2)$ , ... verder wordt voortgezet. Aan de hand van 3.4.15 blijkt overigens tevens, dat de onderschattingstoename zal afnemen voor een stabiel model  $[A, B, C, D]$ , omdat voor een dergelijk model het effect van verder afgelegene error-komponenten  $e_x(k+1)$  vanwege de vermenigvuldiging met  $\tilde{A}^{t-k-1}$  zal afnemen en vanaf een bepaald punt praktisch tot nul zal reduceren. De standaard-fouten, die middels het laatste onderdeel van de computer-procedure in appendix A onder de naam SFXYT voor de voorbeelden in hoofdstuk 4 werden berekend en die gebruik maken van 3.4.19, dient men daarom op te vatten als geschatte ondergrenzen, die echter de werkelijke standaard-fouten dichter benaderen, naarmate het model stabiel is.

Ten slotte nog een opmerking over het tweetal functies, dat predic-tie-onderzoek kan vervullen. Predictie-onderzoek heeft als meest voor de hand liggende functie kennisvergroting over toekomstig gedrag en het be-vorderen van een juiste keuze uit beslissingsalternatieven. Uitgaande van de geldigheid van het geschatte model worden tot op een bepaald toe-komstig tijdstip  $t_1$  output-segmenten  $y_{[t_0, t_1]}$  geschat onder alternatieve input-segmenten  $u_{[t_0, t_1]}$ . Na vergelijking van de resulterende  $\hat{y}_{[t_0, t_1]}$  en aanwijzing van de meest wenselijke volgens bepaalde criteria kiest men bijbehorend input-segment  $u_{[t_0, t_1]}$ . De tweede functie van predic-tie-onderzoek, die in de huidige ontwikkelingsfase van het sociaal-weten-schappelijk onderzoek wellicht belangrijker is dan de eerste, is de toetsingsfunctie. Toetsing gaat vooraf aan beslissing, in zoverre bij het ne-men van beslissingen de geldigheid van het model moet worden aangenomen, waar de toetsing zich op richt.

Het belang van de toetsingsfunctie werd o.a. benadrukt door Christ, die onderscheid maakte tussen nonpredictieve en predictieve toetsing van modellen (84). Nonpredictieve toetsing maakt o.a. gebruik van de

standaard-fouten voor de geschatte coëfficiënten  $\hat{\pi}_{ij}$ ; (onder de norma-liteitsassumptie kan men op de gebruikelijke wijze statistisch toetsen volgens de t-toets:  $t = \hat{\pi}_{ij} / \sqrt{\text{var}(\hat{\pi}_{ij})}$ ), de multipele correlatie  $R_i$  tussen iedere endogene variabele  $i$  en de gepredetermineerde variabelen (de computerprocedure in appendix A berekent deze onder de naam MRYZ; hun kwadraten, die de proporties verklaarde variantie geven, onder de naam MMRYZ), maten voor "goodness of fit", etc., maar confronteert het model uitsluitend met de data uit de steekproef-periode, op basis waarvan het model werd geschat. Predictieve toetsing richt zich op de implicaties van het geschatte model voor latere tijdstippen en confronteert de predic-tieve segmenten  $\hat{x}_{[t_0, t_1]}$  en  $\hat{y}_{[t_0, t_1]}$  ofwel 1) met a priori informatie over de werkelijke segmenten  $x_{[t_0, t_1]}$  en  $y_{[t_0, t_1]}$  ofwel 2) met de werke-lijke segmenten  $x_{[t_0, t_1]}$  en  $y_{[t_0, t_1]}$  zelf. Alleen al confrontatie met a priori informatie kan leiden tot verwerping van een model, dat alle nonpredictieve toetsen met goed gevolg heeft doorstaan; bijv. een zoda-nig instabiel model, dat  $\hat{x}(t)$  en  $\hat{y}(t)$  in  $\hat{x}_{[t_0, t_1]}$  en  $\hat{y}_{[t_0, t_1]}$  snel absurd hoge of lage waarden bereiken. Dergelijke dynamische implicaties van een model blijven zonder expliciet predictie-onderzoek gemakkelijk onopge-merkt.

Indien de steekproef-periode al enige tijd achter de rug is, heeft men soms over de aansluitende periode de beschikking over werkelijke segmenten  $x_{[t_0, t_1]}$  en  $y_{[t_0, t_1]}$ , die niet zijn gebruikt bij schatting van het model en evenmin voor de modelspecificatie. Het ligt dan voor de hand de curven, die de predictieve segmenten  $\hat{x}_{[t_0, t_1]}$  en  $\hat{y}_{[t_0, t_1]}$  beschrijven te vergelijken met de werkelijke curven. "It is often said that the acid test of an econometric model or equation is its ability to predict data that were not used in its construction and estimation" (85) en Christ sluit zich bij deze mening aan. Een exakte maat voor predictieve "goodness of fit" (overeenkomst tussen predictieve en werkelijke curven) verkrijgt men door de correlaties tussen de waarden in predictieve en werkelijke segmenten te berekenen. De predictieve toets bestaat dan hierin, dat deze predictieve correlaties worden vergeleken met de onder nonpredictieve toetsing genoemde multi-pele correlaties voor de steekproef-periode. Indien de predictieve correlaties veel lager zijn, wordt het model predictief verworpen. Gezien het uiteindelijke doel van de wetenschapsbeoefening: verklaring en predictie, zou predictieve toetsing aan de hand van a priori informatie of werkelijke data wellicht tot de standaardprocedure moeten gaan behoren bij toetsing van sociaal-wetenschappelijke verklaringsmodellen.

Er is enige discussie geweest in de literatuur over de wijze, waarop in predictie-onderzoek predictie-segment  $\hat{x}_{[t_0, t_1]}$  moet worden bepaald. Klein en Goldberger substitueerden bij het bepalen van opeenvolgende schattingen  $\hat{x}(t)$  steeds de werkelijke lagged-endogene waarden  $x(t-1)$  in de vergelijkingen van hun model i.p.v. de door het model zelf gegenereerde schattingen  $\hat{x}(t-1)$ . Kritiek op hun werkwijze werd geleverd door Adelman and Adelman, die er met name ook op wijzen, dat het op die manier onmogelijk wordt de vrije beweging te bepalen: "First of all, the fact that Klein and Goldberger used observed quantities as inputs for their annual forecasts, rather than values generated by the model from earlier data, prevented them from studying, at the same time, the type of dynamic paths which would be traversed by the system in the absence of external interference" (86). Bij hun eigen extrapolatie over de periode 1952-2052 van het Klein-Goldberger model, dat op basis van Amerikaanse jaardata 1929-1952 was geschat, kozen zij als enige werkelijke toestand begintoestand  $x(t_0)$  in 1952 en gingen ze verder uit van voornamelijk lineaire

curven in input-segment  $u_{[t_0, t_1]}$ . Input-segment  $u_{[t_0, t_1]}$  werd dus grotendeels vervangen door  $u(t_0)$  en  $b_{[t_0, t_1]}$  zoals hier aangenomen bij de afleiding van 3.4.2 t/m 3.4.5 en toegepast in het voorlaatste onderdeel 6 van de computerprocedure in appendix A; in het laatste onderdeel 7 kunnen bij iedere iteratieve stap andere waarden  $u(t - 1)$  worden ingevuld en wordt alleen in het geval van een differentieel model een stapsgewijs lineair verloop vereist middels waarden  $b(t - 1)$  over overigens willekeurig kleine tijdsafstanden onder de naam TITO. De predictie-curven van Adelman en Adelman lieten een vrij vlak en min of meer lineair verloop zien en waren niet in overeenstemming met a priori informatie over de tamelijk sterke conjuncturele golfbeweging van de Amerikaanse economie. Alleen door toevoeging van "random shocks" als error-komponenten aan de schattingsvergelijkingen konden zij min of meer realistische golfbewegingen genereren.

### 3.5 Systemische verklaringmodellen als koppelingsmodellen van toestandruimte-modellen

In deze paragraaf zal opnieuw aandacht worden geschonken aan de in paragraaf 2.1 geïntroduceerde systemische verklaringmodellen:

$$R(S) \equiv \langle V; \mathcal{S}; A_\alpha \rangle \quad \text{met } V \equiv V^\alpha \cup V^\beta \cup \dots \quad \text{en}$$

$$\mathcal{S} \equiv \langle A_\alpha, A_\beta, \dots, I_{\alpha, \beta}, I_{\alpha, \gamma}, \dots \rangle$$

De modellen  $\langle V^\alpha; A_\alpha \rangle$ ,  $\langle V^\beta; A_\beta \rangle$ , ... voor micro-eenheden  $\alpha$ ,  $\beta$ , ... in systeem  $S$  zullen nu echter worden opgevat als voortvloeiend uit toestandruimte-modellen: de verklaringsrelaties  $A_\alpha$ ,  $A_\beta$ , ... moeten uit response-functies  $\rho_\alpha, \rho_\beta$ , ... afleidbaar zijn middels oertoestanden  $x_\alpha^* \in \Sigma^\alpha$ ,  $x_\beta^* \in \Sigma^\beta$ , .... Om te benadrukken, dat voor ieder van de modellen  $\langle V^\alpha; A_\alpha \rangle$ ,  $\langle V^\beta; A_\beta \rangle$ , ... een toestand-ruimte-model is gedefinieerd, zullen we schrijven  $\langle V^\alpha; \rho_\alpha \rangle$ ,  $\langle V^\beta; \rho_\beta \rangle$ , ....

Aangezien response-functies per definitie georiënteerd zijn, bestaat ieder van de (tijdfunctie-)ruimten  $V^\alpha$ ,  $V^\beta$ , ... uit een input-en output-ruimte:  $V^\alpha \equiv U^\alpha \cup Y^\alpha$ ,  $V^\beta \equiv U^\beta \cup Y^\beta$ , ... De koppelingsrelaties  $I_{y, z}$  zijn gedefinieerd voor telkens  $U^y$  of  $Y^y$  van micro-eenheid (heden)  $y$  aan de

éne kant en  $U^z$  of  $V^z$  van micro-eenheid (heden)  $z$  aan de andere kant. Zij koppelen de response-functies van de micro-eenheden in systeem  $S$  aan een tot mathematisch systeem  $\mathcal{S}$ . Koppelingsrelaties kunnen overigens ook zelf worden opgevat als geheugenloze verklaringsrelaties voor gesimuleerde micro-eenheden, tussen de micro-eenheden  $y$  en  $z$  geplaatst.

In het geval van multidimensionele ruimten - typisch  $u(t) \in \text{Re}^r$ ,  $y(t) \in \text{Re}^m$  - valt  $I_{y,z}$  uiteen in unidimensionele koppelingsrelaties, gedefinieerd voor unidimensionele ruimte  $U_i^y$  of  $V_i^y$  van  $y$  aan de éne kant en unidimensionele ruimte  $U_j^z$  of  $V_j^z$  van  $z$  aan de andere kant. Unidimensionele koppelingsrelaties zijn opgenomen in fig.2.1.3. De eenvoudigste is de unitor:  $v_j^z(t) = v_i^y(t)$ , waarvoor  $v_i^y$  en  $v_j^z$  moeten voldoen aan de volgende voorwaarden (87):

- 1)  $v_i^y$  en  $v_j^z$  zijn niet beide output-variabelen:  $-(v_i^y \in V_i^y \ \& \ v_j^z \in V_j^z)$ ,
- 2) als  $v_i^y$  output-variabele is en  $v_j^z$  input-variabele:  $v_i^y \in V_i^y \ \& \ v_j^z \in U_j^z$ , dan maakt  $v_i^y$  deel uit van  $U_j^z$ :  $V_i^y \subseteq U_j^z$  en is  $U_i^y \equiv V_j^z$  het waardebereik van de gemeenschappelijke z.g. input-output-variabele,
- 3) als  $v_i^y$  en  $v_j^z$  beide input-variabelen zijn:  $v_i^y \in U_i^y \ \& \ v_j^z \in U_j^z$ , dan is het waardebereik van de gemeenschappelijke input-variabele de intersectie  $U_i^y \equiv U_j^z \equiv (U_i^y \cap U_j^z)$ .

Analoog aan de unitor moeten ook andere koppelingsrelaties ieder aan bepaalde voorwaarden voldoen. De scalar  $v_j^z(t) = a \cdot v_i^y(t)$  heeft als bijzondere eigenschap, dat hij kan en ook vaak wordt gedefinieerd voor output-ruimte  $V^y$  van slechts één micro-eenheid  $y$ . De tweede micro-eenheid  $z$  ontbreekt dus en de scalar kan dan zelf worden opgevat als een (gekoppelede) verklaringsrelatie  $\rho_z$  voor een (gesimuleerde) micro-eenheid  $z$  met input-variabele  $v_i^y$  en output-variabele  $v_j^z$ . Evenals de unitor definiëren ook andere koppelingsrelaties telkens een gemeenschappelijke variabele, op te vatten als een variabele van  $\mathcal{S}$  en van macro-eenheid  $\alpha'$  en daarom aangeduid met  $v_k^{\alpha'}$ . Deze macro-variabelen nemen waarden aan in de deelruimten  $U^{\alpha'}, U^{\beta}, \dots, \gamma^{\alpha'}, \gamma^{\beta}, \dots$ , die als gevolg van de restricties opgelegd door de koppelingsrelaties ontstaan uit  $U^{\alpha}, U^{\beta}, \dots, \gamma^{\alpha}, \gamma^{\beta}, \dots$

Macro-verklaringsrelatie  $A_{\alpha'}$ , wordt evenals de micro-verklaringsrelaties opgevat als georiënteerd, zodat  $v^{\alpha'}$  bestaat uit een input- en output-ruimte:  $v^{\alpha'} \equiv U^{\alpha'} \cup \gamma^{\alpha'}$ . De vraag is, hoe  $U^{\alpha'}$  en  $\gamma^{\alpha'}$  worden opgebouwd uit  $U^{\alpha}, U^{\beta}, \dots, \gamma^{\alpha}, \gamma^{\beta}, \dots$ . Wat is m.a.w. de aard van macro-variabelen

$v_k^{\alpha'}$  en van alle niet bij koppeling betrokken variabelen  $v_i^y$ , wanneer zij worden beschouwd op het niveau van  $\mathcal{S}$  en  $\alpha'$ ? "If the components of  $\mathcal{S}$  are oriented, then so is  $\mathcal{S}$ , with the input variables of  $\mathcal{S}$  being those input variables which are not input-output variables" (88). Alle overige variabelen vormen output-variabelen van  $\mathcal{S}$  en kunnen in principe als output-variabelen van  $\alpha'$  optreden. Vaak zal men op macro-niveau echter slechts geïnteresseerd zijn in bepaalde output-variabelen, die naast hun verbindingsfunctie tussen micro-eenheden geen bijzondere betekenis hebben en daarom buiten macro-verklaringsrelatie  $A_\alpha$ , worden gehouden. Dergelijke verwaarloosde variabelen noemen Zadeh en Desoer "suppressed output variables" (88). Essentiële vragen m.b.t. zo'n  $A_\alpha$ , waarvan input-ruimte  $U^{\alpha'}$  en output-ruimte  $U^\alpha$  op de aangegeven wijze zijn ontstaan, betreffen

- 1) bepaaldheid, d.w.z. bepalen de (deterministische c.q. stochastische) micro-verklaringsrelaties  $\rho_\alpha, \rho_\beta, \dots$  in combinatie met de (deterministische) koppelingsrelaties  $I_{\alpha,\beta}, I_{\alpha,\gamma}, \dots$  een (deterministische c.q. stochastische) macro-verklaringsrelatie  $\rho_\alpha$ , zodat  $A_\alpha$ , dus via  $\rho_\alpha$ , uit  $\rho_\alpha, \rho_\beta, \dots$  afleidbaar is,
- 2) zijn er mogelijk andere koppelingen  $\tilde{\mathcal{S}}$ , die een  $\tilde{\rho}_\alpha$  bepalen waaruit  $A_\alpha$ , eveneens afleidbaar is en is zo'n  $\tilde{\rho}_\alpha$ , al dan niet met  $\rho_\alpha$ , equivalent? We zullen deze vragen illustreren aan de hand van een aantal koppelingen - zie fig. 3.5.1 - die men bijv. zou kunnen aantreffen in een onderzoek naar attitude-verandering.

Stel, dat  $\alpha, \beta$  en  $\gamma$  in fig. 3.5.1 personen voorstellen en dat de verklaringsrelaties  $\rho_\alpha, \rho_\beta$  en  $\rho_\gamma$  het verband aangeven tussen bepaalde invloeden (input-variabelen) op ieders houding t.o.v. iets bepaalds (output-variabele). Deze verklaringsrelaties zouden onderzocht kunnen worden in verdeeld onderzoek, in welk geval wordt aangenomen, dat voor ieder dezelfde verklaringsrelatie van toepassing is. Noodzakelijk is dat niet. Indien men beschikt over tijdseries voor iedere persoon, zou men eventuele verschillen in het verband tussen input en output bij de personen kunnen toelaten en onderzoeken. Als één van de input-variabelen nemen we de houding van de beste vriend. Onder I is dit de enige input-variabele en blijken  $\alpha, \beta$  en  $\gamma$  in serie gekoppeld:  $\beta$  wordt beïnvloed door zijn beste vriend  $\alpha$ ,  $\gamma$  door zijn beste vriend  $\beta$ . Macro-verklaringsrelatie  $\rho_\alpha$ , heeft één input-variabele: de houding van de beste vriend van  $\alpha$ , die zich buiten het systeem  $\mathcal{S}$  bevindt, en drie output-variabelen,

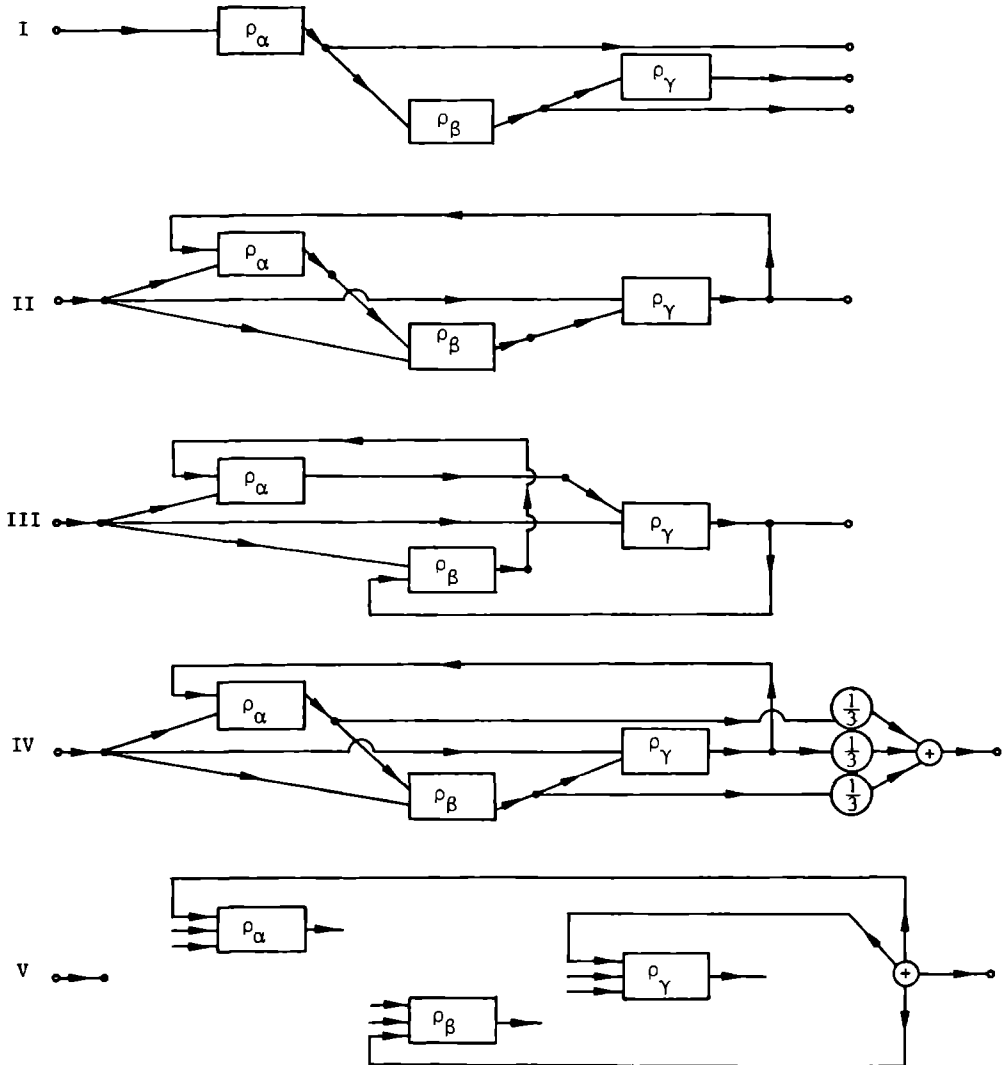


Fig. 3.5.1: Een vijftal koppelingen  $\delta$  van micro-verklaringsrelaties  $\rho_\alpha$ ,  $\rho_\beta$  en  $\rho_\gamma$ ; koppeling V moet worden opgevat als een uitbreiding van koppeling IV.



waaronder twee input-output-variabelen. De koppelingsrelaties  $I_{\alpha,\beta}$  en  $I_{\beta,\gamma}$  moeten uiteraard evenals de micro-verklaringsrelaties empirisch worden vastgesteld dan wel in een experimenteel kader empirisch worden gerealiseerd. Men kan hier gebruik maken van de uit de sociometrie afkomstige structurele analyse, waarvan het belang voor de systeem-methode reeds in paragraaf 1.5 werd onderstreept. De resultaten van een structurele analyse worden meestal weergegeven in een graph. De punten van de graph corresponderen dan met de blocks in het block-diagram, terwijl de pijlen van de graph bepalen tussen welke blocks een input-variabele wordt verbonden met een output-variabele. Soms beschikt men over verschillende graphs voor S, bijv. indien een totale communicatiestructuur uiteenvalt in verschillende partiële structuren voor verschillende communicatie-inhouden. Indien de input- en output-variabelen bij de personen zich op analoge wijze naar communicatie-inhouden onderscheiden, bepaalt de betrokken graph tevens, welke output-variabele met welke input-variabele moet worden verbonden. Structurele analyse is als zodanig beschrijvend van aard, maar krijgt bij de constructie van koppelingen een verklarend karakter. Koppelingsrelaties zoals  $v_j^z(t) = v_i^y(t)$ ,  $v_j^z(t) = a \cdot v_i^y(t)$ , etc. worden nl. in § opgenomen onder de assumptie, dat zij gelden voor alle tijdstippen t. Alleen onder deze assumptie wordt macro-verklaringsrelatie  $\rho_\alpha$ , eventueel bepaald door de micro-verklaringsrelaties  $\rho_\alpha, \rho_\beta, \dots$  en de geheugenloze koppelingsrelaties  $I_{\alpha,\beta}, I_{\alpha,\gamma}, \dots$

II verschilt in drie opzichten van I. In de eerste plaats blijkt de serie-koppeling plaats te hebben gemaakt voor een feedback-koppeling:  $\alpha$  wordt op zijn beurt beïnvloed door  $\gamma$  in S zelf. Een gesloten mathematisch systeem § (geen input-variabelen op het niveau van § en  $\alpha'$ ) wordt echter voorkomen door de introductie van een nieuwe en gemeenschappelijke input-variabele in de micro-verklaringsrelaties. Men zou kunnen denken aan een beïnvloedingsprogramma of cursus over het houdingsobject, waaraan alle groepsleden  $\alpha, \beta$  en  $\gamma$  gelijkelijk deelnemen. Tevens worden in II de input-output-variabelen tussen  $\alpha$  en  $\beta$  en tussen  $\beta$  en  $\gamma$  onderdrukt en blijft dus alleen die tussen  $\gamma$  en  $\alpha$  over als output-variabele op het niveau van  $\alpha'$ . Op macro-niveau bestaat klaarblijkelijk geen interesse in de houding van  $\alpha$  en  $\beta$  maar alleen in het door de koppeling geïmpliceerde effect van de gemeenschappelijke input-variabele op de houding van  $\gamma$ .

III verschilt slechts van II, doordat de feedback-koppeling de tegengestelde richting volgt. Het verschil van IV met II is, dat de input-output-variabelen in IV eerst worden gemiddeld (middels scalors en adder), voordat ze als een enkelvoudige output-variabele op het niveau van  $\alpha'$  worden uitgelezen. Men is hier klaarblijkelijk geïnteresseerd in het gemiddelde houdingsniveau. In V wordt dit gemiddelde houdingsniveau bovendien teruggekoppeld en als derde input-variabele aan ieder van de micro-verklaringsrelaties toegevoegd. In paragraaf 1.5 werd naast de structurele analyse als een tweede belangrijk aanknopingspunt met de systeemmethodologie de multi-niveau-analyse vermeld. Het gemiddelde houdingsniveau is als variabele op het niveau van  $\alpha'$  precies, wat in de multi-niveau-analyse een analytische groepsvariabele wordt genoemd, en als additionele variabele toegevoegd aan de micro-verklaringsrelatie precies, wat een contextuele variabele wordt genoemd. Ook de betrokken micro-verklaringsrelaties dragen de naam contextueel. Dergelijke begrippen uit de multi-niveau-analyse zijn blijkens IV en V gemakkelijk te vertalen in koppelingen § en grafisch in een block-diagram waar te geven.

In het deterministische geval is een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor bepaaldheid, dat door § voor iedere input  $u^{\alpha'} \in U^{\alpha'}$  en toestand  $x^{\alpha'} \in \Sigma^{\alpha'}$  de output  $y^{\alpha'} \in Y^{\alpha'}$  uniek wordt gegeven (89). Hierbij is toestand-ruimte  $\Sigma^{\alpha'}$  op macro-niveau een deelverzameling van het cartesisch product van de toestand-ruimten  $\Sigma^{\alpha}, \Sigma^{\beta}, \dots$  op micro-niveau, nl.  $\Sigma^{\alpha'} \subseteq \Sigma^{\alpha} \times \Sigma^{\beta} \times \dots \subseteq \Sigma^{\alpha} \times \Sigma^{\beta} \times \dots$  met  $\Sigma^{\alpha}, \Sigma^{\beta}, \dots$  de vanuit  $x_{\alpha}^*, x_{\beta}^*, \dots$  bereikbare deelverzamelingen van  $\Sigma^{\alpha}, \Sigma^{\beta}, \dots$  voor inputs in de deelruimten  $U^{\alpha}, U^{\beta}, \dots$  - zie voor bereikbaarheid vanuit  $x^*$ : 3.1.20. De specificatie van  $\Sigma^{\alpha'}$  en het bepaaldheidsbewijs zijn vaak allerminst eenvoudig. Zadeh en Desoer bespreken echter een drietal soorten koppelingen §, die altijd een  $\rho_{\alpha}$ , bepalen dankzij de structuur van de koppelingsrelaties  $I_{\alpha, \beta}, I_{\alpha, \gamma}, \dots$  of de aard van de micro-verklaringsrelaties  $\rho_{\alpha}, \rho_{\beta}, \dots$  (90):

- 1) koppelingen § zonder feedback-loops (zie bijv. I in fig. 3.5.1, II t/m IV bevatten ieder één feedback-loop, V bevat vier feedback-loops),
- 2) koppelingen met in iedere feedback-loop a) uitsluitend oplossingsrelaties van modellen  $[f(.,.,t), g(.,.,t)]$  als micro-verklaringsrelaties en b) minstens één micro-verklaringsrelatie met toestand-bepaalde output (zie voor modellen  $[f(.,.,t), g(.,.,t)]$ : 3.2.6 en 3.2.7 en voor toestand-bepaalde output: 3.1.6),

3) koppelingen § met in iedere feedback-loop a) uitsluitend oplossingsrelaties van modellen [A,B,C,D] als micro-verklaringsrelaties en b) uitsluitend unitors, scalors en adders als koppelingsrelaties.

Bijzondere gevallen van de modellen  $[f(\cdot, \cdot, t), g(\cdot, \cdot, t)]$  onder 2) vormen de modellen  $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$  en  $[A, B, C, D]$ , die verklaringrelaties met toestand-bepaalde output definiëren voor  $D(t) = 0$  (voor alle  $t$ ) c.q.  $D = 0$ . Zadeh and Desoer tekenen bij 2) aan: "... in most physical systems of the feedback type every loop (cycle) contains a component which introduces some delay and which can be approximated by a delay element .... Such delay elements have state-determined output, and it is largely for this reason, that most physical systems are determinate" (91). Zie voor de delayor fig. 2.1.5.

De bepaaldheid voor de koppelingen onder 1) en 2) berust in essentie hierop, dat men uitgaande van een willekeurige begintoestand  $x_0 \in \Sigma^{\alpha'}$  over opeenvolgende tijdstippen  $t \geq t_0$  input-waarden  $u^{\alpha'}(t)$  van een willekeurige  $u^{\alpha'} \in U^{\alpha'}$  kan kiezen, die dan suksessievelijk in de tijd en de pijlen van het block-diagram volgend de waarden van alle toestand-, input-output- en output-variabelen over alle opeenvolgende tijdstippen bepalen. In feedback-loops wordt daarbij uitgegaan van de begintoestand in de micro-verklaringsrelatie met toestand-bepaalde output. Deze bepaalt de betrokken output-waarde zonder dat daarvoor kennis is vereist van voorafgaande en op dat tijdstip nog onbepaalde (input-) output-waarden in de feedback-loop.

De afleiding van  $\rho_{\alpha}$ , voor de koppelingen § onder 1) en 2) kan het best worden verduidelijkt aan de hand van I en II in fig. 3.5.1. Voor willekeurige koppelingen verloopt de afleiding geheel analoog. I in fig. 3.5.1 bevat geen feedback-loops, zodat het een voorbeeld is van een koppeling onder 1). De micro-relaties  $\rho_{\alpha}$ ,  $\rho_{\beta}$ ,  $\rho_{\gamma}$  mogen dus zwak-causaal zijn ( $r_{\alpha}$ ,  $r_{\beta}$ ,  $r_{\gamma}$  mogen toestand-input-bepaalde output hebben):

$$y^{\alpha}(t) = \rho_{\alpha}(t, t_0, x_0^{\alpha}, u_{[t_0, t]}^{\alpha}) \begin{cases} x^{\alpha}(t) = s_{\alpha}(t, t_0, x_0^{\alpha}, u_{[t_0, t]}^{\alpha}) \\ y^{\alpha}(t) = r_{\alpha}(t, x^{\alpha}(t), u^{\alpha}(t)) \end{cases}$$

en analoog  $\rho_{\beta}$ ,  $\rho_{\gamma}$ . Via de koppelingsrelaties  $u^{\beta}(t) = y^{\alpha}(t)$ ,  $u^{\gamma}(t) = y^{\beta}(t)$ ,

macro-variabelen  $u^{\alpha'}(t) = u^{\alpha}(t)$ ,  $y^{\alpha'}(t) = \begin{bmatrix} y^{\alpha}(t) \\ y^{\beta}(t) \\ y^{\gamma}(t) \end{bmatrix}$  en begintoestand

$x_0^{\alpha'} = \begin{bmatrix} x_0^{\alpha} \\ x_0^{\beta} \\ x_0^{\gamma} \end{bmatrix}$  volgt  $\rho_{\alpha}$ , met  $\bar{\rho}_{\alpha}$  en  $\bar{\rho}_{\beta}$  opgevat als achtereenvolgens berekende

tijdfunctie-segmenten over het hele interval  $[t_0, t]$

$$y^{\alpha'}(t) = \begin{bmatrix} \rho_{\alpha}(t, t_0, x_0^{\alpha}, u^{\alpha'}_{[t_0, t]}) \\ \rho_{\beta}(t, t_0, x_0^{\beta}, \bar{\rho}_{\alpha}(t, t_0, x_0^{\alpha}, u^{\alpha'}_{[t_0, t]})) \\ \rho_{\gamma}(t, t_0, x_0^{\gamma}, \bar{\rho}_{\beta}(t, t_0, x_0^{\beta}, \bar{\rho}_{\alpha}(t, t_0, x_0^{\alpha}, u^{\alpha'}_{[t_0, t]}))) \end{bmatrix}$$

$$= \rho_{\alpha'}(t, t_0, x_0^{\alpha'}, u^{\alpha'}_{[t_0, t]})$$

en hieruit via  $x_{\alpha}^* = \begin{bmatrix} x_{\alpha}^* \\ x_{\beta}^* \\ x_{\gamma}^* \end{bmatrix}$  door toepassing van 3.1.17 de bepaalde  $A_{\alpha}$ .

Op analoge wijze verkrijgt men op basis van  $\hat{s}$  via de micro-relaties  $s_y$  en  $r_y$  een realisatie voor macro-verklaringsrelatie  $A_{\alpha}$ :

$$x^{\alpha'}(t) = \begin{bmatrix} x^{\alpha}(t) \\ x^{\beta}(t) \\ x^{\gamma}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{\alpha}(t, t_0, x_0^{\alpha}, u^{\alpha'}_{[t_0, t]}) \\ s_{\beta}(t, t_0, x_0^{\beta}, \bar{s}_{\alpha}(t, t_0, x_0^{\alpha}, u^{\alpha'}_{[t_0, t]})) \\ s_{\gamma}(t, t_0, x_0^{\gamma}, \bar{s}_{\beta}(t, t_0, x_0^{\beta}, \bar{s}_{\alpha}(t, t_0, x_0^{\alpha}, u^{\alpha'}_{[t_0, t]}))) \end{bmatrix}$$

$$= s_{\alpha'}(t, t_0, x_0^{\alpha'}, u^{\alpha'}_{[t_0, t]})$$

$$y^{\alpha'}(t) = \begin{bmatrix} r_{\alpha}(t, x^{\alpha}(t), u^{\alpha'}(t)) \\ r_{\beta}(t, x^{\beta}(t), r_{\alpha}(t, x^{\alpha}(t), u^{\alpha'}(t))) \\ r_{\gamma}(t, x^{\gamma}(t), r_{\beta}(t, x^{\beta}(t), r_{\alpha}(t, x^{\alpha}(t), u^{\alpha'}(t)))) \end{bmatrix}$$

$$= r_{\alpha'}(t, x^{\alpha'}(t), u^{\alpha'}(t))$$

Indien micro-modellen van het type  $[f(\dots, t), g(\dots, t)], [A(t), B(t), C(t), D(t)]$  of  $[A, B, C, D]$  zijn gegeven volgen door substitutie van de betrokken uitdrukkingen voor de micro-relaties  $s_y$ ,  $r_y$ ,  $\rho_y$  (zie 3.2.8 c.q. 3.2.9, 3.2.52 c.q. 3.2.53, 3.2.61 c.q. 3.2.62, 3.2.63 c.q. 3.2.64) meer expliciete

uitdrukkingen voor de macro-relaties  $s_{\alpha}$ ,  $r_{\alpha}$ , van de realisatie en voor  $\rho_{\alpha}$ . Men kan dan bovendien rechtstreeks een model van hetzelfde type op macro-niveau formuleren. In het geval van differentiële micro-modellen  $[f_y(\dots, t), g_y(\dots, t)]$  volgt macro-model  $[f_{\alpha}(\dots, t), g_{\alpha}(\dots, t)]$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}^{\alpha'}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{x}^{\alpha}(t) \\ \dot{x}^{\beta}(t) \\ \dot{x}^{\gamma}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{\alpha}(x^{\alpha}(t), u^{\alpha'}(t), t) \\ f_{\beta}(x^{\beta}(t), g_{\alpha}(x^{\alpha}(t), u^{\alpha'}(t), t), t) \\ f_{\gamma}(x^{\gamma}(t), g_{\beta}(x^{\beta}(t), g_{\alpha}(x^{\alpha}(t), u^{\alpha'}(t), t), t), t) \end{bmatrix} \\ &= f_{\alpha'}(x^{\alpha'}(t), u^{\alpha'}(t), t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{\alpha'}(t) &= \begin{bmatrix} g_{\alpha}(x^{\alpha}(t), u^{\alpha'}(t), t) \\ g_{\beta}(x^{\beta}(t), g_{\alpha}(x^{\alpha}(t), u^{\alpha'}(t), t), t) \\ g_{\gamma}(x^{\gamma}(t), g_{\beta}(x^{\beta}(t), g_{\alpha}(x^{\alpha}(t), u^{\alpha'}(t), t), t), t) \end{bmatrix} \\ &= g_{\alpha'}(x^{\alpha'}(t), u^{\alpha'}(t), t) \end{aligned}$$

en dit definieert uiteraard weer de eerder gegeven realisatie. Analoog gaat men te werk in het geval van differentie-modellen. Voor de bijzondere gevallen  $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$  en  $[A, B, C, D]$  verkrijgt men het macro-model door substitutie van de betrokken micro-vergelijkingen voor  $f_y(\dots, t)$  en  $g_y(\dots, t)$ .

Overigens is deze realisatie met  $\Sigma^{\alpha'}$ ,  $s_{\alpha'}$ ,  $r_{\alpha'}$ ,  $x_{\alpha'}^*$ , op basis van  $\delta$  niet noodzakelijk minimaal of met een minimale realisatie equivalent. Na afleiding van de bepaalde  $A_{\alpha'}$ , zou men kunnen trachten zo'n minimale realisatie (zie paragraaf 3.1) met  $\tilde{\Sigma}^{\alpha'}$ ,  $\tilde{s}_{\alpha'}$ ,  $\tilde{r}_{\alpha'}$ ,  $\tilde{x}_{\alpha'}^*$ , te vinden en zou men tevens een bijbehorende (systeem-simulerende)  $\tilde{\delta}$  kunnen construeren. De eerder gegeven realisatie is equivalent met de minimale, indien  $\Sigma^{\alpha'}$  bereikbaar is vanuit  $x_{\alpha'}^*$ . Indien  $\Sigma^{\alpha'}$  bovendien niet-reduceerbaar is, zijn beide realisaties minimaal en dus 1-1-op-equivalent. In het geval van differentie- c.q. differentiële modellen zou de dimensionaliteit  $n$  van  $\tilde{\Sigma}^{\alpha'}$  in de minimale realisatie geringer kunnen zijn dan de dimensionaliteit  $n_{\alpha} + n_{\beta} + n_{\gamma}$  van  $\Sigma^{\alpha'}$ , zodat een eenvoudigere (systeem-simulerende) koppeling  $\tilde{\delta}$  met minder unit-delays c.q. integrators (zie fig. 2.1.5) geconstrueerd zou kunnen worden.

II in fig. 3.5.1 zou een voorbeeld zijn van een koppeling onder 2), indien voor ieder van de  $\rho_\alpha$ ,  $\rho_\beta$ ,  $\rho_\gamma$  een  $[f(\dots, t), g(\dots, t)]$  zou zijn gegeven en bijv.  $\rho_\alpha$  sterk-causaal zou zijn ( $r_\alpha = g_\alpha$  toestand-bepaalde output zou hebben). Hieraan wordt voldaan door:

$$\begin{aligned}\dot{x}^\alpha(t) &= f_\alpha(x^\alpha(t), u^\alpha(t), t) = f_\alpha(x^\alpha(t), u_1^\alpha(t), u_2^\alpha(t), t) \\ \dot{x}^\beta(t) &= f_\beta(x^\beta(t), u^\beta(t), t) = f_\beta(x^\beta(t), u_1^\beta(t), u_2^\beta(t), t) \\ \dot{x}^\gamma(t) &= f_\gamma(x^\gamma(t), u^\gamma(t), t) = f_\gamma(x^\gamma(t), u_1^\gamma(t), u_2^\gamma(t), t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y^\alpha(t) &= g_\alpha(x^\alpha(t), t) = g_\alpha(x^\alpha(t), t) \\ y^\beta(t) &= g_\beta(x^\beta(t), u^\beta(t), t) = g_\beta(x^\beta(t), u_1^\beta(t), u_2^\beta(t), t) \\ y^\gamma(t) &= g_\gamma(x^\gamma(t), u^\gamma(t), t) = g_\gamma(x^\gamma(t), u_1^\gamma(t), u_2^\gamma(t), t)\end{aligned}$$

Via de koppelingsrelaties en macro-variabelen

$$\begin{aligned}u_1^\alpha(t) &= y^\gamma(t) \\ u_1^\beta(t) &= y^\alpha(t) \\ u_1^\gamma(t) &= y^\beta(t) \\ u^{\alpha'}(t) &= u_2^\alpha(t) = u_2^\beta(t) = u_2^\gamma(t) \\ y^{\alpha'}(t) &= y^\gamma(t)\end{aligned}$$

volgt nu

$$\left. \begin{aligned}y^\alpha(t) &= g_\alpha(x^\alpha(t), t) \\ y^\beta(t) &= g_\beta(x^\beta(t), g_\alpha(x^\alpha(t), t), u^{\alpha'}(t), t) \\ y^\gamma(t) &= g_\gamma(x^\gamma(t), g_\beta(x^\beta(t), g_\alpha(x^\alpha(t), t), u^{\alpha'}(t), t), u^{\alpha'}(t), t)\end{aligned} \right\}$$

$$y^{\alpha'}(t) = g_\alpha(x^{\alpha'}(t), u^{\alpha'}(t), t)$$

$$\left. \begin{aligned}\dot{x}^\alpha(t) &= f_\alpha(x^\alpha(t), y^\gamma(t), u^{\alpha'}(t), t) = f_1(x^\alpha(t), x^\gamma(t), x^\beta(t), u^{\alpha'}(t), t) \\ \dot{x}^\beta(t) &= f_\beta(x^\beta(t), y^\alpha(t), u^{\alpha'}(t), t) = f_2(x^\beta(t), x^\alpha(t), u^{\alpha'}(t), t) \\ \dot{x}^\gamma(t) &= f_\gamma(x^\gamma(t), y^\beta(t), u^{\alpha'}(t), t) = f_3(x^\gamma(t), x^\beta(t), x^\alpha(t), u^{\alpha'}(t), t) \\ \dot{x}^{\alpha'}(t) &= f_{\alpha'}(x^{\alpha'}(t), u^{\alpha'}(t), t)\end{aligned} \right\}$$

Oplossing van het macro-model geeft weer  $s_{\alpha'}$ ,  $r_{\alpha'}$ , en  $\rho_{\alpha'}$ , waaruit  $A_{\alpha'}$  volgt. De typische recursieve ordening van vergelijkingen zonder feedback-

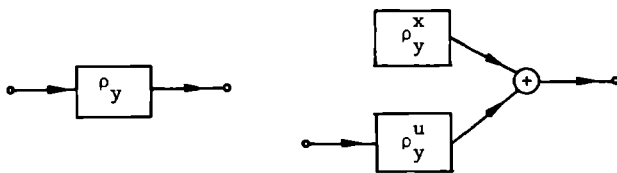


Fig. 3.5.2: Vervanging van model  $\langle V^y; \rho_y \rangle$  met lineaire tijd-invariante  $\rho_y^x$  door model  $\langle V; \mathcal{J}; \rho_y^u \rangle$  met zero-input-response-functie  $\rho_y^x$  en zero-state-response-functie  $\rho_y^u$ .

loops, die voor I in fig. 3.5.1 steeds werd gevonden, keert hier alleen terug voor de uitleesvergelijkingen.  $\dot{x}^\alpha(t)$  is hier echter ook van  $x^\gamma(t)$  en  $x^\beta(t)$  afhankelijk en de toestand-differentiaal-vergelijkingen bevatten daardoor verschillende feedback-loops met geheugenwerking. Toch is de oorzaak van de ingewikkelde feedback-structuur in de uitleesvergelijkingen gelegen. Dit blijkt, indien zou worden gekozen voor toestand-identieke output

$$y^\alpha(t) = x^\alpha(t)$$

$$y^\beta(t) = x^\beta(t)$$

$$y^\gamma(t) = x^\gamma(t)$$

in welk geval

$$\dot{x}^\alpha(t) = f_\alpha(x^\alpha(t), x^\beta(t), u^{\alpha'}(t), t)$$

$$\dot{x}^\beta(t) = f_\beta(x^\beta(t), x^\alpha(t), u^{\alpha'}(t), t)$$

$$\dot{x}^\gamma(t) = f_\gamma(x^\gamma(t), x^\beta(t), u^{\alpha'}(t), t)$$

en men de relatief eenvoudige feedback-structuur rechtstreeks uit II in fig. 3.5.1 kan aflezen. Het zijn juist de uitleesvergelijkingen, die voor complicaties kunnen zorgen. Dit blijkt nog duidelijker bij de koppelingen onder 3), waar althans in het deterministische geval ook voor de uitleesvergelijkingen zelf een (geheugenloze) feedback-structuur toelaatbaar is.

De bepaaldheid voor de koppelingen onder 3) is te danken aan het lineaire tijd-invariante karakter van de verklaringsrelaties  $\rho_y$ , die door [A,B,C,D] worden gedefinieerd. De decompositie-eigenschap van dergelijke  $\rho_y$  (zie 3.1.32, 3.1.37, 3.1.38 c.q. 3.1.39 en 3.1.41)

$$\rho_y(t, t_0, x_0, u) = \rho_y(t, t_0, x_0, 0) + \rho_y(t, t_0, 0, u)$$

voor het gemak geschreven als

$$\rho_y(t) = \rho_y^x(t) + \rho_y^u(t) \quad \text{met} \quad \rho_y^u(t) = \begin{cases} \sum_{k=t_0}^t H_y(t-k)u_y(k) \\ \int_{t_0}^t H_y(t-\xi)u_y(\xi)d(\xi) \end{cases}$$



betekent, dat ieder zo'n  $\rho_y$  kan worden gesplitst in zero-input-response-functie  $\rho_y^x$  en zero-state-response-functie  $\rho_y^u$  en dat ieder model  $\langle V; \rho_y \rangle$  op de wijze zoals aangegeven in fig. 3.5.2 kan worden vervangen door een (systeem-simulerend) model  $\langle V; \mathcal{S}; \tilde{\rho}_y \rangle$ . Hierbij wordt het micro-model van  $\rho_y^x$  opgevat als bron (inputloos model) en wordt als begintoestand in het micro-model van  $\rho_y^u$  uitsluitend de zero-state toegelaten.  $\rho_y$  en  $\tilde{\rho}_y$  zijn, althans voor toegelaten begintoestanden in hun toestandruimten, equivalent. Op overeenkomstige wijze kan ieder model of submodel  $\langle V; \mathcal{S}; A_\alpha \rangle$  met lineaire  $\rho_\alpha$ ,  $\rho_\beta$ , ... worden vervangen door een (systeem-simulerend) model  $\langle \tilde{V}; \tilde{\mathcal{S}}; A_\alpha \rangle$ . In fig.3.5.3 is dit geïllustreerd m.b.t. II in fig. 3.5.1. Het gevolg van de vervangingsprocedure is, dat in de feedback-loops van het block-diagram uitsluitend zero-state-response-functies  $\rho_y^u$  overblijven en dat de effecten van de begintoestanden als een soort pseudo-inputs zijn afgesplitst. Fig. 3.5.4 laat dit zien m.b.t. de feedback-loop in fig. 3.5.3. Voor de output-waarden  $v_9(t_0)$ ,  $v_{11}(t_0)$  en  $v_{13}(t_0)$  op begintijdstip  $t_0$  kan men de volgende vergelijkingen opschrijven

$$v_9(t_0) = H_\alpha(0)u^\alpha(t_0) + v_2(t_0) =$$

$$D \begin{bmatrix} v_{13}(t_0) \\ v_5(t_0) \end{bmatrix} + v_2(t_0) = d_{1,\alpha}v_{13}(t_0) + d_{2,\alpha}v_5(t_0) + v_2(t_0)$$

$$v_{11}(t_0) = H_\beta(0)u^\beta(t_0) + v_3(t_0) =$$

$$D \begin{bmatrix} v_9(t_0) \\ v_6(t_0) \end{bmatrix} + v_3(t_0) = d_{1,\beta}v_9(t_0) + d_{2,\beta}v_6(t_0) + v_3(t_0)$$

$$v_{13}(t_0) = H_\gamma(0)u^\gamma(t_0) + v_4(t_0) =$$

$$D \begin{bmatrix} v_{11}(t_0) \\ v_7(t_0) \end{bmatrix} + v_4(t_0) = d_{1,\gamma}v_{11}(t_0) + d_{2,\gamma}v_7(t_0) + v_4(t_0)$$

Uitgaande van bekende input- en pseudo-input-waarden  $v_2(t_0)$ ,  $v_3(t_0)$ ,  $v_4(t_0)$ ,  $v_5(t_0)$ ,  $v_6(t_0)$ ,  $v_7(t_0)$  is dit stelsel van 3 lineaire vergelijkingen, waarin de coëfficiënten  $d_{1,\alpha}$ ,  $d_{2,\alpha}$ ,  $d_{1,\beta}$ ,  $d_{2,\beta}$ ,  $d_{1,\gamma}$ ,  $d_{2,\gamma}$  constanten zijn vanwege het tijd-invariante karakter van  $\rho_\alpha^u$ ,  $\rho_\beta^u$ ,  $\rho_\gamma^u$ , oplosbaar voor de 3 onbekende output-waarden  $v_9(t_0)$ ,  $v_{11}(t_0)$ ,  $v_{13}(t_0)$ . Het

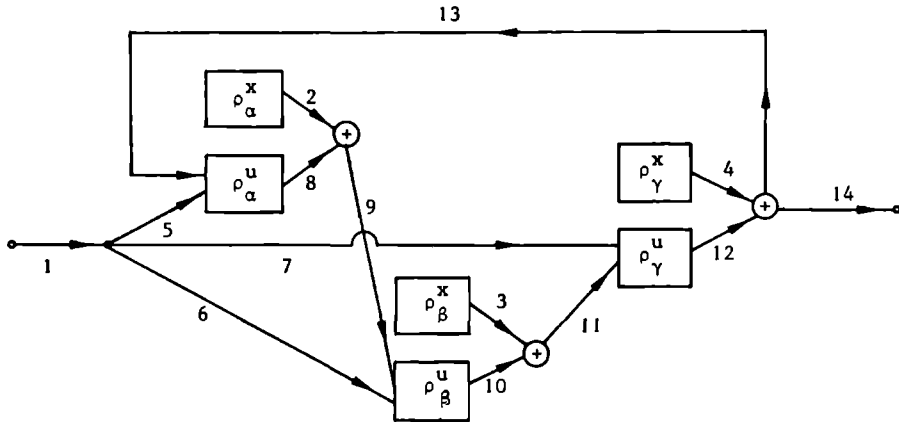


Fig. 3.5.3: Illustratie van de vervangingsprocedure in fig. 3.5.2 m.b.t. II in fig. 3.5.1:  $\langle \tilde{v}; \tilde{\delta}; A_{\alpha} \rangle$  met lineaire tijd-invariante  $\rho_{\alpha}$ ,  $\rho_{\beta}$ ,  $\rho_{\gamma}$  wordt vervangen door  $\langle \tilde{v}; \tilde{\delta}; A_{\alpha} \rangle$  met zero-input-response-functies  $\rho_{\alpha}^x$ ,  $\rho_{\beta}^x$ ,  $\rho_{\gamma}^x$  en zero-state-response-functies  $\rho_{\alpha}^u$ ,  $\rho_{\beta}^u$ ,  $\rho_{\gamma}^u$ .

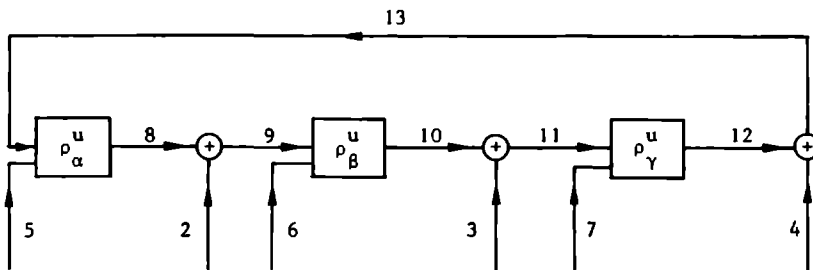


Fig. 3.5.4: De feedback-loop in fig. 3.5.3 met slechts de zero-state-response-functies  $\rho_{\alpha}^u$ ,  $\rho_{\beta}^u$ ,  $\rho_{\gamma}^u$ .

probleem van een nog onbekende  $v_{13}(t_0)$  bij bijv. de bepaling van  $v_9(t_0)$  doet zich niet voor, aangezien

$$v_{13}(t_0) = \frac{d_{1,\gamma} d_{1,\beta}}{1 - d_{1,\gamma} d_{1,\beta} d_{1,\alpha}} (d_{2,\alpha} v_5(t_0) + v_2(t_0)) +$$

$$\frac{d_{1,\gamma}}{1 - d_{1,\gamma} d_{1,\beta} d_{1,\alpha}} (d_{2,\beta} v_6(t_0) + v_3(t_0)) +$$

$$\frac{1}{1 - d_{1,\gamma} d_{1,\beta} d_{1,\alpha}} (d_{2,\gamma} v_7(t_0) + v_4(t_0))$$

en dus eveneens bepaald voor  $d_{1,\gamma} d_{1,\beta} d_{1,\alpha} \neq 1$ .

Onder zeer algemene condities kan deze bepaaldheid op begintijdstip  $t_0$  worden uitgebreid naar willekeurige tijdstippen  $t \geq t_0$ . In het bewijs worden niet de tijdfunctie-waarden  $v_i(t)$  en  $H_y(t'')$  of tijdfuncties  $v_i$  en  $H_y$  zelf gebruikt maar in het geval van differentie-modellen [A,B,C,D] de z-getransformeerden van  $v_i$  en  $H_y$  en in het geval van differentiële modellen [A,B,C,D] de Laplace-getransformeerden van  $v_i$  en  $H_y$ ; de z-transformatie is altijd omkeerbaar en de Laplace-transformatie voor praktisch relevante gevallen eveneens, zodat de waarden  $v_i(t)$  weer teruggevonden kunnen worden (92).

Het bepaaldheidsresultaat m.b.t. de koppelingen onder 3) is behalve aan de tijd-invariantie tevens te danken aan het reversibele karakter van deterministische lineaire relaties, waardoor de waarden van verschillende (afhankelijke en/of onafhankelijke) variabelen elkaar - gegeven de waarden van de overige variabelen - wederzijds bepalen. De introductie van geheugenloze feedback-loops roept daardoor geen principiële problemen op in het deterministische geval. Het resultaat kan helaas niet worden gegeneraliseerd naar stochastische relaties, gespecificeerd in termen van conditionele verwachtingswaarden van de afhankelijke (random-)variabelen, ook niet indien deze stochastische relaties lineair zijn. Zoals reeds herhaalde malen benadrukt zijn geheugenloze feedback-loops, waarbij dezelfde variabelen tegelijk als afhankelijke en onafhankelijke variabelen optreden, in het algemeen strijdig met de eis van

0-correlaties tussen de error-termen en de onafhankelijke variabelen in iedere vergelijking, welke eis niettemin door de stochastische specificatie wordt geïmpliceerd. Dit z.g. interdependentie-probleem werd eerder onder meer besproken in paragraaf 2.3.

Stel nu, dat in het stochastische geval voor de micro-verklaringsrelaties  $\rho_y$  tevens de (stochastisch gespecificeerde) toestand-overgangsrelaties  $s_y$  en uitleesrelaties  $r_y$  zijn gegeven en dat deze als volgt worden geordend:

$$\begin{array}{c} s_\alpha \\ s_\beta \\ \vdots \\ r_\alpha \\ r_\beta \\ \vdots \\ \vdots \end{array}$$

Het geheel van vergelijkingen in de toestand-overgangsrelaties  $s_y$  bevat per definitie geen geheugenloze feedback-loops. Ook tussen de afzonderlijke vergelijkingen  $r_{i,y}$  binnen iedere  $r_y$  komen ze niet voor, aangezien de afhankelijke variabelen (output-waarde-variabelen) per definitie niet als onafhankelijke variabelen optreden binnen zo'n groep vergelijkingen. Eventuele geheugenloze feedback-loops komen tot stand door de koppeling van verschillende  $r_y$ , indien nl. output-waarde-variabelen  $y_i(t)$  gaan optreden als input-waarde-variabelen  $u_j(t)$  in een vergelijking van een andere  $r_y$  en direct of indirect tegelijk het omgekeerde het geval is. Een eerste eis voor de bepaaldheid van  $A_\alpha$ , in het stochastische geval is dan ook, dat de  $r_y$  een zodanige ordening

$$\begin{array}{cc} r_{y_1} & r_{i_1, y_1} \\ \downarrow & \downarrow \\ r_{y_2} & r_{i_2, y_2} \\ \downarrow & \downarrow \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

toelaten, dat geen enkele afhankelijke variabele in een lager geplaatste vergelijking als onafhankelijke variabele in een hoger geplaatste optreedt (block-recursieve-ordening van uitlees-blocks  $r_y$ ) of dat de

individuele vergelijkingen  $r_{i,y}$  zo'n ordening toelaten (recursieve ordening van uitlees-vergelijkingen  $r_{i,y}$ ). Het laatste geeft uiteraard meer vrijheid, omdat de  $r_{i,y}$  uit de blocks genomen mogen worden, maar zoals dadelijk zal blijken moet dan in een ander opzicht aan een zwaardere eis worden voldaan.

Als gevolg van de eerste eis blijven van de door Zadeh and Desoer genoemde soorten koppelingen § met bepaalde  $A_\alpha$ , alleen 1) en 2) over in het stochastische geval. Zouden bijv.  $\rho_\alpha$ ,  $\rho_\beta$  en  $\rho_\gamma$  in II van fig. 3.5.1 oplossingen zijn van stochastische modellen [A,B,C,D], dan nog zou één van hen, zeg  $\rho_\alpha$ , toestand-bepaalde output moeten hebben:  $D_\alpha = [d_{1,\alpha} \ d_{2,\alpha}] = 0$ . De uitdrukking voor de waarde  $v_{13}(t_0)$  van variabele  $v_{13}$  in fig. 3.5.3 en fig. 3.5.4 zou overgaan in stochastische vorm

$$E(v_{13}(t_0) | v_2(t_0), v_6(t_0), v_3(t_0), v_7(t_0), v_4(t_0)) = \\ d_{1,\gamma} d_{1,\beta} v_2(t_0) + d_{1,\gamma} d_{2,\beta} v_6(t_0) + d_{1,\gamma} v_3(t_0) + d_{2,\gamma} v_7(t_0) + v_4(t_0)$$

waarin vanwege de toestand-bepaalde output de grootheden  $d_{2,\alpha} v_5(t_0)$  en  $d_{1,\gamma} d_{1,\beta} d_{1,\alpha}$  niet meer voorkomen. Het verbod op geheugenloze feedback-loops (d.w.z. minstens één toestand-bepaalde output in iedere feedback-loop) is in het algemeen noodzakelijk maar op zich niet voldoende om de vereiste 0-correlaties te verkrijgen in een §, opgebouwd uit stochastische modellen [A,B,C,D], unitors, scalors en adders. Voldoende is, dat de block-recursieve ordening van uitleesblocks  $r_y$  wordt gecomplementeerd door de volgende block-diagonale variantie-covariantie-matrix van error-komponenten

$$\Sigma_S = \begin{bmatrix} \Sigma_s & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \Sigma_{r_\alpha} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \Sigma_{r_\beta} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

of de recursieve ordening van uitlees-vergelijkingen  $r_{i,y}$  door

$$\Sigma_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \Sigma_{\mathcal{S}} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sigma_{r_{i_1, y_1}}^2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sigma_{r_{i_2, y_2}}^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

De eerste matrix  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  is uiteraard minder restrictief, omdat daar voor ieder uitlees-block  $r_y$  als geheel toelaatbaar is  $\Sigma_{r_y} \neq \sigma_{r_{i,y}}^2 \cdot I$ . In beide gevallen wordt een block-recursieve  $\mathcal{S}$  gedefinieerd, waaruit de vereiste 0-correlaties resulteren en waardoor er geen algemeen bezwaar meer bestaat tegen een gelijktijdige stochastische specificatie van alle micro-modellen [A,B,C,D] in  $\mathcal{S}$ . Uit de stochastische specificatie volgt op analoge wijze als voor de koppelingen 1) en 2) in het deterministische geval een stochastisch geformuleerde macro-verklaringsrelatie  $\rho_{\alpha}$ .

Tenslotte volgt hier nog een graph-theoretisch algoritme, waarmee voor koppelingen en deelkoppelingen  $\mathcal{S}$  met lineaire tijd-invariante  $\rho_y$  als micro-verklaringsrelaties en unitors, adders en scalors als koppelingsrelaties de betrokken  $\rho_{\alpha}$ , kan worden afgeleid. Behalve voor de koppelingen onder 3) kan het algoritme uiteraard tevens worden gebruikt voor dergelijke koppelingen onder 2) en 1). In de eerste stap wordt het oorspronkelijke block-diagram vervangen door een block-diagram, waarin de  $\rho_y$  zijn gesplitst in zero-input-response-functies  $\rho_y^x$  en zero-state-response-functies  $\rho_y^u$ ; zie bijv. fig. 3.5.3. Vervolgens wordt dit block-diagram op zijn beurt vervangen door een (signal-flow) graph en wel op de volgende wijze:

- 1) alle pijlen (variabelen) worden vervangen door punten,
- 2) iedere  $\rho_y^u$  en iedere koppelingsrelatie wordt vervangen door een of meer pijlen, zodat ieder van zijn input-variabelen in de input-output-richting wordt verbonden met ieder van zijn output-variabelen.

In fig. 3.5.5 is dit geïllustreerd m.b.t. fig. 3.5.3. De punten, waar uitsluitend pijlen van uitgaan en geen pijlen inkomen, worden "bronpunten" genoemd en duiden we aan met  $p_i$  ( $p_1$  t/m  $p_4$  in fig. 3.5.5). De overige punten duiden we aan met  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  ( $k = 10$  in fig. 3.5.5). Met de zo gevormde graph correspondeert een stelsel van  $k$  lineaire vergelijkingen, voor iedere  $w_i$  één vergelijking:

$$\begin{array}{r}
 (1 - g_{11})w_1 - g_{12}w_2 - \dots - g_{1k}w_k = v_1 \\
 -g_{21}w_1 + (1 - g_{22})w_2 - \dots - g_{2k}w_k = v_2 \\
 \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \ddots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 -g_{k1}w_1 - g_{k2}w_2 - \dots + (1 - g_{kk})w_k = v_k
 \end{array}$$

of compact samengevat

$$Gw = v$$

Iedere  $v_i, w_j$  en  $g_{ij}$  in dit stelsel kan evenals iedere  $p_i$  worden geïnterpreteerd als een variabele over  $z$ - c.q. Laplace-getransformeerden van tijdfuncties. De betrokken tijdfuncties zijn outputs of input-outputs voor de  $w_j$ . Voor de  $v_i$  zijn het macro-inputs ( $p_1$  in fig. 3.5.5), bron-outputs ( $p_2, p_3$  en  $p_4$  in fig. 3.5.5), producten van  $p_i$ , met een constante:  $a_i \cdot p_i$ , (indien de pijl van bronpunt  $p_i$ , naar  $w_i$  een scalar vervangt), sommen  $\Sigma p_i$ , (indien de pijlen van bronpunten  $p_i$ , naar  $w_i$  een adder vervangen) of er geldt  $v_i = 0$  (indien geen van de bronpunten  $p_i$ , met  $w_i$  is verbonden). De gewichten of "gains"  $g_{ij}$  staan ofwel voor constanten (0 indien er geen pijl van  $w_i$  naar  $w_j$  loopt; 1 indien de pijl een unitor of adder vervangt;  $a_{ij}$  indien de pijl een scalar vervangt) ofwel voor  $z$ - c.q. Laplace-getransformeerden van impulse-responses  $H_{ij}$ . Met eventuele "zelf-loops" (feedback-loops van een  $w_i$  t.o.v. zichzelf) corresponderen gewichten  $g_{ii} \neq 1$ . Indien de gewichten bij de pijlen in de graph worden aangegeven ontstaat een z.g. "gewogen" graph; de pijlen, die uitgaan van de bronpunten  $p_i$ , krijgen per definitie het gewicht 1.

