Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2012, Vol. 29(2), nº 81, 53-62, ISSN: 1131-9321*

Modelización matemática del trenzado artesanal

Veronica Albanese
Universidad de Granada
María Luisa Oliveras
Universidad de Granada
Francisco Javier Perales
Universidad de Granada

Resumen: *En este trabajo presentamos una modelización matemática de la realización del trenzado de origen artesanal con la intención de proporcionar a los profesores de matemáticas y a los maestros ideas y sugerencias para elaborar propuestas para el aula. Las ideas que desarrollamos se han generado durante una investigación etnográfica y etnomatemática de dos escenarios artesanales. Aquí resumimos los hallazgos más importantes del análisis etnomatemático que han consistido en la elaboración de un modelo matemático de la realización del trenzado que se basa en la utilización de los grafos y del lenguaje de la combinatoria.*

Palabras clave: *Etnomatemática, Modelización Matemática, trenzado.*

Mathematical Modelling of craft braid/braiding

Abstract: *We present a mathematical modeling of the realization of craft braiding with the intention of providing to mathematics teachers some ideas to develop proposals for the classroom. The ideas developed were generated during an ethnographical and ethnomathematical study of two craft scenarios. Here we summarize the main findings of the ethnomathematical analysis which consisted in a mathematical model of the realization of the braiding, based on the use of graphs and combinatorial language.*

Key words: *Ethnomathematics, Mathematical Modeling, Braiding.*

INTRODUCCIÓN

La Etnomatemática constituye una línea de investigación que abarca la antropología y la educación matemática en búsqueda de una manera diferente y más incluyente de hacer y considerar las matemáticas concebidas como un producto cultural (Bishop, 1999). En la Educación matemática esto se refleja en el objetivo de un aprendizaje significativo relacionado con el entorno social y cultural. El rol del docente se vuelve el del *enculturador matemático*, que valoriza el saber cotidiano y profesional y, en general, el saber inicial de los alumnos y su funcionalidad, los recursos contextualizados y el empleo del lenguaje natural además del simbólico (Bishop, 1999; Oliveras, 2005, 2006; Oliveras y Gavarrete, 2012).

El punto de partida del trabajo ha sido encontrar artesanías que tengan suficiente potencial matemático para lograr algunas aplicaciones educativas a niveles básico y técnico-profesional, conectando así la educación con el desarrollo de competencias laborales y de la vida diaria. Un trabajo pionero en este ámbito es el de Oliveras (1996).

Presentamos aquí una modelización matemática que ha surgido de una investigación etnográfica de algunas artesanías de trenzado (Oliveras y Albanese, 2012). Entendemos por *trenzado* la manera de realizar cordeles o trenzas entrelazando unos hilos, sin hacer nudos. Estos cordeles o trenzas tienen la peculiaridad de que, en cualquier punto, si se deja sin atar la madeja se va soltando, los hilos que la forman se separan, desarmando la estructura del cordel o trenza.

Uno de los Objetivos generales de la investigación es:

O.1 Describir artesanías de trenzado y estudiarlas identificando los constructos matemáticos implícitos en ellas.

En este documento desarrollamos uno de los objetivos específicos que se enuncia así:

O.2 Realizar una modelización matemática del trenzado artesanal.

ETNOMATEMÁTICA, MODELIZACIÓN MATEMÁTICA Y EDUCACIÓN

Partiremos de sendas definiciones respecto de Modelo y Modelización:

"*Un modelo matemático de un fenómeno es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna forma, el fenómeno en cuestión*." (Bassanezi y Biembengut, 1997: 65).

"*La Modelización Matemática consiste en el arte de traducir un fenómeno determinado o problemas de la realidad en un lenguaje matemático: el modelo matemático*." (Hein y Biembengut, 2006).

Es decir, la modelización matemática es el proceso de elaboración del modelo matemático.

