Tech. Edu. J. 14(3): 707-722, Summer 2020

Technology of Education Journal
(TEJ)
Homepage: jte.sru.ac.ir

TEJ SRTTU

ORIGINAL RESEARCH PAPER

Enhancing functional thinking: Identifying the prior schemas of seventh grade students in generalization of two-variable figural patterns

***R.Afkhami*[1], *N.Asghary*[*,1], *A. Medghalchi*[2]**

[1] *Department of Mathematics, Faculty of sciences, Islamic Azad University, Central Tehran Branch, Tehran, Iran*
[2] *Department of Mathematics, Faculty of Mathematical sciences, Kharazmi University, Tehran, Iran*

Received: 17 February 2019
Reviewed: 10 March 2020
Revised: 11 June 2019
Accepted: 25 June 2019

KEYWORDS:
Generalization
APOS Theory
Two-Variable Figural Pattern

* Corresponding author
Nas.Asghari@iauctb.ac.ir
(+98912) 2011425

ABSTRACT

Background and Objectives: The figural patterns have a unique capacity to enhance functional thinking. The patterns generalization in school mathematics is considered as a way to promote functional thinking. Variable is one of the concepts in patterns generalization. Paying attention to figural patterns provides an opportunity for students to understand the meaning of variable and how to use it. Reference is also a central concept in patterns generalization. The number of variables is one of the characteristics that has been proposed in the pattern generalization tasks, but all the research has been related to one variable, linear and quadratic patterns. The aim of this study was to identifying the prior schemas in generalization of two-variable figural patterns. As regard to the concept of two variables, understanding three-dimensional space is a prerequisite for understanding and generalizing two-variable patterns. In these patterns, instead of one independent variable, there are two independent variables that change simultaneously and affect the dependent variable. Understanding these patterns requires the development of the R2 space scheme to R3 space, which is not a cognitively complex step and does not require the reconstruction of the existing scheme.

Methods: The present research is part of a broad research which is done using quantitative-qualitative (mixed) research method. The research framework is APOS theory and based on the use of ACE (Activities, Class discussions and Exercises) teaching cycles. This research was conducted in three steps. In the first step, initial genetic decomposition for generalization of two-variable figural patterns was designed using the background, self-concept analysis and researchers' experiences. It includes the prior schemas for generalization. In the second step, from the total of 493 students of Malekan City (in East Azerbaijan) as the statistical population of research, a sample of 220, 7th grade students were selected based on the Cochran formula for determination of sample size. Then, a test that includes 7 tasks was designed based on APOS framework. The validity of the test was confirmed by three experts in mathematics education and four experienced teachers. Internal consistency of questions was estimated with Cronbach's alpha and reported to be 0.69. Students responded the test at 90 minutes. The third step of research began with 19 students, with permission from the education and training office of Malekan, and school principals and parents of students. This step is done in three cycles.

Findings: Using the analysis of students' responses to this test based on the APOS framework and doing three cycles of the research were conducted with the teaching method of Activity-Class Discussion-Exercise (ACE) with 19 students; genetic decomposition was finalized in this way, and defects of students in reference schema, R^3 schema and variables schema as prior schemas in generalization of two-variable figural patterns were identified and encoded. Most of students had a good understanding of working with two variables. However in the context of generalization of two-variable figural pattern revealed many difficulties at the naming of variables, and using independent and dependent variables in proper position

Conclusion: By identifying the mental structures of students in generalizing patterns, the path of teaching and learning will be smoother.

NUMBER OF REFERENCES	NUMBER OF FIGURES	NUMBER OF TABLES
36	13	4

مقاله پژوهشی

ارتقای تفکر تابعی: شناسایی طرح‌واره‌های پیش‌نیاز دانش‌آموزان پایه‌ی هفتم در تعمیم الگوهای شکلی دومتغیره

ربابه افخمی[۱]، نسیم اصغری[*،۱]، علیرضا مدقالچی[۲]

[۱] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی، تهران، ایران
[۲] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۲۸ بهمن ۱۳۹۷
تاریخ داوری: ۲۰ اسفند ۱۳۹۷
تاریخ اصلاح: ۲۱ خرداد ۱۳۹۸
تاریخ پذیرش: ۴ تیر ۱۳۹۸

