

NOTAS INTRODUCTORIAS SOBRE FIABILIDAD ESTRUCTURAL

Juan Chiachío Ruano, Manuel Chiachío Ruano

Noviembre de 2015

Página intencionadamente dejada en blanco.

Prefacio

Este documento constituye un material docente de apoyo para la asignatura *Fiabilidad y daño continuo* que se imparte en el Máster Universitario en Estructuras (código M63/56/1) por la Universidad de Granada.

El material que se recoge en este documento está especialmente concebido para sentar las bases teóricas así como para reiterar acerca de los fundamentos matemáticos de la fiabilidad. Al mismo tiempo, los autores pretenden presentar un material que, en un futuro, puede llegar a ser un libro de texto sobre ingeniería de fiabilidad, en el cual se aborde la fiabilidad desde una perspectiva más amplia, con especial atención a la fiabilidad de sistemas.

Finalmente, conviene recordar al alumno que debe ampliar y contrastar el contenido a través del material de referencia recomendado en el apartado de bibliografía.

Agradecimientos

Los autores desean agradecer a su mentor académico, el Prof. James L. Beck del Instituto Tecnológico de California (EE.UU), quien les transmitió la vocación investigadora pero también la de servicio y entrega al alumno y a la Universidad. Prof. Beck es uno de los investigadores más prominentes en fiabilidad y seguridad estructural, destacando especialmente por el desarrollo del algoritmo "SubSet Simulation", que se ha convertido en una herramienta esencial para el estudio de la fiabilidad de componentes o sistemas sujetos a eventos de fallo poco probables. Finalmente, los autores agradecen al Prof. Guillermo Rus Carlborg y al Prof. Rafael Gallego por su amabilidad al permitirnos mantener colaboración activa con la docencia reglada de la asignatura *Fiabilidad y Daño Continuo* del citado Máster.

Sobre los autores

Los autores de este material docente son los hermanos Juan y Manuel Chiachío Ruano, Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos por la Universidad de Granada (2006), y doctores por la misma universidad (2014). Desde su graduación como ingenieros en 2006, trabajaron en diversas empresas de ingeniería españolas como proyectistas de estructuras en importantes proyectos nacionales e internacionales. En 2010 se incorporan como investigadores predoctorales a la Universidad de Granada, tras haber ganado sendas becas FPU del Ministerio de Educación donde profundizan en aspectos específicos como la fiabilidad, diagnóstico y pronóstico en aplicación a la fatiga en materiales compuestos de fibra de carbono. Durante su investigación, los autores realizan varias estancias de investigación como científicos invitados en distintos centros de investigación y universidades de prestigio internacional como el Instituto Tecnológico de California (EE.UU), NASA (EE.UU), TUHH (Alemania). Actualmente trabajan como investigadores postdoctorales en el Centro de Fiabilidad y Riesgo de la Universidad de Nottingham (Reino Unido).

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Definiciones básicas	2
2. Fundamentos teóricos	3
2.1. Fiabilidad y probabilidad de fallo	3
2.1.1. Métodos de Nivel II	5
2.1.2. Métodos de Nivel III	7
2.2. Fiabilidad de sistemas	8
3. Ejemplos prácticos	11
3.1. Ejercicios prácticos	11
3.1.1. Ejercicio 1 (teórico-práctico)	11
3.1.2. Ejercicio 2	13
3.1.3. Ejercicio 3	14
3.1.4. Ejercicio 4	15
3.1.5. Ejercicio 5	15
3.2. Test teórico	17
3.2.1. Preguntas	18
3.2.2. Soluciones	20

Capítulo 1

Introducción

Índice

1.1. Motivación

1.2. Definiciones básicas

1.1. Motivación

En décadas recientes se han producido varios accidentes graves sobre instalaciones de alta seguridad e infraestructuras civiles que han cuestionado la percepción del riesgo, no sólo de las administraciones públicas y de los entes de gestión y control, sino también de la ciudadanía en general. Es suficiente con referir algunos casos recientes como el accidente nuclear de Fukushima en Japón, o en España, el accidente del tren ALVIA en Santiago de Compostela.

La reacción normal después de un evento de esta índole, una vez encontradas las causas, es la de tratar que no vuelva a pasar jamás, y en este contexto se toman todas las medidas disponibles, a cualquier coste, para mitigar ese riesgo específico. Esta actitud, basada en el método de "prueba-error", es incapaz *per se* de prevenir el riesgo de un nuevo fallo, sin embargo, ha dominado el avance de la tecnología hasta nuestros días.

El análisis de la fiabilidad desde un punto de vista probabilístico ha sido el método adoptado por industrias pioneras como la aeroespacial, nuclear y militar, aunque actualmente están siendo adaptados a la Ingeniería Civil. A lo largo de estos apuntes se expondrá una visión sinóptica de los mismos en aplicación a la Ingeniería Civil, y en particular, a la Ingeniería de Estructuras.

