

Matemática Económica con Programación Lineal

Jesús Getán Oliván (jesus_getan@ub.edu)

*Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial.
Facultat d'Economia i Empresa. Universitat de Barcelona.*

RESUMEN

La percepción del joven estudiante de economía es que la práctica con ejercicios es lo único que debe saber. Ésta percepción se puede cambiar con la Programación Lineal ya que unimos teoría y práctica y, al mismo tiempo, mejoramos la capacidad de modelar situaciones económicas y además, hacemos énfasis en el uso de las matemáticas como herramienta eficaz en la mejora de las actividades propias.

ABSTRACT

The perception of the young students of economics is that the practical exercises are all they need to know. This perception may change by using the Linear Programming, this allow join theory and practice and at the same time, improve the skills to model economic situations and, also we emphasize the use of mathematics as an effective tool in improving the activities.

Palabras claves:

Programación Lineal; Matemática Económica; Educación.

Área temática: Optimización.

1. INTRODUCCIÓN

Todos tenemos talento en mayor o menor medida, y éste siempre se puede perfeccionar. Thomas Jefferson (1743-1826).

He elegido esta cita de Thomas Jefferson porque proviene de una persona práctica e inteligente y, sobre todo, con visión de futuro.

Como declaración, nos obliga a ser humildes y honestos con nosotros mismos y con los estudiantes, y a señalar que nuestra acción debe estar encaminada a que los estudiantes tengan un pensamiento propio, crítico y racional que les permita enfrentarse a las distintas materias que conforman sus estudios de grado con autonomía, y sobre todo, que el conocimiento recibido aumente su creatividad. Además, la programación lineal fomenta una actitud proactiva cara a la solución tanto de sus propios problemas como los que se presenten en su vida estudiantil.

2. DETALLES OBSERVABLES EN UNA CLASE

Los detalles que se comentan en esta sección no son generales de todos los estudiantes sino, que cada estudiante tiene una proporción variable de ellos lo que les hace individualmente diferentes y colectivamente complejos. Veamos algunos detalles observables:

No siguen en general disertaciones largas y se cansan de mantener la atención en clase durante mucho tiempo. En cambio, si el tema es interesante para ellos pueden permanecer largos periodos de tiempo atentos.

No están acostumbrados al razonamiento abstracto. No están acostumbrados porque no han hecho muchas demostraciones anteriormente o no han tenido mucha necesidad de hacerlas. Sin embargo, les gusta que aquello que se afirma esté demostrado o bien se pueda demostrar con palabras sencillas o dibujos.

Ven en lo que llaman “prácticas” una panacea para sus problemas de comprensión e

interpretan que, la repetición mecánica de esquemas de trabajo es la garantía de que han comprendido lo que se les ha explicado. Por otra parte la resolución de problemas por lógica, pero sin un método concreto, es muy valorada por ellos.

Las simplificaciones y las operaciones inherentes a los problemas representan una gran dificultad. Pero, cuando las ven en el contexto económico, como una deducción lógica de las frases matemáticas, gustan de hacerlas por la vía más rápida.

La notación matemática se les hace muy pesada e ininteligible. Cuando la ven como una representación de un modelo o como una técnica de resolución de modelos económicos que les ayuda a inferir resultados, muestran un gran interés.

No les interesan los ejercicios repetitivos. Pero gustan de los ejercicios con diferentes interpretaciones y soluciones dado que fomenta la discusión y el intercambio de opiniones.

Por último, se dice que no estudian lo suficiente, pero en mi modesta opinión tienen muchas actividades heredadas del tiempo del bachillerato y no han aprendido a priorizar y distribuir el tiempo. En general, tienen deseo de aprender sin eficacia en el estudio.

De todo lo anterior, surge una pregunta ¿cómo aprovechar estos detalles y observaciones para hacer efectiva nuestra declaración de intenciones?

3. ADAPTACIÓN AL MEDIO MEDIANTE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

En esta sección haré uso de las ideas de Gardner, H. (2008) sobre las inteligencias que un estudiante universitario tiene que desarrollar a lo largo de la carrera. Así mismo se proponen citas de autores famosos para ayudar en la reflexión del contenido de los párrafos.

