等方性乱流中における粒子間衝突に対する直接数値計算

Direct Numerical Simulation of Inter-Particle Collisions in Homogeneous Isotropic Turbulence

大西　領，(Ryo ONISHI)　（独）海洋研究開発機構 (JAMSTEC)

高橋　桂子 (Keiko TAKAHASHI)　（独）海洋研究開発機構 (JAMSTEC)

1. はじめに

乱流中で微小液滴粒子同士が衝突するという現象は，蒸気発生器，噴霧器，サイクロン分離器などの工業装置内の流れにおいて見られる[(1),(2)]. 加えて，混入粒子による乱流変調に影響を与えることも指摘されており[(3)], 工学上の重要な現象である．宇宙に目を移せば，原始惑星系ガス円盤の中での微粒子（ダスト）の衝突合体成長過程において乱流が大きな役割を果たすと考えられている[(4),(5),(6)]. 目を地球に戻して空を見上げれば，この現象は対流雲中に見られる．雲乱流が雲粒子同士の衝突を促進し，結果として，速やかな降雨開始をもたらすと指摘されてきた[(7),(8),(9),(10)]．乱流による衝突促進効果なしでは，対流雲の中で水滴が半径 10μm 程度から 50μm 程度の大きさにまで急激に成長する現象をうまく説明できないというものである．この乱流衝突説以外にも，大規模な乱流運動による乱流エントレインメント説[(11)], 過飽和領域の非一様説[(12)], 巨大雲凝結核（Giant Cloud Condensate Nuclei, GCCN）説[(13)]などがある．まだ議論は続いているものの，少なくとも乱流衝突が有意な影響を持つという結論に収束しつつある．

上記のような応用を見据えて，乱流衝突頻度を予測するモデルの開発が盛んに行われてきた．ストークス数 $St=\tau_p/\tau_\eta$，τ_p は粒子の緩和時間，τ_η はコルモゴロフ時間）が非常に小さい場合（St<<1）や大きい場合（St>>1）に関しては信頼性の確かめられた理論モデルがある（それぞれ Saffman & Turner (1956)[(14)]と Abrahamson (1975)[(1)]）．しかし，適度な慣性を持つ粒子，つまり St～1，の衝突頻度モデルはまだ開発途上である．特に，慣性粒子が偏在（クラスタリング）するという性質[(15)]がモデル開発を困難にしている．そのクラスタリングが平均衝突頻度を増大させる効果[(16)]は最大で 10 倍以上にも上るため，無視することはできない．さらには，雲乱流もしくは原始惑星系ガス円盤内乱流と言ったとき，高レイノルズ数の壁が立ちはだかる．

例えば，雲乱流のテイラーマイクロスケール基準の乱流レイノルズ数 R_λ は 10^3 から 10^4 にも及ぶ．原始惑星系ガス円盤内乱流に関しては，電磁気力が加わるため雲乱流との直接的な比較はできないが，仮に，等方性乱流場で R_λ と積分スケール基準乱流レイノルズ数 Re_L の間に成り立つ関係式 $R_\lambda=(15Re_L)^{1/2}$ を使って R_λ を見積もると，Re_L が $10^{8\text{-}11}$ である[(5)]ことから $R_\lambda=10^{4\text{-}6}$ となる．つまり，ガス円盤内乱流のレイノルズ数は雲乱流よりもさらに二桁大きい可能性がある．このような非常に高いレイノルズ数に比べると，これまでに数値計算で達成されてきたレイノルズ数は大きく見劣りする．

2002 年の地球シミュレータの登場によって，R_λ=1200 の 3 次元気相乱流に対する直接数値計算（Direct Numerical Simulation, DNS）が可能となった[(17)]．しかし，粒子運動も考慮した混相乱流計算に関する既往研究を見てみると，達成された R_λ はぐっと小さくなる．著者らの最新研究[(18), (19)]で達成した 500 超というものを除けば，慣性粒子のクラスタリングに関する既往研究ではせいぜい 200 弱[(20),(21)], 粒子間の相互作用（衝突や粒子の周囲流を介しての相互作用など）までを考慮した既往研究では 100 程度にまで低下する[(22),(23)].

一方，室内実験では，R_λ=1500[(24)]や 2700[(25)]が超大型風洞の中で達成されている．しかし，超大型風洞を用いて混相乱流実験を行うのは至難の業である．現実的には，なるべく小型の風洞で高レイノルズ数を達成するのが望ましい．そのようなニーズに応え得るのが動的乱流格子を使った風洞であろう[(26)]．実際，Saw ら(2008)[(27)]は動的乱流格子を用いた風洞で R_λ=660 における慣性粒子のクラスタリングを観測した．R_λ だけを見ると，室内実験の方が数値計算よりもわずかに一歩先を行っているが，例えば，粒子の衝突頻度や衝突速度といった統計量を室内実験で測定するのは容易ではない．詳細な統計量を得られるという点では，数値計算の有用性が際立つ．

本稿では， DNS を用いた乱流中での粒子の衝突現象に対する著者らの研究を中心に紹介する．特に雲乱流を想定して，①粒子は流れのスケールに比して微小である（つまり，粒子を質点として扱う）が，無視できない慣性を持つ，また，②粒子の数濃度および質量混合比は小さく，乱流変調や 3 粒子以上の同時衝突は無視できる，という系を対象とする．第 2 節では，粒子径の衝突成長計算法の概説を行う．第 3 節では，著者らが開発した乱流中で相互作用しながら成長する微小慣性液滴に対する DNS の概説を行う．第 4 節において，これまでに得られた結果の紹介を行った後，本稿のまとめと今後の展望を最終節に記述する．

原稿受付：○年○月○日

2. 衝突成長による粒子径分布の変化

2.1 Stochastic 衝突成長式

半径 r を持った粒子の数密度 $n(r,t)$の衝突合体による時間変化率は次式の Stochastic Collection Equation (SCE)（Smolukowski 式とも呼ばれる）で表される．

$$\frac{\partial n(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\int_0^r K_{coal}(r'',r')n(r'',t)n(r',t)dr' - \int_0^\infty K_{coal}(r,r')n(r,t)n(r',t)dr' \tag{1}$$

ここで，右辺第一項中の r''は $r''^3=r^3-r'^3$ と定義される．$K_{coal}(r_1,r_2)$は半径 r_1 の粒子と半径 r_2 の粒子の衝突合体因子を表し，この K_{coal} は衝突頻度因子 K，衝突係数 E_{col} および合体率 E_{coal} の積で表される（$K_{coal}=K\,E_{col}E_{coal}$）．ただし，衝突係数の定義によっては，$E_{col}$ は K に含まれることもある．E_{col} や E_{coal} のデータベースとして，例えば静止流体を対象とした Hall (1980)[28]がある．乱流中でのデータベースとしては Ayala et al. (2008)[29]が挙げられるが，限られた条件下のデータしかなく，まだ完全ではない．

