



**Elodie
Múrias Lopes**

**Modelo de Kuramoto com campos aleatórios em
redes complexas**



**Elodie
Múrias Lopes**

**Modelo de Kuramoto com campos aleatórios em
redes complexas**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Física, realizada sob a orientação científica do Dr. Alexander Goltsev, Professor do Departamento Física da Universidade de Aveiro e coorientação científica do Dr. Marinho Lopes, pós-doutorando na University of Exeter.

o júri

presidente

Professor Doutor Ricardo Guimarães Dias

Professor Auxiliar do Departamento de Física da Universidade de Aveiro

orientador

Professor Doutor Alexander Goltsev

Professor Auxiliar Convidado do Departamento de Física da Universidade de Aveiro

arguente

Doutor Nuno Araújo

Investigador Principal do Departamento de Física da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

agradecimentos

Ao professor Dr. Alexander Goltsev pela excelente supervisão, pelo apoio e pelo conhecimento partilhado.

Ao Dr. Marinho Lopes pela incansável dedicação, paciência e pelo esclarecimento de dúvidas.

À Sooyeon Yoon pelo apoio e pelos dados fornecidos da simulação.

À minha família, ao Mauro e à Catarina.

Em especial, à minha avó.

palavras-chave

Modelo de Kuramoto, sincronização, transições de fase, redes complexas, campos aleatórios

resumo

Neste trabalho é estudado o modelo de Kuramoto num grafo completo, em redes *scale-free* com uma distribuição de ligações $P(q) \sim q^{-\gamma}$ e na presença de campos aleatórios com magnitude constante e gaussiana. Para tal, foi considerado o método Ott-Antonsen e uma aproximação “*annealed network*”. Num grafo completo, na presença de campos aleatórios gaussianos, e em redes *scale-free* com $2 < \gamma < 5$ na presença de ambos os campos aleatórios referidos, foram encontradas transições de fase contínuas. Considerando a presença de campos aleatórios com magnitude constante num grafo completo e em redes *scale-free* com $\gamma > 5$, encontraram-se transições de fase contínua ($h < \sqrt{2}$) e descontínua ($h > \sqrt{2}$). Para uma rede SF com $\gamma = 3$, foi observada uma transição de fase de ordem infinita. Os resultados do modelo de Kuramoto num grafo completo e na presença de campos aleatórios com magnitude constante foram comparados aos de simulações, tendo-se verificado uma boa concordância. Verifica-se que, independentemente da topologia de rede, a constante de acoplamento crítico aumenta com a magnitude do campo considerado. Na topologia de rede *scale-free*, concluiu-se que o valor do acoplamento crítico diminui à medida que o valor de γ diminui e que o grau de sincronização aumenta com o aumento do número médio das ligações na rede. A presença de campos aleatórios com magnitude gaussiana num grafo completo e numa rede *scale-free* com $\gamma > 2$ não destrói a transição de fase contínua e não altera o comportamento crítico do modelo de Kuramoto.

keywords

Kuramoto model, synchronization, phase transitions, complex networks, random fields

abstract

In the present work, a random field Kuramoto model is studied in complete graphs and scale-free networks with the degree distribution $P(q) \sim q^{-\gamma}$, taking into account constant random fields with constant magnitude as well as gaussian distributed. For this purpose, the Ott-Antonsen method and the annealed-network approximation are used. A continuous phase transition is found in the case of complete graph and gaussian random fields, and in the case of scale-free networks with $2 < \gamma < 5$ in the presence of random fields with both constant and gaussian magnitude. In the case of random fields with a constant magnitude and the architectures: complete graph and scale-free network with $\gamma > 5$, both first ($h > \sqrt{2}$) and second ($h < \sqrt{2}$) order phase transition are found. In a scale-free network with $\gamma = 3$, it is revealed an infinite order phase transition. The numerical results for random field Kuramoto model with constant magnitude in complete graph are compared to simulations and a good agreement is found between the theoretical approach and simulations. It is shown that the critical coupling increases when increasing the field magnitude, independently of network topology. For scale-free networks, the critical coupling decreases when decreasing γ and the synchronization degree increases when increasing the mean degree of the network. In the case of complete graph and a scale-free network with $\gamma > 2$, gaussian random fields do not destroy the continuous phase transition and do not change critical behavior of the Kuramoto model.

Conteúdo

Conteúdo	i
1 Introdução	1
2 O Modelo de Kuramoto	4
3 Comportamento crítico do Modelo de Kuramoto	11
3.1 Grafos completos	14
3.1.1 Campos aleatórios com magnitude constante	15
3.1.2 Campos aleatórios gaussianos	19
3.1.3 Comparação entre a teoria e a simulação	21
3.2 Redes <i>scale-free</i>	22
3.2.1 Campos aleatórios com magnitude constante	23
3.2.2 Campos aleatórios gaussianos	30
4 Conclusões	34
Bibliografia	39

Capítulo 1

Introdução

A sincronização é um fenômeno que ocorre em sistemas onde a interação dos elementos conduz à sua coordenação. Este fenômeno está presente em diversos exemplos na natureza, como na luz intermitente produzida pelos pirilampos, no gorgear em uníssono dos grilos, nas células *pacemaker* do coração (células responsáveis pelo ritmo cardíaco), entre outros [1]. O ciclo circadiano, um ciclo biológico de aproximadamente 24 horas, inerente à maioria dos seres vivos e influenciado por fatores externos como a luz, temperatura, marés e ventos, constitui outro exemplo de sincronização. Este ciclo tem origem na atividade sináptica do núcleo supraquiasmático (SCN) do hipotálamo anterior, que constitui um conjunto de múltiplos osciladores circadianos autônomos designados por células-relógio. Em [2] foi monitorizada a frequência (*firing rate*) destas células-relógio, provenientes de um rato, e concluiu-se que o ciclo circadiano associado a este ser vivo era determinado pela média dos períodos das células-relógio. Apesar de individualmente exibirem fases e períodos distintos na mesma cultura, a sua interação conduz ao fenômeno de sincronização e origina um único período: o ciclo circadiano.

Em 1665, Christiaan Huygens, físico-matemático e inventor do relógio de pêndulo, descreveu pela primeira vez o fenômeno de sincronização quando observou que pêndulos suspensos lado-a-lado passariam a movimentar-se à mesma frequência e desfasados de 180° . Huygens concluiu que este tipo de coincidência entre os dois pêndulos resultava de movimentos impercetíveis de um referencial comum aos dois elementos [3]. O fenômeno de sincronização esteve associado a dois elementos em interação até 1966, ano em que Wiener impulsionou a ideia de uma sincronização a uma escala maior quando constatou que na natureza, sistemas constituídos por vários elementos que revelavam uma componente periódica, sincronizavam-se. Apesar de introduzir esta ideia pioneira, Wiener não fez progressos matemáticos significativos neste campo [4]. Os progressos foram realizados por Winfree, em 1967, ao considerar uma família de osciladores quase-idênticos, fracamente acoplados e caracterizados por uma fase e uma frequência natural intrínseca. No âmbito de uma aproximação de campo médio, em que cada oscilador “sente” o ritmo coletivo gerado pelos restantes, Winfree previu a existência de transições de fase na dinâmica da família de osciladores: observou que nenhum estado de sincronização ocorria no sistema para uma interação fraca entre osciladores; aumentando a interação, a partir de um certo valor crítico, um estado parcial de sincronização emergia [5]. Em 1975, Kuramoto desenvolveu um modelo que se tornou no modelo de excelência para o

estudo da sincronização ao descrever as ideias de Winfree na forma matemática [6]:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ji} (\theta_j - \theta_i), \quad (1.1)$$

sendo N o número total de osciladores, θ_i a fase do oscilador $i = 1, \dots, N$, ω_i a sua frequência natural e Γ_{ji} a função de interação entre o oscilador j e o oscilador i . Kuramoto resolveu este conjunto de equações para um acoplamento total entre osciladores (cada oscilador i está acoplado aos restantes), mediado por uma função de interação sinusoidal,

$$\Gamma_{ji}(\theta_j - \theta_i) = \frac{K}{N} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (1.2)$$

onde K representa a constante de acoplamento. Quando se tem $\theta_j = \theta_i$, os osciladores apresentam a mesma fase, i.e., estão sincronizados, e por isso o termo da interação é nulo; para $\theta_j = \theta_i + \frac{\pi}{2}$, o termo de interação é K , que terá de ser forte o suficiente para ultrapassar a dispersão das frequências naturais e induzir assim a sincronização, i.e., terá de ser superior ao acoplamento crítico, K_c . Por outras palavras, quando $K < K_c$, todos os osciladores encontram-se dessincronizados, enquanto que para $K > K_c$, emerge uma fração de osciladores sincronizados no sistema. Esta fração aumenta à medida que a interação entre osciladores se torna mais forte. Este é o comportamento da transição de fase de segunda ordem prevista por Winfree.

Embora Kuramoto tenha desenvolvido um modelo onde todos os osciladores interagem entre si, em geral, os osciladores podem não interagir com todos os outros osciladores do sistema. Isto é, os osciladores podem formar entre si uma rede com uma determinada estrutura, diferente de um grafo completo como no caso estudado por Kuramoto. Uma rede ou um grafo consiste num conjunto de nodos ligados entre si por conexões (*links*). Redes complexas, por definição, são redes com arquiteturas mais complexas do que as redes clássicas aleatórias, cuja distribuição de conexões obedece à distribuição de Poisson [7]. Muitos dos sistemas reais, como é o caso das redes neuronais, possuem a estrutura de uma rede complexa [8] e são caracterizados pela presença de *hubs* (nodos com elevado número de conexões), *loops* (um “percurso” na rede que liga o nodo a si próprio) e apresentam natureza *small-world* (pequeno mundo, onde a maioria dos nodos são alcançados pelos restantes num número reduzido de passos [9]), pelo que se concluiu que redes aleatórias simples de natureza homogénea não constituem uma boa representação da arquitetura encontrada nos sistemas reais. Em 1999, Barabási e Albert [10] propuseram um método que visa a construção de redes com estas características, baseado num mecanismo de *preferential attachment* (ligação preferencial), onde um novo nodo é adicionado à rede e ligado a outros nodos já existentes de acordo com o seu número de ligações, de tal modo que nodos com um maior número de ligações atraem mais fortemente as ligações dos novos nodos [10, 11]. Estas redes foram denominadas de *scale-free networks* (rede SF, redes sem escala) por serem caracterizadas por uma distribuição de ligações segundo uma lei de potência $P(q) \sim q^{-\gamma}$ [10]. A multiplicação de $P(q)$ por uma constante não altera a escala desta função, o que significa que $P(q)$ é desprovida de escala, e daí a denominação.

Em [12–14] foi estudado o modelo de Kuramoto numa rede SF e concluiu-se que a transição de fase do estado dessincronizado para o estado sincronizado é de segunda ordem. Apesar do comportamento crítico presente numa rede SF com $\gamma > 5$ ser similar ao comportamento crítico encontrado no modelo de Kuramoto original num grafo completo, o mesmo não foi observado

numa rede SF com $\gamma < 5$ (as diferenças serão apresentadas no capítulo 3). Também foram encontradas diferenças nos comportamentos críticos para os intervalos $3 < \gamma < 5$ e $2 < \gamma < 3$. Mas será a heterogeneidade do número de ligações existente numa rede SF suficiente para modelar sistemas complexos reais? Apesar desta arquitetura de rede apresentar número de ligações muito desiguais entre nodos, estes permanecem semelhantes entre si.

Neste trabalho, de forma a conferir outro tipo de heterogeneidade ao sistema, considerou-se a existência de campos aleatórios (com magnitude constante e gaussiana) no modelo de Kuramoto. Similarmente ao trabalho desenvolvido em [15], concluiu-se que estes campos aleatórios locais, cujas direções atuam nos osciladores do modelo de Kuramoto, originam uma “imobilização” aleatória (*random pinning*) no sistema. O facto do *pinning* ser aleatório faz com que os osciladores “sintam” o campo de formas diferentes, o que resulta numa distinção entre nodos e, conseqüentemente, num aumento de heterogeneidade no modelo de Kuramoto. Note-se que a influência desses campos aleatórios já foi estudada no modelo de Ising (ver, por exemplo, [16]), um modelo matemático, proposto por Ernest Ising [17], que descreve o emergir espontâneo de ordem num sistema de *spins* a interagirem entre si. Para uma interação total entre *spins*, i.e., em que cada *spin* interage com todos os outros (grafo completo) e na presença de campos aleatórios com magnitude gaussiana, verifica-se uma transição de fase de segunda ordem do estado paramagnético para o estado ferromagnético ordenado, cujo expoente crítico é $\beta = 1/2$. Na presença de campos aleatórios com magnitude constante, por sua vez, verificam-se as transições de fase de primeira e de segunda ordem, separadas por um ponto tricrítico da temperatura [18, 19]. No modelo de Ising numa rede SF, a presença de campos aleatórios gaussianos também originam uma transição de fase de primeira ordem para $\gamma > 2$ [7].

Assim, neste trabalho vamos começar por abordar o modelo de Kuramoto na sua forma original, no âmbito de uma rede complexa e na presença de campos aleatórios; seguidamente é referido o método de Ott-Antonsen, que nos permite obter uma solução analítica do modelo de Kuramoto, e são apresentados os resultados do modelo para uma ligação entre fases dos osciladores segundo um grafo completo e uma rede SF, na presença dos campos aleatórios referidos. Os resultados do modelo de Kuramoto com os campos aleatórios de magnitude constante e num grafo completo são aqui comparados aos de simulações. Por fim, os resultados obtidos são discutidos e comparados no capítulo da conclusão.

Capítulo 2

O Modelo de Kuramoto

No seu modelo original [6], Kuramoto descreveu a evolução das fases de um sistema de N osciladores, onde cada oscilador está ligado aos restantes, através do conjunto de equações diferenciais

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (2.1)$$

em que K é a constante de acoplamento, θ_i é a fase associada ao oscilador $i = 1, \dots, N$ e ω_i a sua frequência natural. As frequências naturais obedecem a uma distribuição $g(\omega)$, geralmente simétrica e centrada na frequência natural média Ω .

O parâmetro de ordem é uma grandeza macroscópica que se define em sistemas que sofrem transições de fase de uma fase desordenada para uma fase ordenada, de tal modo que o parâmetro de ordem é nulo na fase desordenada e não nulo na fase ordenada [20]. Neste sistema de N osciladores, o parâmetro de ordem é definido por [21]

$$z \equiv r e^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}, \quad (2.2)$$

onde $r(t)$ mede a coerência das fases e $\psi(t)$ representa a média das mesmas. A representação esquemática do parâmetro de ordem, presente na Fig. 2.1, ajuda-nos a compreender melhor a dinâmica das fases: cada ponto correspondente à fase de um oscilador, θ_j , é disposto ao longo de um círculo trigonométrico unitário; o ângulo ψ é a média das fases e r mede o grau de sincronização. Quando a interação entre osciladores é fraca ou inexistente, o sistema apresenta-se dessincronizado e as fases estão distribuídas uniformemente ao longo do círculo trigonométrico unitário. Nesta situação tem-se $r \sim 0$ [21]. À medida que se fortalece a interação, os osciladores sincronizam-se entre si e o valor de r aumenta até ter-se $r \sim 1$, que corresponde a um estado de sincronização total [21].

De forma a visualizar o carácter de campo médio do modelo de Kuramoto, é conveniente reescrever a Eq. (2.1) em termos do parâmetro de ordem [21]. Para tal, multiplicam-se ambos os lados da Eq. (2.2) por $e^{-i\theta_i}$ e isolam-se as partes imaginárias,

$$r \sin(\psi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i). \quad (2.3)$$

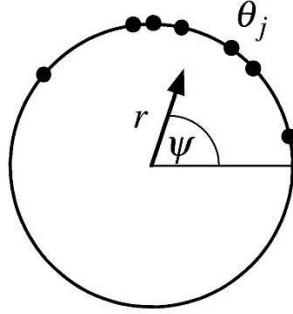


Figura 2.1: Representação esquemática do parâmetro de ordem da Eq. (2.2): os pontos pretos correspondentes às fases dos osciladores, θ_j , estão dispostas ao longo do círculo trigonométrico unitário; ψ representa a média das fases e r mede a coerência das mesmas: quanto maior o grau de sincronização do sistema, maior o valor de r . Figura adaptada de [21].