¿Por qué esta magnífica tecnología científica, que ahorra trabajo y nos hace la vida más fácil, nos aporta tan poca felicidad? La respuesta es esta, simplemente porque aún no hemos aprendido a utilizarla con tino. A. Einstein.

La primera idea que se propone es desarrollar una inteligencia disciplinada, que nos propone tener un tipo de cognición significativa de la profesión. Ello mejorará la habilidad y la comprensión de los temas. Los problemas que se propongan inicialmente deben ser sencillos y que respondan a problemas que se pueden encontrar en el conocimiento cercano de los estudiantes.

I.e. podemos poner este problema introductorio

Programación Matemática
Problemas de asignación

Sigesmunda tiene tres hijos Leonor, Bienvenido y Dionisio. Los hijos quieren ganar algún dinero para el fin de semana. La madre, les ofrece tres trabajos podar, pintar y lavar la ropa. Para hacer el reparto justo, la madre, organizó una subasta secreta de las tareas, cuyos resultados abiertos el lunes a mediodía vienen dados en la tabla siguiente:

	Podar	Pintar	Lavar
Leonor	15 euros	10 euros	9 euros
Bienvenido	9 euros	15 euros	10 euros
Dionisio	10 euros	12 euros	8 euros

Cómo debe asignar las tareas Sigesmunda para que el coste sea mínimo?

Jesús Getán Programación lineal

La notación y temas teóricos se deberán incluir después de los problemas como una necesidad de sistematización del conocimiento y con el objetivo de resolver los problemas de una manera formal y reflexionada. Se debe valorar el hecho de las reglas y la notación para avanzar en la adquisición de conocimiento.

Los que se enamoran de la práctica sin la teoría son como un piloto sin timón ni brújula, que nunca podrá saber a dónde van. Leonardo da Vinci.

La segunda idea nos sugiere una mente sintética que nos ayuda a interpretar la información dada, comprenderla y evaluarla con objetividad, de forma que adquiera sentido no sólo para él, sino para los demás. Esto se traduciría en el desarrollo de

habilidades en el planteo de modelos que resuelven problemas económicos no sólo desde problemas concretos sino procurando una manera teórica de resolver ese tipo de problemas en general.

I.e. problema para discutir en clase. Nótese que este problema ocupa varias diapositivas dado el número de preguntas que se hacen

Problema: *La división de animales disecados de Juguetes Naturales SA. está produciendo palomas y gavilanes disecados. En las condiciones en que se encuentra el mercado actualmente pueden vender los gavilanes y las palomas con utilidades de 10 euros y 6 euros respectivamente. Las pieles para gavilanes son más duras y toman más tiempo de trabajo que las de las palomas. La máquina de pieles puede trabajar 8 pieles de paloma por minuto, pero solamente 4 de gavilanes (puede trabajar ambas simultáneamente, pero puede ser más fácil si se programan alternadamente). La línea de relleno, puede rellenar 6 gavilanes por minuto o 4 palomas en el mismo tiempo. También puede cambiar fácilmente la producción del uno al otro. Los gavilanes van a una operación final en una máquina de afilado de picos que tiene una capacidad de 3.5 gavilanes por minuto.*

(a) *¿Cuántos gavilanes y palomas deberá producir la división por jornada de 8 horas para maximizar las utilidades?*

A no ser que se especifique de otra manera, las siguientes preguntas son independientes las unas de las otras y están basadas en el enunciado inicial del problema.

(b) *¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por adicionar capacidad en la línea de relleno (en euros por minuto de capacidad)?*

(c) *Similarmente, ¿cuánto estaría dispuesto a pagar por adicionar capacidad en la máquina de afilado de picos?*

(d) *Otra división desea comprar tiempo en la máquina de pieles. ¿Cuál es el mínimo valor por el cual usted lo vendería (en euros por minuto)? ¿Cuánto vendería a este precio? Explique el resultado.*

(e) *Otra división desea 3/4 de su capacidad en la máquina de pieles. ¿Cuánto como mínimo cobraría usted?*