2.2 衝突頻度因子とクラスタリング効果

衝突頻度因子 K と衝突頻度 N の間には，

$$N_{12} = K_{12}n_1n_2 \tag{2}$$

の関係がある．ここで，添え字は粒子種を表しており，例えば，$N_{12}=N(r_1,r_2)$，$n_1=n(r_1)$である．同一径粒子同士の衝突の場合には，$N_{11}=(1/2)K_{11}n_1^2$ となる．衝突頻度因子に対するモデルとして，一般に，Hydrodynamic kernel（Gravitational kernel とも呼ばれる）モデルが用いられる．このモデルは異径粒子間の終端速度の違いによって引き起こされる衝突を表現しており，次式で表される．

$$\boldsymbol{K}_{\mathbf{12,hydr}} = \boldsymbol{\pi R_{12}^2}\left|\boldsymbol{V}_{\infty,1} - \boldsymbol{V}_{\infty,2}\right| \tag{3}$$

ここで， R_{12}（$=r_1+r_2$）は衝突半径，$V_{\infty,i}$ は半径 r_i の粒子の終末速度を表す．式中に乱流統計量が含まれないことから明らかなように，この Hydrodynamic kernel モデルは乱流による衝突促進効果を考慮しない．

乱流の衝突促進効果を考慮する衝突頻度因子モデルは，次のように定式化される[30]．

$$\left\langle K_{12,\mathrm{turb}}\right\rangle = 2\pi R_{12}{}^2\left\langle\left|w_r(x=R_{12})\right|\right\rangle g_{12}(x=R_{12}) \tag{4}$$

ここで，〈 〉はアンサンブル平均を表し， $|w_r(x=R_{12})|$ は接触時の相対接近速度（以降，$|w_{r,12}|$と略記），$g_{12}(x=R_{12})$は接触時の動径方向分布関数(radial distribution function, RDF, at contact)（以降，g_{12} と略記）である．後者はクラスタリングによる衝突頻度の増大効果を表す．

クラスタリングの例として，図 1 に R_λ=54 の定常等方性乱流場中で得られた粒子分布を示す．ストークス数 St（$=\tau_p/\tau_\eta$，τ_pは粒子の緩和時間，τ_ηはコルモゴロフ時間）が 1 程度の時に，クラスタリングが最も顕著になる（興味深いことに，大西ら (2007)[31]によると，クラスタリング効果が最大となる St は R_λ とともに微増する）．

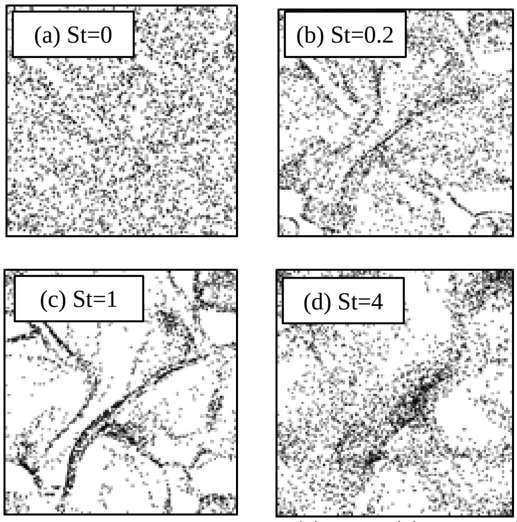

Fig. 1 Droplet distributions for (a)St=0, (b)St=0.4, (c)St=1 and (d)St=4 in homogeneous isotropic turbulence with R_λ=54. Droplets within a thin layer with $4l_\eta$ width, where l_η is the Kolmogorov scale, are drawn.

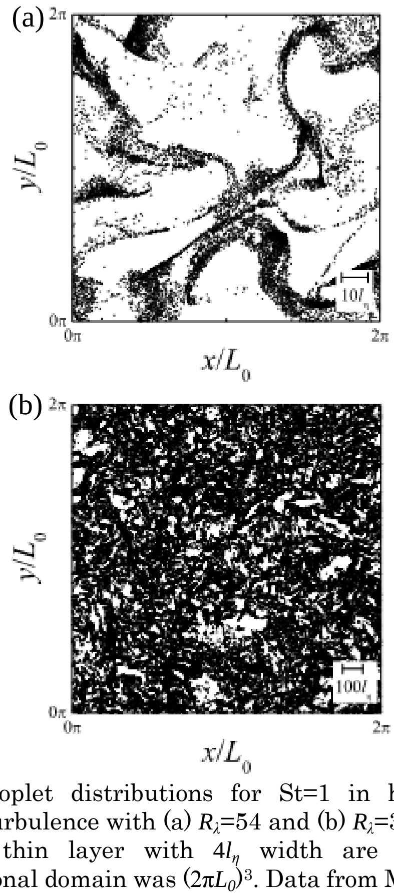

Fig. 2 Droplet distributions for St=1 in homogeneous isotropic turbulence with (a) R_λ=54 and (b) R_λ=340. Droplets within a thin layer with $4l_\eta$ width are drawn. The computational domain was $(2\pi L_0)^3$. Data from Matsuda et al. (2012)[32].

図 2 に，今度は St=1 に固定した上で，R_λ を変化させた場合の粒子分布を示す．空隙の大きさに注目すると，R_λ=54 の場合には最大で $50l_\eta$（l_η はコルモゴロフスケール）程度である．一方，R_λ=340 の場合には $100l_\eta$ 程度を超える空隙も見られる．空隙はクラスターの大スケール構造を反映していることから，クラスターの大スケール構造はレイノルズ数依存性を持つことがわかる．一方，粒子衝突に重要な g_{12} は粒子スケール程度の小さなクラスター構造に支配される．この小スケール構造に関しては，このような図から情報を読み取ることは難しい．そのため，4.3 節および 4.4 節に示すように，g_{12} を直接算出して議論する必要がある．

2.3 粒子間相互作用

粒子衝突の研究でしばしば無視されるのが，粒子周りの流れを介した相互作用（Hydrodynamic interaction もしくは Aerodynamic interaction）である．この作用によって，接近しつつある粒子ペアがその軌道を変え，衝突しないことがある．これにより，衝突係数 E_{col} は一般に 1 よりも小さい値になる．この作用を厳密に計算するためには，粒子を解像した上で粒子周りの流体を計算し，粒子と流体の相互作用を厳密に計算する必要がある．この直接計算は負荷が大きく，最新鋭のスーパコンピュータを持ってしても，多数の粒子が含まれる高レイノルズ数乱流という系には適用できない．

一方，粒子レイノルズ数が 1 よりも十分に小さい微小粒子を想定した場合には，その粒子の周囲流はストークス流れで表現できる．その場合，粒子周りにストークス流れを仮定することによって Hydrodynamic interaction を考慮することができる．この手法は重合法（Superposition Method, SM）と呼ばれる．著者らは Binary-based Superposition Method (BiSM)と呼ぶ手法を開発した[18]．これを 3.4 節で詳述する．

3. 微小粒子の乱流衝突統計量を取得するための直接数値計算（Direct Numerical Simulation, DNS）

3.1 支配方程式

非圧縮流体の支配方程式は連続の式（$\partial u_i/\partial x_i = 0$）と，次式で表される Navier-Stokes 方程式である．

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \tag{5}$$

ここで，u_i は速度ベクトル，p は圧力であり，全ての変数は代表長さ L_0 と代表速度 U_0 によって無次元化されている．また，Re は動粘性係数 ν を用いて Re=U_0L_0/ν と定義される．式(5)の右辺最終項 f_i は外力項である．