1.2. Definiciones básicas

La fiabilidad es una medida probabilística de la posibilidad de que una estructura (o en general, un sistema) no falle.

Ejemplo: Un dique rompeolas tiene una fiabilidad al rebose del 0.985 en un cierto estado de mar \implies Se estima que el 98.5% de las olas del estado de mar no rebosan el dique.

- ☛ ¿Qué entendemos por fallo? El fallo es el no-cumplimiento de alguno de los condicionantes de diseño de la estructura, quedando esta fuera de servicio (no necesariamente implica una rotura"). Una vez ocurrido el fallo, la estructura/obra solo se recuperará mediante su reparación o reconstrucción.

- ☛ ¿Cómo se relaciona la fiabilidad con la probabilidad de fallo? Intuitivamente, si la fiabilidad es la probabilidad del no-fallo, entonces es claro que $\text{Fiabilidad} = 1 - \text{Prob. de Fallo}$.

- ☛ ¿Por qué es importante conocer la fiabilidad de las estructuras? En la práctica real existen incertidumbres acerca de (1) los parámetros de proyecto (cargas, resistencia de los materiales, geometría, etc.) y (2) la veracidad de los modelos e hipótesis con los que calculamos las estructuras. Si no se tienen en cuenta estas incertidumbres, difícilmente podrán estimarse la seguridad y la operatividad de las estructuras.

- ☛ ¿Para qué sirve la fiabilidad? La Teoría de la Fiabilidad surgió durante la Segunda Guerra Mundial con aplicaciones militares, y fue adoptada en los años 60 al campo de la Ingeniería de Estructuras. El objetivo fue desarrollar métodos que permitiesen diseñar estructuras con suficiente seguridad a unos costes más competitivos. Esto responde a la pregunta planteada, es decir, se puede abaratar el coste de una estructura mediante el conocimiento de la fiabilidad de la misma, ya que permite conocer y controlar el sobredimensionamiento de dicha estructura. Esto último es especialmente relevante en estructuras realizadas con nuevos materiales (como las estructuras aeronáuticas de materiales compuestos [1]), por el elevado coste del material.

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

Índice

2.1. Fiabilidad y probabilidad de fallo

2.1.1. Métodos de Nivel II

2.1.2. Métodos de Nivel III

2.2. Fiabilidad de sistemas

2.1. Fiabilidad y probabilidad de fallo

Como se ha apuntado anteriormente, la fiabilidad está relacionada con la probabilidad de que una estructura (obra, sistema, etc.) no falle. En primer lugar, definamos por \mathcal{X} el espacio de definición de una variable (multidimensional) de estado $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ de nuestro sistema (tensiones, resistencias, etc.). Esta variable no es determinista (es decir, de valor constante) sino aleatoria, por lo que se distribuye según una determinada función de densidad $p(x)$. Supongamos que el espacio \mathcal{X} puede subdividirse en dos subconjuntos \mathcal{S} y \mathcal{F} de forma que $\mathcal{S} \cap \mathcal{F} = \emptyset$, y $\mathcal{X} = \mathcal{S} \cup \mathcal{F}$. El subconjunto \mathcal{S} se denomina *región de seguridad*, mientras que el \mathcal{F} se denomina *región de fallo*. Pues bien, en su forma más general, la fiabilidad puede definirse como la integral de $p(x)$ sobre la región de seguridad \mathcal{S} , es decir:

$$R = P(x \in \mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} p(x) dx \quad (2.1)$$

La probabilidad de fallo se puede obtener a través de R como:

$$P_f = P(x \in \mathcal{F}) = \int_{\mathcal{F}} p(x) dx = 1 - R \quad (2.2)$$

Obsérvese que la ecuación anterior no es sino una consecuencia de la topología de los subespacios \mathcal{S} y \mathcal{F} en relación a \mathcal{X} ; esto es \mathcal{S} y \mathcal{F} conforman \mathcal{X} , y su intersección es nula. Puesto que, por definición, $\int_{\mathcal{X}} p(x)dx = 1$, entonces la siguiente igualdad aplica:

$$\int_{\mathcal{X}} p(x)dx = \underbrace{\int_{\mathcal{S}} p(x)dx}_R + \underbrace{\int_{\mathcal{F}} p(x)dx}_{P_f} = 1 \quad (2.3)$$

