

CURSO DE INTRODUCCIÓN A ESTRUCTURAS DE FIBRA DE CARBONO

Manuel Chiachío Ruano, Juan Chiachío Ruano

Septiembre de 2015

Página intencionadamente dejada en blanco.

Prefacio

Este documento constituye el material docente de apoyo a la docencia para el curso de *Introducción a estructuras de fibra de carbono* que se imparte (con solución de continuidad y sujeto a disponibilidad de alumnos y docentes) en la E.T.S. de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad de Granada como curso de libre elección, en colaboración con la Delegación de Alumnos de la citada escuela.

Actualmente la utilización de materiales avanzados de alta eficacia, como los composites de fibra de carbono o vidrio originarios de la industria aeronáutica y aeroespacial, se presenta como alternativa viable en el diseño de estructuras de ingeniería civil en las que las exigencias de ligereza, durabilidad y tiempo de construcción se convierten en aspectos críticos del diseño. Desde los últimos 10 años se está asistiendo a un aumento importante a nivel mundial de las aplicaciones de materiales avanzados en construcción, y en particular en estructuras de ingeniería y arquitectura civil: puentes, estructuras de arquitectura singular, estructuras offshore, sistemas de almacenamiento energético, etc. Estados Unidos, Japón, Suiza, Reino Unido y Dinamarca entre otros países tecnológicamente avanzados, cuentan ya con numerosos puentes y estructuras de ingeniería realizadas íntegramente con estos materiales. Así mismo, en estos países se ha creado una red empresarial en torno a los nuevos materiales que está suponiendo en ciertos casos un importante impulso económico y una revolución tecnológica en el sector de la construcción. Este curso es una introducción a la tecnología y diseño, y se plantea desde un punto de vista divulgativo y práctico, de forma que el alumno no solo conozca una nueva tecnología sino además un novedoso sector de la industria con nuevas oportunidades.

El material que se recoge en estos apuntes está especialmente concebido para servir como guión de clase, puesto que sigue concisamente cada uno de los apartados impartidos en las mismas. Sin embargo, conviene recordar al alumno que debe ampliar y contrastar el contenido a través del material de referencia recomendado.

Agradecimientos

Los autores desean agradecer a su mentor académico, el Prof. James L. Beck del Instituto Tecnológico de California (EE.UU). El Prof. Beck les transmitió la vocación investigadora pero también la de servicio y entrega al alumno y a la Universidad. Al mismo tiempo, los autores agradecen al Dept. de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica, especialmente a su director Dr. Javier Suárez, por el apoyo ofrecido para la organización del curso. Finalmente, agradecemos a nuestros compañeros del Laboratorio de Evaluación No Destructiva por su participación en el mismo. En especial, agradecemos al Dr. Nicolas Bochud y a la Dr. Laura M. Peralta por su ayuda en la preparación de material docente así como por su colaboración con las clases.

Sobre los autores

Los autores de este material docente son los hermanos Manuel y Juan Chiachío Ruano, Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos por la Universidad de Granada, y doctores *cum laude* con mención internacional por la misma universidad. Desde su graduación como ingenieros en 2006, trabajaron en diversas empresas de ingeniería españolas como proyectistas de estructuras en importantes proyectos tales como el Metro de Málaga, la terminal de gas natural licuado de Dunquerke (Francia), o la ampliación del Puerto de Arzew (Argelia), por citar solo algunos. En 2010 se incorporan como investigadores predoctorales a la Universidad de Granada, tras haber ganado sendas becas FPU del Ministerio de Educación donde profundizan en aspectos específicos como la fiabilidad y el daño por fatiga en materiales compuestos. Durante esta etapa como investigadores predoctorales, del 2010 al 2014, los autores realizan varias estancias de investigación como científicos invitados en distintos centros de prestigio internacional con los cuales no había precedentes de colaboración con el departamento de la UGR del que proceden. Tales centros son el Instituto Tecnológico de California (CALTECH), el Ames Research Center de la NASA (Bahía de San Francisco, USA) y los laboratorios de dinámica de materiales compuestos de Airbus en la Universidad Tecnológica de Hamburgo (Alemania). Desde 2015 trabajan como investigadores postdoctorales en el Centro de Fiabilidad y Riesgo de la Universidad de Nottingham (Reino Unido), e imparten docencia reglada en varias materias del Departamento de Ingeniería Civil de la citada universidad británica.

Índice general

Índice general

Introducción-Conceptos

- Comportamiento mecánico
- Fibras
- Matriz
- Fabricación

Mecánica de Laminados

- Isotropía y anisotropía
- Notación
- Constantes de ingeniería
- Matriz de rigidez de una lámina
- Caracterización mecánica según fabricación

Prediseño de laminados

- Método de transformación entre sistemas de referencia
- Constantes cuasi-isotrópicas
- Práctica
- Codificación de laminados
- Diseño de laminados
- Teoría de laminados
- Práctica

Modos de fallo y detección de daño en CFRP

- Motivación y contexto
- Criterios de fallo
- Otros criterios conocidos
- Ratio Resistencia-Factor de Seguridad
- Práctica

Introducción-Conceptos

Manuel Chíachio, Juan Chiachio

Dept. Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica



ugr

Universidad
de Granada

Index

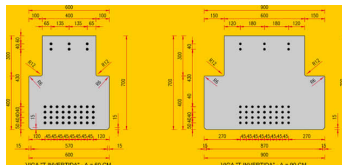
- 1 Introducción tecnología del material
 - Comportamiento mecánico
 - Fibras
 - Fibras de vidrio
 - Fibras de carbono
 - Matriz
 - Definición y tipos
 - Poliméricas
- 2 Fabricación

Material Compuesto-Composite

Es un material estructural formado por dos o más componentes de diferente comportamiento mecánico.



- ¿El hormigón armado y pretensado también?



No es fácil de definir ni existe una definición universal



La característica de los composites en relación a los anteriores está en la distribución a microescala de los refuerzos.

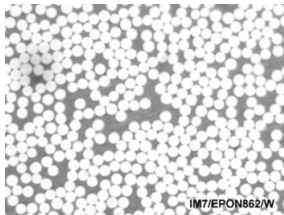


Figure : Imagen a microscopio de una sección de composite. Las fibras se destacan en círculos blancos. El espacio entre fibras lo rellena la matriz.

Componentes:

- fibras (llevan la carga)
- matriz (conduce la carga a las fibras-soporta parte de carga)
- interfase (transfiere la carga entre componentes)

El comportamiento del material está muy influenciado por la interfase

fibras

Filamentos de diámetro 5 – 15 [μm] distribuidos en haces cuyas direcciones siguen un cierto orden planificado dentro del material.

Su tamaño permiten ser producidas por máquinas textiles.

Pueden ser de fibra corta o fibra larga.

Salvo indicación en lo contrario, se refiere a fibras sintéticas

Requieren tratamiento superficial para asegurar adherencia fibra-matriz.



Figure : Rollos comerciales de fibras de carbono y vidrio

Propiedades y características

Tipos

- Vidrio (Bajo módulo y baja resistencia)
- Aramida o Kevlar ®(muy ligero)
- **Carbono** (alto módulo y alta resistencia)
- Boron (alto módulo y alta resistencia)
- Carbida de silicio (Resiste altas temperaturas)

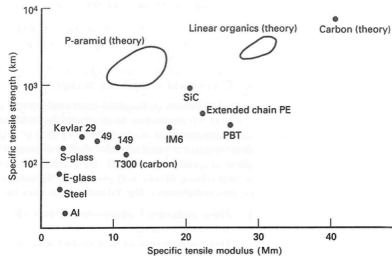


Figure : Relación Resistencia-Rigidez específica de distintos tipos de fibras. D.-H. Kim. Composites

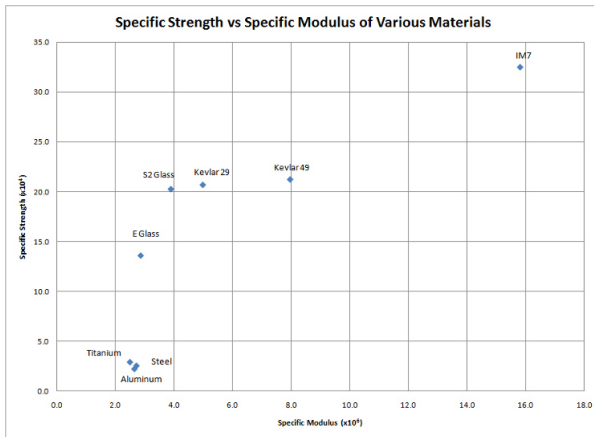


Figure : Relación Resistencia-Rigidez específica de distintos tipos de fibras. Hexcel Inc.