De afleiding van macro-verklaringsrelatie  $\rho_\alpha$ , vindt plaats door toepassing van de punt-eliminatie procedure: alle punten worden succesievelijk geëlimineerd met uitzondering van de bronpunten en de punten, die corresponderen met macro-output-variabelen (pijl 14 in fig. 3.5.3). Bij de eliminatie van ieder punt  $w_i$  gaat graph  $G$  met vergelijking  $Gw = v$  over in graph  $\tilde{G}$  met vergelijking  $\tilde{G}\tilde{w} = v$ , zodat  $S$  en  $\tilde{S}$  equivalent blijven. De procedure werkt als volgt. Stel dat punt  $w_i$  moet worden geëlimineerd en dat de ingaande pijlen vanuit punten  $1, \dots, q$  gewichten  $g_{i1}, \dots, g_{iq}$  hebben en de uitgaande pijlen naar punten  $1', \dots, q'$  gewichten  $g_{1'i}, \dots, g_{q'i}$ . De nieuwe graph  $\tilde{G}$  wordt dan verkregen door:

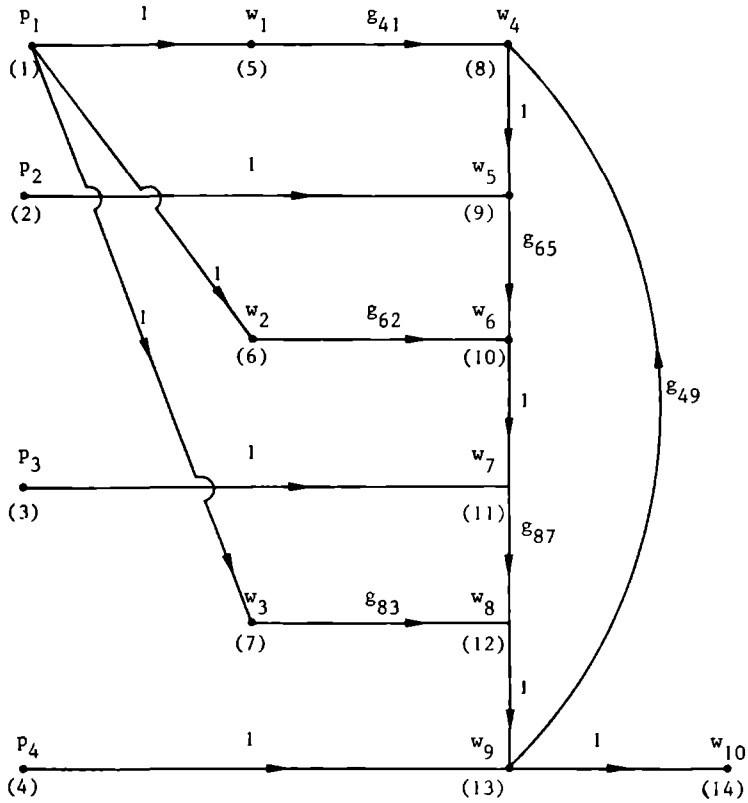


Fig. 3.5.5: De signal-flow graph voor het block-diagram van fig. 3.5.3.



- 1) alle pijlen van en naar  $w_i$  te elimineren,
- 2) alle punten  $l, \dots, q$  in de input-output-richting te verbinden met alle punten  $l', \dots, q'$ , zodat nieuwe pijlen met nieuwe gewichten  $g_{j',j}$  ontstaan,
- 3) de nieuwe gewichten  $g_{j',j}$  gelijk te stellen met

$$g_{j',j} = \frac{g_{ij}g_{j'i}}{1 - g_{ii}}$$

Een illustratie vindt men in fig. 3.5.6;  $l, \dots, q$  bevat hier de punten a, b en  $l', \dots, q'$  alleen het punt b.

Gebruik makend van de punt-eliminatie procedure, gaat de graph van fig. 3.5.5 met vergelijkingen

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 & (v_1 &= p_1) \\ w_2 &= v_2 & (v_2 &= p_1) \\ w_3 &= v_3 & (v_3 &= p_1) \\ w_4 &= g_{41}w_1 + g_{49}w_9 & (v_4 &= 0) \\ w_5 &= w_4 + v_5 & (v_5 &= p_2) \\ w_6 &= g_{62}w_2 + g_{65}w_5 & (v_6 &= 0) \\ w_7 &= w_6 + v_7 & (v_7 &= p_3) \\ w_8 &= g_{83}w_3 + g_{87}w_7 & (v_8 &= 0) \\ w_9 &= w_8 + v_9 & (v_9 &= p_4) \\ w_{10} &= w_9 & (v_{10} &= 0) \end{aligned}$$

uiteindelijk over in een graph met vergelijking

$$\begin{aligned} w_{10} &= \frac{g_{87}g_{65}g_{41}}{1 - g_{87}g_{65}g_{49}} v_1 + \frac{g_{87}g_{62}}{1 - g_{87}g_{65}g_{49}} v_2 + \frac{g_{83}}{1 - g_{87}g_{65}g_{49}} v_3 + \\ &\quad \frac{g_{87}g_{65}}{1 - g_{87}g_{65}g_{49}} v_5 + \frac{g_{87}}{1 - g_{87}g_{65}g_{49}} v_7 + \frac{1}{1 - g_{87}g_{65}g_{49}} v_9 \\ &= \frac{g_{87}g_{65}g_{41} + g_{87}g_{62} + g_{83}}{1 - g_{87}g_{65}g_{49}} p_1 + \frac{g_{87}g_{65}}{1 - g_{87}g_{65}g_{49}} p_2 + \frac{g_{87}}{1 - g_{87}g_{65}g_{49}} p_3 + \\ &\quad \frac{1}{1 - g_{87}g_{65}g_{49}} p_4 \end{aligned}$$

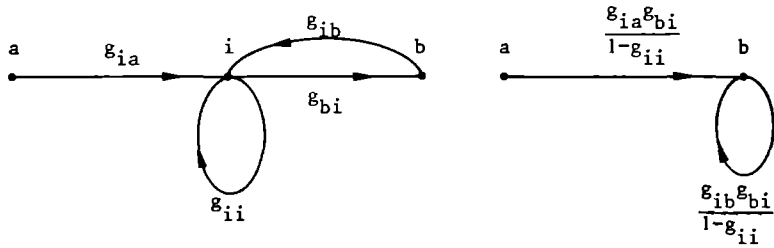


Fig. 3.5.6: De punt-eliminatie procedure aan de hand van een voorbeeld.

waarin ( $z$ - c.q. Laplace-getransformeerde) macro-output  $w_{10}$  wordt uitgedrukt als een functie van ( $z$ - c.q. Laplace-getransformeerde) macro-input  $p_1$ , zero-input-responses  $p_2, p_3, p_4$  en impulse-responses  $g_{41}, g_{62}, g_{83}, g_{65}, g_{87}, g_{49}$ , zodat  $\rho_\alpha$  in de vorm van  $z$ - c.q. Laplace-getransformeerden is afgeleid. Terugtransformatie geeft  $\rho_\alpha$  zelf.

Wordt hetzelfde algoritme toegepast op III in fig. 3.5.1 met te-gengestelde feedback-loop tussen micro-eenheden  $\alpha, \beta$  en  $\gamma$  en wordt in overeenstemming daarmee pijl 9 in fig.3.5.3 gelegd tussen 8 en 12, pijl 11 tussen 12 en 10 en pijl 13 tussen 10 en 8, dan volgt

$$w_{10} = \frac{g_{85}g_{49}g_{62} + g_{85}g_{41} + g_{83}}{1 - g_{85}g_{67}g_{49}} p_1 + \frac{g_{85}g_{49}}{1 - g_{87}g_{67}g_{49}} p_3 + \frac{g_{85}}{1 - g_{85}g_{67}g_{49}} p_2 + \frac{1}{1 - g_{85}g_{67}g_{49}} p_4$$

De verlegging van pijlen heeft tot gevolg, dat  $g_{87}$  en  $g_{65}$  overgaan in resp.  $g_{85}$  en  $g_{67}$ . De macro-verklaringsrelaties, gedefinieerd door de koppelingen II en III in fig. 3.5.1 blijken dan equivalent, indien

$$g_{65} = g_{49} \quad \text{c.q.} \quad g_{67} = g_{49}$$

$$g_{62} = g_{41}$$

d.w.z. indien  $\rho_\alpha = \rho_\beta$ . Van een dergelijke assumptie wordt uitgegaan, indien zoals in verdeeld onderzoek hetzelfde verklaringssysteem wordt gehanteerd voor alle micro-eenheden  $\alpha, \beta$  en  $\gamma$ .

Uiteraard kan lineair stelsel  $Gw = v$  ook algebraïsch worden opgelost. Het aantrekkelijke van de succesieve stappen in de punt-eliminatie-procedure is, dat de causale structuur van  $\S$  op de voet kan worden gevolgd; i.h.b. kan worden nagegaan, welke gain belangrijke deelpoelingen voor hun rekening nemen en dus hoe de meso-verklaringsrelaties van de betrokken subsystemen luiden. Na oplossing van het stelsel geeft terugtransformatie van de gain bij de macro-input macro-impulse-response  $H_\alpha$ , op basis waarvan men weer een minimale realisatie kan trachten op te sporen (zie paragraaf 3.1). Rechtstreeks op basis van de gain kan men de z.g. standaard-controleerbare en de z.g. standaard-observeerbare realisatie bepalen. Noch de standaard-controleerbare noch de standaard-observeerbare realisatie zijn echter in het algemeen minimaal en daardoor evenmin met een minimale realisatie (1-1-op)equivalent.

## Hoofdstuk 4: Enkele toepassingen

### 4.1 Een viertal modellen [A,B,C,D] voor het lezen bij blinden

Vooraf het volgende. De modellen, die in deze en de volgende paragraaf worden gepresenteerd, zijn slechts bedoeld ter illustratie van hetgeen in hoofdstuk 3 werd behandeld en missen iedere inhoudelijke presentie. Weliswaar maken de schattingen en predicties gebruik van reële data, maar deze zijn om andere redenen tot stand gekomen en vertonen met oog op het doel waarvoor zij hier worden gebruikt, niet alle optimale eigenschappen. Ook de modellen zelf zijn niet gekozen om het leesgedrag van blinden zo goed mogelijk te verklaren en te voorspellen. Bij de model-specificatie is niet of nauwelijks gebruik gemaakt van de bestaande literatuur op dit gebied. Het streven was gericht op een illustratie van de belangrijkste aspecten en mogelijkheden van de benaderingswijze in hoofdstuk 3 en van de problemen die zich daarbij voordoen, aan de hand van een aantal overzichtelijke voorbeelden. Had verklaring en voorspelling van het leesgedrag van blinden voorop gestaan, dan waren de modellen ongetwijfeld ingewikkelder van aard geweest, was met name het aantal opgenomen variabelen groter en waren waarschijnlijk ook de gekozen operationalisaties voor de opgenomen variabelen anders en beter geweest.

De vier modellen in deze paragraaf (verder aangeduid als modellen 1, 2, 3 en 4) werden op de wijze zoals aangegeven in paragraaf 3.3 en 3.4 gebaseerd op twee structurele modellen (modellen I en II). Er zal nu eerst aandacht worden besteed aan beide structurele modellen en hun schattingen. Vervolgens zullen de modellen 1, 2, 3 en 4 worden gepresenteerd en hun schattingen op basis van de modellen I en II. Tenslotte zullen de dynamische implicaties van de geschatte modellen 1, 2, 3 en 4 worden onderzocht en onderling vergeleken.

#### De structurele modellen I en II: specificatie en schatting

In beide structurele modellen werden als endogene variabelen opgenomen:

Leesniveau (L)  
 Figuur-oriëntatie-niveau (F)  
 Woordenschat-niveau (W)

en als exogene variabelen:

Geheugen-niveau (G)  
 Intelligentie-niveau (I)  
 Onderwijzende instelling (O)

terwijl de gepredetermineerde variabelen behalve de exogene variabelen tevens lagged-endogene variabelen  $L_{-}$ ,  $F_{-}$  en  $W_{-}$  omvatten.

Voor de schatting werd gebruik gemaakt van het data-bestand, dat door M.J.C. Mommers in de periode 1970-1972 werd verzameld bij alle kinderen op de vier instituten voor visueel-gehandicapten in ons land (1). De wijze, waarop de data voor schatting werden gebruikt, is die van verdeeld onderzoek, d.w.z. de waarden van (current-)endogene variabelen (L, F en W) traden niet tegelijk op als waarden van lagged-endogene variabelen ( $L_{-}$ ,  $F_{-}$  en  $W_{-}$ ) in een volgende rij van de data-matrix zoals in zuiver of gemengd tijdserie-onderzoek, maar ieder van de 71 rijen van de data-matrix - zie appendix B - had betrekking op een afzonderlijk kind uit de totale groep van 71 kinderen, waarvoor benodigde data voorhanden waren. De variabele O (het instituut, waar het kind verbleef) werd middels drie dummy-variabelen in de schattingsprocedure betrokken. Drie instituten  $i = 1, 2, 3$  kregen ieder een dummy-variabele  $O_i$  toegevoegd, zodanig dat  $O_i = 1$  voor een kind van het betreffende instituut  $i$  en  $O_i = 0$  voor een kind van een ander instituut, terwijl  $O_1 = O_2 = O_3 = 0$  voor een kind van het vierde instituut (2). Als metingen voor de overige variabelen werden de volgende scores gebruikt, waarbij tevens de gemiddelden over de  $n = 71$  kinderen zijn aangegeven en de standaard-afwijkingen met noemer  $\sqrt{n - 1} = \sqrt{70}$ .

L: ruwe scores op de "Mechanische Leesvaardigheidstest voor Braille", maart 1972 (gemiddelde: 54.3; standaard-afwijking: 19.1)

F: ruwe scores op de "Haptische Figuur Oriëntatie Test", augustus/september 1972 (gemiddelde: 23.6; standaard-afwijking: 4.7)

- W: ruwe scores op de subtest "Woordenschat" van de W.I.S.C., mei/juni 1972 (gemiddelde: 47.5; standaard-afwijking: 10.9)
- L\_: ruwe scores op de "Mechanische Leesvaardigheidstest voor Braille", maart 1971 (gemiddelde: 45.5; standaard-afwijking: 19.1)
- F\_: ruwe scores op de "Haptische Figuur Oriëntatie Test", augustus/september 1971 (gemiddelde: 21.1; standaard-afwijking: 6.0)
- W\_: aangepaste ruwe scores op de subtest "Woordenschat" van de W.I.S.C., mei/juni 1970 (gemiddelde: 42.5; standaard-afwijking: 11.8)
- G: ruwe scores op de subtest "Cijfers inprenten" van de W.I.S.C., mei/juni 1970 (gemiddelde: 9.6; standaard-afwijking: 2.3)
- I: ruwe scores op de subtest "Overeenkomsten" van de W.I.S.C., mei/juni 1970 (gemiddelde: 10.9; standaard-afwijking: 4.1)

Een uitgebreide beschrijving van de tests kan men vinden in de door Mommers gepubliceerde onderzoeksrapporten (Deelrapport I t/m IV van S.V.O.-project 0149). Ideaal zou zijn geweest, als én de scores in de endogene verzameling van L, F en W alle op exakt hetzelfde tijdstip betrekking hadden gehad én die in de lagged-endogene verzameling van L\_, F\_ en W\_, zodat tevens tussen endogene en lagged-endogene scores steeds exakt dezelfde tijdsafstand zou hebben gelegen. In feite was er tussen de scores L en F enerzijds en L\_ en F\_ anderzijds een tijdsafstand van  $\pm 1$  jaar terwijl de scores W enerzijds en W\_ anderzijds een tijdsafstand van  $\pm 2$  jaar vertoonden (de subtests van de W.I.S.C. waren alleen in 1970 en 1972 afgenomen, de haptische tests alleen in 1971 en 1972). Het laatste probleem werd gedeeltelijk ondervangen door bij de schatting gebruik te maken van aangepaste W\_-scores. De aanpassing bestond hierin, dat de oorspronkelijke W\_-scores werden vermeerderd met de helft van de gemiddelde groei in woordenschat-niveau over de periode van 2 jaar, t.w. met  $\frac{1}{2}(47.535 - 36.465)$ , en afgerond tot gehele getallen. Hoewel hiermee de beoogde gelijktijdigheid van L\_, F\_ en W\_ slechts ten dele wordt bereikt, zal bij de interpretatie van de geschatte modellen en bij de daarop gebaseerde predicties niettemin van de assumptie van gelijktijdigheid worden uitgegaan. Met het oog op schatting van de constante in iedere vergelijking werd verder gebruik gemaakt van de eenheidsvariabele, d.w.z.

een variabele die voor alle kinderen de waarde 1 aanneemt en zal worden aangeduid met 1 - zie kolom (12) in appendix B.

De LSNR-schatting  $\hat{\Pi}$  voor model I, die werd berekend middels onderdeel 1 van appendix A, is opgenomen in tabel 4.1.1. De waarden van de endogene variabelen L, F en W blijken hier in belangrijke mate afhankelijk van die van de bijbehorende lagged-endogene variabelen  $L_1$ ,  $F_1$  en  $W_1$ : de betrokken coëfficiënten (.835, .632 en .407) hebben zeer lage standaardfouten (.082, .068 en .108) en de betrokken gestandaardiseerde coëfficiënten (.833, .803 en .442) steken in waarde ver uit boven die van de andere gepredetermineerde variabelen. Met name zijn de geschatte effecten van geheugen G op L en F (.226 en -.028) van geringe omvang met standaardfouten (.438 en .202), die respectievelijk bijna twee en ruim zeven keer zo groot zijn als de geschatte effecten zelf. Opvallend zijn de negatieve coëfficiënten voor het effect van intelligentie I op L en F (-.355 en -.169), te meer daar de standaardfouten (.318 en .147) niet extreem hoog genoemd kunnen worden en dus voorzichtigheid geboden lijkt bij het toeschrijven van deze negatieve waarden aan het toeval. Ook bij vervanging van de subtest "Overeenkomsten" door andere subtests, die eveneens als maten voor intelligentie konden worden opgevat, en vervolgens van de leestest door andere leestests, resulteerden steevast negatieve coëfficiënten. Een verklaring kan wellicht hierin worden gezocht, dat de leestests evenals de haptische tests sterk technisch-mechanisch van aard zijn. Een zeker negatief effect van intelligentie op de handigheid en snelheid, waarmee de technisch-mechanische problemen worden opgelost, mag wellicht niet worden uitgesloten. Om misverstand te voorkomen: dergelijke negatieve geschatte effecten impliceren geen negatieve nulde-orde-correlaties. In feite waren de r-waarden voor alle paren subtests positief, in het bijzonder gold  $r_{LI} = .72$  en  $r_{FI} = .29$ .

De toegepaste dummy-variabelen impliceren, dat iedere coëfficiënt onder  $O_1$ ,  $O_2$  en  $O_3$  in tabel 4.1.1 het geschatte effect van het betrokken instituut geeft als afwijking t.o.v. het effect van de vierde onderwijzen-de instelling, die geen dummy-variabele heeft toegewezen gekregen. De waarde 1.73 voor het effect van  $O_1$  op L geeft bijv. aan, dat onder constanthouding van de andere gepredetermineerde variabelen de geschatte lees-skore L van kinderen op instituut 1 1.73 hoger is dan van kinderen op instituut 4. Hoewel de betrokken standaardfouten tamelijk hoog zijn,

M O D E L I

	L_	F_	W_	G	I	O <sub>1</sub>	O <sub>2</sub>	O <sub>3</sub>	1	
L	.835	.322	.226	.226	-.355	1.73	.35	-.10	.96	R <sup>2</sup> = .910
	(.082)	(.148)	(.114)	(.438)	(.318)	(2.08)	(2.49)	(2.30)	(4.88)	
	.833	.102	.139	.027	-.077					
F	.029	.632	.022	-.028	-.169	.29	1.20	1.06	9.45	R <sup>2</sup> = .691
	(.038)	(.068)	(.053)	(.202)	(.147)	(.96)	(1.15)	(1.06)	(2.25)	
	.116	.803	.055	-.014	-.147					
W	.160	.091	.407	.610	.267	-.38	1.01	-.92	12.50	R <sup>2</sup> = .750
	(.077)	(.141)	(.108)	(.415)	(.302)	(1.98)	(2.36)	(2.18)	(4.63)	
	.281	.050	.442	.128	.101					

M O D E L II

	L_	F_	W_	G	I	O <sub>1</sub>	O <sub>2</sub>	O <sub>3</sub>	1	b <sub>G</sub>	b <sub>I</sub>	
L	.823	.292	.197	.356	-.213	2.22	.78	-.30	-.65	1.002	.225	R <sup>2</sup> = .912
	(.083)	(.152)	(.118)	(.480)	(.395)	(2.14)	(2.53)	(2.38)	(5.13)	(.912)	(.652)	
	.821	.092	.122	.042	-.046					.048	.018	
F	.034	.610	.025	.137	-.299	.59	1.24	1.48	9.59	.539	-.465	R <sup>2</sup> = .709
	(.038)	(.069)	(.053)	(.217)	(.179)	(.97)	(1.14)	(1.08)	(2.32)	(.412)	(.295)	
	.135	.775	.061	.066	-.260					.104	-.151	
W	.151	.083	.391	.617	.393	-.23	1.22	-1.19	11.59	.331	.296	R <sup>2</sup> = .752
	(.080)	(.146)	(.113)	(.460)	(.378)	(2.05)	(2.42)	(2.28)	(4.91)	(.873)	(.624)	
	.267	.046	.424	.129	.149					.028	.042	

Tabel 4.1.1: De LSNR-schattingen  $\hat{\Pi}$  voor structurele modellen I en II en de proporties verklaarde variantie  $R^2$  voor ieder van de endogene variabelen L, F en W; de eerste regel bevat telkens de coëfficiënten, de tweede regel tussen haakjes de bijbehorende standaardfouten en de derde regel de gestandaardiseerde coëfficiënten.



mogen zekere effecten op de endogene variabelen wellicht niet worden uitgesloten; zo lijkt instituut 1 voor betere leesprestaties te zorgen, instituten 2 en 3 voor betere prestaties in de figuur-oriëntatie en instituut 2 wellicht ook voor een hoger woordenschat-niveau (zie ook de betrokken coëfficiënten met bijbehorende standaard-fouten onder model II in tabel 4.1.1).

De specificatie van structureel model I is evenals van dadelijk te bespreken structureel model II weergegeven in fig. 4.1.1. Kruisjes geven de gehypothetiseerde causale effecten aan, d.w.z. voor welke endogene of gepredetermineerde variabele een causaal effect op welke endogene variabele werd toegelaten. Anders dan matrix  $\Pi$  van de gereduceerde vorm, die middels  $\Pi = -\Delta^{-1}\Gamma$  afleidbaar is uit de structurele vorm, bevat matrix  $\Delta$  directe geheugenloze effecten tussen endogene variabelen onderling en matrix  $\Gamma$  directe effecten van gepredetermineerde op endogene variabelen. Theoretische overwegingen, volgens welke woordenschat- en leesniveau elkaar wederzijds beïnvloeden, de woordenschat bij blinden van invloed moet worden geacht op het herkennen en onderscheiden van figuren en dit laatste vermogen op zijn beurt het braille-lezen zou beïnvloeden, leidden tot de dubbele geheugenloze feedback-loop in matrix  $\Delta$  (zie het pijldiagram in fig. 4.1.1).

Dergelijke geheugenloze coëfficiënten in matrix  $\Delta$  zijn alleen dan identificeerbaar, indien voldoende restricties worden gesteld op de coëfficiënten in matrix  $\Gamma$ . De gekozen restricties betroffen 0-restricties. In de eerste plaats werd iedere endogene variabele slechts afhankelijk gesteld van de bijbehorende lagged-endogene variabele en niet van andere lagged-endogene variabelen. Aangenomen werd dat de effecten van lees-, figuur-oriëntatie- en woordenschatniveau geheel voor rekening komen van de (current-)endogene L, F en W in  $\Delta$ . In de tweede plaats werden de effecten van geheugen G op L en F op 0 gesteld.

Een ondersteuning voor de juistheid van gekozen restricties vormen de geringe afwijkingen tussen  $\hat{\Pi} = -\hat{\Delta}^{-1}\hat{\Gamma}$  in tabel 4.1.3 (berekend middels onderdeel 3 REDUCED FORM in appendix A op basis van de 2SLS-schatting van de structurele vorm; de laatste werd berekend met onderdeel 2 2SLS/OLS in appendix A en is opgenomen in tabel 4.1.2) en de besproken LSNR-schatting  $\hat{\Pi}$  in tabel 4.1.1. Opvallend is, dat ondanks de 0-specificatie voor het direct effect van G op L de afgeleide effect-schatting

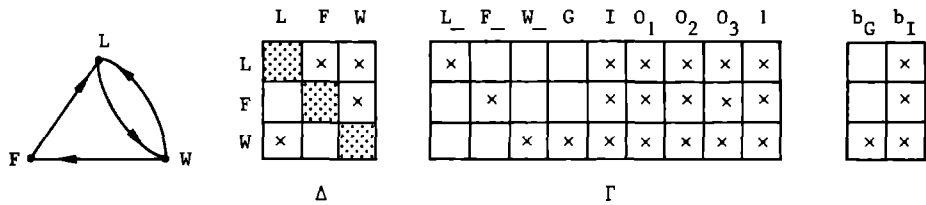


Fig. 4.1.1: De specificatie van structurele modellen I en II; de specificatie van matrix  $\Delta$  is in beide modellen identiek en middels het pijldiagram grafisch weergegeven; in model II bevat matrix  $\Gamma$  additionele kolommen voor  $b_G$  en  $b_I$ .

## M O D E L I

	L	F	W	L <sub>-</sub>	F <sub>-</sub>	W <sub>-</sub>	G	I	O <sub>1</sub>	O <sub>2</sub>	O <sub>3</sub>	1	
L	-1	.438	.511	.736	0	0	0	-.401	1.79	-.67	-.07	-9.91	R <sup>2</sup> = .889
		(.243)	(.268)	(.112)				(.353)	(2.21)	(2.63)	(2.54)	(8.23)	
		.108	.291	.734				-.086					
F	0	-1	.077	0	.633	0	0	-.175	.34	1.11	1.22	7.78	R <sup>2</sup> = .682
			(.066)		(.063)			(.146)	(.91)	(1.08)	(.99)	(2.14)	
			.176		.804			.152					
W	.200	0	-1	0	0	.358	.554	.341	-.66	.97	-.83	12.75	R <sup>2</sup> = .748
	(.076)					(.106)	(.395)	(.273)	(1.84)	(2.21)	(2.01)	(3.73)	
	.352					.388	.116	.129					

## M O D E L II

	L	F	W	L <sub>-</sub>	F <sub>-</sub>	W <sub>-</sub>	G	I	O <sub>1</sub>	O <sub>2</sub>	O <sub>3</sub>	1	b <sub>G</sub>	b <sub>I</sub>	
L	-1	.465	.496	.725	0	0	0	-.288	1.73	-.59	-.39	-10.99	0	.303	R <sup>2</sup> =
		(.244)	(.285)	(.111)				(.474)	(2.21)	(2.64)	(2.69)	(8.15)	(.709)		.889
		.115	.282	.724				-.062					.024		
F	0	-1	.139	0	.624	0	0	-.378	.42	.88	1.72	7.86	0	-.475	R <sup>2</sup> =
			(.078)		(.064)			(.195)	(.92)	(1.10)	(1.05)	(2.15)	(.292)		.677
			.318		.793			-.328					-.154		
W	.193	0	-1	0	0	.348	.544	.435	-.58	1.11	-1.05	12.12	.166	.243	R <sup>2</sup> =
	(.079)					(.107)	(.438)	(.343)	(1.89)	(2.23)	(2.06)	(4.07)	(.812)	(.577)	.749
	.339					.378	.114	.165					.014	.034	

Tabel 4.1.2: De 2SLS-schattingen  $\hat{\Delta}$  en  $\hat{\Gamma}$  voor structurele modellen I en II en de proporties verklaarde variantie  $R^2$  voor ieder van de endogene variabelen L, F en W; de eerste regel bevat telkens de coëfficiënten, de tweede regel tussen haakjes de bijbehorende standaard-fouten en de derde regel de gestandaardiseerde coëfficiënten.

MODEL I

	L_	F_	W_	G	I	O <sub>1</sub>	O <sub>2</sub>	O <sub>3</sub>	I	
L	.826 (.081)	.311 (.169)	.219 (.104)	.339 (.271)	-.32 (.288)	1.78 (1.97)	.38 (2.33)	.02 (2.16)	.50 (4.67)	R <sup>2</sup> = .910
	.824	.098	.135	.040	-.071					
F	.013 (.012)	.638 (.062)	.031 (.027)	.048 (.052)	-.154 (.131)	.32 (.90)	1.19 (1.07)	1.16 (.97)	8.77 (1.58)	R <sup>2</sup> = .690
	.051	.810	.077	.023	-.134					
W	.165 (.065)	.062 (.040)	.401 (.102)	.621 (.423)	.275 (.285)	-.30 (1.82)	1.04 (2.21)	-.83 (2.01)	12.85 (3.87)	R <sup>2</sup> = .750
	.290	.035	.435	.130	.104					

MODEL II

	L_	F_	W_	G	I	O <sub>1</sub>	O <sub>2</sub>	O <sub>3</sub>	I	b <sub>G</sub>	b <sub>I</sub>	
L	.813 (.082)	.326 (.169)	.219 (.107)	.342 (.298)	-.247 (.363)	1.80 (1.98)	.49 (2.34)	-.20 (2.23)	-.59 (4.84)	.105 (.507)	.245 (.601)	R <sup>2</sup> = .911
	.811	.103	.135	.041	-.053					.005	.020	
F	.022 (.015)	.633 (.062)	.054 (.031)	.085 (.078)	-.324 (.164)	.39 (.89)	1.04 (1.06)	1.57 (.99)	9.53 (1.69)	.026 (.127)	-.435 (.271)	R <sup>2</sup> = .701
	.088	.804	.135	.041	-.282					.005	-.141	
W	.157 (.067)	.063 (.042)	.391 (.104)	.610 (.471)	.387 (.351)	-.23 (1.86)	1.20 (2.22)	-1.09 (2.06)	12.01 (4.17)	.187 (.907)	.291 (.574)	R <sup>2</sup> = .752
	.275	.035	.424	.128	.147					.016	.041	

Tabel 4.1.3: De schattingen van de gereduceerde vorm  $\hat{\Pi}$  voor structurele modellen I en II op basis van 2SLS-schattingen  $\hat{\Delta}$  en  $\hat{\Gamma}$  en de proporties verklaarde variantie  $R^2$  voor ieder van de endogene variabelen L, F en W; de eerste regel bevat telkens de coëfficiënten, de tweede regel tussen haakjes de bijbehorende standaard-fouten en de derde regel de gestandaardiseerde coëfficiënten.

in tabel 4.1.3 positief en zelfs nog iets groter is dan de LSNR-schatting in tabel 4.1.1. Ook keren in tabel 4.1.3 de negatieve effect-schattingen van I op L en F terug, maar met kleinere standaard-fouten. Bij grotere afwijkingen tussen tabel 4.1.1 en 4.1.3 was het probleem ontstaan, of deze afwijkingen waren toe te schrijven aan de grotere sampling-fluctuaties van de coëfficiënten in tabel 4.1.1 dan wel aan een misspecificatie van de structurele vorm. De geconstateerde geringe afwijkingen mogen worden opgevat als een ondersteuning voor de gekozen structurele specificatie. Er lijkt geen bezwaar tegen om gebruik te maken van de geschatte gereduceerde vorm  $\hat{\Pi}$  in tabel 4.1.3 met het belangrijke voordeel van de overwegend kleinere standaard-fouten.

Model II verschilt slechts in dit opzicht van model I, dat behalve exogene variabelen G en I tevens corresponderende exogene variabelen  $b_G$  en  $b_I$  zijn opgenomen, d.w.z. de groei in G en I over de aansluitende tijdsperiode van 1 jaar. De lengte van de tijdsperiode komt overeen met die tussen endogene en lagged-endogene waarden. Aangezien tussen G en I (W.I.S.C.-skores in 1970) en de eerstvolgende afnames  $G_+$  en  $I_+$  (W.I.S.C.-skores in 1972) in feite een tijdsperiode van  $\pm 2$  jaar lag, werden  $b_G$  en  $b_I$  - kolom (13) en (14) in appendix B - berekend als  $\frac{1}{2}(G_+ - G)$  en  $\frac{1}{2}(I_+ - I)$ . Toevoeging van deze groei-variabelen  $b_G$  (gemiddelde: .66901, standaard-afwijking: .91004) en  $b_I$  (gemiddelde: 1.5915, standaard-afwijking: 1.536) leidt blijkens tabel 4.1.3 tot slechts iets hogere proporties verklaarde variantie  $R^2$ . De differentie-modellen 1 en 2 met  $\Delta t = 1 = \delta$ , die op de wijze zoals aangegeven in paragraaf 3.3 rechtstreeks uit resp. de structurele modellen I en II volgen, onderscheiden zich op overeenkomstige wijze. Het voordeel van de modellen II en 2 met groei-variabelen  $b_G$  en  $b_I$  over tijdsperiode met lengte  $\delta$  is niet de nauwelijks hogere  $R^2$ -waarden maar de mogelijkheid om volgens de procedures in paragraaf 3.4 een differentie-model [A,B,C,D] met een willekeurige  $\Delta t = 1 \neq \delta$  af te leiden en een differentieel model [A,B,C,D]. Zo zal differentie-model 3 worden afgeleid met tijdsdifferentie  $\Delta t = 1$  gedefinieerd als het kwartaal van een jaar, zodat in dit model voor de tijdsperiode  $\delta$  tussen opeenvolgende waarnemingstijdstippen geldt  $\delta = 4$ . Als het differentieel model zal model 4 met  $\delta = 1$  worden afgeleid.

Nog niet besproken is de identificeerbaarheid van de modellen I en II. De vergelijkingen van beide modellen voldoen aan orde-voorwaarde

3.3.66. Terwijl het aantal (current-)endogene variabelen  $p$  in beide modellen 3 is en het aantal gepredetermineerde variabelen  $q$  in model I 9 en in model II 11, zijn de aantallen opgenomen gepredetermineerde variabelen  $q'$ , weggelaten gepredetermineerde variabelen  $q - q'$ , opgenomen (current-)endogene variabelen  $p'$  en aantal  $p' - 1$  blijktens fig. 4.1.1 als volgt:

<u>Vergelijking</u>	<u>Model I</u>	<u>Model II</u>
L	$q - q' = 9 - 6 = 3$ $p' - 1 = 3 - 1 = 2$	$q - q' = 11 - 7 = 4$ $p' - 1 = 3 - 1 = 2$
F	$q - q' = 9 - 6 = 3$ $p' - 1 = 2 - 1 = 1$	$q - q' = 11 - 7 = 4$ $p' - 1 = 2 - 1 = 1$
W	$q - q' = 9 - 7 = 2$ $p' - 1 = 2 - 1 = 1$	$q - q' = 11 - 9 = 2$ $p' - 1 = 2 - 1 = 1$

zodat geldt:  $q - q' \geq p' - 1$  voor iedere vergelijking in ieder van beide modellen. Toepassing van rangvoorwaarde 3.3.64 vereist berekening van  $A \cdot \phi_i$ .

$$A = [\Delta \Gamma] = \begin{matrix} & (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) & (8) & (9) & (10) & (11) & (12) & (13) & (14) \\ \begin{bmatrix} 1 & \delta_{12} & \delta_{13} & \gamma_{11} & 0 & 0 & 0 & \gamma_{15} & \gamma_{16} & \gamma_{17} & \gamma_{18} & \gamma_{19} \\ 0 & 1 & \delta_{23} & 0 & \gamma_{22} & 0 & 0 & \gamma_{25} & \gamma_{26} & \gamma_{27} & \gamma_{28} & \gamma_{29} \\ \delta_{31} & 0 & 1 & 0 & 0 & \gamma_{33} & \gamma_{34} & \gamma_{35} & \gamma_{36} & \gamma_{37} & \gamma_{38} & \gamma_{39} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{1,11} \\ 0 & \gamma_{2,11} \\ \gamma_{3,10} & \gamma_{3,11} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Voor model II worden de kolommen (13) en (14) toegevoegd aan  $A$ . De matrices  $\phi_i$  bevatten de restricties op ieder van de vergelijkingen, d.w.z. op ieder van de rijen  $\alpha_i$  van  $A$ .  $\alpha_1$  heeft 0-coëfficiënten op de 5e, 6e en 7e plaats en voor model II bovendien op de 13e plaats,  $\alpha_2$  heeft 0-coëfficiënten op de 1e, 4e, 6e en 7e plaats en voor model II bovendien op de 13e plaats,  $\alpha_3$  heeft 0-coëfficiënten op de 2e, 4e en 5e plaats. In overeenstemming hiermee bevatten de matrices  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  en  $\phi_3$  waarden 1 op de onder aangegeven plaatsen en op de overige plaatsen 0.

VergelijkingModel IModel II

L  $\phi_1$  een  $12 \times 3$ -matrix met 1  
op plaatsen  $\langle 5,1 \rangle$ ,  
 $\langle 6,2 \rangle$ ,  $\langle 7,3 \rangle$

$$A \cdot \phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{33} & \gamma_{34} \end{bmatrix}$$

$\phi_1$  een  $14 \times 4$ -matrix met 1  
op plaatsen  $\langle 5,1 \rangle$ ,  
 $\langle 6,2 \rangle$ ,  $\langle 7,3 \rangle$ ,  $\langle 13,4 \rangle$

$$A \cdot \phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{33} & \gamma_{34} & \gamma_{3,10} \end{bmatrix}$$

F  $\phi_2$  een  $12 \times 4$ -matrix met 1  
op plaatsen  $\langle 1,1 \rangle$ ,  
 $\langle 4,2 \rangle$ ,  $\langle 6,3 \rangle$ ,  $\langle 7,4 \rangle$

$$A \cdot \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{31} & 0 & \gamma_{33} & \gamma_{34} \end{bmatrix}$$

$\phi_2$  een  $14 \times 5$ -matrix met 1  
op plaatsen  $\langle 1,1 \rangle$ ,  
 $\langle 4,2 \rangle$ ,  $\langle 6,3 \rangle$ ,  $\langle 7,4 \rangle$ ,  $\langle 13,5 \rangle$

$$A \cdot \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{31} & 0 & \gamma_{33} & \gamma_{34} & \gamma_{3,10} \end{bmatrix}$$

W  $\phi_3$  een  $12 \times 3$ -matrix met 1  
op plaatsen  $\langle 2,1 \rangle$ ,  
 $\langle 4,2 \rangle$ ,  $\langle 5,3 \rangle$

$$A \cdot \phi_3 = \begin{bmatrix} \delta_{12} & \gamma_{11} & 0 \\ 1 & 0 & \gamma_{22} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\phi_3$  een  $14 \times 3$ -matrix met 1  
op plaatsen  $\langle 2,1 \rangle$ ,  
 $\langle 4,2 \rangle$ ,  $\langle 5,3 \rangle$

$$A \cdot \phi_3 = \begin{bmatrix} \delta_{12} & \delta_{11} & 0 \\ 1 & 0 & \gamma_{22} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aan de rangvoorwaarde:  $\text{Rang } A \cdot \phi_1 = p - 1 = 2$  wordt door matrix  $A \cdot \phi_1$  reeds voldaan, indien  $\gamma_{22}$  en één van de coëfficiënten  $\gamma_{33}$ ,  $\gamma_{34}$  (of  $\gamma_{3,10}$  in model II) ongelijk aan 0 is; door matrix  $A \cdot \phi_2$ , indien één van de coëfficiënten  $\gamma_{33}$ ,  $\gamma_{34}$  (of  $\gamma_{3,10}$  in model II) ongelijk aan 0 is; door matrix  $A \cdot \phi_3$ , indien  $\gamma_{11}$  ongelijk aan 0 is. Aangezien met name mag worden aangenomen, dat de coëfficiënten  $\gamma_{11}$ ,  $\gamma_{22}$  en  $\gamma_{33}$  (de effecten van lagged-endogene variabelen op bijbehorende current-endogene variabelen) ongelijk aan 0 zijn, hoeft niet aan de identificeerbaarheid van enige coëfficiënt te worden getwijfeld.

Uitwerking van  $\alpha_1 [B \ \phi_1] = 0$  - zie 3.3.63 - voor model I resulteert in 9 vergelijkingen voor de 8 coëfficiënten in  $\alpha_1$ : overgeïdentificeerd met 1 overidentificerende restrictie zijn de coëfficiënten  $\delta_{12}$  en  $\delta_{13}$

$$\begin{aligned}\pi_{12} + \delta_{12}\pi_{22} + \delta_{13}\pi_{32} &= 0 \\ \pi_{13} + \delta_{12}\pi_{23} + \delta_{13}\pi_{33} &= 0 \\ \pi_{14} + \delta_{12}\pi_{24} + \delta_{13}\pi_{34} &= 0\end{aligned}$$

Voor model II resulteren 11 vergelijkingen voor de 9 coëfficiënten in  $\alpha_1$  met als additionele overidentificerende restrictie voor  $\delta_{12}$  en  $\delta_{13}$

$$\pi_{1,10} + \delta_{12}\pi_{2,10} + \delta_{13}\pi_{3,10} = 0$$

Uitwerking van  $\alpha_2[B \ \phi_2] = 0$  voor model I resulteert in 9 vergelijkingen voor de 7 coëfficiënten in  $\alpha_2$ ; overgeïdentificeerd met 2 overidentificerende restricties is  $\delta_{23}$

$$\begin{aligned}\pi_{21} + \delta_{23}\pi_{31} &= 0 \\ \pi_{23} + \delta_{23}\pi_{33} &= 0 \\ \pi_{24} + \delta_{23}\pi_{34} &= 0\end{aligned}$$

Voor model II resulteren 11 vergelijkingen voor de 8 coëfficiënten in  $\alpha_2$  met als additionele overidentificerende restrictie voor  $\delta_{23}$

$$\pi_{2,10} + \delta_{23}\pi_{3,10} = 0$$

Uitwerking van  $\alpha_3[B \ \phi_3] = 0$  voor model I resulteert in 9 vergelijkingen voor de 8 coëfficiënten in  $\alpha_3$ ; overgeïdentificeerd met 1 overidentificerende restrictie is  $\delta_{31}$

$$\begin{aligned}\delta_{31}\pi_{11} + \pi_{31} &= 0 \\ \delta_{31}\pi_{12} + \pi_{32} &= 0\end{aligned}$$

Voor model II resulteren 11 vergelijkingen voor de 10 coëfficiënten in  $\alpha_3$  zonder additionele overidentificerende restricties.

De matrix  $\Pi = -\Delta^{-1}\Gamma$  van de gereduceerde vorm, die zo'n belangrijke rol speelt in het identificeerbaarheidsonderzoek en het schattingsproces van de modellen I en II en die indirect ook de modellen 1, 2, 3 en 4 zal bepalen, bestaat alleen dan, indien



$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & \delta_{12} & \delta_{13} \\ 0 & 1 & \delta_{23} \\ \delta_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

niet-singulier is en dus

$$\Delta^{-1} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/d & -\delta_{12}/d & (\delta_{12}\delta_{23} - \delta_{13})/d \\ \delta_{23}\delta_{31}/d & (1 - \delta_{13}\delta_{31})/d & -\delta_{23}/d \\ -\delta_{31}/d & \delta_{12}\delta_{31}/d & 1/d \end{bmatrix}$$

bestaat. De elementen van  $\Delta^{-1}$  bevatten de ingewikkelde noemer

$$d = 1 + \delta_{12}\delta_{23}\delta_{31} - \delta_{13}\delta_{31} = 1 - [(-\delta_{12})(-\delta_{23})(-\delta_{31})] - [(-\delta_{13})(-\delta_{31})]$$

die het gevolg is van de geheugenloze feedback-loops in  $\Delta$  en waarin  $(-\delta_{12})(-\delta_{23})(-\delta_{31})$  en  $(-\delta_{13})(-\delta_{31})$  de feedback-gains zijn.  $d$  moet ongelijk aan 0 zijn en de som van de feedback-gains dus ongelijk aan 1. De geschatte coëfficiënten  $-\hat{\delta}_{ij}$  in tabel 4.1.2, die alle positief zijn, leveren voor model I de volgende geschatte feedback-gains

$$(-\hat{\delta}_{12})(-\hat{\delta}_{23})(-\hat{\delta}_{31}) = (.438)(.077)(.200) = .007$$

$$(-\hat{\delta}_{13})(-\hat{\delta}_{31}) = (.511)(.200) = .102$$

en voor model II

$$(-\hat{\delta}_{12})(-\hat{\delta}_{23})(-\hat{\delta}_{31}) = (.465)(.139)(.193) = .012$$

$$(-\hat{\delta}_{13})(-\hat{\delta}_{31}) = (.496)(.193) = .096$$

Gesommeerd levert dit resp. voor model resp. I en II de waarden .109 en .108 op. Dat de beide feedback-gains positief en tezamen behoorlijk wat lager dan 1 zijn, lijkt overigens ook op a priori gronden te verdedigen.

De coëfficiënten  $\pi_{ij}$  van de gereduceerde vorm  $\Pi = -\Delta^{-1}\Gamma$  ontstaan als lineaire combinaties van de coëfficiënten in  $j$ -de kolom van  $-\Gamma$  volgens gewichten in de  $i$ -de rij van  $\Delta^{-1}$ . Deze nogal complexe gewichten als gevolg van de gehypothetiseerde feedback-structuur volgens matrix  $\Delta$

laten zien, dat de coëfficiënten  $\pi_{ij}$  als afgeleide effecten van de gepredetermineerde variabelen in feite een tamelijk ingewikkelde combinatie vormen van de directe effecten van endogene variabelen volgens matrix  $\Delta$  en gepredetermineerde variabelen volgens matrix  $\Gamma$ . Niettemin kan men aan de hand van  $\Delta^{-1}$  op gedetailleerde wijze nagaan, langs welke causale paden en loops aan de afgeleide effecten wordt bijgedragen.

#### De modellen 1, 2, 3 en 4 en hun schattingen

Geen enkele van de endogene variabelen L, F en W voldoet aan de eisen te stellen aan output-waarde-variabelen en  $y(t)$  werd daarom definitief gekozen middels specificatie  $C = I$  en  $D = 0$ ; C van de orde  $3 \times 3$ , D van de orde  $3 \times 6$  voor modellen 1, 3 en 4 en van de orde  $3 \times 8$  voor model 2. Deze specificatie  $C = I$  en  $D = 0$  impliceert toestand-identieke output:  $y(t) = x(t)$ . Predictie van output-waarden  $y(t)$  op basis van A, B, C en D is dus identiek met predictie van toestanden  $x(t)$  op basis van A en B. De matrices A en B van differentie-modellen 1 en 2 volgen rechtstreeks uit structurele modellen I en II middels  $\Pi = [\tilde{A} \ B]$  en  $A = \tilde{A} - I$ ; de geschatte matrices  $\hat{A}$  en  $\hat{B}$ , opgenomen in tabel 4.1.4, volgen op dezelfde wijze rechtstreeks uit tabel 4.1.3 middels  $\hat{\Pi} = [\hat{A} \ \hat{B}]$  en  $\hat{A} = \hat{\tilde{A}} - I$ .

Anders dan de geheugenloze coëfficiënten in matrix  $\hat{\Delta}$  geven de coëfficiënten in  $\hat{A}$  en  $\hat{A} = \hat{\tilde{A}} - I$  een schatting van de effecten met geheugenwerking tussen de variabelen in toestand-vector  $x(t) = \begin{bmatrix} L(t) \\ F(t) \\ W(t) \end{bmatrix}$ . Een in-

dicatie voor de sterkte van deze effecten met geheugenwerking vormen de bijbehorende gestandaardiseerde coëfficiënten in tabel 4.1.3. Bij verwaarlozing van de effecten met de twee laagste gestandaardiseerde coëfficiënten in  $\hat{A}$  resulteert dan voor de modellen 1 en 2 de causale structuur tussen de toestand-variabelen die is weergegeven in de pijldiagrammen van fig. 4.1.2. De vorm van de pijldiagrammen blijkt niettemin identiek met die voor de geheugenloze  $\Delta$  in fig. 4.1.1, uitgezonderd de zelf-loops met geheugenwerking die uiteraard in fig. 4.1.1 ontbreken. Ook

Model 1 (differentie-model;  $\Delta t = 1$  is één jaar)

$$\begin{array}{l} L(t) \quad F(t) \quad W(t) \quad G(t-1)I(t-1) \quad O_1(t) \quad O_2(t) \quad O_3(t) \quad I \\ \Delta L(t) \quad \Delta F(t) \quad \Delta W(t) \end{array} \begin{bmatrix} -.174 & .311 & .219 \\ .013 & -.362 & .031 \\ .165 & .062 & -.599 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .339 & -.328 & 1.78 & .38 & .02 & .50 \\ .048 & -.154 & .32 & 1.19 & 1.16 & 8.77 \\ .621 & .275 & -.30 & 1.04 & -.83 & 12.85 \end{bmatrix}$$

Model 2 (differentie-model;  $\Delta t = 1$  is één jaar)

$$\begin{array}{l} L(t) \quad F(t) \quad W(t) \quad G(t-1)I(t-1) \quad O_1(t) \quad \dot{O}_2(t) \quad O_3(t) \quad I \quad b_G(t-1) \quad b_I(t-1) \\ \Delta L(t) \quad \Delta F(t) \quad \Delta W(t) \end{array} \begin{bmatrix} -.187 & .326 & .219 \\ .022 & -.367 & .054 \\ .157 & .063 & -.609 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .342 & -.247 & 1.80 & .49 & -.20 & -.59 & .105 & .245 \\ .085 & -.324 & .39 & 1.04 & 1.57 & 9.53 & .026 & -.435 \\ .610 & .387 & -.23 & 1.20 & -1.09 & 12.01 & .187 & .291 \end{bmatrix}$$

Model 3 (differentie-model;  $\Delta t = 1$  is één kwartaal)

$$\begin{array}{l} L(t) \quad F(t) \quad W(t) \quad G(t-4)I(t-4) \quad O_1(t) \quad O_2(t) \quad O_3(t) \quad I \\ \Delta L(t) \quad \Delta F(t) \quad \Delta W(t) \end{array} \begin{bmatrix} -.058 & .103 & .081 \\ .005 & -.110 & .022 \\ .060 & .015 & -.221 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .067 & -.068 & .49 & .04 & -.08 & -1.03 \\ .018 & -.100 & .11 & .29 & .48 & 2.69 \\ .204 & .145 & -.13 & .40 & -.38 & 4.19 \end{bmatrix}$$

Model 4 (differentieel model; t over jaren)

$$\begin{array}{l} L(t) \quad F(t) \quad W(t) \quad G(t-1)I(t-1) \quad O_1(t) \quad O_2(t) \quad O_3(t) \quad I \\ \dot{L}(t) \quad \dot{F}(t) \quad \dot{W}(t) \end{array} \begin{bmatrix} -.254 & .450 & .371 \\ .019 & -.466 & .106 \\ .282 & .053 & -1.013 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .229 & -.198 & 2.01 & .03 & -.37 & -5.69 \\ .062 & -.490 & .49 & 1.23 & 2.04 & 11.16 \\ .873 & .678 & -.68 & 1.81 & -1.74 & 19.09 \end{bmatrix}$$

Tabel 4.1.4: Matrices  $\hat{A}$  en  $\hat{B}$  van de modellen 1, 2, 3 en 4, afgeleid uit  $\hat{\Pi}$  van de modellen I en II in tabel 4.1.3.

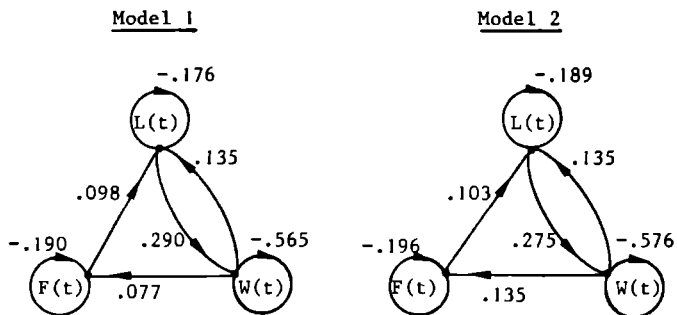


Fig. 4.1.2: Pijldiagrammen voor matrix  $\hat{A}$  van de modellen 1 en 2 bij verwaarlozing van de coëfficiënten met de twee laagste gestandaardiseerde coëfficiënten in tabel 4.1.3; bij de pijlen zijn de gestandaardiseerde coëfficiënten vermeld.

zijn de verschillen tussen de modellen 1 en 2 gering; alleen m.b.t. het effect van woordenschat op figuur-oriëntatie geeft model 2 een duidelijk hogere gestandaardiseerde coëfficiënt dan model 1. Aan het negatieve effect van de zelf-loops, die ieder het gecombineerde effect van de beide positieve feedback-loops overtreffen, is klaarblijkelijk de stabiliteit te danken, die voor ieder van de modellen zal worden afgeleid.

$\hat{A}$  en  $\hat{B}$  van differentie-model 3 en differentieel model 4 werden berekend middels onderdeel 4 van appendix A volgens 3.4.12, waarbij  $\hat{A}$  van model 2 optrad als  $\hat{A}_*$  en  $\hat{B}$  van model 2 werd gesplitst in  $\hat{B}_*$  en  $\hat{B}'_{**}$  met in  $\hat{B}'_{**}$  de kolommen onder  $b_G(t-1)$  en  $b_I(t-1)$ .  $\hat{B}_*$  en  $\hat{B}_{**} = 4\hat{B}'_{**}$  (model 3 met  $\delta = 4$ ) c.q.  $\hat{B}_{**} = \hat{B}'_{**}$  (model 4 met  $\delta = 1$ ) gaven resp. voor de kolommen onder  $G(t-4)$  en  $I(t-4)$  in model 3 en onder  $G(t-1)$  en  $I(t-1)$  in model 4 afwijkende schattingen; die op basis van  $\hat{B}_*$  zijn aangegeven onder  $\hat{B}_1$  en die op basis van  $\hat{B}_{**}$  onder  $\hat{B}_2$ .

<u>Model 3</u>				<u>Model 4</u>			
G(t - 4)		I(t - 4)		G(t - 1)		I(t - 1)	
$\hat{B}_1$	$\hat{B}_2$	$\hat{B}_1$	$\hat{B}_2$	$\hat{B}_1$	$\hat{B}_2$	$\hat{B}_1$	$\hat{B}_2$
.068	.064	-.068	.180	.235	.170	-.286	.592
.018	.016	-.100	-.316	.064	.044	-.429	-1.035
.204	.141	.145	.221	.915	.488	.669	.758

De afwijkende schattingen werden volgens verschillende paren gewichten  $w_1$  en  $w_2$  gecombineerd, zodat voor ieder paar gewichten een afzonderlijke schatting van model 3 en 4 resulteerde. Op basis hiervan werden telkens de waarden L, F en W geschat, de bijbehorende proporties verklaarde variantie  $R^2$  berekend en hun gemiddelde  $\overline{R^2}$ .

Gewichten		Model 3				Model 4			
$w_1$	$w_2$	$R_L^2$	$R_F^2$	$R_W^2$	$\overline{R^2}$	$R_L^2$	$R_F^2$	$R_W^2$	$\overline{R^2}$
.00	1.00	.67415	-2.5607	.73043	-.38537	.88131	-.82638	.73318	.26270
.10	.90	.72103	-1.9154	.73459	-.15326	.80364	-.5206	.73673	.33992
.20	.80	.76272	-1.3414	.73839	.05320	.82753	-.24917	.73991	.43942
.30	.70	.79923	-.83882	.74154	.23398	.89838	-.01207	.74271	.52634
.40	.60	.83054	-.40760	.74433	.38909	.8662	.1907	.74514	.60068
.50	.50	.85666	-.04773	.74666	.51853	.88098	.35913	.7472	.66244
.60	.40	.87759	.24077	.74855	.62230	.89272	.49322	.74888	.71161
.70	.30	.89333	.45791	.74998	.70041	.90144	.59298	.75018	.76686
.80	.20	.90388	.60396	.75095	.75284	.90711	.6584	.75112	.77221
.90	.10	.90924	.67810	.75147	.77960	.90975	.68948	.75167	.78363
1.00	.00	.90941	.68115	.75154	.78070	.90935	.68623	.75186	.78248

De hoogste waarden in iedere kolom zijn omcirkeld. Voor model 3 werden met  $\overline{R^2}$  als criterium optimale gewichten  $w_1 = 1.00$  en  $w_2 = .00$  gekozen en voor model 4  $w_1 = .90$  en  $w_2 = .10$ ; de schattingen met deze gewichten zijn opgenomen in tabel 4.1.4. Het toegepaste criterium bij de bepaling van de gewichten  $w_1$  en  $w_2$  is in feite een kleinste-kwadraten criterium (minimalisering van de "trace" van residuele variantie-covariantie-matrix  $\hat{\Sigma}$ ).

Ter vergelijking volgen hier de  $R^2$ - en  $\overline{R^2}$ -waarden voor ieder van de modellen 1, 2, 3 en 4.

Model	$R_L^2$	$R_F^2$	$R_W^2$	$\overline{R^2}$
1	.91032	.68967	.75014	.78338
2	.91092	.70072	.75175	.78780
3	.90941	.68115	.75154	.78070
4	.90975	.68948	.75167	.78363

Ook al zijn de verschillen uiterst gering, toch is  $\overline{R^2}$  niet alleen voor model 2, waarin de groei-variabelen  $b_G$  en  $b_I$  als kunstmatige input-waarde-variabelen voorkomen, maar ook voor model 4 hoger dan voor model 1. Voor model 3 is alleen  $R_W^2$  hoger dan voor model 1. De assumpties, die aan de modellen 3 en 4 en aan de toegepaste schattingsprocedure voor

deze modellen ten grondslag liggen, blijken in ieder geval geen duidelijke verlaging van de proporties verklaarde variantie tot gevolg te hebben. Dat zou wel voor figuur-oriëntatie het geval zijn geweest, indien  $\hat{B}_1$  en additionele  $\hat{B}_2$  op basis van  $b_G$  en  $b_I$  ( $\{b_G$  en  $\{b_I$  voor model 3 met  $\delta = 4$ ) waren gecombineerd volgens gewichten  $w_1 = w_2 = .50$  zoals gesuggereerd door Coleman, met duidelijk desastreuse gevolgen voor model 3 ( $R_F = -.047729$  voor  $w_1 = w_2 = .50$ ). Voor de beide andere variabelen zouden willekeurige gewichten  $w_1$  en  $w_2$  betrekkelijk weinig verschil hebben uitgemaakt. De hier gekozen optimale gewichten laten  $\hat{B}_2$  geen rol spelen bij de schatting van differentie-model 3; de geringe bijdrage aan differentieel model 4 levert  $R^2$ -waarden op, die overal een fractie hoger zijn dan voor 3.

Een belangrijk voordeel van de modellen 3 en 4 boven 1 en 2 is, dat anders dan in 1 met de groei rekening wordt gehouden, maar dat die groei niet zoals in 2 kunstmatig op het begintijdstip van de betreffende tijdsperiode van één jaar wordt gelokaliseerd. In differentie-model 3 worden de groei-effecten verwerkt in G- en I-effecten op 4 discrete tijdstippen over de tijdsperiode van één jaar en in differentieel model 4 in continue G- en I-effecten over die tijdsperiode. Spreiding van de effecten over de tijd mag als realistisch worden beschouwd, aangezien van geheugen en intelligentie moeilijk kan worden aangenomen, dat deze hun invloed slechts op één discreet tijdstip per jaar laten gelden zoals model 1 en 2 in feite aannemen. Nadelen van 3 en 4 zijn de lineaire groei, waarvan bij de schattingsprocedure wordt uitgegaan, en het ontbreken van formules van standaard-fouten voor de coëfficiënten in  $\hat{A}$  en  $\hat{B}$ , voor de eigenwaarden van  $\hat{A}$  en voor de predictie-waarden  $\hat{x}(t)$  en  $\hat{y}(t)$ . Vandaar dat behalve de dynamische implicaties van de geschatte modellen 3 en 4 ook die van 1 en 2 zullen worden onderzocht, waarbij de genoemde standaard-fouten zullen worden berekend en in de beschouwing betrokken.

#### Dynamische implicaties van de geschatte modellen 1, 2, 3 en 4

In tabel 4.1.5 zijn de eigenwaarden van de matrices  $\hat{A}$  in tabel 4.1.4 opgenomen met voor model 1 en 2 tussen haakjes de bijbehorende standaard-fouten.

	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$
Model 1	-0.668 (.102)	-0.389 (.067)	-0.078 (.068)
Model 2	-0.673 (.104)	-0.414 (.068)	-0.076 (.071)
Model 3	-0.244	-0.125	-0.020
Model 4	-1.119	-0.534	-0.079

Tabel 4.1.5: De eigenwaarden van de matrices  $\hat{A}$  in tabel 4.1.4 met voor model 1 en 2 tussen haakjes de bijbehorende standaardfouten.



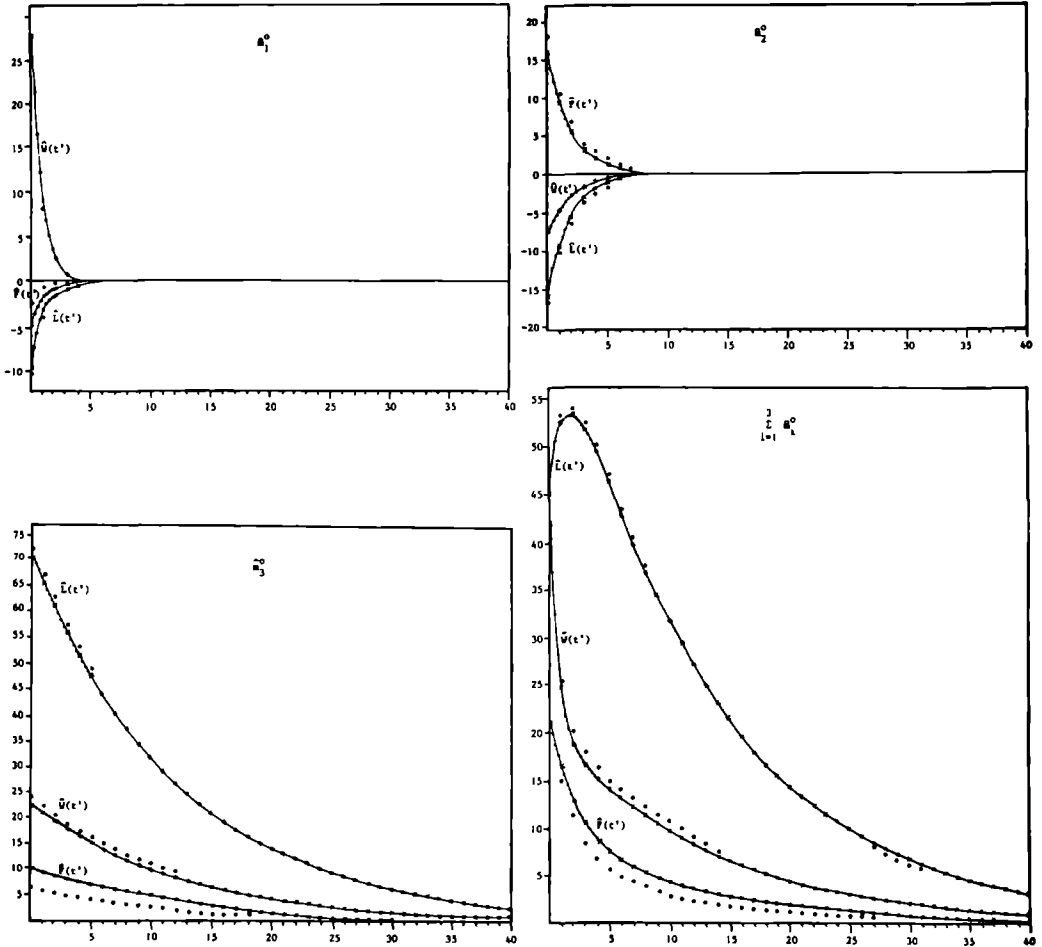


Fig. 4.1.3: Geschatte karakteristieke exciatie-bewegingen  $\hat{m}_i^0$  en vrije beweging  $\sum_{i=1}^3 \hat{m}_i^0$  voor de modellen 1 (cirkeltjes), 2 (kruisjes), 3 (stippen) en 4 (curven) op basis van de eigenwaarden  $\hat{\lambda}_i$  in tabel 4.1.5 en begintoestand  $x(t_0) = [L(t_0) \quad F(t_0) \quad W(t_0)]' = [45 \quad 21 \quad 42]'$  over 40 jaar vanaf  $t_0$ ; weggelaten zijn cirkeltjes en stippen, die niet van de curven of van elkaar zijn te onderscheiden.