本研究ではラグラジアン粒子追跡法を用いて粒子運動を計算する．線形ストークス抗力を仮定すると支配方程式は次式となる．

$$\frac{\partial v_{p,i}}{\partial t} = -\frac{v_{p,i} - u_i}{\tau_p} + g\delta_{i3} \tag{6}$$

ここで，τ_p（$=(2/9)(\rho_w/\rho_a)r^2/\nu$），$\rho_w$ と ρ_a はそれぞれ粒子と空気の質量密度）は粒子の緩和時間，g は重力加速度である．大気中の水滴の運動を対象とした場合，水滴の半径がおよそ 40μm よりも大きくなると粒子レイノルズ数 Re_p（$=2rV_{p\infty}/\nu$）が 1 を超える．その場合，非線形抗力を用いるべきである．実際，計算コード自体には非線形抗力モデルが実装されている．しかし，本報に限れば，粒子半径は実スケールで 40μm 以下であるため，示される結果は線形ストークス抗力を用いたものである．

3.2 衝突統計量の算出方法

乱流衝突頻度予測モデルを開発・検証するためには，衝突頻度 N_{12} や衝突因子 K_{12} だけでなく，式(4)中の各項，つまり接触時の相対接近速度$|w_{r,12}|$と動径方向分布関数 g_{12} のデータも必要である．

これらを算出するために，二粒子間の距離 x が $R\text{-}\delta \leq x \leq R+\delta$ のとき，その二粒子は近接しているペアであるとみなした．近接ペアの相対接近速度を計算し，その平均を取ることによって$\langle|w_{r,12}|\rangle$を算出した．また，ある時間ステップ n における近接ペア数$N^n_{12,pair}$から，g^n_{12}を次式のように求めた．

$$g_{12}^n = \frac{N_{12,pair}^n / V_s}{N_1^n N_2^n / V_d} \tag{7}$$

ここで，N_i は半径 r_i の粒子の総数，V_s（$= 4\pi\{(R+\delta)^3 - (R-\delta)^3\}/3$）は近接チェック用の検査体積，$V_d = (2\pi L_0)^3$ は計算領域の体積である．このg^n_{12}を平均することによって，g_{12}を得る．Wang ら(2000)[33]は，δ/R<0.2 に設定すれば$\langle|w_r|\rangle$および g_{12}は δ/R に依らないことを示した上で δ/R=0.02 に設定した．本研究もそれに従った．

3.3 有限差分法を用いた高効率並列計算法

既往研究では，気相乱流場の計算に擬スペクトル法が用いられてきた．擬スペクトル法では，式(5)に対して rot を取ることによって得られる渦度方程式を波数空間で計算する．一方で，ラグラジアン法による粒子計算式(6)は物理空間での気流速度 u_i を要求する．コードの並列化を行う際には，波数空間と物理空間の両方の並列化が必要となる．このため，擬スペクトル法を用いた並列計算コードは複雑なものになる．

そこで，著者らは気相乱流場を有限差分法で計算し，流体と粒子の両方とも物理空間で計算する高効率並列アルゴリズムを開発した[18]．そのアルゴリズムの特徴を以下に示す．

① 定常等方性乱流場を得るための強制法として，有限差分法の高い並列化率を損なわない Reduced-Communication

Forcing (RCF)法を用いる[34].

② 粒子間衝突を効率的に検出するために，Cell-index 法[35]を用いる．

③ 共有メモリ型並列（自動並列化ライブラリ）と分散メモリ型並列（MPI ライブラリ）の両方に対応し，両方を同時に用いるハイブリッド計算に対応する．

④ MPI 並列計算領域からはみ出した粒子情報の通信や Cell-index 情報の更新をある時間ステップ毎にだけ行うことにより，分散メモリ型並列計算でのプロセス間通信コストを削減する．

このアルゴリズムを用いて，2000^3 計算格子を使って定常等方性乱流場を形成し，その乱流中に混入された 10 億粒子の運動を計算することによって，R_λ=530 での衝突関連統計量を得ることに成功した [18], [19].

3.4 Binary-based Superposition Method (BiSM)

粒子位置を $\boldsymbol{y}$（ボールド体はベクトル量を表す）としたとき，位置 $\boldsymbol{x}$ におけるストークス流れは次式で表される．

$$\boldsymbol{u}_{St}(\boldsymbol{x}; r, \boldsymbol{U}_{rel}(\boldsymbol{y})) = \begin{cases} \left[-\frac{3}{4}\frac{r}{d}+\frac{3}{4}\left(\frac{r}{d}\right)^3\right](\boldsymbol{U}_{rel}(\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{d})\frac{\boldsymbol{d}}{d^2}-\left[\frac{3}{4}\frac{r}{d}+\frac{1}{4}\left(\frac{r}{d}\right)^3\right]\boldsymbol{U}_{rel}(\boldsymbol{y}) & \text{for } d > r \\ \boldsymbol{0} & \text{for } d \le r \end{cases} \tag{8}$$

ここで，r は粒子半径，$d=|\boldsymbol{d}|=|\boldsymbol{x}\text{-}\boldsymbol{y}|$は粒子中心からの距離，$\boldsymbol{U}_{rel}$ は粒子と流体の速度差である．系が N_p 個の粒子を含む場合，ある位置 $\boldsymbol{x}$ における周囲粒子による変調速度は，ストークス流れの線形性を利用すると，次式で示される．

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{N_p} \boldsymbol{u}_{St}^{[k]}(\boldsymbol{x}), \tag{9}$$

ここで，$\boldsymbol{u}_{St}^{[k]} \equiv \boldsymbol{u}_{St}\left(\boldsymbol{x}; r^{[k]}, \boldsymbol{U}_{rel}^{[k]}\right)$であり，上付きの k は粒子 k に由来することを示す．つまり，位置 $\boldsymbol{x}$ における変調速度は周囲の粒子が作るストークス流れを足し合わせることで得られる．次に，この位置 $\boldsymbol{x}$ に粒子 ξ がある場合を考える．このとき, 粒子 ξ に影響を及ぼす周囲の粒子自身が粒子 ξ の影響を受ける（つまり，上記$\boldsymbol{U}_{rel}^{[k]}$が$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y}^{[\xi]})$の関数）ので，線形フィードバック系が形成される．$N_p$ 個の粒子を含む系を考えた場合，速度が 3 成分あるので, $3N_p$ の変数を持った線系方程式が形成される．N_p が小さい場合は逆行列を直接計算することによって容易に解を求めることができる．しかし，N_p が大きな値の場合，逆行列を直接計算することは非常に困難となる．

この困難を回避するために，オリジナルの重合法(original superposition method, OrgSM[36]) は， $\boldsymbol{U}_{rel}^{[\xi]} = \boldsymbol{U}_{bg}(\boldsymbol{y}^{[\xi]}) - \boldsymbol{V}(\boldsymbol{y}^{[\xi]}) \left(\equiv \boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{y}^{[\xi]})\right)$ （$\boldsymbol{U}_{\mathrm{bg}}$ は背景流，つまり粒子による変調を考慮しない流体速度）と仮定する．つまり，フィードバックを無視することによって，逆行列計算を回避する．