Las Etnomatemáticas consideran la modelización matemática como una herramienta clave del proceso de construcción del conocimiento (D'Ambrosio, 2008). En su interés por la contextualización del conocimiento y por la transmisión de un saber funcional a la solución de problemas reales a través de un aprendizaje significativo, destacan la importancia de la modelización porque comporta una mejor comprensión de las prácticas matemáticas, sea según el sistema matemático convencional, sea el sistema de pensamiento matemático de un determinado grupo cultural (Rosa y Orey, 2003).

Los investigadores en Etnomatemáticas suelen validar un modelo que un determinado grupo cultural construye para la resolución de un problema que aparece, procurando entender el modelo desarrollado por el grupo; ellos van al campo para conocer y entender la manera de resolver un problema por un grupo cultural (Scandiuzzi, 2002).

La educación en perspectiva etnomatemática sitúa su foco de interés en el pensamiento matemático del grupo cultural considerado, que construye el modelo y la validación se realiza según los criterios del sistema matemático informal. En esta visión, la manipulación de modelos sirve como estrategia de investigación del pensamiento matemático de los grupos culturales, a fin de desarrollar una educación matemática basada en otros codificadores. En este sentido:

- *"Conocer, entender y explicar un modelo o cómo determinadas personas o grupos sociales lo utilizan, puede ser significativo, principalmente, porque nos ofrece una oportunidad de penetrar el pensamiento de una cultura u obtener una mejor comprensión de sus valores"* (Bienbengut, citado en Rosa y Orey, 2003, p. 3, traducción propia).

Así que en las aulas de matemáticas se valoriza y comprende la influencia de una determinada cultura sobre las maneras de pensar, comunicar y trasmitir matemáticas.

En una entrevista, D'Ambrosio expone que las Etnomatemáticas son una manera de hacer Educación Matemática, una educación que no consiste en pasar al alumno el conocimiento congelado en los libros, sino que es "*una práctica, una cosa viva, hacer matemáticas dentro de las necesidades ambientales, sociales y culturales* " (Blanco, 2008, p. 22). Y en otra entrevista (D'Ambrosio y Rosa, 2009) expresa su convicción, a propósito del potencial educativo del estudio de prácticas de grupos culturales diferentes, de que contribuye al desarrollo de valores como el respeto hacia otras culturas, y en el caso específico de nuestro trabajo, el respeto de las labores manuales como la artesanía (Oliveras y Albanese, 2012).

EL MODELO MATEMÁTICO

Definimos los conceptos básicos del lenguaje matemático formal que utilizamos en nuestro estudio: el grafo, la permutación, el ciclo.

a) Un *grafo* $|V|$ es un par ordenado $G = (V, E)$, donde V es un conjunto de vértices o nodos, y E es un conjunto de arcos o aristas, que relacionan estos nodos. Se considera V finito y se llama orden de G al número de vértices de V, indicado $|V|$.

b) Un *circuito simple* en un grafo es una sucesión de nudos conectados por aristas, donde no se encuentra dos veces el mismo nudo, a excepción del primero y último que coinciden.

c) Dado un conjunto finito de elementos, llamado V, una *permutación* es una correspondencia (o aplicación) biyectiva de V en sí mismo, $p: V \rightarrow V$, a veces indicada como reordenamiento. El conjunto de las permutaciones en V con la operación de composición forma un grupo, indicado S_V.

4) Se llama *ciclo*, y se indica $\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, la permutación que manda cíclicamente cada elemento en su sucesivo, o sea x_i en x_i+_1 hasta x_n en x_1, mientras deja fijos los que no aparecen. Si el ciclo contiene solo dos elementos se llama transposición. Dos ciclos se dicen disjuntos si no comparten ningún elemento de V. Cada elemento del grupo de permutaciones se puede escribir como composición de ciclos disjuntos (la composición, si los ciclos son disjuntos, es simplemente una yuxtaposición). Así que para expresar las permutaciones vamos a utilizar la notación de composición de ciclos disjuntos.