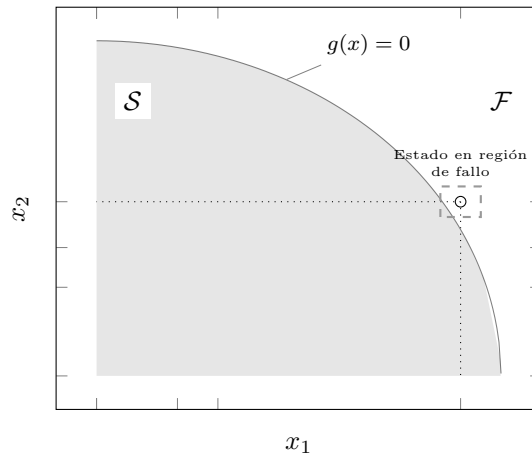


Figura 2.1: Ilustración conceptual de la división de un espacio cualquiera \mathcal{X} bi-dimensional en región segura \mathcal{S} y región de fallo \mathcal{F} , siendo la función de estado límite $g(x)$ la que establece el límite entre ambos subespacios. Se ilustra como ejemplo un estado $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X}$ situado en la región de fallo.

Típicamente la distinción entre la región útil y la región de seguridad no puede hacerse directamente en el espacio de la variable de estado x , sino mediante una función $g(x)$ de la misma definida como:

$$g(x) = \begin{cases} < 0, & \text{if } x \in \mathcal{F} \\ \geq 0, & \text{if } x \in \mathcal{S} \end{cases} \quad (2.4)$$

La función anterior se denomina *función de estado límite*, y alcanza el valor $g(x) = 0$ en la frontera entre la región de seguridad y la región de fallo. Se remite el lector a la Figura 3.1 como aclaración de los conceptos anteriormente descritos.

Un ejemplo clásico de función de estado límite es la diferencia entre tensiones $s(x)$ y resistencias $r(x)$ de un material, es decir, $g(x) = r(x) - s(x)$. Es

claro que los valores de x que hagan que $g(x) > 0$ pertenecerán a la región de seguridad, dado que para esos valores de x la resistencia será mayor que las tensiones. El caso contrario es igualmente intuitivo. Esta definición de función de estado límite como diferencia entre resistencia y sollicitación es lo que se denomina típicamente como *margen de seguridad*. En muchos textos se puede encontrar como $m(x)$ en lugar de $g(x)$.

Una vez definida la función de estado límite, la fiabilidad puede redefinirse también como:

$$R = \int_{g(x) \geq 0} p(x) dx \quad (2.5)$$

La evaluación de la integral de probabilidad definida en la ecuación anterior (o en la Ecuación 2.1) no suele ser posible por métodos directos de integración, salvo casos muy sencillos que rara vez se dan en la práctica. Para obtener una estimación de la misma se han desarrollado típicamente dos familias de métodos: *métodos de Nivel II* y *métodos de Nivel III*. Los *métodos de Nivel I* no son métodos de fiabilidad propiamente dicha, aunque están basados en los métodos de Nivel II y III.

2.1.1. Métodos de Nivel II

Estos métodos utilizan los momentos (media, desviación típica) de la variable de estado para estimar la fiabilidad a través del conocido *índice de fiabilidad* β . Este índice está típicamente asociado al caso de función de estado límite definida como margen de seguridad, esto es $g(x) = r(x) - s(x)$.

Supongamos que las variables resistencia y tensión se distribuyen según normales conocidas, es decir, $r(x) \sim \mathcal{N}(\mu_r, \sigma_r)$ y $s(x) \sim \mathcal{N}(\mu_s, \sigma_s)$, donde μ_r, μ_s y σ_r, σ_s son las medias y desviaciones típicas de $r(x)$ y $s(x)$, respectivamente. Puede comprobarse sin dificultad que la función $g(x)$ (que es también una función de variable aleatoria) se distribuirá según la normal $\mathcal{N}(\underbrace{\mu_r - \mu_s}_{\mu_g}, \underbrace{\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_s^2}}_{\sigma_g})$. Se define por tanto el *índice de fiabilidad* como la relación:

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} \quad (2.6)$$

es decir, la media de la función de densidad del margen de seguridad ponderada por su desviación típica. En el siguiente gráfico, se muestra la interpretación gráfica del índice de fiabilidad β :

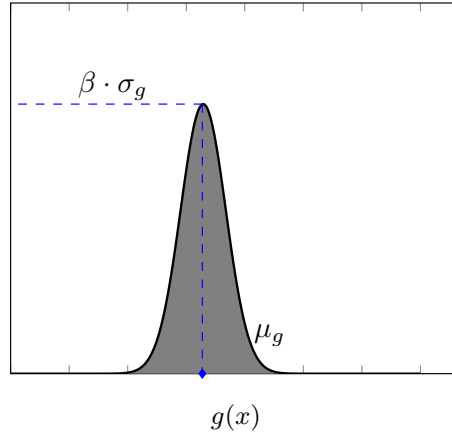


Figura 2.2: Ilustración conceptual sobre el índice de fiabilidad β . En la figura, la función de distribución representada corresponde a la de la función margen de seguridad. Ello explica que en el eje de abscisas se representen los valores de $g(x)$.