Fiber type	Specific gravity	Young's modulus, E		Tensile strength		Strain to failure (%)	Highest usable temp. (°C)
		(GPa)	(10^6 psi)	(GPa)	(10^3 psi)		
E-glass	2.5–2.6	69–72	10–10.4	1.7–3.5	246.5–507.5	3–4.8	350
S ₂ S ₂ -glass	2.49	86.9–93.1	12.6–13.5	4.58	665	5.4	350
A-glass	2.5	69	10.0	3.04	440.8		
ERC-glass	2.62	72.5	10.5	3.63	526.4		
R-glass	2.55	86	12.5	4.4	638.0		780
Boron	2.4–2.6	365–440	52.9–63.8	2.3–3.5	333.5–510	1.0	2000
Carbon HM ^a	2.15	725	105	2.2	325.0	0.30	600
Carbon HS ^b	1.77	295	42.8	5.66	820	1.91	500
Al ₂ O ₃ (Du Pont)	3.95	379	55	1.38–2.1	200.1–304.5	0.4	1000
Nicalon SiC	2.8	45–480	6.5–69.6	0.3–4.9	43.5–710.5	0.6	1300
Avco SiC	2.7–3.3	427	61.9	3.4–4.0	493.0–580.0	1	
Tyranno UBE ^c	2.4	120	17.4	2.5	362.5	2.2	1300
Nextel-3M ^d	2.5	152	22.0	1.72	249.4	1.95	1200
Al ₂ O ₃ (ICI)	3.3	330	43.5	2	290.0	1.5	1000
Quartz (SiO ₂)	2.2–2.5	75	10.9	5.9	855.5	1.5–1.8	1100
Nylon 66	1.2	<5	<0.7	1	145.0	20	150
Polyester	1.38	<8	<2.6	0.8	116.0	15	150
Technora-HM50 ^e	1.39	70	10.2	3.04	440	4.3	250
Spectra 900 ^f	0.97	117	17.0	3	435.0	3.5	120
Kevlar 29	1.44	82	12	3.61	525	4.4	
Kevlar 49	1.45	131	19.0	3.61	525	2.9	250
Kevlar 149	1.47	186	27	3.45	501	1.8–1.9	

^a High modulus. ^b High strength. ^c SiC. ^d Al-boria-silica. ^e Aramid. ^f UHMWPE.

Figure : Tabla de propiedades mecánicas de distintos tipos de fibras. D.-H. Kim. Composites

Fibra de vidrio

- Resistencia y rigidez media, a un precio muy competitivo.
- Degradación ambiental y reacción entre ellas mismas (tratamiento)
- Marble melt process y direct melt process. (Poco energético)

Tipo	Rango de aplicación	Nota
E-Glass	Aplicaciones generales e Ing. Civil	Buena resistencia eléctrica y térmica. Buen comportamiento frente a los ácidos
S-Glass	Mayor resistencia que anterior. Aplic. Generales	
C-Glass	Ambientes con agresividad química	Resistencia al álcali Es un producto mejorado mecánicamente c.r.a E-Glass Alta resistencia a fatiga, degradación, etc
N-Glass	Para composites cementerios	
T-Glass	Las del primer caso	
R-Glass	Mayor resistencia que E-Glass	
A-Glass	Elevada agresividad química y alta demanda mecánica	
ECR-Glass	Mejora del E-Glass con propiedades de resistencia química	
AR-Glass	Mejora del N-Glass	



Fabricación

Pasta de minerales y otros componentes + T^a → Estiramiento → Trat. químico
Formas de presentación comerciales:

- Rollo (Woven Roving)
- Hiladas continuas (Continuous Strands)
- Lona (Surfacing mats)

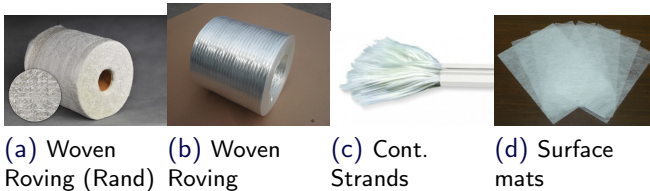


Figure : Presentación de fibra de vidrio

Producción y fabricación: <http://www.youtube.com/watch?v=SeqDm9l3yEM>

Fibras de Carbono

- Resistencia y rigidez alta. Alta estabilidad a fatiga.
- Alto precio (Economía de escala).
- Degradación ambiental y reacción entre ellas mismas (tratamiento)
- Fabricación dependiente del precursor (Alto consumo energético¹)
 - 1 Ryon: No se usa por falta de eficacia en la carbonización de la celulosa.
 - 2 PATH ² Mayormente usado. Alta resistencia y deja la superficie sin defectos.
 - 3 PITCH. Basado en residuos del petróleo (Asfalto)



Figure : Rollos comerciales de fibras de carbono y vidrio

¹Oxidación a 300°C aprox. y calentamiento a 1500°C aprox. en atmósfera de nitrógeno

²Pathway Technology

Tipos comerciales de fibras de carbono

Precursor	Nombre	Nota
PAN	Hysol Grafil Apollo IM	
	HM	High Modulus. Muy usadas
	HS	High Strength
	BASF Celion G-40-700	
	Gy80	
	Hercules AS-6	Usadas
	Torayea T-300	Muy usadas
	Thornel T-40	
Thornel T-50		
PITCH	Union Carbide P120	
	P100	
	P75-S	
	P55-S	
	P25-W	

Fabricación:

<http://www.youtube.com/watch?v=4t1pBvTDNxE>

Matriz

- Protege mecánica y ambientalmente a las fibras.
- Conduce las cargas entre fibras.
- Soporta parte de las tensiones.
- Tipos (esquema general):
 - 1 Metálicas.
 - 1.1 Aluminio (Excelente por ligereza y adhesión)
 - 1.2 Titanio (Caras).
 - 1.3 Magnesio (No demasiado usadas).
 - 2 Cementicias.
 - 3 Poliméricas
 - 1.1 Termo-estables.
 - { Alta T^a de fabricación (curado)
 - { Estable (a altas T^a)
 - { Irreversible y rotura frágil.
 - 1.2 Termo-plásticas.
 - { T^a de fusión (T_m) \rightarrow Moldeo reversible
 - { Comportamiento menos frágil.
 - { Reciclables.

Termoplásticas	Termoestables
Acrílicas	Polímeros de acrilamidas
Nylons	Fenólicas
PAI (Poliamidas-imida)	Melaminas
Policarbonatos	Poliéster
Poliéster	Poliimidas
Polisulfatos (PSU)	Silicona (SI)
Poliamidas termoplásticas (TPI)	Viniléster
Polipropilenos (PP)	Bismaleimida (BMI)
Polietileno de alta densidad (HDPE)	Polieuretanos (PUR)
Polifenoles sulfuros (PPS)	EPOXY
Polieteretercetona (PEEK)	

Temperatura de transición (mayor en termoestables).

Degradación ambiental (industria de aditivos).

Más información en D.-H. Kim. Composites Structures for Civil and Architectural Engineering.