一方で，反復重合法(iterative superposition method, ItrSM[23])では，逆行列を直接計算する代わりにガウス―ザイデル法による反復計算によって解を求める．つまり，$\boldsymbol{U}_{rel}^{[\xi]} = \boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{y}^{[\xi]}) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}^{[\xi]})$とした上で，次の線形方程式を反復的に解く．原理的には，ItrSM から得られる解は，逆行列を直接計算して得られる解と一致する．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^{[\xi]} &= \sum^{N_p} \boldsymbol{u}_{St}\left(\boldsymbol{y}^{[\xi]}; r^{[k]}, \boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{y}^{[k]}) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}^{[k]})\right) \\ &= \sum_{k\neq\xi}^{N_p} \boldsymbol{u}_{St}^{(\xi)[k]}, \qquad \text{for } \xi = 1,2,\cdots,N_p. \end{aligned} \tag{10}$$

ここでは次のような略記法が用いられている：

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_{St}\left(\boldsymbol{y}^{[\xi]}; r^{[k]}, \boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{y}^{[k]}) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}^{[k]})\right) \\ &\qquad \equiv \boldsymbol{u}_{St}^{(\xi)}\left(\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{y}^{[k]}) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}^{[k]})\right) \equiv \boldsymbol{u}_{St}^{(\xi)[k]}. \end{aligned} \tag{11}$$

逆行列を直接計算する方法に比べれば，この ItrSM の計算負荷は小さい．しかし，繰り返し計算に伴う計算負荷は依然として大きい．

一方で我々が提案する 2 粒子重合法（Binary-based superposition method, BiSM[18]）では，式(10)を多数の粒子に関して直接計算するのではなく，2 粒子ペアに分解する．2 粒子しかない系では，式(10)は線形 6 次方程式となり，逆行列を計算することによって容易に解を求めることができる．例えば, 2 粒子のそれぞれの中心位置における変調速度は次のように表される．

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}^{[1]} = \boldsymbol{u}_{St}^{(1)}\left(\boldsymbol{U}^{*[2]} + \boldsymbol{u}^{[2]}\right) \\ \boldsymbol{u}^{[2]} = \boldsymbol{u}_{St}^{(2)}\left(\boldsymbol{U}^{*[1]} + \boldsymbol{u}^{[1]}\right) \end{cases} \tag{12}$$

そして，この系の解$\boldsymbol{u}_{1\leftrightarrow2}^{[1]}$と$\boldsymbol{u}_{1\leftrightarrow2}^{[2]}$は次式を満たす．

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_{1\leftrightarrow2}^{[1]} = \boldsymbol{u}_{St}^{(1)}(\boldsymbol{U}^{*[2]}) + \boldsymbol{u}_{St}^{(1)}\left(\boldsymbol{u}_{1\leftrightarrow2}^{[2]}\right) \\ \boldsymbol{u}_{1\leftrightarrow2}^{[2]} = \boldsymbol{u}_{St}^{(2)}(\boldsymbol{U}^{*[1]}) + \boldsymbol{u}_{St}^{(2)}\left(\boldsymbol{u}_{1\leftrightarrow2}^{[1]}\right) \end{cases} \tag{13}$$

BiSM では，“3 個以上の粒子を介した相互作用は無視できる”と仮定する．これによって，粒子 ξ の中心位置における変調速度は次のように求まる．

$$\boldsymbol{u}^{[\xi]} = \sum_{k\neq\xi}^{N_p} \boldsymbol{u}_{\xi\leftrightarrow k}^{[k]}, \tag{14}$$

BiSM が要請する仮定は, 数密度が非常に小さい系においては，明らかに妥当である．一方で，実際の雲粒子の数密度程度の場合にはどの程度の誤差を引き起こし得るかを見積もることは重要である．

図 3 に示すような，3 個の同径粒子（半径 r）を含む系を考える．粒子 1 と粒子 2 の中心間距離を d_{12}，同様に d_{13}, d_{23} を定義する．この系において，粒子 1 の中心位置における粒子 2 および 3 による変調速度の解析解は次のように展開される．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}^{[1]} &= \sum_{k\neq 1}^{3} \boldsymbol{u}_{St}^{(1)[k]} = \boldsymbol{u}_{St}^{(1)}\left(\boldsymbol{U}^{*[3]}+\boldsymbol{u}^{[3]}\right) + \boldsymbol{u}_{St}^{(1)}\left(\boldsymbol{U}^{*[2]}+\boldsymbol{u}^{[2]}\right)\\
&= \boldsymbol{u}_{St}^{(1)}\left(\boldsymbol{U}^{*[3]}\right) + \boldsymbol{u}_{St}^{(1)}\left(\sum_{k\neq 2}^{3}\boldsymbol{u}_{St}^{(2)[k]}\right) + \boldsymbol{u}_{St}^{(1)}\left(\boldsymbol{U}^{*[2]}\right) + \boldsymbol{u}_{St}^{(1)}\left(\sum_{k\neq 3}^{3}\boldsymbol{u}_{St}^{(3)[k]}\right)\\
&= \underbrace{\boldsymbol{u}_{St}^{(1)}\left(\boldsymbol{U}^{*[3]}\right)}_{3\to1} + \underbrace{\boldsymbol{u}_{St}^{(1)}\left(\boldsymbol{U}^{*[2]}\right)}_{2\to1} + \underbrace{\boldsymbol{u}_{St}^{(1)}\left(\boldsymbol{u}_{St}^{(2)}\left(\boldsymbol{U}^{*[1]}+\boldsymbol{u}^{[1]}\right)\right)}_{1\to2\to1}\\
&+ \underbrace{\boldsymbol{u}_{St}^{(1)}\left(\boldsymbol{u}_{St}^{(3)}\left(\boldsymbol{U}^{*[1]}+\boldsymbol{u}^{[1]}\right)\right)}_{1\to3\to1} + \underbrace{\boldsymbol{u}_{St}^{(1)}\left(\boldsymbol{u}_{St}^{(2)}\left(\boldsymbol{U}^{*[3]}+\boldsymbol{u}^{[3]}\right)\right)}_{3\to2\to1}\\
&+ \underbrace{\boldsymbol{u}_{St}^{(1)}\left(\boldsymbol{u}_{St}^{(3)}\left(\boldsymbol{U}^{*[2]}+\boldsymbol{u}^{[2]}\right)\right)}_{2\to3\to1}
\end{aligned} \tag{15}$$

各項の下に示される数字と矢印の組み合わせは図 3 のそれと対応しており，矢印は作用方向を表す．例えば，"1→2→1"は粒子 1 周りの流れが粒子 2 の運動（およびその周りの流れ）に影響を与え，さらにそれが粒子 1 の運動に与える影響を示す．式(13)を用いると，式(15)は最終的に以下のように表現できる．

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}^{[1]} = \boldsymbol{u}_{1\leftrightarrow2}^{[1]} + \boldsymbol{u}_{1\leftrightarrow3}^{[1]} +\\
&\underbrace{\boldsymbol{u}_{St}^{(1)}\left(\boldsymbol{u}_{St}^{(2)}\left(\boldsymbol{U}^{*[3]}+\boldsymbol{u}^{[3]}\right)\right)}_{3\to2\to1} + \underbrace{\boldsymbol{u}_{St}^{(1)}\left(\boldsymbol{u}_{St}^{(3)}\left(\boldsymbol{U}^{*[2]}+\boldsymbol{u}^{[2]}\right)\right)}_{2\to3\to1}
\end{aligned} \tag{16}$$