Se observa que el índice de fiabilidad proporciona una medida de la distancia entre el valor medio del margen de seguridad $g(x)$ y la región de fallo ($g(x) < 0$), en una escala de modulada por la desviación típica del margen de seguridad. Por tanto, un índice de fiabilidad $\beta = 2$ indicaría que la región de fallo se encuentra a dos veces la desviación típica del margen de seguridad. Por ejemplo, la normativa española de hormigón EHE exige implícitamente un índice de fiabilidad $\beta = 3,8$ para ELU y $\beta = 1,5$ en ELS.

En la literatura puede encontrarse frecuentemente una definición alternativa al índice de fiabilidad explicado anteriormente, que corresponde al llamado *índice de Cornell*. Este método alternativo se conoce típicamente como *índice de Hasofer y Lind* [2], a raíz de lo cual surgen los métodos analíticos del cálculo del índice de fiabilidad, como por ejemplo, los conocidos métodos FORM y SORM de aproximación analítica, entre otros [3]. En esencia, las bases de este método son las mismas que las del método de Cornell, por lo que se remite al lector interesado a la literatura específica para una mayor profundización. Por ejemplo en Chiachío-M. *et al.* [1] se exponen los fundamentos de este índice y se ilustra gráficamente su significado.

Una vez conocido el índice de fiabilidad, puede obtenerse una estimación de la fiabilidad (es decir, una aproximación a la integral en Ec. 2.1) como $R = \Phi(\beta)$, siendo Φ la imagen de la distribución acumulada de probabilidad de la función de distribución estándar $\mathcal{N}(0, 1)$ evaluada en β .

2.1.2. Métodos de Nivel III

Los métodos de fiabilidad de Nivel III están basados en simulación estocástica para estimar la integral de probabilidad definida en la Ecuación 2.1. Este conjunto de métodos son los que proporcionan una estimación más precisa de la fiabilidad sobre todo en sistemas complejos no lineales, aunque esto es a coste de un esfuerzo computacional mucho mayor. No obstante los avances en capacidad computacional han sido y son tan significativos que en este momento los métodos de Nivel III se han convertido en un estándar, desbancando casi por completo a los métodos de Nivel II (sobre todo en investigación, y cada vez más en la práctica) [4].

De entre el conjunto de métodos de Nivel III, el método Monte Carlo [5] es sin duda el más relevante por su simplicidad y eficiencia. Básicamente la idea de la aproximación Monte Carlo parte de la redefinición de la integral de probabilidad de fallo como

$$P_f = \int_{g(x) \leq 0} p(x) d(x) \triangleq \int_{\mathcal{X}} p(x) \mathbb{I}[g(x)] dx \quad (2.7)$$

donde $\mathbb{I}[g(x)]$ es una función indicatriz definida como sigue:

$$\mathbb{I}[g(x)] = \begin{cases} 1 & \text{if } g(x) < 0 \\ 0 & \text{if } g(x) \geq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Se observa que la integral de probabilidad definida en la Ecuación 2.7 puede considerarse como la esperanza matemática de $\mathbb{I}[g(x)]$, estando x distribuida según $p(x)$. Una aproximación a esta esperanza podría obtenerse mediante muestreo como:

$$P_f \simeq \frac{1}{n_s} \sum_{j=1}^{n_s} \mathbb{I}[g(x^{(j)})] \quad (2.9)$$

donde $x^{(j)}$ son n_s *samples* (realizaciones) obtenidos simulando la función de densidad $p(x)$ usando algún *método de muestreo*¹ (ej., *método de inversión*, [6]). El término $\sum_{j=1}^{n_s} \mathbb{I}[g(x^{(j)})]$ en la Ecuación 2.9 representa la suma del número de *samples* que salen de la región de seguridad, por lo que la ecuación anterior puede reescribirse como

$$P_f \simeq \frac{n_f}{n_s} \quad (2.10)$$

¹En la práctica, es habitual trabajar con variable estocástica discreta, de forma que la obtención de *samples* es directa mediante la evaluación del modelo probabilístico/estocástico.

donde n_f es el número de simulaciones en la región de fallo \mathcal{F} . Es decir, un estimador de P_f se obtendría simplemente calculando el número n_f de simulaciones que entran en la región de fallo sobre el número total n_s de simulaciones. A partir de esta estimación, la fiabilidad se obtendría fácilmente como $R = 1 - P_f$.