Fabricación de composites

ESQUEMA GENERAL:

- Procesos de moldeo.
 - ① Por contacto (Contact Molding)
 - ② Por presión (Compression Molding)
 - ③ Por vacío (**Vacuum Molding**)
 - ④ Inyección de resina.
 - ⑤ Inyección de foam.
 - ⑥ Moldeo de piezas de revolución
- Conformados de hojas o láminas
- **Pultrusión (perfiles)**
- Estampado

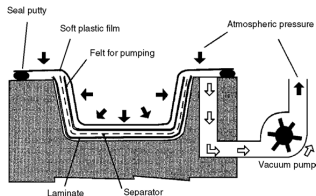
Proceso ³	Descripción	Notas
<p>Reinforcement: glass, Kevlar Matrix: polyester resin</p> <p>Roller</p> <p>Release agent + gel coat</p> <p>counter mold</p> <p>Reinforcement + Matrix</p> <p>Release agent + gel coat</p> <p>mold</p>	Contact Molding	pre-impregnación
	Compression Molding	{ 12 piezas/día Fibras pre-impregnadas Automoción } height

³ Información gráfica procedente de Composite Materials, Design and Applications. Daniel Gay, Suong V. Hoa, Stephen W. Tsai

Proceso⁴

Descripción

Notas



Vacuum Molding

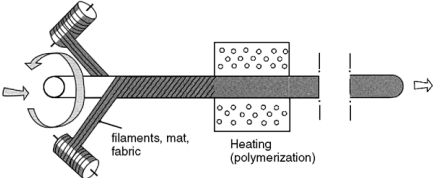
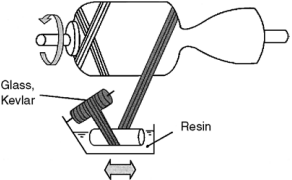
{ 2-4 piezas/día
Fibras pre-impregnadas
Automoción



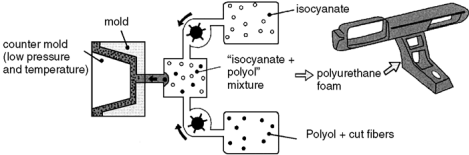
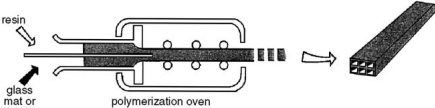
Resin Injection

{ 30 piezas/día
Baja presión → bajo coste inicial
Automoción

⁴ Información gráfica procedente de Composite Materials, Design and Applications. Daniel Gay, Suong V. Hoa, Stephen W. Tsai

Proceso ⁵	Descripción	Notas
 <p>The diagram shows a cross-section of a filament winding process. On the left, a central core is surrounded by fibers being wound around it. Labels include 'filaments, mat, fabric' pointing to the fiber layers. A central section is labeled 'Heating (polymerization)' and shows a cross-section of the fiber bundle with small circles representing resin droplets. An arrow points to the right, indicating the direction of the process.</p>	Filament Winding	$\left\{ \begin{array}{l} > 500 \text{ Kg/día} \\ \uparrow V_{\text{fibras}} \\ \text{Apl. alta presión} \end{array} \right.$
 <p>The diagram shows a cross-section of a filament winding process for a composite part. A central core is surrounded by fibers being wound around it. Labels include 'Glass, Kevlar' pointing to the fiber layers and 'Resin' pointing to the resin droplets. A double-headed arrow indicates the width of the fiber bundle.</p>	Filament Winding (B)	Idem (Espacio)

⁵ Información gráfica procedente de Composite Materials, Design and Applications. Daniel Gay, Suong V. Hoa, Stephen W. Tsai

Proceso ⁶	Descripción	Notas
 <p>The diagram illustrates the foam injection process. It shows a mold and a counter mold (low pressure and temperature) where a mixture of isocyanate and polyol is injected. The mixture is then combined with cut fibers to produce polyurethane foam.</p>	Foam Injection	<ul style="list-style-type: none"> Esp. Polieuretano Fibra Vidrio
 <p>The diagram illustrates the pultrusion process. It shows resin and glass mat or fabric being fed into a polymerization oven to produce a unidirectional fiber-reinforced plastic (FRP) profile.</p>	Pultrusion	<ul style="list-style-type: none"> Producción eficiente Fibra Vidrio Sección var. Perfilería Unidireccional

⁶ Información gráfica procedente de Composite Materials, Design and Applications. Daniel Gay, Suong V. Hoa, Stephen W. Tsai

Proceso ⁷	Descripción	Notas
	Autoclave	<ul style="list-style-type: none"> { Alta calidad { Consumo energético { Todas aplic. { Paso intermedio
	Estampado	<ul style="list-style-type: none"> { Producción eficiente { Res. Termoplástica { Tensiones residuales { Automoción

⁷ Información gráfica procedente de Composite Materials, Design and Applications. Daniel Gay, Suong V. Hoa, Stephen W. Tsai

Acrónimos

Acrónimos usados en la industria:

Nombre	Rango de aplicación	Nota
Infusion	Resin Injection	Ciclo: 5-180 min. Palas aerogenerador-naval.
RTM	Resin Transfer Molding: Compression Molding	Ciclo : 3-50 min. Componentes de camiones.
SMC	Sheet Molding Compound: Resin Injection	Ciclo : 1min. Matriz: resina líquida. Fibras: lonas o unidireccional.
Prepregging	Vaccum bag, Autoclave	Alta calidad del material: Aeronáutica y espacio.

Subproductos:

Nombre	Rango de aplicación	Nota
Prepreg	$V_f \uparrow$, porosidad \downarrow	<ul style="list-style-type: none"> { Estructuras de responsabilidad { Almacenaje y transporte a baja T^a { Alto coste
SMC ⁸	Fibras cortas con resina de poliéster	<ul style="list-style-type: none"> { Aditivos para almacenaje { Tipos en función del gramaje: Standard (1.9/cc), Baja dens. (1.3/cc), Lite (1.6/cc) { Estampado final

⁸Renault Laguna usa SMC Standard y el Ford Mustang SMC LITE

Mecánica de Laminados

Manuel Chíachio, Juan Chiachio

Dept. Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica



ugr

Universidad
de Granada

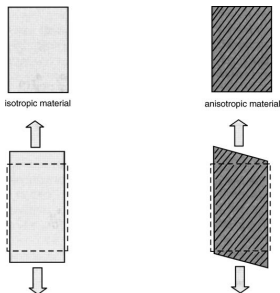
Index

- 1 Mecánica de láminas elementales (Ply)
 - Isotropía y Anisotropía
 - Notación
 - Constantes de Ingeniería

- 2 Tensión plana
 - Matriz de Rigidez de una lámina
 - Caracterización mecánica según datos de fabricación

Mecánica de láminas elementales (Ply)

Material Anisótropo-Concepto-Elipsoide de deformaciones.



- Mismo C . Poisson ν
- ϵ sigue σ_{princ}

- C . Poisson ν distinto por cada par de direcciones
- ϵ no sigue σ_{princ} → Términos acoplados

¿Qué beneficio tiene la anisotropía?

Relaciones constitutivas-Hipótesis

Hipótesis-Marco de trabajo

- Comportamiento elástico-lineal
 - 1 Desplazamientos y grad. de desplazamientos suf. pequeños.
 - 2 Descripción Euleriana y Lagrangiana coinciden
 - 3 Proceso adiabático e isotérmico
- Ley de Hooke $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}$

Tensor en hipótesis de elasticidad:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \implies C_{ijkl} = C_{jikl} \quad (1a)$$

$$\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk} \implies C_{ijkl} = C_{jilk} \quad (1b)$$

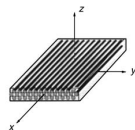


de 3^4 pasa a 3^2 componentes.

Notación

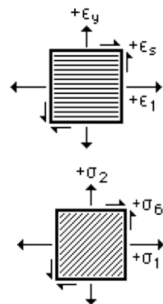
Se adopta una notación contraída.

Referencia	Normal			Tangencial			Normal			Tangencial		
fibras	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{zz}	σ_{yz}	σ_{zx}	σ_{xy}	ϵ_{xx}	ϵ_{yy}	ϵ_{zz}	ϵ_{yz}	ϵ_{zx}	ϵ_{xy}
ejes	σ_{11}	σ_{22}	σ_{33}	σ_{23}	σ_{31}	σ_{12}	ϵ_{11}	ϵ_{22}	ϵ_{33}	ϵ_{23}	ϵ_{31}	ϵ_{12}
fibras	σ_x	σ_y	σ_z	σ_q	σ_r	σ_s	ϵ_x	ϵ_y	ϵ_z	ϵ_q	ϵ_r	ϵ_s
ejes	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_4	ϵ_5	ϵ_6



Ley Generalizada de Hooke

	$\epsilon_{11}(\epsilon_1)$	$\epsilon_{22}(\epsilon_2)$	$\epsilon_{33}(\epsilon_3)$	$\epsilon_{23}(\epsilon_4)$	$\epsilon_{32}(\epsilon_4)$	$\epsilon_{31}(\epsilon_5)$	$\epsilon_{13}(\epsilon_5)$	$\epsilon_{12}(\epsilon_6)$	$\epsilon_{21}(\epsilon_6)$
$\sigma_{11}(\sigma_1)$	C_{1111}	C_{1122}	C_{1133}	C_{1123}	C_{1132}	C_{1131}	C_{1113}	C_{1112}	C_{1121}
$\sigma_{22}(\sigma_2)$	C_{2211}	C_{2222}	C_{2233}	C_{2223}	C_{2232}	C_{2231}	C_{2213}	C_{2212}	C_{2221}
\vdots									
$\sigma_{21}(\sigma_6)$	C_{2111}	C_{2122}	C_{2133}	C_{2123}	C_{2132}	C_{2131}	C_{2113}	C_{2112}	C_{2121}