Alle eigenwaarden  $\hat{\lambda}_i$  zijn reëel. Onder aanname  $\omega_i = 0$  kan men daarom de standaard-fouten voor model 1 en 2, die werden berekend als de wortels uit 3.4.13, interpreteren als standaard-fouten van de eigenwaarden  $\hat{\lambda}_i$  zelf. De eigenwaarden  $\hat{\lambda}_i$  voldoen voor differentie-modellen 1, 2 en 3 aan voorwaarde 3.2.46 en voor differentieel model 4 aan voorwaarde 3.2.47, zodat althans de geschatte modellen (totaal) asymptotisch stabiel zijn en daardoor tevens i.o.- en b.i.b.o.-stabiel - zie 3.2.69 en 3.2.70. Aangezien voor iedere (begrensde) input in de empirische realiteit mag worden aangenomen, dat ook de L-, F- en W-skores binnen bepaalde grenzen blijven, ondersteunt het stabiliteitsresultaat de gekozen model-specificatie. Het stabiliteitsresultaat wordt overigens niet overtuigend ondersteund door de standaard-fouten. De standaard-fouten .068 en .071 van  $\hat{\lambda}_3$ -waarden -.078 en -.076 blijken nauwelijks kleiner dan de  $\hat{\lambda}_3$ -waarden zelf, zodat het negatieve karakter van de  $\hat{\lambda}_3$ -waarden aan twijfel onderhevig is. Bij de nu volgende predictie-resultaten zal niettemin van stabiliteit worden uitgegaan. Meer zekerheid over het stabiliteitskarakter onder de gekozen model-specificatie zou verkregen kunnen worden door een grotere steekproef te onderzoeken dan die van  $n = 71$ , waarop de schattingen zijn gebaseerd. Een hoge mate van zekerheid m.b.t. het stabiliteitskarakter van een model is van het grootste belang, omdat predictie-resultaten volstrekt waardeloos zijn, indien gebaseerd op een stabiele schatting van een instabiel model of omgekeerd. Een kleine afwijking, waardoor de stabiliteitsgrens wordt overschreden, heeft een veel groter effect op de predictie-resultaten na een bepaalde termijn dan relatief grote afwijkingen binnen het stabiliteits- of instabiliteitsgebied.

Tabel 4.1.5 laat er weinig twijfel aan bestaan, dat de drie eigenwaarden  $\lambda_i$  telkens verschillend zijn, zodat iedere  $\lambda_i$  op simpele wijze een karakteristieke excitatie-beweging  $m_i^0$  bepaalt. Voor de schattingen  $\hat{\lambda}_i = \hat{\sigma}_i$  van modellen 1, 2 en 3 geldt:  $-1 < \hat{\sigma}_i < 0$  en van model 4:  $\hat{\sigma}_i < 0$ . Ieder van de schattingen  $\hat{m}_i^0$  is dus volgens tabel 3.2.1 van het type: monotoon naar 0 convergerend. Evenals de  $\hat{\lambda}_i$  en bijbehorende standaard-fouten in tabel 4.1.5 werden de  $\hat{m}_i^0$  en hun som  $\sum_{i=1}^3 \hat{m}_i^0$  (schatting van de vrije beweging) verkregen middels onderdeel 5 van appendix A. Gebruik werd gemaakt van excitaties  $\alpha_i(t_0)$  bij begintoestand  $x(t_0) =$

$$\begin{bmatrix} 45 \\ 21 \\ 42 \end{bmatrix} .$$

De gekozen waarden 45, 21 en 42 vormen de gemiddelden  $\bar{L}$ ,  $\bar{F}$  en  $\bar{W}$  in de onderzochte steekproef van 71 kinderen, afgerond tot gehele getallen. Bij interpretatie van  $t_0$  als het tijdstip, waarop de scores  $L$ ,  $F$  en  $W$  bij benadering betrekking hadden, t.w. medio 1971, geeft  $\sum_{i=1}^3 \hat{m}_i^0$  bij benadering de geschatte ontwikkeling van het gemiddelde lees-, figuur-oriëntatie- en woordenschat-niveau vanaf dat tijdstip onder zero-input, d.w.z. alleen rekening houdend met  $Ax(t)$  en afgezien van input-effect  $Bu(t)$  in de differentie-vergelijking c.q. differentiaal-vergelijking.

Fig. 4.1.3 laat zien, dat de assumpties van model 3 en 4 en van de toegepaste schattingsprocedure van  $A$  op basis van  $\hat{A}$  van model 2 geen ander effect hebben op de geschatte karakteristieke excitatie-bewegingen en vrije beweging dan dat de tijdsas wordt opgevuld en tussenliggende schattingen verkregen. De ruimten tussen de kruisjes van model 2 worden in model 3 opgevuld door discrete stippen en in model 4 door continue curven. Zo dadelijk zal blijken, dat een dergelijke overeenstemming tussen de predictie-curven van modellen 2, 3 en 4 komt te vervallen, indien met input-effect  $Bu(t)$  rekening wordt gehouden. Wel laat fig. 4.1.3 afwijkingen zien tussen de schattingen van model 2, 3 en 4 enerzijds en van model 1 anderzijds, maar de afwijkingen zijn gering. De introductie van de groei-variabelen blijkt geen groot effect te hebben op de geschatte karakteristieke excitatie-bewegingen en vrije beweging. Relatief de grootste afwijkingen treft men aan bij de figuur-oriëntatie  $\hat{F}(t')$ :  $\sum_{i=1}^3 \hat{m}_i^0$  ligt hier voor de modellen 2, 3 en 4 vanaf het 2e tot en met het 10e jaar meer dan 1.5 hoger en in het 3e en 4e jaar meer dan 2 hoger dan voor model 1. Geringere afwijkingen m.b.t.  $\sum_{i=1}^3 \hat{m}_i^0$  en in omgekeerde richting treft men aan bij de woordenschat  $\hat{W}(t')$ , terwijl bij leesniveau  $\hat{L}(t')$  model 1 tot en met het 15e jaar zeer geringe afwijkingen naar boven geeft, daarna gevolgd door zeer geringe afwijkingen naar beneden.

Opvallend m.b.t.  $\sum_{i=1}^3 \hat{m}_i^0$  voor alle modellen is, dat  $\hat{L}(t')$  weliswaar wordt samengesteld uit monotoon convergerende bewegingen maar zelf geen monotone beweging geeft. Ook aan zichzelf overgelaten in de vrije beweging, zou de gekozen (gemiddelde) leesniveau-skore tot en met het 2e jaar een forse stijging vertonen om pas daarna zeer geleidelijk af te nemen; pas in het 6e jaar zou het oorspronkelijke niveau 45 weer worden gepasseerd en nog in het 14e jaar zou meer dan de helft van het oorspronkelijke niveau over zijn. Dit non-monotone gedrag van  $\hat{L}(t')$  is uiteraard

te danken aan de ingewikkelde manier, waarop leesniveau, figuur-oriëntatie en woordenschat elkaar volgens  $\hat{A}$  beïnvloeden. In schrille tegenstelling tot het gedrag van  $\hat{L}(t')$  staat het gedrag van  $\hat{W}(t')$  in de vrije beweging; al in het 2e jaar zou meer dan de helft van het oorspronkelijke niveau 42 verloren zijn. Benadrukt moet worden, dat het steeds gaat om de vrije beweging, d.w.z. de autonome ontwikkeling van lees-, figuur-oriëntatie- en woordenschat-niveau zonder externe beïnvloeding (onder zero-input).

De berekening van de vrije beweging is hier geïllustreerd aan de hand van begintoestand  $[45 \ 21 \ 42]'$ , maar men kan natuurlijk uitgaan van iedere willekeurige begintoestand. In het bijzonder kan voor ieder kind in de onderzochte groep worden nagegaan, hoe vanuit zijn begin-niveau de ontwikkeling van leesniveau, figuur-oriëntatie en woordenschat zou zijn onder zero-input en eventueel vergeleken met die vanuit het gemiddelde begin-niveau.

Behalve als som  $\sum_{i=1}^3 m_i^0$  kan de vrije beweging ook worden berekend als  $\phi(t - t_0)x(t_0)$  met toestand-overgangsmatrix  $\phi(t - t_0) = \bar{A}^{t-t_0}$  voor de modellen 1, 2 en 3 en  $\phi(t - t_0) = e^{A \cdot (t-t_0)}$  voor model 4 of vanwege  $C = I$  als zero-input-response  $\phi(t - t_0)x(t_0) = C\phi(t - t_0)x(t_0) = \phi(t - t_0)x(t_0)$ . Middels onderdeel 6 van appendix A werd unit-response-matrix  $\phi(t-t_0)$  en dus tevens toestand-overgangsmatrix  $\phi(t - t_0)$  geschat onder toepassing van de diagonaliseringsprocedure op  $\hat{A}$ . De resultaten zijn opgenomen in fig. 4.1.4. Op ieder tijdstip  $t' = t - t_0$  vormen de kolom-vectoren  $\hat{\phi}_L(t')$ ,  $\hat{\phi}_F(t')$  en  $\hat{\phi}_W(t')$  tezamen de geschatte unit-response-matrix  $\hat{\phi}(t')$ . De kolom-vectoren  $\phi_L(t')$ ,  $\phi_F(t')$  en  $\phi_W(t')$  of waarden van de unit-response-functies  $\phi_L$ ,  $\phi_F$  en  $\phi_W$  op tijdstip  $t' \geq 0$  geven de waarden  $[L(t') \ F(t') \ W(t')]'$ , die het gevolg zouden zijn van één eenheid in slechts de betrokken variabele op tijdstip  $t' = 0$ , d.w.z. de effecten op tijdstip  $t' \geq 0$  van resp. begintoestand  $[1 \ 0 \ 0]'$ ,  $[0 \ 1 \ 0]'$ ,  $[0 \ 0 \ 1]'$ . We zullen deze effecten "unit-effecten" noemen en zij geven tevens aan, met welke waarde de vrije beweging op ieder tijdstip  $t'$  moet worden verhoogd als gevolg van een verhoging van een willekeurige begintoestand met één eenheid in de betrokken variabele.

Voor de modellen 1 en 2, die rechtstreeks werden afgeleid uit de modellen I en II - zie tabel 4.1.3 - is matrix  $\hat{\phi}(1)$  met de geschatte

unit-effecten na 1 jaar identiek aan matrix  $\hat{A} = \hat{A} + I$  en men vindt de betrokken waarden in tabel 4.1.3 dan ook bij 1 op de horizontale as terug in fig.4.1.4 (als cirkeltjes voor model I en als kruisjes voor model II). Fig. 4.1.4 geeft echter de unit-effecten ook op langere termijn en middels de stippen en curven van de modellen 3 en 4 bovendien op kortere termijn, zodat meer informatie wordt verkregen over de unit-effecten en over de vorming van de vrije beweging dan alleen op basis van  $\hat{A}$  mogelijk is. Het samenspel tussen leesniveau, figuur-oriëntatie en woordenschat is te ingewikkeld om de dynamische implicaties van  $\hat{A}$  rechtstreeks uit  $\hat{A}$  zelf te kunnen aflezen. De unit-response-functies vormen in feite een onmisbaar instrument om de effecten van verschillende begintoestanden op langere en kortere termijn te analyseren. Hun praktische waarde is hierin gelegen, dat zij aangeven, hoe op een bepaald tijdstip  $t'$  een gewenste verhoging van een variabele kan worden verkregen door verhogingen in de begintoestand, niet alleen in de betrokken variabele zelf maar ook indirect door verhogingen in andere toestand-variabelen.

Een opvallend resultaat in fig. 4.1.4 is, dat de geschatte unit-effecten van figuur-oriëntatie  $F$  op zichzelf en van woordenschat  $W$  op zichzelf veel sneller afnemen dan van leesniveau  $L$  op zichzelf. Die van  $F$  en  $W$  halveren al in resp. het 2e en 1e jaar, terwijl dat van  $L$  pas in het 6e jaar het geval is. Het geschatte unit-effect van  $F$  op  $L$  bereikt pas na 4 jaar zijn maximum en is dan nog iets groter dan dat van  $L$  op zichzelf. Beide nemen daarna in ongeveer gelijk tempo af. Men zou kunnen besluiten dat het na 5 jaar niet veel verschil meer uitmaakt voor  $L$ , of  $L$  zelf dan wel  $F$  in de begintoestand met een gelijk aantal eenheden werd verhoogd. De vraag is natuurlijk, welke van beide verhogingen de meeste moeite kost en of men bereid is 5 jaar te wachten. Het geschatte unit-effect van  $W$  op  $L$  bereikt al in het 3e jaar zijn maximum, maar om dan eenzelfde effect op  $L$  te verkrijgen als  $F$  heeft na 5 jaar moet de verhoging in  $W$  ongeveer het dubbele zijn van die in  $F$ . Vergelijken we de overigens geringe geschatte unit-effecten van  $L$  en  $W$  op  $F$  met elkaar, dan blijkt het eerste pas later zijn maximum te bereiken dan het tweede maar tegelijk langer aan te houden: voor de modellen 2, 3 en 4 blijft het eerste met een maximum kleiner dan .06 tussen het 2e en 15e jaar boven .03, terwijl het tweede met een iets groter maximum al in het 8e jaar tot onder .03 daalt. Bij vergelijking van de geschatte unit-effecten van  $L$  en  $F$  op  $W$  is eenzelfde tendens merkbaar. Hier bereikt het tweede pas later zijn maximum

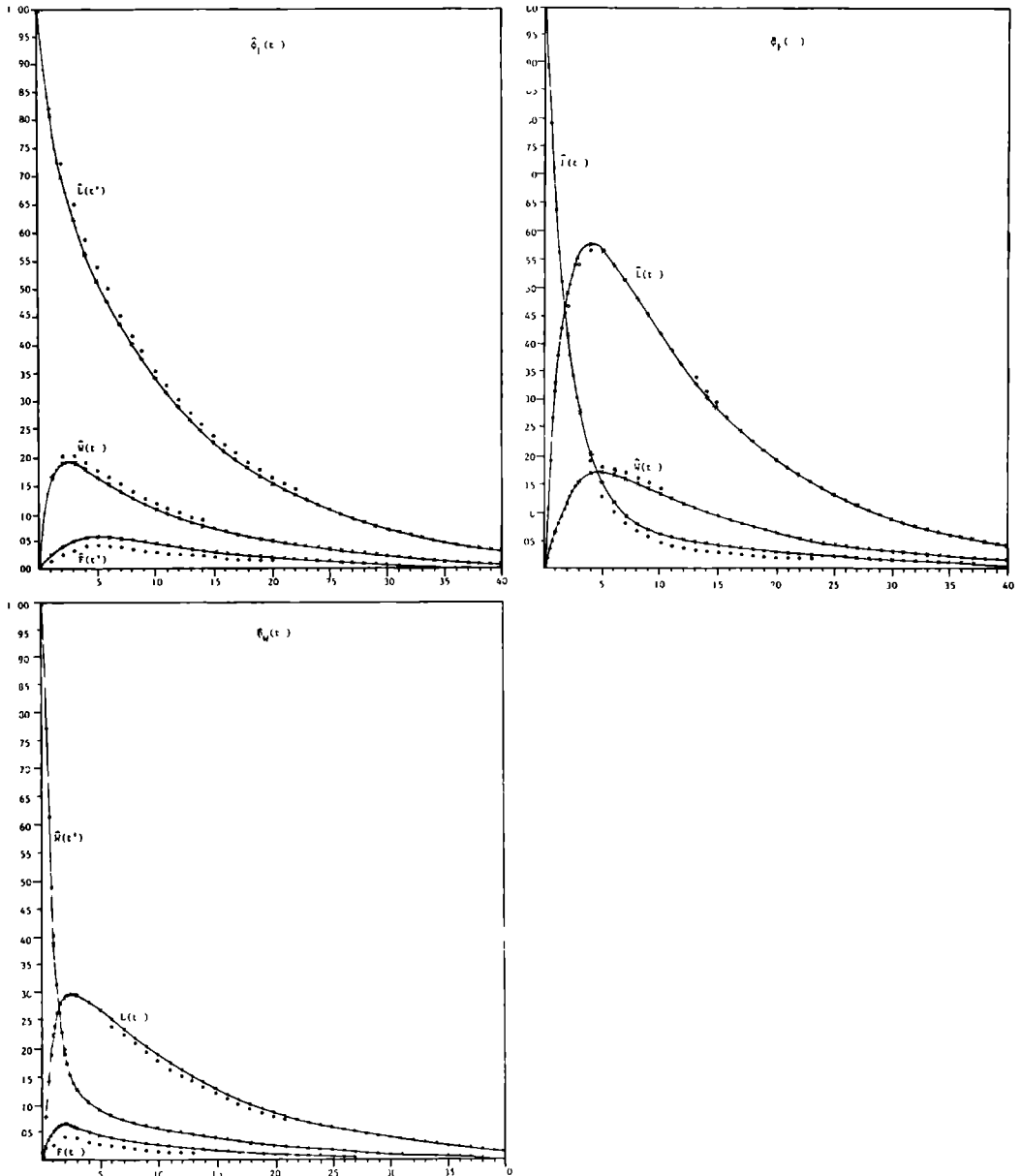
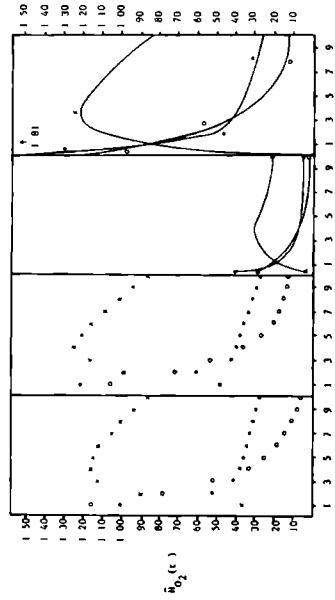
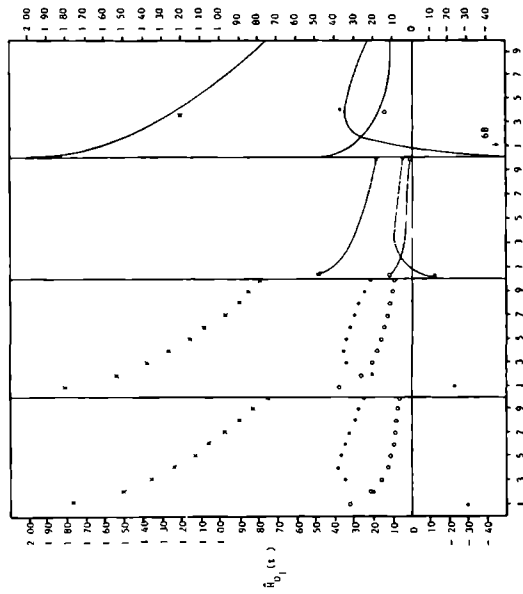
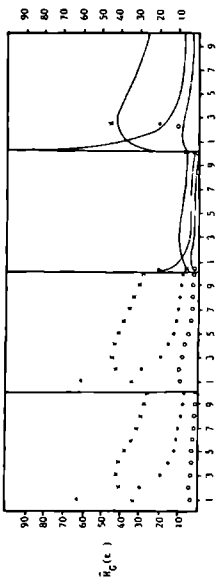
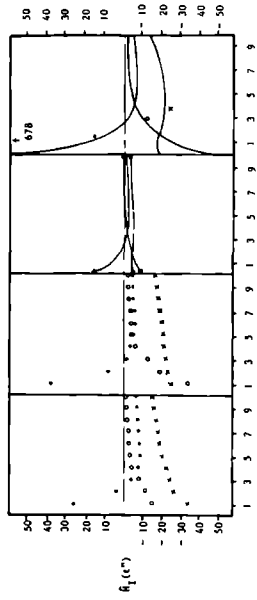


Fig. 4.1.4: Geschatte unit-response-functies  $\hat{\phi}_I$ ,  $\hat{\phi}_F$  en  $\hat{\phi}_W$  voor de modellen 1 (cirkeltjes), 2 (kruisjes), 3 (stippen) en 4 (curven) over 40 jaar vanaf  $t'=0$ ; weggelaten zijn cirkeltjes en stippen, die niet van de curven of van elkaar zijn te onderscheiden.



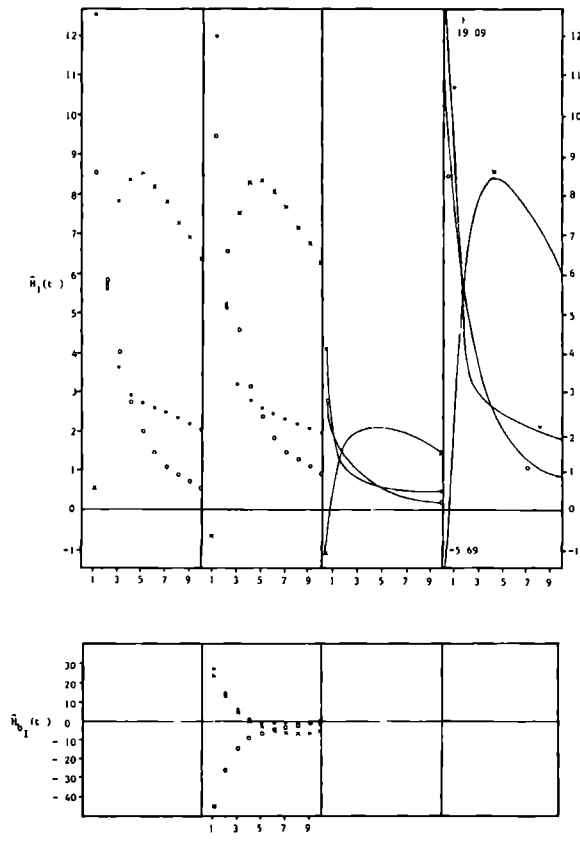
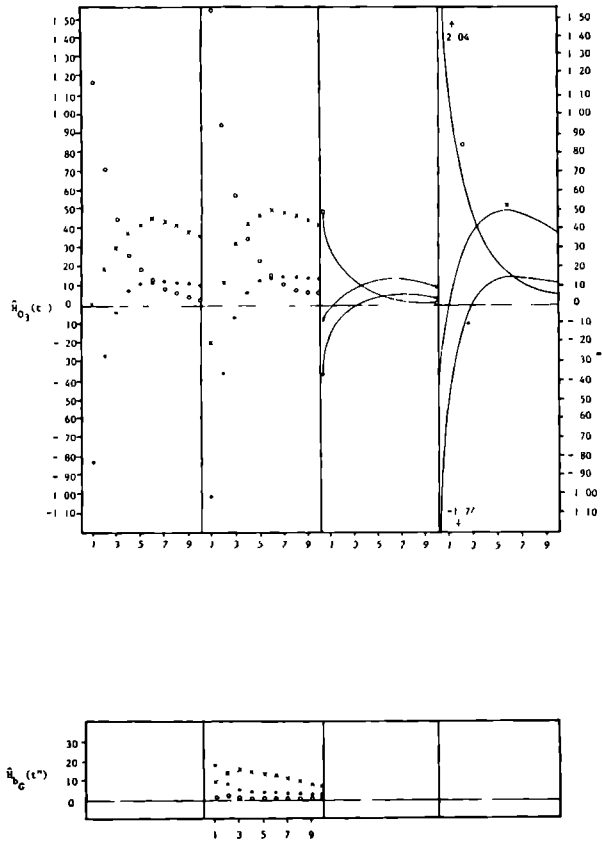


Fig. 4.1.5: Geschatte impulse-response-functies  $\hat{H}_G$ ,  $\hat{H}_I$ ,  $\hat{H}_{O_1}$ ,  $\hat{H}_{O_2}$ ,  $\hat{H}_{O_3}$ ,  $\hat{H}_I$ ,  $\hat{H}_{bG}$  en  $\hat{H}_{bI}$  voor de modellen 1, 2, 3 en 4 (resp. 1e, 2e, 3e en 4e kolom) over 10 jaar vanaf  $t''=0$ ;  $\circ$ ,  $\square$ ,  $\triangle$  en  $\cdot$  staan voor resp.  $L(t'')$ ,  $F(t'')$  en  $W(t'')$ , terwijl de feitelijk discrete kwartaalcijfers van model 3 als curven zijn weergegeven.



met de neiging langer aan te houden. Vanwege de extreem snelle afname van het geschatte unit-effect van  $W$  op zichzelf vraagt men zich af, of een verhoging van de woordenschat niet even goed indirect bereikt kan worden door een verhoging van  $L$  of  $F$ . Een definitief antwoord is uiteraard ook hier afhankelijk van het tijdstip, waarop men de  $W$ -verhoging wil bereiken en de relatieve moeite die de unit-verhogingen in  $L$ ,  $F$  en  $W$  kosten.

De totale response tot en met tijdstip  $t$  is niet slechts afhankelijk van de begintoestand  $x(t_0)$  langs de zero-input-response, maar tevens van de input-waarden in het betrokken tijdsinterval langs de zero-state-response:  $\sum_{k=0}^t H(t-k)u(k)$  voor de modellen 1, 2 en 3 met  $H(t'') = A^{t''-1}B$  en  $\int_{t_0}^t H(t-\xi)u(\xi)d\xi$  voor model 4 met  $H(t'') = e^{At''}B$ , waarbij de eenvoudige vorm van  $H(t'')$  is te danken aan  $C = I$  en  $D = 0$ . Middels onderdeel 6 van appendix A werd impulse-response-matrix  $H(t'')$  geschat, opnieuw onder toepassing van de diagonaliseringsprocedure op  $\hat{A}$ . Terwijl de basis-functies  $\phi_L$ ,  $\phi_F$  en  $\phi_W$  waardevolle informatie geven over de wijze, waarop een gewenste response kan worden bereikt langs de zero-input-response door manipulatie van de begintoestand  $x(t_0)$ , geven de impulse-response-functies  $H_G$ ,  $H_I$ ,  $H_{O_1}$ ,  $H_{O_2}$ ,  $H_{O_3}$  - voor model 2 bovendien  $H_{b_G}$  en  $H_{b_I}$  - aan hoe hetzelfde doel is te bereiken langs de zero-state-response door manipulatie van input-segment  $u(t_0, t]$ . De impulse-response-functies geven het effect op ieder willekeurig tijdstip  $t'' \geq 0$  van een unit-impulse in de betrokken input-variabele op tijdstip  $t'' = 0$ . Zij geven op die manier aan, hoeveel eenheden de zero-state-response moet worden verhoogd op tijdstip  $t$  als gevolg van een niet-volgehouden verhoging van slechts één eenheid in slechts de betrokken input-variabele  $G$ ,  $I$ ,  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ ,  $b_G$  en  $b_I$  op tijdstip  $k$  c.q.  $\xi$ . Vanwege het tijd-lagged karakter van  $G$ ,  $I$ ,  $b_G$  en  $b_I$  moet hier een verhoging op  $t'' = 0$ ,  $k$  c.q.  $\xi$  in feite worden geïnterpreteerd als een verhoging in het daaraan voorafgaande jaar.

Voor de modellen 1, 2 en 3 is matrix  $\hat{B}$  gelijk aan de geschatte impulse-response-matrix  $\hat{H}(1)$  en voor model 4 aan  $\hat{H}(0)$  en men vindt de kolommen van de matrices  $\hat{B}$  in tabel 4.1.4 dan ook bij resp.  $t'' = 1$  en  $t'' = 0$  terug in fig. 4.1.5. Fig. 4.1.5 geeft echter ook de geschatte impulse-response-waarden op latere tijdstippen in de tijdsperiode van 10 jaar; in model 1 en 2 voor ieder jaar, in model 3 voor ieder kwartaal en in model 4 bovendien voor ieder ander tijdstip. Ondanks

verschillen tussen de modellen 1, 2, 3 en 4 blijken de betrokken curven in fig. 4.1.5 telkens een overeenkomstig verloop te hebben. De lage waarden voor model 3 zijn een gevolg van het feit, dat als tijdseenheid het kwartaal van een jaar is genomen; bij vergelijking met de andere modellen moeten deze waarden ruwweg verviervoudigd worden.

Een meer gedetailleerde bestudering van fig. 4.1.5 laat zien, dat het geschatte effect van een unit-impulse in geheugen  $G$  en voor model 2 ook in geheugengroei  $b_G$  overal positief is en blijft. De waarden  $\hat{H}_G(t'')$  na resp. 1 en 10 jaar luiden:

Model	1	2	3	4	1	2	3	4
	$\hat{H}_G(1)$	$\hat{H}_G(1)$	$\hat{H}_G(4)$	$\hat{H}_G(1)$	$\hat{H}_G(10)$	$\hat{H}_G(10)$	$\hat{H}_G(40)$	$\hat{H}_G(10)$
x	.339	.342	.100	.397	x .269	.285	.069	.263
o	.048	.085	.024	.092	o .022	.038	.009	.035
•	.621	.610	.109	.381	• .088	.088	.021	.081

Van het geschatte effect na 1 jaar op leesniveau (x) blijkt na 10 jaar nog ongeveer twee derde over; relatief de sterkste daling geeft hier model 4. Bij figuur-oriëntatie (o) blijkt de daling tussen 1 en 10 jaar ongeveer de helft tot twee derde en hier geeft model 3 relatief de sterkste daling. Uitermate sterk is de daling tot minder dan de helft al na 2 jaar bij woordenschat (•); model 3 en 4 geven hier tussen 1 en 10 jaar relatief nog de geringste daling. Opvallend is, dat het maximale effect bij leesniveau en figuur-oriëntatie pas resp. na 3 en 2 jaar wordt bereikt voor de modellen 1 en 2, resp. na  $2\frac{1}{2}$  en  $1\frac{1}{2}$  jaar voor model 3 en resp. tussen 2 en  $2\frac{1}{2}$  en tussen 1 en  $1\frac{1}{2}$  jaar voor model 4.

Een totaal ander beeld geeft het geschatte effect van een unit-impulse in intelligentie  $I$ . Slechts voor woordenschat en dan nog over nergens meer dan de eerste  $2\frac{1}{2}$  jaar blijkt het positief te zijn. De aanvankelijk relatief hoge positieve waarde voor woordenschat vertoont een scherpe daling en is vanaf het 5e jaar voor alle modellen zelfs nog negatiever dan voor figuur-oriëntatie. Voor model 2 verdient de aanvankelijke positieve waarde van intelligentie-groei  $b_I$  op leesniveau vermelding. Waarschijnlijk een gevolg hiervan is de merkwaardige dubbele kromming in de curven van  $I$  op leesniveau voor de modellen 3 en 4. Niet alleen deze curven maar ook de overeenkomstige voor model 2 vertoont een relatief

vlak verloop. Dit zou wijzen op een hardnekkig negatief effect van I op leesniveau. Ook op langere termijn zou dit negatieve effect zich dus nog doen gelden.

De geschatte impulse-responses  $\hat{H}_{0_1}$ ,  $\hat{H}_{0_2}$ ,  $\hat{H}_{0_3}$  van de instituten  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  dienen te worden geïnterpreteerd als afwijkingen t.o.v. de onbekende geschatte impulse-response van het vierde instituut. De laatste maakt deel uit van  $\hat{H}_1$ , de geschatte impulse-response van de constante, waar ook de geschatte impulse-responses van alle overige niet-gespecificeerde variabelen in opgaan. De curven van  $\hat{H}_{0_1}$ ,  $\hat{H}_{0_2}$ ,  $\hat{H}_{0_3}$  geven m.a.w. aan, welk verschil het zou maken op ieder later tijdstip  $t'' \geq 0$ , indien een kind van het vierde instituut voor slechts het tijdstip  $t'' = 0$  zou verblijven op  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ . De waarden zijn in overwegende mate positief;  $\hat{H}_{0_1}$  geeft slechts voor woordenschat en slechts over het 1e jaar negatieve waarden;  $\hat{H}_{0_3}$  geeft meer negatieve waarden, maar ook deze verdwijnen na kortere of langere tijd. De konklusie dringt zich op, dat het vierde instituut relatief de geringste bijdrage lijkt te leveren, met name aan figuur-oriëntatie en leesniveau, en dat eventuele geringere bijdragen van andere instituten geheel of gedeeltelijk worden gecompenseerd op langere termijn. De waarden voor leesniveau zijn bij de instituten  $O_1$  en  $O_2$  overal hoger dan bij instituut 3; de curve is bij instituut  $O_1$  aanvankelijk het hoogst, maar neemt dan zeer snel af en is vanaf het 5e jaar zelfs lager dan bij instituut  $O_2$ , waar het maximum pas na 4 jaar c.q. tussen het 3e en 4e jaar wordt bereikt. Voor figuur-oriëntatie geven de instituten  $O_2$  en  $O_3$  de hoogste waarden en het verloop van de curven is nagenoeg gelijk. Bij instituut  $O_2$  vindt men overal de hoogste waarden voor woordenschat. Samenvattend zou een lichte voorkeur uitgesproken kunnen worden voor een verblijf op instituut  $O_2$ . Zou men zich hebben beperkt tot de kolommen voor  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  in tabel 4.1.4, dan zou men minder gemakkelijk tot een dergelijke voorkeur zijn gekomen vanwege de lage waarden voor leesniveau bij instituut  $O_2$ .

Zoals bij de berekening van de vrije beweging en de zero-input-response uitgegaan moet worden van een bepaalde begintoestand  $x(t_0)$ , zo moet bij de berekening van de zero-state-response een bepaald input-segment  $u[t_0, t_1]$  worden gekozen. Ter illustratie werden eerder in  $x(t_0)$  afgeronde gemiddelden  $\bar{L}$ ,  $\bar{F}$  en  $\bar{W}$  en worden hier in  $u(t_0)$  afgeronde gemiddelden  $\bar{G}$  en  $\bar{I}$  gekozen, terwijl wordt uitgegaan van een verblijf op het vierde

instituut, zodat

$$u(t_0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Onder aanname van lineaire groei van de waarden 10 en 11 volgens resp. gemiddelde groei-waarden  $\bar{b}_G = .66901$  en  $\bar{b}_I = 1.5915$  en constantie van de overige waarden in  $u(t_0)$ , zodat groei-vector

$$b_{[t_0, t_1]} = \begin{bmatrix} .66901 \\ 1.5915 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

werd de zero-state-response aan de hand van formules 3.4.2 en 3.4.3 geschat middels onderdeel 6 van appendix A. Sommering van de schattingen van zero-input- en zero-state-response geeft tevens de geschatte totale response  $\hat{y}_{[t_0, t_1]}$ . Voor model 2 werden  $u(t_0)$  en  $b_{[t_0, t_1]}$  vervangen door

$$u(t_0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ .66901 \\ 1.5915 \end{bmatrix} \quad b_{[t_0, t_1]} = \begin{bmatrix} .66901 \\ 1.5915 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

en voor model 3  $b_{[t_0, t_1]}$  door

$$b_{[t_0, t_1]} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \times .66901 \\ \frac{1}{2} \times 1.5915 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

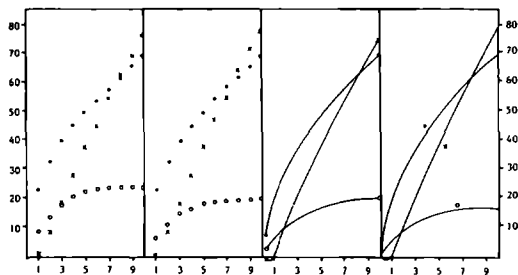


Fig. 4.1.6: Geschatte zero-state-response op basis van  $u_{[t_0, t_1]}$  zoals aangegeven in de tekst voor de modellen 1, 2, 3 en 4 (resp. 1e, 2e, 3e en 4e kolom) over 10 jaar vanaf  $t_0$ ; \*, o en · staan voor resp.  $L(t)$ ,  $F(t)$  en  $W(t)$ , terwijl de feitelijk discrete kwartaalcijfers van model 3 als curven zijn weergegeven.

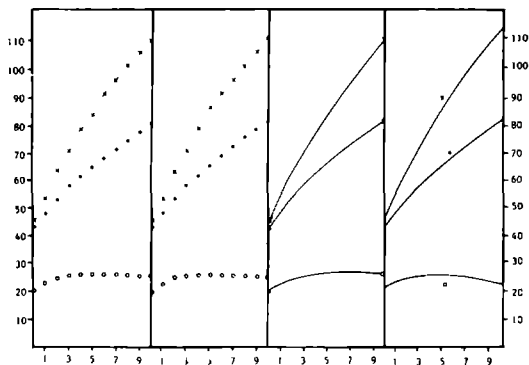


Fig. 4.1.7: Geschatte totale response als som van  $\sum_{i=1}^3 \hat{m}_i^0$  in fig. 4.1.3 en geschatte zero-state-response in fig. 4.1.6 voor de modellen 1, 2, 3 en 4 (resp. 1e, 2e, 3e en 4e kolom) over 10 jaar vanaf  $t_0$ ; \*, o en · staan voor resp.  $L(t)$ ,  $F(t)$  en  $W(t)$ , terwijl de feitelijk discrete kwartaalcijfers van model 3 als curven zijn weergegeven.

De resultaten over een periode  $[t_0, t_1]$  van 10 jaar zijn weergegeven in fig. 4.1.6 en fig. 4.1.7. Bij interpretatie van  $t_0$  als medio 1971 geven deze figuren ruwweg de schattingen tot en met medio 1981 voor een kind van het vierde instituut, dat op  $t_0$  het gemiddelde geheugen- en intelligentie-niveau vertoont over de onderzochte groep van 71 kinderen en waarbij de gemiddelde groei in deze variabelen lineair is geëxtra- c.q. geïnterpoleerd over periode  $[t_0, t_1]$ . In fig. 4.1.7 wordt bovendien uitgegaan van het gemiddelde lees-, figuur-oriëntatie- en woordenschat-niveau op  $t_0$ . De resultaten gelden dus als het ware voor een "gemiddeld" kind bij een verblijf op het vierde instituut. Als zodanig mogen de curven in fig. 4.1.7 op a priori gronden als realistisch worden aangemerkt.

Vermeldenswaard zijn de tamelijk geringe verschillen tussen de modellen 1, 2, 3 en 4. Zelfs na 10 jaar zijn in fig. 4.1.6 de maximale verschillen voor resp. leesniveau, figuur-oriëntatie en woordenschat slechts 2.91, 5.58 en 1.60 en in fig. 4.1.7 slechts 2.91, 3.99 en .94. In verhouding tot de standaard-afwijkingen op  $t_0$  van resp. 19.1, 6.0 en 11.8 zijn de gevonden verschillen m.b.t. leesniveau en woordenschat uiterst gering te noemen en die m.b.t. figuur-oriëntatie relatief het grootst. Het grootste maximale verschil m.b.t. figuur-oriëntatie vindt men bij de geschatte zero-state-response in fig. 4.1.6 tussen model 1 en model 4. Model 1 geeft in beide figuren voor figuur-oriëntatie de hoogste waarden, model 2 voor woordenschat en model 4 voor leesniveau. Het verloop van en de geconstateerde verschillen tussen de curven lijken overigens onvoldoende aanknopingspunten te bieden om op a priori gronden tot een voorkeur voor een van de modellen te komen. Helaas ontbreken wettelijke segmenten  $y_{[t_0, t_1]}$ , zodat deze ook niet met predictie-segmenten  $\hat{y}_{[t_0, t_1]}$  vergeleken kunnen worden in een predictieve toets van ieder van de modellen op zich en vergelijkenderwijs.

Een meer gedetailleerde bestudering van de geschatte input-bijdrage aan de totale geschatte response, d.w.z. van de geschatte zero-state-response in fig. 4.1.6, laat zien dat deze een nogal verschillend verloop heeft voor de drie output-variabelen. Na het 1e jaar is de geschatte bijdrage aan het leesniveau nog zo goed als nihil en de modellen 3 en 4 geven gedurende het 1e jaar zelfs geringe negatieve waarden. Daarna is er tot en met het 10e jaar een bijna lineaire toename in de curven voor leesniveau. In tegenstelling hiermee nemen de curven voor woordenschat

	jaren	<u>model 1</u>		<u>model 2</u>		<u>model 3</u>		<u>model 4</u>	
		instituut		instituut		instituut		instituut	
		4	3	4	3	4	3	4	3
	0	45	45	45	45	45	45	45	45
leesniveau	1	53.16 (5.90)	53.18 (5.85)	53.20 (5.88)	53.00 (5.84)	52.66	52.46	53.34	53.14
	2	61.42 (5.91)	61.63 (5.85)	61.51 (5.89)	61.42 (5.84)	60.66	60.58	61.77	61.69
	3	69.32 (5.92)	69.86 (5.87)	69.47 (5.91)	69.70 (5.86)	68.45	68.68	69.87	70.10
	4	76.72 (5.95)	77.66 (5.90)	76.92 (5.94)	77.58 (5.88)	75.80	76.45	77.47	78.12
	5	83.54 (5.99)	84.92 (5.95)	83.80 (5.99)	84.94 (5.93)	82.61	83.75	84.50	85.64
	6	89.79 (6.04)	91.61 (6.01)	90.10 (6.06)	91.73 (5.99)	88.87	90.50	90.97	92.60
	7	95.47 (6.11)	97.74 (6.08)	95.94 (6.14)	97.96 (6.07)	94.58	96.70	96.88	99.00
	8	100.62 (6.18)	103.31 (6.16)	101.04 (6.24)	103.63 (6.16)	99.77	102.35	102.26	104.85
	9	105.27 (6.27)	108.36 (6.26)	105.74 (6.36)	108.77 (6.28)	104.45	107.49	107.15	110.18
	10	109.46 (6.37)	112.91 (6.37)	109.97 (6.40)	113.41 (6.41)	108.67	112.12	111.58	115.03
	0	21	21	21	21	21	21	21	
figuur- oriëntatie niveau	1	22.81 (2.72)	23.97 (2.69)	22.69 (2.67)	24.26 (2.65)	23.17	24.73	22.51	24.08
	2	24.03 (2.72)	25.90 (2.69)	23.79 (2.67)	26.28 (2.65)	24.55	27.04	23.42	25.92
	3	24.84 (2.73)	27.16 (2.70)	24.45 (2.68)	27.52 (2.66)	25.38	28.45	23.89	26.96
	4	25.37 (2.74)	27.99 (2.72)	24.82 (2.70)	28.26 (2.67)	25.85	29.28	24.06	27.49
	5	25.71 (2.76)	28.51 (2.74)	24.97 (2.72)	28.65 (2.69)	26.06	29.73	24.00	27.68
	6	25.91 (2.78)	28.85 (2.77)	24.96 (2.74)	28.81 (2.72)	26.08	29.93	23.79	27.64
	7	26.01 (2.81)	29.04 (2.80)	24.82 (2.78)	28.80 (2.75)	25.96	29.94	23.46	27.43
	8	26.03 (2.84)	29.14 (2.84)	24.59 (2.83)	28.66 (2.80)	25.74	29.81	23.02	27.10
	9	26.00 (2.88)	29.16 (2.88)	24.27 (2.88)	28.42 (2.85)	25.42	29.58	22.51	26.66
	10	25.91 (2.92)	29.11 (2.92)	23.88 (2.94)	28.10 (2.90)	25.04	29.26	21.92	26.14

jaren	<u>model 1</u>		<u>model 2</u>		<u>model 3</u>		<u>model 4</u>	
	instituut		instituut		instituut		instituut	
	4	3	4	3	4	3	4	3
0	42	42	42	42	42	42	42	42
1	47.70 (5.59)	46.88 (5.55)	47.73 (5.57)	46.73 (5.55)	47.61	46.53	44.97	46.51
2	52.31 (5.59)	51.23 (5.55)	52.39 (5.57)	50.94 (5.54)	52.17	50.72	52.21	50.77
3	56.45 (5.61)	55.34 (5.57)	56.60 (5.60)	55.09 (5.56)	56.31	54.80	56.42	54.91
4	60.33 (5.64)	59.29 (5.60)	60.56 (5.63)	59.11 (5.59)	60.22	58.78	60.38	58.94
5	63.99 (5.68)	63.07 (5.65)	64.32 (5.68)	62.98 (5.63)	63.96	62.62	64.16	62.83
6	67.47 (5.73)	66.67 (5.71)	67.90 (5.75)	66.70 (5.69)	67.52	66.32	67.76	66.56
7	70.76 (5.80)	70.10 (5.78)	71.30 (5.82)	70.25 (5.77)	70.92	69.86	71.19	70.13
8	73.88 (5.87)	73.35 (5.86)	74.55 (5.92)	73.63 (5.85)	74.16	73.24	74.46	73.54
9	76.84 (5.96)	76.44 (5.96)	77.64 (6.03)	76.86 (5.96)	77.24	76.46	77.57	76.79
10	79.65 (6.06)	79.37 (6.06)	80.59 (6.15)	79.94 (6.08)	80.19	79.53	80.55	79.89

woorden-  
schat-  
niveau

Tabel 4.1.6: De geschatte waarden, grafisch weergegeven in fig. 4.1.7 (instituut 4), tezamen met die bij vervanging van instituut 4 door instituut 3, voor de modellen 1 en 2 tussen haakjes tevens voorzien van standaard-fouten.



en figuur-oriëntatie aanvankelijk sneller toe maar hun groei neemt ook sneller af; met name de curve voor figuur-oriëntatie vertoont na het 5e jaar bijna geen toename meer. De totale geschatte response in fig.4.1.7, die ontstaat door sommering van de curven voor de zero-state-response in fig. 4.1.6 en die voor de vrije beweging (= zero-input-response) in fig. 4.1.3, geeft over de periode van 10 jaar een praktisch lineaire groei voor leesniveau en woordenschat tot resp. meer dan en bijna het dubbele van het niveau op  $t_0$ , maar voor figuur-oriëntatie bijna geen groei en zelfs een lichte daling na 8 en 6 jaar in resp. de modellen 1 en 2, na  $5\frac{1}{2}$  jaar in model 3 en al vanaf een tijdstip tussen  $4\frac{1}{2}$  en  $4\frac{1}{4}$  jaar in model 4. De geschatte input-bijdrage compenseert hier dus ongeveer de afname in de geschatte zero-input-response, maar ook niet meer dan dat.

Behalve middels onderdeel 6 van appendix A werden de curven in fig. 4.1.7 ook middels onderdeel 7 berekend. Dit onderdeel 7 volgt een iteratieve procedure, waarin de telkens berekende  $\hat{x}(t)$  als begintoestand in de volgende stap wordt gesubstitueerd. Het voordeel van onderdeel 7 is, dat 1) voor differentie-modellen met  $\delta = 1$  ook standaard-fouten van de schattingen  $\hat{x}(t)$  worden berekend volgens formule 3.4.19 en dat 2) voor differentie-modellen willekeurige en dus niet noodzakelijke lineaire input-segmenten  $u_{[t_0, t_1]}$  gespecificeerd kunnen worden en voor differentiële modellen input-segmenten  $u_{[t_0, t_1]}$ , die slechts lineair moeten zijn over een willekeurig kleine tijdsafstand. De standaard-fouten zijn blijkens tabel 4.1.6 over de eerste jaren ongeveer gelijk aan de jaarlijkse verhoging; voor leesniveau iets kleiner dan de jaarlijkse verhoging en voor figuur-oriëntatie en woordenschat iets hoger dan de jaarlijkse verhoging. Onder de normaliteitsassumptie kan men met behulp van de standaard-fouten interval-schattingen uitvoeren: de werkelijke score voor een kind met schatting 53.16 en bijbehorende standaard-fout 5.90 zou met 95% zekerheid liggen tussen 41.60 en 64.72. Met nadruk moet erop worden gewezen, dat deze redenering in feite telkens opnieuw uitgaat van exacte waarden  $x(t-1)$  en  $u(t-1)$  en dus niet van waarden  $\hat{x}(t-1)$ , verkregen middels schatting in de vorige stap. Beschouwt men de waarden als schattingen, dan vormen de berekende standaard-fouten slechts ondergrenzen en dienen de intervallen in overeenstemming hiermee te worden geïnterpreteerd.

Ter vergelijking zijn in tabel 4.1.6 niet alleen de waarden voor een "gemiddeld" kind opgenomen bij plaatsing op het 4e instituut - zie ook de grafische weergave van deze waarden in fig. 4.1.7 - maar ook die

bij plaatsing op het 3e instituut. Daarbij blijkt opnieuw, dat het gevaarlijk is om zich bij de beoordeling van input-effecten alleen op de matrices  $\hat{B}$  in tabel 4.1.4 te baseren. In tabel 4.1.4 vindt men een aantal negatieve waarden onder  $O_3(t)$ . In overeenstemming met de eerder gevonden curven van  $\hat{H}_{O_3}(t'')$  in fig. 4.1.5 blijkt het 3e instituut echter alleen in de beginperiode iets lagere schattingen voor het leesniveau te geven bij de modellen 2, 3 en 4, terwijl de lagere schattingen voor woordenschat steeds meer die van het 4e instituut benaderen tot er na 10 jaar praktisch geen verschil meer over is. Bovendien blijken de hoge positieve waarden voor figuur-oriëntatie in tabel 4.1.4 verschillen op te leveren, die zelfs na 10 jaar kleiner zijn dan  $1\frac{1}{2}$  maal de bijbehorende standaard-fouten. Ook de verschillen voor leesniveau zijn steeds kleiner dan de bijbehorende standaard-fouten. De konklusie dringt zich op, dat anders dan men alleen aan de hand van tabel 4.1.4 geneigd zou zijn aan te nemen, het 3e instituut eerder betere dan slechtere resultaten oplevert in vergelijking met het 4e instituut, maar dat de verschillen nauwelijks van betekenis zijn.

Samenvattend kan worden gesteld, dat het onderzoek naar de dynamische implicaties van de geschatte modellen 1, 2, 3 en 4 informatie oplevert, die moeilijk rechtstreeks uit tabel 4.1.4 is af te lezen en daarom een beter inzicht verschaft in de aard van deze modellen en de daaraan ten grondslag liggende structurele modellen. In sociaal-wetenschappelijke onderzoeksverslagen beperkt men zich bijna altijd tot het structurele model en tot een beoordeling van de richting en hoogte van de gevonden coëfficiënten. De dynamische implicaties van de gevonden coëfficiënten blijven zo buiten beschouwing en kunnen dus ook geen rol spelen bij de beoordeling van de plausibiliteit van het model. De predictieve resultaten m.b.t. leesniveau, figuur-oriëntatie en woordenschat, die slechts geringe verschillen tussen de vier modellen lieten zien, mogen op a priori gronden als realistisch worden aangemerkt. Helaas ontbreken data om op predictieve gronden een voorkeur voor een van de modellen uit te spreken. Differentieel model 4 heeft het voordeel, dat een continue verandering wordt aangenomen en een continue beïnvloeding door geheugen-, intelligentie-niveau en verblijf op het betrokken instituut, hetgeen evenzeer op a priori gronden als realistisch mag worden aangemerkt. Een zeer lichte non-predictieve ondersteuning van model 4 kan hierin worden gezien,

dat de  $R^2$ -waarden over de steekproef-periode een fractie hoger zijn dan voor model 3, terwijl bovendien  $R_W^2$  ( $R^2$  voor woordenschat) en  $\overline{R^2}$  (gemiddelde  $R^2$ ) een fractie hoger zijn dan voor model 1. Anders gezegd: het op zich aantrekkelijke model 4 geeft bovendien geen lagere  $\overline{R^2}$ -waarde dan de modellen 1 en 3. Model 2 heeft het nadeel, dat voor geheugen en intelligente kunstmatige groei-variabelen  $b_G$  en  $b_I$  worden toegevoegd, welke in vergelijking met model 1 nauwelijks tot een verhoging van  $R^2$ -waarden leiden.

#### 4.2 Een model [A,B,C,D] voor het lezen bij blinden op basis van de LISREL-benadering

##### Het LISREL-model: specificatie en schatting

In deelrapport IV van zijn onderzoek naar het lezen bij blinden, waarin hij de samenhang met haptisch onderscheidingsvermogen en verbale intelligentie analyseert, stelt Mommers:

"Op grond van voorwetenschappelijke ervaring mocht men aannemen, dat de leesprestaties bij blinden worden beïnvloed door het niveau van de verbale intelligentie, de haptische waarneming en het aantal jaren braille-onderwijs. Deze mening werd ondersteund door de lees-modellen, waaraan ... enige aandacht werd besteed ... Men moet zich wel realiseren, dat deze en soortgelijke modellen slechts ten dele berusten op onderzoeksgegevens en nog voor een aanmerkelijk deel hypothetisch zijn" (3).

Zijn commentaar op het analyse-model, dat aan één enkele multi-pele regressie-vergelijking ten grondslag ligt, luidt:

"Dit analyse-model zou ook gebruikt kunnen worden bij de leesprestatie van de blinde kinderen, als men er van uit zou kunnen gaan, dat er geen wisselwerking bestaat tussen de leesprestatie enerzijds en de indicatoren voor bepaalde onafhankelijke variabelen anderzijds. Maar het is zeer aannemelijk dat het lezen zowel de verbale ontwikkeling als het haptische onderscheidingsvermogen beïnvloedt en niet alleen omgekeerd. Als model past deze vergelijking dus niet op de gegeven situatie" (4).

In de vorige paragraaf werd een poging gedaan aan deze bezwaren tegemoet te komen. Aan de hand van de door Mommers verzamelde data werden een tweetal structurele modellen geschat (zie fig. 4.1.1 en tabel 4.1.2). De

modellen hadden een interdependente structuur vanwege de dubbele geheugenloze feedback-loop, die werd aangenomen tussen de endogene variabelen woordenschat (een aspect van de verbale intelligentie), figuur-oriëntatie (een aspect van de haptische waarneming) en leesniveau zoals gemeten middels de "Mechanische Leesvaardigheidstest voor Braille". De schattingen van de modellen [A,B,C,D], die op de structurele modellen werden gebaseerd, vertoonden tamelijk substantiële feedback-loops met geheugenwerking (zie tabel 4.1.4 en fig. 4.1.2).

Het LISREL-model, waarop het model [A,B,C,D] in deze paragraaf is gebaseerd, is enerzijds ingewikkelder en anderzijds eenvoudiger van aard. Ingewikkelder, omdat intelligentie I, haptische waarneming H en leesniveau L worden opgevat als latente variabelen, die ieder worden gemeten middels een tweetal geobserveerde variabelen:  $I_1$  en  $I_2$ ,  $H_1$  en  $H_2$ ,  $L_1$  en  $L_2$ . Eenvoudiger, omdat het latent structureel model slechts twee endogene variabelen omvat, t.w. H en L, waarvoor bovendien geen interdependente maar een recursieve structuur wordt gespecificeerd. Het latent structureel model omvat voorts 6 gepredetermineerde variabelen: lagged-endogene  $H_-$  en  $L_-$  (gemeten middels  $H_{1-}$ ,  $H_{2-}$ ,  $L_{1-}$  en  $L_{2-}$ ), exogene I (gemeten middels  $I_1$  en  $I_2$ ) en exogene  $O_1$ ,  $O_2$  en  $O_3$ . De laatste zijn dummy-variabelen, die evenals in de vorige paragraaf aangeven, of het betrokken kind op het 1e, 2e, 3e of 4e instituut verblijft.  $O_1$ ,  $O_2$  en  $O_3$  zijn als zodanig in het latent structureel model opgenomen en er is hier dus geen onderscheid tussen latente en geobserveerde variabelen zoals m.b.t. haptische waarneming, leesniveau en intelligentie. Anders dan in de vorige paragraaf ontbreekt de eenheidsvariabele 1, aangezien in een LISREL-model alle variabelen worden gemeten als deviatie-skores en dus geen constanten voorkomen.

De latente structurele vorm  $\Delta\eta + \Gamma\omega = e$  is middels de 4 parametermatrices  $\Delta$ ,  $\Gamma$ ,  $\Phi = E(\omega\omega')$  en  $\Sigma = E(ee')$  als volgt gespecificeerd

$$\begin{array}{cccccccc}
 & H & L & & H_- & L_- & I & O_1 & O_2 & O_3 \\
 H & \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right] & & H & \left[ \begin{array}{ccc} \gamma_1 & 0 & \gamma_2 \end{array} \right] & & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 \\
 L & \left[ \begin{array}{cc} \delta & 1 \end{array} \right] & & L & \left[ \begin{array}{ccc} 0 & \gamma_6 & \gamma_7 \end{array} \right] & & \gamma_8 & \gamma_9 & \gamma_{10} \\
 & \Delta & & & & & \Gamma & & & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 H & L \\
 \left[ \begin{array}{cc}
 \sigma^2 & \\
 0 & 0
 \end{array} \right] \\
 \Sigma
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c}
 H_- \\
 L_- \\
 I \\
 O_1 \\
 O_2 \\
 O_3
 \end{array}
 &
 \begin{array}{ccccccc}
 H_- & L_- & I & O_1 & O_2 & O_3 \\
 \left[ \begin{array}{cccccc}
 \phi_1^2 & & & & & \\
 \phi_2^2 & \phi_3^2 & & & & \\
 \phi_4^2 & \phi_5^2 & & & & \\
 \phi_7^2 & \phi_8^2 & \phi_6^2 & & & \\
 \phi_{11}^2 & \phi_{12}^2 & \phi_9^2 & \phi_{10}^2 & & \\
 \phi_{16}^2 & \phi_{17}^2 & \phi_{13}^2 & \phi_{14}^2 & \phi_{15}^2 & \\
 \phi_{18}^2 & & \phi_{18}^2 & \phi_{19}^2 & \phi_{20}^2 & \phi_{21}^2
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \end{array}$$

$\Phi$

Matrix  $\Delta$  bevat dus slechts één onbekend element, het geheugenloze effect  $\delta$  van haptische waarneming H op leesniveau L. Een rechtstreeks effect van L op H wordt evenmin aangenomen als in de vorige paragraaf een rechtstreeks effect van L op F - zie fig. 4.1.1. Matrix  $\Gamma$  bevat 10 onbekende elementen. Evenals in de vorige paragraaf is ieder van de beide endogene variabelen slechts afhankelijk gesteld van de bijbehorende lagged-endogene variabele. Er is dus geen direct effect van  $L_-$  op H en van  $H_-$  op L aangenomen. Aangezien

$$\Delta^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\delta & 1 \end{bmatrix}$$

resulteert uiteraard wel een afgeleid effect van  $H_-$  op L in de latente gereduceerde vorm met de volgende matrix  $\Pi = -\Delta^{-1}\Gamma$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 H_- & L_- & I & O_1 & O_2 & O_3 \\
 \left[ \begin{array}{cccccc}
 -\gamma_1 & 0 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & -\gamma_4 & -\gamma_5 \\
 -\delta\gamma_1 & \gamma_6 & -\delta\gamma_2 + \gamma_7 & -\delta\gamma_3 + \gamma_8 & -\delta\gamma_4 + \gamma_9 & -\delta\gamma_5 + \gamma_{10}
 \end{array} \right] \\
 \Pi
 \end{array}
 \end{array}$$

althans indien  $\delta \neq 0$  en  $\gamma_1 \neq 0$ . De kern van het model concentreert zich in feite op het effect van de haptische waarneming op het leesniveau onder constanthouding van de overige variabelen. De schattingen  $\hat{\delta}$  en  $-\hat{\delta}\hat{\gamma}_1$  zullen antwoord moeten geven op de vraag, in hoeverre een dergelijk haptisch effect strookt met de data.

De (symmetrische) variantie-covariantie-matrix  $\Phi$  van gepredetermineerde variabelen bevat 21 verschillende elementen, maar slechts 15 daarvan zijn onbekend, omdat de waarden van de dummy-variabelen  $O_1$ ,  $O_2$  en  $O_3$  evenals in de vorige paragraaf worden opgevat als vaste waarden, zodat de varianties  $\phi_{10}^2$ ,  $\phi_{15}^2$ ,  $\phi_{16}^2$  en covarianties  $\phi_{14}$ ,  $\phi_{19}$ ,  $\phi_{20}$  onafhankelijk van het LISREL-model vooraf berekend en als vaste waarden in matrix  $\Phi$  kunnen worden ingevuld. Ook de 15 onbekende elementen hadden onafhankelijk van het LISREL-model vooraf geschat en ingevuld kunnen worden, indien  $H$ ,  $L$  en  $I$  geobserveerde random-variabelen waren geweest (5).  $H$ ,  $L$  en  $I$  zijn echter latente random-variabelen en de 15 betrokken varianties en covarianties zullen daarom gelijktijdig met de andere onbekende parameter-waarden middels het LISREL-programma worden geschat.

De matrix  $\Sigma$  met de latente error-varianties en -covarianties bevat slechts één onbekend element, het onverklaarde gedeelte van de latente H-variantie. De 0-restricties impliceren een volledig verklaarde latente L-variantie, welke aanname is gebaseerd op de volgende overwegingen. De geobserveerde variabele  $L_2$ , die tezamen met geobserveerde  $L_1$  de latente L meet, is identiek met L in de tabellen 4.1.1, 4.1.2 en 4.1.3 van de vorige paragraaf, vertoont daar  $R^2$ -waarden van niet minder dan  $\pm .900$  en vertoont bovendien een correlatie van  $.890$  met  $L_2$ . De onverklaarde proportie van  $\pm .100$  lijkt louter een gevolg van onbetrouwbaarheid. In het LISREL-model worden de onbetrouwbare variantie-komponenten echter gescheiden van het latent structureel model en afzonderlijk gespecificeerd in  $\Theta_y$  en  $\Theta_w$ , de variantie-covariantie-matrices van meetfouten  $e_y$  en  $e_w$  in de geobserveerde y- en w-variabelen. Het voordeel daarvan is tevens, dat inconsistente schattingen  $\hat{\Delta}$  en  $\hat{\Gamma}$  als gevolg van onbetrouwbaarheid in de geobserveerde w-variabelen worden vermeden. Inconsistente schattingen  $\hat{\Delta}$  en  $\hat{\Gamma}$  als gevolg van onbetrouwbaarheid in de gepredetermineerde variabelen kunnen voor de modellen in de vorige paragraaf niet worden uitgesloten.