Una descripción algorítmica de este método sería la siguiente:

Algorithm 1 Método Monte Carlo

1. Fijar número total de simulaciones n_s e inicializar $n_f = 0$
 - for** $j = 1$ to n_s **do**
 2. Simular $x^{(j)}$ según $p(x)$: $x^{(j)} \sim p(x)$
 3. Evaluar la función de estado límite $g(x^{(j)})$
 4. Evaluar la función indicatriz $\mathbb{I}[g(x^{(j)})]$ (Eq.2.8)
 - if** $\mathbb{I}[g(x^{(j)})] = 1$ **then**
 5. $n_f = n_f + 1$
 - else**
 6. $n_f = n_f$
 - end if**
 - end for**
 7. Calcular $P_f \simeq \frac{n_f}{n_s}$
-

Se puede demostrar que el error de la aproximación realizada por el método Monte Carlo (en la Ecuación 2.10) depende sólo del número de simulaciones n_s , y no de la dimensión n_x de la variable de estado $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, lo que confiere una gran aplicabilidad y robustez de este método a problemas complejos multidimensionales. En particular la varianza del estimador P_f disminuye a razón de $\frac{1}{n_s}$, por lo que es claro que aumentando el número n_s de simulaciones se obtienen estimaciones de P_f cercanas al valor exacto. Existe una vasta literatura en torno a los métodos de evaluación de la calidad estadística de estimadores Monte Carlo (ej. [4]), y se recomienda al alumno ampliar conocimiento al respecto. Una recomendación práctica de implementación sería aumentar automáticamente el número de simulaciones hasta que la media del estimador $\tilde{P}_f = \frac{1}{n_s} \sum_{j=1}^{n_s} P_f^{(j)}$ converja asintóticamente, pudiéndose parar el algoritmo en ese momento.

2.2. Fiabilidad de sistemas

La definición de fiabilidad que se hace en el apartado anterior implícitamente asume que la fiabilidad de todo el sistema corresponde a la del componente más débil. Por ejemplo, una aproximación a la fiabilidad estruc-

tural de un sistema viga-columna puede obtenerse calculando la fiabilidad de la viga, la de la columna, y la de la unión entre ambas, adoptando la menor de ellas. Esta hipótesis es típicamente asumida en sistemas y estructuras "simples", sin embargo puede constituir un error importante de aproximación en sistemas más complejos donde diferentes sub-sistemas interactúan entre sí. Un caso paradigmático lo constituye el sistema de aterrizaje de un avión: la fiabilidad del aterrizaje depende a su vez de la fiabilidad del sistema electrónico, la del sistema de propulsión, de los sistemas de guiado, monitorización, etc., de forma que es imposible establecer un sub-sistema crítico que defina nominalmente la fiabilidad de todo el sistema. En estos casos es imprescindible recurrir a metodologías específicas de cálculo, que salen fuera de los objetivos de esta asignatura. Sin embargo, se recomienda al alumno las referencias [7, 8] para su profundización.

Capítulo 3

Ejemplos prácticos

Índice

3.1. Ejercicios prácticos

3.1.1. Ejercicio 1 (teórico-práctico)

3.1.2. Ejercicio 2

3.1.3. Ejercicio 3

3.1.4. Ejercicio 4

3.1.5. Ejercicio 5

3.2. Test teórico

3.2.1. Preguntas

3.2.2. Soluciones

3.1. Ejercicios prácticos

A continuación se plantean y resuelven una serie de ejercicios prácticos a través de los cuales el alumno puede fijar los conceptos básicos descritos en las secciones anteriores.

3.1.1. Ejercicio 1 (teórico-práctico)

Cálculo de la probabilidad de fallo P_f y la fiabilidad R mediante el método Monte Carlo de un componente o sistema cuya función de estado límite está definida por la siguiente función $g(x) = \frac{4}{25}(x_1 - 1)^2 + x_2 - 4$, donde $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$ es una variable aleatoria cuya función de densidad $f(x)$ es Gaussiana $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$,

siendo $\mu = (0, 0)$ y $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,4 \\ 0,4 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de covarianzas de la variable aleatoria $x = (x_1, x_2)$.

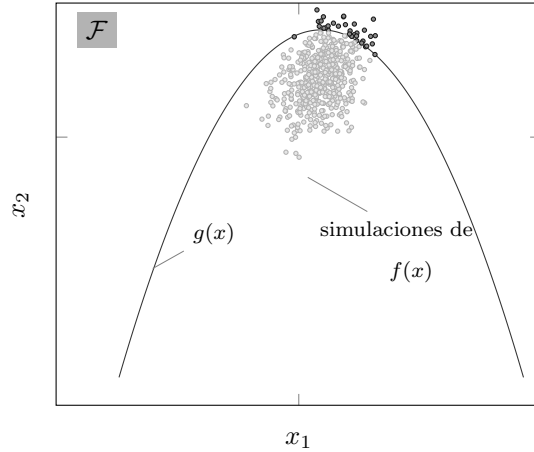


Figura 3.1: Ilustración del método de Monte Carlo. Los discos (samples) coloreados en oscuro corresponden a aquellos simulados en región de fallo \mathcal{F} , siendo la función de estado límite $g(x)$ la que establece el límite entre el subespacio seguro \mathcal{S} y el subespacio \mathcal{F} .