Substituindo na Eq. (2.1), obtém-se

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + Kr \sin(\psi - \theta_i), \quad (2.4)$$

concluindo-se assim que cada oscilador interage com os restantes através das quantidades de campo médio: r e ψ [21].

Verifica-se que a família de osciladores se divide em dois grupos: osciladores com frequências naturais perto do centro da distribuição $g(\omega)$ são os primeiros a sincronizarem-se, apresentando uma frequência e fase média: Ω e ψ , respetivamente; osciladores com frequências afastadas do centro de distribuição continuam dispersos ao longo do círculo trigonométrico unitário. A este estado dá-se o nome de sincronização parcial. À medida que K aumenta, mais osciladores são adicionados a este “cluster” sincronizado até ser atingido um estado de sincronização total ($r = 1$) [21]. O valor do acoplamento que define a transição do estado des-sincronizado para o estado de sincronização parcial corresponde à constante de acoplamento crítico, K_c .

A constante de acoplamento crítico pode ser deduzida a partir da Eq. (2.4). Uma vez interessados em soluções estacionárias, tem-se que $\psi(t)$ roda uniformemente com velocidade angular Ω e $r(t) = r$. Por outro lado, alterando o referencial para o referencial de rotação, $\omega \rightarrow \Omega + \omega$, tem-se $\psi(t) = \psi$, que sem perda de generalidade vamos assumir $\psi = 0$. Daqui resulta um parâmetro de ordem real, $z = r$, e a Eq. (2.4) é reescrita

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i - Kr \sin \theta_i. \quad (2.5)$$

Nesta forma podemos constatar os dois grupos de osciladores anteriormente referidos: osciladores com frequências naturais $|\omega_i| \leq Kr$ apresentam fases bloqueadas em ψ e à frequência Ω (no referencial original); osciladores com frequências naturais $|\omega_i| > Kr$, continuam dispersos ao longo do círculo trigonométrico unitário e possuem um movimento caracterizado por recorrentes acelerações e desacelerações [21]. Por existir uma fração de osciladores dispersos num estado de sincronização parcial e de modo a manter o parâmetro de ordem constante nesse estado, Kuramoto assumiu uma distribuição estacionária para o conjunto de osciladores

dispersos e introduziu a função

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{C}{|\omega - Kr \sin \theta|}, \quad (2.6)$$

para representar o conjunto de osciladores sincronizados com fase θ e frequência natural ω , em que C é a constante de normalização [6]. O parâmetro de ordem, por sua vez, tem em conta a contribuição dos dois grupos de osciladores referidos e o seu valor constante tem que ser consistente com a Eq. (2.2). Deste modo, a partir de uma condição de auto-consistência, define-se

$$\langle e^{i\theta} \rangle = \langle e^{i\theta} \rangle_{\text{bloqueado}} + \langle e^{i\theta} \rangle_{\text{disperso}}, \quad (2.7)$$

onde $\langle \rangle$ é um valor expectável. Sendo $\langle e^{i\theta} \rangle = r e^{i\psi}$ e, uma vez que $\psi = 0$, tem-se

$$r = \langle e^{i\theta} \rangle_{\text{bloqueado}} + \langle e^{i\theta} \rangle_{\text{disperso}}. \quad (2.8)$$

Para a fração de osciladores sincronizados, o valor expectável do parâmetro de ordem é dado por

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{\text{bloqueado}} = \int_{-Kr}^{Kr} \cos \theta(\omega) g(\omega) d\omega, \quad (2.9)$$

uma vez que para uma distribuição $g(\omega)$ simétrica, tem-se $\langle \sin \theta \rangle_{\text{bloqueado}} = 0$. Para a fração de osciladores dessincronizados, por sua vez, o valor expectável do parâmetro de ordem é

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{\text{disperso}} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{|\omega| > Kr} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta, \quad (2.10)$$

que é nulo devido às simetrias $g(\omega) = g(-\omega)$ e $\rho(\theta + \pi, -\omega) = \rho(\theta, \omega)$. Deste modo, conclui-se que o parâmetro de ordem está confinado à fração de osciladores sincronizados, onde as frequências naturais são

$$\omega_i = Kr \sin \theta_i. \quad (2.11)$$

Substituindo a Eq. (2.11) na Eq. (2.9), obtém-se a expressão para o parâmetro de ordem [21]

$$r = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta, \quad (2.12)$$

que apresenta duas soluções: a solução trivial, $r = 0$, correspondente ao estado dessincronizado e a solução positiva, $r > 0$, que corresponde ao estado sincronizado. A estabilidade de cada uma destas soluções depende do valor de K , sendo que quando uma é estável, a outra é instável. A solução não nula satisfaz a equação

$$K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta = 1, \quad (2.13)$$

a partir da qual se deduz a expressão para a constante de acoplamento crítico, [21]

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)}. \quad (2.14)$$

Segundo uma distribuição Lorentziana,

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi(\omega^2 + 1)}, \quad (2.15)$$

a solução positiva do parâmetro de ordem apresenta-se

$$r = \sqrt{\frac{K - K_c}{K}}, \quad (2.16)$$

que é válida para $K \geq K_c$, com $K_c = 2$. Este foi o resultado que Kuramoto demonstrou em [6]. Assim, conclui-se que para $K = K_c$, ocorre no sistema uma transição de fase contínua (de segunda ordem) do estado dessincronizado para o estado sincronizado, i.e., r cresce a partir de 0 até 1 segundo uma lei de potência cujo o expoente crítico é $\beta = 1/2$ (ver, por exemplo, [12]). Este resultado será demonstrado no capítulo 3.

Em geral, os osciladores podem não interagir todos entre si. Neste caso, o oscilador i é definido como sendo um nodo na rede, o qual está ligado a q_i outros nodos, sendo estes q_i nodos os únicos que interagem com o oscilador i . A conexão entre osciladores, por sua vez, é representada pela matriz de adjacência, a_{ij} , que toma valor 1 se existir uma conexão do oscilador i para o oscilador j ou 0 caso contrário. Note-se que este é o caso geral, pois a_{ij} pode ser diferente de a_{ji} no caso de um grafo direcionado. Assim, para uma rede complexa, a evolução das fases dos osciladores é descrita por [7]

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + K \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (2.17)$$

que é geral para qualquer arquitetura de rede [3]. De forma a permitir a resolução analítica da Eq. (2.17) para $N \rightarrow \infty$ osciladores, consideramos uma aproximação do tipo “*annealed network*” (rede “recozida” em tradução livre), que se baseia na substituição de a_{ij} pelo seu valor médio [7]

$$\langle a_{ij} \rangle = \frac{q_i q_j}{N \langle q \rangle}, \quad (2.18)$$

onde $\langle q \rangle$ é o número médio de ligações entre nodos (*mean degree*). A principal ideia desta aproximação é substituir a rede complexa por um grafo completo *weighted* (“pesado”), em que os “pesos” das ligações correspondem ao número de ligações do par de nodos em causa. Assim, a Eq. (2.17) é redefinida [7, 12, 22]

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K q_i}{N \langle q \rangle} \sum_{j=1}^N q_j \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (2.19)$$

e o parâmetro de ordem

$$z = r e^{i\psi} = \frac{1}{N \langle q \rangle} \sum_{j=1}^N q_j e^{i\theta_j}. \quad (2.20)$$

Neste caso, a contribuição de cada nodo tem o “peso” do número de ligações a ele associado, pelo que, nodos com maior número de ligações têm uma contribuição mais significativa para a sincronização. Rescrevendo a Eq. (2.19) usando a Eq. (2.20), obtém-se

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i - K q_i r \sin(\theta_i - \psi). \quad (2.21)$$

De forma a facilitar a compreensão do modelo de Kuramoto no âmbito das redes complexas, considere-se uma rede aleatória não direcionada com $N = 4$ nodos, presente na Fig. 2.2. Quando o acoplamento entre nodos é fraco ou inexistente, as fases não estão correlacionadas e

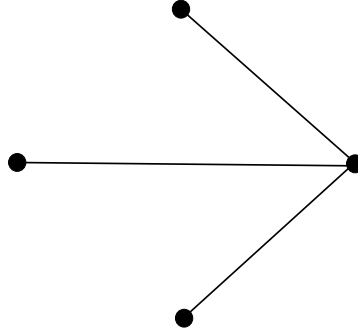


Figura 2.2: Rede aleatória não direcionada com $N = 4$ e $\langle q \rangle = 1.5$.

apresentam valores distintos, como se observa na Fig. 2.3; para um acoplamento não nulo, as

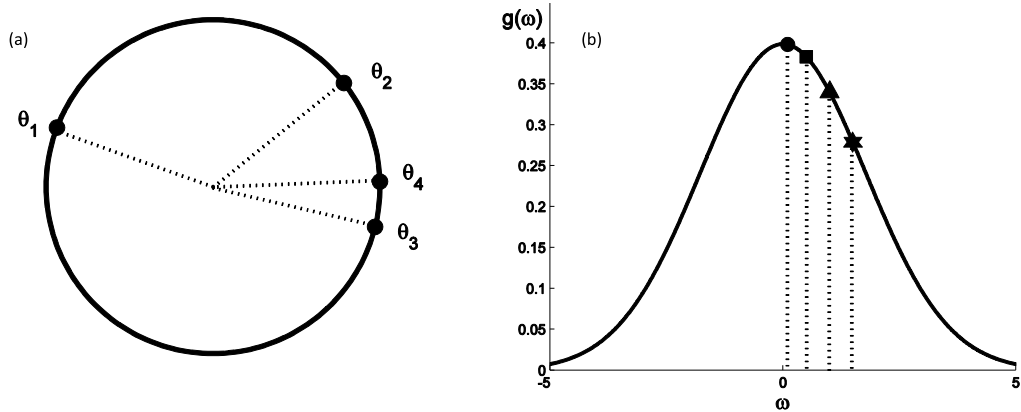


Figura 2.3: (a) Representação esquemática das fases (pontos pretos) de um sistema de $N = 4$ osciladores, dispostos na rede da Fig. (2.2). Na ausência de acoplamento, verifica-se que as fases não se encontram correlacionadas. (b) Distribuição gaussiana das frequências naturais: ω_1 (círculo), ω_2 (quadrado), ω_3 (triângulo), ω_4 (hexagrama).

fases evoluem de acordo com a Eq. (2.17). Integrando as quatro equações resultantes, cujas frequências naturais estão definidas na Fig. 2.3, e substituindo as fases obtidas na Eq. (2.20), obtém-se r e ψ . As equações foram integradas para um tempo (T) suficientemente grande, de forma a r e ψ se estabilizarem (estado estacionário). Para um acoplamento fraco, essa estabilização não ocorre independentemente do intervalo de tempo considerado. Na Fig. 2.4, podemos observar as evoluções das fases com o acoplamento K : verifica-se que quanto maior o acoplamento entre os osciladores, maior será r e, conseqüentemente, maior o grau de sincronização do sistema que é caracterizado por fases cada vez mais similares entre si. Na Fig. 2.4 (a), apesar de se ter $K < K_c$, verifica-se $r > 0$. Este é um resultado que surge por considerarmos uma sistema finito, pelo que ocorrem sempre flutuações no parâmetro de ordem.

Neste caso em específico, por o sistema ser composto por tão poucos osciladores, as flutuações podem ser enormes.

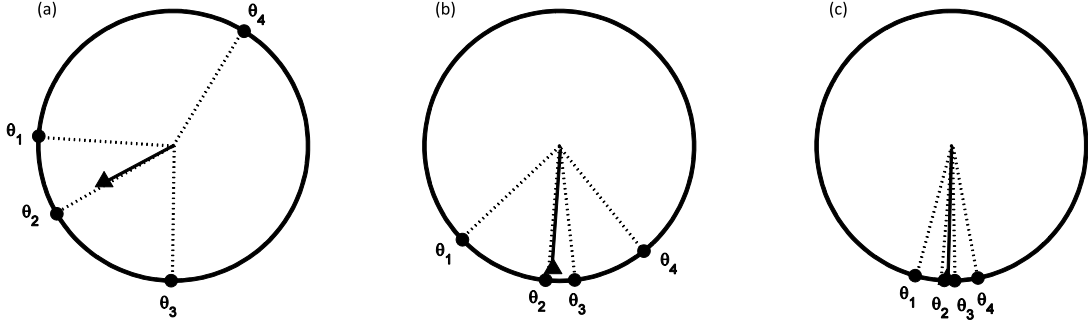


Figura 2.4: Evolução das fases (pontos pretos) de $N = 4$ osciladores, dispostos na rede aleatória da Fig. 2.2, com o acoplamento K . Para K reduzido as fases não se encontram correlacionadas. À medida que se aumenta K , as fases vão sincronizando-se e apresentam valores cada vez mais similares entre si, o que resulta no aumento do parâmetro de ordem (linha a preto): (a) $K = 0.1$, (b) $K = 1.0$, (c) $K = 3.0$. O triângulo preto corresponde à média das fases, ψ , que foi encontrado, juntamente com r , a partir da Eq. (2.20).

A passagem de um grafo completo para uma rede complexa confere um certa heterogeneidade ao sistema de osciladores, mais propriamente à interação entre nodos. Contudo, os nodos continuam similares entre si e perceber o fenómeno de sincronização em sistemas reais é ainda uma questão em aberto [7, 12, 22]. Neste trabalho, de forma a considerar um outro tipo de heterogeneidade entre nodos, introduzimos no modelo de Kuramoto um campo aleatório [12],

$$\vec{h}(\phi) = h(\cos(\phi), \sin(\phi)), \quad (2.22)$$

caracterizado pelo ângulo ϕ e pela magnitude h , que vamos assumir serem quantidades não dependentes do tempo, mas que podem depender dele numa abordagem mais geral [12]. A energia da interação oscilador i - campo local \vec{h}_i é dada por

$$E_i = -\vec{h}_i \cdot \vec{n}_i = -h_i \cos(\phi_i - \theta_i), \quad (2.23)$$

em que

$$\vec{n}(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \quad (2.24)$$

é um vetor unitário bidimensional associado à fase do oscilador [12]. Consequentemente, a força resultante dessa interação é

$$-\frac{\partial E_i}{\partial \theta_i} = h_i \sin(\phi_i - \theta_i), \quad (2.25)$$

pelo que se conclui que o campo atua no sentido de forçar os osciladores a ficarem paralelos a ele, i.e., desempenha um papel de *pinning* aleatório [12, 15]. Assim, verifica-se que apesar dos

nodos permanecerem iguais entre si, estes passam a “sentir” campos com diferentes direções, resultando na heterogeneidade desejada. Adicionando esta força à Eq. (2.19), obtém-se

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + K \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i) + h_i \sin(\phi_i - \theta_i) \quad (2.26)$$

e

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{Kq_i}{N\langle q \rangle} \sum_{j=1}^N q_j \sin(\theta_j - \theta_i) + h_i \sin(\phi_i - \theta_i), \quad (2.27)$$

tendo em conta a aproximação “*annealed network*”. Estas equações representam o conjunto de equações diferenciais do modelo de Kuramoto com campos aleatórios em redes complexas. Note-se que um outro tipo de desordem “*quenched*” (desordem constante no tempo) foi estudada em [23], onde os autores incluíram a desordem nas frequências naturais.

Capítulo 3

Comportamento crítico do Modelo de Kuramoto

Na natureza existem inúmeros exemplos de sistemas que revelam transições de fase, como a passagem de um gás ao estado líquido, a transição de um estado paramagnético a um magnético ordenado, a emergência de uma fase supercondutora, entre outros [24]. A família de osciladores, considerada no capítulo anterior, constitui outro exemplo de um sistema que revela uma transição de fase, cuja dinâmica das fases obedece ao conjunto de equações diferenciais do modelo de Kuramoto.

Segundo uma abordagem termodinâmica, uma transição de fase é uma mudança abrupta entre fases, causada pela variação de um parâmetro de estado, como a temperatura T , pressão P , ou campo magnético H [20]. As fases, por sua vez, podem ser distinguidas a partir do parâmetro de ordem, $\phi(X)$, onde X representa o conjunto de variáveis extensivas que caracterizam um dado sistema. Considerando uma transição entre duas fases 1 e 2, o parâmetro de ordem é tal que é nulo na fase desordenada e não nulo na fase ordenada [20, 25]. Convencionalmente, as transições de fase dividem-se em primeira e segunda ordem: enquanto que numa transição de fase de primeira ordem o parâmetro de ordem sofre uma descontinuidade, uma transição de fase de segunda ordem é caracterizada por um parâmetro de ordem contínuo. Por outro lado, no sistema de classificação de Paul Ehrenfest, podem ser consideradas transições de fase de ordem superior, i.e., de ordem $n + 1$, se a descontinuidade do parâmetro de ordem ocorrer na n -ésima derivada em ordem a X [20].