واژگان کلیدی:
تعمیم
نظریه APOS
الگوهای شکلی دومتغیره

* نویسنده مسئول
Nas.asghari@iauctb.ac.ir
۰۹۱۲-۲۰۱۱۴۲۵

چکیده

پیشینه و اهداف: الگوهای شکلی ظرفیتی بی‌نظیر برای ارتقای تفکر تابعی دارند. تعمیم الگوها در ریاضیات مدرسه ای مسیری برای ارتقای تفکر تابعی در نظر گرفته می شود. مفهوم متغیر یکی از مفاهیم مطرح در تعمیم الگوهاست. توجه به الگوهای شکلی فرصتی را فراهم می‌کند تا دانش‌آموزان معنای متغیرها و چگونگی استفاده از آنها را درک کنند. استدلال نیز به عنوان مفهوم مرکزی در تعمیم الگوها مطرح است. تعداد متغیر، یکی از مشخصه‌هایی است که در تکالیف تعمیم الگو مطرح شده است و لیکن تمام تحقیقات مطرح شده در رابطه با الگوهای خطی و درجه‌ی دومِ یک‌متغیره بوده است. این تحقیق با هدف شناسایی طرح‌واره‌های پیش‌نیاز در تعمیم الگوهای شکلی دو متغیره به انجام رسید. چنانچه از مفهوم دو متغیره پیداست درک فضای سه‌بعدی پیش‌نیازی برای درک الگوهای دو متغیره و تعمیم آنهاست. در این الگوها به جای یک متغیر مستقل، دو متغیر مستقل وجود دارد که به طور همزمان تغییر می‌کنند و بر متغیر وابسته اثر می‌گذارند. درک این سه‌تایی‌ها نیاز به توسعه‌ی طرح‌واره‌ی فضای R^2 به فضای R^3 دارد که از نظر شناختی مرحله‌ی پیچیده‌ای نیست و نیاز به بازسازی طرح‌واره‌ی موجود ندارد.

روش‌ها: تحقیق حاضر بخشی از یک تحقیق گسترده است که به روش تحقیق کمی-کیفی (آمیخته) انجام شده است. چهارچوب تحقیق، چهارچوب APOS با به کار گیری چرخه‌های تدریس فعالیت گروهی- بحث کلاسی- تمرین درخانه (ACE) می‌باشد. این تحقیق در سه مرحله انجام گرفت. در مرحله‌ی اول تجزیه تکوینی مقدماتی برای تعمیم الگوهای شکلی دو متغیره، با استفاده از پیشینه‌ی تحقیق، تحلیل خود مفهوم و تجربیات محقق طراحی شد. در مرحله‌ی دوم، جامعه‌ی آماری، دانش آموزان پایه‌ی هفتم مدارس دولتی شهرستان ملکان به تعداد ۴۹۳ دانش آموز بودند. مطابق با فرمول تعیین حجم نمونه‌ی کوکران، تعداد ۲۲۰ نفر دانش آموز دختر و پسر پایه هفتم شهرستان ملکان (آذربایجان-شرقی)، درترم دوم سال تحصیلی ۲۰۱۸ میلادی، در آزمون اولیه شرکت کردند. آزمون شامل ۷ تکلیف با موضوع الگوهای شکلی (یک‌متغیره، دومتغیره) بر اساس چهارچوب APOS طراحی شد و روایی آزمون توسط سه آموزشگر ریاضی و چهار معلم مجرب بررسی و مورد تایید قرار گرفت. پایایی آزمون و هماهنگی درونی سؤالات با یافتن ضریب آلفای کرونباخ و آلفای۰/۶۸ تأیید گردید. مدت زمان پاسخگویی حدودا ۹۰ دقیقه بود. مرحله‌ی سوم تحقیق با اخذ رضایت از اداره آموزش و پرورش شهرستان و مدیران مدارس و اولیای دانش‌آموزان جمعا با ۱۹ دانش‌آموز داوطلب آغاز شد. این مرحله به صورت کیفی در سه چرخه‌ی تحقیق انجام گرفت.

یافته‌ها: با استفاده از تجزیه و تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان بر اساس چارچوب APOS و اجرای سه چرخه‌ی تحقیق با روش تدریس ACE، تجزیه تکوینی نهایی شد و نقائص دانش‌آموزان در طرح‌واره‌های پیش‌نیاز استدلال، فضای سه‌بعدی R3 و متغیر در تعمیم الگوهای شکلی دو متغیره، شناسایی و کدگذاری شدند. اغلب دانش‌آموزان درک خوبی از کار با دو متغیر در بخش عبارات جبری داشتند. ولیکن با ورود به بحث الگوی شکلی دو متغیره در نامگذاری متغیرها و به کارگیری درست آنها در جایگاه مستقل و وابسته و جایگذاری مقادیر مشکلاتی بروز می‌دادند.

نتیجه‌گیری: با شناسایی سازه‌های ذهنی دانش‌آموزان در تعمیم الگوها، مسیر یاددهی و یادگیری آن، هموارتر خواهد شد.