Ley Generalizada de Hooke

	$\epsilon_{11}(\epsilon_1)$	$\epsilon_{22}(\epsilon_2)$	$\epsilon_{33}(\epsilon_3)$	$\epsilon_{23}(\epsilon_4)$	$\epsilon_{31}(\epsilon_5)$	$\epsilon_{12}(\epsilon_6)$
$\sigma_{11}(\sigma_1)$	C_{1111}	C_{1122}	C_{1133}	$C_{1123} + C_{1132}$	$C_{1131} + C_{1113}$	$C_{1112} + C_{1121}$
$\sigma_{22}(\sigma_2)$	C_{2211}	C_{2222}	C_{2233}	$C_{2223} + C_{2232}$	$C_{2231} + C_{2213}$	$C_{2212} + C_{2221}$
\vdots						
$\sigma_{21}(\sigma_6)$	C_{2111}	C_{2122}	C_{2133}	$C_{2123} + C_{2132}$	$C_{2131} + C_{2113}$	$C_{2112} + C_{2121}$

Tensiones tangenciales de ingeniería:

$$\epsilon_4 = 2\epsilon_{23} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \epsilon_4 = 2\epsilon_{31} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \epsilon_4 = 2\epsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Ley Generalizada de Hooke en notación contraída

	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_4	ϵ_5	ϵ_6
σ_1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}
σ_2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	C_{25}	C_{26}
\vdots						
σ_6	C_{61}	C_{62}	C_{63}	C_{64}	C_{65}	C_{66}

Sumario:

- Simetría de tensores tensión y deformación.
- Uso de tensión tangencial de ingeniería
- Simetría matriz de rigidez (en ejes).

	Térm. Independt. ¹	En ejes	Fuera de ejes	(No simetría)
Triclínico	21	36	36	36
Monoclínico	13	20	36	36
Ortotrópico	<u>9</u>	12	20	36
Trans. Isotróp.	5	12	20	36
Isótropo	<u>2</u>	12	12	12

Ver Introducción a la Elasticidad Lineal, Francisco Javier Suárez Medina. ISBN: 84-688-5469-7

¹Constantes de ingeniería

Costantes de ingeniería

Constantes de ingeniería \rightarrow Basadas en ensayos de resistencia del material en cada dirección a caracterizar \rightarrow relacionadas con constantes independientes del tensor \mathbf{C} .

Ensayo uniaxial: $E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_1} = C_{11}$; $E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2} = C_{22}$; $E_3 = \frac{\sigma_3}{\epsilon_1} = C_{33}$

Ensayo de cortante: $E_4 = \frac{\sigma_4}{\epsilon_4} = C_{44}$; $E_5 = \frac{\sigma_5}{\epsilon_5} = C_{55}$; $E_6 = \frac{\sigma_6}{\epsilon_6} = C_{66}$

	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
ϵ_1	$1/E_1$	$-\nu_{12}/E_2$	$-\nu_{13}/E_3$	0		ν_{16}/E_6
ϵ_2	$-\nu_{21}/E_1$	$1/E_2$	$-\nu_{23}/E_3$	0		ν_{26}/E_6
ϵ_3	$-\nu_{31}/E_1$	$-\nu_{32}/E_2$	$1/E_3$	0		ν_{36}/E_6
ϵ_4	0	0	0	$1/E_4$	ν_{45}/E_5	0
ϵ_5	0	0	0	ν_{54}/E_5	$1/E_5$	0
ϵ_6	ν_{61}/E_1	ν_{62}/E_2	ν_{63}/E_3	0	0	$1/E_6$

(Matriz de flexibilidad expresada en términos de constantes de ingeniería)

Tensión plana

La mayoría de los casos de estudio en composites pueden ser estudiados asumiendo la hipótesis de tensión plana:

$\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$. Según la Ley Generalizada de Hooke en notación contraída:

$$\sigma_1 = C_{11}\epsilon_1 + C_{12}\epsilon_2 + C_{13}\epsilon_3 + C_{16}\epsilon_6;$$

$$\sigma_2 = C_{21}\epsilon_1 + C_{22}\epsilon_2 + C_{23}\epsilon_3 + C_{26}\epsilon_6;$$

$$\sigma_3 = C_{31}\epsilon_1 + C_{32}\epsilon_2 + C_{33}\epsilon_3 + C_{36}\epsilon_6 = 0; \implies \epsilon_3 = \frac{C_{31}\epsilon_1 + C_{32}\epsilon_2 + C_{36}\epsilon_6}{C_{33}}$$

↓

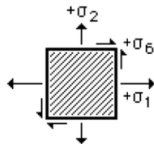
Relación Tensión-Deformación: $\sigma_i = Q_{ij}\epsilon_j \quad i, j : \{1, 2, 6\}$

(Tensión plana en el plano 1-2)

$$Q_{ij} = \frac{C_{ij} - C_{i3}C_{j3}}{C_{33}}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{26} \\ S_{61} & S_{62} & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (3)$$



Relación con constantes de ingeniería

A través de la inversión de la matriz de flexibilidad expresada en términos de constantes de ingeniería y asumiendo tensión plana:

$$Q_{xx} = \frac{E_x}{1-\nu_x\nu_y}; \quad Q_{yy} = \frac{E_y}{1-\nu_x\nu_y}; \quad Q_{xy} = \nu_x Q_{yy} = \nu_y Q_{xx}; \quad Q_{ss} = E_s$$

(Sólo válido cuando los ejes de simetría coinciden con los de ortotropía-en ejes)

Stiffness Properties of Composites

TABLE 3.2 ELASTIC PROPERTIES OF VARIOUS COMPOSITE MATERIALS IN SI

Type	CFRP	BFRP	CFRP	GFRP	KFRP	CFRTP	CFRP	CFRP	CCRP	CCRP
Fiber/cloth	T300	B(4)	AS	E-glass	Kev 49	AS 4	IM6	T300	T300	T300
Matrix	N5208	N5505	H3501	epoxy	epoxy	PEEK	epoxy	Fbrt 934	Fbrt 934	Fbrt 934
Ply eng'g constants and data				APC2			4-mil tp	13-mil c	7-mil c	
Ex, GPa	181.0	204.0	138.0	38.6	76.0	134.0	203.0	148.0	74.0	66.0
Ey, GPa	10.30	18.50	8.96	8.27	5.90	8.90	11.20	9.65	74.00	66.00
nu/x	0.28	0.23	0.30	0.26	0.34	0.28	0.32	0.30	0.05	0.04
Es, GPa	7.17	5.59	7.10	4.14	2.30	5.10	8.40	4.55	4.55	4.10
nu/y	0.70	0.50	0.66	0.45	0.60	0.66	0.66	0.60	0.60	0.60
Sp Gravity	1.60	2.00	1.60	1.80	1.46	1.60	1.60	1.50	1.50	1.50
ho, mm	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.100	0.325	0.175	
[Q]0, GPa										
Qxx	181.8	205.0	138.8	39.2	76.6	134.7	204.2	148.9	74.2	66.1
Qyy	10.35	18.59	9.01	8.39	5.55	8.95	11.26	9.71	74.19	66.13
Qxy	2.90	4.28	2.70	2.18	1.89	2.51	3.60	2.91	3.71	2.91
Qss	7.17	5.59	7.10	4.14	2.30	5.10	8.40	4.55	4.55	4.10
[S]0, 1/TPa										
Sxx	5.5	4.9	7.2	25.9	13.2	7.5	4.9	6.8	13.5	15.2
Syy	97.1	54.1	111.6	120.9	181.8	112.4	89.3	103.6	13.5	15.2
Sxy	-1.5	-1.1	-2.2	-6.7	-4.5	-2.1	-1.6	-2.0	-0.7	-0.7
Sss	139.5	178.9	140.8	241.5	434.8	196.1	119.0	219.8	219.8	243.

$$\begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & 0 \\ Q_{yx} & Q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{ss} \end{pmatrix} \quad (4)$$

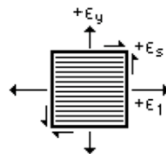
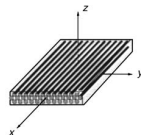


Figure : Tabla extraída del libro Strength and Life of Composites, Tsai Wu

Transformación de ejes: influencia del ángulo de fibras

(m = cosθ, n = sinθ)

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & (m^2 - n^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & (m^2 - n^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

Figure : Relación entre diferentes coordenadas. Válido para cualquier material
Gráfico extraído del libro Strength and Life of Composites, Tsai Wu

Definición del sentido positivo de rotación: crucial en materiales anisótropos; indiferente en materiales isótropos. En tensión plana, tiene influencia en el sentido de la tensión tangencial acoplada.