BiSM は"3→2→1"および"2→3→1"を無視するので，誤差は次のように見積もられる．

$$\begin{aligned}
&Err^{(BiSM)}\left(\boldsymbol{u}^{[1]}\right)\\
&= \left|\boldsymbol{u}_{St}^{(1)}\left(\boldsymbol{u}_{St}^{(2)}\left(\boldsymbol{U}^{*[3]}+\boldsymbol{u}^{[3]}\right)\right) + \boldsymbol{u}_{St}^{(1)}\left(\boldsymbol{u}_{St}^{(3)}\left(\boldsymbol{U}^{*[2]}+\boldsymbol{u}^{[2]}\right)\right)\right|\\
&\div \left|\boldsymbol{u}_{St}^{(1)}\left(\boldsymbol{U}^{*[3]}\right) + \boldsymbol{u}_{St}^{(1)}\left(\boldsymbol{U}^{*[2]}\right) + \boldsymbol{u}_{St}^{(1)}\left(\boldsymbol{u}_{St}^{(2)}\left(\boldsymbol{U}^{*[1]}+\boldsymbol{u}^{[1]}\right)\right)\right.\\
&\left.+ \boldsymbol{u}_{St}^{(1)}\left(\boldsymbol{u}_{St}^{(2)}\left(\boldsymbol{U}^{*[3]}+\boldsymbol{u}^{[3]}\right)\right) + \boldsymbol{u}_{St}^{(1)}\left(\boldsymbol{u}_{St}^{(3)}\left(\boldsymbol{U}^{*[2]}+\boldsymbol{u}^{[2]}\right)\right)\right|\\
&\sim \frac{1/(L_{12}L_{23}) + 1/(L_{13}L_{23})}{1/L_{12} + 1/L_{13} + 1/L_{12}^2 + 1/L_{13}^2 + 1/(L_{12}L_{23}) + 1/(L_{13}L_{23})}
\end{aligned} \tag{17}$$

ここで，$L_{12}=d_{12}/(2r)$であり，$|\boldsymbol{u}_{St}(r,\boldsymbol{v})|\sim A(v/L)$ （ただし，$v=|\boldsymbol{v}|$，A は O(1)の正定数）と見積もった．

一方，OrgSM は，式(15)中の"3→1"および"2→1"のみを考慮して，その他の項を無視する．このときの誤差は，上と同様にして，次のように見積もられる．

$$\begin{aligned}
&Err^{(OrgSM)}\left(\boldsymbol{u}^{[1]}\right)\\
&\sim \frac{1/L_{12}^2 + 1/L_{13}^2 + 1/(L_{12}L_{23}) + 1/(L_{13}L_{23})}{1/L_{12} + 1/L_{13} + 1/L_{12}^2 + 1/L_{13}^2 + 1/(L_{12}L_{23}) + 1/(L_{13}L_{23})}
\end{aligned} \tag{18}$$

例えば，雲を想定して誤差を見積もる．雲粒の数密度は $10^{7\text{-}9}$[1/m^3]であるので，平均的な粒子間距離は 100-4,600μm である．半径を 30μm とすると，平均的な無次元距離 $L=d/(2r)$は 1.6~76 となる．仮に，1 ペアだけは接近し，他の 2 ペアは平均的な距離だけ離れていると仮定する．具体的には，L_{12}=2, L_{13}=30 および L_{23}=30.5 とする．これを式(17)および(18)に代入すると，それぞれ $Err^{(\mathrm{BiSM})}$=0.022 および $Err^{(\mathrm{OrgSM})}$=0.335 となった．つまり，著者らの BiSM の誤差は 2%と小さい一方で，OrgSM の誤差は 34%にも上ることがわかる．

これらの誤差が衝突係数に与える影響を調べた．図 4 に静止流体中での衝突係数の結果を示す．本 BiSM の結果は ItrSM（参照値）とよく一致する．一方で，OrgSM は衝突係数を有意に過大評価する（つまり，Hydrodynamic interaction を過小評価する）．つまり，衝突係数を議論する場合，前述の見積もりから得られた BiSM の 2%の誤差は有意な差をもたらさない一方，OrgSM の 34%の誤差は大きな誤差をもたらすことがわかった．結局，雲粒子を対象とした場合，BiSM は ItrSM と同程度の信頼性を持ち，かつ，計算負荷は ItrSM の約 10 分の 1（詳細は既報[18]を参照）という長所を持つことが分かった．

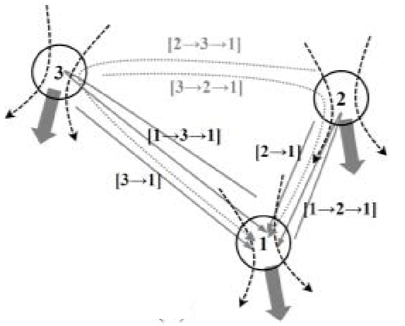

Fig. 3 A triplet-particle system for error analysis.

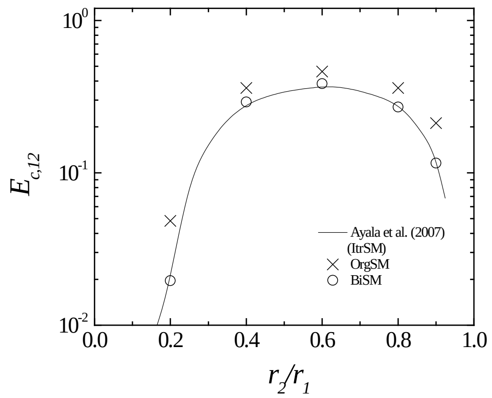

Fig. 4 Collision efficiency between r_1 and r_2 (<r_1) particles in a stagnant flow. The larger particle is a water droplet of r_1=25μm. The solid line is from Fig.9 in Ayala et al. (2007)[23].

4. 結　　果

4.1 並列計算性能

大規模並列計算には，高い線形拡張性が求められる．線形拡張性の評価には，強スケーリング（strong scaling）と弱スケーリング（weak scaling）の 2 種類が用いられる．前者を評価するためには，全体の計算規模を固定した上で，演算プロセス数を増やした時に演算時間がどれだけ減少するかを調べる．例えば，演算プロセス数を 2 倍にしたときに演算時間が半分になれば理想的な強スケーリングを持つ．一方，後者を評価するためには，演算プロセスに対する計算規模を固定した上で，演算プロセス数を増やした時に演算時間がどれだけ変化するかを調べる．例えば，全体の計算規模と演算プロセス数をともに 2 倍

にしても，演算時間が変化しなければ高い弱スケーリングを持つ．

図 5 に，粒子と流体を同時に計算し，かつ，粒子間の Hydrodynamic interaction を考慮しながら衝突頻度を算出する計算を対象として，上述の強線形拡張性を調べた結果を示す．この性能測定には SGI ALTIX4700 システム（6.4GFLOPS/core），SGI ICEX システム（20.8GFLOPS/core）および地球シミュレータ 2（102.4GFLOPS/core）を用いた．用いたコア数，つまり最大 4096 コア，の範囲で演算時間が演算プロセス数に反比例して減少している．つまり，本計算コードが，少なくとも上述規模の計算において，高い強スケーリングを持つことが確認された．

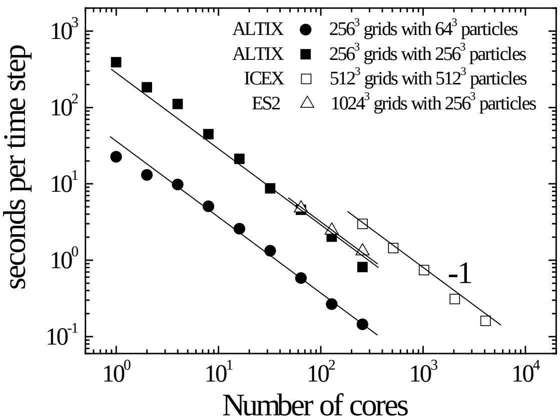

Fig. 5 Wall clock time versus number of cores for different number of particles and flow grids on three different supercomputer systems.