مقدّمه

تمام تاریخ ریاضیات چیزی نیست جز ثبت تعمیم‌های متوالی در ریاضیات. اهمیت تعمیم به قدری است که از آن به ضربان قلب ریاضیات یا رگ حیاتی ریاضیات تعبیر می‌شود [۱]. تعمیم الگوها در ریاضیات مدرسه‌ای مسیری برای ارتقای تفکر تابعی به عنوان مولفه‌ای از تفکر جبری، در نظر گرفته می‌شود [۲]. الگوها بازنمایی محسوسی از روابط تابعی هستند که دانش‌آموزان با پرسیدن این سؤال که چه چیزی تغییر می‌کند و چه چیزی ثابت می‌ماند، مشترکات را از موارد خاص تجرید می‌کنند [۳]. بنابراین تفکر تابعی نقش اساسی در فرآیند تعمیم دارد. اسمیت تفکر تابعی را نوعی تفکر بازنمایی می‌داند که روی روابط بین

دوکمیت متغیر یا بیشتر تمرکز دارد، به ویژه نوعی از تفکر که منجر به تعمیم سازی از روابط خاص می‌شود [۴]. الگوهای شکلی مشخصه‌هایی دارند که برای شروع تعمیم و توسعه‌ی تفکر تابعی مطلوب هستند[۵,۳]. الگوی شکلی دنباله‌ای از اشکال است که اشیاء در شکل، از موردی به مورد دیگر تغییر می‌کنند به‌طوریکه این تغییرات قابل پیشگویی است. این الگوها معمولا شامل دو نوع متغیرند؛ یکی جنبه‌های قابل تعیین از این اشیاء (متغیرهای وابسته) و دیگری سیستم‌های شمارش یا اندیس‌گذاری (متغیرهای مستقل). رابطه‌ی تابعی در این الگوها رابطه‌ای است که بین شماره‌ی مرحله و بعضی وجوه این الگوها تشخیص داده می‌شود [۶].

مفهوم متغیر یکی از مفاهیم مطرح در تعمیم الگوهاست. اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای، در شاخه جبر استانداردهایی را مطرح می‌کند که توسعه‌ی فهم دانش‌آموزان از نمادین‌سازی جبری و به‌ویژه درک مفهوم متغیر را از نیازهای اساسی دانش‌آموزان می‌داند [۷]. توجه به الگوهای شکلی فرصتی را فراهم می‌کند تا دانش‌آموزان معنای متغیرها و چگونگی استفاده از آنها را درک کنند [۸].

استدلال نیز از جمله مفاهیمی است که در تعمیم الگوها مطرح می‌باشد. اثبات و استدلال یکی از پنج استاندارد فرآیندی است که شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا آن را پایه و اساس برای درک ریاضی می‌داند [۷]. رفع مشکلات دانش‌آموزان در استدلال یکی از دغدغه‌های معلمان است [۹] چنانکه بررسی نتایج تیمز ریاضی در سال ۲۰۱۱ نشان می‌دهد میانگین نمرات دانش‌آموزان ایرانی در پایه‌های چهارم و هشتم در حیطه‌ی استدلال ریاضی به طور معناداری از میانگین بین‌المللی پایین‌تر است [۱۰].

نقش الگوهای شکلی یک متغیره (یک متغیر مستقل) در توسعه درک متغیر در تحقیقات متعددی بیان شده است. در این میان به نظر می‌رسد الگوهای شکلی دو متغیره به دلیل ویژگی‌های خاص از جمله کنترل متغیرها (از نظر ثابت ومتغیر بودن) در درک مفهوم متغیر نقش مؤثری داشته باشند. چنانچه از مفهوم دو متغیره پیداست درک فضای سه‌بعدی و سه‌تایی‌ها (دو متغیر مستقل و یک متغیر وابسته) پیش‌نیازی برای درک الگوهای دو متغیره و تعمیم آنهاست. در این الگوها به جای یک متغیر مستقل، دو متغیر مستقل وجود دارد که به طور همزمان تغییر می‌کنند و بر متغیر وابسته اثر می‌گذارند. درک این سه‌تایی‌ها نیاز به توسعه‌ی طرحواره‌ی فضای R^2 به فضای R^3 دارد که از نظر شناختی مرحله‌ی پیچیده‌ای نیست و نیاز به بازسازی طرحواره‌ی موجود ندارد [۱۱]. بنابراین مطرح کردن الگوهای شکلی دومتغیره به نظر می‌رسد قابل توجیه باشد. هدف این تحقیق شناسایی طرحواره‌های پیش‌نیاز در تعمیم الگوهای شکلی دومتغیره است. بنابراین در راستای هدف تحقیق، سازه‌های ذهنی دانش‌آموزان در تعمیم الگوهای شکلی دو متغیره با چارچوب ساخت مفهوم عمل- فرآیند-شیء- طرحواره (APOS) شناسایی و به سؤالات زیر پاسخ داده شد:

۱) تجزیه تکوینی در تعمیم الگوهای شکلی دو متغیره چگونه است؟ ۲) دانش آموزان موفق چه سازه‌های ذهنی در تعمیم الگوهای شکلی دومتغیره دارند؟ ۳) دانش‌آموزان ناموفق چه سازه‌های ذهنی در تعمیم الگوهای شکلی دومتغیره ندارند؟

ادبیات تحقیق

تحقیقات داخلی و خارجی متعددی در زمینه‌ی تعمیم الگوهای شکلی و عددی به انجام رسیده است. برخی از این تحقیقات به بررسی راهبردهای تعمیم دانش‌آموزان پرداخته‌اند [۱۲-۱۴]. بعضی بر فاکتورهای مؤثر در تعمیم، از جمله مشخصه‌های تکالیف و طراحی سؤالات الگو تمرکز کرده‌اند [۱۵-۱۸] و برخی دیگر به نقش مهم استدلال در تعمیم پرداخته‌اند [۵،۹،۱۹] و تعداد بسیاری از این تحقیقات به تعمیم الگوها از منظر رشد تفکرجبری و تفکر تابعی، توجه کرده‌اند [۲۰-۲۲،۲،۳،۴]. تحقیقات اندکی نیز وجود دارند که به بررسی تعمیم الگوها با چارچوب APOS پرداخته و مراحل عمل- فرآیند- شیء- طرحواره را با مراحل تعمیمِ الگوی شکلی یک متغیره‌ی خطی تطبیق داده‌اند [۲۴-۲۳]. تعداد متغیر، یکی از مشخصه‌هایی است که در تکالیف تعمیم الگو مطرح شده است و لیکن تمام تحقیقات مطرح شده در رابطه با الگوهای خطی و درجه‌ی دومِ یک‌متغیره بوده است. بنابراین نوآوری این تحقیق، شناسایی سازه‌های ذهنی دانش‌آموزان در تعمیم الگوهای شکلی دومتغیره است. از این‌رو ادبیات تحقیق شامل مباحث نظری در تعمیم الگوها (متغیر و استدلال) و چارچوب ساخت مفهوم APOS برای شناسایی سازه‌های ذهنی دانش‌آموزان است. همچنین طرحواره‌ی فضای R^3 در الگوهای دومتغیره، در مباحث مرتبط با ادبیات تحقیق قرار می‌گیرد.

الگوهای شکلی و تعمیم

الگوها در حالت کلی دو نوع هستند؛ عددی و شکلی. الگوهای شکلی شامل تصویرهایی به عنوان اشیاء اولیه‌ی تعمیم هستند. الگوها در تکالیف تعمیم دارای ویژگی‌های زیر هستند:

۱) یک فرمول بسته یا مستقیم وجود دارد که می‌تواند از مراحل مفروض استخراج شود.

۲) مراحل معلوم به همراه یک فرضیه رسمی تفسیری یا تعمیم می‌توانند به توسعه‌ی الگو کمک کنند یعنی جملات جدید تولید کنند.

۳) مراحل در بعضی موارد شبیه هم هستند.

شباهت‌ها شامل ویژگی‌های ضمنی یا صریح هستند که در مراحل یک الگو مشترک می‌باشند. این ویژگی‌ها ذاتا پیشینی نیستند بلکه تفسیری هستند- یعنی فرد یادگیرنده بسته به دانش و تجربه‌هایش یک ویژگی توجیه‌پذیر مربوط به الگو را فرض کرده و سپس روی مراحل معلوم و نامعلوم تصویر می‌کند [۵].

ویگوتسکی بیان می‌نماید که یک کلمه به یک شیء واحد ارجاع نمی‌دهد بلکه به یک دسته یا کلاسی از اشیاء اشاره می‌کند. بنابراین هر کلمه یک تعمیم است. تعمیم یک فرآیند طبیعی و خودکار در توسعه‌ی زبان است. از طریق تعمیم ویژگی‌های مشترک اشیاء بازشناسی شده و اشیاء

می‌توانند از این طریق طبقه‌بندی شوند. چنانکه تعمیم در زبان حیاتی است در ریاضیات نیز چنین است [۳]. تعمیم در الگوها بدین معنی است که دانش‌آموزان از روی موارد خاص مشترکات را شناسایی می‌کنند یا عمل تجرید به معنای «دیدن عام از طریق خاص» را انجام می‌دهند و سپس این مشترکات را به موارد بعدی توسعه می‌دهند. در واقع در عمل تعمیم تمرکز به جای موارد خاص بر روی الگوها، رویه‌ها، ساختارها و روابط بین آنهاست.