Para realizar el análisis imaginamos mirar la trenza o el cordel en construcción desde el punto de vista de la cola, o sea de donde los hilos están a punto de ser trenzados. En la modelización con grafos, los vértices o nudos representan las posiciones de los hilos a punto de ser trenzados, estas posiciones las indicaremos con letras minúsculas, mientras en el estudio posterior de los recorridos de los hilos, a estos mismo (los hilos) los representamos con números. Los arcos o aristas representan los movimientos de los hilos, respecto a la posición en la cual se encuentran en el momento de realizar el movimiento, que el artesano tiene que hacer cumplir a los hilos para crear la trama.

El trenzado toma forma repitiendo el mismo *paso*. El paso está constituido por unas unidades más simples que lo componen, los *movimientos mínimos*.

Los grafos permiten detectar de qué manera se realiza la acción de trenzar en función de una posición inicial de los hilos y de sucesivos intercambios de estas posiciones. Cabe destacar que lo que se intercambian son los hilos que se encuentran en determinadas posiciones. Por razones de claridad y fluidez del discurso, de aquí en adelante con "posiciones" nos referimos a los hilos que se encuentran en las posiciones determinadas en el paso en cuestión.

a) *Movimiento mínimo*: es el movimiento que involucra dos o más hilos que intercambian sus posiciones; el conjunto de hilos es el mínimo tal que cada hilo del conjunto, en su movimiento, vaya ocupando una posición dejada vacía por el movimiento de otro hilo del conjunto y, a su vez, deje una posición vacía que sea ocupada por otro hilo del conjunto. En el grafo se describe a través de un circuito simple. En combinatoria a cada circuito se asocia un ciclo. El sentido horario o anti horario del circuito se refleja en el ciclo por el orden de los elementos. Si el ciclo es una transposición, asumimos la siguiente convención: suponiendo que $x_1 < x_2$ (en el ordenamiento alfabético), un circuito entre x_1, x_2 horario será (x_1, x_2); un circuito x_1, x_2 anti horario será (x_2, x_1).

b) *Paso*: un paso del proceso de trenzar es el máximo conjunto de movimientos mínimos tal que cada vértice no pertenece a más de un movimiento. Un paso se representa en un único grafo en el que aparecen eventualmente más circuitos no conectados. En combinatoria se representa con un elemento del grupo S_V que resulta, eventualmente, de la composición de más de un ciclo. Se considera el orden en el que aparecen escritos los ciclos como el orden de ejecución de los movimientos.

Señalamos que todos los grafos relativos al mismo trenzado tienen la misma estructura (o esqueleto), en términos técnicos, el grafo *vacío* asociado, cuyo conjunto de aristas es nulo, es el mismo. Utilizamos la convención de disponer los nudos sobre los lados de un cuadrado. Ya que trataremos casos de 4 y 8 hilos, encontraremos respectivamente uno o dos nudos por lado.

Cabe destacar que algunos trenzados se realizan con una secuencia de varios pasos distintos. En este documento vamos a presentar solo trenzados elaborados con una secuencia simple donde la repetición de un único paso permite la construcción de la trenza o cordel.

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DE CORDELES: ALGUNOS EJEMPLOS CON CUATRO Y OCHO HILOS

Presentamos en este apartado cómo realizar la modelización matemático-formal de algunos trenzados de cordeles, haciendo una reelaboración de los esquemas utilizados por Richard Owen (Owen, 1995), bajo la guía y las explicaciones proporcionadas por el Profesor Castagnolo durante una inmersión en el campo realizada en la región de Salta, Argentina. El nombre que hemos elegido para cada trenzado se refiere a la forma del grafo asociado. Ponemos de manifiesto que en este trabajo presentamos el análisis matemático y consideramos solo la manera en que se trenza, omitiendo cualquier referencia a los hallazgos de carácter etnográfico.