Ángulo positivo en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Transformación de ejes: influencia del ángulo de fibras.

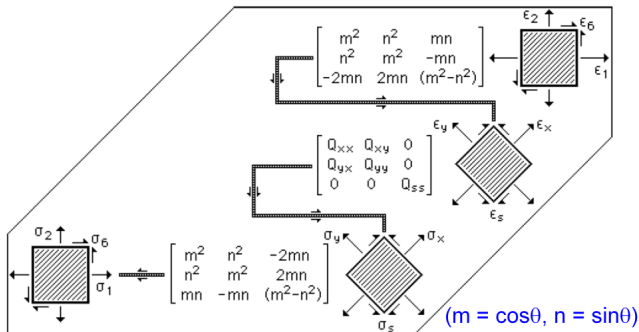


Figure : Transformación entre matrices de rigidez según el ángulo de fibras.
Gráfico extraído del libro Strength and Life of Composites, Tsai Wu

Ejemplos prácticos 1 y 2.



(a) Ej. 1: $\theta = 45^\circ$



(b) Ej. 1: $\theta = 0^\circ - 90^\circ$

Figure : Ejemplos extraídos del libro Strength and Life of Composites, Tsai Wu

Pregunta inicial

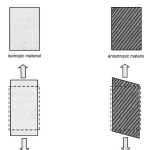
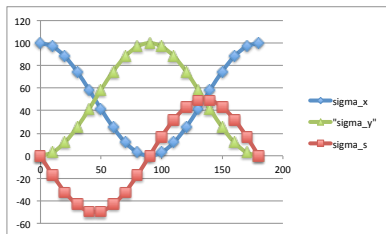


Figure : ¿Por qué anisotropía?

Ejemplo: carga uniaxial de $\sigma = 100 [Mpa]$



Prediseño de laminados

Invariantes y constantes cuasi-isotrópicas de una lámina

Manuel Chíachio, Juan Chiachio

Dept. Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica



ugr

Universidad
de Granada

Index

- 1 **Introducción**
 - Método directo de transformación “on-axis”-“off-axis”
- 2 **Invariantes**
 - Constantes cuasi-isotrópicas
 - Práctica
- 3 **Mecánica de Laminados**
 - Codificación de laminados
 - Diseño de laminados
 - Teoría de laminados
 - Práctica

Prediseño basado en invariantes

- A diferencia del acero o el aluminio, no se conoce a priori el laminado a utilizar en el diseño \implies prediseño basado en invariantes.
- Los invariantes constituyen propiedades mecánicas identificativas de cada ply, independientes de su orientación en el laminado.
- Seleccionado un ply y su orientación, los invariantes proporcionan información sobre la rigidez "potencial" que puede tener el laminado construido con ese ply.
- El prediseño basado en invariantes es conservador, por tanto una vez predimensionado el laminado (sección, material, etc) se dimensiona el laminado y se realiza cálculo MEF

Transformación $\epsilon_i \rightarrow \sigma_i$: Método "paso a paso"

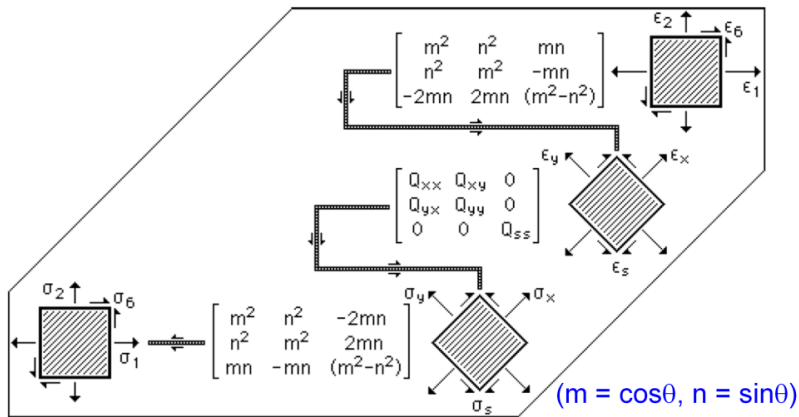


Figure : Figura extraída del libro Strength and Life of Composites, Tsai Wu

Transformación $\epsilon_i \rightarrow \sigma_i$: Método "directo"

$$\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \\ Q_{16} \\ Q_{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^4 & n^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ n^4 & m^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & m^4 + n^4 & -4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & -2m^2n^2 & (m^2 - n^2)^2 \\ m^3n & -mn^3 & mn^3 - m^3n & 2(mn^3 - m^3n) \\ mn^3 & -m^3n & m^3n - mn^3 & 2(m^3n - mn^3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_{xx} \\ Q_{yy} \\ Q_{xy} \\ Q_{ss} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$m = \cos(\theta)$$

$$n = \sin(\theta)$$

Transformación $\epsilon_i \rightarrow \sigma_i$: Método "directo"

$$\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \\ Q_{16} \\ Q_{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^4 & n^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ n^4 & m^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & m^4 + n^4 & -4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & -2m^2n^2 & (m^2 - n^2)^2 \\ m^3n & -mn^3 & mn^3 - m^3n & 2(mn^3 - m^3n) \\ mn^3 & -m^3n & m^3n - mn^3 & 2(m^3n - mn^3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_{xx} \\ Q_{yy} \\ Q_{xy} \\ Q_{ss} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$m = \cos(\theta)$$

$$n = \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_i = Q_{ij} \cdot \epsilon_j}$$

Invariantes de rigidez

Desarrollando los elementos de la matriz de cambio:

$$\begin{aligned}
 m^4 &= \frac{3 + 4\cos(2\theta) + \cos(4\theta)}{8}, & m^3 n &= \frac{2\sin(2\theta) + \sin(4\theta)}{8} \\
 m^2 n^2 &= \frac{1 - \cos(4\theta)}{8}, & mn^3 &= \frac{2\sin(2\theta) - \sin(4\theta)}{8} \\
 n^4 &= \frac{3 - 4\cos(2\theta) + \cos(4\theta)}{8}
 \end{aligned}$$

e introduciéndolos en la ecuación (1), se obtiene la formulación alternativa:

Invariantes de rigidez

$$\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \\ Q_{16} \\ Q_{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & 0 & 0 \\ U_1 & -U_2 & U_3 & 0 & 0 \\ U_4 & 0 & -U_3 & 0 & 0 \\ U_5 & 0 & -U_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}U_2 & U_3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}U_2 & -U_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\theta) \\ \cos(4\theta) \\ \sin(2\theta) \\ \sin(4\theta) \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{3}{8}Q_{xx} + \frac{3}{8}Q_{yy} + \frac{1}{4}Q_{xy} + \frac{1}{2}Q_{ss} \\ U_2 &= \frac{1}{2}Q_{xx} - \frac{1}{2}Q_{yy} \\ U_3 &= \frac{1}{8}Q_{xx} + \frac{1}{8}Q_{yy} - \frac{1}{4}Q_{xy} - \frac{1}{2}Q_{ss} \\ U_4 &= \frac{1}{8}Q_{xx} + \frac{1}{8}Q_{yy} + \frac{3}{4}Q_{xy} - \frac{1}{2}Q_{ss} \\ U_5 &= \frac{1}{8}Q_{xx} + \frac{1}{8}Q_{yy} - \frac{1}{4}Q_{xy} + \frac{1}{2}Q_{ss} \end{aligned} \quad (3)$$

Invariantes de rigidez

- De la ecuación (2) se observa que U_1 , U_4 y U_5 actúan independientemente de θ , \implies son **invariantes** del ply.
- De la ecuación (3) se desprende además que $U_1 = U_4 + 2U_5$
- La combinación de dos invariantes constituye otro invariante, por tanto se definen los invariantes:

$$\begin{aligned} I_1 &= 2(U_1 + U_4) = Q_{xx} + Q_{yy} + 2Q_{xy} \\ I_2 &= 2(U_1 + U_5) = Q_{xx} + Q_{yy} + 2Q_{ss} \end{aligned} \quad (4)$$

Constantes cuasi-isotrópicas

Útiles para el prediseño

Independientemente de la orientación de las cargas las constantes cuasi-isotrópicas aseguran una rigidez del laminado igual o mayor que un laminado cuasi-isotrópico $[0/\pm 45/90]_s \rightarrow$ “Aluminio negro”.