No capítulo anterior apresentou-se uma transição de fase de segunda ordem no sistema de N osciladores. Perceber o seu comportamento crítico, i.e., a dinâmica do sistema na vizinhança do ponto crítico, K_c , requer uma análise analítica do modelo de Kuramoto. Ott e Antonsen [26] propuseram um método que permite a resolução deste modelo para $N \rightarrow \infty$ osciladores. Primeiro introduziram a função densidade de osciladores, $F(\theta, \omega, t)$, que representa a fração de osciladores que no tempo t , apresenta fase θ e frequência natural ω [26]. No caso de uma rede complexa usando a aproximação “*annealed network*”, a função densidade de osciladores é definida por $F(\theta, \omega, q, t)$ e satisfaz as condições de normalização [12]:

$$g(\omega) = \int_1^\infty \int_0^{2\pi} F(\theta, \omega, q, t) d\theta dq \quad (3.1)$$

e

$$P(q) = \int_{-\infty}^\infty \int_0^{2\pi} F(\theta, \omega, q, t) d\theta d\omega. \quad (3.2)$$

Em seguida, Ott e Antonsen propuseram a seguinte assunção [26]

$$F = \frac{P(q)g(\omega)}{2\pi} (1 + F_+ + F_-), \quad (3.3)$$

em que

$$F_+ = F_-^* = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\omega, q, t) e^{in\theta} \quad (3.4)$$

e

$$F_n(\omega, q, t) = \alpha^n(\omega, q, t). \quad (3.5)$$

Uma vez que o número de osciladores se mantém constante, $F(\theta, \omega, q, t)$ obedece à equação de continuidade

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} [v(\theta, \omega, q, t)F] = 0, \quad (3.6)$$

onde $v(\theta, \omega, q, t)$ representa a frequência angular do oscilador θ , cuja frequência natural é ω e o número de conexões é q , e assume a forma da Eq. (2.19), podendo ser reescrita

$$v(\theta, \omega, q, t) = \omega + \frac{Kq}{2i} (ze^{-i\theta} - z^*e^{i\theta}), \quad (3.7)$$

em que z^* é o complexo conjugado do parâmetro de ordem. A ser considerado um sistema com $N \rightarrow \infty$ osciladores, o parâmetro de ordem deve ser definido no limite contínuo, ou seja, na forma

$$z(t) = \frac{1}{\langle q \rangle} \int_1^{\infty} dq q \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^{2\pi} F(\theta, \omega, q, t) e^{i\theta} d\theta. \quad (3.8)$$

Tendo em conta a função $F(\theta, \omega, q, t)$ definida na Eq. (3.3), o último integral em θ da Eq. (3.8) tem solução $P(q)g(\omega)\alpha^*(\omega, q, t)$, pelo que o parâmetro de ordem fica

$$z(t) = \int_1^{\infty} \frac{qP(q)}{\langle q \rangle} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) \alpha^*(\omega, q, t) d\omega dq. \quad (3.9)$$

Substituindo agora as Eq. (3.3) e (3.7) na Eq. (3.6), e projetando o resultado num espaço gerado pelas funções base $e^{in\theta}$ ($n > 0$), obtém-se

$$\frac{\partial F_+}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(\omega + \frac{Kq}{2i} (ze^{-i\theta} - z^*e^{i\theta}) \right) F_+ \right] = \frac{Kq}{2} z^*e^{i\theta}. \quad (3.10)$$

Tendo em conta as Eqs. (3.4) e (3.5), é obtida uma equação para $\alpha(\omega, q, t)$,

$$\dot{\alpha} + i\omega\alpha + \frac{Kq}{2} (z\alpha^2 - z^*) = 0, \quad (3.11)$$

cuja solução estacionária ($\dot{\alpha} = 0$) é

$$\alpha_0(\omega, q) = \begin{cases} -\frac{i\omega}{Kqr} + \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{Kqr}\right)^2}, & \text{se } |\omega| \leq Kqr, \\ -\frac{i\omega}{Kqr} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{Kqr}{\omega}\right)^2} \right], & \text{se } |\omega| > Kqr \end{cases} \quad (3.12)$$

e satisfaz a condição $|\alpha| \leq 1$, necessária para a convergência da Eq. (3.4).

Vimos que uma solução estacionária implica $\dot{\psi} = \Omega$ e, conseqüentemente, $\psi(t) = \Omega t + \psi_0$, pelo que o parâmetro de ordem pode ser rescrito $z = r e^{i(\Omega t + \psi_0)}$. Dada a simetria rotacional do sistema, podemos rodar o referencial e definir $\omega \mapsto \omega + \Omega$, que origina $\psi_0 = 0$. Deste modo, podemos deduzir a expressão do parâmetro de ordem, r , no estado estacionário,

$$r = \text{Re}(z(t)) = \int_1^\infty dq \frac{P(q)q}{\langle q \rangle} \int_{-Kqr}^{Kqr} d\omega g(\omega + \Omega) \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{Kqr}\right)^2}, \quad (3.13)$$

e da velocidade angular de grupo,

$$\Omega = \langle \omega \rangle - \int_1^\infty dq \frac{qP(q)}{\langle q \rangle} \int_{|\omega| \geq Kqr} g(\omega + \Omega) \text{sign}(\omega) \sqrt{\omega^2 - (Kqr)^2} d\omega, \quad (3.14)$$

onde

$$\langle \omega \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) \omega d\omega \quad (3.15)$$

é a frequência natural média. Note-se que a função $\text{sign}(\omega)$ atribui o sinal de ω ao integral da Eq. (3.14). Considerando uma distribuição de frequências naturais $g(\omega)$ simétrica em relação ao seu valor médio, este integral anula-se e obtém-se $\Omega = \langle \omega \rangle$. Contudo, a solução encontrada é mais geral e estende-se para redes não-triviais com distribuições de frequências assimétricas, como Basnarkov e Urumov mostraram em resultados anteriores [27].

Tendo em conta a presença de campos aleatórios, a frequência angular do oscilador θ é definida $v(\theta, \omega, q, h, \phi, t)$ e assume a forma da Eq. (2.27), podendo ser rescrita

$$\begin{aligned} v(\theta, \omega, q, h, t) &= \omega + Kqr \sin(\psi - \theta) + h \sin(\phi - \theta) \\ &= \omega + \frac{Kq}{2i} (ze^{-i\theta} - z^* e^{i\theta}) + \frac{h}{2i} (e^{i(\phi-\theta)} - e^{i(\theta-\phi)}). \end{aligned} \quad (3.16)$$

O parâmetro de ordem, por sua vez, é definido

$$z(t) = \int_1^\infty \frac{qP(q)}{\langle q \rangle} dq \int_0^{2\pi} \xi(\phi) d\phi \int_0^\infty dh f(h) \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) \alpha^*(\omega, q, t) d\omega, \quad (3.17)$$

onde $f(h)$ e $\xi(\phi)$ correspondem às distribuições de magnitude e das direções dos campos, respetivamente. Seguindo o procedimento anteriormente usado, obtemos

$$\frac{\partial F_+}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} (vF_+) = \frac{Kq}{2} z^* e^{i\theta} + \frac{h}{2} e^{i(\theta-\phi)} \quad (3.18)$$

e, conseqüentemente, tem-se a equação para $\alpha(\omega, q, h, t)$,

$$\dot{\alpha} + i\omega\alpha + \frac{Kq}{2} (z\alpha^2 - z^*) + \frac{h}{2} (\alpha^2 e^{i\phi} - e^{-i\phi}) = 0, \quad (3.19)$$

cuja solução estacionária é

$$\alpha_0(\omega, q, h, \phi) = \begin{cases} \frac{A\sqrt{A^2+B^2-\omega^2}-\omega B-i(A\omega+B\sqrt{A^2+B^2-\omega^2})}{A^2+B^2}, & \text{se } |\omega| \leq \sqrt{A^2+B^2} \\ \frac{B\sqrt{\omega^2-A^2-B^2}-B\omega+i(A\sqrt{\omega^2-A^2-B^2}-A\omega)}{A^2+B^2}, & \text{se } |\omega| > \sqrt{A^2+B^2}, \end{cases} \quad (3.20)$$

com

$$A = Kqr + h \cos \phi \quad (3.21)$$

e

$$B = h \sin \phi. \quad (3.22)$$

Considerando uma distribuição uniforme das direções, i.e., $\xi(\phi) = 1/2\pi$, e a rotação do referencial $\omega \rightarrow \omega + \Omega$, obtém-se o parâmetro de ordem real

$$r = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int \frac{qP(q)}{\langle q \rangle} dq \int_0^\infty dh f(h) \int g(\omega + \Omega) \text{Re}(\alpha_0(\omega, q, t)) d\omega. \quad (3.23)$$

Para a distribuição de Lorentz, definida na Eq. (2.15), tem-se

$$\text{Re}(\alpha_0^*(\omega, q, h, \phi)) = \begin{cases} \frac{(Kqr+h \cos \phi)\sqrt{(Kqr+h \cos \phi)^2+(h \sin \phi)^2-\omega^2}-\omega h \sin \phi}{(Kqr+h \cos \phi)^2+(h \sin \phi)^2}, & \text{se } |\omega| \leq \sqrt{(Kqr+h \cos \phi)^2+(h \sin \phi)^2} \\ \frac{h \sin \phi \sqrt{\omega^2-(Kqr+h \cos \phi)^2-(h \sin \phi)^2}-\omega h \sin \phi}{(Kqr+h \cos \phi)^2+(h \sin \phi)^2}, & \text{se } |\omega| > \sqrt{(Kqr+h \cos \phi)^2+(h \sin \phi)^2}, \end{cases} \quad (3.24)$$

pele que o parâmetro de ordem fica

$$r = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dh f(h) \int_1^\infty dq \frac{qP(q)}{\langle q \rangle} \frac{Kqr + h \cos \phi}{\sqrt{(Kqr + h \cos \phi)^2 + h^2 \sin^2 \phi + 1}}. \quad (3.25)$$

De forma a simplificar a notação, vamos designar o lado direito desta equação $G(r)$. Nas secções que se seguem serão consideradas as arquiteturas de grafo completo e de rede *scale-free*, na presença de campos aleatórios com magnitude constante e gaussiana. A resolução da Eq. (3.25) ditará o tipo de transição de fase ocorrida do estado dessincronizado para o estado sincronizado. Assim, a fim de se obter o seu comportamento crítico, será feita uma expansão de Taylor da função $G(r)$ na vizinhança de K_c .

3.1 Grafos completos

Num grafo completo, todos os nodos estão ligados entre si (Fig. 3.1). Considerando um grafo com N nodos, cada nodo apresentará $N - 1$ ligações com os restantes, pelo que a probabilidade de um nodo ter q ligações é dada por

$$P(q) = \delta(q - N + 1). \quad (3.26)$$

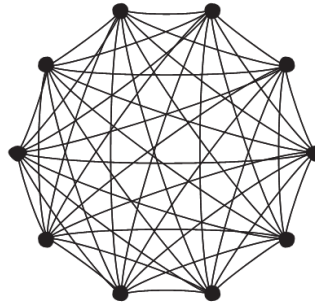


Figura 3.1: Representação de um grafo completo não direcionado com $N = 10$ nodos, onde cada nodo está conectado a todos os outros. Figura adaptada de [28].

Tendo em conta o conjunto de equações diferenciais do modelo de Kuramoto, definido na Eq. (2.17), vimos que ao ser considerado um grafo completo com $a_{ij} = 1$, estamos perante o modelo original de Kuramoto, definido na Eq. (2.1). Na sua forma original, o parâmetro de ordem apresenta as soluções $r = 0$ para $K < K_c$, e $r \sim \sqrt{K - K_c}$ na vizinhança de K_c , pelo que se conclui que a transição de fase é de segunda ordem, apresenta o expoente crítico $\beta = 1/2$ e ocorre para $K_c = 2$, no caso de a distribuição de frequências ser uma distribuição Lorentziana, Eq. (2.15). Contudo, desde que Yeung e Strogatz [29] reportaram transições de fase de primeira ordem no modelo, ao considerarem interações *time-delayed* (atrasos do tempo, i.e., não instantâneas), tem sido vasta a procura de transições de fase descontínuas no modelo de Kuramoto. Em [30], por exemplo, foi identificada uma transição de fase de primeira ordem no modelo, quando resolvido o método Ott-Antonsen para um grafo completo e considerando um termo de inércia adicional $d^2\theta_i/dt^2$. Em [31], por sua vez, também foram detetadas transições de fase de primeira ordem no modelo ao serem consideradas distribuições de frequências naturais triangulares, Gaussianas, Lorentziana e Lorentziana bimodal, e uma constante de acoplamento $K|\omega_i|$.

A introdução de campos aleatórios no modelo de Kuramoto e a forma como estes influenciam a sincronização é um tema ainda não estudado. Embora campos uniformes já tenham sido adicionados ao modelo em [12], não foram realizadas as generalizações aqui consideradas, nomeadamente a de campos aleatórios. Assim, nas subsecções que se seguem, será estudada a Eq. (3.25) num grafo completo e na presença dos campos aleatórios com magnitude constante e gaussiana.

3.1.1 Campos aleatórios com magnitude constante

Considere-se a presença de campos aleatórios com magnitude constante, cuja distribuição da magnitude obedece a

$$f(x) = \delta(x - h). \quad (3.27)$$

Substituindo esta função e a Eq. (3.26) na Eq. (3.25), obtém-se

$$r = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{Kr + h \cos \phi}{\sqrt{(Kr + h \cos \phi)^2 + h^2 \sin^2 \phi + 1 + 1}}. \quad (3.28)$$

Neste trabalho estamos interessados em estudar o comportamento da transição de um estado não sincronizado para um estado sincronizado. Para um campo nulo, $h = 0$, a Eq.(3.28) é dada por

$$r = \frac{Kr}{\sqrt{(Kr)^2 + 1 + 1}} \quad (3.29)$$

e apresenta as soluções $r = 0$ para $K < K_c$ e

$$r = \sqrt{\frac{K - 2}{K}} \quad (3.30)$$

para $K > K_c$, com $K_c = 2$. Uma vez que para $K \rightarrow K_c$, $1/\sqrt{K}$ é praticamente constante, a solução não nula assume a forma de $r \sim \sqrt{K - K_c}$, pelo que se conclui uma transição de fase de segunda ordem, cujo expoente crítico é $\beta = 1/2$, de acordo com o demonstrado em [6].

Para $h > 0$, o comportamento crítico e o valor do acoplamento crítico podem ser deduzidos a partir da expansão de Taylor da função $G(r)$, definida no lado direito da Eq. (3.28), na vizinhança de K_c , quando $r \ll 1$:

$$G(r) = G(0) + G'(0)r + G''(0)\frac{(r)^2}{2!} + G'''(0)\frac{(r)^3}{3!} + \dots \quad (3.31)$$

Demonstra-se que os termos com derivadas de ordem par são nulos, pelo que se obtém

$$r = u(h)Kr + v(h)\frac{(Kr)^3}{6} + O(r^5), \quad (3.32)$$

com

$$u(h) = \frac{1}{2\sqrt{h^2 + 1}} \quad (3.33)$$

e

$$v(h) = -\frac{3}{4}\frac{1}{(h^2 + 1)^{3/2}} + \frac{9}{8}\frac{h^2}{(h^2 + 1)^{5/2}}. \quad (3.34)$$

O valor crítico do acoplamento, K_c , pode ser obtido na resolução da equação $r = G(r)$, da seguinte forma: na Fig. 3.2, podemos observar a função $r = r$ (linha tracejada a preto), e as funções $G(r)$ para $h = 1$ e para os valores de acoplamentos: $K = 2K_c$ (curva a rosa), $K = K_c$ (curva a vermelho) e $K = K_c/2$ (curva a azul), obtidas a partir da integração da Eq. (3.28). Verifica-se que quando $K < K_c$, tem-se $G(r) < r$ para $r > 0$, o que significa que a equação $r = G(r)$ apresenta apenas a solução trivial, $r = 0$. Para $K > K_c$, por sua vez, tem-se $G(r) > r$ para um dado intervalo de r , pelo que a solução da equação $r = G(r)$ surge para $r > 0$. Por fim, para $K = K_c$, tem-se $r = G(r)$ para $r = 0$, e além disso

$$G'(r = 0) = 1. \quad (3.35)$$

Note-se que esta condição separa os dois cenários, de haver apenas a solução trivial, e do surgimento da solução não-trivial. Derivando analiticamente a função $G(r)$ e igualando esse resultado à unidade, obtém-se

$$K_c = \frac{1}{u(h)} = 2\sqrt{h^2 + 1}. \quad (3.36)$$

Deste modo, conclui-se que a constante de acoplamento crítico pode ser obtida a partir do primeiro termo da expansão de Taylor. Para um campo nulo, tem-se $K_c = 2$, de acordo com a Eq. (3.30).