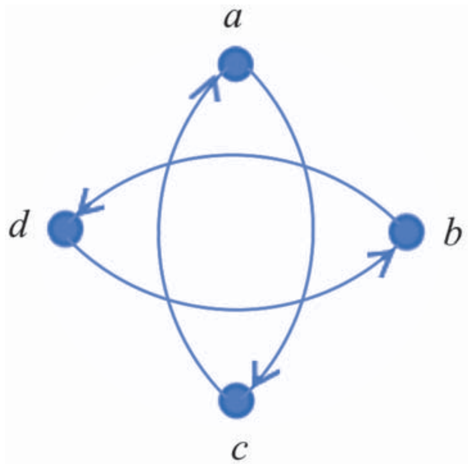
La cruz simple de 4 hilos

Vamos a presentar la modelización del proceso de realización del trenzado que llamamos *la cruz simple* de cuatro hilos. El *grafo estructura* está constituido por cuatro nudos, correspondientes a los cuatro hilos, posicionados cada uno sobre *un lado* del cuadrado, que nombramos en sentido horario *a, b, c, d*, y colocamos con los lados en posiciones vertical y horizontal, partiendo del nudo situado arriba. El paso está compuesto por dos movimientos mínimos, el primer movimiento mínimo a realizar es el intercambio, en sentido horario, de los hilos que ocupan las posiciones *a, c*. El segundo movimiento mínimo es el intercambio en sentido anti horario de los hilos que ocupan las posiciones *b, d*. En el grafo estos se visualizan como dos circuitos de dos que se disponen como una cruz (de aquí el nombre). El grafo que representa el paso es el grafo *G1*.

En combinatoria este paso se representa con una permutación p_1 en $S_{\{a,b,c,d\}}$ compuesta por dos transposiciones $\sigma_{1,1} = (a, c)$ y $\sigma_{1,2} = (d, b)$. Observamos que $\sigma_{1,2}$ siendo en sentido anti horario, tiene las letras en orden alfabético decreciente.

Así que, de $p_1 = \sigma_{1,1}\,\sigma_{1,2}$, se obtiene

$$p_1 = (a, c)\ (d, b).$$



Grafo *G1*: Grafo del trenzado "*cruz simple*".

Ahora vamos a numerar los hilos de la configuración inicial de manera tal que el hilo posicionado en el nudo *a* sea el hilo 1, el del nudo *b* sea el hilo 2, etc. De aquí en adelante siempre utilizamos esta convención para numerar los hilos de la configuración inicial. Para seguir el recorrido de aquellos en la trama aplicamos a la configuración inicial la permutación que describe el paso. Así que la permutación en función de las letras, o sea de las posiciones, se reescribe en función de los números, o sea de los hilos (en la tabla *T1* es la última columna de la derecha) y se aplica a la configuración inicial obteniendo una nueva configuración que se describe en la línea sucesiva de la tabla referida.

a	***b***	***c***	***d***	p_i	**Paso específico**
1	2	3	4	$p_1 = (a, c)\ (d, b)$	(1,3) (4,2)
3	4	1	2	$p_1 = (a, c)\ (d, b)$	(3,1) (2,4)
1	2	3	4	-	-

Tabla *T1*: Recorrido de los hilos del trenzado "*cruz simple*".

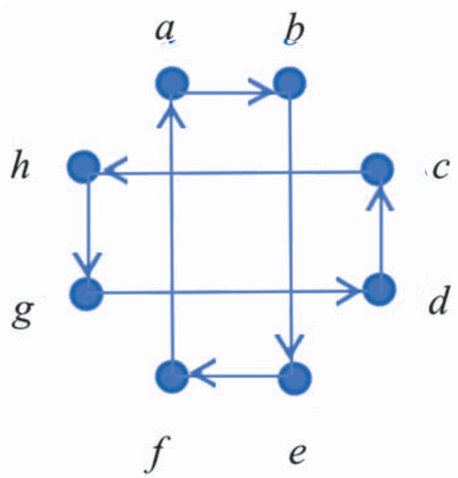
Observamos que el número de veces que tenemos que repetir el paso para volver a la configuración inicial coincide con el orden de la permutación que describe el paso.