De specificatie van de 4 parameter-matrices  $\Lambda_y$ ,  $\Theta_y$ ,  $\Lambda_w$  en  $\Theta_w$  van de meet-modellen  $y = \Lambda_y \eta + e_y$  en  $w = \Lambda_w \omega + e_w$  voor resp. endogene  $\eta$  en gepredetermineerde  $\omega$  is als volgt

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 H & L \\
 \begin{array}{l} H_1 \\ H_2 \\ L_1 \\ L_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}
 \end{array} \\
 \Lambda_y
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 H_1 & H_2 & L_1 & L_2 \\
 \begin{array}{l} H_1 \\ H_2 \\ L_1 \\ L_2 \end{array} & \begin{bmatrix} \theta_1^2 & & & \\ 0 & \theta_2^2 & & \\ 0 & 0 & \theta_3^2 & \\ 0 & 0 & 0 & \theta_4^2 \end{bmatrix}
 \end{array} \\
 \Theta_y
 \end{array}
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 H_- & L_- & I & O_1 & O_2 & O_3 \\
 \begin{array}{l} H_{1-} \\ H_{2-} \\ L_{1-} \\ L_{2-} \\ I_1 \\ I_2 \\ O_1 \\ O_2 \\ O_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array} \\
 \Lambda_w
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 H_{1-} & H_{2-} & L_{1-} & L_{2-} & I_1 & I_2 & O_1 & O_2 & O_3 \\
 \begin{array}{l} H_{1-} \\ H_{2-} \\ L_{1-} \\ L_{2-} \\ I_1 \\ I_2 \\ O_1 \\ O_2 \\ O_3 \end{array} & \begin{bmatrix} \theta_5^2 & & & & & & & & \\ 0 & \theta_6^2 & & & & & & & \\ 0 & 0 & \theta_7^2 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \theta_8^2 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_9^2 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{10}^2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array} \\
 \Theta_w
 \end{array}
 \end{array}$$

$O_1$ ,  $O_2$  en  $O_3$  worden zoals eerder vermeld exakt gemeten. Voor de overige geobserveerde variabelen is de specificatie in overeenstemming met de hypothese, dat zij paarsgewijs "congeneriek" zijn, d.w.z. paarsgewijs één en dezelfde latente variabele meten, hoewel niet noodzakelijk in een gelijke meet-eenheid (congenerieke tests in een gelijke meet-eenheid worden tau-equivalent genoemd) en evenmin met gelijke betrouwbaarheid (tau-equivalente tests met gelijke betrouwbaarheid worden parallel genoemd) (6). De latente variabelen, die in een LISREL-model door groepen congenerieke of niet-congenerieke tests worden gemeten, mogen anders dan in bepaalde factor-analytische modellen gecorreleerd zijn. De latente variantie-covariantie-matrices  $E(\omega\omega') = \Phi$  en  $E(\eta\eta') = \Phi_\eta = \Pi\Pi' + \Delta^{-1}\Sigma(\Delta^{-1})'$ , hoeven m.a.w. niet per se diagonaal te zijn. Ook hoeven de latente variabelen in een LISREL-model niet gestandaardiseerd te zijn. In feite is de meet-eenheid van de betrokken latente variabele  $H$ ,  $L$ ,  $H_-$ ,  $L_-$ ,  $I$  gelijkgesteld met die van de eerste test  $H_1$ ,  $L_1$ ,  $H_{1-}$ ,  $L_{1-}$ ,  $I_1$  in ieder paar. Mede met het oog op de tijd-invariantie van matrix  $C$  in  $[A, B, C, D]$ , die

middels  $C = \Lambda_y$  uit het LISREL-model afgeleid zal worden, vindt men op overeenkomstige plaatsen in de matrices  $\Lambda_y$  en  $\Lambda_w$  gelijkgestelde coëfficiënten  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$ .

In totaal bevatten de parameter-matrices van de meetmodellen  $2 + 4 + 1 + 6 = 13$  onbekende elementen. Tezamen met de  $1 + 10 + 15 + 1 = 27$  van het latente structurele model geeft dit 40 onbekende elementen voor het LISREL-model als geheel. Aan de algemene noodzakelijke identificatie-voorwaarde  $\kappa \leq \frac{1}{2}s(s + 1)$  is voldaan, aangezien het aantal onafhankelijk te schatten elementen:  $\kappa = 40$  en het aantal verschillende elementen in de variantie-covariantie-matrix  $S$  - zie 3.3.101 - met  $s = p + q = 4 + 9 = 13$  geobserveerde  $y$ - en  $w$ -variabelen:  $\frac{1}{2}s(s + 1) = 91$ .

De waarden van de geobserveerde  $y$ - en  $w$ -variabelen moeten als deviatie-scores nog worden onderscheiden van de oorspronkelijke  $y'$ - en  $w'$ -scores. De laatste zijn voor de 85 kinderen, waarvoor benodigde data voorhanden waren, opgenomen in appendix C en hadden afgezien van de 1- en 0-scores van de oorspronkelijke dummy-variabelen  $O_1'$ ,  $O_2'$  en  $O_3'$  betrekking op de volgende metingen, waarbij tevens de gemiddelden over de  $n = 85$  kinderen zijn aangegeven en de standaard-afwijkingen met noemer  $\sqrt{n - 1} = \sqrt{84}$  (7)

$H_1'$ : ruwe scores op de "Haptische Voorwerpen Discriminatie Test", augustus/september 1972 (gemiddelde: 17.7; standaard-afwijking: 4.0)

$H_2'$ : ruwe scores op de "Haptische Grootte Discriminatie Test", augustus/september 1972 (gemiddelde: 18.8; standaard-afwijking: 3.9)

$L_1'$ : ruwe scores op de "Snelheidstest voor Braille-woorden", maart 1972 (gemiddelde: 65.9; standaard-afwijking: 27.3)

$L_2'$ : ruwe scores op de "Mechanische Leesvaardigheidstest voor Braille", maart 1972 (gemiddelde: 50.4; standaard-afwijking: 20.4)

$H_{1-}'$ : ruwe scores op de "Haptische Voorwerpen Discriminatie Test", augustus/september 1971 (gemiddelde: 16.3; standaard-afwijking: 4.7)

$H_{2-}'$ : ruwe scores op de "Haptische Grootte Discriminatie Test", augustus/september 1971 (gemiddelde: 16.4; standaard-afwijking: 5.5)

$L_{1-}'$ : ruwe scores op de "Snelheidstest voor Braille-woorden", maart 1971 (gemiddelde: 54.0; standaard-afwijking: 30.1)



$L'_2$ : ruwe scores op de "Mechanische Leesvaardigheidstest voor Braille", maart 1971 (gemiddelde: 40.1; standaard-afwijking: 21.8)

$I'_1$ : ruwe scores op de subtest "Gezond Verstand" van de W.I.S.C., mei/juni 1972 (gemiddelde: 11.8; standaard-afwijking: 4.1)

$I'_2$ : ruwe scores op de subtest "Algemene Ontwikkeling" van de W.I.S.C., mei/juni 1972 (gemiddelde: 15.7; standaard-afwijking: 5.4)

Een gedetailleerde beschrijving van de gebruikte tests kan men weer vinden in de door Mommers gepubliceerde onderzoeksrapporten. De W.I.S.C.-subtests waren slechts in 1970 en 1972 en niet in het tussenliggende jaar 1971 afgenomen. Hier is gekozen voor de afname in 1972 en dus voor tijd-anticiperende input wat intelligentie betreft. In de vorige paragraaf was niet alleen een andere subtest gekozen als maat voor intelligentie, t.w. "Overeenkomsten", maar bovendien voor de afname in 1970 om met het oog op de modellen 3 en 4 niet met het causaliteitsaxioma in conflict te komen en dus wat intelligentie betreft voor tijd-lagged input. Het feit, dat in de vorige paragraaf behalve van 1971 en 1972 tevens data van 1970 werden gebruikt, verklaart ook de verschillende steekproefgrootten 85 en 71: het verschil betreft kinderen, die in 1970 nog geen onderwijs op de betrokken instituten genoten.

De maximum-likelihood schatting van het LISREL-model is opgenomen in tabel 4.2.1. Een eerste schatting werd verkregen middels het LISREL-II-programma. Bij het beschikbaar komen van LISREL-III-programma werd een tweede schatting uitgevoerd, waarbij de oplossing van het LISREL-II-programma met enkele wijzigingen als initiële oplossing werd ingevoerd. Eén van de wijzigingen had betrekking op de centrale coëfficiënt  $\delta$  voor het geheugenloze effect van H op L, waarvan de geschatte waarde  $\hat{\delta} = -.367$  opzettelijk werd vervangen door de sterk afwijkende waarde .267. Op die manier kon voor de eerder gevonden oplossing een zekere controle worden uitgevoerd op eventuele afhankelijkheid van een lokaal minimum. De andere wijzigingen hadden betrekking op de 10 diagonaal-waarden van de matrices  $\Theta_y$  en  $\Theta_w$  en waren niet opzettelijk doorgevoerd, maar een gevolg van het feit, dat het LISREL-II-programma hier standaard-deviaties berekent i.p.v. varianties. Het LISREL-III-programma bereikte na 2 STEEPEST-DESCENT-iteraties en 33 FLEPOW-iteraties in 34.07 seconden een oplossing,

die identiek was met die van het LISREL-II-programma en waarin dus  $\hat{\delta} = -.367$  weer terugkeerde en de 10 standaard-deviaties waren veranderd in varianties. Aangezien aan het begin van de FLEPOW-iteraties geen boodschap "MATRIX NOT POSITIVE DEFINITE" m.b.t. de informatie-matrix werd aangetroffen, is het model volgens de handleiding van het programma "almost certain" geïdentificeerd (8).

Een enigszins teleurstellend resultaat is de tamelijk hoge standaard-fout van .376 bij  $-\hat{\delta} = .367$ , waardoor de vraag naar een effect van latente H op latente L onbeslist blijft. De schatting doet weliswaar een positief effect vermoeden, maar de gestandaardiseerde coëfficiënt van .040 wijst allerminst op een sterk effect. Zelfs bij een verhoging van  $-\hat{\delta}$  met 1.96 maal de standaard-fout zou de bijbehorende (ruw geschatte) gestandaardiseerde coëfficiënt nog slechts de waarde .118 opleveren. De hypothese, dat haptische waarneming een relatief sterk effect zou uit oefenen op het leesniveau wordt daarom in het kader van dit LISREL-model duidelijk niet bevestigd. Ook het afgeleide effect van H<sub>1</sub> op L in de gereduceerde vorm heeft een lage gestandaardiseerde coëfficiënt: .045. Nadere evaluatie hiervan is niet mogelijk, omdat het LISREL-programma geen standaard-fouten berekent bij de coëfficiënten in de gereduceerde vorm. Een opvallend resultaat vormen de hoge schattingen .812 en .853 voor het effect van latente H<sub>1</sub> op latente H en van latente L<sub>1</sub> op latente L. Het eerste effect heeft een gestandaardiseerde coëfficiënt van 1.112, implicerend dat een verhoging van één standaard-deviatie in H<sub>1</sub> een verhoging van meer dan één standaard-deviatie in H zou bewerken. Het lijkt niet onwaarschijnlijk, dat de lagere schattingen in de vorige paragraaf voor de effecten van L<sub>1</sub> op L, F<sub>1</sub> op F en W<sub>1</sub> op W een onderschatting vormen van de werkelijke effecten als gevolg van onbetrouwbaarheid in de geobserveerde L<sub>1</sub>, F<sub>1</sub> en W<sub>1</sub>. Het LISREL-model versterkt dan ook de indruk, dat de lagged-endogene variabelen het overgrote deel van de verklaarde variantie voor hun rekening nemen.

Een negatief effect van intelligentie I wordt hier slechts gevonden op H en niet op L. De positieve schatting van .210 voor het effect van I op L heeft echter de uiterst geringe gestandaardiseerde coëfficiënt van .024 en de hoge standaard-fout van 1.265. Aangezien het 95%-interval  $.210 \pm 1.96 \times 1.265$  een (ruw geschat) interval tussen .307 en -.259 oplevert voor de gestandaardiseerde coëfficiënt, kan het gevonden positieve

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 \text{H} & \text{L} \\
 \text{H} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ .367 & -1 \\ (.376) & \\ .040 & \end{bmatrix} & \\
 \text{L} & \\
 \hat{\Delta} & 
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 \text{H}_- & \text{L}_- & \text{I} & \text{O}_1 & \text{O}_2 & \text{O}_3 \\
 \text{H} \begin{bmatrix} .812 & 0 & -.207 & 1.07 & -.18 & -.89 \\ (.118) & & (.143) & (.71) & (.90) & (.81) \\ 1.112 & & -.213 & & & \end{bmatrix} & \\
 \text{L} \begin{bmatrix} 0 & .853 & .210 & 1.76 & -.49 & 1.79 \\ (.130) & (1.265) & (2.37) & (2.81) & (2.46) & \\ .949 & .024 & & & & \end{bmatrix} & \\
 -\hat{\Gamma} & 
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 \text{H} & \text{L} \\
 \text{H} \begin{bmatrix} .385 & \\ (1.000) & \\ .046 & \end{bmatrix} & \\
 \text{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ & \hat{\Sigma} \end{bmatrix} & \\
 \hat{\Sigma} & 
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 \text{H}_- & \text{L}_- & \text{I} & \text{O}_1 & \text{O}_2 & \text{O}_3 \\
 \text{H} \begin{bmatrix} 15.73 & & & & & \\ (3.32) & & & & & \\ 1 & & & & & \end{bmatrix} & \\
 \text{L} \begin{bmatrix} 75.49 & 859.0 & & & & \\ (16.71) & (136.1) & & & & \\ .649 & 1 & & & & \end{bmatrix} & \\
 \text{I} \begin{bmatrix} 6.794 & 80.85 & 8.891 & & & \\ (1.880) & (15.92) & (2.392) & & & \\ .574 & .925 & 1 & & & \end{bmatrix} & \\
 \text{O}_1 \begin{bmatrix} -.314 & .610 & -.019 & .235 & & \\ (.228) & (1.522) & (.168) & & & \end{bmatrix} & \\
 \text{O}_2 \begin{bmatrix} -.038 & -2.597 & -.295 & -.066 & .145 & \\ (.179) & (1.198) & (.135) & & & \end{bmatrix} & \\
 \text{O}_3 \begin{bmatrix} .394 & 1.431 & .132 & -.093 & -.044 & .186 \\ (.203) & (1.356) & (.150) & & & \end{bmatrix} & \\
 \hat{\Phi} & 
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 \text{H} & \text{L} \\
 \text{H} \begin{bmatrix} 8.402 & \\ 1 & \\ 42.00 & 693.8 \\ .550 & 1 \end{bmatrix} & \\
 \text{L} & \\
 \hat{\Phi}_\eta & 
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 \text{H}_- & \text{L}_- & \text{I} & \text{O}_1 & \text{O}_2 & \text{O}_3 \\
 \text{H} \begin{bmatrix} .812 & 0 & -.207 & 1.07 & -.18 & -.89 \\ 1.112 & & -.213 & & & \\ .298 & .853 & .134 & 2.16 & -.56 & 1.46 \\ .045 & .949 & .015 & & & \end{bmatrix} & \\
 \text{L} & \\
 \hat{\Pi} & 
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Tabel 4.2.1.a: De maximum-likelihood schatting van de latente structurele en latente gereduceerde vorm van het LISREL-model, opgenomen in matrices  $-\hat{\Delta}$ ,  $-\hat{\Gamma}$ ,  $\hat{\Phi}$ ,  $\hat{\Sigma}$  en  $\hat{\Pi} = -\hat{\Delta}^{-1}\hat{\Gamma}$ ,  $\hat{\Phi}_\eta = \hat{\Pi}\hat{\Phi}\hat{\Pi}' + \hat{\Delta}^{-1}\hat{\Sigma}(\hat{\Delta}^{-1})'$ ; de tweede regel bevat tussen haakjes de standaardfouten en de derde regel de gestandaardiseerde elementen bij de geschatte elementen in iedere eerste regel, (standaardfouten voor  $\hat{\Pi}$  en  $\hat{\Phi}_\eta$  worden door het LISREL-programma niet berekend).

		H	L			H <sub>-</sub>	L <sub>-</sub>	I		
H <sub>1</sub>	1	0	6.380 (1.259)			H <sub>1-</sub>	1	0	0	6.881 (1.515)
H <sub>2</sub>	1.112* (.100)	0	5.230 (1.261)			H <sub>2-</sub>	1.112* (.100)	0	0	9.573 (1.995)
L <sub>1</sub>	0	1	59.59 (11.42)			L <sub>1-</sub>	0	1	0	25.54 (8.98)
L <sub>2</sub>	0	.713** (.023)	44.79 (7.91)			L <sub>2-</sub>	0	.713** (.023)	0	44.77 (8.28)
						I <sub>1</sub>	0	0	1	8.109 (1.409)
						I <sub>2</sub>	0	0	1.606 (.206)	6.418 (1.916)

$\hat{\Lambda}_y$

$\hat{\Theta}_y$

$\hat{\Lambda}_w$

$\hat{\Theta}_w$

Tabel 4.2.1.b: De maximum-likelihood schatting van de beide factor-analytische modellen van het LISREL-model, opgenomen in matrices  $\hat{\Lambda}_y$ ,  $\hat{\Theta}_y$ ,  $\hat{\Lambda}_w$ ,  $\hat{\Theta}_w$  (de diagonale matrices  $\hat{\Theta}_y$  en  $\hat{\Theta}_w$  zijn kolomsgewijs weergegeven, terwijl de vaste 0- en 1-waarden in  $\hat{\Lambda}_w$  en  $\hat{\Theta}_w$  voor de variabelen  $O_1$ ,  $O_2$  en  $O_3$  zijn weggelaten); de tweede regel bevat tussen haakjes de standaard-fouten bij de geschatte elementen in iedere eerste regel, de paren waarden \* en \*\* zijn schattingen onder gelijkheidsrestricties.

intelligentie-effect op leesniveau moeilijk als een weerlegging worden beschouwd van het in de vorige paragraaf gevonden negatieve effect. De gevonden instituutseffecten op H verschillen nogal van die op F in de vorige paragraaf. Ter vergelijking volgen hieronder de gevonden instituutseffecten op leesniveau L in deze en de vorige paragraaf met tussen haakjes de bijbehorende standaard-fouten.

	$O_1$	$O_2$	$O_3$
Model I	1.79 (2.21)	-.67 (2.63)	-.07 (2.54)
Model II	1.73 (2.21)	-.59 (2.64)	-.39 (2.69)
LISREL- model	1.76 (2.37)	-.49 (2.81)	1.79 (2.46)

Instituut 3 geeft in het LISREL-model de hoogste waarde, terwijl de beide andere instituten ongeveer dezelfde waarde geven als in model I en II. Vanwege de hoge standaard-fouten kunnen aan de verschillen en overeenkomsten overigens nauwelijks conclusies worden verbonden.

De proportie verklaarde variantie voor latente L werd a priori op 1 gesteld. Vanwege de waarden .385 en 8.402 in resp.  $\hat{\Sigma}$  en  $\hat{\Phi}_\eta$  resulteert echter ook voor latente H een zeer hoge proportie verklaarde variantie, t.w.  $1 - (.385/8.402) = 1 - .046 = .954$ , terwijl bovendien blijkt de bijbehorende standaard-fout 1.000 in  $\hat{\Sigma}$  een totale verklaarde H-variantie niet mag worden uitgesloten. De latente variantie-covariantie-matrices  $\hat{\Phi}$  en  $\hat{\Phi}_\eta$  laten middels de gestandaardiseerde coëfficiënten (correlatie-coëfficiënten) zien, dat de latente variabelen inderdaad gecorreleerd zijn. Uitzonderlijk hoog is de gevonden correlatie van .925 tussen latente I en  $L_-$ . Vergelijk hiermee de correlaties tussen de geobserveerde  $I_1$  en  $I_2$  enerzijds en de geobserveerde  $L_{1-}$  en  $L_{2-}$  anderzijds

	$L_{1-}$	$L_{2-}$
$I_1$	.655	.603
$I_2$	.805	.802

Opmerkelijk is, dat uitgedrukt in gestandaardiseerde coëfficiënten de schattingen voor de effecten op L van deze hoog gecorrleerde L\_ en I zo verschillen, zelfs indien rekening wordt gehouden met de hoge standaard-fout bij het geschatte I-effect.

Onderstaand zijn voor ieder van de afgenomen tests de schattingen van totale variantie  $\hat{\sigma}^2$ , unieke variantie  $\hat{\theta}^2$  en communaliteit (proportie gemeenschappelijke variantie)  $h^2 = 1 - (\hat{\theta}^2/\hat{\sigma}^2)$  opgenomen

	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\theta}^2$	$h^2$		$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\theta}^2$	$h^2$
H <sub>1-</sub>	21.731	6.881	.683	H <sub>1</sub>	15.601	6.380	.591
H <sub>2-</sub>	30.269	9.573	.684	H <sub>2</sub>	14.956	5.230	.650
L <sub>1-</sub>	892.74	25.54	.971	L <sub>1</sub>	734.14	59.59	.919
L <sub>2-</sub>	467.37	44.77	.904	L <sub>2</sub>	412.26	44.79	.891
I <sub>1</sub>	17.000	8.109	.523				
I <sub>2</sub>	29.342	6.418	.781				

De beide haptische tests en de beide leestests laten zowel in 1971 als in 1972 ongeveer gelijke  $h^2$ -waarden zien, die overigens in 1971 hoger liggen dan in 1972. Mommers vermeldt alpha-coëfficiënten van .80 voor I<sub>1</sub> (Gezond Verstand) en .92 voor I<sub>2</sub> (Algemene Ontwikkeling) (9) en dit verschil in betrouwbaarheid zal gedeeltelijk een verklaring vormen voor de sterk verschillende  $h^2$ -waarden van I<sub>1</sub> en I<sub>2</sub>. Anders dan van de leestests kunnen echter de relatief lage  $h^2$ -waarden van de overige tests moeilijk als schattingen van de totale betrouwbaarheden worden geïnterpreteerd. Behalve alpha-coëfficiënten van .80 voor I<sub>1</sub> en .92 voor I<sub>2</sub> vermeldt Mommers nl. tevens KR-20-coëfficiënten van .84 voor H<sub>1-</sub> en .87 voor H<sub>2-</sub> (10). De uniekheden, geschat middels  $u^2 = 1 - h^2$ , zullen daarom bij de beide haptische en de beide intelligentie-tests niet alleen uit onbetrouwbaarheid maar tevens voor een deel uit specificiteit bestaan, zodat de hypothese van congenericiteit voor deze paren tests niet wordt bevestigd. Ruwe schattingen  $s^2$  van de specificiteiten verkrijgt men door de alpha- en KR-20-coëfficiënten te verminderen met  $h^2$  en daarbij resultaten tevens schattingen  $e^2 = u^2 - s^2$  van de onbetrouwbaarheden

	$h^2$	$u^2$	$s^2$	$e^2$
$H_{1-}$	.68	.32	.16	.16
$H_{2-}$	.68	.32	.19	.13
$I_1$	.52	.48	.28	.20
$I_2$	.78	.22	.14	.08

Test  $I_1$  zou volgens deze schattingen niet alleen de hoogste onbetrouwbaarheid, maar ook de hoogste specificiteit bezitten. Het LISREL-model laat uiteraard de specifieke evenals de onbetrouwbare variantie-komponenten buiten het latent structureel model.

De praktische waarde van een LISREL-model bij toepassingen dient overigens niet te worden afgemeten aan de hand van de verklaarde latente varianties in het latent structureel model, hoe belangrijk ook vanuit theoretisch gezichtspunt. De latente variabelen zijn en blijven immers onbekend en worden feitelijk gemeten middels de geobserveerde variabelen. Een betere maat vormen de  $R^2$ -waarden, die resulteren bij schatting van de waarden van de geobserveerde endogene variabelen, i.c.  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $L_1$  en  $L_2$ , op basis van de waarden van de geobserveerde gepredetermineerde variabelen, i.c.  $H_{1-}$ ,  $H_{2-}$ ,  $L_{1-}$ ,  $L_{2-}$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $O_1$ ,  $O_2$  en  $O_3$ . Vanwege het ontbreken van constanten in de vergelijkingen van een LISREL-model kunnen niet de oorspronkelijke scores  $H_1'$ ,  $H_2'$ ,  $L_1'$  en  $L_2'$  worden geschat, maar moet genoeg worden genomen met schatting van de deviatie-scores  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $L_1$  en  $L_2$ . Aangezien het eigenlijke verklaringsmodel het latent structureel model is, gedefinieerd in termen van de latente (gemeenschappelijke) variabelen, kan overigens niet worden geëist, dat de  $R^2$ -waarden de betrokken  $h^2$ -waarden (communaliteit-schattingen) overtreffen. Behalve de  $R^2$ -waarden zelf (proporties verklaarde variantie) zullen daarom tevens de  $R^2/h^2$ -waarden (proporties verklaarde communaliteit) in de beschouwing worden betrokken.

De eerste stap bij de berekening van de bedoelde  $R^2$ -waarden betreft schatting van de latente gepredetermineerde variabelen  $H_-$ ,  $L_-$  en  $I$  op basis van de geobserveerde gepredetermineerde variabelen  $H_{1-}$ ,  $H_{2-}$ ,  $L_{1-}$ ,  $L_{2-}$ ,  $I_1$  en  $I_2$  aan de hand van de matrices  $\hat{\Lambda}_w$  en  $\hat{O}_w$  in tabel 4.2.1. Gebruik werd gemaakt van Bartlett's methode in 3.3.96. De volgende variantie-covariantie-matrix resulteerde tussen de schattingen  $\hat{H}_-$ ,  $\hat{L}_-$  en  $\hat{I}$

$$\begin{array}{l} \hat{H}_- \\ \hat{L}_- \\ \hat{I} \end{array} \begin{bmatrix} \hat{H}_- & & \\ & \hat{L}_- & \\ & & \hat{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19.37 & & \\ 1 & & \\ 74.66 & 877.7 & \\ .573 & 1 & \\ 6.751 & 80.90 & 10.80 \\ .467 & .831 & 1 \end{bmatrix}$$

Vergelijking met de corresponderende waarden in matrix  $\hat{\Phi}$  van tabel 4.2.1 leert dat de covarianties bijna exakt worden gereproduceerd, maar dat de varianties te hoog zijn, met name die van  $\hat{H}_-$  en  $\hat{I}$ . Een grotere onnauwkeurigheid van  $\hat{H}_-$  en  $\hat{I}$  is in overeenstemming met wat Gorsuch signaleert:

" the inaccuracies in the factor scores increase with an increase in the uniquenesses, which is the same as saying that the inaccuracies increase as the communalities decrease" (11). De overschatting van de varianties heeft een onderschatting van de gestandaardiseerde coëfficiënten (correlaties) tot gevolg.

De tweede stap betreft toepassing van de latente gereduceerde vorm  $\hat{\Pi}$  in tabel 4.2.1 op  $\hat{H}_-$ ,  $\hat{L}_-$ ,  $\hat{I}$ ,  $O_1$ ,  $O_2$  en  $O_3$ , hetgeen resulteerde in schattingen van de latente endogene variabelen  $\hat{H}$  en  $\hat{L}$  met de volgende variantie-covariantie-matrix

$$\begin{array}{l} \hat{H} \\ \hat{L} \end{array} \begin{bmatrix} \hat{H} & \\ & \hat{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10.50 & \\ 1 & \\ 42.07 & 707.0 \\ .488 & 1 \end{bmatrix}$$

welke moet worden vergeleken met  $\hat{\Pi}\hat{\Phi}\hat{\Pi}' = \hat{\Phi}_\eta - \hat{\Delta}^{-1}\hat{\Sigma}(\hat{\Delta}^{-1})'$ , i.c.

$$\begin{array}{l} \hat{H} \\ \hat{L} \end{array} \begin{bmatrix} \hat{H} & \\ & \hat{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.017 & \\ 1 & \\ 41.85 & 693.7 \\ .561 & 1 \end{bmatrix}$$

Ook hier blijken de varianties te hoog en daardoor de correlatie te laag.



De derde stap betreft toepassing van  $\hat{\Lambda}_y$  in tabel 4.1.2 op  $\hat{H}$  en  $\hat{L}$  met schattingen  $\hat{H}_1$ ,  $\hat{H}_2$ ,  $\hat{L}_1$  en  $\hat{L}_2$  als resultaat. Uit de varianties  $s_D^2$  van de verschillen met  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $L_1$  en  $L_2$  werden tenslotte de proporties verklaarde variantie  $R^2 = 1 - (s_D^2/\hat{\sigma}^2)$  berekend

	$s_D^2$	$R^2$	$R^2/h^2$
$H_1$	9.151	.413	.699
$H_2$	9.067	.394	.605
$L_1$	66.93	.909	.989
$L_2$	48.77	.882	.989

Het LISREL-model is in combinatie met de Bartlett-schatter klaarblijkelijk het minst succesrijk bij verklaring van de  $H_2$ -variantie: nog geen 40% wordt daarvan verklaard en slechts iets meer dan 60% van de betrokken communaliteit. De communaliteit van  $H_1$  wordt voor bijna 70% verklaard en die van  $L_1$  en  $L_2$  voor bijna 100%, terwijl ook de  $R^2$ -waarden van  $L_1$  en  $L_2$  zeer hoog zijn en in de orde van grootte van de betrouwbaarheidscoëfficiënten.

Hogere  $R^2$ - en  $R^2/h^2$ -waarden zouden wellicht bereikt kunnen worden door na toepassing van Bartlett-schatter de resulterende  $\hat{H}$ ,  $\hat{L}$  en  $\hat{I}$  te transformeren naar z-skores met per definitie variantie 1 en vervolgens naar skores met dezelfde varianties 15.73, 859.0 en 8.891 als in  $\hat{\Phi}$  van tabel 4.2.1. Een bezwaar daarbij is, dat impliciet andere coëfficiënten in  $\hat{\Lambda}_w$  worden gebruikt en dus wordt afgeweken van de veronderstelde tijd-invariantie tussen  $\hat{\Lambda}_w$  en  $\hat{\Lambda}_y$ . Bovendien moet men over variantie-schattingen  $\hat{\sigma}^2$  van  $H$ ,  $L$  en  $I$  beschikken, welke echter bij toepassing op andere tijdstippen en in andere situaties vaak zullen ontbreken. Mocht men op andere tijdstippen en in andere situaties beschikken over aangepaste variantie-schattingen  $\hat{\sigma}^2$  van de geobserveerde variabelen, dan verdient het wel altijd aanbeveling om aangepaste  $\hat{\sigma}^2$  in de Bartlett-schatter in te vullen. Een ruwe schatting van de aangepaste  $\hat{\sigma}^2$  verkrijgt men middels  $\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^2(1 - \hat{h}^2)$  met  $\hat{h}^2 = \frac{h^2}{h^2 + s^2} (1 - \underline{e}^2)$  en  $\underline{e}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2} e^2$ , waarbij wordt uitgegaan van gelijke onbetrouwbare variantie-komponenten  $\underline{e}^2 \hat{\sigma}^2 = e^2 \hat{\sigma}^2$  (12).

Het LISREL-model als model [A,B,C,D] en de dynamische implicaties van de schatting

Aangezien in het LISREL-model geen groei-variabelen werden opgenomen, beperken we ons tot differentie-model [A,B,C,D] met  $\Delta t = 1 = \delta$  (= één jaar). Er geldt  $D = 0$  vanwege de a priori specificatie van het LISREL-model via afzonderlijke matrices  $\Lambda_y$  en  $\Lambda_w$  en dus toestand-bepaalde output:  $y(t) = Cx(t)$ . A, B en C volgen verder rechtstreeks middels  $\Pi = [\tilde{A} \ B]$ ,  $A = \tilde{A} - I$  en  $C = \Lambda_y$  uit het LISREL-model. De schattingen  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  en  $\hat{C}$ , rechtstreeks verkregen uit  $\hat{\Pi}$  en  $\hat{\Lambda}_y$  in tabel 4.2.1, zijn opgenomen in tabel 4.2.2. Vanwege a priori specificatie  $a_{12} = 0$  in

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & 0 \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{bmatrix} \text{ blijken de } \underline{\text{eigenwaarden}}$$

$$\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 = \frac{(\hat{a}_{11} + \hat{a}_{22}) \pm \sqrt{(\hat{a}_{11} + \hat{a}_{22})^2 - 4(\hat{a}_{11}\hat{a}_{22} - 0 \cdot \hat{a}_{21})}}{2}$$

gelijk aan  $\hat{a}_{11}$  en  $\hat{a}_{22}$ , d.w.z.

$$\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 = \hat{a}_{11}, \hat{a}_{22} = -.188, -.147 \text{ en dus } \hat{\Lambda} = \begin{bmatrix} -.188 & 0 \\ 0 & -.147 \end{bmatrix}$$

en volgen uit

$$(\hat{A} - \hat{\lambda}_1 I)\hat{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ .298 & .041 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_{11} \\ \hat{b}_{21} \end{bmatrix} = 0 \text{ en } (\hat{A} - \hat{\lambda}_2 I)\hat{b}_2 = \begin{bmatrix} -.041 & 0 \\ .298 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_{12} \\ \hat{b}_{22} \end{bmatrix} = 0$$

de vergelijkingen  $.298\hat{b}_{11} + .041\hat{b}_{21} = 0$  en  $\hat{b}_{12} = 0$ , die tezamen met restricties  $\hat{b}_{11}^2 + \hat{b}_{21}^2 = 1$  en  $\hat{b}_{12}^2 + \hat{b}_{22}^2 = 1$  de volgende matrix  $\hat{B}$  van eigenvectoren  $\hat{b}_1$  en  $\hat{b}_2$  en inverse  $\hat{B}^{-1}$  opleveren

$$\hat{B} = [\hat{b}_1 \ \hat{b}_2] = \begin{bmatrix} .1363 & 0 \\ -.99067 & 1 \end{bmatrix} \text{ en } \hat{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1^* \\ \hat{b}_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.3368 & 0 \\ 7.2683 & 1 \end{bmatrix}$$

De eigenwaarden voldoen aan voorwaarde 3.2.46, zodat de schatting van het model [A,B,C,D] in tabel 4.2.2 (totaal) asymptotisch stabiel is en daardoor tevens i.o.- en b.i.b.o.-stabiel. De geschatte karacteristieke

excitatie-bewegingen  $\hat{m}_1^0$  en  $\hat{m}_2^0$

$$\hat{m}_1^0(t - t_0) = \hat{\alpha}_1(t_0) \cdot \hat{m}_1(t - t_0) \quad \text{met} \quad \hat{m}_1(t - t_0) = (\hat{\lambda}_1 + 1)^{t-t_0} \hat{b}_1 \quad \text{en} \\ \hat{\alpha}_1(t_0) = \hat{b}_1^* \hat{x}(t_0)$$

$$\hat{m}_2^0(t - t_0) = \hat{\alpha}_2(t_0) \cdot \hat{m}_2(t - t_0) \quad \text{met} \quad \hat{m}_2(t - t_0) = (\hat{\lambda}_2 + 1)^{t-t_0} \hat{b}_2 \quad \text{en} \\ \hat{\alpha}_2(t_0) = \hat{b}_2^* \hat{x}(t_0)$$

zijn volgens tabel 3.2.1 van het type: monotoon naar 0 convergerend. Anders dan in de vorige paragraaf heeft het geen zin om ter illustratie in  $\hat{x}(t_0)$  de gemiddelden  $\overline{H_-}$  en  $\overline{L_-}$  op te nemen, aangezien in een LISREL-model alle variabelen worden gemeten als deviatie-skores, welke per definitie gemiddeld 0 zijn. Een LISREL-model verklaart en voorspelt slechts afwijkingen t.o.v. gemiddelden vanuit afwijkingen t.o.v. gemiddelden. De gemiddelden zelf kunnen alleen onafhankelijk van het LISREL-model worden geschat. Ter illustratie zal worden uitgegaan van een kind met geobserveerde waarden  $H_{1-} = 4.6616$ ,  $H_{2-} = 5.5018$ ,  $L_{1-} = 29.879$ ,  $L_{2-} = 21.619$ ,  $I_1 = 4.1231$  en  $I_2 = 5.4168$ . De gekozen waarden zijn de standaard-deviaties (evenals in het LISREL-programma berekend met noemer  $\sqrt{n}$ ) en het betrokken kind bevindt zich dus overal precies één standaard-deviatie boven het gemiddelde. Met de Bartlett-schatter werden voor dit "standaard-deviatie-kind" de latente waarden  $\hat{H}_- = 4.7962$  en  $\hat{L}_- = 29.978$  gevonden. De geschatte latente begintoestand  $\hat{x}(t_0)$  en bijbehorende latente excitaties  $\hat{\alpha}_1(t_0) = \hat{b}_1^* \hat{x}(t_0)$  en  $\hat{\alpha}_2(t_0) = \hat{b}_2^* \hat{x}(t_0)$  worden in afgeronde getallen  $\hat{x}(t_0) = \begin{bmatrix} 4.80 \\ 29.98 \end{bmatrix}$ ,  $\hat{\alpha}_1(t_0) = 35.19$ ,  $\hat{\alpha}_2(t_0) = 64.84$ . In tabel 4.2.3 zijn

voor dit kind over de eerste 10 jaar de geschatte karakteristieke excitatie-bewegingen  $\hat{m}_1^0$  en  $\hat{m}_2^0$  en vrije beweging  $\hat{A}^{t-t_0} \hat{x}(t_0) = \hat{m}_1^0(t - t_0) + \hat{m}_2^0(t - t_0)$  opgenomen, berekend middels onderdeel 5 van appendix A. Middels onderdeel 6 van appendix A werd  $\hat{A}^{t-t_0} \hat{x}(t_0)$  met daarin de geschatte toestand-overgangsmatrix  $\hat{A}^{t-t_0}$  opnieuw berekend, gebruik makend van de diagonaliseringsprocedure  $\hat{A}^{t-t_0} = \hat{B} \hat{\Lambda}^{t-t_0} \hat{B}^{-1}$ , waarin  $\hat{B}$  de geschatte matrix van eigenvectoren bij  $\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda} + I$ . Anders dan in de vorige paragraaf geeft de vrije beweging de ontwikkeling van latente toestand-variabelen, gemeten in deviatie-skores. Volgens tabel 4.2.3 zou in de vrije beweging de latente haptische waarde 4.80 van het "standaard-

$$\begin{array}{l} \Delta H(t) \\ \Delta L(t) \end{array} \begin{array}{c} H(t) \\ L(t) \end{array} \hat{A} = \begin{bmatrix} -.188 & 0 \\ .298 & -.147 \end{bmatrix} \begin{array}{c} I(t+1) \\ O_1(t) \\ O_2(t) \\ O_3(t) \end{array} \hat{B} = \begin{bmatrix} -.207 & 1.07 & -.18 & -.89 \\ .134 & 2.16 & -.56 & 1.46 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} H_1(t) \\ H_2(t) \\ L_1(t) \\ L_2(t) \end{array} \begin{array}{c} H(t) \\ L(t) \end{array} \hat{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.112 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & .713 \end{bmatrix}$$

Tabel 4.2.2: Matrices  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  en  $\hat{C}$  voor model [A,B,C,D] met  $D = 0$ , rechtstreeks afgeleid uit  $\hat{\Pi}$  en  $\hat{\Lambda}_y$  in tabel 4.1.1.

$t' = t - t_0$ (jaren)	$\hat{m}_1^0(t')$		$\hat{m}_2^0(t')$		$\hat{m}_1^0(t') + \hat{m}_2^0(t')$	
	$\hat{H}(t')$	$\hat{L}(t')$	$\hat{H}(t')$	$\hat{L}(t')$	$\hat{H}(t')$	$\hat{L}(t')$
0	4.80	-34.86	0	64.84	4.80	29.98
1	3.89	-28.31	0	55.31	3.89	27.00
2	3.16	-22.98	0	47.18	3.16	24.19
3	2.57	-18.66	0	40.24	2.57	21.58
4	2.09	-15.16	0	34.33	2.09	19.17
5	1.69	-12.31	0	29.28	1.69	16.98
6	1.37	-9.99	0	24.98	1.37	14.98
7	1.12	-8.11	0	21.31	1.12	13.19
8	.91	-6.59	0	18.17	.91	11.59
9	.74	-5.35	0	15.50	.74	10.15
10	.60	-4.34	0	13.22	.60	8.88

Tabel 4.2.3: Geschatte karakteristieke excitatie-bewegingen  $\hat{m}_1^0$  en  $\hat{m}_2^0$  en vrije beweging  $\hat{m}_1^0 + \hat{m}_2^0$  op basis van de eigenwaarden  $\hat{\lambda}_1$  en  $\hat{\lambda}_2$  van matrix  $\hat{A}$  in tabel 4.2.2 en begintoestand  $\hat{x}(t_0) = [\hat{H}(t_0) \hat{L}(t_0)]' = [4.80 \ 29.98]'$  over 10 jaar vanaf  $t_0$ .

deviatie-kind" al na 4 jaar zijn gehalveerd, terwijl dat met zijn latente lees-waarde 29.98 pas na 6 jaar het geval zou zijn.

De geschatte vrije beweging is de zero-input-komponent  $\hat{A}^{t-t_0} \hat{x}(t_0)$  in de geschatte toestand-overgangsfunctie  $\hat{x}(t) = \hat{A}^{t-t_0} \hat{x}(t_0) + \sum_{k=t_0}^{t-1} \hat{A}^{t-k-1} \hat{B} \hat{u}(k)$ , waarin  $\hat{B}$  de matrix  $\hat{B}$  in tabel 4.2.2 is. Vermenigvuldiging met  $\hat{C}$  in tabel 4.2.2 levert de geschatte response-functie  $\hat{y}(t) = \hat{C} \hat{A}^{t-t_0} \hat{x}(t_0) + \hat{C} \sum_{k=t_0}^{t-1} \hat{A}^{t-k-1} \hat{B} \hat{u}(k)$  op, uiteenvallend in geschatte zero-input-response  $\hat{C} \hat{A}^{t-t_0} \hat{x}(t_0)$  met geschatte unit-response-matrix  $\hat{\phi}(t') = \hat{C} \hat{A}^{t'}$  en geschatte zero-state-response  $\hat{C} \sum_{k=t_0}^{t-1} \hat{A}^{t-k-1} \hat{B} \hat{u}(k)$  met geschatte impulse-response-matrix  $\hat{H}(t'') = \hat{C} \hat{A}^{t''-1} \hat{B}$ . Anders dan in de vorige paragraaf is er hier vanwege  $\hat{C} \neq I$  verschil tussen de geschatte toestand-overgangsfunctie en de geschatte response-functie. De eerste schat de waarden van de latente (toestand-)variabelen in  $x(t) = [H(t) \ L(t)]'$  en de laatste de waarden van de geobserveerde (output-waarde-)variabelen in  $y(t) = [H_1(t) \ H_2(t) \ L_1(t) \ L_2(t)]'$ . Bij toepassingen zal men in het algemeen vooral geïnteresseerd zijn in de waarden van de geobserveerde variabelen. In tabel 4.2.4 zijn over de eerste 10 jaar schattingen gegeven van zero-input-, zero-state- en totale response, waarbij opnieuw werd uitgegaan van het "standaard-deviatie-kind" en wel bij een verblijf op het 4e instituut. In afgeronde getallen:

$$\hat{x}(t_0) = \begin{bmatrix} \hat{H}(t_0) \\ \hat{L}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.80 \\ 29.98 \end{bmatrix}, \quad \hat{u}(t_0) = \begin{bmatrix} \hat{I}(t_0 + 1) \\ O_1(t_0) \\ O_2(t_0) \\ O_3(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.55 \\ -0.38 \\ -0.18 \\ -0.25 \end{bmatrix}, \quad \hat{u}(k) = \hat{u}(t_0) \text{ voor alle } k \in [t_0, t_1]$$

Tegelijk met  $\hat{H}(t_0)$  en  $\hat{L}(t_0)$  werd voor het "standaard-deviatie-kind" de latente intelligentie-waarde  $\hat{I}(t_0 + 1) = \hat{I} = 3.549$  gevonden middels de Bartlett-schatter;  $O_1(t_0) = -0.37647$ ,  $O_2(t_0) = -0.17647$  en  $O_3(t_0) = -0.24706$  zijn de deviatie-skores  $O_1$ ,  $O_2$  en  $O_3$ , behorend bij de oorspronkelijke dummy-waarden  $O_1' = O_2' = O_3' = 0$  voor een kind op het 4e instituut. Uitgegaan werd bovendien van een constante spreiding van geobserveerde  $I_1$  en  $I_2$  en latente  $I$  binnen ieder jaar in de predictie-periode  $[t_0, t_1]$  van 10 jaar. Onder deze assumptie wordt het geschat input-segment

$t-t_0$ (jaren)	zero-input-response				zero-state-response			
	$\hat{H}_1(t)$	$\hat{H}_2(t)$	$\hat{L}_1(t)$	$\hat{L}_2(t)$	$\hat{H}_1(t)$	$\hat{H}_2(t)$	$\hat{L}_1(t)$	$\hat{L}_2(t)$
0	4.80	5.33	29.98	21.38	0	0	0	0
1	3.89	4.33	27.00	19.25	-0.88	-0.98	-0.60	-0.43
2	3.16	3.52	24.19	17.25	-1.60	-1.78	-1.38	-0.98
3	2.57	2.86	21.58	15.38	-2.19	-2.43	-2.25	-1.60
4	2.09	2.32	19.17	13.67	-2.66	-2.96	-3.17	-2.26
5	1.69	1.88	16.98	12.10	-3.04	-3.39	-4.10	-2.92
6	1.37	1.53	14.98	10.68	-3.36	-3.73	-5.00	-3.57
7	1.12	1.24	13.19	9.41	-3.61	-4.02	-5.87	-4.18
8	.91	1.01	11.59	8.26	-3.82	-4.24	-6.68	-4.76
9	.74	.82	10.15	7.24	-3.98	-4.43	-7.44	-5.30
10	.60	.66	8.88	6.33	-4.12	-4.58	-8.13	-5.80

$t-t_0$ (jaren)	totale response			
	$\hat{H}_1(t)$	$\hat{H}_2(t)$	$\hat{L}_1(t)$	$\hat{L}_2(t)$
0	4.80	5.33	29.98	21.38
1	3.01	3.35	26.40	18.82
2	1.56	1.73	22.82	16.27
3	.38	.42	19.33	13.78
4	-.58	-.64	16.00	11.41
5	-1.35	-1.50	12.88	9.18
6	-1.98	-2.20	9.98	7.12
7	-2.49	-2.77	7.32	5.22
8	-2.91	-3.24	4.90	3.50
9	-3.25	-3.61	2.72	1.94
10	-3.52	-3.92	.75	.53

Tabel 4.2.4: Geschatte zero-input-response, zero-state-response en totale response op basis van de matrices  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  en  $\hat{C}$  in tabel 4.2.2, begintoestand  $\hat{x}(t_0) = [4.80 \ 29.98]^T$  en  $\hat{u}[t_0, t_1]$  zoals aangegeven in de tekst over 10 jaar vanaf  $t_0$ .

$\hat{u}_{[t_0, t_1]}$  voor het "standaard-deviatie-kind" op het 4e instituut:  
 $\hat{u}(k) = \hat{u}(t_0)$  voor alle  $k \in [t_0, t_1]$ .

De schatting in tabel 4.2.4 van de zero-state-response (input-effect) voor dit kind blijkt de daling volgens de geschatte zero-input-response (effect van de begintoestand) niet te compenseren maar integendeel nog verder te verlagen. Het verschil tussen  $\hat{y}(t_0) = [4.80 \ 5.33 \ 29.98 \ 21.38]'$  in tabel 4.2.4 en  $y(t_0) = [4.66 \ 5.50 \ 29.88 \ 21.62]'$  met daarin de gekozen standaard-deviatie van  $H_{1-}$ ,  $H_{2-}$ ,  $L_{1-}$  en  $L_{2-}$  is uiteraard een gevolg van het feit, dat iedere  $\hat{y}(t)$  in tabel 4.2.4 een schatting middels  $\hat{C}$  is op basis van de toestand en dat bovendien in een LISREL-model niet alleen de latere toestanden, maar ook al de latente begintoestand  $x(t_0)$  geschat moet worden, hetgeen hier is gebeurd middels de Bartlett-schatter. De geschatte zero-state-response is in feite overal negatief en sommering met de dalende geschatte zero-input-response geeft zoals gezegd een nog sterkere daling voor de totale geschatte response. Vergelijking van  $y(t_0) = [4.66 \ 5.50 \ 29.88 \ 21.26]'$  met  $\hat{y}(t_0 + 10) = [-3.52 \ -3.92 \ .75 \ .53]'$  leert, dat van de standaard-deviaties voor de leestests na 10 jaar bijna niets zou zijn overgebleven en dat die voor de haptische tests zelfs zouden zijn veranderd in sterk negatieve deviatie-skores. Het "standaard-deviatie-kind" op het 4e instituut zou dus onder het betrokken constante input-segment  $\hat{u}_{[t_0, t_1]}$  zijn standaard-deviaties allerminst handhaven.

Het kan zijn, dat men voor bepaalde doeleinden niet tevreden is met geschatte deviatie-skores  $\hat{y}(t) = [\hat{H}_1(t) \ \hat{H}_2(t) \ \hat{L}_1(t) \ \hat{L}_2(t)]'$  maar ook wil beschikken over schattingen  $\hat{y}'(t) = [\hat{H}_1'(t) \ \hat{H}_2'(t) \ \hat{L}_1'(t) \ \hat{L}_2'(t)]'$  van de oorspronkelijke skores volgens  $\hat{y}'(t) = \hat{y}(t) + \overline{y}'(t)$ . De schattingen van de gemiddelde oorspronkelijke skores voor iedere  $t$  in de predictie-periode:  $\overline{y}'(t) = [\overline{H}_1'(t) \ \overline{H}_2'(t) \ \overline{L}_1'(t) \ \overline{L}_2'(t)]'$  moeten onafhankelijk van het LISREL-model worden verkregen. Bekend waren alleen de waarden  $\overline{y}'(t_0) = [\overline{H}_{1-}' \ \overline{H}_{2-}' \ \overline{L}_{1-}' \ \overline{L}_{2-}'] = [16.34 \ 16.44 \ 54.04 \ 40.14]'$  en  $\overline{y}'(t_0 + 1) = [\overline{H}_1' \ \overline{H}_2' \ \overline{L}_1' \ \overline{L}_2'] = [17.69 \ 18.76 \ 65.93 \ 50.38]'$ . De overige waarden  $\overline{y}'(t)$  in tabel 4.2.5 werden verkregen onder de assumptie van een lineaire toename. Ter vergelijking zijn behalve de waarden  $\hat{y}'(t)$  voor het "standaard-deviatie-kind" bij een verblijf op het 4e instituut tevens die bij een verblijf op het 3e instituut opgenomen. Zoals te verwachten - zie de coëfficiënten onder  $O_3(t)$  in matrix  $\hat{B}$  van tabel 4.2.2 -

$t-t_0$ (jaren)	$\overline{y^i(t)}$			
	$\overline{H_1^i(t)}$	$\overline{H_2^i(t)}$	$\overline{L_1^i(t)}$	$\overline{L_2^i(t)}$
0	16.34	16.44	54.04	40.14
1	17.69	18.76	65.93	50.38
2	19.05	21.10	77.82	60.61
3	20.40	23.42	89.72	70.85
4	21.76	25.76	101.61	81.08
5	23.11	28.09	113.50	91.32
6	24.46	30.42	125.40	101.55
7	25.81	32.74	137.29	111.79
8	27.16	35.08	149.19	122.02
9	28.52	37.40	161.08	132.26
10	29.87	39.74	172.97	142.49

$t-t_0$ (jaren)	(instituut 4)				(instituut 3)			
	$\hat{H}_1^i(t)$	$\hat{H}_2^i(t)$	$\hat{L}_1^i(t)$	$\hat{L}_2^i(t)$	$\hat{H}_1^i(t)$	$\hat{H}_2^i(t)$	$\hat{L}_1^i(t)$	$\hat{L}_2^i(t)$
0	21.14	21.77	84.01	61.52	21.14	21.77	84.01	61.52
1	20.70	22.11	92.33	69.20	19.81	21.12	93.79	70.24
2	20.61	22.83	100.64	76.88	18.99	21.03	103.09	78.62
3	20.78	23.85	109.04	84.73	18.57	21.40	112.11	86.82
4	21.18	25.12	117.61	92.49	18.49	22.13	121.04	94.93
5	21.75	26.58	126.38	100.50	18.68	23.16	129.97	103.05
6	22.48	28.21	135.38	108.67	19.09	24.44	138.99	111.24
7	23.32	29.97	144.62	117.01	19.67	25.92	148.15	119.52
8	24.26	31.84	154.09	125.52	20.40	27.56	157.48	127.93
9	25.27	33.79	163.80	134.19	21.25	29.32	167.00	136.48
10	26.35	35.82	173.72	143.02	22.19	31.20	176.72	145.16

Tabel 4.2.5: De geschatte gemiddelde oorspronkelijke scores  $\overline{y^i(t)}$  over 10 jaar onder assumptie van een lineaire toename vanaf  $t_0$  (medio 1971) en de geschatte oorspronkelijke scores  $\hat{y}^i(t) = \hat{y}(t) + \overline{y^i(t)}$  met  $\hat{y}(t)$  de geschatte deviatie-scores van de totale response, zowel voor instituut 4 (zie tabel 4.2.4) als bij vervanging van instituut 4 door instituut 3.



geeft het 3e instituut lagere  $\hat{H}'_1(t)$ - en  $\hat{H}'_2(t)$ -waarden en hogere  $\hat{L}'_1(t)$ - en  $\hat{L}'_2(t)$ -waarden. Waarschijnlijk als gevolg van het indirecte effect langs  $H(t)$  en  $L(t)$  zijn de verschillen in de  $\hat{L}'_1(t)$ - en  $\hat{L}'_2(t)$ -waarden echter van zeer geringe omvang. De aanvankelijke daling en vervolgens slechts geringe stijging van de  $\hat{H}'_1(t)$ - en  $\hat{H}'_2(t)$ -waarden voor zowel instituut 3 als 4 moet te wijten zijn aan het negatieve effect van een positieve  $I(t + 1)$ -waarde. Helaas ontbraken werkelijke waarden  $y'(t)$  en konden dus ook geen predictieve  $R^2$ -waarden worden berekend. Het is echter uiterst onwaarschijnlijk, dat deze de eerder berekende nonpredictieve  $R^2_{H_1} = .413$ ,  $R^2_{H_2} = .394$ ,  $R^2_{L_1} = .909$  en  $R^2_{L_2} = .882$  zouden overtreffen, zodat aan de  $\hat{H}'_1(t)$ - en  $\hat{H}'_2(t)$ -waarden niet te veel betekenis mag worden gehecht.

Ter afsluiting van deze paragraaf over het LISREL-model het volgende. Omdat de werkwijze geheel analoog is aan die voor beide structurele modellen in de vorige paragraaf, is het onderzoek naar de dynamische implicaties hier minder uitgebreid uitgevoerd. Met name is geen aandacht besteed aan de impulse-response- en unit-response-functies. Schattingen van de impulse-response-functies zouden duidelijk hebben gemaakt, waaraan het sterk dalende verloop van de zero-state-response in tabel 4.2.4 is te wijten en welke input-segmenten eventueel een minder sterke daling of zelfs een stijging zouden laten zien. Schattingen van de unit-response-functies zouden een gedetailleerde analyse van de begintoestand mogelijk hebben gemaakt bij de vorming van de zero-input-response in tabel 4.2.4 en daardoor indirect bij de vorming van de totale response. We hebben deze analyses achterwege gelaten, omdat zij niet wezenlijk verschillen van die in de vorige paragraaf.

De LISREL-benadering als zodanig biedt in vergelijking met de aanpak via konventionele structurele modellen zowel voor- als nadelen. Een belangrijk voordeel is, dat leesniveau, haptische waarneming en intelligentie als latente variabelen behandeld kunnen worden, waardoor conclusies mogelijk worden, die minder sterk gebonden zijn aan de specifieke tests om deze latente variabelen te meten. Bovendien vermijdt de LISREL-benadering daardoor, dat inconsistente schattingen resulteren als gevolg van onbetrouwbaarheid in de tests, die als gepredetermineerde variabelen worden gekozen. Tegelijk met schattingen van de coëfficiënten in het latente structurele model geeft het LISREL-programma schattingen van een

aantal meet-eigenschappen van de gebruikte tests, i.h.b. van de communaliteiten. Aangezien externe informatie beschikbaar was m.b.t. de betrouwbaarheden, konden ook de specificiteiten van de betrokken tests worden geschat. Een voordeel van de LISREL-benadering in vergelijking met conventionele factor-analytische modellen is, dat de meet-eigenschappen geschat worden als onderdeel van het totale LISREL-model en daardoor met inbegrip van de assumpties m.b.t. de latente variabelen zoals gespecificeerd in het latente structurele model. Bezwaren zou men kunnen aanvoeren tegen de simpele factor-analytische structuur, die a priori voor de tests werd gespecificeerd, en tegen het feit, dat geen interdependent maar een simpel recursief structureel model werd gespecificeerd. Hoewel dit geen principiële bezwaren kunnen zijn tegen de LISREL-benadering, omdat ook andere specificaties toelaatbaar zijn (zelfs correlaties tussen unieke componenten zijn toelaatbaar), wordt men in de praktijk gemakkelijk tot dergelijke vereenvoudigingen gedwongen door de identificatie- en schattingsproblemen, waar men bij de toepassing van het LISREL-programma typisch op stuit. Konventionele structurele modellen leveren in dit opzicht minder problemen op. Een belangrijk bezwaar van de LISREL-benadering, indien toegepast met het oog op schatting van een model [A,B,C,D], is ten slotte, dat geen constante gespecificeerd en geschat kan worden in de latente structurele vergelijking. Daardoor is slechts predictie van deviatie-skores t.o.v. onbekende gemiddelden mogelijk. De predictie van deze gemiddelden moet op tamelijk onbevredigende wijze langs andere weg verlopen.

#### 4.3 De attitude t.o.v. zelfverwondend gedrag: een onderzoeksvoorstel aan de hand van een systemisch verklaringsmodel $R(S)$

##### Het onderzoeksvoorstel

Het voorlopige voorstel, dat in deze paragraaf wordt gepresenteerd, heeft als achtergrond de dissertatie "Zelfverwondend gedrag bij zwakzinnigen: gedragsanalyse en -therapie" van P.C.C. Duker, waaruit de volgende citaten zijn genomen (13):

"De confrontatie met een persoon met dergelijk gedrag is ronduit een schokkende ervaring ... Dat zelfverwondend gedrag door de groepsleiding

in de zwakzinnigenzorg als een uitgesproken probleem en tevens als een onprettige factor in de werksituatie wordt geëvalueerd, waarbij de negatieve attitude t.o.v. dit gedrag in geen enkele verhouding staat t.o.v. andere probleemgedragingen, toont Meys (1974) aan".

"Corte, Wolf en Locke (1971) toonden aan dat gedragstherapie met electro-aversieve stimulatie bij alle vier personen, waarbij het werd toegepast, meer sukses opleverde dan extinctie of reinforcement van tegengesteld gedrag".

"Emotionele weerstanden maken het toepassen van meer aversieve technieken, waaronder "time-out" en de toediening van electro-aversieve stimulatie vallen, vaak zeer moeilijk, zo niet onmogelijk. Het gebruik van electro-aversieve middelen wordt niet zelden ten onrechte geïdentificeerd met electro-convulsie therapie in de psychiatrische praktijk. Men dient er van uit te gaan dat aversieve middelen slechts bij die gedragingen toegepast mogen worden, die ernstig gevaar opleveren voor de persoon in kwestie of voor zijn directe omgeving en waarbij andere middelen gefaald hebben. Dit mag alleen door of onder toezicht van een ter zake deskundige. De zwakzinnigen die zichzelf blijvende verwondingen (blindheid, misvormde oren en schedel) toebrengen, getuigen er echter van dat men dikwijls te laat naar de juiste middelen grijpt".

"Verder dient de therapeut degenen die belast zijn met de directe uitvoering van de behandeling (z-verplegenden) intensief te begeleiden. Dit vooral wanneer het de toediening van aversieve middelen betreft: vele z-verplegenden zijn emotioneel niet in staat in een dergelijke therapie te participeren. Deze begeleiding heeft voor een belangrijk deel betrekking op het motiveren van de groepsleiding om de noodzakelijke aanpak uit te blijven voeren".

Het te onderzoeken stelsel S heeft betrekking op een groep z-verplegenden aan een zwakzinnigeninternaat, waar gevallen van zelfverwondend gedrag worden aangetroffen en waar vanaf een bepaald moment een meer systematische begeleiding van de z-verplegenden zal worden geïntroduceerd. Het begeleidingsprogramma is mede gericht op verandering van de attitudes

t.o.v. zelfverwondend gedrag en zijn behandelingsmethoden om daardoor een meer effectieve behandeling mogelijk te maken. Getracht zal worden attitude-schalen of andere attitude-indicatoren te ontwikkelen, waarmee op meerdere tijdstippen t voorafgaand aan en tijdens de uitvoering van het begeleidingsprogramma bij ieder van de z-verplegenden de verschillende attitudes gemeten kunnen worden. Voor de micro-eenheden (z-verplegenden)  $\alpha$ ,  $\beta$ , ... met corresponderende macro-eenheid (groep als totaliteit)  $\alpha'$  in macro-model S' wordt een relationele structuur aangenomen. Gedacht wordt aan een vriendschapsstructuur of communicatie-structuur met speciale nadruk op de vraag, wie zich door wie in zijn attitudes laat beïnvloeden. Getracht zal worden een sociometrische procedure te ontwikkelen om deze structuur te onderzoeken en middels gerichte pijlen in een sociogram vast te leggen. Wellicht is het mogelijk naar attitude te differentiëren, zodat per attitude een afzonderlijk sociogram ter beschikking komt.

In zijn artikel "The mathematical study of change" bespreekt Coleman verschillende modellen ter verklaring van attitude-verandering, waarbij van contextuele variabelen gebruik wordt gemaakt (14). "An attitude is usually subject to the regression effect: the more extreme it is, the more likely it is to move to the center. But in the context of others, the more extreme they are, the more extreme it will tend to be" (15). Coleman maakt gebruik van differentiaal-vergelijkingen. Hier zal in eerste instantie van differentie-vergelijkingen gebruik worden gemaakt, waarin de differentie  $\Delta x^y(t) = x^y(t+1) - x^y(t)$ , d.w.z. de verandering in de attitude van micro-eenheid y tussen tijdstip t + 1 en tijdstip t, afhankelijke variabele is. Een eerste mogelijkheid is, dat voor iedere micro-eenheid y =  $\alpha$ ,  $\beta$ , ... wordt gespecificeerd

$$\Delta x^y(t) = b_0 + b_1 u_1^y(t) + a x^y(t)$$

met

$$u_1^y(t) = [\sum x^y(t)]/N$$

De attitude-verandering bij y wordt niet slechts afhankelijk gesteld van de attitude  $x^y(t)$  zelf, maar tevens van de gemiddelde attitude, berekend

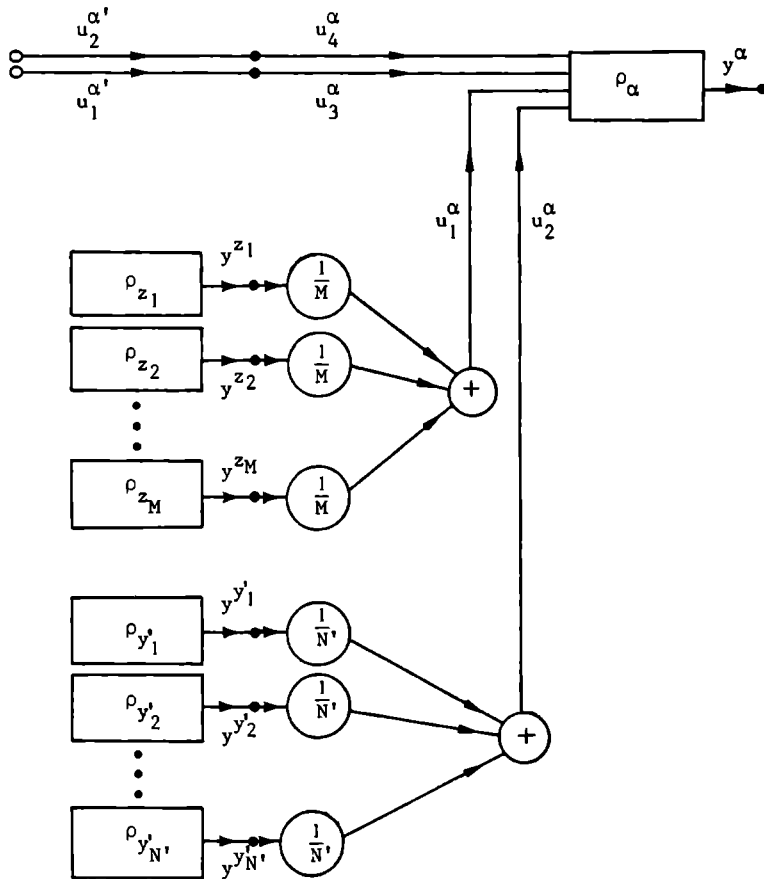


Fig. 4.3.1: Een deekoppeling in koppeling  $\mathcal{S}$  van de micro-verklaringsrelaties, gedefinieerd door 4.3.1;  $M$  is het aantal micro-eenheden, waardoor  $\alpha$  volgens het sociogram direct wordt beïnvloed;  $N' = N - M - 1$  het aantal resterende micro-eenheden.

over alle  $N$  micro-eenheden  $y' = \alpha, \beta, \dots$  in de groep. Een andere mogelijkheid is

$$u_1^y(t) = [\sum x^{y'}(t) - x^y(t)]/N' \quad \text{met } N' = N - 1$$

waarbij het gemiddelde slechts wordt berekend over de  $N' = N - 1$  "others in the group" (16). Ook is het aantrekkelijk het gemiddelde te berekenen over slechts die  $M$  groepsleden  $z$ , waardoor  $y$  volgens het sociogram direct beïnvloed wordt

$$u_1^y(t) = [\sum x^z(t)]/M$$

In 4.3.1 vindt men een aangepaste combinatie van deze mogelijkheden

$$4.3.1 \quad \Delta x^y(t) = b_0 + b_1 u_1^y(t) + b_2 u_2^y(t) + b_3 u_3^y(t) + b_4 u_4^y(t) + a x^y(t)$$

$$\begin{aligned} \text{met } u_1^y(t) &= [\sum x^z(t)]/M \\ u_2^y(t) &= [\sum x^{y'}(t) - \sum x^z(t) - x^y(t)]/N' \quad \text{met } N' = N - M - 1 \\ u_3^y(t) &= 0, 1 \\ u_4^y(t) &= t \end{aligned}$$

De attitude-verandering wordt afhankelijk gesteld van de attitude  $x^y(t)$  zelf, van de gemiddelde attitude over de  $M$  direct-beïnvloedende groepsleden en van de gemiddelde attitude over de  $N' = N - M - 1$  resterende groepsleden, terwijl bovendien plaats is ingeruimd voor een effect van het begeleidingsprogramma middels dummy-variabele  $u_3^y(t)$ , 0 voorafgaand aan en 1 met ingang van het begeleidingsprogramma, en van de tijd  $t$  middels  $u_4^y(t)$ .