O comportamento crítico da transição, por sua vez, é deduzido a partir do termo cúbico da expansão, onde da Eq. (3.32) apresenta as soluções $r = 0$ para $K < K_c$ e

$$r = 2(h^2 + 1)\sqrt{\frac{2}{K^3(2 - h^2)}}(K - K_c)^{1/2}, \quad (3.37)$$

para $K > K_c$. Note-se que a expansão de Taylor apenas é válida para uma transição de fase contínua, onde a solução não nula é real, i.e., para

$$\frac{K - K_c}{2 - h^2} > 0. \quad (3.38)$$

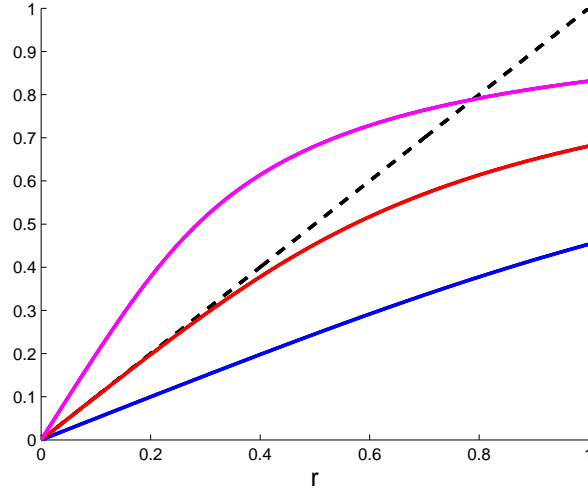


Figura 3.2: Resolução gráfica da equação $r = G(r)$, definida na Eq. (3.28) para $h = 1$ e para os acoplamentos: $K = K_c/2$ (curva a azul), $K = K_c$ (curva a vermelho) e $K = 2K_c$ (curva a rosa). Conclui-se que para $K = K_c$ ($r \ll 1$) a função $r = r$ (reta preta tracejada) e a função $G(r)$ ambas apresentam declive igual a 1, pelo que é possível obter o valor de K_c , definido na Eq. (3.36), a partir da Eq. (3.35).

Para soluções não reais, por outro lado, a suposição que $r \ll 1$ não deverá ser válida, o que significa que haverá uma descontinuidade na vizinhança de K_c e a transição de fase será de primeira ordem. Assim, a partir da análise da Eq. (3.38), conclui-se que ocorre uma transição de fase de segunda ordem para $h < \sqrt{2}$ e uma transição de fase de primeira ordem para $h > \sqrt{2}$. Similarmente às generalizações consideradas na Eq. (3.30), a transição de fase contínua apresenta o expoente crítico $\beta = 1/2$.

O número de pontos de interseção entre as funções $r = r$ e $G(r)$ indica-nos também o tipo de transição de fase em causa: para uma transição de fase de segunda ordem existem dois pontos de interseção para $K > K_c$, correspondentes à solução trivial instável e à solução estável, respetivamente (ver Fig. 3.2); para uma transição de primeira ordem, por outro lado, podem ser encontrados até três pontos de interseção: a solução trivial e duas soluções não nulas. A resolução numérica da equação $r = G(r)$ pode ser visualizada na Fig. 3.3, na forma $r - G(r) = 0$. Graficamente, verificam-se três pontos de interseção para $h = 2$ ($h > \sqrt{2}$, transição de fase de primeira ordem) e dois pontos de interseção para $h = 1$ ($h < \sqrt{2}$, transição de fase de segunda ordem).

Na Fig. 3.4 (a) e (b) podemos visualizar o parâmetro de ordem r em função do acoplamento K para estes dois tipos de transições de fase, onde as curvas foram obtidas a partir das soluções numéricas da Eq. (3.28). Na Fig. 3.4 (a) verifica-se uma transição de fase de segunda ordem, uma vez que estamos perante um campo aleatório com magnitude $h = 1$ ($h < \sqrt{2}$). Na Fig. 3.4 (b), a magnitude do campo é $h = 2$ ($h > \sqrt{2}$) e a presença de um ciclo histerese é um indicativo de uma transição de fase de primeira ordem. Este ciclo surge a partir das três soluções numéricas encontradas na Eq. (3.28). Nesta situação, o sistema salta do estado $r = 0$ para o estado $r > 0$.

Recordando a teoria de Landau, na transição de fase de segunda ordem, o potencial termodinâmico $\Phi(\phi)$ apresenta duas soluções para $K > K_c$: uma estável correspondente ao

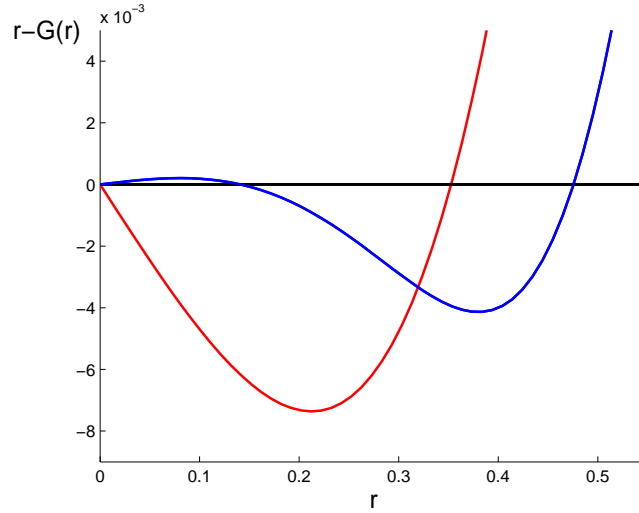


Figura 3.3: Soluções da equação $r - G(r) = 0$ para $h = 2$ e $K = 4.5$ (curva a azul) e para $h = 1$ e $K = 3.0$ (curva a vermelho). Verifica-se que para $h = 2$ (transição de fase de primeira ordem) a equação apresenta três soluções e para $h = 1$ (transição de fase de segunda ordem) a equação apresenta duas soluções. O número de soluções da equação em causa é indicativo do tipo de transição de fase ocorrida.

mínimo global $r > 0$ e uma instável, correspondente ao máximo local $r = 0$. Assim, para $K > K_c$ o sistema vai permanecer na solução estável.

Para transições de fase de primeira ordem, por sua vez, a sincronização resulta de saltos discretos de Barkhausen [7, 32, 33], i.e., a sincronização de dois osciladores pode conduzir à sincronização de uma fração macroscópica de N osciladores se isso for energeticamente favorável. Neste tipo de transição de fase, ao contrário do que acontece numa transição de fase de segunda ordem, existem dois valores críticos de K : K_{c1} e K_{c2} . Para $K < K_{c1}$, o sistema mantém-se no estado $r = 0$ que é única solução estável do potencial termodinâmico de Landau. Quando $K = K_{c1}$, surge em $\Phi(\phi)$ uma nova solução: um ponto sela ($r > 0$), visível na Fig. 3.5 (a). Fazendo aumentar K , o ponto sela dá origem a um ponto estável r_2 ($r_2 > 0$) e a um ponto instável r_1 ($r_1 < r_2$), que corresponde ao máximo local (ver Fig. 3.5 (b)). Quando o sistema se encontra num desses mínimos, uma perturbação terá de ser significativamente forte para ultrapassar o máximo local e fazer evoluir o sistema para o mínimo seguinte. Daqui resultam os saltos da histerese. Para $K = K_{c2}$, por sua vez, o ponto instável colide com o ponto estável e origina novamente o ponto sela (Fig. 3.5 (c)), e para $K > K_{c2}$, existe unicamente a solução estável $r_2 > 0$.

A relação entre os valores críticos do acoplamento e a magnitude do campo aleatório pode ser observada na Fig. 3.6, onde para cada valor de h , foi encontrado um valor crítico do acoplamento, que é a solução numérica da Eq. (3.28). Uma vez que o número de soluções desta equação varia consoante o tipo de transição de fase, é de esperar um único K_c para a transição de fase contínua e dois valores do acoplamento crítico para a transição descontínua. Graficamente, verifica-se que para $h \leq \sqrt{2}$, a transição de fase permanece contínua (de segunda ordem) e sem a presença da histerese; a partir desse valor ($h = \sqrt{2}$), a transição torna-se descontínua (primeira ordem) e passam a existir os valores críticos: K_{c1} e K_{c2} . Este ponto ($h = \sqrt{2}$) constitui um ponto tricrítico, um ponto de encontro das transições de fase

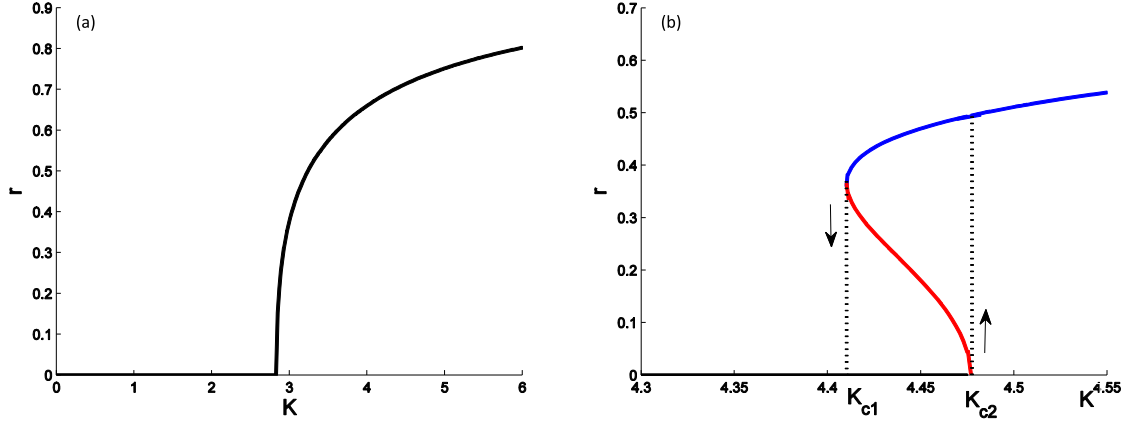


Figura 3.4: Parâmetro de ordem r em função do acoplamento K do modelo de Kuramoto num grafo completo e na presença de campos aleatório com magnitude constante. (a) $h = 1$: o sistema permanece num estado não sincronizado ($r = 0$), para $K < K_c$, com K_c de acordo com a Eq. (3.36). A partir desse valor e à medida que se faz aumentar K , maior será o número de osciladores sincronizados e, conseqüentemente, maior será r . (b) $h = 2$: o sistema salta de um estado não sincronizado (linha a preto) para um estado sincronizado (linha a azul). A linha a vermelho, entre K_{c1} e K_{c2} , corresponde aos pontos instáveis e as linhas pretas a tracejado definem os limites do ciclo de histerese. As curvas foram traçadas a partir das soluções numéricas da Eq. (3.28).

de primeira e de segunda ordem. Na figura podemos observar que K_c , K_{c1} e K_{c2} aumentam com h . Este resultado surge do efeito de desordem (“*pinning effect*”) provocado pelo campo, pelo que é necessário um acoplamento maior entre os osciladores para compensar esse efeito e induzir a sincronização. Daqui resultam constantes de acoplamento crítico maiores.

3.1.2 Campos aleatórios gaussianos

Considere um campo aleatório gaussiano, cuja distribuição obedece a

$$f(h_x, h_y, \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(h_x^2 + h_y^2)}{2\sigma^2}\right]. \quad (3.39)$$

Substituindo esta função de distribuição e a Eq. (3.26) na Eq. (3.25), e transformando o sistema de coordenadas para o de coordenadas polares, obtém-se:

$$r = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{+\infty} dh h e^{-h^2/2\sigma^2} \frac{Kr + h \cos \phi}{\sqrt{(Kr + h \cos \phi)^2 + h^2 \sin^2 \phi + 1 + 1}}, \quad (3.40)$$

com $h = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$. Usando o procedimento anterior, chega-se à expansão de Taylor

$$r = \frac{Kr}{\sigma^2} \int_0^\infty dh h e^{-h^2/2\sigma^2} u(h) + \frac{(rK)^3}{6\sigma^2} \int_0^\infty dh h e^{-h^2/2\sigma^2} v(h) + O(r^5), \quad (3.41)$$

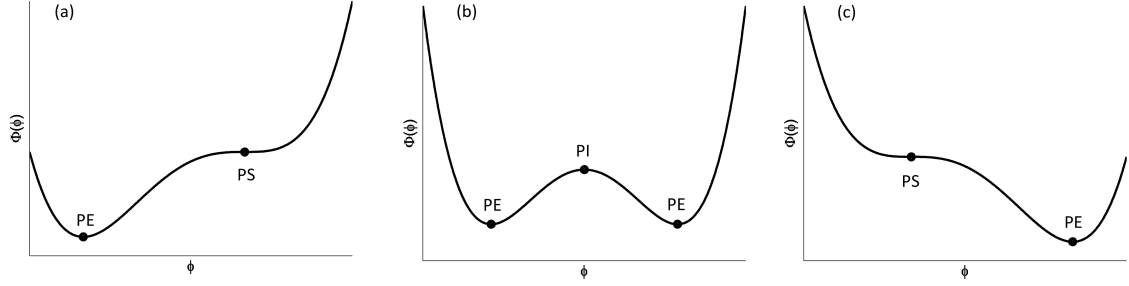


Figura 3.5: Potencial termodinâmico de Landau, $\Phi(\phi)$, juntamente com os pontos estáveis (PE), pontos sela (PS) e ponto instável (PI), correspondentes a: (a) $K = K_{c1}$, (b) $K_{c1} < K < K_{c2}$ e (c) $K = K_{c2}$.

com $u(h)$ e $v(h)$ definidos nas Eqs. (3.33) e (3.34), respetivamente. A partir do primeiro termo da expansão, obtém-se a constante de acoplamento crítico,

$$K_c = \frac{\sigma^2}{\int_0^\infty dh h e^{-h^2/2\sigma^2} u(h)}, \quad (3.42)$$

que se reduz a $K_c = 2$ para $\langle h \rangle = 0$ ($\sigma = 0$). A Eq.(3.41), por sua vez, apresenta as soluções $r = 0$ para $K < K_c$ e

$$r = \sqrt{\frac{-6\sigma^2}{K_c K^3 \int_0^\infty dh h e^{-h^2/2\sigma^2} v(h)}} (K - K_c)^{1/2} \quad (3.43)$$

para $K > K_c$, com K_c definido na Eq. (3.42). Note-se que o radicando é positivo para qualquer valor de σ desde que o integral em h seja negativo. Deste modo, verifica-se que a solução não nula é sempre real no intervalo de K considerado, pelo que se conclui que a transição de fase é de segunda ordem e apresenta o expoente crítico $\beta = 1/2$. Na Fig. 3.7 podemos observar o parâmetro de ordem r em função do acoplamento K , para $\sigma \sim 0, 0.8, 1.6$, correspondente aos valores médios de campo $\langle h \rangle = 0, 1, 2$, respetivamente, onde as curvas foram obtidas a partir das soluções numéricas da Eq. (3.40). Verifica-se que para $\langle h \rangle = 2$ já não surge um ciclo de histerese como se observou no modelo de Kuramoto num grafo completo e na presença do campo aleatório com magnitude $h = 2$. Graficamente, observa-se que K_c aumenta à medida que $\langle h \rangle$ aumenta. Este é o resultado esperado pois é necessário um acoplamento maior para contrariar o efeito de desordem provocado pelo campo.