Solución

Se aplica el método de Monte Carlo y para hacer frente a las múltiples repeticiones necesarias, usamos un algoritmo como el que aparece en los apuntes de teoría. Como se ha dicho anteriormente, la aplicación del método Monte Carlo conlleva simulación de la variable $x \sim f(x)$ numerosas veces, donde $f(x) = \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$. Puesto que se trata de una función de densidad Gaussiana multivariable de dimensión 2, y además las variables x_1, x_2 están correladas, se requiere algún método eficaz para la obtención de "samples". En la literatura es muy conocido el método que usa la descomposición de Cholesky de la matriz de covarianzas Σ , esto es $\Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$, donde \mathbf{A} es una matriz triangular inferior del mismo tamaño que Σ . Una vez obtenida \mathbf{A} , se pueden obtener un vector \tilde{x} formado mediante samples de x , esto es $\tilde{x} = [(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}), \dots, (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}), \dots, (x_1^{(n_s)}, x_2^{(n_s)})]$, de la siguiente forma:

$$\tilde{x} = \mu + \mathbf{A}\tilde{u} \tag{3.1}$$

siendo $\tilde{u} = [(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}), \dots, (u_1^{(j)}, u_2^{(j)}), \dots, (u_1^{(n_s)}, u_2^{(n_s)})]$ un vector del mismo tamaño que \tilde{x} , formado por valores de la función de densidad normal estándar,

esto es $u_1^{(j)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y $u_2^{(j)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $j = 1, \dots, n_s$. En nuestro ejemplo, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,4 & 0,9165 \end{pmatrix}$.

En la práctica, ciertos programas de matemáticas tienen subrutinas que implementan este método de una forma eficiente. Por ejemplo, en MATLAB[®] se puede escribir de la siguiente forma:

```

1  %JUAN Y MANUEL CHIACHÍO RUANO
2  %MÁSTER DE ESTRUCTURAS (UGR)/ FIABILIDAD
3  %Obtención de samples en PDF Gaussiana de dimensión d=2
4  %La variable "ns" hace referencia al número de samples
5
6  mu = [0 0];
7  Sigma = [1 0.4; 0.4 1];
8  A = chol(Sigma);
9  samp = repmat(mu, ns, 1) + randn(ns, d)*A; %samp= vector de ...
    dimensión "d"

```

Algorithm 2 Método Monte Carlo (Ejercicio 1)

1. Fijar número total de simulaciones n_s e inicializar $n_f = 0$
 - for** $j = 1$ to n_s **do**
 2. Simular $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ Eq. 3.1
 3. Evaluar $g(x^{(j)}) = \frac{4}{25}(x_1^{(j)} - 1)^2 + x_2^{(j)} - 4$
 4. Evaluar la función indicatriz $\mathbb{I}[g(x^{(j)})]$
 - if** $\mathbb{I}[g(x^{(j)})] = 1$ **then**
 5. $n_f = n_f + 1$
 - else**
 6. $n_f = n_f$
 - end if**
 - end for**
 7. Calcular $R \simeq 1 - \frac{n_f}{n_s}$
-

3.1.2. Ejercicio 2

Nos encargan el análisis de la seguridad estructural de un puente metálico histórico. Tras un análisis experimental, se determina que la tensión última del acero (resistencia remanente) es $\sigma_u = 240 \pm 5$ MPa. Posteriormente realizamos un cálculo estructural del puente y determinamos que la tensión máxima de sollicitación σ_{max} en la sección crítica de la estructura es de $\sigma_{max} = 200 \pm 10$ MPa. Asumiendo que ambas variables, tensión última y tensión máxima de sollicitación son variables Gaussianas, obtener lo siguiente:

1. el índice de fiabilidad del puente e interpretar su significado.

2. Una recomendación por la cual podría aumentarse el índice de fiabilidad considerando que los valores de resistencia aportados son $\sigma_u = 240 \pm 5$ son fijos (en el sentido de que su función de densidad no puede ser modificada con respecto a lo enunciado).

Solución

La función de estado límite se puede definir como $g(x) = \sigma_u - \sigma_{max}$. Como dice el enunciado, la tensión última (resistencia) y la tensión de sollicitación se pueden estudiar mediante variables Gaussianas, por lo que se definen como $\sigma_u \sim \mathcal{N}(240, 5)$ y $\sigma_{max} \sim \mathcal{N}(200, 10)$, respectivamente. Es por tanto claro que $g(x)$ será otra variable Gaussiana que puede definirse como $g(x) \sim \mathcal{N}(240 - 200, \sqrt{5^2 + 10^2}) = \mathcal{N}(40, 11,18)$. Por tanto, el índice de fiabilidad de la estructura será $\beta = \frac{40}{11,18} \approx 3,57$. La interpretación del resultado anterior es la siguiente: la media de la variable aleatoria margen de seguridad está a una distancia de 3.57 desviaciones típicas de la zona de fallo.