Het zal duidelijk zijn, dat 4.3.1 voor ieder van de micro-eenheden  $y$  een model  $[A, B, C, D]$  definieert met  $A = a$ ,  $B = [b_0 \ b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4]$ ,  $C = 1$  en  $D = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ . Gebruik zal worden gemaakt van de stochastische versie van 4.3.1 en het daardoor gedefinieerde stochastisch model  $[A, B, C, D]$ , waarvoor OLS schattingen  $\hat{A} = \hat{a}$  en  $\hat{B} = [\hat{b}_0 \ \hat{b}_1 \ \hat{b}_2 \ \hat{b}_3 \ \hat{b}_4]$  oplevert. Afhankelijk van de aard van het data-bestand worden de schattingen verkregen in zuiver tijdserie-onderzoek, gemengd tijdserie-onderzoek of verdeeld

onderzoek (zie de laatste alinea van paragraaf 2.3). Worden over bijv. minstens één jaar met een frequentie van bijv. eens per week of vaker de attitude-data verzameld bij ieder van de micro-eenheden  $y$ , dan zouden de data wellicht voldoende zijn om in zuiver tijdserie-onderzoek per eenheid  $y$  redelijk nauwkeurige schattingen  $\hat{A}$  en  $\hat{B}$  te verkrijgen. Iedere eenheid  $y$  zou dus zijn eigen data-matrix hebben en op basis daarvan eigen schattingen  $\hat{A}$  en  $\hat{B}$ . Het voordeel daarbij is, dat niet hoeft te worden uitgegaan van de assumptie van een gelijkkluidend model  $[A,B,C,D]$  voor ieder van de micro-eenheden  $y$  zoals noodzakelijk zou zijn in gemengd tijdserie-onderzoek en in verdeeld onderzoek. In gemengd tijdserie-onderzoek en verdeeld onderzoek worden alle data in één data-matrix opgenomen, op basis waarvan slechts één schatting wordt uitgevoerd voor alle  $y$  gezamenlijk. In verdeeld onderzoek vult iedere  $y$  slechts één rij van de data-matrix en worden voor iedere  $y$  dus slechts op twee opeenvolgende tijdstippen attitude-data verzameld. Voorkomen moet dan worden, dat deze beide tijdstippen voor alle eenheden  $y$  dezelfde zijn, aangezien dit moeilijkheden geeft bij de schatting van  $b_4$  vanwege variantie 0 in de tijdsvariabele  $t$ . Ook bij schatting van  $b_3$  zou dit moeilijkheden geven, indien het begeleidingsprogramma voor alle eenheden  $y$  op hetzelfde tijdstip wordt geïntroduceerd en dus de dummy-variabele variantie 0 zou hebben. Bij de nu volgende constructie van systemisch verklaringsmodel  $R(S)$  wordt inderdaad van een gelijktijdige introductie van het begeleidingsprogramma uitgegaan. Dat hoeft echter zelfs in verdeeld onderzoek geen moeilijkheden op te leveren, indien de onderzochte paren tijdstippen voor de eenheden  $y$  verschillen.

De modellen  $[A,B,C,D]$  voor de micro-eenheden  $y = \alpha, \beta, \dots$  definiëren toestand-ruimte-modellen met response-functies  $\rho_y$ , die aan de hand van het sociogram aaneen worden gekoppeld. Zij definiëren tezamen met de koppelingsrelaties het mathematisch systeem  $\mathcal{S}$  in systemisch verklaringsmodel  $R(S)$ . De totale  $\mathcal{S}$  is moeilijk grafisch weer te geven, maar wordt opgebouwd uit dekkoppelingen van iedere response-functie aan alle overige response-functies. In fig. 4.3.1 is dit geïllustreerd m.b.t.  $\rho_\alpha$ . Vanwege  $C = 1$  en  $D = 0$  geldt  $y^\alpha(t) = x^\alpha(t)$ , d.w.z. toestand-identieke output. Het sociogram bepaalt middels de  $M$  direct-beïnvloedende micro-eenheden  $z_1, \dots, z_M$ , welke de outputs  $y^{z_1}, \dots, y^{z_M}$  zijn, die worden gemiddeld tot  $u_1^\alpha$ , en daardoor tevens de outputs  $y^{y_1}, \dots, y^{y_{N'}}$  van de  $N' = N - M - 1$

resterende micro-eenheden  $y'_1, \dots, y'_N$ , die worden gemiddeld tot  $u_2^\alpha$ . In fig. 4.3.1 zijn tevens de beide macro-input-variabelen  $u_1^{\alpha'} = u_3^\alpha = u_3^\beta = \dots$  en  $u_2^{\alpha'} = u_4^\alpha = u_4^\beta = \dots$  expliciet vermeld. Alle andere variabelen zijn output-variabelen op macro-niveau. Aangezien de interesse zal uitgaan naar het effect van macro-input  $u^{\alpha'}$ , bestaande uit  $u_1^{\alpha'}$  met daarin de aanwezigheid van het begeleidingsprogramma en  $u_2^{\alpha'}$  met daarin de tijd, op de gemiddelde attitude  $[\sum_N^y(t)]/N$  op ieder tijdstip  $t$  over alle  $N$  groepsleden  $y$ , wordt de hierdoor gedefinieerde additionele macro-output-variabele middels koppelingsrelaties aan § toegevoegd.

De begintoestand  $x^{\alpha'}(t_0)$  op macro-niveau bestaat uit de  $N$  begintoestanden (attitudes)  $x^\alpha(t_0), x^\beta(t), \dots$  op micro-niveau. Vanwege de toestand-identieke output op micro-niveau is per definitie voldaan aan de in paragraaf 3.5 genoemde bepaaldheidseisen: block-recursieve ordening van uitlees-blocks en block-diagonale  $\Sigma_\delta$ . Met behulp van eveneens in paragraaf 3.5 besproken procedures kan de geschatte macro-verklaringsrelatie  $\hat{\rho}_\alpha$ , uit de geschatte micro-verklaringsrelaties  $\hat{\rho}_\alpha, \hat{\rho}_\beta, \dots$  en de koppelingsrelaties in § worden afgeleid. Op basis van  $x^{\alpha'}(t_0)$  en een vooraf gespecificeerd input-segment  $u^{\alpha'}_{[t_0, t_1]}$  kunnen vervolgens de attitudes en hun gemiddelden voor ieder tijdstip  $t \in [t_0, t_1]$  worden geprediceerd. Aangezien de micro-input-variabelen  $u_1^\alpha, u_1^\beta, \dots$  en  $u_2^\alpha, u_2^\beta, \dots$  op macro-niveau zijn overgegaan in output-variabelen worden hun waarden door het macro-model  $[A, B, C, D]$  zelf gegenereerd en hoeven dus niet van te voren te worden gespecificeerd zoals bij de predictie aan de hand van een geïsoleerd micro-model  $[A, B, C, D]$  noodzakelijk zou zijn. Een belangrijke toepassingsmogelijkheid van het macro-model bestaat hierin, dat de predicties op basis van wel en geen begeleidingsprogramma en van verschillende koppelingen (vriendschaps-, communicatie-structuren) met elkaar worden vergeleken.

#### Varianten, mogelijke uitkomsten en uitbreidingen

De hier gekozen benadering van attitude-veranderingsprocessen vertoont sterke overeenkomst met de aanpak, die Michael Taylor volgt in zijn artikel: "Towards a mathematical theory of influence and attitude change" en die is gebaseerd op het werk van Abelson en via deze op de



sociale beïnvloedingstheorie van French en Harary (17). Ook Taylor betreft zowel onderlinge beïnvloeding in een groep personen als beïnvloeding van buiten de groep in de analyse. De complexiteitsgraad, die daarmee gepaard kan gaan, vereist naar zijn mening een mathematische behandeling: "We shall not pause to defend our choice of approach (mathematical). The pattern of change for only two interacting individuals has been found to be complicated enough; when each individual's attitude is changing as a result of simultaneous interaction with many other individuals and exposure to mass media, and when, for example, all the rates of interaction and exposure are varying, there seems to be no doubt that the only possible approach is a mathematical one" (18).

Taylor maakt gebruik van differentiaal-vergelijkingen. De differentie-modellen [A,B,C,D] voor de micro-eenheden  $y = \alpha, \beta, \dots$  worden bij hem dus vervangen door differentiële modellen. Hij beschouwt verder alleen het deterministische geval zonder op concrete onderzoeksprocedures in te gaan. In de praktijk zal men echter een beroep moeten doen op stochastische modellen en zullen deze geschat moeten worden. Schattingen van stochastische differentiële modellen [A,B,C,D] zou men kunnen verkrijgen volgens procedures in paragraaf 3.4, waarbij de vergelijkingen 4.3.1 na toevoeging van additionele groeivariabelen  $[u_1^y(t+1) - u_1^y(t)]$  en  $[u_2^y(t+1) - u_2^y(t)]$  als hulpvergelijkingen optreden.

Ook Taylor gaat uit van toestand-identieke input:  $C = 1$  en  $D = 0$  voor alle micro-eenheden  $y$ . Zoals besproken in paragraaf 3.5 neemt macro-differentie-vergelijking c.q. -differentiaal-vergelijking dan een relatief eenvoudige vorm aan met  $N$  deelvergelijkingen, die men rechtstreeks uit het block-diagram voor koppeling § kan aflezen (zie fig. 4.3.1):

$$4.3.2 \quad \begin{aligned} x^y(t) = & b_0 + b_1 \frac{1}{M} x^{z1}(t) + \dots + b_1 \frac{1}{M} x^{zM} + \\ & b_2 \frac{1}{N} x^{y'1}(t) + \dots + b_2 \frac{1}{N} x^{y'N}(t) + b_3 u_1^{\alpha'}(t) + b_4 u_2^{\alpha'}(t) + \\ & ax^y(t) \end{aligned}$$

Belangrijker dan de vervanging van differentie- door differentiaal-vergelijkingen is, dat bij Taylor de  $N - 1$  scalars in fig. 4.3.1 voor ieder van de  $N - 1$  paren  $\langle y, z_j \rangle, \langle y, y'_j \rangle$  een verschillende waarde kunnen aannemen en dus niet slechts het tweetal waarden  $\frac{1}{M}$  of  $\frac{1}{N}$ . Het gevolg is, dat de elementen  $a_{ij}$  in  $N \times N$ -matrix  $A$  van macro-model [A,B,C,D] in plaats

van 3 verschillende waarden ( $b_1 \frac{1}{M}$ ,  $b_2 \frac{1}{N}$ , of  $a$ ) per rij en  $3N$  verschillende waarden over de hele matrix,  $N$  verschillende waarden per rij en  $N^2$  verschillende waarden over de hele matrix kunnen aannemen. Dit betekent in konkreet onderzoek, dat voor ieder paar niet slechts de aan- of afwezigheid van vriendschap (communicatie) moet worden vastgesteld maar tevens exakt de mate waarin. Een oplossing voor dit probleem wordt in de praktijk ook niet geboden door de  $a_{ij}$  ("rates of influence") zelf als te schatten elementen in de  $N$  micro-vergelijkingen op te nemen. Er zouden dan immers voor ieder van de  $N$  micro-eenheden  $N + 3$  elementen geschat moeten worden, hetgeen in verdeeld onderzoek met slechts  $N$  rijen in de data-matrix in elk geval onmogelijk is en bij niet al te kleine groeps-grootte  $N$  ook in tijdserie-onderzoek op moeilijkheden zal stuiten. Het lijkt daarom te prefereren om de schattingen te beperken tot de 6 elementen  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ ,  $b_4$ ,  $a$  per micro-eenheid  $y$ ; totaal in verdeeld onderzoek met één algemeen micro-model [A,B,C,D] dus 6 elementen en in tijdserie-onderzoek met  $N$  afzonderlijke micro-modellen [A,B,C,D]  $6N$  elementen.

De uitleesvergelijking van het macro-model [A,B,C,D]

$$y^{\alpha'}(t) = \begin{bmatrix} x^{\alpha}(t) \\ x^{\beta}(t) \\ \vdots \\ \frac{N}{[\sum x^{\gamma}(t)]/N} \end{bmatrix} \quad \text{met } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \dots & \frac{1}{N} \end{bmatrix} \quad \text{en } D = 0$$

geeft de attitude-ontwikkeling bij ieder van de  $N$  groepsleden en bovendien de gemiddelde attitude-ontwikkeling.  $x^{\alpha'}$ (t) en  $y^{\alpha'}$ (t) en hun schattingen  $\hat{x}^{\alpha'}$ (t) en  $\hat{y}^{\alpha'}$ (t) worden berekend en geanalyseerd volgens de procedures in paragraaf 3.4. Taylor richt zich in navolging van Abelson vooral op de vraag, of de attitudes tenderen naar een stabiel evenwicht en of daarbij "universal agreement" tussen de groepsleden resulteert, d.w.z.  $x^{\alpha}(t) = x^{\beta}(t) = \dots = [\sum x^{\gamma}(t)]/N$  voor  $t \rightarrow \infty$ . Zij gaan uit van een viertal hypothesen, waarvan de eerste drie luiden

$$\begin{aligned} a_{ij} &> 0 \\ b_{ik} &> 0 \\ a_{ii} &\leq - \sum_{j(\neq i)=1}^N a_{ij}, \quad \text{t.w. } a_{ii} = - \left[ \sum_{j(\neq i)=1}^N a_{ij} + \sum_{k=1}^r b_{ik} \right] \end{aligned}$$

Deze hypothesen, die uiteraard aan de hand van de schattingen  $\hat{a}_{ij}$  en  $\hat{b}_{ij}$  getoetst dienen te worden, zijn gebaseerd op de veronderstelling, dat attitude-wijzigingen uitsluitend plaatsvinden als gevolg van attitude-discrepanties  $x^{yj}(t) - x^{yi}(t)$  en  $u_k^{\alpha'}(t) - x^{yi}(t)$  t.o.v. andere groepsleden en externe beïnvloedingsbronnen. De wijzigingen zouden in sterkte afhankelijk zijn van de "rates of influence"  $a_{ij}$  en  $b_{ik}$  en zich steeds bewegen in de richting van  $x^{yj}(t)$  en  $u_j^{\alpha'}(t)$ :  $a_{ij}(x^{yj}(t) - x^{yi}(t))$  en  $b_{ik}(u_k^{\alpha'}(t) - x^{yi}(t))$ , zodat  $a_{ij}$  en  $b_{ik}$  niet-negatieve waarden moeten aannemen. De vierde hypothese, die eveneens empirisch toetsbaar is maar in de praktijk zelden moeilijkheden zal opleveren, stelt de aanwezigheid van minstens één van beide volgende punten: 1) er zijn één of meer rijen in B ongelijk aan 0, wat bij 0-rijen in A minstens de bijbehorende rijen in B zijn, 2) matrix A is compact, d.w.z. het sociogram laat minstens één persoon zien, die direct of indirect alle andere personen beïnvloedt.

Onder de hypothesen kan voor de eigenwaarden van A worden bewezen, dat zij ofwel 1) alle  $\sigma_i < 0$  hebben ofwel 2) alle  $\sigma_i \leq 0$  hebben met precies één  $\lambda_i = \sigma_i = 0$ . In geval 1) is het macro-model volgens 3.2.47 asymptotisch stabiel met  $x^{\alpha'}(t) = 0$  asymptotisch stabiele evenwichtstoestand en zou onder zero-input ( $u^{\alpha'} = 0$ : geen externe beïnvloeding) dus "universal agreement" resulteren voor  $x^{\alpha'}(t)$  en  $y^{\alpha'}(t)$ :  $x^{\alpha'}(t) = x^{\beta'}(t) = \dots = [\sum_N x^y(t)]/N = 0$  voor  $t \rightarrow \infty$ . Uitgaande van constante externe beïnvloeding ( $u^{\alpha'}(t) = c$  voor  $t \geq t_0$ ) zou eveneens een stabiel evenwicht resulteren maar in het algemeen niet op het punt 0 en evenmin met "universal agreement", hetgeen duidelijk zal zijn aan de hand van  $x^{\alpha'}(t) = A^{-1}Bc$  en  $y^{\alpha'}(t) = Cc = -CA^{-1}Bc$  voor  $t \rightarrow \infty$  (zie 3.4.17). In geval 2) is het macro-model volgens 3.2.49 stabiel i.s.L. en heeft eigenvector  $b_i$  bij eigenwaarde  $\lambda_i = 0$  alle elementen gelijk. De betrokken karakteristieke excitatie-beweging  $m_i^0$  in vrije beweging  $x^{\alpha'}(t)$  is de enige, die niet naar 0 convergeert (zie 3.2.37 en tabel 3.2.1), zodat onder zero-input voor  $t \rightarrow \infty$  zou gelden  $x^{\alpha'}(t) = m_i^0(t - t_0) = \alpha_i(t_0) \cdot e^{\lambda_i \cdot (t - t_0)} b_i = \alpha_i(t_0) b_i$  (zie 3.2.42). De resulterende evenwichtstoestand, die via excitatie  $\alpha_i(t_0) = b_i^* x^{\alpha'}(t_0)$  uitsluitend van de begintoestand  $x^{\alpha'}(t_0)$  afhankelijk is, zou nu voor  $x^{\alpha'}(t_0) \neq 0$  dus ongelijk aan 0 zijn maar wel "universal agreement" inhouden. Onder constante externe beïnvloeding zou het uiteindelijke evenwicht, dat overigens vanwege het ontbreken van inverse  $A^{-1}$  niet meer zo

gemakkelijk is te berekenen, weer geen "universal agreement" hoeven in te houden. Anders dan Abelson dacht is "universal agreement" echter ook onder constante externe beïnvloeding noch in geval 1) noch in geval 2) uitgesloten, zelfs niet indien de constanten  $c_1, c_2, \dots$  in  $c$  ongelijk zijn.

Taylor beschouwt verder nog een tweetal niet-lineaire modellen. Deze vervangen [A,B,C,D] maar worden door hem bestudeerd aan de hand van gelineariseerde modellen [A\*,B\*,C\*,D\*] rond evenwichtsooplossing:  $u^{\alpha' * } = 0$  en  $x^{\alpha' * } = c'$  voor willekeurig evenwicht  $c'$  (zie de alinea voorafgaand aan 3.2.4). De niet-lineaire modellen ruimen plaats in voor de tendens bij personen met extreme attitudes om zich verhoudingsgewijs sterker tegen attitude-wijziging te verzetten. De toestand-differentiaal-vergelijkingen van het oorspronkelijke model worden in het eerste niet-lineaire model als volgt uitgebreid met  $(U^2 - [x^{y_i}(t)]^2)$

$$4.3.3 \quad \dot{x}^{y_i}(t) = (U^2 - [x^{y_i}(t)]^2) \left( \sum_{j(\neq i)=1}^N a_{ij} x^{y_j}(t) - \left[ \sum_{j(\neq i)=1}^N a_{ij} + \sum_{k=1}^r b_{ik} \right] x^{y_i}(t) + \sum_{k=1}^r b_{ik} u_k^{\alpha'}(t) \right)$$

$(U^2 - [x^{y_i}(t)]^2)$  is een maat voor extremiteit: hoe extremer de attitude  $x^{y_i}(t)$  van groepslid  $y_i$ , hoe kleiner  $(U^2 - [x^{y_i}(t)]^2)$  en hoe kleiner dus ook de attitude-wijziging.  $U$  is de bovengrens van de attitude-schaal en aangezien Taylor uitgaat van (getransformeerde) attitude-scores op een schaal  $\leq 1$  en  $\geq 1$ , neemt hij  $U^2 = 1$ . Het gelineariseerde model [A\*,B\*,C\*,D\*] wordt gedefinieerd in termen van de afwijkingen  $\underline{u}^{\alpha'}(t) = \Delta u^{\alpha'}(t) = u^{\alpha'}(t) - u^{\alpha' *}(t) = u^{\alpha'}(t)$  en  $\underline{x}^{\alpha'}(t) = \Delta x^{\alpha'}(t) = x^{\alpha'}(t) - x^{\alpha' *}(t) = x^{\alpha'}(t) - c'$  t.o.v. evenwichtsooplossing \*, zodat

$$4.3.4 \quad \underline{x}^{\alpha'}(t) = A^* \underline{x}^{\alpha'}(t) + B^* u^{\alpha'}(t)$$

Na substitutie  $U^2 = 1$  en  $x^{y_i}(t) = \underline{x}^{y_i}(t) + c'_i$  in 4.3.3 kan men de resulterende vorm splitsen in een lineair en niet-lineair gedeelte. Het lineair gedeelte luidt (19):

$$\begin{aligned}
 4.3.5 \quad \underline{x}^y i(t) &= (1 - c_i'^2) \sum_{j(\neq i)=1}^N a_{ij} \underline{x}^y i(t) \\
 &- [(1 - 3c_i'^2) \sum_{j(\neq i)=1}^N a_{ij} + 2c_i' \sum_{j(\neq i)=1}^N a_{ij} c_j' + (1 - c_i'^2) \sum_{k=1}^r b_{ik}] \underline{x}^y i(t) \\
 &+ (1 - c_i'^2) \sum_{k=1}^r b_{ik} u_k^{\alpha'}(t)
 \end{aligned}$$

zodat 4.3.4 in het gelineariseerde model rond evenwichtsooplossing \* de volgende coëfficiënten geeft in termen van die van het niet-lineaire model

$$a_{ij}^* = (1 - c_i'^2) a_{ij}$$

$$a_{ii}^* = -[(1 - 3c_i'^2) \sum_{j(\neq i)=1}^N a_{ij} + 2c_i' \sum_{j(\neq i)=1}^N a_{ij} c_j' + (1 - c_i'^2) \sum_{k=1}^r b_{ik}]$$

$$b_{ik}^* = (1 - c_i'^2) b_{ik}$$

Taylor bewijst vervolgens, dat de lineaire gedeelten in 4.3.4 de niet-lineaire gedeelten domineren voor willekeurige  $c'$ , zodat aan de benaderingsvoorwaarde is voldaan en het stabiliteitskarakter van willekeurige  $x^{\alpha'}$  =  $c'$  onder  $u^{\alpha'} = 0$  in het niet-lineaire model bestudeerd kunnen worden via  $\underline{x}^{\alpha'} = 0$  onder  $\underline{u}^{\alpha'} = u^{\alpha'} = 0$  in het gelineariseerde model.

Stel  $c_i' = k$  voor alle  $i$  ("universal agreement").  $A^*$  heeft dan vanwege  $-1 \leq c_i' \leq 1$  alle  $a_{ij}^* \geq 0$  en  $a_{ii}^* \leq 0$

$$a_{ij}^* = (1 - k^2) a_{ij}; \quad a_{ii}^* = -(1 - k^2) \left[ \sum_{j(\neq i)=1}^N a_{ij} + \sum_{k=1}^r b_{ik} \right]; \quad b_{ik}^* = (1 - k^2) b_{ik}$$

en is dus van dezelfde vorm als  $A$ , zodat evenwichtstoestand  $c'$  onder  $u^{\alpha'} = 0$  ofwel 1) asymptotisch stabiel is ofwel 2) stabiel i.s.L. Een

analoge analyse voor andere evenwichtstoestanden  $c'$  onder  $u^{\alpha'} = 0$  (geen "universal agreement") laat zien, dat deze behalve stabiel ook instabiel kunnen zijn in het niet-lineaire model. Onder iedere input  $u^{\alpha'}$  (bijv. constante externe beïnvloeding  $u^{\alpha'} = c$ ) kan men aan de hand van het ge-lineariseerde model de toestand  $x^{\alpha'}(t)$  berekenen via  $x^{\alpha'}(t) = c' + \underline{x}^{\alpha'}(t)$ . Daarbij kiest men evenals bij schatting van  $A^*$  en  $B^*$  een willekeurige evenwichtstoestand  $c'$  onder  $u^{\alpha'} = 0$ , bijv.  $c' = 0$ .

Een uitbreiding van de lineaire modellen  $[A, B, C, D]$  en corresponderende uitbreiding van macro-model  $[A, B, C, D]$  is mogelijk door met verschillende attitudes tegelijk rekening te houden. Het is immers aannemelijk, dat bijv. de attitude  $x_1^y(t)$  t.o.v. zelfverwondend gedrag en  $x_2^y(t)$  t.o.v. electro-aversieve stimulatie elkaar ook onderling beïnvloeden. In plaats van 4.3.1 zou men 4.3.6 kunnen kiezen

$$4.3.6 \quad x_1^y(t+1) = \delta_{12} x_2^y(t+1) + \gamma_{10} + \gamma_{11} u_{11}^y(t) + \gamma_{12} u_{12}^y(t) + \gamma_{13} u_{13}^y(t) + \gamma_{14} u_{14}^y(t) + \gamma_{15} x_1^y(t)$$

$$x_2^y(t+1) = \delta_{21} x_1^y(t+1) + \gamma_{20} + \gamma_{21} u_{21}^y(t) + \gamma_{22} u_{22}^y(t) + \gamma_{23} u_{23}^y(t) + \gamma_{24} u_{24}^y(t) + \gamma_{25} x_2^y(t)$$

4.3.6 definieert een interdependent structureel model. Van de stochastische versie kunnen de matrices  $\Delta$  en  $\Gamma$  middels op interdependentie afgestemde procedures, bijv. 2SLS of 3SLS zoals besproken in paragraaf 3.3, worden geschat. Na afleiding van de geschatte gereduceerde vorm  $\hat{\Pi} = -\hat{\Delta}^{-1} \hat{\Gamma}$  worden vervolgens  $\hat{A} = \hat{\Delta} - I$  en  $\hat{B}$  volgens  $\hat{\Pi} = [\hat{A} \quad \hat{B}]$  afgeleid. Hiermee is tevens micro-model  $[A, B, C, D]$  met  $C = I$  en  $D = 0$  geschat. Ieder van de micro-modellen  $[A, B, C, D]$  voor ieder van de micro-eenheden  $y = \alpha, \beta, \dots$  geeft nu een response-functie met twee output-variabelen, voor bijv.  $\alpha$ :  $y_1^\alpha$  en  $y_2^\alpha$  met  $y_1^\alpha(t) = x_1^\alpha(t)$  en  $y_2^\alpha(t) = x_2^\alpha(t)$ . De koppeling ontstaat door de output-variabelen  $y_1^\alpha, y_1^\beta, \dots$  op de wijze van fig.4.3.1 en in overeenstemming met het sociogram telkens te middelen in  $u_{11}^y$  (over de betrokken  $M$  micro-eenheden) of  $u_{12}^y$  (over de resterende  $N' = N - M - 1$

micro-eenheden) en analoog de output-variabelen  $y_2^\alpha$ ,  $y_2^\beta$ , ... in  $u_{21}^y$  of  $u_{22}^y$ . Een tamelijk ingewikkelde  $\mathcal{S}$  kan resulteren, indien voor de verschillende attitudes verschillende sociogrammen worden gebruikt. Uit  $\mathcal{S}$  wordt ten slotte weer volgens de procedures in paragraaf 3.5 de schatting van het macro-model [A,B,C,D] en de macro-verklaringsrelatie  $\rho_\alpha$ , afgeleid, op basis waarvan predicties kunnen worden uitgevoerd m.b.t. beide attitudes.

Indien ieder van de attitudes in het structurele model middels meerdere meet-procedures (bijv. attitude-schalen) is gemeten, kan men die attitudes ten slotte als latente variabelen beschouwen en onderscheiden van de gemeten geobserveerde variabelen. Het model kan dan worden gespecificeerd als een LISREL-model - zie het eind van paragraaf 3.3. Uit het LISREL-model wordt micro-model [A,B,C,D] met  $C \neq I$  en  $D = 0$  afgeleid, terwijl het LISREL-programma de schattingen  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  en  $\hat{C}$  geeft. Per (geobserveerde) output-variabele worden de koppelingsrelaties gekozen zoals in fig. 4.3.1, waaruit  $\mathcal{S}$  en vervolgens weer het macro-model resulteert.

## Appendix A: Computerprocedure in SPEAKEASY<sup>1)</sup>

### 1. LSNR(Least Squares No Restrictions)<sup>2)</sup>

```
N=71          aantal rijen data-matrix
P=3          aantal current-endogene variabelen
K=9          aantal gepredetermineerde variabelen
Y=KEPT(YA)   overname onder naam Y van in biblio-
              theek opgeborgen current-endogene
              N×P-matrix YA3)
Z=KEPT(ZA)   overname onder naam Z van in biblio-
              theek opgeborgen gepredetermineerde
              N×K-matrix ZA4)

I1=UMAT(N)
I2=RØWMAT(DIAGELS(I1))
A=I1-((TRANSPØSE(I2)*I2)/N)
MY=(I2/N)*Y
MZ=(I2/N)*Z

FREE I1,I2
SY=TRANSPØSE(Y)*A*Y/(N-1)
SZ=TRANSPØSE(Z)*A*Z/(N-1)

SZ(K,K)=SQRT(SZ(K,K)*SZ(K,K))
SYZ=TRANSPØSE(Y)*A*Z/(N-1)

FREE A
SDY=SQRT(DIAGELS(SY))
SDZ=SQRT(DIAGELS(SZ))

SY,Y,MY,SDY,Z,MZ,SDZ
SDY=DIAGMAT(:SDY)
SDZ=DIAGMAT(:SDZ)
ISDY=INVERSE(SDY)
ISDZ=INVERSE(SDZ)
```

gemiddelden current-endogene variabelen  
gemiddelden gepredetermineerde variabelen  
variantie-covariantie-matrix current-endogene variabelen  
variantie-covariantie-matrix gepredetermineerde variabelen  
covariantie-matrix tussen current-endogene en gepredetermineerde variabelen  
standaard-deviaties current-endogene variabelen  
standaard-deviaties gepredetermineerde variabelen

- 1) Zie voor SPEAKEASY: Cohen and Pieper (1976). De onderdelen 1 t/m 3 dienen aaneengesloten te worden uitgevoerd. De onderdelen 4 t/m 7 kunnen ook afzonderlijk worden uitgevoerd. Van de benodigde data wordt steeds aangenomen, dat zij middels statements van de vorm KEEP XX AS YY in een private bibliotheek zijn opgeborgen: XX het opgeborgen object en YY de naam waaronder het is opgeborgen.
- 2) De in de onderdelen 1 t/m 3 ter illustratie ingevulde waarden hebben betrekking op model I in paragraaf 4.1 en de schatting daarvan aan de hand van de data-matrix in appendix B.
- 3) Bij de schatting van model I in paragraaf 4.1 bestond YA uit de kolommen (1) t/m (3) van appendix B.
- 4) Bij de schatting van model I in paragraaf 4.1 bestond ZA uit de kolommen (4) t/m (12) van appendix B.



```

RY=ISDY*SY*ISDY
RZ=ISDZ*SZ*ISDZ

MMRZ=DIAGELS(UMAT(K)-INVERSE
(DIAGMAT(:DIAGELS(INVERSE(RZ))))))
MRZ=SQRT(SQRT(MMRZ*MMRZ))

RYZ=ISDY*SYZ*ISDZ

RY,RZ,MRZ,RYZ
FREE SY,SZ,ISDY,ISDZ,RY,RZ,MRZ,
RYZ,MMRZ
ZZI=INVERSE(TRANSPØSE(Z)*Z)
PI=TRANSPØSE(ZZI*TRANSPØSE(Z)*Y)
V=Y-Z*TRANSPØSE(PI)
SV=TRANSPØSE(V)*V/(N-K)

SF=SQRT(COLMAT(DIAGELS(SV))*
ROWMAT(DIAGELS(ZZI)))
PI,SF
PISTA=INVERSE(SDY)*PI*SDZ;PISTA
SV
SV=TRANSPØSE(V)*V/N;SV
MMRYZ=DIAGELS(UMAT(P)-((N/N-1)
(INVERSE(SDY*SDY)*SV)))
MRYZ=SQRT(MMRYZ)
MRYZ,MMRYZ
V
FREE ZZI,PI,V,SF

```

correlatie-matrix current-endogene variabelen  
correlatie-matrix gepredetermineerde variabelen  
R-waarden gepredetermineerde variabelen met de overige gepredetermineerde variabelen als predictoren  
correlatie-matrix tussen current-endogene en gepredetermineerde variabelen  
LSNR-schatter  $\hat{\Pi}$  (3.3.73)  
residuele matrix  $\hat{V}$  in 3.3.75  
residuele variantie-covariantie-matrix  $\hat{\Sigma}_v$  (3.3.75)  
standaardfouten bij  $\hat{\Pi}$   
 $\hat{\Pi}$  gestandaardiseerd  
 $\hat{V}$  met noemer N  
 $R^2$ -waarden  
R-waarden

## 2. 2SLS/OLS(Two Stage Least Squares/Ordinary Least Squares)

```

K1=8
K2=7
K3=8
K=K1+K2+K3
Y=TRANSPØSE(Y)
Z=TRANSPØSE(Z)
Y1=TRANSPØSE(Y(1))
Y2=TRANSPØSE(Y(2))
Y3=TRANSPØSE(Y(3))
W1=TRANSPØSE(MATRIX(K1,N:Y(2),Y(3),
Z(1),Z(5),Z(6),Z(7),Z(8),Z(9)))
W2=TRANSPØSE(MATRIX(K2,N:Y(3),
Z(2),Z(5),Z(6),Z(7),Z(8),Z(9)))
W3=TRANSPØSE(MATRIX(K3,N:Y(1),
Z(3),Z(4),Z(5),Z(6),Z(7),Z(8),
Z(9)))
ZET=TRANSPØSE(Z)*INVERSE(Z*
TRANSPØSE(Z))*Z

```

] aantal te schatten coëfficiënten in  
resp. structurele vergelijking 1,  
2, 3  
] vector met afhankelijke waarden voor  
resp. structurele vergelijking 1,  
2, 3  
] matrix met onafhankelijke waarden voor  
resp. structurele vergelijking 1,  
2, 3  
] wordt bij OLS vervangen door  
ZET=UMAT(N)

```
ZET1=INVERSE(TRANSPØSE(W1)*ZET*W1)
ZET2=INVERSE(TRANSPØSE(W2)*ZET*W2)
ZET3=INVERSE(TRANSPØSE(W3)*ZET*W3)
ZE1=ZET1*TRANSPØSE(W1)*ZET*Y1
ZE2=ZET2*TRANSPØSE(W2)*ZET*Y2
ZE3=ZET3*TRANSPØSE(W3)*ZET*Y3
```

2SLS-schatter  $\hat{\zeta}_j$  (3.3.69) voor resp.  
structurele vergelijking  $j=1,2,3$ ;  
gaat bij ZET=UMAT(N) over in de  
OLS-schatter

```
E1=Y1-W1*ZE1
E2=Y2-W2*ZE2
E3=Y3-W3*ZE3
E=TRANSPØSE(MATRIX(P,N:TRANSPØSE
(E1),TRANSPØSE(E2),TRANSPØSE
(E3)))
```

residuele matrix  $\hat{E}$  in 3.3.72

```
S=TRANSPØSE(E)*E/N
```

residuele variantie-covariantie-matrix  
 $\hat{\Sigma}$  (3.3.72)

```
MMRYW=DIAGELS(UMAT(P)-((N/N-1))*
(INVERSE(SDY*SDY)*S)))
```

R<sup>2</sup>-waarden

```
MRYW=SQRT(MMRYW)
```

R-waarden

```
VZE1=S(1,1)*ZET1
```

matrix  $\hat{\text{var}}(\hat{\zeta}_j)$  (3.3.70) voor resp.  
structurele vergelijking  $j=1,2,3$

```
VZE2=S(2,2)*ZET2
```

```
VZE3=S(3,3)*ZET3
```

```
SF1=SQRT(DIAGELS(VZE1))
```

```
SF2=SQRT(DIAGELS(VZE2))
```

```
SF3=SQRT(DIAGELS(VZE3))
```

standaardfouten bij  $\hat{\zeta}_j$  voor resp.  
structurele vergelijking  $j=1,2,3$

```
ZE1,SF1
```

```
ZE2,SF2
```

```
ZE3,SF3
```

```
S,MRYW,MMRYW,E
```

```
FREE E,MRYW,MMRYW
```

```
FREE Y1,E1,SF1
```

```
FREE Y2,E2,SF2
```

```
FREE Y3,E3,SF3
```

```
CØ21=S(2,1)*ZET2*TRANSPØSE(W2)*
ZET*W1*ZET1
```

matrix  $\hat{\text{cov}}(\hat{\zeta}_j, \hat{\zeta}_i)$  (3.3.71) voor resp.  
paren structurele vergelijkingen  
 $\langle j, j' \rangle = \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle$

```
CØ31=S(3,1)*ZET3*TRANSPØSE(W1)*
ZET*W1*ZET1
```

```
CØ32=S(3,2)*ZET3*TRANSPØSE(W2)*
ZET*W2*ZET2
```

```
FREE W1,ZET1
```

```
FREE W2,ZET2
```

```
FREE W3,ZET3
```

```
VZ1=MATRIX(K,K1:VZE1,CØ21,CØ31)
```

```
VZ2=MATRIX(K,K2:TRANSPØSE(CØ21),
VZE2,CØ32)
```

```
VZ3=MATRIX(K,K3:TRANSPØSE(CØ31),
TRANSPØSE(CØ32),VZE3)
```

```
FREE CØ21,CØ31,CØ32
```

```
VZE=MATRIX(K,K:TRANSPØSE(VZ1),
TRANSPØSE(VZ2),TRANSPØSE(VZ3))
```

$K \times K$ -matrix met matrices  $\hat{\text{var}}(\hat{\zeta}_j)$  en  
 $\hat{\text{cov}}(\hat{\zeta}_j, \hat{\zeta}_i)$  als deelmatrices

```
FREE VZ1,VZ2,VZ3
```

```
FREE S,ZET
```

```
Y=TRANSPØSE(Y)
```

```
Z=TRANSPØSE(Z)
```

## 3. REDUCED FORM

```

Q=9
R=P+Q
T=P*(P+Q)
Z1=-ZE1
Z2=-ZE2
Z3=-ZE3
DA1=MATRIX(1,P:1,Z1(1),Z1(2))
DA2=MATRIX(1,P:0,1,Z2(1))
DA3=MATRIX(1,P:Z3(1),0,1)

DA=MATRIX(P,P:DA1,DA2,DA3)
GA1=MATRIX(1,Q:Z1(3),0,0,0,Z1(4),
  Z1(5),Z1(6),Z1(7),Z1(8))
GA2=MATRIX(1,Q:0,Z2(2),0,0,Z2(3),
  Z2(4),Z2(5),Z2(6),Z2(7))
GA3=MATRIX(1,Q:0,0,Z3(2),Z3(3),
  Z3(4),Z3(5),Z3(6),Z3(7),Z3(8))
GA=MATRIX(P,Q:GA1,GA2,GA3)
FREE DA1,DA2,DA3
FREE GA1,GA2,GA3
DASTA=INVERSE(SDY)*DA*SDY
GASTA=INVERSE(SDY)*GA*SDZ
-DA
-GA
-DASTA
-GASTA
PI=- (INVERSE(DA))*GA;PI

PISTA=INVERSE(SDY)*PI*SDZ;PISTA
FREE GA,DASTA,GASTA
V=Y-Z*TRANSPØSE(PI);V
SV=TRANSPØSE(V)*V/N;SV

MMRYZ=DIAGELS(UMAT(P)-((N/(N-1))*
  (INVERSE(SDY*SDY)*SV)))
MRYZ=SQRT(MMRYZ)
MRYZ,MMRYZ
FREE Z,V,SV,MRYZ,MMRYZ
V=VZE
FREE VZE
M=MATRIX(1,K)
V1=MATRIX(R,K:M,V(1),V(2),V(3),M,
  M,M,V(4),V(5),V(6),V(7),V(8))
V2=MATRIX(R,K:M,M,V(9),M,V(10),M,
  M,V(11),V(12),V(13),V(14),V(15))
V3=MATRIX(R,K:V(16),M,M,M,V(17),
  V(18),V(19),V(20),V(21),V(22),
  V(23))
G=TRANSPØSE(MATRIX(T,K:V1,V2,V3))
FREE V,V1,V2,V3

```

aantal gepredetermineerde variabelen

definiëring van de rijen van  $\hat{\Delta}$  op basis van 2SLS/OLS-schatters  $\hat{\xi}_j'$  door tussenvoeging van waarden 0 en van waarden 1 op de diagonaal

matrix  $\hat{\Delta}$  van de structurele vorm

definiëring van de rijen van  $\hat{\Gamma}$  op basis van 2SLS/OLS-schatters  $\hat{\xi}_j'$  door tussenvoeging van waarden 0

matrix  $\hat{\Gamma}$  van de structurele vorm $\hat{\Delta}$  gestandaardiseerd $\hat{\Gamma}$  gestandaardiseerdmatrix  $\hat{\Pi} = -\hat{\Delta}^{-1}\hat{\Gamma}$  van de gereduceerde vorm $\hat{\Pi}$  gestandaardiseerdresiduele matrix  $\hat{V}$ residuele variantie-covariantie-matrix  $\hat{\Sigma}$  (3.3.80) $R^2$ -waarden

R-waarden

uitbreiding  $K \times K$ -matrix  $V=VZE$  tot  $T \times T$ -matrix  $VA$ , t.w.  $v\hat{a}r(\hat{A})$  (3.3.77), door op te vereiste plaatsen 0-vector  $M$  tussen te voegen

```

M=MATRIX(1,T)
G1=MATRIX(R,T:M,G(1),G(2),G(3),M,
  M,M,G(4),G(5),G(6),G(7),G(8))
G2=MATRIX(R,T:M,M,G(9),M,G(10),M,
  M,G(11),G(12),G(13),G(14),G(15))
G3=MATRIX(R,T:G(16),M,M,M,M,G(17),
  G(18),G(19),G(20),G(21),G(22),
  G(23))
VA=MATRIX(T,T:G1,G2,G3)
FREE G,M,G1,G2,G3
B=MATRIX(R,Q:PI,UMAT(Q))          matrix  $\hat{B}$  in 3.3.79
B1=MATRIX(1,R*Q:B)
D1=MATRIX(P*P,1:TRANSPØSE(INVERSE
  (DA)))
D=D1*B1
FREE B,B1,D1
DE1=MATRIX(T,Q:D(1),D(P+1),
  D(2*P+1))
DE2=MATRIX(T,Q:D(2),D(P+2),
  D(2*P+2))
DE3=MATRIX(T,Q:D(3),D(P+3),
  D(2*P+3))
TDE1=TRANSPØSE(DE1)
FREE DE1
TDE2=TRANSPØSE(DE2)
FREE DE2
TDE3=TRANSPØSE(DE3)
FREE DE3
DE=TRANSPØSE(MATRIX(P*Q,T:TDE1,
  TDE2,TDE3))          matrix  $\hat{D}$  in 3.3.79
FREE TDE1
FREE TDE2
FREE TDE3
VPI=TRANSPØSE(DE)*VA*DE          matrix  $\hat{v}ar(\hat{\Pi})$  in 3.3.79
SF=SQRT(MATRIX(P,Q:RØWMAT(DIAGELS
  (VPI))))          standaardfouten bij  $\hat{\Pi}$ 
PI,SF,PISTA

```

4.  $\hat{A}$  en  $\hat{B}$  (differentie-model: AD en BD, differentieel model: ADD en BDD) op basis van  $\hat{A}_*$ ,  $\hat{B}_*$  en  $\hat{B}_{**}$  (AIS, BS, BSS),  $\delta$  (DELTA) en gewichten  $w_1$  en  $w_2$  ( $w_1$  en  $w_2$ )<sup>1)</sup>

```

NP=71          aantal rijen data-matrix
N=3           aantal rijen en kolommen A, aantal
              rijen B
R=6           aantal kolommen B

```

1) De ter illustratie ingevulde waarden hebben betrekking op schatting van differentieel model 4 in paragraaf 4.1, uitgaande van model 2 ( $\hat{A}_*$  uit  $\hat{A}$  van model 2,  $\hat{B}_*$  en  $\hat{B}_{**}$  uit  $\hat{B}$  van model 2),  $\delta$  (1 in het geval van differentieel model 4) en gewichten  $w_1$  en  $w_2$  (.90 en .10 in het geval van differentieel model 4).

```

AIS=KEPT(AIS)
BS=KEPT(PS)
BSS=KEPT(BSS)
DELTA=1

```

overname uit bibliotheek van  $N \times N$ -matrix AIS ( $\hat{A}_*$ ),  $N \times R$ -matrix BS ( $\hat{B}_*$ ) en  $N \times R$ -matrix BSS ( $\hat{B}_{**}$ )<sup>1)</sup>  
 lengte  $\delta$  van het observatie-interval

```

W1=.90;W2=.10

```

gewichten  $w_1$  en  $w_2$

```

X1=KEPT(X1)
X0=KEPT(X0)
U0=KEPT(U0)
BO=KEPT(BO)

```

overname uit bibliotheek van  $NP \times N$ -matrix X1 (toestanden aan het eind van het observatie-interval),  $NP \times N$ -matrix X0 (toestanden aan het begin van het observatie-interval),  $NP \times R$ -matrix U0 (input-waarden aan het begin van het observatie-interval),  $NP \times R$ -matrix BO (toename in de input-waarden, gedeeld door lengte  $\delta$  van het observatie-interval)<sup>2)</sup>

```

EVALS=EIGENVALS(AIS:EVECS)
EVALS=AFAM(EVALS)
EVALSD=EVALS**(1/DELTAD)
AID=EVECS*DIAGMAT(:EVALSD)*
  INVERSE(EVECS)
U=UMAT(N)
AD=AID-U
IAD=INVERSE(AD)
BD1=AD*INVERSE(AIS-U)*BS
BD2=AD*INVERSE((AIS-U)*IAD-
  DELTA*U)*BSS
BD1,BD2
BD=BD1
BD(,1)=W1*BD1(,1)+W2*BD2(,1)
BD(,2)=W1*BD1(,2)+W2*BD2(,2)
AD,BD
EVALSDD=LOG(EVALS)
ADD=(1/DELTA)*EVECS*DIAGMAT
  (:EVALSDD)*INVERSE(EVECS)
IADD=INVERSE(ADD)
BDD1=ADD*INVERSE(AIS-U)*BS

```

$\hat{A}$  in 3.4.12 voor differentie-model  
 $\hat{B}_1$  in 3.4.12 voor differentie-model  
 $\hat{B}_2$  in 3.4.12 voor differentie-model

$\hat{B}$  voor differentie-model door gewogen somming van de betrokken kolommen in  $\hat{B}_1$  en  $\hat{B}_2$

$\hat{A}$  in 3.4.12 voor differentieel model  
 $\hat{B}_1$  in 3.4.12 voor differentieel model

1) Bij de schatting van model 4 in paragraaf 4.1 was  $\hat{A}_*$  gelijk aan  $\hat{A} = \hat{A} + I$  van model 2, bestond  $\hat{B}_*$  uit de eerste 6 kolommen van  $\hat{B}$  van model 2 en waren van  $\hat{B}_{**}$  de eerste 2 kolommen gelijk aan de 7e en 8e kolom van  $\hat{B}$  van model 2 en bevatten de overige 4 kolommen van  $\hat{B}_{**}$  uitsluitend 0-waarden.

2) Bij de schatting van model 4 in paragraaf 4.1 bestonden X1, X0, U0 en BO uit resp. kolom (1) t/m (3), kolom (4) t/m (6), kolom (7) t/m (12) en kolom (13) en (14) van appendix B.

```

BDD2=ADD*INVERSE((AIS-U)*IADD-
  DELTA*U)*BSS
BDD1, BDD2
BDD=BDD1
BDD(,1)=W1*BDD1(,1)+W2*
  BDD2(,1)
BDD(,2)=W1*BDD1(,2)+W2*
  BDD2(,2)
ADD, BDD
FREE EVALS, EVECS, BD1, BD2, BDD1, BDD2
PD=(AID**DELTA)
UPD=(PD-U)*IAD*BD
BPD=((PD-U)*IAD-DELTA*U)*IAD*BD
PRX1D=XO*TRANSPØSE(PD)+
  UO*TRANSPØSE(UPD)+BO*
  TRANSPØSE(BPD)
EVALS=EIGENVALS(ADD:EVECS)
EVALS=AFAM(EVALS)
EVALSDD=EXP(EVALS)**DELTA
ED=EVECS*DIAGMAT(:EVALSDD)*
  INVERSE(EVECS)
UED=(ED-U)*IADD*BDD
BED=((ED-U)*IADD-DELTA*U)*IADD*
  BDD
PRX1DD=XO*TRANSPØSE(ED)+UO*
  TRANSPØSE(UED)+BO*
  TRANSPØSE(BED)
FREE XO, UO, BO, PD, ED, UPD,
  UED, BPD, BED
VD=X1-PRX1D
VDD=X1-PRX1DD
VD, VDD
I=MATRIX(1, NP); I(1)=1; I=I/NP
MVD=I*VD
MVDD=I*VDD
MVD, MVDD
SVD=TRANSPØSE(VD)*VD/NP
SVDD=TRANSPØSE(VDD)*VDD/NP
I1=UMAT(NP)
I2=RØWMAT(DIAGELS(I1))
A=I1-((TRANSPØSE(I2)*I2)/NP)
SX1=TRANSPØSE(X1)*A*X1/(NP-1)
SX1
SVD, SVDD
FREE A
SDX1=SQRT(DIAGELS(SX1))
SDX1=DIAGMAT(:SDX1)

```

$\hat{B}_2$  in 3.4.12 voor differentieel model

$\hat{B}$  voor differentieel model door gewogen  
sommerring van de betrokken kolommen  
in  $\hat{B}_1$  en  $\hat{B}_2$

predictie X1 op basis van (geschat)  
differentie-model volgens 3.4.6

predictie X1 op basis van (geschat)  
differentieel model volgens 3.4.7

residuen voor differentie-model  
residuen voor differentieel model

gemiddelde residuen voor differentie-  
model  
gemiddelde residuen voor differentieel  
model

residuele variantie-covariantie-matrix  
voor differentie-model  
residuele variantie-covariantie-matrix  
voor differentieel model

variantie-covariantie-matrix m.b.t. de  
kolommen van X1 (noemer: NP-1)

MMRD=DIAGELS(U-((NP/(NP-1))* (INVERSE(SDX1*SDX1)*SVD)))	R <sup>2</sup> -waarden voor differentie-model
MMRDD=DIAGELS(U-((NP/(NP-1))* (INVERSE(SDX1*SDX1)*SVDD)))	R <sup>2</sup> -waarden voor differentieel model
MRD=SQRT(MMRD)	R-waarden voor differentie-model
MRDD=SQRT(MMRDD)	R-waarden voor differentieel model
MRD,MMRD	
MRDD,MMRDD	

5. Eigenwaarden  $\hat{\lambda}_i$  van  $\hat{A}$  en standaardfouten bij de  $\hat{\eta}_i$ ; karakteristieke excitatie-bewegingen  $\hat{m}_i^0$  voor begintoestand  $x(t_0)$ ;  $\hat{x}(t)$  in de vrije beweging<sup>1)</sup>

N=3	aantal rijen en kolommen $\hat{A}$
XT0=MATRIX(N,1:45,21,42)	begintoestand $x(t_0)$
A=KEPT(A)	overname uit bibliotheek van N×N-matrix $\hat{A}$
AI=A+UMAT(N)	
VAI=KEPT(VAI)	overname uit bibliotheek van N <sup>2</sup> ×N <sup>2</sup> -matrix $\hat{v}ar(\hat{A})$
EVALS=EIGENVALS(A:EVECS)	eigenwaarden $\hat{\lambda}_i$
EVECS=NØORMAL(EVECS)	eigenvectoren bij eigenwaarden $\hat{\lambda}_i$
IEVECS=INVERSE(EVECS)	
SIGMA=REALPART(EVALS)	reële gedeelten $\hat{\sigma}_i$ van eigenwaarden $\hat{\lambda}_i$
SIGMA=AFAM(SIGMA)	
SIGMAI=SIGMA+1	$\hat{\sigma}_i = \hat{\sigma}_i + 1$
ØMEGA=IMAGPART(EVALS)	imaginair gedeelten $\hat{\omega}_i$ van eigenwaarden $\hat{\lambda}_i$
ØMEGA=AFAM(ØMEGA)	
REVECS=REALPART(EVECS)	reële gedeelten van eigenvectoren
SEVECS=IMAGPART(EVECS)	imaginair gedeelten eigenvectoren
ETAI=SQRT(SIGMAI**2+ØMEGA**2)	$\hat{\eta}_i = \sqrt{\hat{\sigma}_i^2 + \hat{\omega}_i^2}$
CØSI=SIGMAI/ETAI	$v_i = \hat{\sigma}_i / \hat{\eta}_i = \cos \hat{\theta}_i$ in 3.4.13
SINI=ØMEGA/ETAI	$w_i = \hat{\omega}_i / \hat{\eta}_i = \sin \hat{\theta}_i$ in 3.4.13
THETAI=ASIN(SINI)	$\hat{\theta}_i$
TP=(4*ASIN(1))/ØMEGA	periode-duur $2\pi / \hat{\omega}_i$ (differentieel model)

1) De ter illustratie ingevulde waarden werden toegepast bij de berekeningen voor de modellen in paragraaf 4.1. Voor de modellen 1 en 2 waren matrices  $\hat{v}ar(\hat{A})$  beschikbaar, vereist voor de berekening van de standaard-fouten  $\sqrt{\hat{v}ar(\hat{\eta}_i)}$  volgens 3.4.13. De matrices  $\hat{v}ar(\hat{A})$  ontstonden uit  $\hat{v}ar(\hat{\Pi})$  (onder naam VPI verkregen middels onderdeel 3 van de computer-procedure) door eliminatie van alle rijen en kolommen, die geen betrekking hebben op de N<sup>2</sup>= 9 coëfficiënten in deel-matrix  $\hat{A}$  van  $\hat{\Pi}$  (gesauveerd werden dus elementen in rijen en kolommen 1, 2, 3, Q+1, Q+2, Q+3, 2\*Q+1, 2\*Q+2, 2\*Q+3 van VPI met Q het aantal kolommen van  $\hat{\Pi}$ ).

```

TPI=(4*ASIN(1))/THETAI
AL=AI-EVALSI(1)*UMAT(N)
C1=MATRIX(1,N:CØFACTØR(AL,1,1),
  CØFACTØR(AL,1,2),CØFACTØR
  (AL,1,3))
C2=MATRIX(1,N:CØFACTØR(AL,2,1),
  CØFACTØR(AL,2,2),CØFACTØR
  (AL,2,3))
C3=MATRIX(1,N:CØFACTØR(AL,3,1)
  CØFACTØR(AL,3,2),CØFACTØR
  (AL,3,3))
C=ARRAY(N,N:C1,C2,C3)
C1=REALPART(C)
C2=IMAGPART(C)
C2=ARRAY(N,N:C2)
C3=SUM(DIAGELS(C1))
C4=SUM(DIAGELS(C2))
G=(1/(C3**2+C4**2))*(C3*C1+C4*C2)
H=(1/(C3**2+C4**2))*(-C4*C1+C3*C2)
G=MATRIX(1,N*N:G)
H=MATRIX(1,N*N:H)
V=CØSI(1)
W=SINI(1)
VETAI1=(V*G+W*H)*VAI*TRANSPØSE
  (V*G+W*H)
SFETAI1=SQRT(VETAI1)
SFETAI=ARRAY(:SFETAI1,SFETAI2,
  SFETAI3)
EVALS,SIGMA,ØMEGA,TP
ETAI,SFETAI,TPI
EVECS,REVECS,SEVECS
ATO=ARRAY(N,1:IEVECS*XTØ)
RATO=2*REALPART(ATO)
SATO=2*IMAGPART(ATO)
RØTO=SQRT(RATO**2+SATO**2)

PHITO=ASIN(SATO/RØTO)

ATO,RØTO,PHITO
TTO=INTEGERS(0,100)
MTTO11=ATO(1)*(EVALSI(1)**TTO)*
  EVECS(1,1)
MTTO12=ATO(1)*(EVALSI(1)**TTO)*
  EVECS(2,1)
MTTO13=ATO(1)*(EVALSI(1)**TTO)*
  EVECS(3,1)
MTTO21=ATO(2)*(EVALSI(2)**TTO)*
  EVECS(1,2)
MTTO22=ATO(2)*(EVALSI(2)**TTO)*
  EVECS(2,2)
MTTO23=ATO(2)*(EVALSI(2)**TTO)*
  EVECS(3,2)

```

periode-duur  $2\pi/\hat{\theta}_i$  (differentie-model)  
 berekening VETAI1, t.w.  $\hat{v}\hat{a}r(\hat{\eta}_1)$  (3.4.13),  
 en SFETAI1, t.w. de standaard-fout bij  
 $\hat{\eta}_1$ , op basis van EVALSI(1), COSI(1)  
 en SINI(1); wordt herhaald voor de  
 berekening van SFETAI2, etc. op ba-  
 sis van EVALSI(2), COSI(2), SINI(2),  
 etc.

(geschatte) excitaties  $\alpha_i(t_0)$  in 3.2.36

(geschatte)  $\rho_i(t_0)$  in 3.2.38 c.q.  
 3.2.39

(geschatte)  $\phi_i(t_0)$  in 3.2.38 c.q.  
 3.2.39

waarden  $\hat{m}_1^0(t - t_0)$  van karakteristieke  
 excitatie-beweging  $\hat{m}_1^0$

waarden  $\hat{m}_2^0(t - t_0)$  van karakteristieke  
 excitatie-beweging  $\hat{m}_2^0$



```

MTT031=ATO(3)*(EVALSI(3)**TTO)*
  EVECS(1,3)
MTT032=ATO(3)*(EVALSI(3)**TTO)*
  EVECS(2,3)
MTT033=ATO(3)*(EVALSI(3)**TTO)*
  EVECS(3,3)
VSIZE=80
VSCALE=-20,45
LINEPLØT(MTT011,MTT012,MTT013)
MTT011,MTT012,MTT013
VSCALE=-45,30
LINEPLØT(MTT021,MTT022,MTT023)
MTT021,MTT022,MTT023
VSCALE=0,110
LINEPLØT(MTT031,MTT032,MTT033)
MTT031,MTT032,MTT033
XT1=MTT011+MTT021+MTT031
XT2=MTT012+MTT022+MTT032
XT3=MTT013+MTT023+MTT033
VSCALE=0,60
LINEPLØT(XT1,XT2,XT3)
XT1,XT2,XT3

```

waarden  $\hat{m}_3^0(t - t_0)$  van karakteristieke  
excitatie-beweging  $\hat{m}_3^0$

$\hat{x}(t)$  in de vrije beweging als som van  
karakteristieke excitatie-bewegingen  
 $\hat{m}_1^0$ ,  $\hat{m}_2^0$  en  $\hat{m}_3^0$

6. Unit-response-matrix, impulse-response-matrix, zero-input-response, zero-state-response en totale response voor differentie-model c.q. differentieel model  $[A, B, C, D]$  op basis van begintoestand  $x(t_0)$  en een lineair input-segment  $u_{[t_0, t_1]}$

```

M=3
N=3
R=6
A=KEPT(A)
B=KEPT(B)
C=KEPT(C)
D=KEPT(D)
XTO=MATRIX(N,1:45,21,42)
UTO=MATRIX(R,1:10,11,0,0,0,1)
BTO=MATRIX(R,1:.25*.66901,
  .25*1.5915,0,0,0,0)
U=UMAT(N)
AI=A+U
IA=INVERSE(A)
EVALS=EIGENVALS(A:EVECS)

```

aantal dimensies output-waarden-ruimte  
aantal dimensies toestand-ruimte  
aantal dimensies input-waarden-ruimte  
overname uit bibliotheek van  $N \times N$ -  
matrix A,  $N \times R$ -matrix B,  $M \times N$ -matrix  
C en  $M \times R$ -matrix D  
begintoestand  $x(t_0)$   
beginwaarde  $u(t_0)$  in  $u_{[t_0, t_1]}$   
richtingscoëfficiënt  $b_{[t_0, t_1]}$  in  
 $u_{[t_0, t_1]}$

1)  $[A, B, C, D]$  wordt zo nodig vervangen door schatting  $[\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}]$ . De ter illustratie ingevulde waarden werden in paragraaf 4.1 toegepast bij het onderzoek naar de dynamische implicaties van de schattingen van differentie-model 3 en differentieel model 4.

TD=.25

T1T0=40\*TD

XX=AFAM(EVALS)+1;GR=INTEGERS

PHI00=C\*EVECS\*DIAGMAT(:XX\*\*G(01))\*

INVERSE(EVECS)

PHI01=C\*EVECS\*DIAGMAT(:XX\*\*G(02))\*

INVERSE(EVECS)

.

.

.