A relação entre σ e K_c pode ser visualizado no diagrama de fases presente na Fig. 3.8: os pontos pretos constituem as soluções numéricas da Eq. (3.40), para um dado valor de σ , e a curva teórica (curva a preto) foi obtida a partir da Eq. (3.42). Uma vez que na presença de campos aleatórios com magnitude gaussiana já não se verificam transições de fase de primeira ordem, tem-se apenas uma constante de acoplamento crítico para cada valor de σ . Para $\sigma \rightarrow \infty$ observa-se uma relação de linearidade no diagrama de fases, que pode ser demonstrada a partir da Eq. (3.42), onde o integral tem solução

$$\int_0^\infty dh \frac{h e^{-h^2/2\sigma^2}}{2\sqrt{h^2+1}} = \frac{1}{4} \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right) \sigma \left[1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{1}{2\sigma}}\right)\right]. \quad (3.44)$$

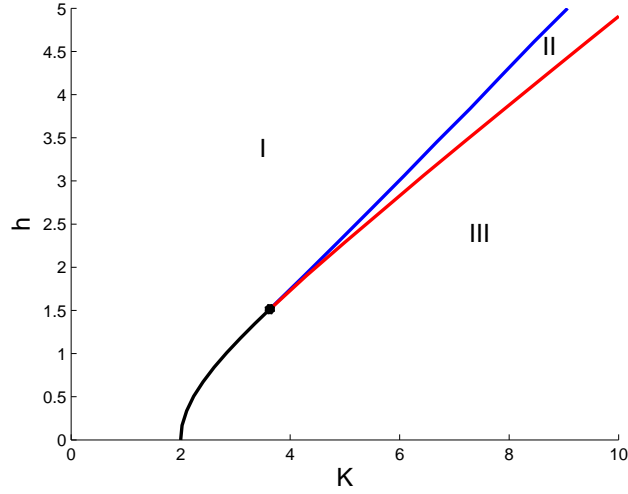


Figura 3.6: Diagrama de fases do modelo de Kuramoto num grafo completo e na presença de campos aleatórios com magnitude constante. A curva a preto foi obtida a partir da Eq. (3.36) e corresponde a uma transição de fase de segunda ordem que ocorre para $h < \sqrt{2}$. O ponto $h = \sqrt{2}$ (ponto preto) constitui um ponto tricrítico a partir do qual surge a transição de fase de primeira ordem e, conseqüentemente, os dois valores críticos do acoplamento: K_{c1} (curva a azul) e K_{c2} (curva a vermelho), que foram obtidos a partir das soluções numéricas da Eq. (3.28). No diagrama de fases podemos visualizar as regiões I, II e III, correspondentes ao estado dessincronizado, à região da histerese e ao estado sincronizado, respetivamente.

Para $\sigma \rightarrow \infty$, tem-se $\text{erf}(0) \sim 0$, ficando a expressão reduzida a $\sqrt{2\pi} \sigma/4$. Conseqüentemente, obtém-se a relação linear

$$K_c \sim C \sigma, \quad (3.45)$$

com $C = \sqrt{\pi/8}$.

3.1.3 Comparação entre a teoria e a simulação

Nesta subsecção são comparados os resultados obtidos através de simulações com os resultados numéricos para o modelo de Kuramoto num grafo completo e na presença de campos aleatórios com magnitude constante. Nas simulações resolveu-se a Eq. (2.26) com o método de Euler, de forma semelhante ao exemplo ilustrativo estudado no capítulo 2 para uma rede com 4 nodos. Usou-se para o efeito do mesmo um passo discreto $\Delta t = 0.001$ e um grafo completo com $N = 10^4$ nodos. A partir da Fig. 3.9, verifica-se que os resultados numéricos da simulação (pontos e curvas a tracejado) estão de acordo com a solução numérica da Eq. (3.28) (curvas a azul e a vermelho), o que por um lado valida a análise analítica em causa, e por outro mostra que uma rede com 10^4 nodos se comporta de forma semelhante a um grafo infinito.

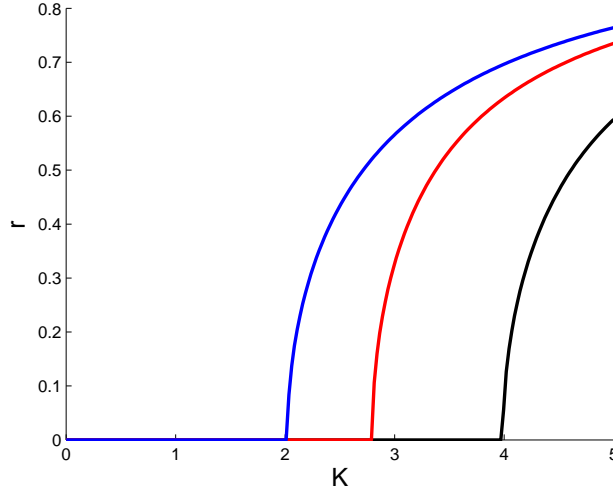


Figura 3.7: Parâmetro de ordem r em função do acoplamento K do modelo de Kuramoto num grafo completo e na presença de um campo aleatório gaussiano com os valores: $\langle h \rangle = 0$, $\sigma = 0$ (curva a azul); $\langle h \rangle = 1$, $\sigma \sim 0.8$ (curva a vermelho) e $\langle h \rangle = 2$, $\sigma \sim 1.8$ (curva a preto). As curvas foram obtidas a partir das soluções numéricas da Eq. (3.40). Verifica-se que para estes parâmetros de campo, a transição de fase é de segunda ordem e ocorre para o K_c definido na Eq. (3.42).

3.2 Redes *scale-free*

Numa rede *scale-free* (SF) (Fig. 3.10), a distribuição das ligações decai segundo uma lei de potência [7–11]

$$P(q) \propto q^{-\gamma}. \quad (3.46)$$

A topologia deste tipo de rede é definida pelo valor do expoente γ : enquanto que para $2 < \gamma < 3$, a topologia é caracterizada pela presença de *hubs*, que confere uma heterogeneidade às ligações entre os nodos da rede, para $\gamma > 3$, a presença de *hubs* é quase inexistente e a rede assemelha-se a uma rede aleatória simples (*tree-like*). Note-se que muitos sistemas reais apresentam uma arquitetura de rede SF com $2 < \gamma < 3$ [7, 11]. Para $\gamma < 2$, por sua vez, a estrutura afasta-se bastante da topologia *tree-like* [7]. Neste intervalo de γ tem-se $\langle q \rangle \rightarrow \infty$ e a aproximação *annealed network* deixa de ser válida, i.e., $a_{ij} \propto 1/\langle q \rangle \rightarrow 0$, pelo que vamos apenas considerar distribuições com $\gamma > 2$.

Usando os métodos anteriores, demonstra-se que numa rede SF a transição de fase do estado dessincronizado para o estado sincronizado é de segunda ordem, ocorre para

$$K_c = \frac{2\langle q \rangle}{g(0)\pi\langle q^2 \rangle}, \quad (3.47)$$

que é válido para $\gamma > 3$, e apresenta os expoentes críticos $\beta = 1/2$ para uma rede SF com $\gamma > 5$ e $\beta = 1/(\gamma - 3)$ para uma rede SF com $3 < \gamma < 5$, que está de acordo com [12].

Para uma rede SF com $\gamma > 5$ e na presença de campos aleatórios com magnitude constante, tal como para um grafo completo, foi detetada uma transição de fase de primeira ordem. Para

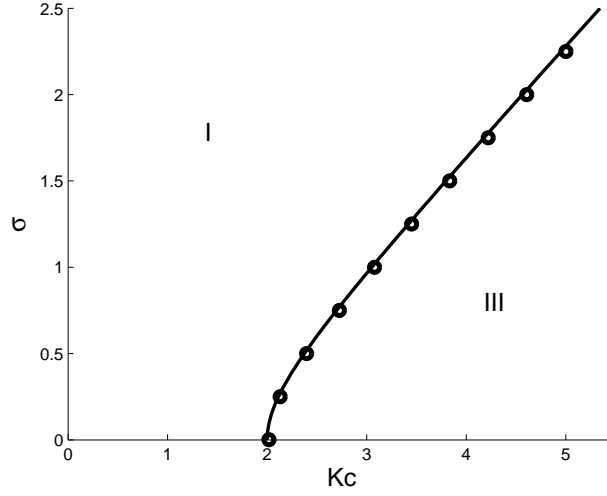


Figura 3.8: Diagrama de fases do modelo de Kuramoto num grafo completo e na presença de campos aleatórios gaussianos. Os pontos pretos correspondem às soluções numéricas da Eq. (3.40) e a curva teórica (a preto) foi obtida a partir da Eq. (3.42). No diagrama de fases encontramos as regiões I e III, que correspondem aos estados dessincronizado e sincronizado, respetivamente.

lá do que foi estudado em [12], aqui também foi estudado o limite $2 < \gamma < 3$, cuja transição de fase encontrada é de segunda ordem, ocorre para $K_c = 0$ e apresenta o expoente crítico $\beta = (\gamma - 2)/(3 - \gamma)$. Estudou-se ainda o limite $\gamma = 3$, cuja transição de fase é de ordem infinita e surge para $K_c = 0$. Estes resultados serão mostrados nas subsecções seguintes.

3.2.1 Campos aleatórios com magnitude constante

Considerando campos aleatórios com magnitude constante, cuja distribuição está definida na Eq. (3.27), a Eq. (3.25) é reescrita

$$r = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_1^\infty dq \frac{qP(q)}{\langle q \rangle} \frac{Kqr + h \cos \phi}{\sqrt{(Kqr + h \cos \phi)^2 + h^2 \sin^2 \phi + 1 + 1}}, \quad (3.48)$$

com $P(q)$ de acordo com a Eq. (3.46), para $\gamma > 2$. Fazendo uma expansão de Taylor na vizinhança de K_c ($r \ll 1$), obtém-se

$$r = K \frac{\langle q^2 \rangle}{\langle q \rangle} u(h) r + K^3 \frac{\langle q^4 \rangle}{\langle q \rangle} v(h) \frac{r^3}{6} + O(r^5), \quad (3.49)$$

onde

$$\langle q^n \rangle = \int_1^\infty q^n P(q) dq \quad (3.50)$$

corresponde ao momento de ordem n e as funções $u(h)$ e $v(h)$ estão definidas nas Eqs. (3.33) e (3.34), respetivamente. Dados os limites de convergência do quarto momento, esta expansão

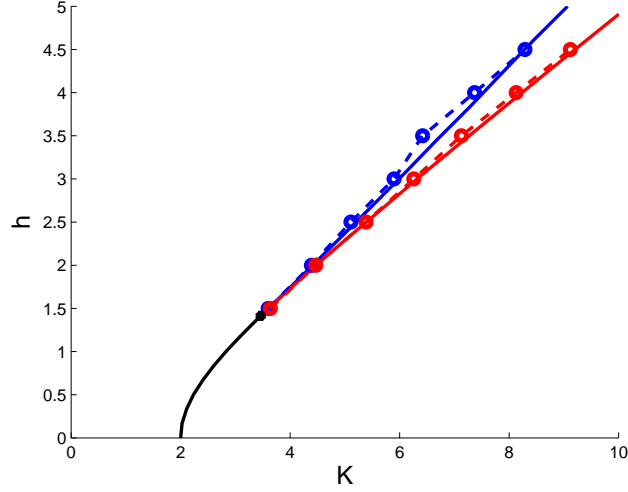


Figura 3.9: Comparação de resultados numéricos da simulação realizada (pontos e curvas a tracejado) com as soluções numéricas da Eq. (3.28) (curvas a azul e a vermelho). Os resultados destas simulações foram obtidos pela Dr. Sooyeon Yoon.

de Taylor só é válida no intervalo $\gamma > 5$. Assim, do primeiro termo da expansão, deduz-se o valor crítico da constante de acoplamento,

$$K_c = \frac{\langle q \rangle}{\langle q^2 \rangle} \frac{1}{u(h)}, \quad (3.51)$$

que se reduz à Eq. (3.47), para $h = 0$ (e quando se considera uma distribuição Lorentziana das frequências naturais na Eq. (2.15)). Do termo cúbico obtém-se o comportamento crítico, onde a Eq. (3.49) apresenta as soluções $r = 0$ para $K < K_c$ e

$$r = 2(h^2 + 1) \sqrt{\frac{2\langle q^2 \rangle}{K^3 \langle q^4 \rangle (2 - h^2)}} (K - K_c)^{1/2}, \quad (3.52)$$

para $K > K_c$, que por sua vez é real para

$$\frac{K - K_c}{2 - h^2} > 0, \quad (3.53)$$

uma vez que $\langle q^n \rangle \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Similarmente ao modelo de Kuramoto num grafo completo e na presença de campos aleatórios com magnitude constante, numa rede SF com expoente $\gamma > 5$, a transição de fase é de segunda ordem para $h < \sqrt{2}$ e de primeira ordem para $h > \sqrt{2}$. Na Fig. 3.11, podemos observar este resultado para uma rede SF com $\gamma = 6$ e para os campos $h = 0, 1, 3$, onde as curvas foram obtidas a partir das soluções numéricas da Eq. (3.48). Verifica-se que para $h = 0$ e $h = 1$ ($h < \sqrt{2}$) a transição é contínua; para $h = 3$ ($h > \sqrt{2}$), por sua vez, observa-se um ciclo de histerese, como o esperado para uma transição fase de primeira ordem. Graficamente, também se verifica que K_c aumenta com h (efeito de desordem do campo).

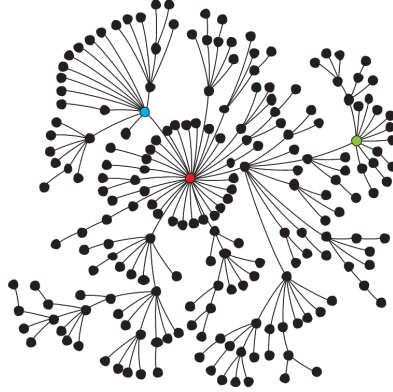


Figura 3.10: Representação de uma rede *scale-free*. As cores presentes na rede indicam os nodos com maior número de ligações: $q = 33$ (vermelho); $q = 12$ (azul); $q = 11$ (verde). Figura adaptada de [28].

Considerando agora o intervalo $2 < \gamma < 5$, com a exceção de $\gamma = 3$ que será considerado mais adiante, é conveniente reescrever a Eq. (3.48) na forma

$$r = \int_1^\infty \frac{P(q) q}{\langle q \rangle} G_0(Kqr) dq, \quad (3.54)$$

com

$$G_0(Kqr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Kqr + h \cos(\phi)}{\sqrt{(Kqr + h \cos(\phi))^2 + h^2 \sin^2(\phi) + 1}} d\phi. \quad (3.55)$$

Neste caso, integra-se duas vezes por partes o integral até se obter um termo convergente no intervalo de γ considerado. Para facilitar esta análise, introduz-se a mudança de variável $x = Kqr$, obtendo-se

$$r = \frac{C x_0^{\gamma-2}}{\langle q \rangle} \left(-\frac{G_0(x_0) x_0^{-\gamma+2}}{2-\gamma} + \frac{G'_0(x_0) x_0^{-\gamma+3}}{(2-\gamma)(3-\gamma)} + \frac{1}{(2-\gamma)(3-\gamma)} \int_{x_0}^\infty G'_0 x^{-\gamma+3} dx \right), \quad (3.56)$$

sendo $x_0 = Kr$ e C a constante de normalização de $P(q)$, definida por

$$C = \frac{1}{\int_{q_0}^\infty dq q^{-\gamma}}. \quad (3.57)$$

Na vizinhança de K_c tem-se $x_0 \ll 1$, pelo que os termos $G_0(x_0)$ e $G'_0(x_0)$ podem ser obtidos a partir das expansões de Taylor,

$$\begin{aligned} G_0(x_0) &= u(h) x_0 + \frac{v(h)}{6} x_0^3 + O(x_0^5) \\ G'_0(x_0) &= u(h) + \frac{v(h)}{2} x_0^2 + O(x_0^4), \end{aligned} \quad (3.58)$$