(f) *El gerente de producción sigue muy de cerca los resultados de la línea de relleno, pues ésta fue instalada recientemente a un costo muy alto. Al hacer sus registros en la contabilidad de costos (los cuales son basados en la utilización de la máquina) los resultados son buenos, pero el gerente insiste sobre la política de usar la capacidad de relleno completamente. ¿Cómo debe contestarle a su asistente de programación de carga de máquinas?*

(g) *La Vicepresidenta de producción, visita la línea de gavilanes y palomas, observa que hay capacidad ociosa en algunos de los procesos. Ella resuelve ordenar que se usen todos los centros del proceso, en toda su capacidad instalada. ¿Qué diría usted?*

(h) *El departamento técnico requiere que la producción de palomas sea de 3 por minuto. ¿Cuál es el costo de implementación de esta política?*

(i) *Ateniéndose a las condiciones de la pregunta h), ¿cuánto estaría dispuesto a pagar por adicionar capacidad en la máquina de pieles, en la línea de relleno y en la máquina de afilar.*

En cada caso donde sea apropiado, indique ¿cuánta capacidad extra adicionaría de acuerdo a la razón estipulada?

(j) *Repetir la pregunta i), con la intensidad de 2 palomas por minuto.*

La segunda idea también nos sugiere a que interpretemos los resultados obtenidos una vez resuelto el problema numéricamente. La discusión a ser posible debe hacerse en la clase general. Por lo tanto, debemos hacer hincapié en la relación entre teoría y práctica en cada una de las acciones que hagamos en clase.

Aprender sin reflexionar es malgastar energía. Aprender sin pensar es inútil. Pensar sin aprender, peligroso. Confucio.

La tercera idea nos habla de una mente creativa que nos plantea preguntas distintas a las enunciadas, y que puede llegar a respuestas que son imprevistas o curiosas. La creatividad nos sugiere que debemos reelaborar los modelos utilizados, para hacerlos

más generales y operativos, también, estudiar sus propiedades y condiciones de aplicabilidad. La idea de hacernos preguntas sobre cada modelo hace que lo conozcamos en profundidad a la vez que nos añade posibilidades de aplicación y de inferencia de los resultados obtenidos con la realidad que estamos estudiando.

I.e. podemos poner este problema como ejemplo

Programación Matemática
Problemas de de Producción

Un especulador se dedica a comprar y vender un producto durante cuatro meses. El precio de compra y el de venta por tonelada es

Mes	Enero	Ferbrero	Marzo	Abril
Precio euros/Tm.	60	90	80	110

El coste de almacenamiento es de 10 euro por tonelada y mes. Sólo puede almacenar 20 Tm. y tanto la compra como la venta se realizan al principio de cada mes y, además, no hay stock inicial ni final.

Determinar la mejor política de compra venta.

Jesús Getán Programación lineal

Esta idea debe realizarse tanto en grupo como individualmente, ya que el estudiante debe aprender a reflexionar individualmente y en soledad (consultando los manuales o bibliografía adecuados) y posteriormente, en grupo, depurar su pensamiento en comparación con el colectivo al que pertenece y con la reflexión en voz alta del profesor, siendo el papel de este último el de referencia no de oráculo.

Una opinión equivocada puede ser tolerada donde la razón es libre de combatirla.

Thomas Jefferson.

La cuarta idea nos incita a tener una mente respetuosa. El mandato de esta idea es el de estudiar los diferentes planteamientos hechos por los estudiantes, tratar de comprenderlos y trabajar con ellos de una forma efectiva o bien para demostrar si son equivocados o equivalentes. En este último caso se tendrá que estudiar cuál de ellos es el más idóneo para resolver nuestro modelo.

I.e. podemos poner este problema introductorio.

Programación Matemática
Problemas de asignación

El ayuntamiento de Valls recibe una oferta de cuatro compañías de autobuses escolares para la ciudad. El ayuntamiento a resumido las ofertas en la siguiente tabla

	Ruta 1	Ruta 2	Ruta 3	Ruta 4
Cia 1	4000	5000		
Cia 2		4000		4000
Cia 3	3000		2000	
Cia 4			4000	5000

Suponiendo que la política de ayuntamiento es la de asignar una compañía a cada ruta.

a) Determinar la asignación para que el coste para el ayuntamiento sea mínimo.

b) Suponiendo que se puede asignar dos rutas a una compañía.
¿Cómo se repartirán las rutas para obtener el mínimo costo?