Útiles para comparación

Estas constantes son independientes de θ por tanto se utilizan a nivel de prediseño para comparar entre distintos tipos de ply (T3/5, B/5, IM6,...)

Constantes cuasi-isotrópicas

$$Q^{(iso)} = \begin{bmatrix} U_1 & U_4 & 0 \\ U_4 & U_1 & 0 \\ 0 & 0 & U_5 \end{bmatrix}, \quad S^{(iso)} = \begin{bmatrix} \frac{U_1}{D} & -\frac{U_4}{D} & 0 \\ -\frac{U_4}{D} & \frac{U_1}{D} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{U_5} \end{bmatrix} \quad (5)$$

donde $D = U_1^2 - U_4^2$

Por tanto:

$$\begin{aligned} E^{(iso)} &= \frac{D}{U_1} \\ G^{(iso)} &= U_5 \\ \nu^{(iso)} &= \frac{U_4}{U_1} \end{aligned} \quad (6)$$

Práctica 1: Prediseño de laminados

Dadas las siguientes características mecánicas del ply T300/N5208:

- $E_x = 181 \text{ GPa}$, $E_y = 10.3 \text{ GPa}$, $E_s = 7.17 \text{ GPa}$, $\nu_x = 0.28$
- Volumen fibra: 0.70
- $h_0 = 0.125 \text{ mm}$

Calcular:

- 1 Matrix de rigidez Q para $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$
- 2 Invariantes de tensión
- 3 Constantes cuasi-isotrópicas
- 4 Constantes de ingeniería para $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$

Práctica 1: Formulario de apoyo

$$\begin{aligned}
 Q_{xx} &= \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y} & Q_{yy} &= \frac{E_y}{1 - \nu_x \nu_y} & Q_{ss} &= E_s \\
 \nu_y &= \nu_x \frac{E_y}{E_x}, & Q_{xy} &= \nu_x Q_{yy} = \nu_y Q_{xx}
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 S_{xx} &= \frac{1}{E_x} & S_{yy} &= \frac{1}{E_y} \\
 S_{xy} &= \frac{-\nu_x}{E_x} = \frac{-\nu_y}{E_y} & S_{ss} &= \frac{1}{E_s}
 \end{aligned} \tag{8}$$

Práctica 1: Formulario de apoyo

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{Q_{22} Q_{66} - Q_{26}^2}{|Q|} & S_{22} &= \frac{Q_{11} Q_{66} - Q_{16}^2}{|Q|} \\ S_{12} &= \frac{-Q_{12} Q_{66} + Q_{16} Q_{26}}{|Q|} & S_{66} &= \frac{Q_{11} Q_{22} - Q_{12}^2}{|Q|} \\ S_{16} &= \frac{Q_{12} Q_{26} - Q_{22} Q_{16}}{|Q|} & S_{26} &= \frac{Q_{12} Q_{16} - Q_{11} Q_{26}}{|Q|} \end{aligned} \quad (9)$$

donde

$$|Q| = (Q_{11} Q_{22} - Q_{12}^2) Q_{66} + 2Q_{12} Q_{26} Q_{16} - Q_{11} Q_{26}^2 - Q_{22} Q_{16}^2$$

Práctica 1: Formulario de apoyo

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{S_{11}} & E_2 &= \frac{1}{S_{22}} & E_6 &= \frac{1}{S_{66}} \\ \nu_{21} &= -\frac{S_{21}}{S_{11}} & \nu_{12} &= -\frac{S_{12}}{S_{22}} & \nu_{61} &= \frac{S_{61}}{S_{11}} \\ \nu_{16} &= \frac{S_{16}}{S_{66}} & \nu_{62} &= \frac{S_{62}}{S_{22}} & \nu_{26} &= \frac{S_{26}}{S_{66}} \end{aligned} \quad (10)$$

Codificación de Laminados

Para laminados simétricos, el “stacking sequence” no es importante, a diferencia de los asimétricos. En la práctica general, el código se refiere de arriba a abajo.

- Laminado total: $[0/90_2/45/ - 45_2/45/90_2/0]_T$
- Laminado simétrico: $[0/90_2/45/ - 45]_S$
- Porcentaje 0, ± 45 , 90: $[20/40/40]$

Homogeneización de Laminados

Se demuestra en la experiencia y analíticamente que los grupos de plies cuando están distribuidos en el laminado, aumenta su resistencia y rigidez. Cuando un grupo de plies falla, el efecto es más localizado en el caso de laminado homogéneo que en el caso contrario.

Beneficios de la homogeneización:

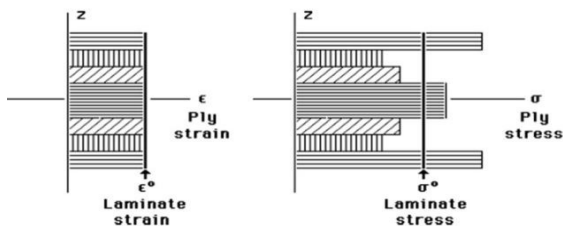
- Incremento de la resistencia y rigidez.
- No afecta a la rigidez a flexión, siempre que el empaquetado sea simétrico.
- Fabricación sencilla a través de sub-laminados.
- Tipos (esquema general):
- Recomendaciones prácticas:

{ Índice de repetición $\simeq 10$ ej: $[0/90]_{rS}$ $r = 10$
Conseguir rigidez a flexión y en plano similares.
No utilizar más de 4 familias de ángulos.

Deformación plana en laminados: Hipótesis

- 1 Laminado simétrico
- 2 Placa (laminado) delgada: $h \ll a, b$; donde h =espesor, a =longitud, b =anchura
- 3 La deformación ϵ_i del laminado es constante a través del espesor h , y por tanto igual para todas las láminas o piles.

Ecuación constitutiva



Mediante equilibrio de fuerzas¹:

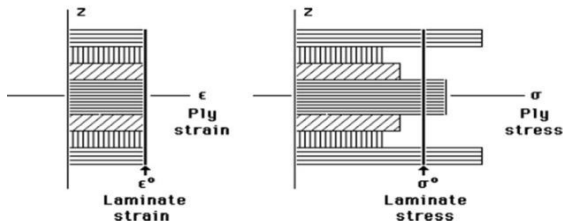
$$N_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_i(z) dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}(z) \cdot \epsilon_j^0 dz = \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}(z) dz}_{A_{ij}} \cdot \epsilon_j^0 \quad (11)$$

⇒

$$N_i = A_{ij} \cdot \epsilon_j^0 \quad (12)$$

¹Figura extraída del libro Strength and Life of Composites, Tsai Wu

Métodos de integración de la matriz de rigidez A_{ij}



$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}(z) dz = \sum_k Q_{ij}^{(k)} \Delta h^{(k)} \quad (13)$$

- Requiere conocer el espesor $\Delta h^{(k)}$ de cada grupo de plies o sublaminado
- unidades: $Q_{ij}^{(k)} [GPa]$; $\Delta h^{(k)} [m]$

Métodos de integración de la matriz de rigidez A_{ij}

- Método de la “caja registradora”:
Conocido el espesor h_0 del ply y asumiendo que todos los piles tienen el mismo espesor, se tiene que:

$$A_{ij} = \sum_k Q_{ij}^{(k)} \Delta h^{(k)} = \sum_k \underbrace{Q_{ij}^{(k)} h_0}_{A_{ij}^0} n^{(k)} \quad (14)$$

- “Regla de las mezclas”:
Útil cuando la matriz de rigidez A_{ij} se usa en formato normalizado $A_{ij}^* = \frac{1}{h} A_{ij} \implies$

$$A_{ij}^* = \sum_k Q_{ij}^{(k)} \Delta h^{(k)} \frac{1}{h} = \sum_k Q_{ij}^{(k)} \alpha^{(k)} \quad (15)$$

donde $\alpha^{(k)}$ es la proporción de plies en la dirección k .