چارچوب APOS

نظریه APOS چارچوبی است که توضیح می‌دهد افراد چگونه با ساختن و استفاده کردن از ساختارهای مشخصی، معانی مفاهیم ریاضی را می‌سازند. در این نظریه، تجزیه‌ی تکوینی مدلی است که ساختارها و مکانیسم‌های ذهنی را که دانش‌آموزان برای یادگیری یک مفهوم خاص ریاضی نیاز دارند، شرح می‌دهد. ساختارها در نظریه APOS طی مراحلِ عمل، فرایند، شیء و طرحواره شکل می‌گیرند [۲۵]. این ساختارها از طریق مکانیسم‌های ذهنی درونی‌سازی، فشرده‌سازی، هماهنگ‌سازی، معکوس‌سازی، جداسازی، خلاصه‌سازی، تجزیه و تعمیم ایجاد می‌گردند که در این بخش صرفا تعریف مواردی که در اثنای این نوشتار مطرح خواهد شد، بیان می‌گردد:

در مرحله‌ی عمل، یک مفهوم به صورت عمل بیرونی خارج از ذهن درک می‌شود که به صورت آشکار انجام می‌گردد و به وسیله‌ی دستورالعمل بیرونی هدایت می‌شود. هر عمل شامل گام‌هایی است که هر گام برانگیزنده‌ی گام بعدی است. یعنی گام‌ها نمی‌توانند حدس زده شوند و تصور شوند و از هیچکدام نمی‌توان جهش کرد. چنانچه عمل‌ها تکرار شوند و روی آنها بازتاب انجام گیرد، افراد به جای تکیه بر نشانه‌های خارجی به کنترل درونی آنها توجه می‌کنند و در واقع به مرحله‌ی فرآیند، منتقل می‌شوند. از مشخصه‌های این مرحله توانایی تصور گام‌ها بدون نیاز به انجام صریح آنها و توانایی جهش از روی گام‌ها و معکوس‌سازی آنها می‌باشد. درونی سازی مکانیسمی است که این انتقال ذهنی را فراهم می‌کند و موجب می‌شود تا فرد عمل را به صورت آگاهانه انجام دهد، روی آن تعمق کند و آن را با اعمال دیگر ترکیب نماید. فشرده‌سازی زمانی رخ می‌دهد که فرد یک عمل را روی فرآیند انجام می‌دهد یعنی یک ساختار پویا را به صورت ساختار ایستایی که اعمال می‌توانند روی آن انجام شوند، می‌بینند. اگر فردی از فرآیند مانند یک کلیت آگاه باشد درک می‌کند که تبدیلات می‌توانند روی آن کلیت عمل کنند و می‌توان چنان تبدیلاتی را واقعا (صریح یا در تصور) ساخت. در این صورت فرد فرآیند را به یک شیء شناختی فشرده‌سازی کرده است. وقتی یک فرآیند به یک شیء فشرده شده است، می‌تواند زمانی که نیاز باشد به فرایندهای تشکیل‌دهنده جداسازی شود. یا به عبارت دیگر با به کار بردن مکانیسم جداسازی فرد می‌تواند به فرآیندی برگردد که شیء از آن برآمده بود. در APOS طرحواره‌ها از تعامل عناصری که ذکر شدند، ایجاد می‌شوند. طبق نظر دوبینسکی یک طرحواره به واسطه پویایی و بازسازی‌های پیوسته‌اش در فعالیت‌های ریاضی که افراد در موقعیت‌های ریاضی خاص انجام می‌دهند، مشخصه سازی می‌شود [۲۶]. انسجام طرح‌واره از طریق توانایی فرد برای تعیین اینکه آیا طرحواره می‌تواند در موقعیت ریاضی خاص استفاده شود، مشخص می‌گردد.