PHI40=C\*EVECS\*DIAGMAT(:XX\*\*G(41))\*

INVERSE(EVECS)

PHI0=MATRIX(1,M\*N:PHI00)

PHI1=MATRIX(10,M\*N:PHI01,PHI02,  
PHI03,PHI04,PHI05,PHI06,PHI07,  
PHI08,PHI09,PHI10)

PHI2=MATRIX(10,M\*N:PHI11,PHI12,  
PHI13,PHI14,PHI15,PHI16,  
PHI17,PHI18,PHI19,PHI20)

PHI3=MATRIX(10,M\*N:PHI21,PHI22,  
PHI23,PHI24,PHI25,PHI26,  
PHI27,PHI28,PHI29,PHI30)

PHI4=MATRIX(10,M\*N:PHI31,PHI32,  
PHI33,PHI34,PHI35,PHI36,  
PHI37,PHI38,PHI39,PHI40)

PHI1=MATRIX(40,M\*N:PHI1,PHI2,  
PHI3,PHI4)

FREE PHI1,PHI2,PHI3,PHI4

PHI0,PHI1

PHI=MATRIX(41,M\*N:PHI0,PHI1)

VSIZE=80

VSCALE=0,1

LINEPLOT(PHI(,1),PHI(,N+1),  
PHI(,2\*N+1))

LINEPLOT(PHI(,2),PHI(,N+2),  
PHI(,2\*N+2))

LINEPLOT(PHI(,3),PHI(,N+3),  
PHI(,2\*N+3))

G=GR-1

H00=D

in het geval van een differentieel model  
het tijdsinterval tussen de opeenvol-  
gende tijdstippen t, waarvoor men be-  
rekeningen wenst uit te voeren

wordt in het geval van een differentieel  
model vervangen door XX=EXP(AFAM  
(EVALS));GR=GRID(0,T1T0,TD);C=GR  
unit-response-matrices  $\phi(t')$  volgens  
3.2.65 c.q. 3.2.66

wordt in het geval van een differentieel  
model vervangen door G=GR  
impulse-response-matrix H(0) volgens  
3.2.67; wordt in het geval van een  
differentieel model vervangen door  
H00=C\*B, t.w. impulse-response-ma-  
trix H(0) volgens 3.2.68 onder aan-  
name D=0

```

H01=C*EVECS*DIAGMAT(:XX**G(02))*
  INVERSE(EVECS)*B
H02=C*EVECS*DIAGMAT(:XX**G(03))*
  INVERSE(EVECS)*B
.
.
.
H40=C*EVECS*DIAGMAT(:XX**G(41))*
  INVERSE(EVECS)*B
H0=MATRIX(1,M*R:H00)
H1=MATRIX(10,M*R:H01,H02,H03,H04,
  H05,H06,H07,H08,H09,H10)
H2=MATRIX(10,M*R:H11,H12,H13,H14,
  H15,H16,H17,H18,H19,H20)
H3=MATRIX(10,M*R:H21,H22,H23,H24,
  H25,H26,H27,H28,H29,H30)
H4=MATRIX(10,M*R:H31,H32,H33,H34,
  H35,H36,H37,H38,H39,H40)
HI=MATRIX(40,M*R:H1,H2,H3,H4)
FREE H1,H2,H3,H4
HO,HI
H=MATRIX(41,M*R:HO,HI)
VSCALE=-1,2
LINEPLØT(H(,1),H(,R+1),H(,2*R+1))
LINEPLØT(H(,2),H(,R+2),H(,2*R+2))
LINEPLØT(H(,3),H(,R+3),H(,2*R+3))
LINEPLØT(H(,4),H(,R+4),H(,2*R+4))
LINEPLØT(H(,5),H(,R+5),H(,2*R+5))
VSCALE=0,15
LINEPLØT(H(,6),H(,R+6),H(,2*R+6))
FREE H
ZIRO=MATRIX(M,N:PHIO)*XTO
ZIRI=MATRIX(40*M,N:PHII)*XTO
ZIRO=MATRIX(1,M:ZIRO)
ZIRI=MATRIX(40,M:ZIRI)
ZIRO,ZIRI
ZIR=MATRIX(41,M:ZIRO,ZIRI)

VSCALE=0,60
LINEPLØT(ZIR(,1),ZIR(,2),ZIR(,3))
CC1=MATRIX(20*M,N:C,C,C,C,C,C,C,C,
  C,C,C,C,C,C,C,C,C,C,C,C)
CC2=CC1
CC=MATRIX(40*M,N:CC1,CC2)
PHII=MATRIX(40*M,N:PHII)
ATC=(PHII-CC)*IA
BUTO=ATC*B*UTO
BUTO=MATRIX(40,M:BUTO)
G=GR+GR(2)
C1=MATRIX(8*M,N:G(01)*C,G(02)*C,
  G(03)*C,G(04)*C,G(05)*C,
  G(06)*C,G(07)*C,G(08)*C)

```

impulse-response-matrices H(t") vol-  
gens 3.2.67 c.q. 3.2.68

zero-input-response in 3.2.63 c.q.  
3.2.64

```

C2=MATRIX(8*M,N:G(09)*C,G(10)*C,
  G(11)*C,G(12)*C,G(13)*C,
  G(14)*C,G(15)*C,G(16)*C)
C3=MATRIX(8*M,N:G(17)*C,G(18)*C,
  G(19)*C,G(20)*C,G(21)*C,
  G(22)*C,G(23)*C,G(24)*C)
C4=MATRIX(8*M,N:G(25)*C,G(26)*C,
  G(27)*C,G(28)*C,G(29)*C,
  G(30)*C,G(31)*C,G(32)*C)
C5=MATRIX(8*M,N:G(33)*C,G(34)*C,
  G(35)*C,G(36)*C,G(37)*C,
  G(38)*C,G(39)*C,G(40)*C)
CCT=MATRIX(40*M,N:C1,C2,C3,C4,C5)
ATCT=(ATC-CCT)*IA
BBTO=ATCT*B*BT0
BBTO=MATRIX(40,M:BBTO)
S=UTO
T=BT0
UT01=MATRIX(20*R,1:S,S,S,S,S,S,S,S,
  S,S,S,S,S,S,S,S,S,S,S)
UT02=UT01
UT0=MATRIX(40*R,1:UT01,UT02)
B1=MATRIX(8*R,1:G(01)*T,G(02)*T,
  G(03)*T,G(04)*T,G(05)*T,
  G(06)*T,G(07)*T,G(08)*T)
B2=MATRIX(8*R,1:G(09)*T,G(10)*T,
  G(11)*T,G(12)*T,G(13)*T,
  G(14)*T,G(15)*T,G(16)*T)
B3=MATRIX(8*R,1:G(17)*T,G(18)*T,
  G(19)*T,G(20)*T,G(21)*T,
  G(22)*T,G(23)*T,G(24)*T)
B4=MATRIX(8*R,1:G(25)*T,G(26)*T,
  G(27)*T,G(28)*T,G(29)*T,
  G(30)*T,G(31)*T,G(32)*T)
B5=MATRIX(8*R,1:G(33)*T,G(34)*T,
  G(35)*T,G(36)*T,G(37)*T,
  G(38)*T,G(39)*T,G(40)*T)
BT=MATRIX(40*R,1:B1,B2,B3,B4,B5)
UT=UTO+BT
UT=TRANSPØSE(MATRIX(40,R:UT))
DUT=D*UT
DUT=TRANSPØSE(DUT)
ZSRO=D*UTO
ZSRO=MATRIX(1,M:ZSRO)
ZSRI=BUTO+BBTO+DUT
ZSRO,ZSRI
ZSR=MATRIX(41,M:ZSRO,ZSRI)

```

zero-state-response in 3.2.63 c.q.  
 3.2.64; bij de berekening is gebruik  
 gemaakt van 3.4.2 c.q. 3.4.3

```

VSCALE=0,200
LINEPLØT(ZSR(,1),ZSR(,2),ZSR(,3))
RESPO=ZIRO+ZSRO
RESPI=ZIRI+ZSRI

```

```

RESP0, RESPI
RESP=MATRIX(41,M:RESP0,RESPI)           totale response 3.2.63 c.q. 3.2.64
LINEPLØT (RESP(,1),RESP(,2),
        RESP(,3))

```

7. Iteratieve predictie van  $x(t)$  en  $y(t)$  -  $t = t_0 + i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ )  
in het geval van een differentie-model en  $t = t_0 + i\Delta t$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ )  
in het geval van een differentieel model - op basis van  $x(t_0)$  en  
waarden  $u(t_0 + i)$  c.q. paren waarden  $\langle u(t_0 + i\Delta t), b(t_0 + i\Delta t) \rangle$  1)

```

M=3                                     aantal dimensies output-waarden-ruimte
N=3                                     aantal dimensies toestand-ruimte
R=6                                     aantal dimensies input-waarden-ruimte
A=KEPT(A)                               overname uit bibliotheek van N×N-
B=KEPT(B)                               matrix A, N×R-matrix B, M×N-matrix
C=KEPT(C)                               matrix C en M×R-matrix D
D=KEPT(D)
U=UMAT(N)
AI=A+U
EVALS=EIGENVALS(A:EVECS)
EVALS=AFAM(EVALS)
XTO=MATRIX(N,1:45,21,42)                x(t_0)
N1=10;N2=11;N3=0;N4=0;N5=0;N6=1        specificatie UTO0, UTO1, ..., t.w.
M1=.25*.66901;M2=.25*1.5915;           u(t_0 + i) c.q. u(t_0 + iΔt) voor
M3=0;M4=0;M5=0;M6=0                   i = 0, 1, 2, ..., middels waarden
I1=00;I2=00;I3=00;I4=00;I5=00;I6=00   N1+I1*M1, N2+I2*M2, ..., waarin
UTO0=MATRIX(R,1:N1+I1*M1,N2+I2*M2,     I1, I2, ... zo nodig stapsgewijs
        N3+I3*M3,N4+I4*M4,N5+I5*M5,     worden aangepast
        N6+I6*M6)
I1=01;I2=01;I3=01;I4=01;I5=01;I6=01
UTO1=MATRIX(R,1:N1+I1*M1,N2+I2*M2,
        N3+I3*M3,N4+I4*M4,N5+I5*M5,
        N6+I6*M6)
.
.
I1=24;I2=24;I3=24;I4=24;I5=24;I6=24
UT24=MATRIX(R,1:N1+I1*M1,N2+I2*M2,
        N3+I3*M3,N4+I4*M4,N5+I5*M5,
        N6+I6*M6)

```

- 1) Differentie-model c.q. differentieel model  $[A, B, C, D]$  wordt zo nodig vervangen door schatting  $[\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}]$ . In het geval van een geschat differentie-model kunnen op basis van  $\text{v\ddot{a}r}(\hat{\Pi})$  en  $\sum_v$  - onder de namen VPI en SV berekend middels onderdeel 3 - ook standaardfouten bij de geschatte waarden  $\hat{x}(t)$  en  $\hat{y}(t)$  worden berekend. In het geval van een differentieel model wordt aangenomen, dat input-segment  $u_{[t_0, t_1]}$  stapsgewijs lineair is met  $b(t_0 + i\Delta t)$  de richtingscoëfficiënt in iedere stap. De ter illustratie ingevulde waarden werden in paragraaf 4.1 toegepast bij het onderzoek naar de dynamische implicaties van de schatting van differentie-model 3 en differentieel model 4, wat de standaardfouten betreft van differentie-model 1.

TD=.25

```

V1=.66901;V2=1.5915;V3=0;V4=0;V5=0;
V6=0
W1=0;W2=0;W3=0;W4=0;W5=0;W6=0
I1=00;I2=00;I3=00;I4=00;I5=00;I6=00
BT00=MATRIX(R,1:V1+I1*W1,V2+I2*W2,
V3+I3*W3,V4+I4*W4,V5+I5*W5,
V6+I6*W6)
I1=00;I2=00;I3=00;I4=00;I5=00;I6=00
BT01=MATRIX(R,1:V1+I1*W1,V2+I2*W2,
V3+I3*W3,V4+I4*W4,V5+I5*W5,
V6+I6*W6)
:
:
I1=00;I2=00;I3=00;I4=00;I5=00;I6=00
BT24=MATRIX(R,1:V1+I1*W1,V2+I2*W2,
V3+I3*W3,V4+I4*W4,V5+I5*W5,
V6+I6*W6)
EVALSDD=EXP(EVALS)**TD
EA1TO=EVECS*DIAGMAT(:EVALSDD)*
INVERSE(EVECS)
EAB1TO=(EA1TO-U)*INVERSE(A)*B
EABB1TO=((EA1TO-U)*INVERSE(A)-
TD*U)*INVERSE(A)*B
XT00=XT0
XT01=EA1TO*XT00+EAB1TO*UT00+
EABB1TO*BT00
XT02=EA1TO*XT01+EAB1TO*UT01+
EABB1TO*BT01
:
:
XT24=EA1TO*XT23+EAB1TO*UT23+
EABB1TO*BT23
XR=MATRIX(10,N:XT01,XT02,XT03,XT04,
XT05,XT06,XT07,XT08,XT09,XT10)
XS=MATRIX(20,N:XR,XT11,XT12,XT13,
XT14,XT15,XT16,XT17,XT18,XT19,
XT20)
XTI=MATRIX(24,N:XS,XT21,XT22,
XT23,XT24)
YT0=C*XT0+D*UT00
YT01=C*XT01+D*UT01
YT02=C*XT02+D*UT02
:
:
YT24=C*XT24+D*UT24
YR=MATRIX(10,M:YT01,YT02,YT03,YT04,
YT05,YT06,YT07,YT08,YT09,YT10)
YS=MATRIX(10,M:YR,YT11,YT12,YT13,
YT14,YT15,YT16,YT17,YT18,YT19,
YT20)
YTI=MATRIX(24,M:YS,YT21,YT22,
YT23,YT24)

```

$\Delta t$  in het geval van een differentieel model

specificatie BT00, BT01, ..., t.w.  $b(t_0 + i\Delta t)$  voor  $i = 0, 1, 2, \dots$  in het geval van een differentieel model, middels waarden  $V1+I1*W1, V2+I2*W2, \dots$ , waarin  $I1, I2, \dots$  zo nodig stapsgewijs worden aangepast

berekening opeenvolgende waarden  $x(t)$  in het geval van een differentieel model volgens 3.4.3; wordt in het geval van een differentieel-model vervangen door:

```

XT00=XT0
XT01=AI*XT00+B*UT00
XT02=AI*XT01+B*UT01
:
:
XT24=AI*XT23+B*UT23

```

berekening opeenvolgende waarden  $y(t)$

```

XT0,XTI
YT0,YTI
VPI=KEPT(VPI)
SV=KEPT(SV)

P=3
Q=N+R
SFXYT0=MATRIX(1,P)
Z00=MATRIX(1,Q:XT00,UT00)
F00=MATRIX(P,P*Q);F00(1,1)=Z00;
  F00(2,Q+1)=Z00;F00(3,2*Q+1)=Z00
VT01=F00*VPI*TRANSPØSE(F00)+SV
ST01=SQRT(DIAGELS(VT01))
FREE Z00,F00,VT01
Z01=MATRIX(1,Q:XT01,UT01)
F01=MATRIX(P,P*Q);F01(1,1)=Z01;
  F01(2,Q+1)=Z01;F01(3,2*Q+1)=Z01
VT02=F01*VPI*TRANSPØSE(F01)+SV
ST02=SQRT(DIAGELS(VT02))
FREE Z01,F01,VT02
:
:
Z23=MATRIX(1,Q:XT23,UT23)
F23=MATRIX(P,P*Q);F23(1,1)=Z23;
  F23(2,Q+1)=Z23;F23(3,2*Q+1)=Z23
VT24=F23*VPI*TRANSPØSE(F23)+SV
ST24=SQRT(DIAGELS(VT24))
FREE Z23,F23,VT24
SR=MATRIX(10,P:ST01,ST02,ST03,
  ST04,ST05,ST06,ST07,ST08,ST09,
  ST10)
SS=MATRIX(20,P:SR,ST11,ST12,ST13,
  ST14,ST15,ST16,ST17,ST18,St19,
  ST20)
SFXYTI=MATRIX(24,P:SS,ST21,ST22,
  ST23,ST24)
SFXYT0,SFXYTI

```

] overname uit bibliotheek van  $\hat{v}(\hat{\Pi})$   
 en  $\hat{\Sigma}$   
 $\hat{v}$   
 aantal rijen en kolommen SV ( $\hat{\Sigma}$ )  
 $\hat{v}$

] berekening VT01, VT02, ..., t.w.  
 de opeenvolgende matrices  
 vār  $\begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix}$  volgens 3.4.19, en  
 daaruit de standaardfouten ST01,  
 ST02, ... bij de waarden in  
 $\begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix}$





Appendix B: Data-matrix bij schatting van de structurele modellen I en II

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
L	F	W	L <sub>-</sub>	F <sub>-</sub>	W <sub>-</sub>	G	I	O <sub>1</sub>	O <sub>2</sub>	O <sub>3</sub>	I	b <sub>G</sub>	b <sub>I</sub>
68	27	53	62	28	50	9	18	0	0	1	1	1	.5
73	24	54	56	20	46	8	13	0	1	0	1	0	-.5
67	24	55	66	17	41	13	15	0	0	1	1	-.5	2
60	24	59	55	23	61	10	17	1	0	0	1	1	-1
78	24	52	66	24	44	12	12	1	0	0	1	.5	2.5
79	23	60	64	16	63	11	14	1	0	0	1	.5	2.5
76	28	62	71	27	70	8	19	0	0	1	1	2.5	-1
88	26	55	80	25	52	14	16	1	0	0	1	-2.5	1.5
87	27	63	82	24	61	17	17	1	0	0	1	0	2.5
36	11	51	28	9	52	9	11	0	0	0	1	-.5	2.5
43	11	36	40	14	41	12	10	0	0	0	1	-2	2
70	27	60	70	25	57	9	15	0	0	0	1	1.5	1
43	21	54	34	23	38	9	11	1	0	0	1	0	2.5
76	27	63	67	26	58	16	15	0	0	0	1	.5	3
74	28	59	61	28	47	12	9	0	0	1	1	2	5.5
80	25	57	59	22	55	12	11	0	0	1	1	2	5
46	15	55	37	10	47	11	10	0	0	0	1	1.5	1
69	24	54	56	21	46	8	14	0	0	1	1	1	.5
75	26	59	67	26	51	9	21	0	0	0	1	1.5	-1
71	28	54	71	27	53	12	12	0	0	1	1	1.5	3.5
49	21	48	47	23	45	9	18	0	0	1	1	.5	.5
61	27	51	44	25	47	8	7	0	0	1	1	1.5	3.5
74	25	57	64	28	64	9	16	1	0	0	1	.5	1
72	26	56	62	26	41	10	11	1	0	0	1	.5	2
52	26	53	38	22	53	8	13	1	0	0	1	1	-1
57	22	60	54	16	41	9	12	0	0	0	1	1.5	2
68	28	47	49	25	43	10	13	0	0	1	1	1	2.5
33	25	29	29	18	24	10	6	1	0	0	1	0	2.5
41	17	38	27	15	37	8	9	0	1	0	1	1	1.5
24	27	33	21	25	25	7	6	1	0	0	1	1	0
67	23	45	53	24	35	11	8	1	0	0	1	1.5	4
80	20	53	61	24	41	12	13	1	0	0	1	-.5	0
39	23	48	25	23	37	9	9	0	1	0	1	.5	1.5
50	24	48	38	20	36	8	8	1	0	0	1	1	4.5
55	15	55	38	15	57	11	17	1	0	0	1	1	0
60	20	29	47	12	39	9	10	0	0	0	1	3	1
62	28	54	55	27	57	12	16	0	1	0	1	0	1.5
61	25	52	49	21	48	11	11	0	0	0	1	0	-.5
52	18	50	46	11	43	10	10	1	0	0	1	.5	.5
53	27	43	56	25	36	8	12	0	0	1	1	.5	2
69	28	49	60	28	44	11	11	1	0	0	1	1	2.5
50	26	47	48	21	41	9	11	1	0	0	1	0	-1
71	27	61	60	26	59	11	14	0	1	0	1	-1	1
57	26	34	31	26	32	7	10	1	0	0	1	1.5	1
56	28	31	50	26	42	9	10	0	0	1	1	.5	.5
46	28	49	41	25	38	10	12	1	0	0	1	.5	0
68	26	50	59	20	51	10	11	0	0	0	1	1	.5
33	25	31	34	22	41	7	9	0	0	1	1	1.5	4

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
L	F	W	L <sub>-</sub>	F <sub>-</sub>	W <sub>-</sub>	G	I	O <sub>1</sub>	O <sub>2</sub>	O <sub>3</sub>	I	b <sub>G</sub>	b <sub>I</sub>
70	27	54	62	28	39	13	12	0	1	0	1	1	-1
43	27	45	34	19	45	9	11	1	0	0	1	-1	-1.5
25	20	39	19	16	24	10	3	0	0	1	1	-1.5	4
38	18	43	29	9	30	8	6	0	0	1	1	-1.5	2
63	25	53	54	26	45	8	11	0	1	0	1	1	1.5
82	27	68	87	26	64	12	15	0	0	0	1	1	2
39	26	55	33	24	38	12	11	0	0	0	1	1	1
8	22	32	1	14	25	7	9	0	1	0	1	1	.5
68	27	52	57	26	48	13	12	0	0	1	1	1.5	1.5
9	17	23	1	2	24	6	2	0	1	0	1	1	3.5
24	12	33	19	13	27	6	3	1	0	0	1	1	3.5
48	12	52	42	9	47	8	10	0	1	0	1	.5	1.5
21	24	37	23	13	37	9	4	0	1	0	1	1	1.5
44	27	40	31	28	21	9	3	0	0	1	1	2	3.5
25	14	24	10	16	28	6	4	0	0	0	1	.5	2.5
70	27	53	58	26	44	11	12	1	0	0	1	1	2
28	27	26	7	27	25	8	3	1	0	0	1	0	2
35	25	39	32	20	28	7	8	1	0	0	1	0	3.5
43	27	47	29	27	40	6	11	1	0	0	1	1	0
49	26	46	41	23	28	8	9	0	0	1	1	.5	1
42	27	39	21	23	35	7	6	0	0	0	1	1	3
38	26	34	35	26	24	7	12	0	0	1	1	1	1
26	13	25	24	12	19	7	7	1	0	0	1	0	1.5

Appendix C: Data-matrix bij schatting van het LISREL-model

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
$H'_1$	$H'_2$	$L'_1$	$L'_2$	$H'_{1-}$	$H'_{2-}$	$L'_{1-}$	$L'_{2-}$	$I'_1$	$I'_2$	$O'_1$	$O'_2$	$O'_3$
18	20	84	68	22	23	71	62	13	16	0	0	1
19	25	75	73	20	23	78	56	14	15	0	1	0
12	19	113	67	9	18	101	66	16	20	0	0	1
17	19	74	60	18	17	67	55	18	23	1	0	0
20	17	110	78	18	22	98	66	18	16	1	0	0
18	20	106	79	18	19	102	64	14	24	1	0	0
21	19	114	76	22	19	115	71	24	26	0	0	1
21	24	76	88	20	24	84	80	11	20	1	0	0
25	23	115	87	22	19	117	82	12	27	1	0	0
12	16	43	36	14	14	40	28	12	21	0	0	0
14	17	39	43	9	9	40	40	13	18	0	0	0
22	17	87	70	17	17	80	70	15	23	0	0	0
19	16	53	43	16	9	44	34	14	13	1	0	0
21	24	114	76	22	21	105	67	20	25	0	0	0
24	23	94	74	20	22	76	61	18	22	0	0	1
20	19	86	80	21	19	81	59	15	21	0	0	1
14	13	79	46	9	8	66	37	13	16	0	0	0
15	11	94	69	17	19	84	56	13	17	0	0	1
20	21	68	75	20	17	66	67	15	21	0	0	0
21	17	106	71	22	19	89	71	13	24	0	0	1
20	23	51	49	13	24	40	47	9	19	0	0	1
19	18	69	61	22	18	61	44	15	17	0	0	1
19	23	80	74	24	20	83	64	17	22	1	0	0
18	21	91	72	14	16	78	62	19	20	1	0	0
20	22	78	52	18	13	72	38	13	19	1	0	0
20	19	88	57	22	21	65	54	17	19	0	0	0
20	20	80	68	21	17	73	49	13	23	0	0	1
16	16	41	33	13	9	29	29	8	11	1	0	0
18	15	73	41	18	15	52	27	10	10	0	1	0
23	24	48	24	8	10	38	21	4	10	1	0	0
17	18	86	67	19	19	82	53	8	18	1	0	0
7	18	90	80	10	18	68	61	11	20	1	0	0
16	19	29	39	14	24	29	25	10	13	0	1	0
18	16	103	50	16	11	87	38	19	20	1	0	0
13	7	67	55	12	9	61	38	17	23	1	0	0
11	16	57	60	13	8	53	47	6	18	0	0	0
22	24	85	62	22	24	75	55	17	22	0	1	0
22	18	75	61	21	19	73	49	12	16	0	0	0
19	19	55	52	10	10	51	46	13	19	1	0	0
20	24	52	53	19	20	47	56	8	14	0	0	1
19	23	88	69	16	23	75	60	14	11	1	0	0
23	23	90	50	24	24	74	48	10	12	1	0	0
23	23	84	71	17	23	81	60	15	20	0	1	0
21	23	69	57	13	19	57	31	10	15	1	0	0
23	23	88	56	22	17	71	50	9	21	0	0	1
20	22	72	46	19	21	54	41	14	11	1	0	0
13	19	102	68	20	20	91	59	14	17	0	0	0
18	21	54	33	17	17	42	34	9	15	0	0	1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
$H'_1$	$H'_2$	$L'_1$	$L'_2$	$H'_{1-}$	$H'_{2-}$	$L'_{1-}$	$L'_{2-}$	$I'_1$	$I'_2$	$O'_1$	$O'_2$	$O'_3$
13	21	88	70	19	21	72	62	11	17	0	1	0
22	19	58	43	16	11	43	34	9	11	1	0	0
14	14	34	25	14	9	24	19	8	11	0	0	1
17	11	62	38	13	11	48	29	10	12	0	0	1
19	22	82	63	20	22	69	54	14	19	0	1	0
20	24	114	82	19	22	114	87	18	24	0	0	0
21	17	44	39	18	19	40	33	10	21	0	0	0
10	16	19	8	10	11	3	1	9	11	0	1	0
20	19	94	68	19	23	71	57	11	23	0	0	1
13	15	14	9	6	0	2	1	5	6	0	1	0
16	19	29	24	18	8	25	19	2	11	1	0	0
13	13	50	48	7	9	41	42	13	14	0	1	0
12	18	41	21	11	15	30	23	9	7	0	1	0
15	17	47	44	18	15	25	31	9	9	0	0	1
9	16	31	25	11	11	15	10	12	12	0	0	0
21	22	103	70	15	24	85	58	16	21	1	0	0
15	18	32	28	15	15	17	7	7	9	1	0	0
20	22	52	35	16	15	43	32	11	10	1	0	0
20	23	59	43	20	20	38	29	17	12	1	0	0
21	19	78	49	19	19	65	41	8	15	0	0	1
17	20	57	42	16	16	39	21	13	12	0	0	0
23	24	57	38	20	23	53	35	8	12	0	0	1
11	11	41	26	7	13	25	24	5	11	1	0	0
17	24	69	56	18	19	55	32	8	12	0	1	0
13	12	46	48	10	10	40	28	8	17	1	0	0
12	14	25	26	10	6	13	12	7	5	1	0	0
22	22	69	51	24	20	31	35	10	9	0	0	0
10	12	19	11	5	3	0	0	6	7	0	0	0
13	20	51	38	13	13	24	17	16	13	1	0	0
16	17	13	13	12	12	0	0	6	7	0	1	0
16	14	33	30	13	20	8	10	11	10	0	0	1
20	15	52	32	12	10	12	8	8	9	1	0	0
19	20	42	32	18	17	10	6	11	15	1	0	0
22	20	52	37	21	22	41	29	14	11	0	0	0
13	11	32	14	14	10	3	2	7	7	0	0	1
22	21	24	18	23	14	2	2	13	9	0	1	0
16	16	16	19	16	22	1	4	5	10	0	1	0

Hoofdstuk 1.

- (1) Houdt men eenheden en eigenschappen niet strikt uit elkaar, dan ontstaat het gevaar dat antinomieën optreden. Wel mag men uiteraard in verschillende theorieën, onderzoeken of redeneringen eenheden en eigenschappen (en relaties, waar zo dadelijk sprake van zal zijn) verwisselen. Nadat in Klaus und Buhr (1970, p. 515 en 516-517) "Individuenbereich" als volgt is omschreven:

"Gesamtheit von Individuen mit ihren Eigenschaften und Beziehungen, die einer Theorie zugrunde liegt. Der Individuenbereich der Soziologie beispielsweise ist die Menge derjenigen Menschen, die innerhalb eines bestimmten soziologischen Systemzusammenhangs auftreten"

wordt onder "Individuum" verder opgemerkt:

"Der Begriff des Individuums gehört zu den Grundbegriffen der modernen Logik, die in ihrem Rahmen als undefiniert angenommen werden und dort auch gar nicht definiert werden können. Bei Anwendungen der Logik muss jedoch genau bestimmt werden, was im Rahmen des betrachteten Individuenbereichs als Individuum anzusehen ist. Wird insbesondere die Unterscheidung zwischen den Individuen einerseits und den ihnen zukommenden Eigenschaften und Beziehungen andererseits nicht streng eingehalten, besteht die Gefahr des Auftretens logischer, d.h. syntaktischer Antinomien. Im Rahmen verschiedener Anwendungen der Logik kann allerdings ein und dasselbe Objekt einmal als Individuum, ein anderes Mal als Eigenschaft angesehen werden. Will man z.B. gewisse Eigenschaften und ihre Eigenschaften und Beziehungen untersuchen, ohne ihre Beziehungen zu den Individuen, deren Eigenschaften sie sind, ebenfalls zu berücksichtigen, dürfen sie wie Individuen und dürfen ihre Eigenschaften und Beziehungen wie solche 1. Stufe behandelt werden. Der Vorteil dieser Verfahrensweise besteht darin, dass man nicht von der Stufenlogik mitsamt den mit ihr verbundenen Schwierigkeiten Gebrauch machen muss, sondern mit der wesentlich einfacheren Prädikatenlogik der 1. Stufe auskommt".

- (2) Zie bijv. Kaplan (1964, p. 94), Carnap (1966, p. 4 en 7), Rudner (1966, p. 58).
- (3) Zie bijv. Kaplan (1964, p. 346), Carnap (1966, p. 6), Rudner (1966, p. 61), Galtung (1967, p. 119); voor het eerst werd de logische vorm van het explanatie- en predictie-proces geformuleerd door Hempel and Oppenheim (1948).
- (4) Tarski (1965, p. 88) vermeldt De Morgan (1806-1878) en Peirce (1839-1914) als stichters van de relationele logica. Systematische uiteenzettingen van de relationele logica werden gegeven door Schroeder (1895) en Whitehead and Russel (1910-1913).
- (5) in: Klaus und Buhr (1970, p. 935).
- (6) Coombs, Dawes and Tversky (1970, p. 11).
- (7) von Bertalanffy (1969, p. 9).

- (8) geciteerd door: Hanken (1970, p. 25).
- (9) Het jaar daarop publiceerde Shannon samen met Weaver zijn theorie in boekvorm: Shannon and Weaver (1949).
- (10) Niet al degenen, die aan de ontwikkeling van cybernetica en informatie hebben bijgedragen, waren even enthousiast over het direct gebruik van hun ontdekkingen voor militaire doeleinden. Wiener zelf, de in 1964 overleden stichter van de cybernetica en tegelijk een van de belangrijkste wiskundigen van de laatste decennia, wordt door Staal (1970, p. 136-137) genoemd als voorbeeld van een wetenschapper, die zich ernstig zorgen heeft gemaakt over het ongecontroleerd militair gebruik van zijn onderzoeksresultaten: zie Wiener (1956, ch. 14: Moral problems of a scientist) en ook Wiener (1968).
- (11) De opsomming is genomen uit het volgende overzicht van von Bertalanffy (1969, p. 9): "1. Cybernetics, based upon the principle of feedback or circular causal trains providing mechanisms for goal-seeking and self-controlling behavior.  
2. Information theory, introducing the concept of information as a quantity measurable by an expression isomorphic to negative entropy in physics, and developing the principle of its transmission.  
3. Game theory, analyzing in a novel mathematical framework, rational competition between two or more antagonists for maximum gain and minimum loss.  
4. Decision theory, similarly analyzing rational choices, within human organizations, based upon examination of a given situation and its possible outcomes.  
5. Topology or relational mathematics, including non-metrical fields such as net-work and graph theory.  
6. Factor analysis, i.e. isolation by way of mathematical analysis, of factors in multivariate phenomena in psychology and other fields.  
7. General system theory in the narrower sense (G.S.T.), trying to derive from a general definition of "systems" as complex of interacting components, concepts characteristic of organized wholes such as interaction, sum, mechanization, centralization, competition, finality, etc., and to apply them to concrete phenomena.
- (12) Zie bijv. Klaus (1968); het 7e deel van de uit het Russisch vertaalde serie "Probleme der Kybernetik" van Ljapunow e.a. (1966) laat zelfs de mathematische linguïstiek onder de cybernetica vallen.
- (13) Klaus und Buhr (1964, p. 304).
- (14) Klaus und Buhr (1970, p. 640-641).
- (15) Andere cybernetische publikaties van Klaus: Kybernetik in philosophischer Sicht, 1961; Kybernetik und Gesellschaft, 1964; Kybernetik und Erkenntnistheorie, 1966.
- (16) von Bertalanffy (1969, p. 17-18).

- (17) von Bertalanffy (1969, p. 16-17); overigens was de kritiek van Buck niet zozeer tegen von Bertalanffy zelf gericht als wel tegen de psycholoog James Miller, wiens formuleringen ook volgens von Bertalanffy niet altijd even gelukkig waren.
- (18) von Bertalanffy (1969, p. 10).
- (19) Ackoff (1969).
- (20) Ackoff (1968); in het voorwoord (p. IX) benadrukte Ackoff het interdisciplinaire karakter: "my ... experience ... has been primarily involved with study of the operations of complex and purposeful man-machine systems. I hope that the reader will be able to find analogous examples from his own experience. Since my research experience has been interdisciplinary in character, I hope that the examples will emphasize the fact that the principles discussed are meant to be applicable in all branches of science".
- (21) Litterer (1969, p. X).
- (22) Haire (1959, p. 1-2).
- (23) Boulding (1956).  
De wijze waarop bijv. sociologen vaak moeite doen hun wetenschap af te bakenen t.o.v. de psychologie wordt op aardige wijze beschreven door van Leent (1964, p. 157-159).
- (24) De nu volgende uiteenzetting over het informatie-begrip is grotendeels gebaseerd op Ashby (1968, p. 177-179).
- (25) Bok (1968, p. 216).
- (26) Ashby (1968, p. 130):  
"when a constraint exists advantage can usually be taken of it.  
Shannon's work ... displays this thesis clearly. Most of it is directed to estimating the variety that would exist if full independence occurred, showing that constraints (there called "redundancy") exist, and showing how their existence makes possible a more efficient use of the channel ...  
First we can notice that the existence of any invariant over a set of phenomena implies a constraint, for its existence implies that the full range of variety does not occur. The general theory of invariants is thus a part of the theory of constraints.  
Further, as every law of nature implies the existence of an invariant, it follows that every law of nature is a constraint."
- (27) Zie bijv. Pierce (1966, hfdst. VI: Taal en betekenis).
- (28) Chomsky (1957, p. 21-24).

- (29) Zie Bok (1968, p. 190-191):  
 $S = k \ln P$ , waarin  $S$  de hoeveelheid entropie is,  $k$  de constante van Boltzmann en  $P$  het aantal realisatie-mogelijkheden van een bepaalde energetische toestand;  $H_{\max} = \log_2 n$ , maar aangezien  $\log_2 n = \frac{\ln n}{\ln 2}$  geldt tevens:  $(\ln 2) H_{\max} = \ln n$ . Vervangen we  $n$  door  $P$  en vermenigvuldigen we linker- en rechterzijde met  $k$  dan volgt:  $(k \ln 2) H_{\max} = k \ln P$  en dus  $(k \ln 2) H_{\max} = S$ .
- (30) Fast (1970, nr. 35, p. 29).
- (31) Het zou dan ook inzichtelijker zijn om voor  $S$  en  $H$  tegengestelde tekens te gebruiken; zie Bok (1968, p. 184, 187 en 190). Wiener maakte van informatie een negatieve grootte - zie Ashby (1968, p. 177) - maar misschien zou het naar de betekenis beter zijn om juist entropie een negatief teken te geven. Er bestaat overigens in de literatuur op dit punt evenals in de terminologie grote verwarring: i.p.v. "informatie" treft men de term "entropie" aan (Shannon), maar ook wordt "informatie" isomorf geacht met "negatieve entropie", "negentropie" of "ektropie".
- (32) von Bertalanffy (1969, p. 11-15).
- (33) Bij positieve feedback (meekoppeling) - bijv. tussen een luidspreker en een microfoon die te dicht bij elkaar staan - zal in het algemeen geen evenwichtstoestand ontstaan. Het onderscheid is overigens bij een eerste oppervlakkige analyse minder informatief dan men zou menen. Zo kunnen twee vergelijkingen, die twee variabelen in tegengestelde richtingen aan elkaar relateren en in beide richtingen een positief effect specificeren, toch een stabiele evenwichtstoestand definiëren; zie Ashby (1968, p. 81). Nauwkeurige formuleringen voor stabiliteit en stabiliteitscondities zullen in paragraaf 3.2 worden gegeven.
- (34) De nu volgende bespreking is vnl. gebaseerd op Ashby (1968) en Ashby (1969).
- (35) Ashby (1968, p. 136); de variëteit in mogelijke toestanden van een systeem ( $V = \log_2 n$ ) correspondeert met de onzekerheid, waarin men over de toestand van het systeem verkeert.  $n$  wordt hier geïnterpreteerd als het aantal mogelijke macro-toestanden en dient niet verward te worden met de interpretatie in de entropie-formule als het aantal realisatie-mogelijkheden van zo'n macro-toestand op micro-niveau. Niettemin is er het verband, dat variëteit en onzekerheid op macro-niveau alleen maar kunnen afnemen in de tijd, terwijl de entropie alleen maar kan toenemen.
- (36) Ashby (1968, p. 2).
- (37) Ashby (1968, p. 4)
- (38) Ashby (1968, p. 5).
- (39) von Bertalanffy (1969, p. 8); Rapoport (1969, p. 88-89).
- (40) Ashby (1968, p. 5).



- (41) Weaver (1948, p. 536).
- (42) Ashby (1968, p. 5).
- (43) Zie bijv. Oppenheim and Putnam (1958, p. 6).
- (44) van Leent (1964, p. 112-132).
- (45) Het onderscheid is afkomstig van Tolman en werd door hem voor het eerst gemaakt in 1932. Sprekend over Watson stelde hij: "On the one hand, he has defined behavior in terms of its strict underlying physical and physiological details, i.e. in terms of receptor-process, conductor-process, and effector-process per se. We shall designate this as the molecular definition. And, on the other hand, he has come to recognize, albeit perhaps but dimly, that behavior, as such, is an "emergent" phenomenon that has descriptive and defining properties of its own. And we shall designate this latter as the molar definition of behavior"; Tolman (1951, p. 413).
- (46) Met dit onderscheid tussen sociologisch realisme en nominalisme wordt een analogie gelegd met de middeleeuwse universalistenstrijd. Deze analogie is een ongelukkige, omdat de universalistenstrijd geen betrekking had op de verhouding tussen gehelen en delen in de werkelijkheid, i.c. groepen en individuele personen, maar op de verhouding tussen de ene algemene conceptuele term in ons denken en de vele daarmee corresponderende objecten of gebeurtenissen in de werkelijkheid. Ook binnen een sociologisch realisme blijft het universalistenprobleem van kracht: hoe verhoudt zich het ene algemene begrip "groep" tot de vele individuele groepen in de werkelijkheid?
- (47) van Leent (1964, p. 140-145).
- (48) van Leent (1964, p. 134-140).
- (49) van Leent (1964, p. 67-69).
- (50) van Leent (1964, p. 66-67).
- (51) Zie bijv. Scheuch (1967, p. 670): "Divergenzen zwischen dem Charakter der gesammelten Daten und den angestrebten Schlussfolgerungen waren besonders offensichtlich, als Interview-daten zum "Königsweg" der Sozialforschung wurden ... Tatsächlich ist es bei der Verwendung von Interviews oder auch von Beobachtungsdaten nicht üblich Aussagen makrosoziologischer Art aufzustellen. Daraus resultierte für längere Zeit eine Beziehungslosigkeit zwischen empirischer Forschung und Makrosoziologie, die vielfach als eine notwendige Beziehungslosigkeit gedeutet wurde"; zie ook: Blumer (1948), Verduyssen (1960, p. 156-158), Galtung (1967, p. 37).
- (52) Zie bijv. Coleman (1958, p. 28): "But throughout all this one fact remained, a very disturbing one to the student of social organization. The individual remained the unit of analysis. No matter how complex the analysis, how numerous the correlations,

the studies (sample-survey's, J.O.) focused on individuals as separate and independent units. The very techniques mirrored this well: samples were random, never including (except by accident) two persons who were friends: interviews were with one individual, as an atomistic entity, and responses coded onto separate IBM cards, one for each person. As a result, the kind of substantive problems on which such research focused tended to be problems of "aggregate psychology", that is, within-individual problems, and never problems concerned with relations between people"

en opnieuw in 1969: Coleman (1970, p. 400):

"The unit of analysis was always the individual, and, even though the sample survey originated for obtaining a quantitative estimate of a population characteristic, in the hands of survey sociologists, it came to be used for making qualitative inferences about relationships among individual variables. The problems studied by these methods tended to be social-psychological, and the interest of the investigations was in obtaining deeper and deeper insights into such social-psychological processes".

Zie verder ook: Mills (1959, p. 67-68), Blau (1960, p. 178-179), Barton and Anderson (1961, p. 400), Galtung (1967, p. 150).

- (53) Simon (1969, p. 99).
- (54) Boudon (1967, p. 42-43).
- (55) Zie bijv: Zeisel (1947), Kendall and Lazarsfeld (1950), Lazarsfeld (1955), Hyman (1955).
- (56) Simon (1953), Simon (1954).
- (57) Zie voor pad-analyse: Wright (1921, 1934, 1960a, 1960b) en voor de econometrie bijv: Johnston (1963), Christ (1966), Fisher (1966), Wonnacott and Wonnacott (1970), Theil (1971), Kmenta (1971).
- (58) Zie de eerder geciteerde Ashby (1968, p. 5) en bijv. Coleman (1970, p. 408): "Some sociologists believe that the ultimate research tool for sociology is laboratory experimentation. Even Samuel Stouffer expressed such views in his presidential address to the American Sociological Society. I never shared this view for a number of reasons, and do not share it now. I have been reinforced in this belief by a recent paper by Campbell and Stanley which shows some of the assumptions present in experiments of various designs and in "quasi-experiments" - the term Campbell and Stanley use to describe nonexperimental settings that have some attributes in common with experiments. Although their focus is limited to individual behavior, their paper is an aid in dispelling the myth that experimentation involves almost no perils of inference about cause and effect, while non-experimental work always involves maximum perils"; de door Coleman vermelde publikaties zijn: Stouffer (1949-1950), Campbell and Stanley (1963).
- (59) Coleman (1970, p. 408).
- (60) Blalock (1969, p. 46-47).

- (61) Barton and Anderson (1961); passim maar bijv. op p. 401: "The object of this paper is to see how the system aspect of organizations can be dealt with in empirical research. Progress toward methods capable of studying the operation of systems has come from several sources. One requirement is that data be gathered at several points in time. The technique of trend or panel studies adds this time dimension to surveys."
- (62) Blalock (1969, p. 76-77): "Problems of stability and change are of considerable importance in the social as well as the natural sciences. There has recently been an upsurge of interest in "systems analysis" and various kinds of feedback mechanisms that seem analogous to servo-mechanisms operating in self-guidance systems. In these systems a certain portion of the energy is utilized to obtain information regarding system outputs, so that these outputs may be automatically adjusted to the demands of the environment. But aside from this rather recent development within the social sciences ..."
- (63) Is dit enerzijds een nadeel, anderzijds kan men er met Coleman (1964, p. 520) ook positieve aspecten aan onderkennen. "In a sense, we are privileged to examine the "insides" of a sociological unit - a group, community, or society - with the task of giving measures for the unit as a whole. The task is just the opposite to that in physics and in psychology, where one is given the external manifestations of the unit as a whole and faced with the problem of inferring what kinds of "insides" could have given such manifestations".
- (64) Zie het "Symposium on macro- and micro-economics" in: Nagel, Suppes and Tarski (1962, p. 474-527), waarin de volgende bijdragen zijn opgenomen:  
Lerner, A.P., Micro-economics and macro-economics;  
Nataf, A., Résultats et directions de recherche dans la théorie de l'aggrégation;  
Stone, R., Three models of economic growth;  
Theil, H., Alternative approaches to the aggregation problem.
- (65) De meest systematische behandeling kreeg de contextuele analyse bij Davis, Spaeth and Huson (1961). Coleman (1970, p. 411) wijst erop, dat de contextuele analyse ook onder de namen "compositionele" en "structurele" analyse voorkomt. "Compositioneel" lijkt echter te ruim, terwijl "structureel" beter voor een andere nog te bespreken analyse-vorm gereserveerd kan worden.  
Tannenbaum and Bachman (1963-1964) deden nog een aantal voorstellen ter verbetering van de contextuele analyse, vooral wat betreft het constant-houden als het erom gaat "spurious" individuele of groepseffecten te voorkomen.
- (66) Festinger, Schachter and Back (1955, p. 359).
- (67) Cartwright (1959), p. 268).
- (68) Coleman (1970, p. 411).
- (69) Lazarsfeld (1965, p. 72).

## Hoofdstuk 2.

- (1) Wold (1969, p. 454).
- (2) Zie bijv. Coombs, Dawes and Tversky (1970, p. 386).
- (3) Coleman (1968, p. 431).
- (4) De stap van een universum van eenheden naar een universum U van in de tijd onderscheiden elementen is op het eerste gezicht wat ongewoon. Waarschijnlijk komt dit vanwege de sterk ruimtelijk-visuele geaardheid van ons denken, waarin een vier-dimensionele symmetrie moeilijk past. Toch zijn we tot een opdeling van de realiteit ook naar de vierde dimensie: de tijd gedwongen, willen we niet in een statische wereld verzeild raken. Terecht worden daarom steeds vaker naast statische objecten gebeurtenissen als mogelijke leden van verzamelingen genoemd; zie bijv. Coombs, Dawes and Tversky (1970, p. 352), Carnap (1966, p. 196).
- (5) De voorgestelde definiëring van eenheden op elementen is geïnspireerd door filosofen van het empirisme, met name Mach en Avenarius. De elementen, waarin zij de realiteit opdeelden, waren de onmiddellijk gegeven zintuiglijke ervaringen. De oplossing voor het probleem, hoe dan een persoon of object als een over de tijd gelijkblijvend geheel wordt gekend, zochten zij in de richting van een constant complex van dergelijke elementaire ervaringen; zie bijv. Stegmüller (1965, p. 362).
- (6) Zie bijv. Halmos (1968, p. 18-19), Zulauf (1969, p. 86-87).
- (7) Er zijn uitzonderingen. Zo bijv. Campbell and Stanley (1963) in hun toonaangevend artikel over experimentele en quasi-experimentele onderzoeksdesigns m.b.t. "The equivalent time-samples design": "The most usual form of experimental design employs an equivalent sample of persons to provide a baseline against which to compare the effects of the experimental variable. In contrast, a recurrent form of one-group experimentation employs two equivalent samples of occasions ..." (p. 213). "This approach could be applied to a sampling of occasions for a single individual" (p. 215). Zij wijzen op statistische problemen m.b.t. dit design: "... we need appropriate tests of significance for this particular type of design. Note that two dimensions of generalization are implied: generalization across occasions and generalization across persons .... Repeated measurements and sampling of occasions pose many statistical problems, some of them unresolved" (p. 215-216).
- (8) Zie bijv. Zadeh and Desoer (1963, p. 89-95).
- (9) Zie bijv. Kneale and Kneale (1968, p. 724), Quine (1968, p. 207-208).
- (10) Zie bijv. Tarski (1965, p. 135), Lemmon (1968, p. 175-177).
- (11) Zie bijv. Zulauf (1969, p. 86), Lemmon (1968, p. 234-235).
- (12) Quine (1968, p. 206), Kneale and Kneale (1968, p. 652).

- (70) Scheuch (1967, p. 656, 676 en 677).
- (71) Coleman (1970, p. 410).
- (72) De nu volgende bespreking is vnl. gebaseerd op: Hall and Fagen (1969), Hanken (1970), Hanken and Buijs (1971), Hanken en Reuver (1973, 1977).
- (73) Zadeh and Desoer (1963, p. vii).
- (74) Turing (1936-1937).

- (13) Zie bijv. Tarski (1965, p. 137-138).
- (14) van der Waerden (z.j., p. 50 en p. 63).
- (15) Carnap (1966, p. 90), zie ook Carnap (1966, p. 97-98).
- (16) Het hebben van angst (en evenzo hartkloppingen) is bedoeld als een dichotome eigenschap die  $U$  in slechts 2 complementaire verzamelingen opdeelt: de verzameling van alle elementen mét en van alle elementen zonder angst. Een enkelvoudig predikaat ("unair" relatie-symbool)  $Fx$  is daartoe al in staat. Het behoren tot een bepaald tijdstip is bedoeld als een polytome eigenschap die  $U$  in een veel groter aantal verzamelingen opdeelt van telkens alle elementen die tot één bepaald tijdstip behoren. Een enkelvoudig predikaat is daartoe niet meer in staat. Onder bepaalde voorwaarden is wel één binair relatie-symbool  $Txz$  daartoe in staat. Vandaar dat we  $R_1$  definiëren als de verzameling van alle geordende paren  $\langle z, x \rangle$  behorend tot het cartesisch product  $U \times U$  (d.w.z. alle mogelijke geordende paren  $\langle z, x \rangle$ ), die voldoen aan de voorwaarde, dat  $z$  in tijd gelijk is met of voorafgaat aan  $x$ . Zie voor een eenvoudige behandeling van cartesische producten en relaties daarop gedefinieerd: Coombs, Dawes and Tversky (1970, p. 361-364).
- (17) Een eerste systematische uiteenzetting over meten als de constructie van homomorfiën (meet-functies, schalen)  $f_1^m$ , telkens vanuit een reële relationele structuur  $X_1$  in een numerieke relationele structuur (meet-model)  $R^m(X_1)$ , werd gegeven door Suppes and Zinnes (1963). Meer recent zijn Pfanzagl (1968) en Krantz, Luce, Suppes and Tversky (1971). Het representatie-theorema van eenmeet-theorie heeft als inhoud, dat indien  $X_1$  aan bepaalde voor die meet-theorie specifieke axioma's voldoet een homomorfie in  $R^m(X_1)$  mogelijk is; zie Krantz, Luce, Suppes and Tversky (1971, p. 9).  $X_1 = \langle U^*; R^* \rangle$  waarvoor het representatie-theorema wordt bewezen zal in het algemeen meeromvattend zijn dan  $\langle U; R_1 \rangle$ . Een meet-theorie voor gewicht-meting bijv. zal betrekking hebben op de verzameling van alle elementen, waarvoor gewicht-meting mogelijk is, en deze verzameling  $U^*$  is doorgaans veel groter dan de  $U$  in  $M$ , waarvoor we een bepaalde wetmatigheid willen bewijzen:  $U \subset U^*$ ,  $R \subset R^*$  en  $\langle U; R_1 \rangle$  een restrictie van  $X_1$  tot  $U$ . Indien zoals in de meeste meet-theorieën  $S_1$  in  $R^m(X_1)$  moet worden opgevat als een combinatie van relaties, specificeren we uiteraard ook de betrokken  $R_1$  in  $M$  als een combinatie van relaties.
- (18) Zie secties 1.9, 1.10, 2.6 en 2.7 in: Zadeh and Desoer (1963, p. 46-66 en 95-107).
- (19) Het zal duidelijk zijn, dat in dergelijke "synthetische"  $\mathcal{S}$  niet alle  $A$  en  $I$  voor reële eenheden  $y$  en  $z$  zijn gespecificeerd. Het gaat daarbij in feite vaak om louter mathematische simulaties. Zadeh and Desoer (1963, p. 9) benadrukken dat door te stellen: "... what matters in system theory is not the physical, but the mathematical identity of the attributes of an object and the relations between them. Thus, to a system theorist an object  $A$  is essentially an abstract entity associated with a set of attributes  $v_1, v_2, \dots$  - which in general are numbers or arrays of numbers - which is characterized by the relations between these attributes. Thus, in effect, an abstract object, or simply an object, is a set of

variables together with a set of relations between them".

Het is misschien goed erop te wijzen, dat Zadeh and Desoer met "abstract" "mathematisch" bedoelen, terwijl hier onder "abstractie" een eerste ordening van de realiteit wordt verstaan om aan de eisen van de logica te voldoen, voorafgaand aan mathematische representatie. Onder "object" verstaan Zadeh and Desoer een mathematische relatie, d.w.z. een verzameling geordende paren tijd-functies. In bovenstaand citaat roeren Zadeh and Desoer een punt aan, dat tot veel verwarring over de precieze inhoud van systeemleer en systeem-methodologie aanleiding heeft gegeven. Vandaar dat hier scherp onderscheid gemaakt zal worden tussen:

1. een abstractie-model  $S$  voor een reëel systeem
2. een mathematisch representatie-model  $R(S)$  voor  $S$
3. een mathematisch systeem  $\mathcal{S}$ , dat ofwel deel uitmaakt van  $R(S)$  ofwel een "synthetische" mathematische constructie is zonder dat van een corresponderend model  $S$  sprake is. Hoogstens wordt zo'n  $S$  gesimuleerd, waarvoor later het symbool  $\hat{S}$  zal worden geïntroduceerd.

- (20) McGinnis (1965, p. 275).
- (21) Zetterberg (1965, p. 159-161).
- (22) Duncan (1963, p. 452), Costner and Leik (1964, p. 821), Galtung (1967, p. 468); Duncan baseert zich op Yule and Kendall (1950, p. 301-302).
- (23) Tarski (1966, p. 4 en 99-100), Zulauf (1969, p. 7).
- (24) Mood, Graybill and Boes (1974, p. 53 en 155).
- (25) Zie bijv. Carnap (1966, p. 19-28 en 208-215), Ayer (1966, p. 201-224), Hempel (1970, p. 12-37 en 96-105).
- (26) Hempel (1970, p. 101).
- (27) Dit is een van de paradoxen van de materiële implicatie: zie bijv. Lemmon (1968, p. 72), Tarski (1965, p. 44).
- (28) Mood, Graybill and Boes (1974, p. 53-55).
- (29) Campbell and Stanley (1963, p. 190)
- (30) Fisher (1969, p. 496).
- (31) Coleman (1968, p. 444): "The cross-section analysis assumes, either implicitly or explicitly, that the causal processes have resulted in an equilibrium state."
- (32) Wold (1973, p. 793) onderscheidde naast "formele reversibiliteit" nog "causale reversibiliteit". Zijn "causale reversibiliteit" had echter betrekking op een geheugenloze relatie  $f$ . De relatie  $f$  zelf en haar inverse  $f^{-1}$  kunnen dan beschouwd worden als artefacten van twee verschillende relaties met geheugenwerking, bijv.  $v_2^y(t+1) = g_1(v_1^y(t))$  en  $v_1^y(t+1) = g_2(v_2^y(t))$ , met ieder van beide eventueel een eigen louter formele inverse  $g_1^{-1}$  en  $g_2^{-1}$ .

- (33) Coleman (1968, p. 444).
- (34) Wold (1969, p. 442-445).
- (35) Wold (1969, p. 443).
- (36) Coleman (1968, p. 440).
- (37) Coleman (1968, p. 441).
- (38) Coleman (1968, p. 428-430).
- (39) van Rootselaar (1970, p. 31).
- (40) Goldberg (1958, p. 46-49, 116-120, 167-168).
- (41) van Rootselaar (1970, p. 42).
- (42) Formule (11.22) van Coleman (1968, p. 443) is dezelfde als de hier gegeven 2.2.26, hetgeen blijkt als  $b_{1,y}$  in 2.2.26 wordt geschreven als
- $$b_{1,y} = \frac{v_{1,y}(t) - v_{1,y}(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta v_{1,y}(t)}{\Delta t}$$
- (43) Goldberg (1958, p. 118).
- (44) Goldberg (1958, p. 113 en 119).
- (45) Goldberg (1958, p. 85).
- (46) Coleman (1968, p. 443). Om tot een betere schatting te komen zal in paragraaf 3.4 worden voorgesteld het gemiddelde te vervangen door een gewogen gemiddelde.
- (47) Coleman (1968, p. 444).
- (48) Oud (1977).
- (49) Wold (1969, p. 442).
- (50) Christ (1966, p. 320), Johnston (1972, p. 358).
- (51) Wold (1969, p. 463-464), Johnston (1972, p. 376). Gewone kleinste kwadraten schatters worden onzuiver en inconsistent voor met regressors gecorreleerde error-termen.
- (52) Fisher (1969, p. 492-493).
- (53) Wold (1969, p. 465-466).
- (54) Johnston (1972, p. 376-423).



(55) Zie Johnston (1972, p. 358-359):

als  $R \equiv$  aantal weggelaten variabelen in vergelijking

$G \equiv$  aantal current-endogene variabelen

$K \equiv$  aantal gepredetermineerde variabelen

$g \equiv$  aantal current-endogene variabelen in vergelijking

$k \equiv$  aantal gepredetermineerde variabelen in vergelijking

dan volgt uit de eerste formulering:

$$R \geq G - 1$$

vanwege  $R = (G - g) + (K - k)$  en dus  $G - g + K - k \geq G - 1$

de tweede formulering:

$$K - k \geq g - 1$$

(56) M.b.t. gereduceerde-vorm-vergelijking

$$v_2^y(t) = \gamma_{20} + \gamma_{22} \cdot v_2^y(t-1) + \gamma_{23} \cdot v_3^y(t-1) + e_2^y(t)$$

moet voor  $E(e_2^y(t) \cdot v_2^y(t-1)) = 0$  itererend gelden

$$E(e_2^y(t+1) \cdot v_2^y(t)) = 0$$

$$E(e_2^y(t+1) \cdot (\gamma_{20} + \gamma_{22} \cdot v_2^y(t-1) + \gamma_{23} \cdot v_3^y(t-1) + e_2^y(t))) = 0$$

$$\gamma_{20} E(e_2^y(t+1)) + \gamma_{22} E(e_2^y(t+1) \cdot v_2^y(t-1)) + \gamma_{23} E(e_2^y(t+1) \cdot v_3^y(t-1)) + E(e_2^y(t+1) \cdot e_2^y(t)) = 0$$

Aangezien uit  $E(e_2^y(t)) = 0$  itererend volgt  $E(e_2^y(t+1)) = 0$  is hieraan voldaan als bovendien

$$E(e_2^y(t+1) \cdot v_2^y(t-1)) = 0$$

$$E(e_2^y(t+1) \cdot v_3^y(t-1)) = 0$$

$$E(e_2^y(t+1) \cdot e_2^y(t)) = 0$$

Het laatste verbiedt autocorrelatie.

(57) Dat is ook het geval bij z.g. recursieve stelsels, die de afwezigheid van geheugenloze feedback paren aan de assumpties  $E(e_i^y(t)) = 0$  en

$E(e_i^y(t) \cdot e_j^y(t)) = 0$  voor alle  $i, j \neq i$ . Uit de laatste assumptie is weer

afleidbaar, dat iedere  $e_i^y(t)$  ongecorrleerd is met alle onafhankelijke

variabelen in de betrokken vergelijking en dit is tezamen met  $E(e_i^y(t)) = 0$  voldoende voor het verkrijgen van consistente schattingen. Zie bijv.

Johnston (1972, p. 368-369 en 377-379), Wold (1969, p. 447) en Meissner (1971, p. 39).

(58) Johnston (1972, p. 379-380).

(59) Meissner (1971, p. 49).

## Hoofdstuk 3.

- (1) Desoer (1970, p. 46).
- (2) Zadeh and Desoer (1963, p. 65).
- (3) Zadeh and Desoer (1963, p. 66).
- (4) Zadeh and Desoer (1963, p. 95).
- (5) Zadeh and Desoer (1963, p. 49).
- (6) Willems, J.C. (1975, p. 22).
- (7) Willems, J.C. (1975, p. 25).
- (8) Willems, J.C. (1975, p. 25).
- (9) Willems, J.C. (1975, p. 25).
- (10) Willems, J.C. (1975, p. 27); waar hier  $M_{I/O}$ ,  $\langle M_{\Sigma}, x^* \rangle$ ,  $\Sigma$  en  $s$  staat gebruikt Willems de enigszins afwijkende symbolen  $\Sigma_{I/O}$ ,  $\{\Sigma_M, x^*\}$ ,  $X$  en  $\phi$ .
- (11) Willems, J.C. (1975, p. 29).
- (12) Willems, J.C. (1975, p. 27).
- (13)  $x(t) \equiv s(t, t_0, x_0, u)$  (zie 3.1.5) staat voor een hele tijdfunctie  $x \in \Sigma$ , terwijl  $(x(t))(t')$  de waarde van de tijdfunctie op tijdstip  $t'$  aanduidt.
- (14) Willems, J.C. (1975, p. 38).
- (15) Willems, J.C. (1975, p. 33, 34 en 45).
- (16) Zadeh and Desoer (1963, p. 166-167, 170-173).
- (17) Willems, J.C. (1975, p. 34-47). Zijn benadering via de Hankel-matrix - zie Gantmacher (1959) - is gebaseerd op het werk van Kalman (1968), Kalman, Falb and Arbib (1969), Brockett (1970) and Silverman (1971).
- (18) Willems, J.C. (1975, p. 32).
- (19) Zie voor de fundamentele stelling van differentiaal-vergelijkingen en voor de bedoelde restricties: Desoer (1970, p. 32-34 en 46). In het geval van  $T = \text{Re}^{0,+}$  garandeert de fundamentele stelling van differentiaal-vergelijkingen niet alleen een unieke oplossing (integraal) voor volledig continue inputs  $u$  maar ook al voor stuksgewijs ("piecewise") continue inputs  $u$ , d.w.z. inputs  $u$  met een eindig aantal discontinuïteitspunten.
- (20) Zie voor de berekening van determinanten en cofactoren bijv. Johnston (1972, p. 78-87).

- (21) Zie voor een uitgebreid overzicht van soorten stabiliteit en stabiliteitscondities: Willems, J.L. (1970).
- (22) Blalock (1969, p. 106-126).
- (23) Kwakernaak and Sivan (1972, p. 25-26) gaan uit van ruimere definities van de drie genoemde stabiliteitsvormen (i.s.L., asymptotisch en totaal asymptotisch). Stabiliteit blijft in deze definities niet noodzakelijk beperkt tot evenwichtoplossingen  $x^*(t)$  onder constante  $u^*$  maar kan toe-komen aan iedere z.g. nominale oplossing  $x^*(t)$  onder nominale  $u^*$ , d.w.z. aan ieder willekeurig gekozen oplossing onder een vast gekozen (niet noodzakelijk constante) input. Zij bewijzen vervolgens voor de modellen  $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$  en  $[A, B, C, D]$ , dat stabiliteit van  $x^*(t) = 0$  (on-der  $u^* = 0$ ) in enige van de drie betekenissen stabiliteit in die bete-kenis impliceert van welke nominale  $x^*(t)$  dan ook. In het licht hiervan noemen ook zij deze modellen stabiel in de betrokken betekenis, indien  $x^*(t) = 0$  stabiel is in die betekenis.
- (24) Willems, J.L. (1970, p. 49-50, 173-174); Desoer (1970, p. 145-146); Zadeh and Desoer (1963, p. 375-376).
- (25) Willems, J.L. (1970, p. 52-53).
- (26) Willems, J.L. (1970, p. 53-54).
- (27) Willems, J.L. (1970, p. 99-106).
- (28) Willems, J.L. (1970, p. 106).
- (29) Zie bijv. Theil (1971), Johnston (1972), Kmenta (1971), Mosbaek and Wold (1970), Wonnacott and Wonnacott (1970), Christ (1966).
- (30) Jöreskog (1976), Jöreskog and Sörbom (1975), Jöreskog (1974), Jöreskog (1973), Werts, Linn and Jöreskog (1974, 1971).
- (31) Meissner (1971, passim).
- (32) Meissner (1971, p. 134).
- (33) Klein (1950).
- (34) Meissner (1971, p. 137).
- (35) Fisher (1969, p. 497-498): eigenwaarden  $\bar{\sigma}_i \pm j\omega_i$  van  $K$  hebben  $\sqrt{\bar{\sigma}_i^2 + \omega_i^2} \leq 1$  en  $+1$  is geen eigenwaarde. Fisher doelt hiermee waarschijn-lijk op stabiliteitsvoorwaarde 3.2.48.
- (36) Johnston (1972, p. 400); Theil (1971, p. 536-539).
- (37) Johnston (1972, p. 275-278).
- (38) Theil (1971, p. 411-413, 485-487).