En cuanto al segundo apartado del ejercicio, se considera que los valores de resistencia son fijos (tanto en media como en desviación típica). Significa por tanto que la única opción para incrementar el índice de fiabilidad obtenido es a través de los valores de sollicitación. La recomendación sería la siguiente: tratar de emplear un método de cálculo más adecuado que arroje valores de sollicitación que, o bien sean menores que 200; o bien, disminuya la desviación típica del cálculo (relacionada con la incertidumbre del modelo); o ambas cosas a la vez. Obsérvese que la primera medida incrementaría el numerador del índice de fiabilidad β , la segunda disminuiría el denominador de β , y finalmente la tercera medida contribuiría en ambos sentidos.

3.1.3. Ejercicio 3

En el contexto del ejercicio anterior, supongamos que disponemos de tres instrumentos distintos y de diferente calidad para medir la resistencia remanente del acero. El mejor de ellos (también el más caro) proporciona medidas con un error absoluto de 2.5 MPa, el más barato tiene un error de 10 MPa y el intermedio un error de 5 MPa. Determinar la fiabilidad de la estructura para ambos casos y discutir el resultado. ¿Podemos afirmar por tanto que la fiabilidad es una propiedad intrínseca de una estructura?

Solución

$$\beta_1 = \frac{40}{\sqrt{2,5^2+10^2}} \approx 3,88$$

$$\beta_2 = \frac{40}{\sqrt{5^2+10^2}} \approx 3,57$$

$$\beta_3 = \frac{40}{\sqrt{10^2+10^2}} \approx 2,83$$

Se observa que el índice de fiabilidad es mayor cuando usamos sensores con menor error (\approx variabilidad en la medida). Podemos concluir por tanto que la fiabilidad NO es una propiedad intrínseca de las estructuras ni de los materiales sino que depende del estado de información disponible, en concreto de la incertidumbre de las variables aleatorias. En definitiva, se trata de un indicador matemático, artificialmente creado para tener una medida de la seguridad de una estructura, y en definitiva de un componente o sistema.

3.1.4. Ejercicio 4

Nos requieren para estudiar una pasarela peatonal biapoyada de 20m de luz en la que se han detectado flechas excesivas. El cliente nos pide que determinemos la carga puntual P máxima que puede acceder a la pasarela de forma que la flecha máxima en servicio sea 50 mm con una fiabilidad del 95 %. Una vez nos hacen el encargo, monitorizamos la pasarela y observamos que la flecha en servicio se distribuye según una distribución uniforme. Nota: recuérdese que la flecha máxima (centro luz) de una viga bi-apoyada sometida a una carga puntual es: $\delta_{max} = \frac{Pl^3}{48EI}$. La rigidez seccional EI puede dejarse como parámetro.

Solución

Definimos la región de seguridad de la variable estado (flecha) como $\mathcal{S} = [0, 50]$. La función de densidad de la variable de estado sería $p(\delta) = \mathcal{U}(0, \delta_{max})$. Por tanto la fiabilidad sería $R = \int_{[0,50]} \mathcal{U}(0, \delta_{max}) d\delta = 0,95$. La integral anterior es resoluble analíticamente: $R = \frac{50}{\delta_{max}} \implies \delta_{max} \approx 52,63$ mm. Por tanto, $P_{max} = \frac{48EI\delta_{max}}{l^3} \cong 0,315EI$ [N].

3.1.5. Ejercicio 5

Durante una maniobra de aterrizaje con viento cruzado, el timón de cola de un avión puede adoptar de forma automática hasta 6 posiciones diferentes, dependiendo de la intensidad y ángulo de incidencia del viento. Definamos

por tanto como x a la variable de estado *posición*, que puede tomar indistintamente los valores discretos $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Suponiendo que la función de estado límite de este sistema de guiado es $g(x) = 25 - x^2$, estimar mediante el método Monte Carlo la fiabilidad del sistema (timón de cola) en condiciones de viento cruzado.