طرحواره متغیر

انگلش و وارن متغیرها را ابزاری اساسی برای بیان تعمیم عنوان می‌کنند [۸]. آن‌ها بیان می‌کنند که در رویکرد سنتی، اولین برخورد دانش‌آموزان با یک متغیر در یک معادله است، جایی که متغیر نشان دهنده‌ی یک عدد مجهول است و این رویکرد فرصت کمی برای بررسی، جستجو و تجربه کردن ساختمان های جبری به دانش آموزان ارائه می‌کند. انگلش و وارن، رویکرد بدیلی را به نام رویکرد الگوسازی پیشنهاد می‌دهند. ارائه‌ی الگوهای شکلی و سعی در بیان شفاهی و انتقال آنها به بیان نمادین، رویکردی جدید در معرفی متغیراست و آن را با مفهوم تابع گره می زند. اولین بار لایب‌نیتز واژه‌ی متغیر و تابع را معرفی کرد. پیوند بین دو مفهوم تابع و متغیر تا نیمه‌ی قرن بیستم ادامه داشت و اعداد وابسته‌ای که با هم تغییر می کردند- مثل x و y- در معادله، متغیر نامیده می‌شدند. متغیر مدت‌ها با تابع همراه نبود بلکه به جای آن با مجموعه همراه شد و به عنوان عبارتی معرفی شد که جای عضوهای مجموعه‌ای می‌نشیند که حداقل دو عضو دارد. با این تعریف، تقریبا همه‌ی استفاده‌های مختلف از نمادها به نوعی متغیر بود. به‌تدریج با توسعه‌ی تاریخی این مفهوم، معانی جدید بسیاری برای متغیر به‌وجود آمد و موجب تبدیل آن به یک مفهوم پیچیده شد. یورسینی و تریگروس، متغیرها را با توجه به کاربرد اصلی آنها در جبر مقدماتی به سه دسته تقسیم بندی کرده‌اند و نشان داده‌اند که بسیاری از دانش‌آموزان نمی‌توانند بین کاربردهای مختلف متغیر به عنوان مجهول خاص، عدد عمومی و رابطه تابعی تمایز قائل شوند [۲۷]. در این مدل برای هر سه کاربرد، توانایی‌های متفاوتی شناسایی و به تفکیک ارائه شده‌اند. دانش‌آموزان برای درک متغیر به عنوان مجهول خاص باید قادر به شناسایی مجهول در مسئله باشند و برای درک متغیر به عنوان عدد عمومی باید بتوانند مقادیر بیشماری را به متغیر نسبت دهند. همچنین برای درک متغیر در رابطه تابعی باید بتوانند رابطه‌ی بین متغیرهای مرتبط را در مسئله تشخیص دهند. یورسینی و تریگروس توانایی‌های لازم برای درک متغیر در رابطه تابعی را شامل مولفه‌های زیر می‌دانند:

- F1: تشخیص رابطه‌ی بین متغیرهای مرتبط؛
- F2: تعیین مقادیر متغیرهای وابسته با توجه به مقدار متغیر مستقل داده شده؛
- F3: تعیین مقادیر متغیرهای مستقل داده شده با توجه به مقدار متغیر وابسته‌ی داده شده؛
- F4: تشخیص تغییرات مشترک متغیرهای موجود در رابطه؛
- F5: تعیین بازه‌ی تغییرات یک متغیر با توجه به بازه‌ی تغییرات متغیر دیگر؛

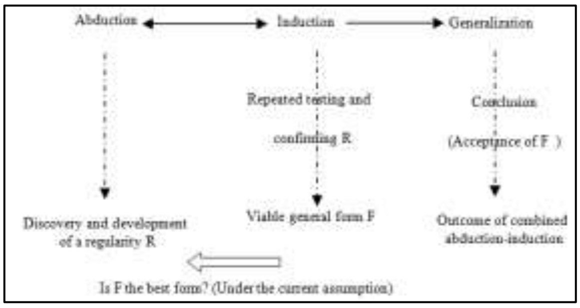
- F6: نمادسازی رابطه تابعی بنابر تجزیه و تحلیل داده‌های مسئله [۲۸].

طرح‌واره استدلال

مفهوم‌سازی سنتی مربوط به ماهیت استدلال ریاضی حامی این دیدگاه است که استنتاج و استقرا دو دسته‌ی استدلال هستند. پیرس استدلال نوع سومی به نام ابداکسیون را معرفی می‌کند [۲۹]. مفهوم ابداکسیون درحوزه‌ی رشته‌های علمی زبان، هوش مصنوعی، فلسفه و نشانه‌شناختی معمول و پیش‌پا افتاده است. تحقیقات اخیر در هندسه مدرسه [۳۰]، جبر [۳۱،۹]، اهمیت ابداکسیون را در استدلال، شکل‌گیری حدس‌ها و در ایجاد تعمیم‌ها و اثبات‌های قابل قبول آشکار می‌کنند. جوزفسون فرم زیر را برای ابداکسیون پیشنهاد داده است که اساسا مفهوم پیرس از ابداکسیون را به عنوان مولد فرضیه‌ها توسعه می‌دهد تا انتخاب فرضیه‌هایی را شامل شود که بهترین توضیح را نتیجه می‌دهند [۵]:

- D یک مجموعه از داده‌هاست(حقایق، مشاهدات، مفروضات)
- H، D را توضیح می‌دهد (اگر درست باشد، D را توضیح خواهد داد.)
- هیچ فرضیه دیگری به خوبی H نمی‌تواند D را توضیح دهد.
- بنابراین H احتمالا درست است.