4.2 乱流による純衝突促進率

衝突後の分裂を無視する場合，乱流による純衝突促進率 η_T は次のように定義される．

$$\eta_T = \eta_G \eta_E \tag{19}$$

ここで，η_Gは幾何学的な衝突の促進率，つまり式(3)で表される $K_{12,\mathrm{hydr}}$ に比して衝突頻度因子がいかに増大されたかを表し，また，η_Eは衝突係数の増加率である．一つ注意すべきは，同一径粒子同士の衝突の場合には，$K_{11,\mathrm{hydr}}$ がゼロであるためη_Gを定義できない結果，η_Tも定義できないことである．しかしながら，乱流による衝突促進効果を概観する目的としては，この η_Tは適した指標である．

図 6 に，エネルギー散逸率 ε が 400[cm^2/s^3]の乱流における η_Tを示す．分布は下に凸な形状をしている．$r_2/r_1\to1$ の時に大きくなるのは，粒子径が同程度の場合には重力沈降速度差が小さく，乱流が生み出す相対速度の効果が相対的に高まるからである．また，$r_2/r_1\to0$ の時に大きくなるのは，小粒子が大粒子周りの流れの影響を受ける時間が長くなるためである．これらの傾向も含め，本計算モデルの結果は他モデルの結果とよく一致する．また，少なくとも R_λ=72 と 43 を比較する限りでは，η_Tに顕著なレイノルズ数依存性が見られない．しかし，レイノルズ数依存性を結論付けるためには，より高いレイノルズ数のデータが必要である．

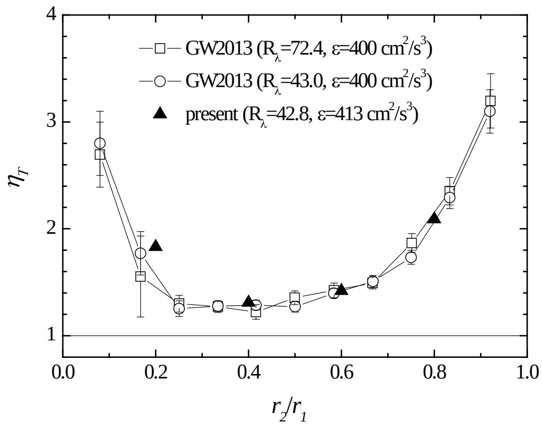

Fig. 6 The net enhancement factor plotted as a function of the radius ratio r_2/r_1, with the larger droplet r_1=30μm in radius. White plots are from Figure 6(a) in Grabowski & Wang (2013)[10].

4.3 乱流衝突統計量のレイノルズ数依存性

著者らは，大規模並列計算を実行して高レイノルズ数域までのデータを取得することによって，乱流衝突統計量のレイノルズ数依存性を調べてきた．詳細は既報に譲ることにして，ここでは同一径粒子系のクラスタリング効果 g_{11} のレイノルズ数依存性に関する成果を記述する．

図 1 に示したように，クラスタリングは St に大きく依存する．一方で，図 2 からは，クラスターの小スケール構造が読み取れないために，g_{11} のレイノルズ数依存性を議論できない．直感的には，微小水滴（r/l_η<<1）のクラスタリングは r/l_η に大きく依存して，レイノルズ数依存性は小さいと予想される．しかし，Wang ら(2000)[33]は 24<R_λ<75 のデータから，St>0.5 の g_{11}-1 は R_λ に比例して単調増加することを見いだした．そしてそのレイノルズ数依存性は大きなレイノルズ数においてもそのまま持続すると予想した．この予想通りならば，雲乱流のような高レイノルズ数流れ（R_λ〜10^4）においては，St=1 粒子のクラスタリング効果は g_{11}〜10^3 にもなる．この予想は，後に否定されるが，クラスタリング効果のレイノルズ数依存性に対する関心を高めた．後になって， Collins と Keswani（2004）[37]は，R_λ<150 の DNS 結果から，0.4<St<1.5 では g_{11} は単調増加しつつある値に収束していく傾向を見いだした．近年ではこの傾向を考慮に入れているモデルもある．例えば，Ayala ら(2008)[38]の g_{11} モデルは高レイノルズ数で収束する．Derevyanko ら（2008）[39]では，十分に高いレイノルズ数では収束すると考え，その収束値を予測する．

図 7 に示されるように，著者らの DNS でも R_λ<100 では g_{11} は単調増加しつつある値に収束していく傾向が確認された．

しかし，興味深いことに，R_λ>100 ではレイノルズ数とともにわずかではあるが減少していく．このレイノルズ数依存性の起源を次節で議論する．

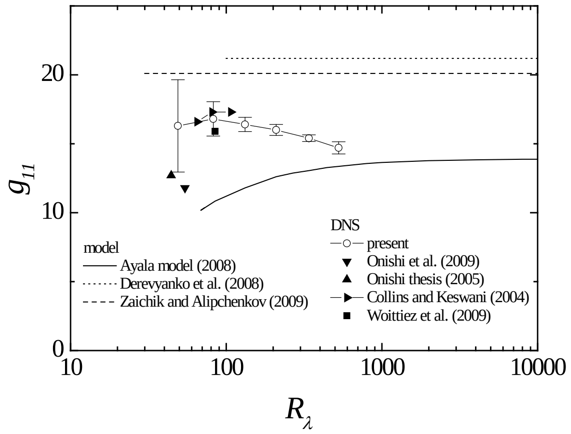

Fig. 7: Radial distribution function at contact for monodispersed droplets with St=0.4. DNS results in literature(22),(37),(40),(41) and model predictions(33),(38),(39) are also drawn.