Sugerencia: Se necesitan dos puntos de oferta para cada compañía.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ 🔍 ↻

Jesús Getán
Programación lineal

Aquí, la exposición oral del trabajo realizado por el estudiante es fundamental, ya que al mismo tiempo que éste practica expresarse en público de una forma casi profesional, le permite clarificar ideas y defenderlas delante de colectivos que en este momento no son competidores. Los estudiantes que no exponen, observan de primera mano que es lo que se debe hacer y lo que no en una exposición, a la vez que piensa en un modo de trabajar que no es el suyo pero que tienen que entender para hacer

preguntas. Una consecuencia fundamental de este apartado es vislumbrar que no hay un pensamiento único y que las soluciones a los problemas se pueden alcanzar desde diferentes puntos de vista o de técnicas.

Cuando las circunstancias cambian, yo cambio de opinión ¿Usted qué hace? John Maynard Keynes.

La quinta, y puede que no la última idea que podemos expresar, es la idea del cambio en una forma ética y constructiva. Se trata de comparar los resultados obtenidos con las necesidades y deseos de la sociedad en que se vive y de reflexionar sobre lo obtenido y las posibles modificaciones en caso de negación.

I.e., podemos poner este problema de horario de trabajo con indicaciones sindicales.

Problema: (Winston, W) *Una oficina de correos necesita un número diferente de empleados a tiempo completo, para los diferentes días de la semana. El número de empleados requerido para cada día se da en la siguiente tabla:*

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
N Trab	17	13	15	19	14	16	11

Las reglas sindicales señalan que cada empleado de tiempo completo, tiene que trabajar durante cinco días consecutivos y, después, descansar dos días. La oficina de correos quiere cumplir con sus requerimientos diarios y utilizar solamente empleados a tiempo completo.

- (a) *Formula un programa lineal que resuelva el problema.*
- (b) *Resuelve el problema mediante programación lineal.*
- (c) *Analizar la sensibilidad de la solución frente a variaciones del número de empleados requeridos cada día.*

Supóngase que cada empleado de tiempo completo trabaja 8 horas al día. De esta manera, el requerimiento de 17 trabajadores para el lunes, puede verse como la necesidad de $8(17)=136$ horas. La oficina de correos quiere cumplir con sus necesi-

dades laborales diarias empleando personal a tiempo completo y a tiempo parcial. Durante una semana, un empleado a tiempo completo trabaja 8 horas diarias por cinco días consecutivos y un empleado a tiempo parcial trabaja 4 horas al día durante 5 días consecutivos. Un empleado a tiempo completo cuesta 18 euros la hora mientras que, un empleado de tiempo parcial (con beneficios complementarios reducidos) cuesta solamente 12 euros la hora. Los requerimientos sindicales limitan el trabajo de tiempo parcial al 25% de las necesidades laborales semanales.

(a) Formula un programa lineal que minimice los costos laborales semanales.

(b) Resuelve el problema mediante programación lineal.

En muchos modelos simplificados de situaciones económicas se pueden introducir peticiones de sindicatos, de las leyes del país o bien deseos del personal que las va a llevar a cabo. Los resultados así obtenidos darán una respuesta racional a dichas peticiones o deseos. Por otra parte, muchos problemas dan un sinnúmero de soluciones, la reflexión consiguiente nos dará la pauta de la elección de aquella que es más beneficiosa para la colectividad.

4. UN ESQUEMA DE PROGRAMA EN EL PRIMER CURSO

En primer lugar tomamos dos decisiones importantes para el desarrollo posterior de programa de curso. La primera decisión es usar el programa Solver que aparece en la hoja de cálculo Excel como herramienta para la realización de la tabla simplex. Las razones fundamentales son; que los estudiantes poseen alguna versión de la hoja de cálculo, que el Solver es sencillo de usar y rápido de implementar. Además, tiene una exposición del análisis de sensibilidad para programas lineales que es fácilmente explicable y entendible por los estudiantes no avezados a cálculos complicados. En otras palabras, se quiere fomentar la construcción de modelos o planteamiento de problemas y la interpretación y discusión de los resultados obtenidos. La segunda decisión es que la asignatura se evaluará de manera continua.