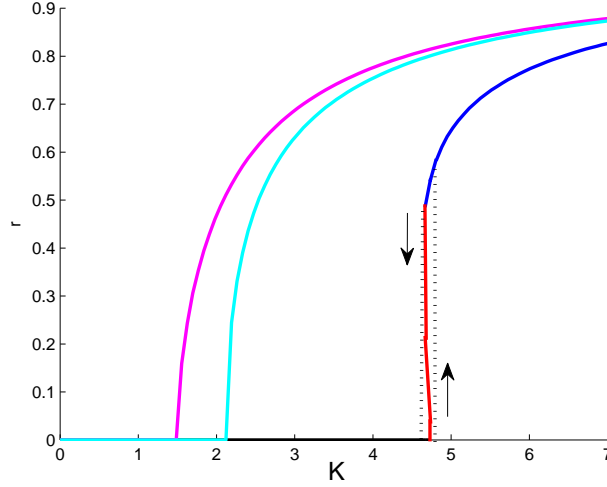


Figura 3.11: Parâmetro de ordem r em função do acoplamento K do modelo de Kuramoto numa rede SF com $\gamma = 6$ e na presença de campos aleatórios com magnitudes: $h = 0$ (curva a rosa), $h = 1$ (curva a azul claro) e 3 (curvas a prato, a vermelho e a azul). As curvas da figura foram obtidas a partir das soluções numéricas da Eq. (3.48). Verifica-se que para $h = 3$ a transição de fase é de primeira ordem, o que se conclui da presença do ciclo de histerese: o sistema salta de um estado dessincronizado (linha a preto) para um estado sincronizado (curva a azul escuro). As linhas pretas a tracejado definem os limites do ciclo de histerese. Para $h = 0$ e $h = 1$, as transições de fase são de segunda ordem e ocorrem para um K_c definido na Eq. (3.51).

com $u(h)$ e $v(h)$ definidos nas Eq. (3.33) e (3.34), respetivamente. O integral, por sua vez, pode ser separado em

$$\int_{x_0}^{\infty} G_0'' x^{-\gamma+3} dx = \int_0^{\infty} G_0'' x^{-\gamma+3} dx - \int_0^{x_0} G_0'' x^{-\gamma+3} dx. \quad (3.59)$$

No intervalo de γ considerado ($2 < \gamma < 5$), o primeiro termo do lado direito desta equação, resulta numa constante dependente da magnitude do campo. No segundo termo, por sua vez, pode ser efetuada uma expansão de Taylor de $G_0''(x)$, uma vez que no intervalo $[0, x_0]$, tem-se $x \ll 1$. Daqui resulta

$$\int_{x_0}^{\infty} G_0'' x^{-\gamma+3} dx = \int_0^{\infty} G_0'' x^{-\gamma+3} dx - \frac{v(h) x_0^{-\gamma+5}}{\gamma - 5}. \quad (3.60)$$

Substituindo todas as expansões de Taylor efetuadas e este último resultado na Eq. (3.56), obtém-se

$$r = \frac{C}{\langle q \rangle} \left(\frac{u(h)}{\gamma - 3} (Kr) + \frac{v(h)}{6(\gamma - 5)} (Kr)^3 + \frac{(Kr)^{\gamma-2}}{(2-\gamma)(3-\gamma)} \int_0^{\infty} G_0''(x) x^{-\gamma+3} dx \right). \quad (3.61)$$

Para $\gamma > 5$ e na vizinhança de $K = K_c$, o termo r é superior a $r^{\gamma-2}$, pelo que se considera $r^{\gamma-2}$ uma correção de ordem superior que pode ser desprezada. Substituindo na Eq. (3.61),

os valores

$$\langle q^2 \rangle = \frac{C}{\gamma - 3} \quad (3.62)$$

e

$$\langle q^4 \rangle = \frac{C}{\gamma - 5}, \quad (3.63)$$

obtém-se a Eq. (3.32).

Para $3 < \gamma < 5$, o último termo da Eq. (3.61), $r^{-\gamma+3}$, é superior a r^3 , pelo que a equação é rescrita

$$r \sim \frac{C}{\langle q \rangle} \left[\frac{u(h)}{\gamma - 3} (Kr) + \frac{(Kr)^{\gamma-2}}{(2-\gamma)(3-\gamma)} \int_0^\infty G_0''(x) x^{-\gamma+3} dx \right] \quad (3.64)$$

e apresenta as soluções: $r = 0$ para $K < K_c$ e

$$r = \left[\frac{\langle q \rangle (2-\gamma)}{\langle q^2 \rangle K_c K^{\gamma-2} \int_0^\infty G_0''(x) x^{-\gamma+3} dx} \right]^{1/(\gamma-3)} (K - K_c)^{1/(\gamma-3)}, \quad (3.65)$$

para $K > K_c$, com K_c definido na Eq. (3.51). Verifica-se que a solução não nula é sempre real, indicando que a transição de fase é de segunda ordem e apresenta o expoente crítico $\beta = 1/(\gamma - 3)$. Este resultado vai ao encontro do resultado encontrado em [12], para $h = 0$. Dado este intervalo de γ , tem-se $\beta > 1/2$, pelo que a transição de fase vai sendo mais “suave” à medida que γ diminui.

Considerando-se agora o caso $2 < \gamma < 3$, tem-se como termo dominante o último termo da Eq. (3.61), ficando

$$r \sim \frac{C}{\langle q \rangle} \frac{(Kr)^{\gamma-2}}{(2-\gamma)(3-\gamma)} \int_0^\infty G_0''(x) x^{-\gamma+3} dx, \quad (3.66)$$

que apresenta as soluções $r = 0$ e

$$r = \left[\frac{\langle q \rangle (2-\gamma)(3-\gamma)}{C \int_0^\infty G_0''(x) x^{-\gamma+3} dx} \right]^{1/(\gamma-3)} K^{(2-\gamma)/(\gamma-3)}, \quad (3.67)$$

que é sempre real para $K > 0$, pelo que ocorre uma transição de fase de segunda ordem para $K_c = 0$, cujo expoente crítico é $\beta = (2-\gamma)/(\gamma-3)$. Neste intervalo de γ , o expoente crítico cresce de 0 até infinito.

Nas Fig. 3.12 (a) e (b) podemos observar o comportamento do parâmetro de ordem r em função do acoplamento K , para uma rede SF com (a) $\gamma = 4$ e com (b) $\gamma = 2.5$, na presença dos campos aleatórios com magnitude $h = 0, 1, 3$, onde as curvas foram obtidas a partir das soluções numéricas da Eq. (3.54). Observa-se que para $h > \sqrt{2}$, o comportamento é qualitativamente o mesmo que $h < \sqrt{2}$ e que o valor de K_c diminui com a diminuição de γ . Isto deve-se ao facto da probabilidade de existirem nodos altamente conectados, que facilitam a sincronização, aumentar à medida que γ diminui. Este resultado pode ser mostrado na substituição de $\langle q^2 \rangle$ (definido na Eq. (3.62)) e de $\langle q \rangle = C/(\gamma - 2)$ na Eq. (3.51), resultando na expressão da constante de acoplamento crítico em função de γ ,

$$K_c = \frac{\gamma - 3}{\gamma - 2} \frac{1}{u(h)}. \quad (3.68)$$

Nesta forma pode-se concluir que K_c diminui à medida que se faz diminuir $\gamma \geq 3$. Na Fig. 3.12 (a) verifica-se que K_c aumenta com h , resultado que surge do efeito de desordem provocado pelo campo. Na Fig. 3.12 (b), como era de esperar, a transição de fase de segunda ordem ocorre para $K_c = 0$, independentemente do valor de h . Contudo, os osciladores vão-se sincronizando mais dificilmente à medida que h aumenta (para um mesmo K , tem-se $r(h_1) > r(h_2)$ se $h_1 < h_2$).

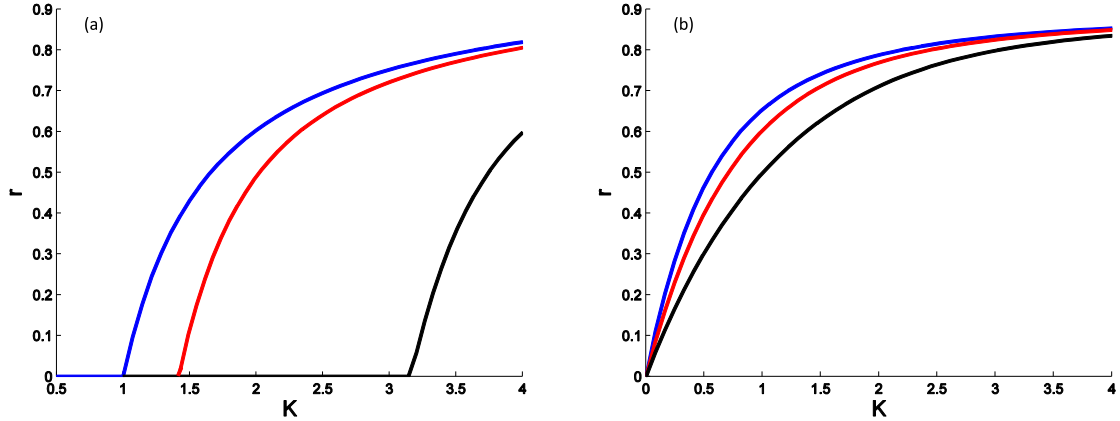


Figura 3.12: Parâmetro de ordem r em função do acoplamento K do modelo de Kuramoto numa rede SF com (a) $\gamma = 4$ e (b) $\gamma = 2.5$, e na presença de campos aleatórios com magnitude $h = 0$ (curva a azul), $h = 1$ (curva a vermelho) e $h = 3$ (curva a preto). Verifica-se que a transição de fase é de segunda ordem independentemente do valor de h e de γ considerados. Em (a) o K_c está definido na Eq. (3.51); em (b) tem-se $K_c = 0$.

Os diagramas de fases do modelo de Kuramoto numa rede SF e na presença de campos aleatórios com magnitude constante podem ser observados nas Fig. 3.13 (a) e (b), para os expoentes $\gamma = 6$ e $\gamma = 4$, respetivamente. Na Fig. 3.13 (a) o diagrama de fases apresenta-se de acordo com a transição de fase de primeira ordem encontrada para $h > \sqrt{2}$. Comparativamente ao diagrama de fases do modelo de Kuramoto num grafo completo e na presença de campos aleatórios com magnitude constante, tem-se uma região II menor. A menor área é uma outra representação daquilo que se pode ver na Fig. 3.11 (comparar as Figs. 3.4 (b) e 3.11). Verifica-se assim que a alteração da topologia faz com que a região da histerese seja menor. Na Fig. 3.13 (b), por sua vez, o diagrama de fases é típico de uma transição de fase contínua. Os pontos pretos correspondem às soluções numéricas da Eq. (3.48), para um dado h e para $\gamma = 4$, e a curva teórica foi obtida a partir da Eq. (3.51). Neste diagrama de fases observa-se uma relação de linearidade entre h e K_c , para valores altos do campo. De facto, para $h \rightarrow \infty$, tem-se

$$u(h) \rightarrow h + \frac{1}{2h} - \frac{1}{8h^3} + \dots, \quad (3.69)$$

pelo que a Eq. (3.51) fica

$$K_c \sim \frac{2\langle q \rangle}{\langle q^2 \rangle} h. \quad (3.70)$$

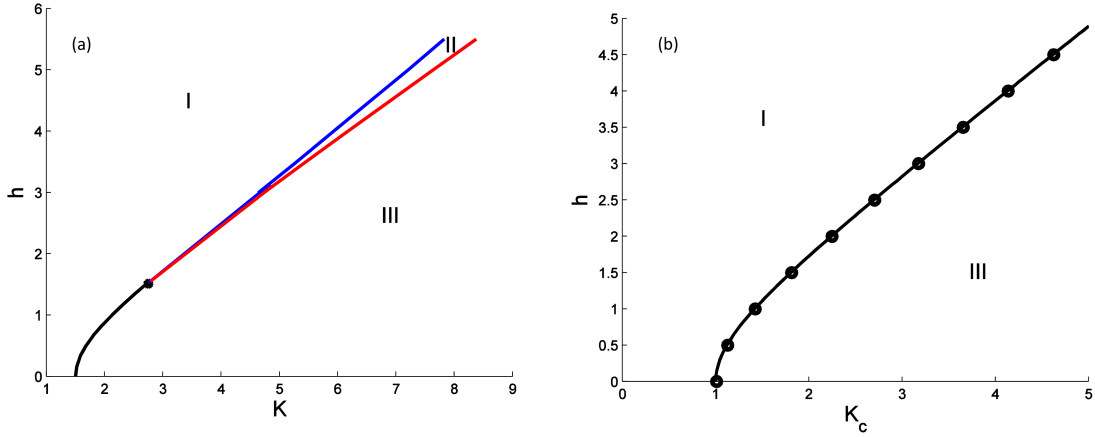


Figura 3.13: Diagramas de fases do modelo de Kuramoto numa rede SF e na presença de campos aleatórios com magnitude constante. (a) Rede SF com $\gamma = 6$: a linha a preto corresponde a uma transição de fase de segunda ordem que ocorre para $h < \sqrt{2}$. O ponto $h = \sqrt{2}$ constitui um ponto tricrítico (ponto a preto), a partir do qual surge a transição de fase de primeira ordem e, conseqüentemente, os dois valores críticos: K_{c1} (linha a azul) e K_{c2} (linha a vermelho). No diagrama de fases podemos visualizar as regiões I, II e III, correspondentes ao estado dessincronizado, à região da histerese e ao estado sincronizado, respetivamente. (b) Rede SF com $\gamma = 4$: diagrama de fases típico para uma transição de fase de segunda ordem. Os pontos pretos resultam da solução numérica da Eq. (3.48) e a curva teórica foi obtida a partir da Eq. (3.51). Verifica-se que K_c aumenta com h e que para $h \rightarrow \infty$, existe uma relação de linearidade no diagrama de fases.

Viu-se que para o intervalo $3 < \gamma < 5$, tem-se $\beta > 1/2$, pelo que é de esperar que para $\gamma = 3$ a transição de fase seja a mais “suave” de todas ($\beta \rightarrow \infty$), i.e., seja de ordem infinita. Este resultado pode ser deduzido a partir da Eq. (3.54), onde para $\gamma = 3$ se obtém

$$r = \frac{C}{\langle q \rangle} \left[u(h)Kr - \frac{v(h)(Kr)^3}{12} - u(h)Kr \ln(Kr) - Kr \int_0^\infty G_0''(x) \ln(x) dx \right], \quad (3.71)$$

cujo terceiro termo é dominante. Assim, a equação resultante apresenta as soluções $r = 0$ e

$$r = \frac{1}{K} \exp\left(-\frac{\langle q \rangle}{Cu(h)K}\right), \quad (3.72)$$

que é sempre positiva e nunca diverge para qualquer derivada em K , pelo que se conclui que estamos perante uma transição de fase de ordem infinita, que ocorre para $K_c = 0$. Vimos no Capítulo 2 que nodos com maior número de ligações têm uma contribuição mais significativa para a sincronização, o que se espera que r aumente com o aumento de $\langle q \rangle$, visto aumentar $\langle q \rangle$ é similar a aumentar o acoplamento K da rede. Apesar deste comportamento não ser óbvio na Eq. (3.72), ele é facilmente deduzido tendo em conta que

$$C = 2q_0^2 \quad (3.73)$$

e

$$\langle q \rangle = 2q_0, \quad (3.74)$$

pelo que a Eq. (3.72) fica

$$r = \frac{2}{K\langle q \rangle} \exp\left(-\frac{2}{\langle q \rangle u(h)K}\right). \quad (3.75)$$

Nesta forma podemos afirmar que o grau de sincronização aumentará para um número maior de nodos interligados. Note-se que esta relação entre r e $\langle q \rangle$ verifica-se em todas as topologias de rede SF consideradas.