Solución

Algorithm 3 Método Monte Carlo (Ejercicio 5)

1. Fijar número total de simulaciones n_s e inicializar $n_f = 0$
 - for** $j = 1$ to n_s **do**
 2. Simular $x^{(j)} \sim \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 3. Evaluar $g(x^{(j)}) = 16 - x^{(j)}$
 4. Evaluar la función indicatriz $\mathbb{I}[g(x^{(j)})]$
 - if** $\mathbb{I}[g(x^{(j)})] = 1$ **then**
 5. $n_f = n_f + 1$
 - else**
 6. $n_f = n_f$
 - end if**
 - end for**
 7. Calcular $R \simeq 1 - \frac{n_f}{n_s}$
-

Una implementación en Matlab sería la siguiente:

```
1 %JUAN CHIACHIO RUANO
2 %PRÁCTICA FIABILIDAD
3
4 %Función de estado límite: g(x)=25-x^2;
5
6 clear all
7 format compact
8
9 n_s=10000; %número simulaciones
10 n_f(1)=0; %contador número de fallos
11
12 for i=2:n_s+1;
13
14     x=randi(6); %simula la variable de estado
15     g=25-x^2; % evalúa la función de estado límite
16
17     if g<0
18         n_f(i)=n_f(i-1)+1;
19     else
20         n_f(i)=n_f(i-1);
21     end
22
23     P_f(i)=n_f(i)/i;
24     m(i)=mean(P_f(1:i)); %media del estimador Prob_Fallo
25
26
27 end
28
29 Prob_Fallo=P_f(end);
30 Fiabilidad=1-Prob_Fallo;
31
32 plot(m) %comprobar convergencia de la estimación
```

3.2. Test teórico

A continuación se presenta un test teórico a través del cual el alumno puede comprobar los conocimientos adquiridos. Las soluciones son aportadas a continuación, aunque se recomienda no visitar las soluciones hasta comprobar el nivel de fijación de conceptos.

3.2.1. Preguntas

1. La fiabilidad R y la probabilidad de fallo P_f están relacionadas mediante la expresión:
 - $R = \int P_f dP_f$
 - $R = 1 - P_f$
 - Ninguna de las anteriores
2. La fiabilidad se define por la integral $R = \int_{\mathcal{S}} p(x) dx$, siendo $p(x)$ la función de densidad de la variable estado x y \mathcal{S} la región de seguridad de la variable estado.
 - Verdadero.
 - Falso. Se define como $R = \int_{\mathcal{F}} p(x) dx$, siendo \mathcal{F} la región de fallo.
 - Ninguna de las anteriores
3. Para resolver la integral de fiabilidad, normalmente intratable analíticamente, se usan típicamente:
 - Métodos numéricos de integración
 - Métodos de nivel I, II y III
 - Ambos
4. El índice de fiabilidad β es una medida de fiabilidad que se engloba dentro de los métodos:
 - De nivel II
 - De nivel III
 - Ninguno de los anteriores
5. En general, los métodos de nivel III son más precisos que los métodos de nivel II porque:
 - Usan el método Monte Carlo para resolver la integral de fiabilidad
 - No asumen ninguna hipótesis simplificadora acerca de la función de densidad $p(x)$ y de la función de estado límite $g(x)$.
 - Ninguno de los anteriores

6. En ciertos cálculos típicos de edificación (como en el caso del cálculo de muros) se suele hablar con frecuencia del *factor de seguridad* (FS), que se define como la relación en media de las acciones desfavorables entre las acciones favorables; esto es, $FS = \mu_F/\mu_D$, siendo μ_D y μ_F la media de las acciones desfavorables y favorables, respectivamente. En base a esta definición, y teniendo en cuenta la definición de *índice de fiabilidad* β , seleccione la respuesta verdadera:

- El factor de seguridad FS y el margen de seguridad son lo mismo.
- Un incremento del factor de seguridad FS conlleva necesariamente un incremento del índice de fiabilidad B .
- Ninguna de las anteriores.

3.2.2. Soluciones

Pregunta 1	Opción 2
Pregunta 2	Opción 1
Pregunta 3	Opción 2
Pregunta 4	Opción 1
Pregunta 5	Opción 2
Pregunta 6	Opción 3

Bibliografía

- [1] Manuel Chiachío, Juan Chiachío, and Guillermo Rus. Reliability in composites - A selective review and survey of current development. *Composites Part B: Engineering*, 43(3):902–913, 2012.
- [2] A.M. Hasofer and N.C. Lind. Exact and invariant second-moment code format. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 100(1):111–121, 1974.
- [3] O. Ditlevsen and H.O. Madsen. *Structural reliability methods*, volume 315. 1996.
- [4] Enrico Zio. *Monte Carlo Simulation Method for System Reliability and Risk Analysis*. Springer Series in Reliability Engineering. 2012.
- [5] C.C Hurd. A note on early monte carlo competitions and scientific meetings. *Annals of the History of Computing*, 7:141–155, 1985.
- [6] Reuven Y. Rubinstein and Dirk P. Kroese. *Simulation and the Monte Carlo Method*. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, second edition, 2008.
- [7] Alessandro Birolini. *Reliability Engineering: Theory and Practice*. Springer, 2006.
- [8] Jonh D Andrews and Bob Moss. *Reliability and Risk Assessment*. Professional Engineering Publishing, 2002.
- [9] W. Chen. *Nonlinear Analysis of Electronic Prognostics*. PhD thesis, Technical University of Napoli, 1991.