Tomadas estas decisiones nos planteamos tres acciones con el grupo:

Acción web. Esta acción engloba toda la información que el estudiante debe recibir antes de comenzar el curso. La web debe contener:

El programa de la asignatura y un modelo de hoja de renuncia a la evaluación continua.

Un esquema temporal de los temas a tratar a lo largo del curso.

Fechas de entrega a los estudiantes y recogida por parte del profesor de las actividades que se tienen que realizar fuera del horario de clase.

Fechas de las pruebas que se realizarán a lo largo del curso para seguir la evaluación continua, que estarán colocadas siempre al final de los temas que componen el objetivo de las mismas.

También estará el material teórico que se emplee en la clase así como las actividades complementarias adecuadas a cada tipo de tema en orden creciente de dificultad.

Las actividades propuestas se abrirán cuando sea el momento de entregarlas al estudiante. Una vez entregadas al profesor, las soluciones a las actividades también se expondrán.

Acción clase. Se propone a los estudiantes la lectura del tema antes de exponerlo en la clase. El objetivo es que el estudiante tenga un pequeño conocimiento de lo que se va hablar en clase.

Al principio de cada clase se propondrá un ejemplo introductorio sencillo del tema que ese día se tenga que desarrollar. Posteriormente, se explicará el modelo de teórico que corresponde al tema haciendo hincapié en los aspectos formales. Inmediatamente después, se propone otro ejemplo sencillo para plantear en la clase aplicando lo explicado.

Recordamos que los problemas sólo se plantean, no se resuelven ese día en clase. Al final de la clase, los problemas planteados se propondrán para resolver fuera debiéndose explicar la solución al comienzo de la siguiente clase. También, se puede proponer algún problema para que se plantee individualmente, corrigiéndose en la clase

siguiente.

Acción fuera de clase. Se propondrán a lo largo del curso no más de cinco actividades con dos o tres problemas cada una. Estos problemas se tendrán que plantear, resolver con la hoja de cálculo e interpretar los resultados, presentando todo ello de forma escrita. Se podrán trabajar individualmente o en grupo, pero, la presentación al profesor es individual. Entre las fechas de inicio y final de la actividad habrá una diferencia temporal de siete días como máximo. Los tiempos de entrega serán estrictos, tal y como se haría en una empresa.

5. COMENTARIOS

El procedimiento se ha aplicado a las clases de Optimización económica obteniendo los resultados siguientes:

Primer año, primera convocatoria, 115 aprobados, 31 suspensos; segunda convocatoria, 2 aprobados, 7 suspensos. Segundo año, primera convocatoria, 103 aprobados, 23 suspensos; segunda convocatoria, 10 aprobados, 3 suspensos.

El procedimiento, con las variaciones debidas a los temas a tratar se ha aplicado a las asignaturas, Optimización en economía de la Diplomatura en Estadística y Redes de Flujos y Optimización no Lineal del grado en Estadística. Los resultados han sido satisfactorios así como la asistencia a clase.

Si bien el uso de la tecnología no garantiza el éxito de las clases (Cuban et al.) el hecho de que en éstas se haya planteado al estudiante el uso de la hoja de cálculo como usuario, ha dado un gran margen de maniobra en el desarrollo de las clases y actividades.

Como posibilidad futura vemos unas clases semipresenciales, dado que gran parte del material que se ha desarrollado está preparado para las tabletas lo que facilita su distribución al estudiante y su manejo en las clases de tutoría correspondientes.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CUBAN, L., KIRKPATRICK, H. and PECK, C. (2001) “High access and low use of technologies in high school classrooms: Explaining an aparent paradox”. American Educational Research Journal 38 (4), 813–834.
- GARDNER, H. (2008). Las cinco mentes del futuro. Harvard Bussines School Press, Boston, Massachusetts.
- SERRANO, Sebastián. (2012). Comprender la comunicación. Paidós-Contextos, Espasa, Barcelona, España.
- WINSTON, Wayne. (2005). Investigación de operaciones. Aplicaciones y algoritmos. Thomson.