Matrices de rigidez y flexibilidad normalizadas

Dividiendo A_{ij} por el espesor total del laminado se obtiene la matriz A_{ij}^* normalizada. A partir de ella, se puede pasar de deformaciones a tensiones medias (en el plano medio del laminado) y viceversa:

$$\begin{aligned}\sigma_i^0 &= \frac{1}{h} A_{ij} \epsilon_j^0 = A_{ij}^* \epsilon_j^0 \\ \epsilon_i^0 &= a_{ij}^* \sigma_j^0\end{aligned}\tag{16}$$

donde a_{ij}^* es la matriz de flexibilidad normalizada: $[a^*] = [A^*]^{-1}$. Ahora $[A^*]$ y $[a^*]$ tienen las mismas unidades que $[Q]$ y $[S]$ respectivamente (pueden compararse)

Matrices de rigidez y flexibilidad normalizadas

Dividiendo A_{ij} por el espesor total del laminado se obtiene la matriz A_{ij}^* normalizada. A partir de ella, se puede pasar de deformaciones a tensiones medias (en el plano medio del laminado) y viceversa:

$$\begin{aligned}\sigma_i^0 &= \frac{1}{h} A_{ij} \epsilon_j^0 = A_{ij}^* \epsilon_j^0 \\ \epsilon_i^0 &= a_{ij}^* \sigma_j^0\end{aligned}\tag{16}$$

donde a_{ij}^* es la matriz de flexibilidad normalizada: $[a^*] = [A^*]^{-1}$. Ahora $[A^*]$ y $[a^*]$ tienen las mismas unidades que $[Q]$ y $[S]$ respectivamente (pueden compararse)

La rigidez, flexibilidad y tensiones normalizadas son útiles para comparar

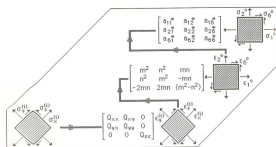
Constantes de ingeniería del laminado

A partir de la matriz $[a^*]$ se pueden inferir las propiedades mecánicas “medias” del laminado, entendidas como aquellas que aplicadas en el plano medio del laminado, producen un campo de deformaciones ϵ_j^0 :

$$\begin{aligned}
 E_1^0 &= \frac{1}{a_{11}^*} & E_2^0 &= \frac{1}{a_{22}^*} & E_6^0 &= \frac{1}{a_{66}^*} \\
 \nu_{21}^0 &= -\frac{a_{21}}{a_{11}} & \nu_{12}^0 &= -\frac{a_{12}}{a_{22}} & \nu_{61}^0 &= \frac{a_{61}}{a_{11}} \\
 \nu_{16}^0 &= \frac{a_{16}}{a_{66}} & \nu_{62}^0 &= \frac{a_{62}}{a_{22}} & \nu_{26}^0 &= \frac{a_{26}}{a_{66}}
 \end{aligned} \tag{17}$$

NOTA: Observa que $\nu_{ij}^0 = \frac{a_{ij}}{a_{jj}} = \frac{a_{ij}^*}{a_{jj}^*}$

Cálculo del laminado



Calcular las tensiones medias $\sigma_{\{1,2,3\}}^0$ a partir de las fuerzas $N_{\{1,2,3\}}$ y repetir ply por ply (sublaminado):

- 1 Transformar deformaciones medias $\epsilon_{\{1,2,3\}}^0$ en los ejes del laminado en deformaciones en los ejes de cada ply o sublaminado $\epsilon_{\{x,y,z\}}^0$.
- 2 Pasar de deformaciones "on-axis" $\epsilon_{\{x,y,s\}}$ en tensiones "on-axis" $\sigma_{\{x,y,s\}}$
- 3 Transformar las tensiones "on-axis" $\sigma_{\{x,y,s\}}$ en tensiones "off-axis", en los ejes del laminado $\sigma_{\{1,2,3\}}$

Práctica

Calcular las matrices de rigidez $[A]$ y $[A^*]$ para un laminado T300/N5208 $[0/90/45_2]_s$.

Datos: $h_0 = 0.125\text{mm}$

$[A^0]$	0°	90°	$\pm 45^\circ$
11	22.73	1.29	7.08
22	1.29	22.73	7.08
12	0.36	0.36	5.29
66	0.90	0.90	5.82
16	0	0.00	± 5.36

Práctica: solución

Por el método de la caja registradora:

$$n = (1 + 1 + 2) \times 2 = 8; \quad h = n \times h_0 = 0.001m.$$

$$A_{11} = 2 \times (22.73 + 1.29 + 2 \times 7.08) = 76.36MN/m$$

$$A_{22} = 2 \times (1.29 + 22.73 + 2 \times 7.08) = 76.36MN/m$$

$$A_{12} = 2 \times (0.36 + 0.36 + 2 \times 5.29) = 22.6MN/m$$

$$A_{16} = 2 \times (0 + 0 + 5.36 - .36) = 0MN/m$$

$$A_{66} = 2 \times (0.90 + 0.90 + 2 \times 5.82) = 26.88MN/m$$

$$A_{11}^* = \frac{1}{h} \times A_{11} = 1000 \times A_{11} = 76.36GPa$$

$$A_{22}^* = 1000 \times A_{22} = 76.36GPa$$

$$A_{12}^* = 1000 \times A_{12} = 22.6GP$$

$$A_{16}^* = 1000 \times A_{16} = 0GPa$$

$$A_{66}^* = 1000 \times A_{66} = 26.88GPa$$

Modos de fallo y detección de daño en CFRP

Manuel Chíachio, Juan Chiachio

Dept. Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica



ugr

Universidad
de Granada

Index

- 1 Introducción
 - Motivación y contexto
 - Criterios de fallo
 - Otros criterios conocidos

- 2 Transformación entre ejes
 - Ratio de Resistencia-Factor de seguridad
 - Práctica

Teorías de mecanismos de fallos

Fallo a mesoescala \rightarrow fallo del ply \rightarrow basado en **(5)** resistencias del ply:
Tabla

- Resistencia en dirección a las fibras **X**: Rotura repentina de fibras (explosión).
- Resistencia en dirección a las fibras **X'**: $\left\{ \begin{array}{l} \text{rotura por cortante (45}^\circ\text{)} \\ \text{Micropandeo} \end{array} \right.$
- Resistencia en dirección transv. a las fibras **Y**: Rotura tipo fractura de matrix
- Resistencia en dirección transv. a las fibras **Y'**: Rotura por cortante
- Resistencia por tensiones tangenciales **S**. (Diferencia con Von Mises)



Figure : Roturas a distintos ángulos.

Uno de los criterios más conocidos (usados) para materiales anisótropos es una extensión del criterio de Von Mises a un criterio cuadrático:

$$F_{ij}\sigma_i\sigma_j + F_i\sigma_i = 1 \quad , \quad i, j = \{1, 2, 6\} \quad (1)$$

En ejes principales, la ecuación se puede expandir como sigue¹:

$$F_{xx}\sigma_x^2 + 2F_{xy}\sigma_x\sigma_y + F_{yy}\sigma_y^2 + F_{ss}\sigma_s^2 + F_x\sigma_x + F_y\sigma_y = 1; \quad (2)$$

con $F_{xx} = \frac{1}{XX'}$, $F_{yy} = \frac{1}{YY'}$, $F_x = \frac{1}{X} - \frac{1}{X'}$, $F_y = \frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'}$

Criterio	Res. Uniaxiales	F_{xy}	$F_{xy}^*(T300 - 5208)$
Tsai-Hill	$X = X'$, $Y = Y'$	$-\frac{1}{2X^2}$	$-0.014 \leq \frac{Y}{2X} \leq -0.008$
Tsai-Wu	$X \neq X'$, $Y \neq Y'$	$\frac{F_{xy}^*}{\sqrt{XXYY}}$	$-1 \leq F_{xy}^* \leq 0$
Hoffman	$X \neq X'$, $Y \neq Y'$	$-\frac{1}{2XX'}$	$-0.041 \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{YY'}{XX'}} \leq -0.022$

¹ Ortotropía $\rightarrow F_{xs} = F_{ys} = F_s = 0$

Maximum Stress Criterion

Non Interactive (all boxy shapes)

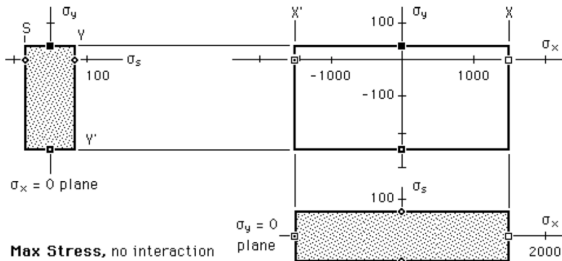


Figure : Criterio de máxima tensión. Gráfico extraído del libro Strength and Life of Composites, Stephen W. Tsai.