4.4 間欠性起源説

前節でクラスタリング効果g_{11}にレイノルズ数依存性が見つかったことを報告した．ではその起源は何かという疑問が起こる．著者らはレイノルズ数が高くなると乱流が間欠的になる性質に着目した．これまでに議論してきたStは，計算領域全体平均かつ時間平均した St である．これを***グローバル*** St と呼ぶことにする．今，***ローカル*** コルモゴロフ時間スケールを$\tau_\eta^* = (1/s^2)^{1/2}$（ここで，$s^2 = s_{ij}s_{ij}$．$s_{ij} = (\partial_i u_j + \partial_j u_i)/2$はひずみ速度テンソルである）と定義すると，***ローカル*** St を$St^* = \tau_p/\tau_\eta^*$のように定義できる．グローバル St が同じであっても，レイノルズ数が変化し乱流の間欠性が変化すれば，ローカル St の時空間分布は変化する．より具体的には，レイノルズ数が高くなれば乱流の間欠性が増す，すると局所的により激しい現象（大きな s^2）が見られるようになる一方で，局所的に穏やかな領域（小さな s^2）が増える．つまり，レイノルズ数が高くなれば，St*<St となる領域の割合が増える．これによって，有効 St が小さくなるのではないかと考えた．この説を間欠性起源説と呼ぶことにする．

この説を証明する手段として，乱流の間欠性を人工的に変化させることを考えた．逆カスケード 2 次元乱流は間欠性を持たないということが知られている．この 2 次元乱流（間欠性無し）におけるクラスタリング効果のレイノルズ数依存性と，3 次元乱流（間欠性有り）で得られていた結果を比較することによって，間欠性起源説の証明を試みた．その結果を図 8 に示す．予想した通り，間欠性を持たない 2 次元乱流では，クラスタリング効果のレイノルズ数依存性は見られなかった．なお，$Re_T=T_l/\tau_\eta$（T_lは積分時間スケール，τ_ηはコルモゴロフ時間スケール）と定義した．この結果から St=0.4 でみられるクラスタリングのレイノルズ数依存性は乱流の間欠性に起因することが確認された．ただし，この説はクラスタリングが渦度や速度勾配と高い相関を示す St<1 の場合に限られると著者らは考える．St>1 の場合には St<1 の場合とは違うメカニズムが働く（Sweep-Stick 機構(42),(43)）ので，違ったメカニズムでレイノルズ数依存性が生まれると考えられる．現在，著者らは St>1 の場合のレイノルズ数依存性とそのメカニズム解明に取り組んでいる．

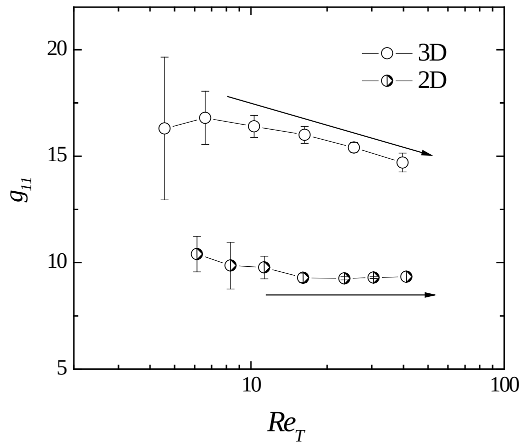

Fig. 8: Radial distribution function at contact for monodispersed droplets with St=0.4 plotted against Re_T.

5. おわりに

本報では，気相乱流中での微小慣性粒子の衝突現象に対する著者らの数値研究を紹介した．著者らは，まず，流体を介した粒子間相互作用(Hydrodynamic interaction)までを考慮して，多数の微小粒子が乱流中で衝突成長する様子を再現する大規模並列直接数値計算法を開発した．この計算法によって，これまで得ることが困難であった乱流中での衝突係数を，従来よりも小さな計算負荷で，かつ十分な精度で，効率的に得ることが可能になった．また，テイラースケール基準乱流レイノルズ数 R_λ が約 50 から 500 までという 1 オーダーに及ぶ広いレイノルズ数の範囲で衝突統計量を得ることによって，統計量のレイノルズ数依存性を明らかにした. St=0.4 の場合，レイノルズ数が増加するとともにクラスタリング効果が小さくなり，結果として，衝突因子も小さくなる．これは，従来の常識を覆す発見であった．さらに，このレイノルズ数依存性が乱流の間欠性に起因することを，間欠性を持つ 3 次元乱流に対する直接数値計算と間欠性を持たない逆カスケード 2 次元乱流に対する直接数値計算の比較から明らかにした．

これまでに著者らが達成した最大テイラースケール基準乱流レイノルズ数 R_λ は 530 である．この R_λ は，実際の雲乱流に見られる値 $10^{3\text{-}4}$ に比べるとまだ小さい．今後，さらなる高いレイノルズ数でのデータ取得を目指す．具体的には，京コンピュータ上で 6000^3 の流体計算格子を用いた粒子衝突シミュレーションを実施することによって，R_λ=1100 程度でのデータ取得を行う予定である．これが成功すれば，実際の雲乱流で

見られるレイノルズ数程度での微小雲粒子の衝突機構を解明できる段階に踏み込めることになる．このように，計算機の強大化の恩恵で，実現象への応用を見据えたレイノルズ数での微小粒子の衝突機構を，直接数値計算によって解明できる段階になってきた．しかし，雲氷や雪のような，球形でない複雑な形状を持ち，密度の軽い粒子に関してはまだまだ未知である．また，原始惑星系ガス円盤乱流を対象とする場合には，レイノルズ数がさらに跳ね上がる．雲乱流との直接的な比較はできないが，強引に見積もるとガス円盤乱流の R_λ は 10^6 にも上る．ここまで高いレイノルズ数でもこれまでの著者らの知見が通用するのかどうか未知である．研究対象は尽きることがない．

謝　　辞

本研究は文部科学省科学研究費補助金 若手研究(B)（課題番号 21760143, 24760152）の援助を受けて行われた．また，大規模計算は（独）海洋研究開発機構の地球シミュレータ 2 を用いて行われた．ここに記して謝意を表す．最後に，執筆の機会を与えてくださった編集委員会に感謝いたします．