- (39) Zie bijv. Johnston (1972, p. 250-252, 312-313).
- (40) In de tabel - zie bijv. Theil (1971, p. 724-725) - worden voor iedere  $k$  (het aantal geschatte coëfficiënten in de vergelijking) waarden  $d_L$  en  $d_U$  gegeven. Indien
- $d < d_L$ : verwerp nulhypothese van non-autocorrelatie ten gunste van de hypothese van positieve autocorrelatie
  - $d > d_U$ : verwerp nulhypothese niet
  - $d_L < d < d_U$ : de toets geeft geen uitsluitsel.
- (41) De grootte  $h$  wordt eenzijdig als  $z$  getoetst in de normaal-verdeling; als bijv.  $h > 1.645$  wordt de hypothese van de non-autocorrelatie verworpen op het 5%-niveau.
- (42) Zie bijv. Johnston (1972, p. 144-145 en 138).
- (43) Zie Johnston (1972, p. 246-249, 307-309).
- (44) Johnston (1972, p. 311).
- (45) Johnston (1972, p. 263 en 318); Johnston behandelt ook driestaps-, iteratieve en zoekprocedures. Een belangrijke vooruitgang heeft de analyse van afhankelijkheden in tijdseries ondergaan door het werk van Box and Jenkins (1976). Hun ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average)-benadering geeft een veel algemener kader, waarin behalve voor autoregressieve ook voor z.g. "integrated moving average"-processen plaats is. Zie ook Glass, Willson and Gottman (1975).
- (46) Theil (1971, p. 259-261).
- (47) Theil (1971, p. 261).
- (48) Een bewijs voor de equivalentie en een direct bewijs voor Rank  $A \cdot \phi = p - 1$  wordt gegeven door Johnston (1972, p. 359-361). Een recente behandeling van identificeerbaarheid en de rang-voorwaarde in een wat algemener kader vindt men bij: van der Genugten (1977).
- (49) Johnston (1972, p. 369-370).
- (50) Theil (1972, p. 504-507, 526).
- (51) Theil (1971, p. 454).
- (52) Theil (1971, p. 500).
- (53) Sommige auteurs, bijv. Johnston (1972, p. 384) laten bij de berekening van de  $s_j^2$  in  $\Sigma$  delen door het betrokken aantal vrijheidsgraden  $n - k_j$ . Dit is bij de residuele covarianties  $s_{jj}$ , alleen daarom al niet toepasbaar, omdat het aantal geschatte coëfficiënten  $k_j$  in de ene vergelijking niet gelijk hoeft te zijn aan het aantal  $k_j$  in de andere vergelijking. De keuze van de grootste van beide is uiteraard conservatiever dan van de kleinste. Nu heeft consistentie betrekking op  $n \rightarrow \infty$  en dus op het

- gebruik van grote steekproeven. In het geval van een grote  $n$  zal de correctie met  $k_j$ ,  $k_j'$  of geen correctie weinig verschil uitmaken (Theil, 1972, p. 451 en 498).
- (54) Goldberger, Nagar and Odeh (1961).
- (55) De 2SLS-procedure werd ter controle uitgevoerd op de data, behorend bij Klein's model I, die Theil geeft op p. 456. De schattingen kwamen exakt overeen met die, welke Theil geeft in tabel 10.3 op p. 517 en tabel 10.4 op p. 518. De volgende onnauwkeurigheid werd geconstateerd in tabel 10.2 op p. 516:  
625.33 onder  $P_{-1}$  moet zijn: 655.33  
en in de titel van tabel 10.4 op p. 518:  
( $\times 10^4$ ) moet zijn: ( $\times 10^3$ ).
- (56) Theil (1971, p. 501-502, 525), Land (1973, p. 40-44).
- (57) Theil (1971, p. 528).
- (58) Johnston (1972, p. 181-183), Theil (1971, p. 608-609).
- (59) Jöreskog and Sörbom (1976a, p. 2).
- (60) Jöreskog and Sörbom (1976b); zie ook Sörbom (1974, 1977).
- (61) Mulaik (1972, p. 368-369); zie ook Lawley and Maxwell (1971, p. 109-111).
- (62) Zie bijv. Jöreskog (1976, p. 16 en 24).
- (63) Met pad-coëfficiënten wordt meestal bedoeld op gestandaardiseerde coëfficiënten van een recursief structureel model. Zie bijv. Blalock (1971), Duncan (1966), Duncan (1975) en Wright (1960a); zie ook Wright (1960b).
- (64) Zie bijv. Blalock (1971, p. 145-151); zie ook Duncan (1975, p. 51, 56-57), Wright (1960a).
- (65) Jöreskog (1973, p. 86), Jöreskog and Sörbom (1976a, p. 7).
- (66) Kendall and Stuart (1973, p. 392-395).
- (67) Jöreskog and Sörbom (1975).
- (68) Jöreskog and Sörbom (1976a, p. 8-9).
- (69) De toegepaste schattingsprocedure wordt beschreven door Gruvaeus and Jöreskog (1970). Mulaik (1972, p. 374-381) geeft een beknopte samenvatting in het kader van factor-analyse. Een gedetailleerde beschrijving, speciaal afgestemd op het LISREL-programma en waarin men zowel de statistische en numeriek-wiskundige achtergronden vindt als een aantal concreet uitgewerkte voorbeelden, wordt gegeven door van Leeuwe (1977).
- (70) Theil (1971, p. 525-526).

- (71) Johnston (1972, p. 398 en 400).
- (72) Jöreskog and Sörbom (1976a, p. 11).
- (73) Jöreskog and Sörbom (1976a, p. 22).
- (74) Mulaik (1972, p. 382-383).
- (75) Jöreskog (1973, p. 88 en 94).
- (76) Coleman (1968, p. 443 en 449) verklaart de suggestie voor deze procedure te hebben gekregen van T. Robert Harris.  
Formule (11.40) op p. 450:  

$$X_t = X_0 e^{Bt} - AB^{-1}$$
 moet in feite luiden:  

$$X_t = X_0 e^{Bt} + AB^{-1}[e^{Bt} - I]$$
 Het ontbreken van  $AB^{-1}e^{Bt}$  in de matrix-algebraïsche versie is des te opmerkelijker, omdat (11.8) op p. 435  

$$x_{1t} = \frac{a}{b}(e^{b\Delta t} - 1) + x_{10}e^{b\Delta t}$$
 zowel  $-\frac{a}{b}$  als  $\frac{a}{b}e^{b\Delta t}$  bevat. Opmerkelijk is bovendien, dat geen matrix-algebraïsche versies worden gegeven voor (11.16) en (11.22) op resp. p. 441 en 443 (constante en niet-constante onafhankelijke variabelen).
- (77) Theil and Boot (1962, p. 147-152).
- (78) Zie voor de berekening van determinanten en cofactoren bijv. Johnston (1972, p. 78-87).
- (79) Theil and Boot (1962, p. 151).
- (80) Theil (1971, p. 464).
- (81) Goldberger (1959).
- (82) Johnston (1972, p. 406).
- (83) Goldberger, Nagar and Odeh (1961).
- (84) Christ (1966, p. 494-578).
- (85) Christ (1966, p. 546).
- (86) Adelman and Adelman (1959, p. 597).
- (87) Zadeh and Desoer (1963, p. 59-60).
- (88) Zadeh and Desoer (1963, p. 65).
- (89) Zadeh and Desoer (1963, p. 97).

- (90) Zadeh and Desoer (1963, p. 99-105, 190-193).
- (91) Zadeh and Desoer (1963, p. 105).
- (92) Zie voor de z- en Laplace-transformatie bijv. Zadeh and Desoer (1963, p. 535-546).

## Hoofdstuk 4

- (1) Mommers (1973a), Mommers (1973b), Mommers (1974), Mommers (1975).
- (2) Zie voor het gebruik van dummy-variabelen bijv. Kerlinger and Pedhazur (1973, p. 116-121).
- (3) Mommers (1975, p. 90).
- (4) Mommers (1975, p. 91).
- (5) Jöreskog (1976, p. 27-28).
- (6) Jöreskog (1974, p. 5-12).
- (7) Het LISREL-programma berekent overigens anders dan de handleiding suggereert - zie Jöreskog and Sörbom (1976a, p. 9) - de variantie-covariantie-matrix S van geobserveerde variabelen in de steekproef met noemer n en niet n - 1.
- (8) Jöreskog and Sörbom (1976a, p. 9).
- (9) Mommers (1974, p. 16).
- (10) Mommers (1974, p. 94 en 66).
- (11) Gorsuch (1974, p. 230).
- (12) Gulliksen (1950, p. 108-110), Lord and Novick (1968, p. 129-131).
- (13) Duker (1975, p. 8, 51, 138-139 en 141).
- (14) Coleman (1968, p. 445-448).
- (15) Coleman (1968, p. 446).
- (16) Coleman (1968, p. 445).
- (17) Taylor (1968); Abelson (1964); French (1956); Harary (1959).
- (18) Taylor (1968, p. 121).
- (19) In Taylor's (1968) formule (16) op p. 134 moet het teken van de laatste term  $+x_i^2 \sum_k b_{ik} s_k$  vervangen worden door -.



## Summary

The aim of "Systems Methodology in Social Research" is to narrow the gap between systems theoretical analysis in social science and practical research procedures. The book contains a discussion of relevant topics from systems methodology and mathematical systems theory. An attempt is made to relate these topics to current models and procedures in social research. The latter include recursive and interdependent structural models, path analysis, Blalock's causal modeling and the LISREL-approach of Jöreskog and associates. In the fourth and last chapter systems methodology as presented in the previous chapters is illustrated by several research applications (in the field of braille reading by blind children) and a research proposal (in the field of attitudes toward self-injurious behavior of mentally deficient children).

In the first chapter "Systems approach and system model" some starting points and aims of the "general systems movement" are indicated along with parallel developments in social research. It is emphasized, that the "systems approach" currently exemplified by many publications in natural science, technology and social science alike should be considered as a new methodology applicable to familiar problem areas rather than a science with a problem area of its own. At the same time it is stressed that systems methodology does not aim at a radical break with current research practice but, on the contrary, follows current developments, not least in social research.

In the second chapter "Mathematical representation: descriptive and explanatory" a sharp distinction is made between a system model  $S$  as abstraction model of reality and a systemic explanatory model  $R(S)$  as mathematical representation model for  $S$ . The term "mathematical system" is reserved for the interconnection  $\mathcal{S}$  in  $R(S)$ . To avoid misunderstandings the mathematical models, on which  $R(S)$  is based or which are deducible from  $R(S)$ , in particular input-output-models, state-space models and difference or differential models  $[A, B, C, D]$  or  $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$ , are not called "system" or "system model", even though these terms are frequently found in the literature. The latter models form the subject matter of the third chapter "Systemic explanatory models", ending with a more thorough treatment of explanatory model  $R(S)$  based now on state-space models as components of the interconnection  $\mathcal{S}$ . Other topics dealt with

in the third chapter are the essentials of realization, i.e. representing an input-output model as a state-space model, followed by solutions and stability conditions for the time-invariant  $[A,B,C,D]$  and the time-varying  $[A(t),B(t),C(t),D(t)]$ , both viewed as defining state-space models. A considerable part of the same chapter is devoted to the stochastic case of  $[A,B,C,D]$ , especially to estimation procedures. These are in fact related to and largely taken from current econometric and social research methodology and are shown to have the greatest importance for use in social research applications.

Throughout this study a great deal of emphasis is laid on two distinctive features of systems methodology as compared to current social research methodology. In the first place the description of reality is carried out in terms of time functions, which makes it easier to account for the dynamic nature of reality than in the strongly cross-sectionally oriented social research tradition. Predictions of future behavior become possible and at the same time the explanatory models can be tested in their dynamic implications. Both are illustrated by the research applications in the fourth chapter. In the second chapter mathematical formulations using time functions are presented for relatively simple explanatory relationships, followed by a comparison between the cross-sectional and time-serial approach of these relationships. The advantages of the time-serial approach are emphasized. Secondly systems methodology is explicitly designed to account for the complex nature of reality. Complexity is manifest in the case of different causal mechanisms operating simultaneously, especially if operating in opposite directions as with feedback mechanisms. It is for this reason the explanatory models of the third chapter take, in principle, a multi-relational form, so that feedback mechanisms can be incorporated. More or less complex examples of feedback mechanisms are also illustrated by the research applications in the fourth chapter.

The study ends with three appendices. Appendix A contains a computer procedure in SPEAKEASY statements used for estimation and prediction in the research applications. This computer procedure can with necessary modifications be used in other research applications as well. Appendix B and C give the data of the research applications.

No or little attention is paid to problems of control and optimization, although the practical significance of the systems approach largely depends on the solution of these problems. The strong emphasis on modeling and estimation is exclusively based on the consideration that these topics first need elaboration before further steps can be taken towards a more systematic application of control and optimization procedures in social science.

## Résumé

"Méthodologie des systèmes dans les recherches sociales" vise à diminuer la distance qui sépare l'analyse théorique des systèmes dans les sciences sociales et les procédures de recherche couramment appliquées. Le livre contient une discussion portant sur des sujets provenant de la méthodologie des systèmes et de la théorie mathématique des systèmes. Une tentative est faite pour relier ces sujets aux méthodes et modèles courants dans les recherches sociales. Parmi ceux-ci se trouvent les modèles structuraux récursifs et interdépendants, l'analyse de dépendance, les modèles causaux de Blalock et l'approche LISREL développée par Jöreskog et ses collègues. Dans le quatrième et dernier chapitre la méthodologie des systèmes telle qu'elle est présentée dans les chapitres précédents est exemplifiée par plusieurs applications (dans le domaine des recherches concernant la lecture en Braille par des enfants aveugles) et par une proposition pour un projet de recherche (dans le domaine des attitudes envers le comportement automutilant de jeunes déficients mentaux).

Le premier chapitre "L'approche systémique et le modèle systémique" contient un aperçu de quelques points de départ et de quelques buts du "general systems movement". Il contient également des références aux développements parallèles qui se sont produits dans les recherches sociales. L'auteur fait ressortir que l'approche systémique dont on trouve actuellement de nombreux exemples dans des publications portant aussi bien sur les sciences naturelles et la technologie que sur les sciences sociales, doit être considérée plutôt comme une méthodologie nouvelle qui peut être appliquée à des domaines déjà connus et non pas comme une science qui revendique un domaine propre à elle. En même temps l'accent est mis sur le fait que la méthodologie des systèmes ne vise pas à une rupture radicale avec la pratique actuelle des recherches mais au contraire suit les développements actuels, notamment dans les sciences sociales.

Dans le deuxième chapitre "Représentation mathématique: descriptive et explicative" une distinction nette est faite d'un modèle systémique  $S$  qui est un modèle d'abstraction de la réalité, et d'un modèle systémique explicatif  $R(S)$  qui est un modèle mathématique représentant  $S$ . Le terme "système mathématique" est réservée à l'entreconnexion  $\delta$  dans  $R(S)$ .

Afin d'éviter les malentendus, les modèles mathématiques sur lesquels  $R(S)$  est fondé ou qui peuvent être déduits de  $R(S)$ , en particulier les modèles input-output, les modèles espace d'états et les modèles de différence et différentiels  $[A,B,C,D]$  et  $[A(t),B(t),C(t),D(t)]$  ne sont pas appelés "systèmes" ou "modèles systémiques", même si l'on trouve souvent ces termes dans la littérature. Ces derniers modèles forment le sujet du troisième chapitre "Modèles explicatifs systémiques", qui se termine par un traitement plus approfondi du modèle explicatif  $R(S)$ , maintenant fondé sur les modèles espace d'états, formant des composants de l'entreconnexion $\delta$ . D'autres sujets traités dans le troisième chapitre sont les rudiments de la réalisation, c'est-à-dire la représentation d'un modèle input-output comme un modèle espace d'états, suivis par des solutions et des conditions de stabilité pour  $[A,B,C,D]$  (le cas stationnaire) et pour  $[A(t),B(t),C(t),D(t)]$  (le cas non-stationnaire), regardés tous les deux comme définissant des modèles espace d'états. Une partie considérable du chapitre est vouée au cas stochastique de  $[A,B,C,D]$ , notamment aux procédures d'estimation. Celles-ci sont en effet reliées et en grande partie empruntées à l'économétrie et à la méthodologie courante des recherches sociales. Leur grande importance pour des applications dans le domaine des recherches sociales est démontrée.

A travers l'étude entière deux traits distinguant la méthodologie courante des recherches sociales et la méthodologie des systèmes sont particulièrement soulignés. Premièrement la réalité est décrite en termes de fonctions du temps. Cela permet de rendre compte de la nature dynamique de la réalité plus facilement que dans la tradition des recherches sociales, où l'analyse cross-sectionnelle prédomine. Ainsi des prédictions du comportement futur deviennent possibles. En même temps les modèles explicatifs peuvent être éprouvés dans leurs implications dynamiques. On verra cela dans les applications de recherche présentées dans le quatrième chapitre. Dans le deuxième chapitre des formulations mathématiques utilisant des fonctions du temps sont présentées pour des relations explicatives relativement simples. Ensuite l'approche cross-sectionnelle et l'approche temporelle de ces relations sont comparées. Les avantages de l'approche temporelle sont soulignés. Deuxièmement la méthodologie des systèmes est explicitement conçue pour rendre compte de la complexité de la réalité. Cette complexité est apparente quand différents mécanismes

causaux opèrent simultanément, notamment quand ils opèrent dans des directions opposées, comme c'est le cas quand il s'agit de mécanismes de rétroaction. C'est pourquoi les modèles explicatifs du troisième chapitre sont en principe à relations multiples, de sorte que les mécanismes de rétroaction peuvent être incorporés. On verra également des exemples plus ou moins complexes de mécanismes de rétroaction dans les applications de recherche dans le quatrième chapitre.

L'ouvrage se termine par trois appendices. L'appendice A contient une procédure d'ordinateur en SPEAKEASY utilisée pour l'estimation et la prédiction dans les applications de recherche. Cette procédure peut être utilisée avec les modifications nécessaires aussi bien dans d'autres applications. Les appendices B et C contiennent les données des applications de recherche.

Les problèmes de contrôle et de contrôle optimal reçoivent peu ou pas d'attention, bien que la signification pratique de l'approche dépende largement de la solution de ces problèmes. L'attention presque exclusive qui est donnée aux modèles et à l'estimation des modèles est uniquement justifiée par la conviction que ces sujets doivent être élaborés avant qu'on puisse procéder à une application plus systématique de procédures de contrôle dans les sciences sociales.

## Literatuur

- Abelson, R.P. (1964), Mathematical models of the distribution of attitudes under controversy, in: Frederiksen, N. and Gulliksen, H., (eds.), Contributions to mathematical psychology, Holt/Rinehart and Winston, New York.
- Ackoff, R.L., (1968), Scientific method; optimizing applied research decisions, Wiley, New York, (1st edition 1962).
- Ackoff, R.L., (1969), Systems, organizations and interdisciplinary research, in: Litterer (1969, p. 120-126), oorspronkelijk in: General Systems; the Yearbook of the Society for General Systems Research, V, 1960, p. 1-8.
- Adelman, I., and Adelman, F.L., (1959), The dynamic properties of the Klein-Goldberger Model, in: Econometrica, 27, p. 596-625.
- Arbib, M.A., (1966), Automata theory and control theory; a rapprochement, in: Automatika, 3, p. 161-189.
- Ashby, W.R., (1968), An introduction to cybernetics, Methuen, London, (1st edition 1956).
- Ashby, W.R., (1969), Stability and adaptation, in: Litterer (1969, p. 62-76), oorspronkelijk in: Ashby, W.R., Design for a brain, Wiley, New York, 1960, (1st edition 1952), p. 44-70.
- Athans, M., and Falb, P.L. (1966), Optimal control; an introduction to the theory and its applications, McGraw-Hill, New York.
- Ayer, A.J., (1966), Over de persoonlijkheid, Spectrum, Utrecht/Antwerpen, (Aula), vertaling door A.M. Offermans-van Galen van: The concept of a person, MacMillan, London, 1963.
- Barton, A.H., and Anderson, B., (1961), Change in an organizational system; formalization of a qualitative study, in: Etzioni, A. (ed.), Complex organizations; a sociological reader, Holt/Rinehart and Winston, New York, p. 400-418.
- Bertalanffy, L. von, (1950), The theory of open systems in physics and biology, in: Science, III, p. 23-28.
- Bertalanffy, L. von, (1969), General systems theory: a critical review, in: Litterer (1969, p. 7-30), oorspronkelijk in: General Systems: the Yearbook of the Society for General Systems Research, VII, 1962, p. 1-20.
- Blalock, H.M., jr., (1964), Causal inferences in non-experimental research, University of North Carolina Press, Chapel Hill (N.C.).
- Blalock, H.M., jr., (1969), Theory construction; from verbal to mathematical formulations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (N.J.).
- Blalock, H.M., jr., (1971<sup>†</sup>), Causal inferences, closed populations, and measures of association, in: Blalock (1971, p. 139-151), oorspronkelijk in: American Political Science Review, 61, 1967, p. 130-136.

- Blalock, H.M., jr., (ed.), (1971), *Causal models in the social sciences*, MacMillan, London.
- Blalock, H.M., jr., and Blalock, A.B., (eds.), (1968), *Methodology in social research*, McGraw-Hill, New York.
- Blau, P.M., (1960), Structural effects, in: *American Journal of Sociology*, 25, p. 178-193.
- Blumer, H., (1948), Public opinion and public opinion polling, in: *American Sociological Review*, 13, p. 542-549.
- Bok, S.T., (1968), *Cybernetica; stuurkunde; hoe sturen wij ons leven, ons werk en onze machines?*, 7e druk, Het Spectrum, Utrecht/Antwerpen, (Aula).
- Boudon, R., (1967), *L'analyse mathématique des faits sociaux*, Plon, Paris.
- Boulding, K.E., (1956), General systems theory; the skeleton of science, in: *Management Science*, 2, p. 197-208.
- Box, G.E.P., and Jenkins, G.M., (1976), *Time series analysis: forecasting and control*, Holden-Day, San Francisco, (1st ed. 1969).
- Bridgman, P.W., (1943), *The nature of thermodynamics*, Harvard University Press.
- Brillouin, L., (1949), Life, thermodynamics and cybernetics, in: *American Scientist*, 36, p. 554-568.
- Brockett, R.W., (1970), *Finite dimensional linear systems*, Wiley, New York.
- Buck, R.C., (1956), On the logic of general behavior system theory, in: Feigl, H., and Scriven, M. (eds.), *Minnesota studies in the philosophy of science, I*, University of Minnesota Press, Minneapolis, p. 223-238.
- Campbell, D.T., and Stanley, J.C., (1963), Experimental and quasi-experimental designs for research on teaching, in Gage, N.L., (ed.), *Handbook of research on teaching*, Rand McNally, Chicago, p. 171-246.
- Cannon, W.B., (1932), *The wisdom of the body*, W.W. Norton, New York.
- Carlyle, J.W., (1969), Stochastic finite-state system theory, in: Zadeh, L.A., and Polak, E., (eds.), *System theory*, Tata McGraw-Hill, Bombay, p. 387-423.
- Carnap, R., (1966), *Philosophical foundations of physics; an introduction to the philosophy of science*, Basic books, New York/London.
- Cartwright, D. (1959), The potential contribution of graph theory to organization theory, in: Haire, M. (ed.), *Modern organization theory*, Wiley, New York, p. 254-271.
- Chomsky, N., (1957), *Syntactic structures*, Mouton, The Hague.
- Christ, C.F., (1966), *Econometric models and methods*, Wiley, New York.
- Churchman, C.W., Ackoff, R.L., and Arnoff, E.L., (1957), *Introduction to operations research*, Wiley, New York.
- Cohen, S., and Pieper, S.C., (1976), *The SPEAKEASY-3 Reference manual; Level Lambda; IBM OS/VS Version*, Argonne National Laboratory, Argonne (Ill.).



- Coleman, J.S., (1958), Relational analysis; the study of social organizations with survey methods, in: *Human Organization*, 17, p. 28-36.
- Coleman, J.S., (1964), *Introduction to mathematical sociology*, Free Press, New York/London.
- Coleman, J.S., (1968), The mathematical study of change, in: Blalock and Blalock (1968, p. 428-478).
- Coleman, J.S., (1970), The methods of sociology, in: Forcese, D.P., and Richer, St., (eds.), *Stages of social research; contemporary perspectives*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (N.J.), p. 399-419, oorspronkelijk in: Bierstedt, R., (ed.), *A design for sociology; scope, objectives and methods*, Monograph 9, American Academy of Political and Social Science, Philadelphia, 1969, p. 86-114.
- Cook, L.A., (1945), An experimental sociographic study of a stratified 10th grade class, in: *American Sociological Review*, 10, p. 250-261.
- Coombs, C.H., Dawes, R.M., and Tversky, A., (1970), *Mathematical psychology; an elementary introduction*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (N.J.).
- Corte, H.E., Wolf, M.M., and Locke, B.J., (1971), A comparison of procedures for eliminating self-injurious behavior of retarded adolescents, in: *Journal of Applied Behavior Analysis*, 4, p. 201-213.
- Costner, H.L., Leik, R.K., (1964), Deductions from "axiomatic theory", in: *American Sociological Review*, 29, p. 819-835.
- Davis, J.A., Spaeth, J.L., and Huson, C., (1961), A technique for analyzing the effects of group composition, in: *American Sociological Review*, 26, p. 215-226.
- Desoer, C.A., (1970), *Notes for a second course on linear systems*, Van Nostrand Reinhold, New York.
- Duker, P.C.C., (1975), *Zelfverwendend gedrag bij zwakzinnigen; gedragsanalyse en -therapie*, Dissertatie K.U. Nijmegen.
- Duncan, O.D., (1963), Axioms or correlations?, in: *American Sociological Review*, 28, p. 452.
- Duncan, O.D., (1966), Path analysis; sociological examples, in: *American Journal of Sociology*, 72, p. 1-16.
- Duncan, O.D., (1975), *Introduction to structural equation models*, Academic Press, New York.
- Fast, J.D., (1970), Entropie en informatie, in: *Intermediair*, 6e jrg., nr. 35: p. 27-33, nr. 36: p. 43-47, oorspronkelijk in: *Alcuinus; tijdschrift Nederlandse studenten en afgestudeerden Technische Hogeschool Aken*, jrg. 11, nr. 12 en jrg. 12, nr. 1.
- Felling, A.J.A., (1974), *Sociaal-netwerkanalyse*, Samson, Alphen aan de Rijn.
- Festinger, L., (1949), The analysis of sociograms using matrix algebra, in: *Human Relations*, 2, p. 153-158.

- Festinger, L., Schachter, S., and Back, K., (1955), Matrix analysis of group structures, in: Lazarsfeld, P.F., and Rosenberg, M., (eds.), The language of social research, Glencoe (Ill.), p. 358-367, oorspronkelijk in: Festinger, L., Schachter, S., and Back, K., Social pressures in informal groups, New York, 1950, p. 132-147.
- Fisher, F.M., (1966), The identification problem in econometrics, McGraw-Hill, New York.
- Fisher, F.M., (1969), Causation and specification in economic theory and econometrics, in: Synthese, 20, p. 489-500.
- Forrester, J.W., (1971), World dynamics, Wright Allen Press, Cambridge (Mass.).
- Forsyth, E., and Katz, L., (1946), A matrix approach to the analysis of sociometric data, in: Sociometry, 9, p. 340-347.
- French, J.R.P., (1956), A formal theory of social power, in: Psychological Review, 63, p. 181-194.
- Galtung, H., (1967), Theory and methods of social research, Universitetsforlaget, Oslo etc.
- Gantmacher, F.R., (1959), The theory of matrices, vol. II, Chelsea, New York.
- Genugten, B.B. van der, (1977), Identification in statistical inference, in: Statistica Neerlandica, 2, p. 69-89.
- Gill, A., (1969a), Finite-state systems, in: Zadeh, L.A., and Polak, E., (eds.), System theory, Tata McGraw-Hill, Bombay, p. 43-94.
- Gill, A., (1969b), Linear modular systems, in: Zadeh, L.A., and Polak, E., (eds.), System theory, Tata McGraw-Hill, Bombay, p. 179-231.
- Glass, G.V., Willson, V.L., and Gottman, J.M., (1975), Design and analysis of time-series experiments, Colorado, Boulder (Color.).
- Gödel, K., (1930), Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionkalküls, in: Monatshefte für Mathematik und Physik, 27, p. 349-360.
- Gödel, K., (1931), Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, in: Monatshefte für Mathematik und Physik, 38, p. 173-198.
- Goldberg, S., (1958), Introduction to difference equations, Wiley, New York.
- Goldberger, A.S., (1959), Impact multipliers and dynamic properties of the Klein-Goldberger Model, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Goldberger, A.S., Nagar, A.L., and Odeh, H.S., (1961), The covariance matrices of reduced-form coefficients and of forecasts for a structural econometric model, in: Econometrica, 29, p. 556-573.
- Goldberger, A.S., and Duncan, O.D., (eds.), (1973), Structural equation models in the social sciences, Seminar Press, New York.
- Gorsuch, R.L., (1974), Factor analysis, Saunders, Philadelphia.

- Gray, D., (1971), Some comments concerning Maris on "logical adequacy", in: *American Sociological Review*, 36, p. 706-709.
- Gruvæus, G.T., and Jöreskog, K.G., (1970), A computer program for minimizing a function of several variables, *Research Bulletin 70-14*, Educational Testing Service, Princeton (N.J.).
- Gulliksen, H., (1950), *Theory of mental tests*, Wiley, New York.
- Haire, M., (ed.), (1959), *Modern organization theory*, Wiley, New York.
- Hall, A.D., (1962), *A methodology for systems engineering*, Nostrand, Princeton.
- Hall, A.D., and Fagen, R.E., (1969), Definition of system, in: *Litterer* (1969, p. 31-43), oorspronkelijk in: *General Systems; the Yearbook of the Society for General Systems Research*, I, 1956, p. 18-28.
- Halmos, P.R., (1968), *Intuïtieve verzamelingenleer*, Het Spectrum, Utrecht/Antwerpen, (Aula), vertaling door John Heise van: *Naive set theory*, Van Nostrand, Princeton, 1964.
- Hanken, A.F.G., (1970), *Systeemleer*, in: *Intermediair*, 6e jrg., nr. 15, p. 23-27.
- Hanken, A.F.G., and Buijs, B.G.F., (1971), *Systems analysis and business models*, in: *Annals of Systems Research; publication of the Netherlands Society for Systems Research*, 1, p. 9-16.
- Hanken, A.F.G., en Reuver, H.A., (1973), *Inleiding tot de systeemleer*, Stenfert Kroese, Leiden.
- Hanken, A.F.G., en Reuver, H.A., (1977), *Sociale systemen en lerende systemen*, Stenfert Kroese, Leiden.
- Harary, F., (1959), A criterion for unanimity in French's theory of social power, in: Cartwright, D. (ed.), *Studies in social power*, University of Michigan, Ann Arbor.
- Hempel, C.G., and Oppenheim, P., (1948), The logic of explanation, in: *Philosophy of Science*, 15, p. 135-175.
- Hempel, C.G., (1970), *Filosofie van de natuurwetenschappen*, Spectrum, Utrecht/Antwerpen, (Aula), vertaling door F. van Zetten van: *Philosophy of natural science*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.
- Hirsch, M.W., and Smale, St., (1974), *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, New York.
- Homans, G.C., (1950), *The human group*, Harcourt/Brace and World, New York.
- Homans, G.C., (1961), *Social behavior: its elementary forms*, Harcourt/Brace and World, New York.
- Homans, G.C., (1964), Bringing men back in, in: *American Sociological Review*, 29, p. 809-818.
- Hyman, H.A., (1955), *Survey design and analysis*, Free Press, Glencoe (Ill.).

- Johnston, J., (1972), *Econometric methods*, McGraw-Hill, New York (1st edition 1963).
- Jöreskog, K.G., (1973), A general method for estimating a linear structural equation system, in: Goldberger, A.S., and Duncan, O.D. (eds.), *Structural equation models in the social sciences*, Seminar Press, New York, p. 85-112.
- Jöreskog, K.G., (1974), Analyzing psychological data by structural analysis of covariance matrices, in: Krantz, D.H., Atkinson, R.C., Luce, R.D., and Suppes, P., (eds.), *Contemporary developments in mathematical psychology; vol. I: Measurement, psychophysics and neural information processing*, Freeman, San Francisco, 1974, p. 106-126.
- Jöreskog, K.G., (1976), *Structural equation models in the social sciences: specification, estimation and testing*, Research Report 76-9, Department of Statistics, Uppsala University, Uppsala.
- Jöreskog, K.G., and Sörbom, D., (1975), *Statistical models and methods for analysis of longitudinal data*, Department of Statistics, University of Uppsala, Uppsala.
- Jöreskog, K.G., and Sörbom, D., (1976a), LISREL III; estimation of linear structural equation systems by maximum likelihood methods; a FORTRAN IV program, National Educational Resources, Chicago.
- Jöreskog, K.G., and Sörbom, D., (1976b), COFAMM; confirmatory factor analysis with model modification; a FORTRAN IV program, National Educational Resources, Chicago.
- Kalman, R., (1967), Algebraic aspects of the theory of dynamical systems, in: Hale, J., and LaSalle, J., (eds.), *Proceedings of the International Symposium on Differential Equations and Dynamical Systems*, Academic Press, New York, p. 133-146.
- Kalman, R., (1968), *Lectures on controllability and observability*, Centro Internazionale Matematico Estivo, Bologna.
- Kalman, R., Falb, P.L., and Arbib, M.A., (1969), *Topics in mathematical systems theory*, McGraw-Hill, New York.
- Kaplan, A., (1964), *The conduct of inquiry; Methodology for behavioral science*, Chandler , San Francisco.
- Kendall, M.G., and Stuart, A., (1973), *The advanced theory of statistics, vol. 2: Inference and relationship*, Charles Griffin, London.
- Kendall, P.L., and Lazarsfeld, P.F., (1950), Problems of survey analysis, in: Merton, R.K., and Lazarsfeld, P.F., (eds.), *Continuities in social research; studies in the scope and method of "The American Soldier"*, Glencoe (Ill.), p. 133-196.
- Kerlinger, F.N., and Pedhazur, E.J., (1973), *Multiple regression in behavioral research*, Holt/Rinehart and Winston, New York.
- Klaus, G., (Hrsg.), (1968), *Wörterbuch der Kybernetik*, Dietz Verlag, Berlin.

- Klaus, G., und Buhr, M., (Hrsg.), (1970), Philosophisches Wörterbuch, 7. berichtigte Auflage, VEB Bibliographisches Institut, Leipzig, (1. Auflage 1964).
- Klein, L.R., (1950), Economic fluctuations in the United States, 1921-1941, Wiley, New York.
- Kmenta, J., (1971), Elements of econometrics, MacMillan, New York.
- Kneale, W., and Kneale, M., (1968), The development of logic, At the Clarendon Press, Oxford.
- Krantz, P.H., Luce, R.D., Suppes, P., and Tversky, A., (1971), Foundations of measurement, Academic Press, New York.
- Kwakernaak, H., (1975), Probabilistische systemen, in: Buffart, H.F.J.M., en Oud, J.H.L., (red.), Systeemleer, Stenfert Kroese, Leiden, p. 62-94.
- Kwakernaak, H., and Sivan, R., (1972), Linear optimal control systems, Wiley, New York.
- Land, K.C., (1973), Identification, parameter estimation, and hypothesis testing in recursive sociological models, in: Goldberger, A.S., and Duncan, O.D., (eds.), Structural equation models in the social sciences, Seminar Press, New York, p. 19-50.
- Lawley, D.N., and Maxwell, A.E., (1971), Factor analysis as a statistical method, 2nd ed., Butterworth, London.
- Lazarsfeld, P.F., (1955), Interpretation of statistical relations as a research operation, in: Lazarsfeld, P.F., and Rosenberg, M., (eds.), The language of social research, Free Press, Glencoe (Ill.), p. 115-125.
- Lazarsfeld, P.F., (1965), Problems in methodology, in: Merton, R.K., Broom, L., and Cottrell, L.S., (eds.), Sociology today; problems and prospects, 2nd edition, Harper and Row, New York (1st edition 1959), t. 1, p. 39-78.
- Lazarsfeld, P.F., and Menzel, H., (1961), On the relation between individual and collective properties, in: Etzioni, A., (ed.), Complex organizations; a sociological reader, New York, p. 422-440.
- Leent, J.A.A. van, (1964), Sociologie, psychologie en sociale psychologie; hun opbouw, ontwikkeling en verhouding uit macro-micro-oogpunt, W. de Haan, Zeist/van Loghum Slaterus, Arnhem.
- Leeuwe, J.F.J. van, (1977), Analyse van systemen van structurele vergelijkingen volgens Jöreskog, Intern rapport R.T.D. - Subfaculteit P.A.W., Nijmegen.
- Lektorsky, V.A., and Sadovsky, V.N., (1960), On principles of system research (related to L. v. Bertalanffy's general system theory), in: General Systems; the Yearbook of the Society for General Systems Research, V, p. 171-179.
- Lemmon, E.J., (1968), Moderne logica, Het Spectrum, Utrecht/Antwerpen, (Prisma compendia), vertaling door P. Brommer van: Beginning logic, Nelson and Sons, London, 1965 .

- Litterer, J.A., (ed.), (1969), *Organizations, II: Systems, control and adaptation*, Wiley, New York.
- Ljapunow, A., Kämmerer, W., und Thiele, H., (1966), *Probleme der Kybernetik*, Bd. 7, Akademie-Verlag, Berlin.
- Lord, F.M., and Novick, M.R., (1968), *Statistical theories of mental test scores*, Addison-Wesley, Reading (Mass.).
- Luce, R.D., (1950), *Connectivity and generalized cliques in sociometric group structure*, in: *Psychometrika*, 15, p. 169-190.
- Luce, R.D., and Perry, A.D., (1949), *A method of matrix analysis of group structure*, in: *Psychometrika*, 14, p. 94-116.
- Lyapunow, M.A., (1893), *Problème général de la stabilité du mouvement*, repr. in: *Annals of Mathematical Studies*, 17, Princeton University Press, Princeton (N.J.), 1949.
- Maris, R., (1970), *The logical adequacy of Homans' social theory*, in: *American Sociological Review*, 35, p. 1069-1081.
- Maris, R.W., (1971), *Second thoughts: uses of logic in theory construction*, in: *American Sociological Review*, 36, p. 713-715.
- McGinnis, R., (1965), *Mathematical foundations for social analysis*, Bobbs-Merril, Indianapolis.
- Meadows, D.H., (1972), *Rapport van de Club van Rome, Het Spectrum, Utrecht/Antwerpen, (Aula), vertaling van: The limits to growth, a report for the Club of Rome project on the predicament of mankind*, Universe Books, New York, 1972.
- Meadows, D.L., et al., (1974), *Dynamics of growth in a finite world*, Wright-Allen, Cambridge (Mass.).
- Meissner, W., (1971), *Ökonometrische Modelle: Rekursivität und Interdependenz aus der Sicht der Kybernetik*, Duncker und Humblot, Berlin.
- Meys, J.C., (1974), *De Z-verpleegkundige als groepsleidster*, scriptie K.U. Nijmegen.
- Mills, C.W., (1959), *The sociological imagination*, Oxford University Press, New York.
- Mommers, M.J.C., (1973a), *Braille-leestests; verantwoording, Deelrapport I van S.V.O.-project 0149*, Instituut voor Onderwijskunde, Nijmegen.
- Mommers, M.J.C., (1973b), *Braille-leestests; handleiding, Deelrapport II van S.V.O.-project 0149*, Instituut voor Onderwijskunde, Nijmegen.
- Mommers, M.J.C., (1974), *Toetsing van de verbale intelligentie en van de haptische waarneming bij blinde kinderen, Deelrapport III van S.V.O.-project 0149*, Instituut voor Onderwijskunde, Nijmegen.
- Mommers, M.J.C., (1975), *Onderzoek naar de samenhang tussen het haptisch onderscheidingsvermogen, de verbale intelligentie en het lezen van brailleschrift bij blinde kinderen, Deelrapport IV van S.V.O.-project 0149*, Instituut voor Onderwijskunde, Nijmegen.

- Mood, A.M., Graybill, F.A., and Boes, D.C., (1974), *Introduction to the theory of statistics*, McGraw-Hill, New York, 3rd edition (1st edition 1950).
- Mosbaek, E.J., and Wold, H.O., (1970), *Interdependent systems, structure and estimation*, North Holland Publ. Co., Amsterdam.
- Mulaik, S.A., (1972), *The foundation of factor analysis*, McGraw-Hill, New York.
- Nagel, E., Suppes, P., and Tarski, A., (eds.), (1962), *Logic, methodology, and philosophy of science; proceedings of the 1960 International congress*, Stanford University Press, Stanford (Cal.),
- Namoodiri, N.K., Carter, L.F., and Blalock, H.M., jr., (1975), *Applied multivariate analysis and experimental designs*, McGraw-Hill, New York.
- Nerode, A., (1958), *Linear automator transformations*, in: *Proceedings of the American Mathematical Society*, 9, p. 541-544.
- Northway, M.L., (1940), *A method for depicting social relationships obtained by sociometric testing*, in: *Sociometry*, 3, p. 144-150.
- Oppenheim, P., and Putnam, H., (1958), *Unity of science as a working hypothesis*, in: Feigl, H., Scriven, M., and Maxwell, G., (eds.), *Minnesota studies in the philosophy of science*, II, University of Minnesota Press, Minneapolis.
- Oud, J.H.L., (1977), *De analyse-richting bij causale hypothesen*, in: *Tijdschrift voor onderwijsresearch*, 2, p. 2-15.
- Pfanzagl, J., (1968), *Theory of measurement*, Physica-Verlag, Würzburg/Wien.
- Pierce, J.R., (1966), *Symbolen en signalen; aard en werking van de communicatie, Utrecht/Antwerpen (Aula)*, vertaling door J.R. de Wijn van: *Symbols, signals and noise*, Harper and Brothers, New York, 1961.
- Platt, J.R., (1961), *Properties of large molecules that go beyond the properties of their chemical subgroups*, in: *J. Theoretical Biology*, 1, p. 342-358.
- Polak, E., (1969), *Linear time-invariant systems*, in: Zadeh, L.A., and Polak, E., (eds.), *System Theory*, Tata McGraw-Hill, Bombay, p. 233-278.
- Polak, E., and Wong, E., (1970), *Notes for a first course on linear systems*, Van Nostrand Reinhold, New York.
- Post, E.L., (1921), *Introduction to a general theory of elementary propositions*, in: *The American Journal of Mathematics*, 43, p. 63-185.
- Price, R., (1971), *On Maris and the logic of time*, in: *American Sociological Review*, 36, p. 711-713.
- Quine, W.V., (1968), *Paradox*, in: Kline, M., (ed.), *Mathematics in the modern world*, Freeman, San Francisco, p. 200-208, oorspronkelijk in: *Scientific American*, april 1962.

- Rapoport, A., (1969), Mathematical aspects of general systems analysis, in: Litterer (1969, p. 88-97), oorspronkelijk in: The sciences of man; problems and orientations, Unesco/Mouton & Co., the Hague, 1968.
- Rootselaar, B. van, (1970), Wiskundige analyse, Wolters-Noordhoff, Groningen.
- Rudner, R.S., (1966), Philosophy of social science, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (N.J.).
- Salovaara, S., (1967), On set theoretical foundations of system theory; a study of the state concept, in: Acta Polytech. Scand., 15, p. 1-74.
- Scheuch, E.K., (1967), Entwicklungsrichtungen bei der Analyse sozialwissenschaftlicher Daten, in: König, R., (Hrsg.), Handbuch der empirischen Sozialforschung, Band I, 2. Auflage, Stuttgart, Anhang, p. 655-685.
- Schröder, E., (1895), Algebra und Logik der Relative, in: Vorlesungen über die Algebra der Logik, Leipzig.
- Schrödinger, E., (1945), What is life? The McMillan Co., New York.
- Schwirian, K.P., and Prehn, J.W., (1962), An axiomatic theory of urbanization, in: American Sociological Review, 27, p. 812-825.
- Shannon, C.E., (1948), A mathematical theory of communication, in: The Bell System Technical Journal, 27, p. 379-423, 623-656.
- Shannon, C.E., and Weaver, W., (1949), The mathematical theory of communication, University of Illinois Press, Urbana (Ill.).
- Silverman, L.M., (1971), Realization of linear dynamical systems, in: IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-16, p. 554-567.
- Simon, H.A., (1952), A formal theory of interaction in social groups, in: American Sociological Review, 17, p. 202-211, herdruk in: Simon, H.A., Models of man, Wiley, New York, 1957, p. 99-114.
- Simon, H.A., (1953), Causal ordering and identifiability, in: Hood, W.C., and Koopmans, T.C., (eds.), Studies in econometric methods, Wiley, New York, herdruk in: Simon, H.A., Models of man, Wiley, New York, 1957, p. 10-36.
- Simon, H.A., (1954), Spurious correlation; a causal interpretation, in: Journal of the American Statistical Association, 49, p. 467-479, herdruk in: Simon, H.A., Models of man, Wiley, New York, 1957, p. 37-49.
- Simon, H.A., (1955), Mechanisms involved in pressures toward uniformity in groups, in: Psychological Review, 62, herdruk in: Simon, H.A., Models of man, 1957, p. 115-130.
- Simon, H.A., (1969), The architecture of complexity, in: Litterer (1969, p. 98-114), oorspronkelijk in: Proceedings of the American Philosophical Society, vol. 106, no. 6, 1962, p. 467-482.
- Sörbom, D., (1974), A general method for studying differences in factor means and factor structure between groups, in: British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 27, p. 229-239.



- Sörbom, D., (1977), A statistical model for the analysis of covariance with fallible covariates, in: *Methoden en Data Nieuwsbrief van de Sociaal Wetenschappelijke Sectie van de Vereniging voor Statistiek*, 4, p. 4-33.
- Staal, J.F., (1970), De academicus als nowhere man, in: *De Gids*, 133, p. 96-159.
- Stegmüller, W., (1965), *Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie; eine kritische Einführung*, 3. wes. erw. Auflage, Alfred Kröner Verlag, Stuttgart.
- Stouffer, S.A., (1949-1950), Some observations on study design, in: *American Journal of Sociology*, 55, p. 355-361.
- Suppes, P., and Zinnes, J.L., (1963), Basic measurement theory, in: Luce, R.D., Bush, R.R., and Galanter, E., (eds.), *Handbook of mathematical psychology*, vol. I, Wiley, New York, p. 1-76.
- Szilard, L., (1929), Über die Entropieverminderung in einem thermodynamischen System bei Eingriffen intelligenter Wesen, in: *Zeitschrift für Physik*, 53, p. 840-846.
- Tannenbaum, A.S., and Bachman, J.G., (1963-1964), Structural versus individual effects, in: *American Journal of Sociology*, 69, p. 585-595.
- Tarski, A., (1965), *Introduction to logic and to the methodology of deductive sciences*, Oxford University Press, New York.
- Taylor, M., (1968), Towards a mathematical theory of influence and attitude change, in: *Human Relations*, 21, p. 121-139.
- Theil, H., (1971), *Principles of econometrics*, Wiley, New York.
- Theil, H., and Boot, J.C.G., (1962), The final form of econometric equation systems, in: *Review of the International Statistical Institute*, 30, p. 136-152.
- Tolman, E.C., (1951), Molar and purposive behaviorism, in: Marx, M.H., (ed.), *Psychological theory*, p. 410-428, oorspronkelijk in: Tolman, E.C., *Purposive behavior in animals and men*, New York, 1932.
- Turing, A.M., (1936-1937), On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem, in: *Proc. London Mathematical Society*, ser. 2, vol. 42, p. 230-265.
- Turner, St., (1971), The logical adequacy of "the logical adequacy of Homans' social theory", in: *American Sociological Review*, 36, p. 709-711.
- Vercruyse, E.V.W., (1960), *Het ontwerpen van een sociologisch onderzoek*, Assen.
- Waerden, B.L. van der, (z.j.), *Differentiaalrekening*, Servire, Den Haag.
- Weaver, W., (1948), Science and complexity, in: *American Scientist*, 36, p. 536-644.

- Werts, C.E., Linn, R.L., and Jöreskog, K.G., (1971), Estimating the parameters of path models involving unmeasured variables, in: Blalock, H.M., jr., (ed.), Causal models in the social sciences, MacMillan, London, p. 400-409.
- Werts, C.E., Linn, R.L., and Jöreskog, K.G., (1974), Quantifying unmeasured variables, in: Blalock, H.G., jr., (ed.), Measurement in the social sciences; theories and strategies, Aldine, Chicago, p. 270-292.
- Whitehead, A.N., (1948), Science and the modern world, Pelican Mentor Books, New York, (1st edition 1926).
- Whitehead, A.N., and Russell, B., (1910-1913), Principia mathematica, vols. I-III, Cambridge University Press, Cambridge, (2nd edition, London 1925-1927; verkorte tekst van I, Cambridge, 1962).
- Wiener, N., (1948), Cybernetics; control and communication in the animal and the machine, Wiley, New York.
- Wiener, N., (1956), I am a mathematician, Cambridge (Mass.).
- Wiener, N., (1968), The human use of human beings; cybernetics and society, Sphere Books, London, (1st edition 1950).
- Willems, J.C., (1975), Minimal realizations in state space form from input/output data, in: Buffart, H.F.J.M., en Oud, J.H.L., (red.), Systeemleer, Stenfert Kroese, Leiden, p. 22-61.
- Willems, J.C., (1978), Recursive filtering, in: Statistica Neerlandica, 32, p. 1-39.
- Willems, J.L., (1970), Stability theory of dynamical systems, Nelson, London.
- Windeknecht, T., (1967), Mathematical systems theory; causality, in: Mathematical Systems Theory, 1, p. 279-288.
- Wold, H.O., (1969), Mergers of economics and philosophy of science, in: Synthese, 20, p. 427-482.
- Wold, H.O., (1973), Cause-effects relationships; operative aspects, in: Suppes, P., Henkin, L., Moisil, Gr.C., and Joja, A., (eds.), Logic, Methodology and philosophy of science, IV, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, p. 789-801.
- Wonnacott, R.J., and Wonnacott, T.H., (1970), Econometrics, MacMillan, New York.
- Wright, S., (1921), Correlation and causation, in: Journal of Agricultural Research, 20, p. 557-585.
- Wright, S., (1934), The method of path coefficients, in: Annals of Mathematical Statistics, 5, p. 161-215.
- Wright, S., (1960a), Path coefficients and path regressions; alternative or complementary concepts?, in: Biometrics, 16, p. 189-202.
- Wright, S., (1960b), The treatment of reciprocal interaction, with or without lag, in path analysis, in: Biometrics, 16, p. 423-445.
- Yule, G.U., and Kendall, M.G., (1950), An introduction to the theory of statistics, Hafner, New York.

- Zadeh, L.A., (1969), The concepts of system, aggregate, and state in system theory, in: Zadeh, L.A., and Polak, E., (eds.), System theory, Tata McGraw-Hill, Bombay, p. 3-42.
- Zadeh, L.A., and Desoer, C.A., (1963), Linear system theory; the state space approach, McGraw-Hill, New York.
- Zadeh, L.A., and Polak, E., (eds.), (1969), System theory, Tata McGraw-Hill, Bombay.
- Zeisel, H., (1947), Say it with figures, Harper, New York.
- Zetterberg, H.L., (1965), On theory and verification in sociology, Bedminster Press, Totawa (N.J.), 3rd edition (1st edition 1954, 2nd edition 1963).
- Zulauf, A., (1969), The logical and set-theoretical foundations of mathematics, Oliver and Boyd, Edinburgh.

## Personenregister

- Abelson, R.P., 367, 371, 415, 422  
Ackoff, R.L., 9, 10, 398, 422, 423  
Adelman, F.L., 275, 276, 413, 422  
Adelman, I., 275, 276, 413, 422  
Anderson, B., 29, 401, 402, 422  
Arbib, M.A., 122, 409, 422, 427  
Aristoteles, 1, 3  
Arnoff, E.L., 9, 423  
Ashby, W.R., 4, 5, 12, 20, 398, 400, 401, 422  
Athans, M., 38, 422  
Atkinson, R.C., 427  
Avenarius, R., 404  
Ayer, A.J., 406, 422  
Bachman, J.G., 402, 432  
Back, K., 31, 402, 425  
Bartlett, M.S., 250, 350  
Barton, A.H., 29, 401, 402, 422  
Bertalanffy, L. von, 4, 5, 8, 9, 11, 17, 396, 397, 398, 399, 422, 428  
Bierstedt, R., 424  
Blalock, A.B., 423, 424  
Blalock, H.M., jr., 28, 29, 181, 251, 401, 402, 410, 412, 422, 423, 424, 430  
Blau, P., 401, 423  
Blumer, H., 400, 423  
Boes, D.C., 406, 430  
Bok, S.T., 398, 399, 423  
Boot, J.C.G., 266, 268, 269, 270, 413, 432  
Boudon, R., 27, 28, 401, 423  
Boulding, K.E., 4, 11, 23, 398, 423  
Box, G.E.P., 411, 423  
Bridgman, P.W., 17, 423  
Brillouin, L., 17, 423  
Brockett, R.W., 409, 423  
Broom, L., 428  
Buck, R.C., 9, 423  
Buffart, H.F.J.M., 428, 433  
Buhr, M., 7, 396, 397, 428  
Buijs, B.G.F., 403, 426  
Bush, R.R., 432  
Campbell, D.T., 401, 404, 406, 423  
Cannon, W.B., 17, 423  
Carlyle, J.W., 123, 423  
Carnap, R., 54, 396, 404, 405, 406, 423  
Carter, L.F., 28, 430  
Cartwright, D., 32, 402, 423, 426  
Chomsky, N., 15, 398, 423  
Christ, C.F., 274, 275, 401, 407, 410, 413, 423  
Churchman, C.W., 9, 423  
Cohen, S., 375, 423  
Coleman, J.S., 28, 32, 33, 42, 81, 93, 260, 264, 400, 401, 402, 403, 404, 406, 407, 413, 415, 424  
Cook, L.A., 31, 424  
Coombs, C.H., 396, 404, 405, 424  
Copernicus, N., 128  
Corte, H.E., 362, 424  
Costner, H.L., 68, 406, 424  
Cottrell, L.S., 428  
Davis, J.A., 402, 424  
Dawes, R.M., 396, 404, 405, 424  
Desoer, C.A., 40, 121, 122, 142, 145, 155, 278, 281, 282, 292, 403, 404, 405, 406, 409, 413, 414, 424, 434  
Driesch, H., 22  
Duker, P.C.C., 361, 415, 424  
Duncan, O.D., 28, 68, 406, 412, 424, 425, 427, 428  
Durbin, J., 222, 223  
Durkheim, E., 67  
Etzioni, A., 422, 428  
Fagen, R.E., 403, 426  
Falb, P.L., 38, 409, 422, 427  
Fast, J.D., 399, 424  
Feigl, H., 423, 430  
Felling, A.J.A., 32, 424  
Festinger, L., 29, 31, 402, 424  
Fisher, F.M., 106, 401, 406, 410, 425  
Forcese, D.P., 424  
Forrester, J.W., 51, 425  
Forsyth, E., 31, 425  
Frederikson, N., 422  
Frege, G., 53  
French, J.R.P., 368, 415, 425  
Gage, N.L., 423  
Galanter, E., 432  
Galtung, H., 396, 400, 401, 406, 425  
Gantmacher, F.R., 409, 425  
Genugten, B.B. van der, 411, 425  
Gill, A., 123, 425  
Glass, G.V., 411, 425

- Gödel, K., 53, 425  
 Goldberg, S., 89, 90, 407, 425  
 Goldberger, A.S., 28, 239, 271, 272, 275, 412, 413, 422, 425, 427, 428  
 Gorsuch, R.L., 351, 415, 425  
 Gottman, J.M., 411, 425  
 Gray, D., 68, 426  
 Graybill, F.A., 406, 430  
 Gruvaeus, G.T., 412, 426  
 Gulliksen, H., 415, 422, 426  
 Haire, M., 10, 398, 423, 426  
 Hale, J., 427  
 Hall, A.D., 9, 403, 426  
 Halmos, P.R., 404, 426  
 Hanken, A.F.G., 397, 403, 426  
 Harary, F., 368, 426  
 Harris, T.R., 413  
 Hempel, C.G., 70, 396, 406, 426  
 Henkin, L., 433  
 Hirsch, M.W., 155, 426  
 Homans, G.C., 25, 29, 32, 426, 429, 432  
 Hood, W.C., 431  
 Hume, D., 69  
 Huson, C., 402, 424  
 Hyman, H.A., 401, 426  
 Jenkins, G.M., 411, 423  
 Johnston, J., 107, 223, 257, 401, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 427  
 Joja, A., 433  
 Jöreskog, K.G., 28, 193, 245, 246, 247, 249, 250, 253, 256, 259, 410, 412, 413, 415, 426, 427, 433  
 Kalman, R., 122, 409, 427  
 Kämmerer, W., 429  
 Kaplan, A., 396, 427  
 Katz, L., 31, 425  
 Kendall, M.G., 252, 253, 406, 412, 427, 433  
 Kendall, P.L., 401  
 Kerlinger, F.N., 415, 427  
 Klaus, G., 7, 8, 396, 397, 427, 428  
 Klein, L.R., 204, 266, 267, 275, 410, 412, 422, 428  
 Kline, M., 430  
 Kmenta, J., 401, 410, 428  
 Kneale, M., 404, 428  
 Kneale, W., 404, 428  
 König, R., 431  
 Koopmans, T.C., 431  
 Koyck, L.M., 227  
 Krantz, P.H., 405, 427, 428  
 Kwakernaak, H., 38, 122, 155, 410, 428  
 Land, K.C., 412, 428  
 LaSalle, J., 427  
 Lawley, D.N., 412, 428  
 Lazarsfeld, P.F., 28, 29, 30, 33, 401, 402, 423, 427, 428  
 Leent, J.A.A. van, 24, 25, 398, 400, 428  
 Leeuwe, J.F.J. van, 412, 428  
 Leibniz, G.W., 83  
 Leik, R.K., 68, 406, 421  
 Lektorsky, V.A., 9, 428  
 Lemmon, E.J., 404, 406, 428  
 Lerner, A.P., 402  
 Lewin, K., 25  
 Linn, R.L., 410, 433  
 Litterer, J.A., 10, 398, 422, 426, 429, 431  
 Ljapunow, A., 397, 429  
 Locke, B.J., 362, 424  
 Lord, F.M., 415, 429  
 Luce, R.D., 31, 405, 427, 428, 429, 432  
 Lyapunow, M.A., 182, 429  
 Mach, E., 404  
 Mackeprang, E.P., 101  
 Malinvaud, E., 224  
 Maris, R.W., 68, 426, 429, 430  
 Marx, M.H., 432  
 Maxwell, A.E., 412, 428  
 Maxwell, G., 430  
 Maxwell, J.C., 16  
 McGinnis, R., 406, 429  
 Meadows, D.H., 51, 429  
 Meadows, D.L., 51, 429  
 Meissner, W., 200, 204, 408, 410, 429  
 Menzel, H., 29, 30, 428  
 Merton, R.K., 427, 428  
 Meys, J.C., 362, 429  
 Miller, J., 398  
 Mills, C.W., 401, 429  
 Moisil, Gr.C., 433  
 Moivre, A. de, 174  
 Mommers, M.J.C., 300, 301, 338, 344, 349, 415, 429

- Mood, A.M., 406, 430  
 Moreno, J.L., 31  
 Morgan, A. de, 3, 396  
 Mosbaek, E.J., 410, 430  
 Mulaik, S.A., 250, 259, 412, 413, 430  
  
 Nagar, A.L., 239, 272, 412, 413, 425  
 Nagel, E., 402, 430  
 Namboodiri, N.K., 28, 430  
 Nataf, A., 402  
 Nerode, A., 122, 430  
 Newton, I., 11, 82, 128  
 Northway, M.L., 31, 430  
 Novick, M.R., 415, 429  
  
 Odeh, H.S., 239, 272, 412, 413, 425  
 Oppenheim, P., 396, 400, 426, 430  
 Oud, J.H.L., 407, 428, 430, 433  
  
 Pedhazur, E.J., 415, 427  
 Peirce, Ch.S., 396  
 Perry, A.D., 31, 429  
 Pfanzagl, J., 405, 430  
 Pieper, S.C., 375, 423  
 Pierce, J.R., 398, 430  
 Platt, J.R., 24, 430  
 Polak, E., 155, 423, 425, 430, 434  
 Post, E.L., 53, 430  
 Prehn, J.W., 68, 431  
 Price, R., 68, 430  
 Putnam, H., 400, 430  
  
 Quine, W.V., 404, 430  
  
 Rapoport, A., 4, 16, 399, 431  
 Richer, St., 424  
 Rootselaar, B. van, 407, 431  
 Rosenberg, M., 425, 428  
 Rudner, R.S., 396, 431  
 Russel, B., 21, 53, 396, 433  
  
 Sadovsky, V.N., 9, 428  
 Salovaara, S., 122, 431  
 Schachter, S., 31, 402, 425  
 Scheuch, E.K., 33, 400, 403, 431  
 Schröder, E., 396, 431  
 Schrödinger, E., 17, 431  
 Schwirian, K.P., 68, 431  
 Scriven, M., 423, 430  
 Segeth, W., 3  
 Shannon, C.E., 5, 11, 13, 15, 397, 431  
 Silverman, L.M., 409, 431  
 Simon, H.A., 4, 26, 28, 29, 401, 431  
  
 Sivan, R., 38, 155, 410, 428  
 Smale, St., 155, 426  
 Sörbom, D., 245, 246, 247, 249, 253, 256, 410, 412, 413, 415, 427, 431, 432  
 Spaeth, J.L., 402, 424  
 Staal, J.F., 397, 432  
 Stanley, J.C., 401, 404, 406, 423  
 Stegmüller, W., 404, 432  
 Stone, R., 402  
 Stouffer, S.A., 401, 432  
 Stuart, A., 252, 253, 412, 427  
 Suppes, P., 402, 405, 427, 428, 430, 432  
 Szilard, L., 17, 432  
  
 Tannenbaum, A.S., 402, 432  
 Tarski, A., 396, 402, 404, 405, 406, 430, 432  
 Taylor, M., 367, 368, 369, 371, 415, 432  
 Theil, H., 222, 228, 236, 237, 257, 266, 268, 269, 270, 401, 402, 410, 411, 412, 413, 432  
 Thiele, H., 429  
 Tolman, E.C., 400, 432  
 Turing, A.M., 40, 403, 432  
 Turner, St., 68, 432  
 Tversky, A., 396, 404, 405, 424, 428  
  
 Vercruyse, E.V.W., 400, 432  
  
 Waerden, B.L. van der, 405, 432  
 Watson, J.B., 400  
 Weaver, W., 22, 397, 400, 431, 432  
 Werts, C.E., 410, 433  
 Whitehead, A.N., 21, 396, 433  
 Wiener, N., 5, 11, 18, 397, 433  
 Willems, J.C., 122, 127, 128, 130, 136, 144, 249, 409, 433  
 Willems, J.L., 155, 410, 433  
 Willson, V.L., 411, 425  
 Windeknecht, T., 122, 433  
 Wold, H.O., 77, 96, 106, 113, 204, 404, 406, 407, 408, 410, 430, 433  
 Wolf, M.M., 362, 424  
 Wong, E., 155, 430  
 Wonnacott, R.J., 401, 410, 433  
 Wonnacott, T.H., 401, 410, 433  
 Wright, S., 28, 412, 433  
 Wundt, W., 23  
  
 Yule, G.U., 406, 433

Zadeh, L., 40, 122, 142, 155, 278,  
281, 282, 292, 403, 404, 405,  
406, 409, 413, 414, 423, 425, 430,  
434  
Zeisel, H., 401, 434  
Zetterberg, H.L., 67, 406, 434  
Zinnes, J.L., 405, 432, 433  
Zulauf, A., 404, 406, 434