- No interactivo
- Adecuado para materiales frágiles.
- Definitivamente no para composites (aunque se utiliza en la práctica).

Hashin Failure Criterion

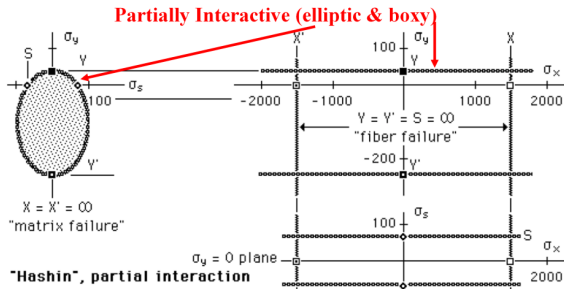


Figure : Criterio de máxima tensión. Gráfico extraído del libro Strength and Life of Composites, Stephen W. Tsai.

- Parcialmente interactivo
- No interacción entre σ_x y $\sigma_y \implies$ rotura dominada por la fibra.
- Lo incorpora Abaqus[®].

Tensor Polynomial Tsai-Wu Criterion

Fully Interactive, single-valued (operationally simple)

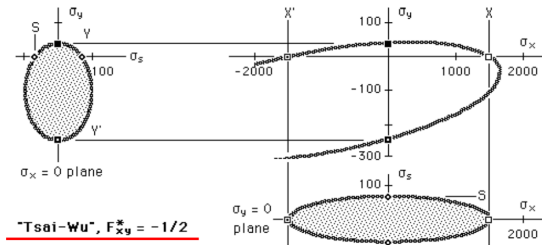


Figure : Criterio de máxima tensión. Gráfico extraído del libro Strength and Life of Composites, Stephen W. Tsai.

- Interactivo (cuadrático)
- Asume $F_{xy}^* = -1/2$. Casi todos los materiales compuestos $0 \leq F_{xy}^* \leq -1/2$
- El más conocido. Prácticamente todos los programas de MEF lo incorporan. (Abaqus[®], Ansys[®], etc.)

Tensor Polynomial Hoffman Criterion

Interactive (all ellipses) and single values

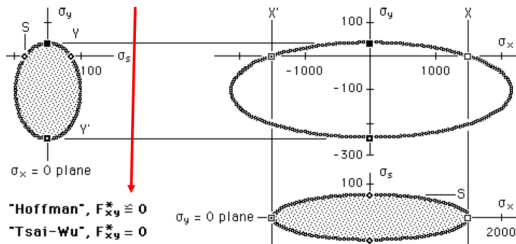


Figure : Criterio de máxima tensión. Gráfico extraído del libro Strength and Life of Composites, Stephen W. Tsai.

- Interactivo (cuadrático)
- Asume $F_{xy}^* \simeq 0$.
- Se podría considerar un caso particular del de Tsai-Wu.

Transformación de la curva de fallo (cuadráticas)

Basado en el mismo concepto estudiado en las clases anteriores
(Transformación en bloque):

$$\begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{22} \\ F_{12} \\ F_{66} \\ F_{16} \\ F_{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^4 & n^4 & 2m^2n^2 & m^2n^2 \\ n^4 & m^4 & 2m^2n^2 & m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & m^4 + n^4 & -m^2n^2 \\ 4m^2n^2 & 4m^2n^2 & -8m^2n^2 & (m^2 - n^2)^2 \\ 2m^3n & -2mn^3 & 2mn^3 - m^3n & mn^3 - m^3n \\ 2mn^3 & -2m^3n & 2(m^3n - mn^3) & (m^3n - mn^3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{xx} \\ F_{yy} \\ F_{xy} \\ F_{ss} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\boxed{F_{ij}\sigma_i\sigma_j + F_i\sigma_i = 1 \quad , \quad i, j = \{1, 2, 6\}} \quad (4)$$

Curva de fallo en términos de deformaciones

$$F_{ij}\sigma_i\sigma_j = F_{ij}[Q_{ik}\epsilon_k][Q_{jl}\epsilon_l] = \underbrace{F_{ij}Q_{ik}Q_{jl}}_{G_{kl}}\epsilon_k\epsilon_l = G_{kl}\epsilon_k\epsilon_l$$

$$F_i\sigma_i\sigma_i = F_i[Q_{ij}\epsilon_j] = \underbrace{[F_iQ_{ij}]}_{G_j}\epsilon_j = G_j\epsilon_j$$

↓

$$\boxed{G_{ij}\epsilon_i\epsilon_j + G_i\epsilon_i = 1} \quad (5)$$

Transformación entre coordenadas:

$$\begin{bmatrix} G_{11} \\ G_{22} \\ G_{12} \\ G_{66} \\ G_{16} \\ G_{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^4 & n^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ n^4 & m^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & m^4 + n^4 & -4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & -2m^2n^2 & (m^2 - n^2)^2 \\ m^3n & -mn^3 & mn^3 - m^3n & 2(mn^3 - m^3n) \\ mn^3 & -m^3n & m^3n - mn^3 & 2(m^3n - mn^3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_{xx} \\ G_{yy} \\ G_{xy} \\ G_{ss} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Ratio de Resistencia

Es el ratio entre la resistencia última y la tensión aplicada. Equivalentemente puede definirse en deformaciones, y permanece igual.

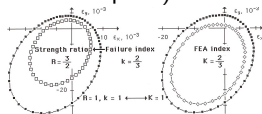
$$\sigma^{max} = R\sigma^{aplic}$$

$$\epsilon^{max} = R\epsilon^{aplic}$$

Dem: $F_{ij}\sigma_i^{max}\sigma_j^{max} + F_i\sigma_i^{max} = 1 \rightarrow$ Substituyendo:
 $[F_{ij}\sigma_i\sigma_j]R^2 + [F_i\sigma_i]R - 1 = 0$; (Raíz positiva)

- $R=1 \rightarrow$ Fallo
- $R > 1 \rightarrow$ Las tensiones pueden ser incrementadas en un factor R antes del fallo.
- $R < 1 \rightarrow$ Las tensiones han excedido la resistencia en un factor $1/R$.

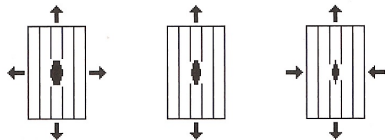
Relación entre R y K^2 (usado en Abaqus®)



² Figura extraída del libro Strength and Life of Composites, Tsai Wu

Práctica

Comprobar que el sentido de las tensiones tiene mucha influencia en la rotura de un material compuesto (anisótropo)³:



Ply de fibra de carbono/epoxy T300/5208, con propiedades mecánicas según fabricante:

$$X = 1500 \text{ [Mpa]}$$

$$X' = 1500 \text{ [Mpa]}$$

$$Y = 40 \text{ [Mpa]}$$

$$Y' = 246 \text{ [Mpa]}$$

$$S = 68 \text{ [Mpa]}$$

Curva de fallo: Tsai-Wu; $F_{xy}^* = -0.5$.

³ Figura extraída del libro Strength and Life of Composites, Tsai Wu

Fallo Probabilístico

El fallo probabilístico puede ser definido a través de la siguiente integral de probabilidad:

$$P_f = \int_{\mathbf{X}|g(\mathbf{X}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})d(\mathbf{X}) \quad (7)$$

$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$: Función densidad de las variables aleatorias \mathbf{X} .

$g(\mathbf{X}) \leq 0$: subespacio donde ocurre el fallo.

Métodos de resolución de Eqn. 7:

⇒ Ver M. Chiachío et al,
Composites Part B:
Engineering, 43, (3), 2012,
902–913.