3.2.2 Campos aleatórios gaussianos

Considerando campos aleatórios gaussianos, cuja distribuição está definida na Eq (3.39), a Eq. (3.25) é reescrita

$$r = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty dh h e^{-h^2/2\sigma^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_1^\infty dq \frac{qP(q)}{\langle q \rangle} \frac{Kqr + h \cos \phi}{\sqrt{(Kqr + h \cos \phi)^2 + h^2 \sin^2 \phi + 1 + 1}}, \quad (3.76)$$

com $P(q)$ de acordo com a Eq. (3.46). Seguindo o mesmo método anteriormente usado, a expansão de Taylor, válida no intervalo $\gamma > 5$, é dada por

$$r = \frac{Kr \langle q^2 \rangle}{\sigma^2 \langle q \rangle} \int_0^\infty dh h e^{-h^2/2\sigma^2} u(h) + \frac{(Kr)^3 \langle q^4 \rangle}{6\sigma^2 \langle q \rangle} \int_0^\infty dh h e^{-h^2/2\sigma^2} v(h) + O(r^5), \quad (3.77)$$

com $u(h)$ e $v(h)$ definidos nas Eqs. (3.33) e (3.34), respetivamente. Do primeiro termo da expansão, obtemos o valor de K_c ,

$$K_c = \frac{\langle q \rangle}{\langle q^2 \rangle} \frac{\sigma^2}{\int_0^\infty dh h e^{-h^2/2\sigma^2} u(h)} = \frac{\gamma - 3}{\gamma - 2} \frac{\sigma^2}{\int_0^\infty dh h e^{-h^2/2\sigma^2} u(h)}, \quad (3.78)$$

que é válido para $\gamma > 3$. A Eq. (3.77), por sua vez, apresenta as soluções: $r = 0$ para $K < K_c$ e

$$r = \sqrt{\frac{-6\langle q \rangle \sigma^2}{K_c K^3 \langle q^4 \rangle \int_0^\infty dh h e^{-h^2/2\sigma^2} v(h)}} (K - K_c)^{1/2}, \quad (3.79)$$

para $K > K_c$, com K_c definido na Eq. (3.78). Fazendo uma análise da solução não nula, conclui-se que esta é real no intervalo de K considerado, o que corresponde a um transição de fase de segunda ordem, cujo expoente crítico é $\beta = 1/2$. Tal como no modelo de Kuramoto num grafo completo, a presença de campos aleatórios gaussianos impede o surgir da transição de fase de primeira ordem, encontrada para o caso de campos aleatórios com magnitude constante. A semelhança deste comportamento com o encontrado no grafo completo deve-se ao facto destas duas topologias serem similares entre si para $\gamma > 5$. Na Fig. 3.14 podemos observar o parâmetro de ordem r em função do acoplamento K para uma rede SF com $\gamma = 6$ e considerando campos aleatórios gaussianos com $\sigma \sim 0, 0.8, 1.6$, correspondentes aos valores médios de campo $\langle h \rangle = 0, 1, 2$, respetivamente. As curvas foram obtidas a partir das soluções numéricas da Eq. (3.76). Verifica-se que para $\langle h \rangle = 2$ já não ocorre uma transição de fase de primeira ordem e que K_c aumenta com $\langle h \rangle$ (efeito de desordem).

Para $2 < \gamma < 5$, volta a ser feita a integração por partes do integral

$$r = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty dh h e^{-h^2/2\sigma^2} \int_1^\infty dq \frac{P(q)q}{\langle q \rangle} G_0(Kqr), \quad (3.80)$$

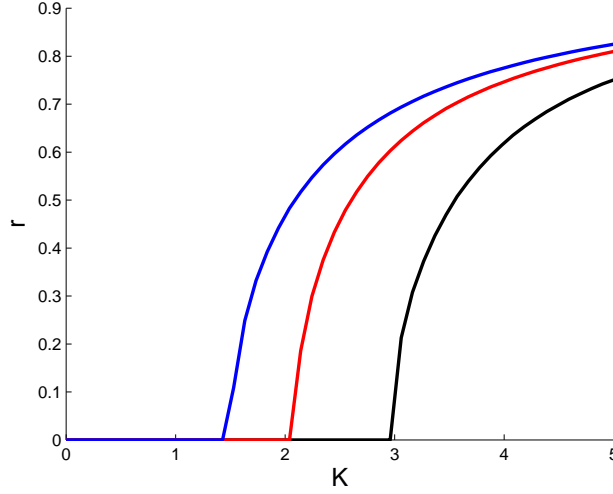


Figura 3.14: Parâmetro de ordem r em função do acoplamento K numa rede SF com $\gamma = 6$ e na presença de um campo aleatório gaussiano com valores $\langle h \rangle = 0$, $\sigma = 0$ (curva a azul), $\langle h \rangle = 1$, $\sigma \sim 0.8$ (curva a vermelho), $\langle h \rangle = 2$, $\sigma \sim 1.8$ (curva a preto). Para estes parâmetros de campo e de rede, a transição de fase é de segunda ordem e ocorre para um K_c de acordo com a Eq. (3.78). As curvas foram obtidas a partir da resolução numérica da Eq. (3.76).

com $G_0(Kqr)$ definido na Eq. (3.55) e obtém-se

$$r = \frac{C}{\sigma^2 \langle q \rangle} \int_0^\infty dh h e^{-h^2/2\sigma^2} \left[\frac{u(h)}{\gamma-3} (Kr) + \frac{v(h)}{6(\gamma-5)} (Kr)^3 + \frac{(Kr)^{\gamma-2}}{(2-\gamma)(3-\gamma)} \int_0^\infty G_0''(x) x^{-\gamma+3} dx \right], \quad (3.81)$$

sendo $x = Kqr$ e C definido na Eq. (3.57). Viu-se na secção anterior que certos termos desta equação constituem uma aproximação de ordem superior, podendo assim ser desprezados, e que a escolha dos termos dominantes depende exclusivamente do valor de γ . Deste modo, obtemos os mesmos resultados da secção anterior, mas agora com o integral em h . Assim, as soluções não nulas ($K > K_c$) são:

$$r = \left[\frac{\langle q \rangle \sigma^2 (2-\gamma)}{\langle q^2 \rangle K_c K^{\gamma-2} \int_0^\infty dh h e^{-h^2/2\sigma^2} \int_0^\infty G_0''(x) x^{-\gamma+3} dx} \right]^{1/(\gamma-3)} (K - K_c)^{1/(\gamma-3)} \quad (3.82)$$

para $3 < \gamma < 5$ e K_c definido na Eq. (3.78), e

$$r = \left[\frac{\langle q \rangle \sigma^2 (2-\gamma)(3-\gamma)}{C \int_0^\infty dh h e^{-h^2/2\sigma^2} \int_0^\infty G_0''(x) x^{-\gamma+3} dx} \right]^{1/(\gamma-3)} K^{(2-\gamma)/(\gamma-3)}, \quad (3.83)$$

para $2 < \gamma < 3$ e $K_c = 0$. Para $\gamma = 3$, por sua vez, a solução não nula é dada por

$$r = \frac{2}{K \langle q \rangle} \exp \left[-\frac{2}{\langle q \rangle \int_0^\infty dh h e^{-h^2/2\sigma^2} u(h) K} \right]. \quad (3.84)$$

Conclui-se assim que para $2 < \gamma < 5$, a presença de campos aleatórios com magnitude gaussiana não altera os expoentes críticos encontrados no modelo de Kuramoto com campos aleatórios de magnitude constante.

Na Fig. 3.15, podemos observar o parâmetro de ordem r em função do acoplamento K para uma rede SF com (a) $\gamma = 4$ e (b) $\gamma = 2.5$, e na presença dos campos aleatórios gaussianos com $\sigma \sim 0, 0.8, 1.6$, onde as curvas foram obtidas a partir das soluções numéricas da Eq. (3.80). Verifica-se que a transição de fase é de segunda ordem independentemente dos parâmetros do campo considerados e que o valor de K_c diminui à medida que se faz diminuir γ (ver Eq. (3.78)). Para $\gamma = 2.5$, tal como se verifica para o caso do campo aleatório com magnitude constante, tem-se $r(K, h_1) < r(K, h_2)$ para $h_1 > h_2$, uma vez que a sincronização dos osciladores é dificultada pelo efeito de desordem provocado pelo campo.

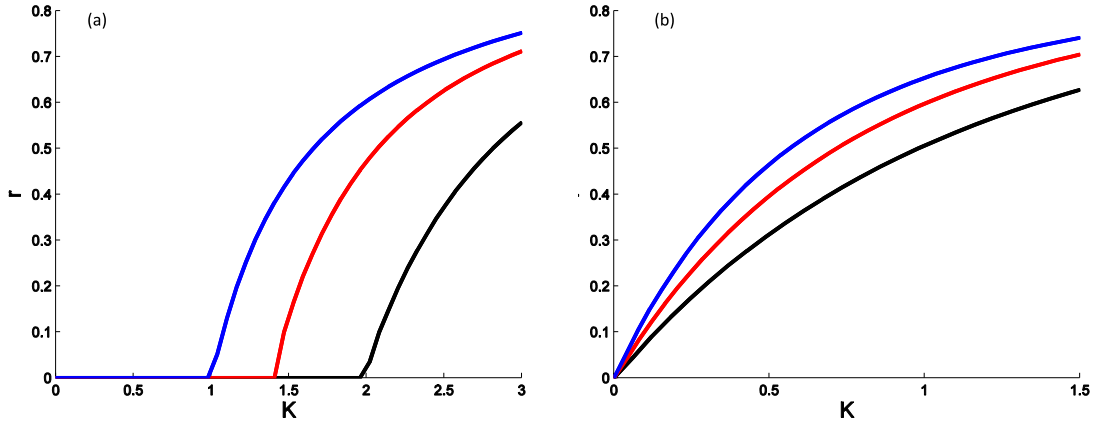


Figura 3.15: Parâmetro de ordem r em função do acoplamento K numa rede SF com (a) $\gamma = 4$ e (b) $\gamma = 2.5$, e na presença de campos aleatórios gaussianos com valores $\langle h \rangle = 0$, $\sigma = 0$ (curva a azul), $\langle h \rangle = 1$, $\sigma \sim 0.8$ (curva a vermelho), $\langle h \rangle = 2$, $\sigma \sim 1.8$ (curva preta). As curvas foram obtidas a partir das soluções numéricas da Eq. (3.80). Verifica-se que para estes parâmetros de rede e de campo a transição de fase é de segunda ordem. Em (a) a transição de fase ocorre para K_c de acordo com a Eq. (3.78) e em (b) tem-se $K_c = 0$.

Os diagramas de fases do modelo de Kuramoto numa rede SF e na presença de campos aleatórios gaussianos podem ser visualizados na Fig. 3.16, para uma rede SF com (a) $\gamma = 6$ e (b) com $\gamma = 4.5$. Os pontos pretos em (a) e (b) foram obtidos a partir das soluções numéricas da Eq. (3.76) e da Eq. (3.80), respetivamente, para um dado σ , e as curvas teóricas obtidas a partir da Eq. (3.78). Como era de esperar, K_c , K_{c1} e K_{c2} aumentam com σ , uma vez que se tem $\sigma \propto \langle h \rangle$, é necessário um valor maior do acoplamento para contrariar o efeito de desordem provocado pelo campo. Na Fig. 3.16 (b), observa-se uma relação de linearidade no limite $h \rightarrow \infty$, pois dada a Eq. (3.44), obtém-se, $K_c \propto \sigma$. Comparativamente ao diagrama de fases do modelo de Kuramoto num grafo completo e na presença de campos aleatórios gaussianos, os declives são maiores para o caso de rede SF, pois de acordo com a Eq. (3.78), os declives dependem de γ e diminuem à medida que γ diminui. Este resultado é devido à existência de *hubs* nesta topologia, que facilitam a sincronização, pelo que os valores de K_c encontrados para cada σ são menores do que no caso do grafo completo.

Em suma, verifica-se que a presença de campos aleatórios gaussianos inibem o surgir de uma transição de fase de primeira ordem, encontrada para uma rede SF com $\gamma > 5$ e na presença de campos aleatórios com magnitude constante. Para $2 < \gamma < 5$, a presença de campos aleatórios gaussianos não altera o valor dos expoentes críticos. Também se verifica que numa rede SF, o estado sincronizado surge mais facilmente do que num grafo completo,

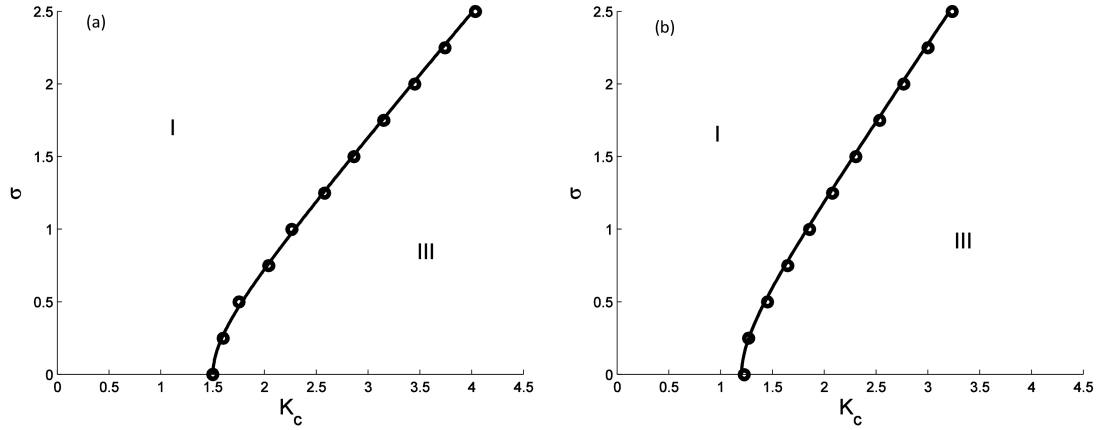


Figura 3.16: Diagrama de fase do modelo de Kuramoto numa rede SF com (a) $\gamma = 6$, (b) $\gamma = 4.5$, e na presença de campos aleatórios gaussianos. Os pontos pretos em (a) e em (b) correspondem às soluções numéricas das Eqs. (3.76) e (3.80), respetivamente, e as curvas teóricas (preto) foram obtidas a partir da Eq. (3.78). Nos dois diagramas de fases verifica-se que K_c aumenta com σ . Para $\sigma \rightarrow \infty$ observa-se uma relação de linearidade.

uma vez que na primeira topologia existe uma maior diversidade nas ligações. À medida que γ diminui, os maiores *hubs* na rede terão mais ligações, pelo que o estado sincronizado também surge mais facilmente à medida que γ diminui. Segue-se o capítulo das conclusões, onde serão referidos e discutidos os resultados obtidos.

Capítulo 4

Conclusões

Neste trabalho foi estudado o modelo de Kuramoto num grafo completo e numa rede *scale-free* (SF), na presença de campos aleatórios com magnitude constante e gaussiana.

Começou-se por abordar o fenómeno da sincronização e introduziu-se o modelo de Kuramoto: o modelo de excelência para o estudo da sincronização num sistema de N osciladores fracamente acoplados. Na sua forma original, Kuramoto considerou um grafo completo, contudo, em muitos sistemas reais, os osciladores podem formar entre si uma rede com determinada estrutura, diferente da estrutura de grafo completo. Muitos desses sistemas reais apresentam uma arquitetura de rede caracterizada pela presença de *hubs*, *loops* e propriedades *small-world*. Daqui resulta a motivação de resolver o modelo de Kuramoto numa rede SF, de forma a compreender o fenómeno da sincronização em redes mais próximas dos sistemas reais. Para se considerar outro tipo de heterogeneidade no sistema de osciladores, diferente da existente nas ligações dos nodos de uma rede SF, introduziu-se no modelo de Kuramoto a presença de campos aleatórios, que originam um efeito de “*pinning*” aleatório. A contribuição desses campos aleatórios já foi considerada no modelo de Ising [16], um modelo matemático que descreve o emergir espontâneo de ordem de um estado paramagnético para um estado ferromagnético ordenado.

No capítulo 2, abordou-se o modelo de Kuramoto. Começou-se por descrever o modelo na sua forma original, onde cada oscilador está ligado a todos os outros e, em seguida, foi abordado o modelo de Kuramoto para uma arquitetura diferente do grafo completo, onde cada oscilador i é definido como sendo um nodo na rede, que está ligado a q_i outros nodos, sendo estes q_i nodos os únicos que interagem com o oscilador i . Para resolver o modelo para uma família de $N \rightarrow \infty$ osciladores, dispostos numa rede complexa, considerou-se uma aproximação do tipo “*annealed network*”, que substitui a rede complexa por um grafo completo “pesado”, em que os “pesos” das ligações correspondem ao número de ligações do par de nodos em causa. Por fim, foram introduzidos os campos aleatórios de magnitude h e de direção ϕ e foi deduzido o conjunto de equações diferenciais do modelo de Kuramoto numa rede complexa e na presença desses campos.

No capítulo 3 foi estudado o comportamento crítico do modelo de Kuramoto para as duas topologias de rede: grafo completo e rede SF, e na presença dos campos aleatórios: de magnitude constante e gaussiana. Para tal, considerou-se o método Ott-Antonsen, que permite a resolução do modelo de Kuramoto. Através desse método, obteve-se uma expressão para o parâmetro de ordem no limite estacionário, tendo em conta uma distribuição Lorentziana das frequências naturais e uma distribuição uniforme das direções dos campos. De forma a

estudar o comportamento crítico do modelo nas arquiteturas de rede referidas e na presença dos campos aleatórios, estudou-se a expansão de Taylor do parâmetro de ordem deduzido, na vizinhança de K_c . Assim, na secção 1 deste capítulo considerou-se a topologia de grafo completo, cujos resultados numéricos foram comparados a resultados de simulações na secção 3. Na secção 2, considerou-se uma rede SF.