## Zakenregister

- adder, 62, 66
  - afhankelijkheid
    - gemeenschappelijke - (current endogene variabelen van gepredetermineerde variabelen), 213, 216
  - afleiding
    - geheugenloze - uit onderliggende gedragsvergelijking, 206
  - aggregatie, 32
  - amplitude (van karakteristieke excitatie-beweging), 174
    - constante -, 174, 176
    - verandering van -, 175
  - analyse
    - contextuele -, 30, 402
    - cross-sectionele -, 75
    - factor-, 28, 249
    - multi-niveau-, 29, 30, 32, 281
    - multivariate -, 27, 30
    - non-experimentele -, 27, 29, 32
    - pad-, 28, 250
    - structurele -, 31-32, 280
    - survey-, 28
    - systeem-, 50, 52
  - anticipativiteit
    - niet-, 121, 124
  - antinomie, 396
  - assumptie
    - causaliteits- (causaliteits-axioma), 76, 122, 195, 261
    - differentieerbaarheids-, 84-85
    - evenwichts-, 75, 98-111, 110, 200
    - lineariteits- m.b.t. [A,B,C,D], 152
    - lineariteits- m.b.t. input-segment in Coleman's procedure, 260
    - m.b.t. K, 206
    - stochastische - m.b.t. errorwaarden, 211-212
    - van Koyck-methode bij multicollineariteit, 227
    - van LISREL-benadering, 247, 253
    - van non-autocorrelatie, 109, 116-117
  - atomisme, 24
  - attitude, 278-281
  - autocorrelatie, 222 e.v., 240, 411
  - assumptie van non-, 109, 116-117
  - correctie voor -, 109, 116-117, 224 e.v.
  - in combinatie met lagged-afhankelijke variabele in vergelijking, 223
  - schattingsprocedures bij -, 224 e.v.
  - toetsen voor -, 109, 222-223
  - autoregressie-schema
    - le-orde -, 224
  - axioma
    - causaliteits-, 122, 195, 261
    - consistentie-, 124, 156
    - specificatie-, 46
    - stationariteits-, 125
    - tijd-invariantie-, 125
    - toestand-overgangs-, 124, 156
    - toestand-separatie-, 124, 156
    - van meet-theorie, 405
  - axiomatisering, 66
  - basis
    - voor toestand-ruimte, 145
    - voor toestand-ruimte-model, 137
  - begintijdstip, 80
  - begintoestand, 148
    - vereiste - bij gewenste excitatiewaarden, 180
  - beginvoorwaarde, 80, 158-159
  - benadering
    - limiterende - van onderliggende gedragsvergelijking aan de hand van geobserveerde variabelen, 206-207
  - molaire -, 24
  - moleculaire -, 24
  - van oplossing differentiaal-vergelijking, 87-88
  - van oplossing differentieel model, 157
- bepaaldheid, 119, 281
- bereikbaarheid
  - vanuit  $x^*$ , 129, 145-146, 191
- bereikbaarheidsindex, 145
- beschrijving
  - numerieke, 56-57, 59
- beslisbaarheid, 53
- beslissingsprocedure
  - mechanische -, 53
- beweging
  - convergerende -, 91, 178-179, 181
  - divergerende -, 91, 178-179
  - eindig oscillerende -, 91, 178-179
  - exponentiële -, 178-179
  - geometrische -, 178-179
  - karakteristieke -, 170, 265



- karakteristieke excitatie-, 171, 174, 179, 265, 382  
 monotone -, 91, 178-179  
 oscillerende -, 91, 178-179  
 vrije -, 157, 168, 178, 180-181, 265, 382  
 bit, 13-14  
 black box, 37-39, 40, 66  
 black-box-benadering, 37  
 block-diagram, 61, 280  
 box-cutting, 37  
 bron, 125, 288  
 bronpunt, 293  
 causaliteit  
   sterke -, 122, 124-125, 140, 285  
   zwakke -, 122, 124-125, 140, 282  
 coëfficiënt  
   constante -, 150  
   feedback-, 82, 85, 89  
   geheugenloze C-coëfficiënt in structurele modelvorm, 208  
   geheugenloze K-coëfficiënt in structurele modelvorm, 198, 207  
   gereduceerde-vorm-, 111, 231  
   gestandaardiseerde -, 250, 251, 412  
   hulp- bij identificatie volgens Coleman's procedure, 82  
   juist-geïdentificeerde -, 230  
   met geheugenwerking in onderliggende vergelijking, 207  
   ongeïdentificeerde -, 230  
   overgeïdentificeerde -, 230  
   pad-, 412  
   structurele-vorm-, 231  
 cofactor, 163, 409  
 communaliteit, 349  
 congenieriekheid  
   van meet-instrumenten, 342, 349  
 connectedness, 129  
 consistentie  
   logische -, 53  
   van OLS-schatter, 214, 217, 219, 235  
   van 2SLS-schatter, 238, 411  
   van schatter predictie-varianties en -covarianties, 273  
 constante  
   logische -, 59, 68  
 constraint, 14, 41, 43  
 continuïteit, 84  
   stuksgewijze -, 86, 139, 155, 157  
 controle, 5, 9, 38  
 optimale -, 40  
 controleerbaarheid naar x, 129  
 cybernetica, 4-7, 11, 14, 17-18, 28  
 data-matrix, 71-72, 116, 210  
   endogene -, 211  
   gepredetermineerde -, 211  
 datum  
   cross-sectioneel -, 76, 92, 116-117  
   input-output-, 128  
   relatieve -, 31-32  
   tijdserie-, 76, 92  
 decompositie-eigenschap  
   van lineaire response-functie, 134  
 delay-line, 135  
 delayor, 64, 66  
 determinant, 163, 409  
 deviatie-skore  
   in LISREL-benadering, 246  
 diagonaliseringsprocedure, 162-169  
 differentiaal-quotient, 54, 82-84, 143  
 differentiaal-rekening, 21, 54, 82  
 differentieerbaarheid, 84  
 differentie-quotient, 77-78  
 differentie-rekening, 79  
 dimensionaliteit  
   minimale - van toestand-ruimte, 135, 144-146  
 eenheid, 2, 45, 57, 71-72, 404  
 basis-, 47, 49  
 hoger-niveau-, 119  
 macro-, 29, 31, 36, 47, 50  
 meso-, 34  
 micro-, 29, 31, 34, 47, 60  
 eigenschap, 2, 31, 41  
   absolute -, 30  
   beslissings-, 38  
   constante -, 47, 50  
   contextuele -, 30  
   decompositie- van lineaire response-functie, 134  
   dichotome -, 405  
   globale -, 29  
   input-, 39  
   micro-, 34  
   output-, 39  
   polytome -, 405  
   regelbare -, 38-39  
   relatieve -, 32  
   response-separatie- van lineair toestand-ruimte-model, 125  
   structurele -, 32  
   toestand-, 38-40  
   veranderende -, 50-51

- eigenvector, 162, 169, 265
  - geconjugueerd komplexe -, 167
  - komplexe -, 167
  - lineair onafhankelijke -, 168
- eigenwaarde, 162, 169, 265, 355
  - geconjugueerd komplexe -, 166
  - komplexe -, 166
  - verschillende (distinct) -, 163, 185
- ektropie, 399
- elaboratie-techniek, 28
- element, 43-45, 57, 72, 404
  - basis-, 47
  - discreet -, 54
  - macro-, 47-49
  - meso-, 49
  - micro-, 48-49
  - niet-feitelijk -, 72
  - steekproef-, 71-72
- elementarisme, 24
- energie, 15, 18
  - vrije -, 16-17
- engineering
  - systems-, 9
- entropie, 15, 16, 19, 22
  - negatieve -, 17
- equifinaliteit, 17, 20
- equivalentie
  - Nerode-, 131
  - observationale - van structuren, 229
  - van toestanden, 132
  - van toestand-ruimte-modellen, 146-148
  - van verklaringsrelaties (koppelingen), 119
- equivalentie-klasse
  - Nerode-, 131-132
- error-term in vergelijking, 209
- evenwicht, 29
  - tussen verschillende variabelen via evenwichtstellende vergelijking, 75, 201
- evenwichtstoestand, 18-19, 75, 181
  - asymptotisch stabiele -, 19, 89, 182
  - instabiele -, 19
  - neutrale -, 19
  - stabiele - i.s.L., 182
  - totaal asymptotisch stabiele, 182
- excitatie, 171, 179-180
- excitatie-vector, 171, 180
- explanandum, 2
- explanans, 2
- explanatie, 396
- factor-skores, 250
- falsificatie, 70-71
- falsifieerbaarheid, 70-72
- fase
  - van karakteristieke excitatiebeweging, 174
- feedback, 20
  - negatieve -, 18, 89
  - positieve -, 89
- feedback-loop, 29, 81
  - geheugenloze -, 103-105, 201, 290
  - met geheugenwerking, 109
- feedback-mechanisme
  - impliciet -, 89
- feedthrough, 125, 140
- finaliteit, 17, 20
- fit
  - goodness-of- in LISREL-benadering, 253
- fout
  - structurele - in LISREL-benadering, 252
  - meet- in LISREL-benadering, 245, 252
  - predictie-, 272
- frequentie
  - van karakteristieke excitatiebeweging, 174
- functie
  - basis-, 137, 140, 142, 145
  - delta-, 140
  - l-l-op-, 146
  - input-output-, 122, 124
    - lineaire --, 133
    - niet-anticipatieve --, 122
    - sterk-causale --, 122, 125
    - zwak-causale --, 122, 125
  - likelihood-, 259
  - lineaire -, 259
  - meet-, 43, 56, 405
  - omkeer-, 76
  - oplossings-, 80
  - response-, 124, 165
    - impulse--, 139, 265
  - instantane --, 142
  - lineaire --, 133
    - sterk-causale --, 124, 126, 140, 285
    - tijd-invariante --, 126
    - tijd-variante --, 124
  - unit--, 137, 265
  - zero-input--, 137
  - zero-state--, 139
  - zwak-causale --, 124, 126, 282
- toestand-overgangs-, 123, 127, 265
  - tijd-invariante --, 126
  - tijd-variante --, 124

- stuksgewijs continue -, 155, 157  
 waarschijnlijkheids-, 42  
 uitlees-, 123  
 tijd-invariante --, 124  
 tijd-variante --, 123  
 functie(input)-klasse, 132, 134
- gain, 294  
 geheugenloze feedback-, 312
- gedeelte  
 imaginair - van complexe eigen-  
 waarde, 166  
 reëel - van complexe eigenwaarde,  
 166
- geheugenwerking, 66, 77, 121
- generalisatie, 41  
 accidentele -, 70  
 over eenheden, 46, 51  
 over de tijd (elementen), 46, 51,  
 52, 59  
 over populatie, 70, 73  
 universele -, 42
- geslotenheid onder translaties  
 van input-ruimte, 125  
 van output-ruimte, 125
- getal,  
 imaginair -, 166, 173  
 scalair -, 121
- getallen  
 verzameling reële -, 71  
 verzameling logisch-mogelijke -,  
 71  
 verzameling feitelijk-voorkomen-  
 de -, 71  
 verzameling steekproef-, 71, 74
- gewicht  
 bij schatting volgens Coleman's  
 procedure, 264, 317  
 = gain, 294
- grammatika, 14-15
- graph, 32, 280
- signal-flow-, 293-295
- grens  
 van input-segment, 190  
 van output-segment, 190
- groei  
 exponentiële -, 89  
 geometrische -, 89
- holisme, 24, 29, 32-33  
 pragmatisch -, 26, 36
- homeostase, 17-20
- homomorfie, 405
- hoofdwet  
 1e - van de thermodynamica, 15  
 2e - van de thermodynamica, 15-16
- houding, 30, 278-281
- identificatie  
 van differentie- en differentiële  
 relaties middels Coleman's pro-  
 cedure, 90-98  
 van differentie-model met  $\delta \neq 1$   
 of differentieel model middels  
 Coleman's procedure, 263-264  
 via afgeleide geheugenloze relatie  
 onder evenwichtsassumptie, 98-101
- identificatie-probleem  
 bij konventionele structurele mo-  
 dellen, 103, 228, 291  
 in LISREL-benadering, 255-256
- identificatie-voorwaarde  
 algemene noodzakelijke -, 230  
 algemene noodzakelijke en voldoen-  
 de -, 230  
 bij uitsluitend lineaire restric-  
 ties op structurele-vorm-coëffi-  
 cënten, 231 e.v.
- identificeerbaarheid (bij konventio-  
 nele structurele modellen), 104, 109  
 juist-, 104-105  
 niet-, 104-105  
 onder-, 232  
 over-, 233  
 totale -, 230
- implicatie  
 dynamische - van model, 275  
 logische -, 67  
 paradoxen van materiële -, 406
- impuls  
 unit-, 140
- inconsistentie  
 logische -, 42, 43, 48, 50
- inductie-probleem, 70
- informatie, 11-16, 18, 20
- input, 18, 36, 122  
 constante -, 181  
 pseudo-, 288  
 tijd-anticiperende deel-, 194, 260,  
 270  
 tijd-lagged deel-, 194  
 zero-, 181
- input-ruimte, 122, 155
- input-waarde, 123
- integraal  
 bepaalde -, 86

- integraalrekening, 21
- integratie, 139
- integratie-operatie, 86
- integrator, 64, 66
- integreerbaar, 86
- interdependentie, 204, 218, 228 e.v.
- interdependentie-probleem, 103-104, 113
- interpretatie, 53, 68
- inverse (functie), 58, 76
- inverse (matrix), 163
  
- kleinste-kwadraten-procedure, 112, 213, 218
- komplexiteitsniveau, 23
- koppeling, 60, 65
- mee-, 399
- parallel-, 60, 65
- serie-, 60, 65
- tegen-, 18
- terug (feedback)-, 18, 280
- voorwaarts-, 18
- kwantor
  - universele -, 55
  - existentiële -, 55
  
- limiet, 54, 83
- lineaire combinatie, 137
- linearisatie
  - van toestand-ruimte-model, 154
- lineariteit, 73
- niet-, 73
- niet- van toestand-ruimte-model, 154
- van input-output-functie, 133
- van input-output-model, 133
- van input-ruimte, 133
- van output-ruimte, 133
- van response-functie, 133, 135
- van toestand-ruimte, 133
- zero-input-, 134
- zero-state-, 135
- LISREL-benadering, 28, 245 e.v.
- LISREL-programma, 251, 253, 412
- logica, 1
- predikaat-, 1, 3, 41, 52-53
  - 1e-orde --, 52-53
- propositie-, 52
- relationele -, 3, 52, 396
  
- matrix
  - berekening toestand-overgangs- (constante A), 160-161
  - berekening toestand-overgangs- (constante A) via diagonaliseringsprocedure, 162-169
  - bovendiagonaal-driehoekige -, 216
  - cofactoren-, 164
  - constante - in model [A,B,C,D] , 143, 150, 157, 160
  - driehoekige -, 215
  - error-waarden-, 210
  - factor- in LISREL-benadering, 248
  - impulse-response-, 142, 144, 187-189, 384
  - informatie- bij schatting in LISREL-benadering, 248
  - inverse van -, 163
  - iteratieve berekening toestand-overgangs-, 160
  - kompakte -, 370
  - tijdsafhankelijke -, 154, 157, 193
  - toestand-overgangs-, 142, 156, 158, 168, 188
  - unit-response-, 187, 189, 384
  - van sampling-varianties en covarianties, 213
  - variantie-covariantie- van predictiefouten, 272
- matrix-algebra, 31-32
- mechanisme, 9, 17, 21-22
- meetfouten, 193
  - en schattingsprocedures, 245
  - in LISREL-benadering, 245, 252
- meet-periode, 114
- meta-theorie, 53
- meten, 405
- methode
  - experimentele -, 21, 27-28
  - hypothetisch-deductieve -, 70
  - van Bartlett bij schatting factorkores, 250
  - van Koyck bij multicollineariteit, 227
- methodologie
  - systeem-, 6, 34, 42, 59, 60, 69, 120
- minimalisatie-procedure bij maximum-likelihood schatting in LISREL-benadering, 258
- minimaliteit, 129, 132, 146

- minimum  
   absoluut - bij maximum-likelihood  
   schatting in LISREL-benadering,  
   258-259  
   lokaal - bij maximum-likelihood  
   schatting in LISREL-benadering,  
   344
- model  
   abstractie-, 2, 41-42, 54-55, 59  
   beschrijvings-, 56  
   black-box-, 38-39, 50  
   black-box representatie-, 65  
   causaal -, 28  
   COFAMM-, 249  
   cybernetisch systeem-, 17  
   differentie-, 154  
   differentieel -, 154  
   dynamisch verklarings-, 29  
   eenheid-eigenschap-, 2, 38  
   l-niveau-, 50  
   factor-analytisch - in LISREL-be-  
   nadering, 246  
   geherformuleerd - in LISREL-bena-  
   dering, 253-254  
   hulp- bij schatting toestand-dif-  
   ferentie- c.q. -differentiaal-  
   vergelijking volgens Coleman's  
   procedure, 263-264  
   input-output-, 121, 148, 222  
   autonoom --, 125  
   eindig-dimensionaal --, 136  
   geheugenloos --, 125  
   gesloten --, 125  
   improper --, 125  
   inputloos --, 125  
   lineair --, 133  
   proper --, 125  
   latent structureel - in LISREL-  
   benadering, 246  
   macro-(black-box)-, 48, 61  
   macro-verklarings-, 31-32  
   mathematisch representatie-, 41,  
   55, 58-59, 61, 66, 71, 119  
   mechanisch verklarings-, 20, 24  
   meet-, 56, 405  
   meet- in LISREL-benadering,  
   246-247  
   meso-black-box-, 50  
   micro-(structuur)-, 48, 50, 61  
   micro-verklarings-, 31-32  
   multirelationeel verklarings-,  
   81-82, 102 e.v.  
   non-experimenteel verklarings-,  
   28-29  
   organisch -, 21  
   statistisch verklarings-, 29  
   structuur-, 3, 37, 48  
   substelsysteem-, 50, 119  
   systeem-, 1, 34, 37, 48-49, 118  
   systeem-simulerend representatie-,  
   120  
   systemisch representatie (verkla-  
   rings)-, 32, 63, 64, 118  
   tijdgevoelig abstractie-, 43-45, 47,  
   50-53  
   toestand-ruimte-, 38-39, 118, 120, 123  
   gelineariseerd --, 154  
   lineair --, 133, 187, 189  
   minimaal-dimensionaal --, 138  
   niet-lineair --, 154  
   tijd-invariant --, 138, 189  
   model [A,B,C,D], 144, 150 e.v.  
   asymptotisch stabiel -, 181, 183  
   stabiel -, 181, 183  
   model-structuur  
   interdependente -, 228 e.v.  
   recursieve -, 204, 205, 215-217  
   modelvorm  
   finale -, 268-270  
   gereduceerde -, 106, 196, 212-213  
   structurele -, 195-196, 212-213  
   multicollineariteit, 226 e.v., 240  
   multipliciteit  
   van distinct eigenwaarde, 185  
   multiplieur, 62, 66  
   impact-, 271  
   interim-, 271  
   total-, 271
- nauwkeurigheid  
   bij schatting van de gereduceerde  
   vorm, 107, 218, 240  
 negentropie, 17, 399  
 niveau  
   deel-, 24  
   eenheden-, 34, 118  
   elementen-, 118  
   geheel-, 24  
   komplexiteits-, 23  
   macro-, 29, 31, 34, 36, 37, 49, 71  
   micro-, 15, 31, 34, 49, 50  
   meso-, 34, 49, 50  
   systeem-, 60  
 nominalisme, 24  
 norm  
   van matrix, 144, 192

- nul, 134
- nul-vector, 134
- nul-functie, 134
- nul-functie-klasse, 134
- observeerbaarheid, 130, 138, 145, 191
  - aan de hand van u, 130, 148
- observeerbaarheidsindex, 148
- oertoestand, 127, 140
- omgeving, 18, 36, 40, 49
- onderzoek
  - beschrijvend -, 51
  - cross-sectioneel -, 52, 98-101, 116-117, 206
  - experimenteel -, 404
  - gemengd tijdserie-, 116-117
  - panel-, 193
  - quasi-experimenteel -, 404
  - tijdserie-, 116-117, 206, 214, 222
  - verdeeld -, 116-117, 212, 221
  - zuiver tijdserie-, 116-117
- onvolledigheid, 53
- oplossing, 73
  - benaderende - van differentieel model, 157
  - initiële - bij schatting in LISREL-benadering, 257
  - nominale -, 154, 410
  - unieke - van differentie- c.q. differentieel model, 155-156
  - van [A,B,C,D] onder  $u \neq 0$ , 186 e.v.
  - van differentie- c.q. differentiaal-vergelijking met feedback-coëfficiënt, 82, 85
  - van differentie- c.q. differentiaal-vergelijking zonder feedback-coëfficiënt, 80, 85
  - van toestand-differentie- c.q. differentiaal-vergelijking, 186-187
  - van toestand-differentie- c.q. differentiaal-vergelijking onder lineair input-segment, 261-262
  - werk-, 154
- optimalisatie, 38
- orde-voorwaarde
  - bij identificatie, 232
- output, 36, 122
  - toestand-bepaalde -, 123
  - toestand-identieke -, 127, 287
  - toestand-input-bepaalde -, 123, 282
- output-waarde, 123
- paar
  - input-output-, 127
  - geordend -, 57
- paralleliteit
  - van meet-instrumenten, 342
- parameter, 91
  - differentie-, 95-96, 115
  - differentiële -, 93-94
- parameter-waarde, 91
  - constante -, 193
- partitie, 45, 49, 131
- periode-duur
  - van karakteristieke excitatie-beweging, 176
- polynoom, 73, 153, 163
  - karakteristieke -, 185
  - minimale -, 184-185
- populatie, 70
  - eenheden-, 71
  - elementen-, 71
  - geldings-, 72
  - generalisatie-, 72
- predictand, 104
- predictie, 41, 52, 76
  - in LISREL-benadering, 249-250
  - iteratieve -, 388
- predictie-onderzoek
  - functies van -, 274-275
- predictiviteit, 76
  - in stochastische zin, 106
- predictor
  - in stochastische zin, 105
- predictor (regressor)-keuze-probleem, 77, 101
  - stochastische versie van -, 77, 101
- predikaat, 1
  - 1e-orde-, 46
  - 2e-orde-, 46
- produkt
  - cartesisch -, 18
- propositie, 3
  - contextuele -, 30, 33
- psychologisme, 25
- punt-eliminatie-procedure, 294, 298
- rang-voorwaarde
  - bij identificatie, 232, 234
- realisatie, 118, 283
  - canonieke -, 130-132, 148
  - 1-1-op-equivalente -, 146-148, 298
  - equivalente -, 148, 298
  - in differentie-vorm, 143
  - in differentiële vorm, 143

- lineaire -, 134  
 minimale -, 128, 284, 298  
 minimaal-dimensionale -, 133, 135, 145  
 oneindig-dimensionale -, 140  
 standaard-controleerbare -, 298  
 standaard-observeerbare -, 298  
 triviale -, 130-132, 148  
 voor discrete tijd, 144  
 voor continue tijd, 144  
 realisatie-theorie  
 en LISREL-benadering, 248-249  
 realisme, 24  
 realiteit, 2, 34, 36, 42, 66, 118  
 recursiviteit, 204, 215, 285, 291-292, 408, 412  
 block-, 291-292  
 REDUCED-FORM-schatting, 107, 115, 239, 241, 378  
 reduceerbaarheid  
 niet-, 129, 139  
 reductie  
 micro-, 24, 119  
 reductionisme, 11, 20, 26, 60  
 micro-, 11, 20, 24, 36-37, 60  
 regressie  
 normale kleinste kwadraten (OLS), 111-112, 218, 243, 376  
 regressie-keuze-probleem, 77  
 stochastische versie van -, 77  
 redundantie, 14  
 regeling, 5, 38, 40  
 regressor, 106  
 REID(reformulated interdependent)-stelsel, 107  
 relatie, 2-3, 31, 49  
 afgeleide geheugenloze - onder de evenwichtsassumptie, 98-100  
 differentie-, 84  
 tijd-invariante --, 78  
 lineaire tijd-invariante -- met en zonder feedback-coëfficiënt, 82  
 differentiële -, 84-85  
 lineaire tijd-invariante -- met en zonder feedback-coëfficiënt, 85  
 getals-, 41, 56  
 hoger-niveau-, 119  
 koppelings-, 60, 62, 65, 119, 276-277  
 mathematische -, 58  
 micro-, 34  
 oplossings-, 72  
 predictieve --, 78-79, 121  
 stochastische -, 5  
 tijdfunctie-, 57  
 verklarings-, 57-59, 68, 72-77, 119  
 bivariate --, 72, 74  
 deterministische --, 72  
 geheugenloze --, 73, 77, 98  
 georiënteerde --, 122, 276  
 lineaire --, 73  
 micro --, 60, 63, 65  
 multivariate --, 72  
 niet-anticipatieve --, 121  
 onderliggende -- met geheugenwerking, 73  
 predictieve --, 77  
 stochastische --, 105  
 tijd-anticiperende --, 76  
 tijd-invariante --, 73-74  
 verklarings- met geheugenwerking, 73  
 relatie-symbol, 2  
 representatie  
 mathematische -, 55, 118  
 mathematische - van een wetmatigheid over de tijd(elementen), 58  
 research  
 operations-, 9  
 response, 125  
 impulse-, 139-140, 147  
 zero-input-, 139, 189, 384  
 zero-state-, 139, 149, 189, 384  
 response-separatie-eigenschap, 125  
 restrictie, 79, 107  
 exacte lineaire - bij 3SLS, 244  
 lineaire - bij 3SLS, 244  
 lineaire - in LISREL-benadering, 248  
 lineaire - over verschillende vergelijkingen bij 3SLS, 245  
 reticulatie, 37  
 retrodictie, 41, 58, 76  
 reversibiliteit  
 van verklaringsrelaties, 41, 58, 76, 290, 406  
 sampling-variantie  
 schatter van - (asymptotische) van eigenwaarde van A, 266-267  
 sampling-varianties en -covarianties, 213, 221  
 schatter van -, 213, 221, 264  
 scalar, 62, 66  
 schaal  
 meet-, 405

- schattingsprobleem  
   bij interdependente structuren, 208, 235  
 schattingsprocedure  
   bij autocorrelatie, 224 e.v.  
   FIML-, 218, 236  
   ILS-, 236  
   in LISREL-benadering, 255-256  
   LIML-, 218, 236  
   LSNR-, 107, 115, 240, 375  
   maximum-likelihood-, 250, 256, 412  
   OLS-, 218, 243, 376  
   REDUCED-FORM-, 107, 115, 239, 241, 378  
   voor [A,B,C,D] indien  $\delta=1$ , 195  
   voor [A,B,C,D] indien  $\delta \neq 1$  of [A,B,C,D] een differentieel model, 259 e.v.  
 science  
   systems-, 9  
 segment  
   input-output-, 128  
   predictef -, 275  
   tijdfunctie-, 80, 84  
 shift-operator, 125  
 simulatie  
   mathematische -, 405  
   systeem-, 120  
   van eenheden, 119  
 skores  
   standaard-, 250  
   winst-, 264  
 sociogram, 31  
 sociologisme, 25  
 sociomatrix, 31  
 sociometrie, 31  
 specificatie  
   van structureel model, 107, 219  
 specificiteit  
   van meet-instrumenten, 349  
 spectraal-vorm  
   van matrix, 169  
 stabiliteit, 19, 181 e.v., 190-192, 201, 265  
   asymptotische -, 19, 182  
   van [A,B,C,D], 181, 183, 222  
   b.i.b.o.-, 190-192  
   i.o.-, 190-192  
   i.s.L.-, 182  
   van [A,B,C,D], 183  
   onder zero-input, 181 e.v.  
   totaal asymptotische -, 182  
   van [A,B,C,D], 183  
   uniforme -, 182  
   van [A,B,C,D], 183  
 stabiliteitsvoorwaarde, 183-184, 190-192  
 standaard-fout  
   van geprediceerde waarden, 271-273  
   van gereduceerde vorm coëfficiënt, 241  
   van (modulus van)eigenwaarde van A, 267, 382  
 stationariteit, 125  
 steekproef, 70, 72  
   eenheden-, 72  
   elementen-, 71-72  
 steekproef-datum, 209  
 stelling  
   fundamentele - van differentiaal-vergelijkingen, 409  
   van Moivre, 174  
 stelsel  
   interdependent - vergelijkingen, 104-105  
   niet-identificeerbaar - vergelijkingen, 105  
 structuur  
   block-recursieve -, 217, 241-243  
   interdependente -, 218, 228 e.v.  
   recursieve -, 204, 215  
 subject  
   le-orde (ongedefinieerd, operationeel gedefinieerd) -, 43. 46  
   mathematisch -, 68  
   reëel -, 68  
   2e-orde-, 46  
   substelsel, 34-35, 49  
   systeem, 120  
   cybernetisch -, 8  
   gesloten -, 15, 17, 22, 36, 280  
   gesloten mathematisch -, 280  
   mathematisch -, 119  
   multi-stabiel -, 19  
   stabiel -, 19  
   ultra-stabiel -, 19  
   systeembenadering, 6, 9, 20, 29, 37, 118  
   systeem-grens, 36  
   systeem-leer  
   algemene -, 4, 6-9, 28  
   mathematische -, 40, 60, 66  
 tau-equivalentie  
   van meet-instrumenten, 342  
 terugkoppeling, 8  
 theorema, 66



- theorie, 2  
 automaten-, 121  
 controle-, 121  
 communicatie-, 5  
 decisie-, 5  
 graph-, 5, 32, 293  
 informatie-, 5-8, 13-14  
 kinetische gas-, 16,22  
 macro-, 24  
 micro-, 24  
 meet-, 43, 405  
 meta-, 53  
 multi-niveau-, 24  
 regel-, 6-7  
 spel-, 5  
 waarschijnlijkheids-, 5  
 tijd, 29, 121  
 als variabele in model, 193  
 constantie in de -, 46-47  
 continue -, 54, 79, 121  
 discrete -, 54, 121  
 verandering in de -, 42-43, 69  
 tijdfunctie, 56-59, 71  
 continue tijd -, 83, 121  
 discrete tijd -, 84, 121  
 feitelijk voorkomende -, 71-72  
 logisch-mogelijke -, 71  
 stuksgewijs continue -, 139  
 tijdfunctie-segment, 80, 84  
 continu -, 84  
 differentieerbaar -, 84  
 tijdfunctie-waarde, 69  
 tijd-invariantie, 76, 123-126  
 tijd-lag (delay, vertraging), 76, 282  
 infinitesimale -, 125  
 zuivere -, 135  
 tijdsinterval, 84  
 tussen waarnemingsdata, 92, 115, 193  
 tijdstip  
 ingangs-, 127, 193  
 tijdsvertrager, 135  
 toestand, 18-19, 40, 119, 121  
 begin-, 40, 148  
 evenwichts-, 19, 181  
 macro-, 15  
 nul-, 181  
 oer-, 127, 140  
 toestand-ruimte, 18, 123  
 discrete -, 123  
 toets  
 $\chi^2$ - voor "goodness-of-fit" of toename  
 in "goodness-of-fit" in LISREL-  
 benadering, 253  
 Durbin-Watson-, 222  
 t-, 274  
 toetsing, 74  
 predictieve -, 274  
 non-predictieve -, 274  
 van differentie-relatie, 79  
 van differentiële relatie, 85  
 van tijd-lagged relatie, 76  
 transformatie  
 logaritmische -, 152  
 om lineariteit te verkrijgen, 152  
 reciproke -, 152  
 terug- van z- c.q. Laplace-transforma-  
 tie, 298  
 translatie-, 125, 134  
 Laplace-, 290, 414  
 z-, 298, 414  
 translatie-transformatie, 134  
 uitspraak  
 beschrijvende -, 41  
 beslisbare -, 53  
 counterfactual -, 70  
 generaliserende - over populatie, 70  
 juist-gevormde -, 53  
 logisch-strijdige -, 43  
 singulier-beschrijvende -, 70  
 2e-orde-, 46  
 universele -, 41, 46  
 uniekheid  
 in factor-analyse, 349  
 unitor, 62  
 universalien-probleem, 400  
 universum, 2, 42, 404  
 variabele  
 absolute -, 32  
 analytische -, 29, 31-32, 281  
 beslissings-, 5  
 contextuele -, 31-32, 281  
 current-endogene -, 108, 196  
 current-exogene -, 108, 196  
 currente output-waarde-, 196  
 currente toestand-, 196  
 decisie-, 5  
 dummy-, 153  
 endogene -, 104-105, 196  
 exogene -, 104-106, 111, 196

- geobserveerde -, 75, 205  
 gemeenschappelijke -, 277  
 gepredetermineerde -, 108, 111  
 globale -, 30-32  
 lagged-endogene -, 108, 111, 196  
 lagged input-waarde-, 196  
 lagged output-waarde-, 196  
 lagged toestand-, 196  
 macro-, 31, 60, 65  
 metrische -, 153  
 micro-, 60, 65  
 random-, 69, 72, 208  
 regel-, 5  
 relationele -, 32  
 structurele -, 32  
 verwaarloosde -, 278  
 variabele in LISREL-benadering  
 feitelijk gemeten (oorspronke-  
 lijke) -, 246, 343  
 geobserveerde - in structurele  
 vergelijking, 252  
 geobserveerde - met slechts meet-  
 fouten, 252  
 latente -, 28, 193, 246  
 meet-eenheid van -, 250  
 oorsprong van -, 246  
 variantie  
 unieke - in factor-analyse, 349  
 variëteit, 13-14  
 vector  
 endogene -, 197  
 gepredetermineerde -, 197  
 lineair-onafhankelijke -, 136  
 residuele -, 222  
 vector in LISREL-benadering  
 geobserveerde input-, 247  
 geobserveerde output-, 247  
 latente endogene -, 246  
 latente input-, 247  
 latente gepredetermineerde -, 246  
 latente toestand-, 247  
 vector-ruimte  
 eindig-dimensionale -, 105  
 lineaire -, 133, 135  
 verdeling  
 multi-normale -, 211-212, 239,  
 250, 253  
 onafhankelijke en multi-normale -  
 van geobserveerde variabelen in  
 LISREL-benadering, 253, 258  
 waarschijnlijkheids-, 212  
 vergelijking  
 aanpassings-, 200  
 definitieve -, 198-199, 235  
 differentiaal-, 73, 85  
 differentie-, 73, 77-78, 85  
 evenwichtstellende -, 198, 200-205  
 gedrags-, 198, 205, 235  
 geheugenloze -, 75  
 homogene differentie- c.q. differen-  
 tiaal-vergelijking, 157  
 hulp- bij identificatie volgens  
 Coleman's procedure, 92, 115  
 institutionele -, 198-199  
 juist-identificeerbare -, 233  
 karakteristieke -, 163  
 over-identificeerbare -, 233  
 structurele -, 198  
 technologische -, 198-199  
 tijd-lagged -, 76  
 uitlees-, 203  
 verklaring, 2, 70  
 versie  
 stochastische - van [A,B,C,D], 208 e.v.  
 verdragingslijn, 136  
 verval  
 exponentieel -, 89  
 geometrisch -, 89  
 verwachtingswaarde  
 conditionele -, 208-209  
 verzameling  
 aftelbaar oneindige -, 123  
 eenheden-, 45  
 eindige -, 123  
 elementen-, 45  
 input-waarden-, 123, 125  
 machts-, 56  
 output-waarden-, 123, 155  
 subject-, 49, 56  
 tijdfuncties, 119  
 verzamelingenleer, 46, 52  
 vitalisme, 22  
 vlak  
 complexe -, 173, 183  
 volledigheid, 53-54  
 voorwaarde  
 consistentie- bij schatting, 214,  
 218-219  
 identificatie-, 230 e.v.  
 stabiliteits-, 183-184, 190-192

**waarde**

- van mathematische variabele, 212
- vaste - van random-variabele, 212

**wetenschapsfilosofie, 69**

- wetmatigheid, 2, 14, 41, 69
- causale -, 69, 75-76, 81-82
- deterministische -, 46
- over de tijd, 58
- universele -, 2

**wetmatigheidskarakter**

- van stochastische verklaringsrelaties, 105

**zuiverheid**

- en 2SLS-schatter, 238
- van OLS-schatter, 214, 217-218
- van schatter predictie-varianties en -covarianties, 273

## Lijst met veelgebruikte symbolen <sup>1)</sup>

### 1. Logica, verzamelingenleer.

$\equiv$	is per definitie gelijk aan, 45
$\rightarrow$	impliceert, 41
$\leftrightarrow$	impliceert en wordt geïmpliceerd door, 41
$\&$	en, 45
$-$	niet, 43
$F, G, \dots$	predikaten, 41
$R, S, \dots$	relatie-uitdrukkingen (mmervoudige predikaten), 2-3
$m, n, \dots$	constanten, 68
$x, y, \dots$	variabelen (i.h.b. worden $x$ en $y$ gebruikt voor resp. elementen en eenheden), 45-46
$(x)$	voor alle $x$ , 2
$(\exists x)$	er is een $x$ , 41
$\in$	is lid van, 45
$\{m, n\}$	verzameling van $m$ en $n$ , 45
$\{x \in X: Fx\}$	verzameling van alle leden van $X$ , die aan voorwaarde $F$ voldoen, 45
$\langle m, n \rangle$	geordend paar, 55
$R_i, S_i$	relaties (verzamelingen geordende paren of $n$ -tallen), 48, 56
$A \subseteq B$	$A$ is deelverzameling van $B$ , 121
$A \cup B$	vereniging van $A$ en $B$ : verzameling van alle $a \in A$ en $b \in B$ , 121
$A \cap B$	intersectie van $A$ en $B$ : verzameling van alle $a \in A$ en $b \in B$ , die tegelijk van $A$ en $B$ lid zijn, 45
$A \times B$	cartesisch product: verzameling van alle $\langle a, b \rangle$ met $a \in A$ en $b \in B$ , 55
$A^2$	$A \times A$ , 123
$P(A \times B)$	machtsverzameling van $A \times B$ : verzameling van alle deelverzamelingen van $A \times B$ (alle relaties van $A$ naar $B$ ), 57
$f: A \rightarrow B$	functie van $A$ in $B$ : relatie met 1) voor alle $a \in A$ een $b \in B$ zodat $\langle a, b \rangle \in f$ en 2) $\langle a, b \rangle \in f \ \& \ \langle a, c \rangle \in f \rightarrow b = c$ , 56
$f(a)$	eenduidig bepaalde $b$ in $\langle a, b \rangle \in f$ , 57
$f^{-1}$	de omkeerrelatie van $f$ (voor $f: A \rightarrow B$ de corresponderende relatie van $B$ naar $A$ ), 146
$f: A \xrightarrow{f^{-1}} B$	1-1-op-functie: $(f: A \rightarrow B) \ \& \ (f^{-1}: B \rightarrow A)$ , d.w.z. omkeerrelatie $f^{-1}$ tevens omkeersfunctie (inverse) van $f$ , 146

### 2. Abstractie-modellen en representatie-modellen.

$U$	het universum: de verzameling ongedefinieerde basis-elementen, 43
$E$	de verzameling basis-eenheden, 45
$U'$	de verzameling micro-elementen, 48
$E'$	de verzameling micro-eenheden, 47
$\alpha'$	de macro-eenheid $\equiv$ de verzameling macro-elementen, 47
$M$	structuur-model, 48

<sup>1)</sup> Achter de verklarende teksten vindt men telkens één of meer pagina's vermeld, waar het betrokken symbool wordt gedefinieerd of gebruikt.

$M'$	micro-(structuur)-model, 48
$S$	systeem-model, 48
$S'$	macro-(black-box)-model, 48
$S$	substelsysteem-model, 49
$R(X)$	(mathematisch) representatie-model voor $X$ , i.h.b. beschrijvingsmodel of verklaringsmodel, 56, 58, 60, 65
$R^m(X)$	meet-model, 56, 405
$f^m$	meet-functie, 56, 405
$V^\alpha, V^y$	verzameling (logisch-mogelijke) tijdfuncties, voor eenheid $\alpha, y$ gedefinieerd, 59
$v^\alpha, v^y$	variabele over $V^\alpha, V^y$ , 59
$v_\alpha, v_y$	die tijdfunctie in $V^\alpha, V^y$ , die het feitelijk gedrag van eenheid $\alpha, y$ beschrijft, 59
$A_\alpha, A_y$	verklaringsrelatie, voor eenheid $\alpha, y$ gedefinieerd, 58
$L, L^y$	generalisatie-populaties (elementen, eenheden), 71-72
$L^s, L^s$	steekproeven (elementen, eenheden), 71-72
$L^t, L^t$	geldingspopulaties (elementen, eenheden), 71-72
$I_{\alpha, \beta}$	koppelingsrelatie tussen eenheden $\alpha$ en $\beta$ , 60
$\mathcal{S}$	mathematisch systeem, 60

### 3. Algemeen wiskundig, mathematische systeemleer.

$Ge, Ge^{0,+}$	de verzameling gehele getallen, niet-negatieve gehele getallen, 121
$Re, Re^{0,+}$	de verzameling reële getallen, niet-negatieve reële getallen, 121
$Re^n$	de verzameling $n$ -tallen ( $n$ -vectoren) $x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ met $x_i \in Re$ , 121
$0$	nul, nul-vector, nul-matrix, nul-functie, nul-functie-klasse, 134
$A = [a_{ij}]$	matrix $A$ met elementen $a_{ij}$ , 163
$A'$	getransponeerde van matrix $A = [a_{ij}]$ : $A' = [a_{ji}]$ , 163
$I$	eenheidsmatrix: vierkante matrix met alle diagonaal-elementen 1 en alle overige elementen 0, 163
$a_i I$	diagonale matrix: vierkante matrix met elementen $a_i$ op de diagonaal en alle overige elementen 0, 163
$A^{-1}$	inverse van matrix $A$ : $A^{-1}A = I$ , 163
$(A^{-1})'$	getransponeerde van de inverse van $A$ , 210
$\otimes$	Kronecker-product, 238
$e$	grondtal van natuurlijke logaritme, 85
$\ln$	natuurlijke logaritme: $e^{\ln a} = a$ , 16
$e^A, \ln A$	matrix-algebraïsche generalisaties ( $A$ een vierkante matrix) van $e^a, \ln a$ , 161, 263
$ a ,  A $	absolute waarde van scalair getal $a$ , determinant van matrix $A$ , 163, 202
$\ A\ $	norm van matrix $A$ , 144-145
$T$	de tijdsas, typisch $T = Re$ of $T = Re^{0,+}$ (continue tijd), $T = Ge$ of $T = Ge^{0,+}$ (discrete tijd), 121
$T^2$	de verzameling van alle $\langle t_1, t_0 \rangle \in T^2$ met $t_0 \leq t_1$ , 123
$[t_0, t_1]$	gesloten tijdsinterval: $\{t \in T: t_0 \leq t \leq t_1\}$ , 86
$[t_0, t_1)$	half-gesloten tijdsinterval: $\{t \in T: t_0 \leq t < t_1\}$ , 86
$\Delta t$	tijdsverschil $(t + h) - t$ , 54
$\delta$	constant tijdsverschil, gebruikt in tijd-lagged vergelijking en voor een constant waarnemingsinterval, 76, 92

$\Delta f(t)$	differentie van $f$ in $t$ : $f(t+h) - f(t)$ , 54
$\Delta f(t)$ $\int$	$f(t+1) - f(t)$ , 150
$\Delta^2 f(t)$	2e-orde differentie van $f$ in $t$ : $\Delta[\Delta f(t)] =$ $[f(t+2h) - f(t+h)] - [f(t+h) - f(t)] =$ $f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)$ , 151
$\frac{df(t)}{dt}$	differentiaal-quotiënt van $f$ in $t$ (limiet differentie-quotiënt): $\lim_{\Delta t} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ , 83
$N$	verzameling scalaire getallen of $n$ -vectoren, typisch $N = \text{Re}^n$ , 121
$V$	verzameling tijdfuncties $f: T \rightarrow N$ , 121
$v$	variabele over $V$ , 121
$v(t)$	tijdfunctie-waarde op tijdstip $t$ , 57
$v[t_0, t_1]$	tijdfunctie-segment over $[t_0, t_1]$ : $\{ \langle t, v(t) \rangle \in v: t_0 \leq t \leq t_1 \}$ , 80
$v[t_0, t_1)$	tijdfunctie-segment over $[t_0, t_1)$ : $\{ \langle t, v(t) \rangle \in v: t_0 \leq t < t_1 \}$ , 86
$A$	verklaringsrelatie: $A \subseteq V_1 \times V_2$ , 121
$U, u, U, u(t)$	input-ruimte, input, input-waarde-ruimte, input-waarde: $V_1, v_1, N_1, v_1(t)$ óf $V_2, v_2, N_2, v_2(t)$ , 121-123
$Y, y, Y, y(t)$	output-ruimte, output, output-waarde-ruimte, output-waarde: $V_2, v_2, N_2, v_2(t)$ óf $V_1, v_1, N_1, v_1(t)$ , 121-123
$m$	dimensionaliteit output-waarde-ruimte $Y = \text{Re}^m$ , 133
$r$	dimensionaliteit input-waarde-ruimte $U = \text{Re}^r$ , 133
$F$	input-output-functie $F: U \rightarrow Y$ , 121
$M_{I/O}$	input-output-model $\langle U, Y; F \rangle$ , 123
$M_\Sigma$	toestand-ruimte-model $\langle U, Y, \Sigma; s, r \rangle$ , 123
$\Sigma$	toestand-ruimte, 123
$x$	variabele over $\Sigma$ , 123
$x(t)$	toestand $x \in \Sigma$ bereikt op tijdstip $t$ vanuit tijdstip $t_0$ en toestand $x_0 \in \Sigma$ als resultaat van input $u$ , 123
$X$	toestand-ruimte $\Sigma$ indien een vector-ruimte $\text{Fi}^n$ , typisch $X =$ $\Sigma = \text{Fi}^n = \text{Re}^n$ , 135
$n$	dimensionaliteit toestand-ruimte $X$ , 135
$s$	toestand-overgangsfunctie $s: T^2 \times \Sigma \times U \rightarrow \Sigma$ , typisch oplossing van een differentie- c.q. differentiaal-vergelijking, 123
$r$	uitleesfunctie $r: T \times \Sigma \times U$ (of $T \times \Sigma$ of $\Sigma \times U$ of $\Sigma$ ) $\rightarrow Y$ , 123
$\rho$	response-functie $\rho: T^2 \times \Sigma \times U \rightarrow Y$ , samenstelling van $s$ en $r$ , 124
$*$	nominale oplossing: speciale $x^*(t)$ (i.h.b. een evenwichtstoestand $x^*$ ) onder speciale $u^*$ (i.h.b. een constante input), 154
$\Delta x(t)$	$x(t) - x^*(t)$ , 154
$\Delta u(t)$	$u(t) - u^*(t)$ , 154
$\Delta y(t)$	$y(t) - y^*(t)$ , 154
$t_u^*$	ingangstijdstip van $u$ , 127
$\langle M_\Sigma, x^* \rangle$	realisatie van $M_{I/O}$ , 128
$\langle M_\Sigma^n, 0 \rangle$	realisatie van $M_{I/O}$ via $\Sigma = X = \text{Fi}^n$ en $x^* = 0$ , 135
$\phi$	unit-response-functie, 137
$\phi(t')$	unit-response-matrix $\phi(t, t_0)$ in het tijd-invariante geval, $\phi(t - t_0)$ 137, 188-189

H	impulse-response-functie, 139
$H(t'')$	impulse-response-matrix $H(t, k)$ c.q. $H(t, \xi)$ in het tijd-
$H(t-k)$ c.q.	invariante geval, 139-140, 188-189
$H(t-\xi)$	
$\Phi(t')$	toestand-overgangsmatrix $\Phi(t, t_0)$ in het tijd-invariante
$\Phi(t-t_0)$	geval, 142, 158, 160
$\dot{x}(t)$	eenvoudiger schrijfwijze voor $\frac{dx(t)}{dt}$ , 143-144
A, B, C, D	de constante matrices in een differentie- c.q. differentieel
~	model [A, B, C, D], 143-144, 188-189
A	A + I voor differentie-model [A, B, C, D], 144
A(t), B(t),	tijdsafhankelijke matrices in een differentie- c.q. differen-
C(t), D(t)	tiel model [A(t), B(t), C(t), D(t)], 144, 187-188
Rang Q	bereikbaarheidsindex van [A, B, C, D], 145
Rang P	observeerbaarheidsindex van [A, B, C, D], 148
$\lambda_i, \Lambda$	eigenwaarde van A, diagonale matrix met eigenwaarden $\lambda_i$ op
	diagonaal, 162-163
$b_i, B, B^{-1}, b_i^*$	eigenvector bij eigenwaarde $\lambda_i$ van A, matrix met kolomsgewijs
	de eigenvectoren $b_i$ , inverse van B, rij-vector in $B^{-1}$ be-
	horend bij kolom-vector $b_i$ , 162, 163
$m_i, m_i^0$	karacteristieke beweging bij eigenwaarde $\lambda_i$ van A, karakteris-
	tieke excitatie-beweging voor excitatie $\alpha_i(t_0)$ , 170-171
$\alpha_i(t_0), \alpha(t_0)$	excitatie, excitatie-vector, 171
j	imaginair getal $\sqrt{-1}$ , 166
$\lambda_i, \lambda_i^1$	geconjugueerd paar complexe eigenwaarden $\lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_i$ , 172
$\sigma_i, \omega_i$	reëel en imaginair gedeelte in $\lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_i$ , 166
$\sigma_i^1$	$\sigma_i + 1$ voor differentie-model [A, B, C, D], 173
$r_i, s_i$	reëel en imaginair gedeelte in geconjugueerd paar $b_i = r_i \pm js_i$ ,
	172
$r_i^*, s_i^*$	reële en imaginaire grootheid in geconjugueerd paar $b_i^* =$
	$\frac{1}{2}(r_i^* \pm js_i^*)$ , 172
$\alpha_i^r(t_0),$	reële en imaginaire grootheid in geconjugueerd paar $\alpha_i(t_0) =$
$\alpha_i^s(t_0)$	$\frac{1}{2}[\alpha_i^r(t_0) \pm j \alpha_i^s(t_0)]$ , 172
$\eta_i, \theta_i$	modulus (lijnstuk), argument (hoek) van $\lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_i$ (in
	komplexe vlak), 173
$\tilde{\eta}_i, \tilde{\theta}_i$	modulus (lijnstuk), argument (hoek) van $\lambda_i + 1$ (in komplexe
	vlak) voor differentie-model [A, B, C, D], 173, 174
$\rho_i(t_0),$	modulus (lijnstuk), argument (hoek) van $\alpha_i(t_0) =$
$\phi_i(t_0)$	$\frac{1}{2}[\alpha_i^r(t_0) \pm j\alpha_i^s(t_0)]$ (in komplexe vlak), 174
$T_p$	periode-duur van $m_i^0$ : $2\pi/\tilde{\theta}_i$ voor differentie-model [A, B, C, D],
	$2\pi/\omega_i$ voor differentieel model [A, B, C, D], 174

#### 4. Structurele modellen, LISREL-benadering.

$x, x_0, y, y_0, u, u_0$	eenvoudiger schrijfwijze voor de kolom-vectoren $x(t+1)$ ,
	$x(t), y(t+1), y(t), u(t+1), u(t)$ c.q. $x(t_0 + \delta), x(t_0)$
	$y(t_0 + \delta), y(t_0), u(t_0 + \delta), u(t_0)$ , 195, 208-209, 262
$b_0$	eenvoudiger schrijfwijze voor kolom-vector $b_{[t_0, t_1]} =$
	$[u(t_0 + \delta) - u(t_0)]/\delta$ , 262

- $\bar{y}, \bar{z}^y, \bar{z}^u, \bar{z}$  kolom-vectoren  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ \delta \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} \bar{z}^y \\ \bar{z}^u \end{bmatrix}$  waarbij i.h.b. de elementen van  $\bar{y}$  typisch als random-variabelen met een gemeenschappelijke waarschijnlijkheidsverdeling worden opgevat, 196, 209
- $\bar{z}_*$  kolom-vector  $\begin{bmatrix} u \\ 0 \\ b \\ 0 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}$  bij schatting van hulpmodel  $[A_*, [B_* \ B_{**}], C, D]$ , 263
- $A_*, B_*, B_{**}$  matrices in hulpmodel  $[A_*, [B_* \ B_{**}], C, D]$  bij schatting van  $[A, B, C, D]$ , indien  $\delta \neq 1$  of  $[A, B, C, D]$  een differentieel model, 263
- $\bar{e}, \bar{v}$  random-vectoren  $\begin{bmatrix} e \\ x \\ 1 \\ e \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\Delta^{-1} \bar{e}$  met als elementen de error-komponenten van resp. de structurele en de gereduceerde-vorm vergelijkingen, 209
- $E, V$  matrices met rijgewijs realisaties  $e_i, v_i$  van de kolom-vectoren  $\bar{e}, \bar{v}$ , waarbij de elementen  $e_{ij}, v_{ij}$  ( $j = 1, \dots, p$ ,  $i = 1, \dots, n$ ) ook worden opgevat als random-variabelen met een gemeenschappelijke waarschijnlijkheidsverdeling, 210
- $p, q, s$  aantal (geobserveerde) current-endogene variabelen, aantal (geobserveerde) gepredetermineerde variabelen,  $s = p + q$ , 230, 256
- $(-\Delta), (-\Gamma)$  matrices van de structurele modelvorm (de coëfficiënten van  $-\Delta$  en  $-\Gamma$  in het rechterlid van de vergelijking zijn gemakkelijk interpreteerbaar), 196, 209, 306
- $A$   $[\Delta \ \Gamma]$ , 231
- $\delta_j, \gamma_j, \alpha_j =$  rij-vector  $j$  in  $\Delta, \Gamma, A$  met de coëfficiënten van structurele vergelijking  $j = 1, \dots, p$ , 231
- $\zeta_j$  rij-vector  $-\alpha_j = [-\delta_j \ -\gamma_j]$  zonder  $-\delta_{jj} = 1$  en zonder de op 0 gestelde coëfficiënten  $-\delta_{jj}$  en  $-\gamma_{jj}$  (in een recursieve structuur bevat  $\zeta_j = [-\delta_j \ -\gamma_j]$  alleen coëfficiënten  $-\delta_{jj}$ , met een volgnummer  $j' < j$ ), 235, 217
- $\Pi$  matrix van de gereduceerde modelvorm, 197, 209
- $B$   $\begin{bmatrix} \Pi \\ I \end{bmatrix}$ , 231
- $\pi_j$  rij-vector  $j$  in  $\Pi$  met de coëfficiënten van gereduceerde-vorm vergelijking  $j = 1, \dots, p$ , 211
- $K, L, M$  deelmatrices van  $\Delta$  en  $\Gamma$ , 197, 209
- $\Delta_{st}, \Gamma_{st}, \Pi_{st}$  matrices  $\Delta, \Gamma, \Pi$  met daarin de gestandaardiseerde coëfficiënten, 250
- $E(.)$  verwachtingsoperator, 211
- $E(.|.)$  conditionele verwachtingsoperator, 212
- $\Sigma = [\sigma_{jj}]$  variantie-covariantie-matrix van error-komponenten in structurele vergelijkingen  $j = 1, \dots, p$ , 211
- $\sigma_{jj}^2 I$  diagonale  $\Sigma$ , 215
- $n_j$  steekproefgrootte (aantal rij-vectoren in data-matrix), 213



$k$	aantal te schatten coëfficiënten in vergelijking, 213
$h$	aantal te schatten elementen in totale structuur, 230, 256
$[y_{.i} \ z_{.i}]$	rij-vector met een stel steekproefwaarden van de elementen in kolom-vector $\begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix}$ , 210
$[Y \ Z]$	data-matrix, bestaande uit rij-vectoren $[y_{.i} \ z_{.i}]$ met $i = 1, \dots, n$ , 210-211
$<_j$	
$y_{.i}, Y_j, W_j$	deelvector van $y_{.i}$ waarin de elementen $y_{j' .i}$ met $j' < j$ , deelmatrix van $Y$ met de deelvectoren $y_{.i}^{<_j}$ , $[Y; \ Z]$ , 216
$S$	steekproef-matrix $\frac{1}{n}[Y \ Z]'[Y \ Z]$ c.q. steekproef-variantie-covariantie-matrix, 229, 257
$S$	waarschijnlijkheidslimiet c.q. verwachte waarde van $S$ , 229, 255
$\Sigma_{ZZ}$	waarschijnlijkheidslimiet van $\frac{1}{n}Z'Z$ , 219
$SD$	diagonale matrix met standaard-deviaties, 250
$\hat{\pi}_j^i$	schatter van kolom-vector $\pi_j^i$ , 213
$\text{plim } \hat{\pi}_j^i$	waarschijnlijkheidslimiet van $\hat{\pi}_j^i$ : $\text{plim } \hat{\pi}_j^i = \pi_j^i$ betekent $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[ \hat{\pi}_j^i - \pi_j^i  < \varepsilon] = 1$ , 219
$\text{var}(\hat{\pi}_j)$	variantie-covariantie-matrix van de coëfficiënt-schattingen in $\hat{\pi}_j^i$ over herhaalde steekproeven van grootte $n$ , 213
$\text{asy var}(\hat{\pi}_j)$	asymptotische $\text{var}(\hat{\pi}_j)$ , 221
$\text{var}(\hat{\pi}_j)$	schatter van $\text{var}(\hat{\pi}_j)$ c.q. $\text{asy var}(\hat{\pi}_j)$ , 213, 221
$e_{j.}, v_{j.}$	residuele vectoren: schatters van kolom-vectoren $e_{j.}, v_{j.}$ in $E, V$ , 237, 213
$s_{j.}^2, s_{vj}^2$	residuele varianties: schatters van varianties $\sigma_{j.}^2, \sigma_{vj}^2$ op de diagonaal van $\Sigma, \Sigma_v$ , 237, 238
$e_{j,i}$	gecorrigeerde error-komponent bij autogecorreleerde error-komponent $e_{j,i}$ , 224
$\phi_j$	matrix met restricties op de coëfficiënten in vergelijking $j$ , 232
$\tilde{H}(t'')$	matrix met "impact-multipliers" voor $t'' = 0$ en "interim-multipliers" voor $t'' > 0$ , 271
$G$	matrix met "total multipliers", 271
$y', w'$	kolom-vectoren met feitelijk gemeten (oorspronkelijke) variabelen (LISREL-benadering), 246
$y, w$	kolom-vectoren met geobserveerde variabelen (LISREL-benadering), 246
$\eta, \omega$	kolom-vectoren met latente variabelen (LISREL-benadering), 246
$\Lambda_y, \Lambda_w$	factor-matrices voor $y$ - en $w$ -variabelen (LISREL-benadering), 246
$\tilde{x}_1, \tilde{x}_0, \tilde{u}_1, \tilde{u}_0$	latente $x, x, u, u$ (LISREL-benadering), 247
$e, e_y, e_w$	kolom-vectoren met latent-structurele error-komponenten, meetfouten van $y$ -variabelen, meetfouten van $w$ -variabelen (LISREL-benadering), 246
$\Theta, \Theta_y, \Theta_w$	variantie-covariantie-matrix van meetfouten, waarin $\Theta_y$ en $\Theta_w$ deel-matrices (LISREL-benadering), 247, 254

## Curriculum vitae

Johannes Hendricus Lodewijk Oud werd op 14 mei 1943 geboren te Wognum. Na zijn gymnasiumopleiding van 1955 tot 1961 te St.Michielsgestel studeerde hij van 1961 tot 1962 wijsbegeerte te Haaren en vervolgens van 1962 tot 1968 sociologie (specialisatie methoden en technieken) en wijsbegeerte te Nijmegen. Na het doktoraal-examen sociologie in 1968 was hij tot 1970 als wetenschappelijk medewerker verbonden aan de Researchafdeling van het Pedagogisch Instituut te Nijmegen en vanaf 1970 aan de Sektie Orthopedagogisch Onderzoek van het Instituut voor Orthopedagogiek aldaar.



## Stellingen

1. In discussies rond het causaliteitsbegrip en de bruikbaarheid daarvan in de empirische wetenschapsbeoefening verdient het causaliteitsaxioma van de mathematische systeemleer (p. 122 van het proefschrift) een centrale plaats: 'Causality is the fundamental property of physically realizable systems' (Willems, J.C., *The analysis of feedback systems*, M.I.T., Cambridge Mass., 1971, p. 10).
2. De relaties tussen enerzijds de realisatie-theorie van de mathematische systeemleer en anderzijds factor-analyse, in het bijzonder zoals toegepast in het kader van Jöreskogs LISREL-benadering, behoeven een grondig onderzoek.
3. Het idee van Simonton om tijdserie-analyse toe te passen in het kader van onderzoekopzetten met herhaalde metingen zou het beginpunt kunnen zijn van een belangrijke praktisch relevante ontwikkeling in de sociaal-wetenschappelijke onderzoeksmethodologie (Simonton, D.K., *Cross-sectional time-series experiments: some suggested statistical analyses*, in: *Psychological Bulletin*, 84, 1977, p. 489-502).
4. Een minder paradoxale benaming voor Simontons 'cross-sectioneel tijdserie'-onderzoek is 'gemengd tijdserie'-onderzoek met 'zuiver tijdserie'-onderzoek en 'verdeeld' onderzoek als extreme gevallen (p.116-117 van het proefschrift). De aanduiding 'cross-sectioneel' kan zo beperkt blijven tot die bijzondere vorm van verdeeld onderzoek, waarbij alle data op hetzelfde tijdstip zijn verzameld.
5. Vele van de 'causale effecten', waarvoor men in cross-sectioneel regressie-onderzoek significante coëfficiënten vindt, worden wegverklaard, indien men in verdeeld dan wel gemengd of zuiver tijdserie-onderzoek data verzamelt m.b.t. de lagged-afhankelijke variabele en deze als additionele regressor in de vergelijking opneemt.
6. De les die Dhrymes trekt uit de door hem bestudeerde dynamische implicaties van een geschat econometrisch model, is ook van toepassing op de huidige sociaal-wetenschappelijke onderzoekspraktijk: 'it is not enough to estimate the parameters of a model, casually inspect them, and pronounce them believable. If the model is dynamic, as most such econometric models are likely to be, one must carefully investigate its dynamic properties and verify that they are not absurd and inadmissible' (Dhrymes, Ph.J., *Econometrics*, Springer, New York, 1974, p. 542).

7. Dat intelligentie een positief effect zou hebben op de technisch-mechanische leesprestaties, is bij blinden niet zonder meer evident.
8. Met het verschijnsel van de 'self-destroying prophecy', waardoor verklaringmodellen in de menswetenschappen weliswaar niet hun geldigheid maar wel hun praktische relevantie verliezen, hoeft in de orthopedagogiek minder rekening te worden gehouden.
9. Veel nijpende maatschappelijke problemen vertonen een zodanige graad van ingewikkeldheid, dat zij niet op korte termijn met wetenschappelijke middelen tot een oplossing gebracht kunnen worden.
10. Het verdient aanbeveling om met een frequentie van bijv. eens per maand weersvoorspellingen vergezeld te doen gaan van predictieve validiteitscoëfficiënten, zodat de gebruiker zich een oordeel kan vormen over de waarde van deze voorspellingen en over kwaliteitsverbeteringen als gevolg van gewijzigde methoden.
11. Maatregelen zijn noodzakelijk om tot een ombuiging te komen van de huidige ontwikkeling van het onderwijs in de moderne vreemde talen (zie: De Behoeften aan Moderne Vreemde Talen, ITS, Nijmegen, 1978), waarbij het vak Frans mede als gevolg van de Mammoetwet geruisloos uit het voortgezet onderwijs dreigt te verdwijnen.
12. Indien Rectina tijdens de uitbarsting van de Vesuvius in het jaar 79 inderdaad in zo'n benarde positie was komen te verkeren als Plinius de Jongere, schrijvend over zijn oom aan Tacitus, doet voorkomen: 'Egrediebatur domo: accipit codicillos Rectinae Tasci imminenti periculo exterritae (nam villa eius subiacebat, nec ulla nisi navibus fuga): ut se tanto discrimini eriperet orabat' (Epistulae vi. 16.8), had zij dit verzoek beter persoonlijk aan Plinius de Oudere kunnen overhandigen.

Stellingen behorende bij:

J.H.L. Oud,

Systeem-methodologie in sociaal-wetenschappelijk onderzoek,

Proefschrift, Nijmegen, 7 september 1978.