文　　献

(1) Abrahamson, J.: Collision rates of small particles in a vigorously turbulent fluid, Chem. Engng. Sci., 30 (1975), 1371-1379.
(2) Williams, J. J. E. & Crane, R. I.: Drop coagulation in cross-over pipe flows of wet steam, J. Mech. Engng. Sci., 21 (1979), 357-360.
(3) Yamamoto, Y., Potthoff, M., Tanaka, T., Kajishima T. & Tsuji, Y.: Large-eddy simulation of turbulent gas-particle flow in a vertical channel: effect of considering inter-particle collisions, J. Fluid Mech., 442 (2001), 303-334.
(4) Volk, H. J., Jones, F. C., Morfill, G. E. & Roser, S.: Collisions between grains in a turbulent gas, Astron. Astrophys., 85 (1980), 316-325.
(5) Cuzzi, N.J., Hogan, R.C., Paque, J.M. & Dobrovolskis, A.R.: Size-selective concentration of chondrules and other small particles in protoplanetary nebula turbulence, The Astrophysics Journal, 546 (2001), 496-508.
(6) Okuzumi, S., Tanaka, H., Kobayashi, H. & Wada, K.: Rapid coagulation of porous dust aggregates outside the snow line: A pathway to successful icy planetesimal formation, The Astrophysics Journal, 752 (2012), 106(18pp).
(7) Arenberg, D.: Turbulence as the major factor in the growth of cloud drops, Bull. Amer. Meteor. Soc., 20 (1939), 444-448.
(8) Shaw, R. A.: Particle-Turbulence Interactions in Atmospheric Clouds, Annu. Rev. Fluid Mech., 35 (2003), 183-227.
(9) Vaillancourt, P. A. & Yau, M. K.: Review of particle-turbulence interactions and consequences for cloud physics. Bull. Amer. Meteor. Soc., 81 (2000), 285-298.
(10) Graboswki, W. W. & Wang, L.-P.: Growth of Cloud Droplets in a Turbulent Environment, Annu. Rev. Fluid Mech., 45 (2013), 293-324.
(11) Blyth, A. M.: Entrainment in cumulus clouds, J. Appl. Meteor., 32 (1993), 626-641.
(12) Shaw, R. A., Reade, W. C., Collins., L. R. & Verlinede, J.: Preferential concentration of cloud droplets by turbulence: effects on the early evolution of cumulus cloud droplet spectra, J. Atmos. Sci., 55 (1998), 1965-1976.
(13) Yin, Y., Levein, Z., Reisin, T. G. & Tzivion, S.: The effects of giant cloud condensation nuclei on the development of precipitation in convective clouds – a numerical study, Atmos. Res., 53 (2000), 91-116.
(14) Saffman, P. G. & Turner, J. S.: On the collision of drops in turbulent clouds, J. Fluid Mech., 1 (1956), 16-30.
(15) Maxey, M. R.: The gravitational settling of aerosol particles in homogeneous turbulence and random flow fields, J. Fluid Mech., 174 (1987), 441-465.
(16) Sundaram, S. & Collins, L. R.: Collision statistics in an isotropic particle-laden turbulent suspension. Part 1. Direct numerical simulations, J. Fluid Mech., 335 (1997), 75-109.
(17) Kaneda, Y., Ishihara, T., Yokokawa, M., Itakura K. & Uno A.: Energy dissipation rate and energy spectrum in high resolution direct numerical simulations of turbulence in a periodic box, Phys. Fluids, 15 (2003), L21-L24.
(18) Onishi, R., Takahashi, K. & Vassilicos, J.C.: An Efficient Parallel Simulation of Interacting Inertial Particles in Homogeneous Isotropic Turbulence, J. Comput. Phys., 242 (2013), 809-827.
(19) Onishi, R. & Vassilicos, J.C.: Collision Statistics of Inertial Particles in Two-Dimensional Homogeneous Isotropic Turbulence with an Inverse Cascade, J. Fluid Mech., (2014) in press.
(20) Yoshimoto, H. & Goto, S.: Self-similar clustering of inertial particles in homogeneous turbulence, J. Fluid Mech., 577 (2007), 275-286.
(21) Coleman, S. W. & Vassilicos, J. C.: A unified sweep-stick mechanism to explain particle clustering in two- and three-dimensional homogeneous isotropic turbulence, Phys. Fluids, 21 (2009), 113301.
(22) Woittiez, E. J. P., Jonker, H. J. J. & Portela, L. M.: On the Combined Effects of Turbulence and Gravity on Droplet Collisions in Clouds: a Numerical Study, J. Atmos. Sci., 66 (2009), 1926-1943.
(23) Ayala, O., Grabowski, W. W. & Wang, L.-P.: A Hybrid Approach for Simulating Turbulent Collisions of Hydrodynamically-Interacting Particles, J. Comput. Phys., 225 (2007), 51-73.
(24) Saddoughi, S. G. & Veeravalli, S. V.: Local isotropy in turbulent boundary layers at high Reynolds number, J. Fluid Mech., 268 (1994), 333-372.
(25) Castaing, B., Gagne, Y. & Hopfinger, E.J.: Velocity probability density functions of high Reynolds number turbulence, Physica D, 46 (1990),177-200.
(26) 蒔田秀治，飯田明由，佐々浩司，“大規模乱流場の特性の評価（第 4 報，乱流レイノルズ数と Kolmogorov 普遍定数について）”，機論 B，54 (1988), 2333-2339.
(27) Saw, E. W., Shaw, R. A. Ayyalasomayajula, S.: Chuang, P. Y. & Gylfason, A.: Inertial clustering of particles in high-Reynolds-number turbulence, Phys. Rev. Lett., 100 (2008), 214501.
(28) Hall, W. D.: A detailed microphysical model within a two-dimensional dynamic framework: Model description and preliminary results, J. Atmos. Sci., 37 (1980), 2486-2507.
(29) Wang, L.-P., Ayala, O., Rosa, B. & Grabowski, W. W.:

Turbulent collision efficiency of heavy particles relevant to cloud droplets, New J. Phys., 10 (2008), 075013.
(30) Wang, L.-P., Wexler, A. S. & Zhou, Y.: Statistical mechanical description of turbulent coagulation, Phys. Fluids, 10 (1998), 2647-2651.
(31) 大西領，小森悟，“乱流中における同一径粒子間の衝突因子のモデル化”，機論 B，73 (2007), 1307-1314.
(32) Matsuda, K., Onishi, R., Kurose, R. & Komori, S.: Turbulence Effect on Cloud Radiation, Phys. Rev. Lett., 108 (2012), 224502.
(33) Wang, L.-P., Wexler, A. S. & Zhou, Y.: Statistical mechanical description and modelling of turbulent collision of inertial particles, J. Fluid Mech., 415 (2000), 117-153.
(34) Onishi, R., Baba, Y. & Takahashi, K.: Large-scale forcing with less communication in finite-difference simulations of stationary isotropic turbulence, J. Comput. Phys., 230 (2011), 4088-4099.
(35) Allen, M. P. & Tildesley, D. J., Computer Simulation of Liquids, Oxford University Press, (1987).
(36) Pruppacher, H. R. & Klett, J. D., Microphysics of Clouds and Precipitation, Kluwer academic publisher, (1997), 954.
(37) Collins, L. R. & Keswani, A.: Reynolds number scaling of particle clustering in turbulent aerosols, New J. Phys., 6 (2004), 119.
(38) Ayala, O., Rosa, B., Wang, L.-P. & Grabowski, W. W.: Effects of Turbulence on the Geometric Collision Rate of Sedimenting Droplets. Part 2. Theory and parameterization, New J. Phys., 10 (2008), 075016.
(39) Derevyanko, S., Falkovich, G. & Turitsyn, S.: Evolution of non-uniformly seeded warm clouds in idealized turbulent conditions, New J. Phys., 10 (2008), 075019.
(40) Ayala, O., Rosa, B., Wang, L.-P. & Grabowski, W. W.: Effects of Turbulence on the Geometric Collision Rate of Sedimenting Droplets. Part 1. Results from direct numerical simulation, New J. Phys., 10 (2008), 075015.
(41) Onishi, R., Takahashi, K. & Komori, S.: Influence of Gravity on Collisions of Monodispersed Droplets in Homogeneous Isotropic Turbulence, Phys. Fluids, 21 (2009), 125108.
(42) Goto, S. & Vassilicos, J. C.: Self-similar clustering of inertial particles and zero-acceleration points in fully developed two-dimensional turbulence., Phys. Fluids, 18 (2006), 115103.
(43) Coleman, S. W. & Vassilicos, J. C.: A unified sweep-stick mechanism to explain particle clustering in two- and three-dimensional homogeneous isotropic turbulence, Phys. Fluids, 21 (2009), 113301.