Os principais resultados do presente trabalho são:

- No modelo de Kuramoto num grafo completo e na ausência de campos aleatórios, confirmou-se que a transição de fase do estado dessincronizado para o estado sincronizado é de segunda ordem e ocorre para $K_c = 2$. Na vizinhança desse valor, o parâmetro de ordem assume a forma de $r \sim (K - K_c)^\beta$ com $\beta = 1/2$. Assim, quando $K = K_c$, o grau de sincronização, r , cresce de 0 até 1 segundo a lei de potência referida, na vizinhança de K_c . Este foi o resultado encontrado por Kuramoto no seu paper original [6].
- No modelo de Kuramoto num grafo completo e na presença de campos aleatórios com magnitude constante, ocorre uma transição de fase de segunda ordem para $h < \sqrt{2}$ e uma transição de fase de primeira ordem para $h > \sqrt{2}$. Similarmente ao comportamento encontrado na ausência dos campos, a transição de fase de segunda ordem apresenta o expoente crítico $\beta = 1/2$. A constante de acoplamento crítico, por sua vez, é dada por $K_c = 2\sqrt{h^2 + 1}$. Para a transição de fase de primeira ordem existem dois valores críticos do acoplamento: K_{c1} e K_{c2} , que limitam o ciclo de histerese. No diagrama de fases podemos observar que K_c , K_{c1} e K_{c2} aumentam com h . Este resultado surge do efeito de desordem (“*pinning effect*”) provocado pelo campo, pelo que é necessário um maior acoplamento entre osciladores para compensar esse efeito e induzir assim a sincronização, resultando em valores de K_c maiores. Estes dois tipos de transição de fase também foram encontrados no modelo de Ising num grafo completo e na presença de campos aleatórios com magnitude constante [18, 19].
- No modelo de Kuramoto num grafo completo e na presença de campos aleatórios gaussianos, a transição de fase do estado dessincronizado para o estado sincronizado é de segunda ordem, ocorre para $K_c = \sigma^2 / \int_0^\infty dh h e^{-h^2/2\sigma^2} (2\sqrt{h^2 + 1})^{-1}$ e apresenta o expoente crítico $\beta = 1/2$. Verifica-se que K_c aumenta com o valor de $\langle h \rangle$, pois é necessário um acoplamento maior para contrariar o efeito de desordem provocado pelo campo, e que para $\langle h \rangle > \sqrt{2}$ já não surge uma transição de fase de primeira ordem. Este resultado é similar ao encontrado no modelo de Ising num grafo completo e na presença de campos aleatórios gaussianos, onde se concluiu apenas a existência de transições de fase de segunda ordem [18, 19]. Por outro lado, ao contrário do que acontece no modelo de Ising, em que para $\sigma > \sigma_c$ não existe uma transição de fase, ficando o sistema sempre no estado desordenado independentemente da temperatura, no modelo de Kuramoto não existe σ_c , ou seja, o acoplamento consegue sempre “vencer” o efeito de desordem para um acoplamento suficientemente grande.

Uma vez que a topologia da rede SF depende do expoente γ da lei de potência que define a distribuição das ligações, os resultados que se seguem são divididos para os intervalos: $\gamma > 5$, $3 < \gamma < 5$, $2 < \gamma < 3$ e $\gamma = 3$:

- No modelo de Kuramoto numa rede SF com $\gamma > 5$ e na presença de campos aleatórios com magnitude constante, a transição de fase do estado dessincronizado para o estado

sincronizado é de segunda ordem para $h < \sqrt{2}$ e de primeira ordem para $h > \sqrt{2}$. A transição de fase de segunda ordem ocorre para $K_c = 2\langle q \rangle \sqrt{h^2 + 1} / \langle q^2 \rangle$ e apresenta o expoente crítico $\beta = 1/2$. Para $h > \sqrt{2}$ e comparativamente ao modelo de Kuramoto num grafo completo e na presença de campos aleatórios com magnitude constante, verifica-se que a alteração para uma topologia SF resulta numa região de histerese menor. Na presença de campos aleatórios gaussianos, só ocorre no sistema uma transição de fase de segunda ordem para $K_c = \sigma^2 \langle q \rangle / \langle q^2 \rangle \int_0^\infty dh h e^{-h^2/2\sigma^2} (2\sqrt{h^2 + 1})^{-1}$ e cujo expoente crítico é $\beta = 1/2$. Tal como no modelo de Kuramoto num grafo completo, a presença de campos aleatórios gaussianos impede o surgir de uma transição de fase de primeira ordem, encontrada para o caso de campos aleatórios com magnitude constante. Nesta topologia SF a diversidade do número de ligações facilita a sincronização, pelo que os valores de K_c são menores do que para um grafo completo, onde a diversidade das ligações é nula. Tanto na presença de campos aleatórios com magnitude constante como na presença de campos aleatórios gaussianos, verifica-se que K_c aumenta com o valor de $\langle h \rangle$, pois é necessário um acoplamento maior para contrariar o efeito de desordem provocado pelo campo. Não obstante as pequenas diferenças quantitativas entre a rede SF com $\gamma > 5$ e o grafo completo, verifica-se que qualitativamente as duas topologias dão origem a comportamentos críticos semelhantes. Os resultados aqui referidos são distintos dos encontrados no modelo de Ising numa rede SF com $\gamma > 5$, onde na presença de campos aleatórios gaussianos se verifica uma transição de fase de primeira ordem [7].

- No modelo de Kuramoto numa rede SF com $3 < \gamma < 5$, a transição de fase do modelo de Kuramoto do estado dessincronizado para o estado sincronizado é de segunda ordem e apresenta o expoente crítico $\beta = 1/(\gamma - 3)$, independentemente dos campos aleatórios considerados. Tendo em conta o intervalo de γ , tem-se $\beta > 1/2$, o que significa que quanto maior o expoente, mais “suave” se dá a transição para o estado sincronizado. O valor de K_c , por sua vez, é $K_c = 2\langle q \rangle \sqrt{h^2 + 1} / \langle q^2 \rangle$ na presença de campos aleatórios com magnitude constante e $K_c = \sigma^2 \langle q \rangle / \langle q^2 \rangle \int_0^\infty dh h e^{-h^2/2\sigma^2} (2\sqrt{h^2 + 1})^{-1}$ na presença de campos aleatórios gaussianos, similarmente ao caso $\gamma > 5$. Comparativamente à topologia apresentada anteriormente, a diversidade do número de ligações é maior, pelo que a sincronização ocorre mais facilmente, o que se conclui a partir da expressão da constante de acoplamento crítico em função de γ . Verifica-se assim que K_c diminui à medida que γ diminui.
- No modelo de Kuramoto numa rede SF com $2 < \gamma < 3$, a transição de fase do estado dessincronizado para o estado sincronizado é de segunda ordem, ocorre para $K_c = 0$ e apresenta o expoente crítico $\beta = (2 - \gamma) / (\gamma - 3)$, independentemente dos campos aleatórios considerados. Neste caso tem-se β a crescer de 0 até infinito. Nesta topologia surge a presença de *hubs*, pelo que a sincronização aqui surge mais facilmente do que nas topologias anteriores. Os resultados aqui referidos são distintos dos encontrados no modelo de Ising numa rede SF com γ neste intervalo, onde na presença de campos aleatórios gaussianos se verifica uma transição de fase de primeira ordem [7].
- No modelo de Kuramoto numa rede SF com $\gamma = 3$, a transição de fase é de ordem infinita e ocorre para $K_c = 0$, independentemente dos campos aleatórios considerados. Este resultado é distinto do encontrado no modelo de Ising, onde na presença de campos aleatórios gaussianos verifica-se uma transição de fase de primeira ordem [7].

Note-se que na ausência de campos aleatórios, o comportamento do modelo de Ising era similar ao modelo de Kuramoto, de onde se poderia supor que pertencessem à mesma classe de universalidade. Porém a consideração de campos aleatórios vieram demonstrar que os modelos têm comportamentos distintos. Segue-se a tabela resumo dos resultados obtidos:

h	grafo completo	rede SF			
		$\gamma > 5$	$3 < \gamma < 5$	$2 < \gamma < 3$	$\gamma = 3$
h=0	$r \propto \sqrt{K - K_c}$ $K_c = 2$	$r \propto \sqrt{K - K_c}$ $K_c = \frac{2\langle q \rangle}{\langle q^2 \rangle}$	$r \propto (K - K_c)^{1/(\gamma-3)}$ $K_c = \frac{2\langle q \rangle}{\langle q^2 \rangle}$	$r \propto K^{(2-\gamma)/(\gamma-3)}$ $K_c = 0$	$r \propto \frac{\exp(-1/K)}{K}$ $K_c = 0$
h>0	$r \propto \sqrt{K - K_c}$ $K_c = \frac{1}{u(h)}$ $h_c = \sqrt{2} (*)$	$r \propto \sqrt{K - K_c}$ $K_c = \frac{\langle q \rangle}{\langle q^2 \rangle u(h)}$ $h_c = \sqrt{2} (*)$	$r \propto (K - K_c)^{1/(\gamma-3)}$ $K_c = \frac{\langle q \rangle}{\langle q^2 \rangle u(h)}$	$r \propto K^{(2-\gamma)/(\gamma-3)}$ $K_c = 0$	$r \propto \frac{\exp(-1/K)}{K}$ $K_c = 0$
h_{gauss}	$r \propto \sqrt{K - K_c}$ $K_c = \frac{\sigma^2}{F(\sigma)}$	$r \propto \sqrt{K - K_c}$ $K_c = \frac{\langle q \rangle \sigma^2}{\langle q^2 \rangle F(\sigma)}$	$r \propto (K - K_c)^{1/(\gamma-3)}$ $K_c = \frac{\langle q \rangle \sigma^2}{\langle q^2 \rangle F(\sigma)}$	$r \propto K^{(2-\gamma)/(\gamma-3)}$ $K_c = 0$	$r \propto \frac{\exp(-1/K)}{K}$ $K_c = 0$

Tabela 4.1: Tabela dos resultados: (*) para $h < \sqrt{2}$ tem-se uma transição de fase de segunda ordem e para $h > \sqrt{2}$ uma transição de fase de primeira ordem; $F(\sigma) = \int_0^\infty dh h e^{-h^2/2\sigma^2} u(h)$, com $u(h) = (2\sqrt{h^2 + 1})^{-1}$.

Assim, as conclusões deste trabalho são:

- Nas arquiteturas grafo completo e rede SF com $\gamma > 5$, a presença dos campos aleatórios com magnitude gaussiana impede o surgir de uma transição de fase de primeira ordem, que tinha sido encontrada para campos aleatórios com magnitude constante. Para redes SF com $3 < \gamma < 5$, $2 < \gamma < 3$ e $\gamma = 3$, a distribuição gaussiana da magnitude dos campos não altera os expoentes críticos, pelo que os comportamentos críticos são qualitativamente os mesmos para os dois campos.
- Para cada tipo de topologia de rede K_c aumenta com $\langle h \rangle$, pois é necessário um maior acoplamento para contrariar o efeito de desordem provocado pelo campo.
- Numa rede SF, o valor de K_c diminui à medida que γ diminui, devido ao aparecimento de *hubs* que facilitam a sincronização.
- Numa rede SF, verifica-se que o grau de sincronização aumenta com o número médio de ligações na rede, como era de esperar, uma vez que aumentar $\langle q \rangle$ é similar a aumentar o acoplamento da rede.
- Verifica-se que os resultados teóricos do modelo de Kuramoto num grafo completo e na presença de campos aleatórios com magnitude constante estão de acordo com as simulações do modelo.
- Verifica-se o mesmo comportamento no modelo de Ising e no modelo de Kuramoto para um grafo completo e comportamentos distintos entre os dois modelos quando considerada uma arquitetura de rede SF.

Futuramente, seria interessante considerar campos aleatórios que rodam a diferentes frequências (caso geral) e também o efeito de acoplamentos negativos (anti-sincronia) [34, 35]. Similarmente ao trabalho realizado em [12], também poderá ser estudada a dinâmica de relaxação

(como é que o sistema relaxa para os estados estacionários) do modelo de Kuramoto nas arquiteturas de rede consideradas e na presença dos campos aleatórios referidos.

Bibliografia

- [1] L. M. Pecora and T. L. Carroll, *Physical Review Letters* **64**, 821 (1990).
- [2] C. Liu, D. R. Weaver, S. H. Strogatz, and S. M. Reppert, *Cell* **91**, 855 (1997).
- [3] A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno, and C. Zhou, *Physics Reports* **469**, 93 (2008).
- [4] N. Wiener, *Nonlinear Problems in Random Theory* (The MIT Press, Cambridge, 1966) .
- [5] A. T. Winfree, *Journal of Theoretical Biology* **16**, 15 (1967).
- [6] Y. Kuramoto and I. Nishikawa, *Journal of Statistical Physics* **49**, 569 (1987).
- [7] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. Mendes, *Reviews of Modern Physics* **80**, 1275 (2008).
- [8] R. Albert and A.-L. Barabási, *Reviews of Modern Physics* **74**, 47 (2002).
- [9] D. J. Watts and S. H. Strogatz, *Nature* **393**, 440 (1998).
- [10] A.-L. Barabási and R. Albert, *Science* **286**, 509 (1999).
- [11] S. N. Dorogovtsev and J. F. Mendes, *Advances in Physics* **51**, 1079 (2002).
- [12] S. Yoon, M. S. Sindaci, A. Goltsev, and J. Mendes, *Physical Review E* **91**, 032814 (2015).
- [13] Y. Moreno and A. F. Pacheco, *Europhysics Letters* **68**, 603 (2004).
- [14] D.-S. Lee, *Physical Review E* **72**, 026208 (2005).
- [15] S. H. Strogatz, C. M. Marcus, R. M. Westervelt, and R. E. Mirollo, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **36**, 23 (1989).
- [16] Y. Imry and S.-k. Ma, *Physical Review Letters* **35**, 1399 (1975).
- [17] E. Ising, *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei* **31**, 253 (1925).
- [18] A. Aharony, *Physical Review B* **18**, 3318 (1978).
- [19] T. Schneider and E. Pytte, *Physical Review B* **15**, 1519 (1977).
- [20] H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Oxford University Press, London, 1987) .

- [21] S. H. Strogatz, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **143**, 1 (2000).
- [22] B. Coutinho, A. Goltsev, S. Dorogovtsev, and J. Mendes, *Physical Review E* **87**, 032106 (2013).
- [23] P. Ji, T. K. D. Peron, F. A. Rodrigues, and J. Kurths, *Physical Review E* **90**, 062810 (2014).
- [24] H. Nishimori and G. Ortiz, *Elements of Phase Transitions and Critical Phenomena* (OUP Oxford, 2010).
- [25] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (3rd ed., Oxford University Press, 1996) .
- [26] E. Ott and T. M. Antonsen, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **19**, 023117 (2009).
- [27] L. Basnarkov and V. Urumov, *Physical Review E* **78**, 011113 (2008).
- [28] S. H. Strogatz, *Nature* **410**, 268 (2001).
- [29] M. S. Yeung and S. H. Strogatz, *Physical Review Letters* **82**, 648 (1999).
- [30] P. Ji, T. K. Peron, F. A. Rodrigues, and J. Kurths, *Scientific Reports* **4** (2014).
- [31] X. Hu, S. Boccaletti, W. Huang, X. Zhang, Z. Liu, S. Guan, and C.-H. Lai, *Scientific Reports* **4** (2014).
- [32] O. Perković, K. Dahmen, and J. P. Sethna, *Physical Review Letters* **75**, 4528 (1995).
- [33] J. P. Sethna, K. Dahmen, S. Kartha, J. A. Krumhansl, B. W. Roberts, and J. D. Shore, *Physical Review Letters* **70**, 3347 (1993).
- [34] V. Louzada, N. Araújo, J. Andrade Jr, and H. Herrmann, *Scientific Reports* **3** (2013).
- [35] V. Louzada, N. Araújo, J. Andrade Jr, and H. Herrmann, *Scientific Reports* **2** (2012).