 Épsilon, 2012, Vol. 29(2), nº 81, 53-62, ISSN: 1131-9321

La cruz de cuadrados de 8 hilos

Tratamos ahora la modelización del trenzado denominado *la cruz de cuadrados*. El grafo estructura consta de ocho nudos dispuestos dos por cada lado del cuadrado, que nombramos en sentido horario, partiendo del primero arriba a la izquierda *a, b, c, d, e, f, g, h*.

El único paso se representa con un grafo que está formado por dos circuitos de cuatro nudos; el primer circuito en sentido horario involucra los nudos *a, b, e, f*; el segundo en sentido anti horario involucra los nudos *c, d, g, h*.



Grafo *G2*: Grafo del trenzado "*cruz de cuadrados*".

En combinatoria, el paso está descrito por la permutación de $S_{\{a,b,c,d,c,d,e,f\}}$ que se constituye por yuxtaposición de los dos ciclos $\sigma_{1,1}=(a, b, e, f)$ y $\sigma_{1,2}=(h, g, d, c)$, es decir

$$p_1 = (a, b, e, f)\ (h, g, d, c),$$

Numerando los hilos en la configuración inicial como hemos convenido, realizamos la tabla *T2*, que describe el recorrido de los hilos en la trama.

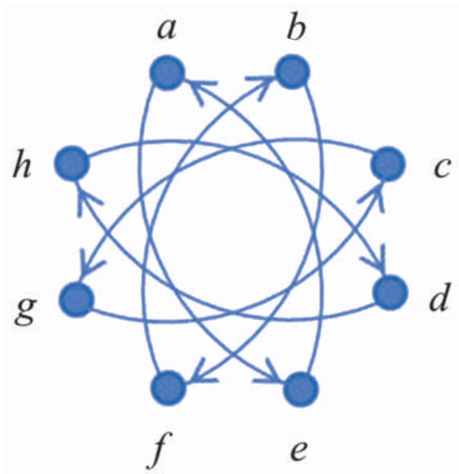
a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	p_i	Paso específico
1	2	3	4	5	6	7	8	$p_1 = (a, b, e, f)\ (h, g, d, c)$	(1,2,5,6) (8,7,4,3)
6	1	4	7	2	5	8	3	$p_1 = (a, b, e, f)\ (h, g, d, c)$	(6,1,2,5) (3,8,7,4)
5	6	7	8	1	2	3	4	$p_1 = (a, b, e, f)\ (h, g, d, c)$	(5,6,1,2) (4,3,8,7)
2	5	8	3	6	1	4	7	$p_1 = (a, b, e, f)\ (h, g, d, c)$	(2,5,6,1) (7,4,3,8)
1	2	3	4	5	6	7	8	-	-

Tabla *T2*: Recorrido de los hilos del trenzado "*cruz de cuadrados*".

Observamos que con cuatro aplicaciones del paso se alcanza de vuelta la configuración inicial y apreciamos de nuevo que el número cuatro representa también el orden de la permutación, compuesta de dos ciclos de cuatro, que describe el paso.

La estrella de 8 hilos

El trenzado de la estrella se basa en el mismo *grafo estructura* del trenzado precedente, ya que también se realiza con 8 hilos. El paso se visualiza con un grafo constituido por cuatro circuitos de dos. En el orden tenemos un circuito horario entre los nudos *b, f*; un circuito horario entre los nudos *d, h*; un circuito anti horario entre los nudos *a, e*; un circuito anti horario entre los nudos *c, g*.



Grafo *G3*: Grafo del trenzado "*estrella*".

En combinatoria encontramos una única permutación en $S_{\{a,b,c,d,c,d,e,f\}}$ correspondiente al único paso que queda de la yuxtaposición de las cuatro transposiciones:

$$p_1 = (b, f)\ (d, h)\ (e, a)\ (g, c).$$

Construimos entonces la tabla *T3* que describe el recorrido de los hilos:

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	p_i	**Paso específico**
1	2	3	4	5	6	7	8	$p_1 = (b, f)\ (d, h)\ (e, a)\ (g, c)$	(2,6) (4,8) (5,1) (7,3)
5	6	7	8	1	2	3	4	$p_1 = (b, f)\ (d, h)\ (e, a)\ (g, c)$	(6,2) (8,4) (1,5) (3,7)
1	2	3	4	5	6	7	8	-	-

Tabla *T3:* Recorrido de los hilos en el trenzado "*estrella*".

Observamos que aquí también, para volver a la configuración inicial, tenemos que realizar un número de pasos análogo al orden de la permutación que representa el paso.

CONSIDERACIONES FINALES

El propósito del trabajo aquí presentado es proporcionar a los Profesores de Matemática y a los Maestros unas herramientas de reflexión sobre las relaciones de las matemáticas con la cultura. Ponemos de manifiesto una vez más que nuestra intención ha sido estimular la creatividad del docente en la organización de su propia tarea profesional. Hemos pretendido exponer los hallazgos conseguidos en la modelización matemática del trenzado, en lugar de desarrollar una propuesta curricular concreta y detallada, convencidos que la originalidad y la propia experiencia personal pueden aportar nuevas perspectivas al momento de llevar estas ideas al aula.

Esta investigación está soportada por una Beca FPU (código de referencia AP2010-0235) del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de España, concedida a la investigadora V. Albanese (Orden EDU/3445/2011, del 30 de noviembre, publicado en el B.O.E. n. 305 del 20-12-2012).”

BIBLIOGRAFÍA

Albanese, V. (2011). *Etnomatemáticas en Artesanías de Trenzado*. Tesis de Master no publicada. Granada, Universidad de Granada.

Bassanezi, R. y Biembengut, M. (1997). Modelación matemática: una antigua forma de investigación, un nuevo método de enseñanza. *Revista de Didáctica de las Matemáticas,* (32), 13-25.

Bishop, A. (1991). *Enculturación Matemática.* Barcelona: Paidós.

Blanco, H. (2008). Entrevista al profesor Ubiratan D’Ambrosio. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 1*(1), 21-25.

Castagnolo, A. (2012). La Etnomatemática Subyacente en los Textiles. *Journal of Mathematics and Culture, 6*(1), 119-134.

D’Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática - Eslabón entre las tradiciones y la modernidad*. México: Limusa.

Hein, N. y Biembengut, M. (2006). Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas. En: M. Murillo (presidente), *Memorias del V festival internacional de matemática*, 1-25.

Oliveras, M. L. y Albanese, V. (2012). Etnomatemáticas en Artesanías de Trenzado: Un Modelo Metodológico para Investigación. *Bolema*, 26(44), en prensa.

Oliveras, M. L. y Gavarrete, M. E. (2012). Modelo de Aplicación de Etnomatemáticas en la Formación de Profesores para Contextos Indígenas en Costa Rica. *RELIME*, en prensa.

Oliveras, M. L. (2005). Microproyectos para la educación intercultural en Europa. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas 38*, 70-81.

Oliveras, M. L. (2006) Etnomatemáticas. De la multiculturalidad al mestizaje. En: Giménez, J., Goñi J. M., y Guerrero S. (Ed.) *Matemáticas e interculturalidad* (117-149). Barcelona, España: Graó.

Oliveras, M. L. (1996). Etnomatemáticas. Formación de profesores e innovación curricular. Granada: Comares.

Owen, R. (1995). *Braids: 250 patterns from Japan, Peru y beyond*. Loveland, Colo: Interweave Press.

Orey, D. y Rosa, M. (2004). Ethnomathematics and the theaching and learning mathematics from a multicultural perspective. En: Favilli, F. (Ed.) *Prooceding of the 10th Internacional Congress of Mathematics Education* (pp. 139-148). Copenhagen: Tipografia Editrice Pisana.

Rosa, M. y Orey, D.C. (2003). Vinho e queijo: etnomatemática e modelagem. *Bolema*, *SP*(20), 1-6.

Scandiuzzi, P.P. (2002). Água e Óleo: modelagem e etnomatemática. *Bolema,* (17), 52-58.