ریورا تعمیم را به صورت ترکیبی از استدلال ابداکسیون و استقرا بیان می‌کند و نقش مرکزی ابداکسیون را در تعمیم الگوها، تاکید می‌کند. در این فرآیند ترکیبیِ تعمیم (ابداکسیون- استقرا) فراگیران یک قانون قابل قبول (یعنی یک تعمیم آزمایشی) را جستجو و کشف می‌کنند که بایستی مراحل معلوم در الگو را توضیح دهد و سپس برای ساختن مراحل نامعلوم در الگوی مفروض به کار رود. نقطه‌ی شروع استدلال ابداکتیو زمانی است که آنها یک فرضیه تبیینی یا یک قانون برای الگوی مفروض بر پایه‌ی مراحل موجود پیشنهاد می‌دهند. سپس آنها از ادعای ابداکتیو برای توسعه‌ی الگو استفاده می‌کنند یعنی مراحل نزدیک مثلا ۴ یا ۵ (تکالیف تعمیم نزدیک) را می‌سازند و مکرر آزمون می‌کنند- یعنی مرحله استقرا- که سرانجام آن‌ها را قادر می‌کند یا قانون را تایید کنند یا ضرورتی برای ایجاد ابداکسیون دیگر ببینند. هنگامی که قانون تایید شد یک تعمیم ظاهر می‌شود که به آنها اجازه می‌دهد تکالیف تعمیم دور مثلا مرحله ۷۷ را در الگو بدون هیچ زحمتی برای ساختن مرحله ۷۶ام به دست آورند. ابداکسیون بعدی زمانی است که قانون باعث شود دانش‌آموزان در انجام تکالیف تعمیم دور (مرحله‌ی ۹ به بعد) با مشکل مواجه شوند [۵]. ریورا این مراحل را در شکل۱ به تصویر کشیده است: در مرحله آغازی با تعداد کمی از نمونه‌ها (مراحل ۱ و ۲ و۳) قاعده‌ی R کشف می‌شود و سپس با آزمودن و تصدیق، فرم کلی F پیشنهاد می‌شود و طبق موارد بیان شده، ممکن است دوباره به ابداکسیون جدیدی نیاز باشد، یا اینکه فرم F به عنوان تعمیم نهایی پذیرفته شود:

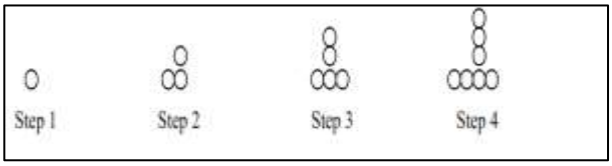


شکل ۱: طرح‌واره‌ی تعمیم الگو
Fig. 1: Pattern generalization scheme

مراحل تعمیم به درک این که چرا دانش‌آموزان به انجام دادن هر دوی تکالیف دور و نزدیک فراتر از محاسبه‌ی نتایج وابسته نیاز دارند، کمک می‌کند. تکالیف تعمیم نزدیک کمک می‌کند تا دانش‌آموزان فرآیند تصدیق (مرحله‌ی استقرا) را با دنبال کردن یک فرضیه تبیینی (ابداکسیون) یا یک تعمیم آزمایشی شروع کنند. با اعمال تکراری حول نمونه‌هایی که قابل کنترل هستند، تعمیم آزمایشی به سمت تصدیق شدن پیش می‌رود. در نتیجه به آرامی یک شکل قابل پذیرش یا مناسب با الگو و یک ساختار تفسیری تولید می‌شود. رو به رو شدن با تکلیف تعمیم دور، یک لحظه آشفتگی را نشان می‌دهد. در این مرحله، راحتیِ استفاده از تعمیم آزمایشی در موارد دیگر، آزموده می‌شود. موفقیت پی‌درپی درتکلیف‌های تعمیم دور، لحظاتی از فشرده‌سازی را علامت می‌دهد که یک تعمیم نهایی ایجاد می‌شود و به عنوان یک شیء و یک فرآیند دیده می‌شود. شیء (یعنی فرمول مستقیم) ساختار الگو را انتقال می‌دهد و فرآیند (یعنی ضرایب منحصر به فرد، جملات و عملیات تعیین شده) قدرت محاسباتی تعمیم برقرار شده در تعیین یک خروجی دقیق را انتقال می‌دهد. بنابراین هنگامی که دانش‌آموزان یک تعمیم ریاضی را انجام می‌دهند، آنها از طریق ابداکسیون و استقرا پیش می‌روند [۱۹]. مسئله‌ی مهمی که مطرح می‌باشد این است که چطور یک معلم می تواند دانش‌آموزان را برای ارزیابی موجه و مناسب بودن ابداکسیون کمک نماید؟ به ویژه اگر این حقیقت را در نظر بگیریم که ممکن است چندین جایگزین قابل قبول در دسترس برای انتخاب وجود داشته باشد. حل این مسئله به طرقی به دغدغه‌ی عملی معلمان در کمک به دانش آموزان‌شان برای ایجاد قضاوت‌های مستدل درباره‌ی استنباط‌های بسط‌دهنده در تکالیف تعمیم مربوط می‌شود که شامل راه‌هایی برای ارزیابی و تطبیق تعمیم دانش‌آموزان با تعمیمِ قصدشده، است. ریورا و بکر بیان می‌کنند هر تعمیم ابداکتیو باید شرایط زیر را برآورده کند:

- شرط غیریکنواخت: یک تعمیم ابداکتیو از یک الگو که بهترین توضیح را ارائه می‌دهد، می‌تواند نادرست باشد. اگر شرایط افزوده یا متفاوت ایجاد شود ضرورتا یک تعمیم مختلف را خواهد ساخت. در واقع شرط غیر یکنواختی اجازه می‌دهد یک نتیجه‌ی معین به وسیله‌ی شمول اطلاعات اضافی در مقدمات، نقض شود. به عنوان مثال برای الگوی شکل ۲ بهترین فرمول $2n-1$ است اگر دانش آموز فرض کند که هر بار در ردیف عمودی یکی بیشتر از عمودی دارد. اما اگر این فرض را اضافه

کنیم که الگو به صورت متناوب بعد از هر چهار جمله که نشانه‌های آن به عنوان مقدمات اولیه داده شده است، تکرار می‌شود، دیگر فرض قبلی درست نخواهد بود.



شکل ۲: الگوی شکلی
Fig. 2: Figural pattern

- شرط نقاط برش: ابداکسیونی که تنها به واسطه‌ی تعداد کم نمونه‌ها، تعمیم را توسعه می‌دهد و یک فرم کلی را از تکرار ابداکسیون به همان فرم، روی چند نمونه بیشتر استقرا می‌کند، ممکن است هنوز بهترین توضیح را نتیجه ندهد. با این وجود، تعمیم ابداکتیو که بهترین توضیح را ارائه می‌دهد می‌تواند توضیح دهد که چرا و چگونه تعمیم برای کل جامعه برقرار است. در الگوی شکل ۲ دانش‌آموزی با این ابداکسیون که «چون الگوی ۱۰ ام، ۱۹ دایره دارد پس الگوی ۲۰ ام، ۲۹ دایره و الگوی ۳۰ ام، ۳۹ دایره» نمی‌تواند به نقاط بین این الگوها (مثلا مرحله‌ی ۲۲) پاسخ دهد.

- شرط برون یابی عمودی: یک تعمیم ابداکتیو که بهترین توضیح از یک الگو را ارائه داده است، اغلب ساختار عمیقی از نشانه هایی که در دسترس هستند یا نیستند، استخراج می‌کند. به عنوان مثال در الگوی شکل ۲ ، تعمیم جمعی «فقط دو را با هر شکل جمع می کنیم»، یک مشاهده‌ی سطحی است و به آسانی در تکالیف تعمیم دور نمی‌تواند به کار برده شود. دانش‌آموزی که برمبنای یک دانش ادراکی غیر قابل مشاهده عمل می‌کند، قادر است تا رابطه‌ی بین دو مجموعه‌ی دایره را ببیند.

- شرط ابعاد حذفی: یک تعمیم ابداکتیو از یک الگو که بهترین توضیح را ارائه می‌دهد از میان چندین تعمیم ابداکتیو بر مبنای اینکه بیشترین درک از الگو را حاصل می‌کند، فراتر از آنچه به صورت سطحی مشهود است، انتخاب شده است. به عنوان مثال تعمیم دانش‌آموزی که رابطه‌ی بین دو دسته دایره را در الگوی شکل۲ دیده است تعمیمی که از روی ظواهر و رابطه‌ی بین ارقام (الگوی دهم ۱۹ دایره، الگوی بیستم ۲۹ دایره و...) است را حذف می‌کند.

معلمانی که از شرایط مذکور در رابطه با تعمیم الگو آگاه باشند، قادر خواهند بود درباره ابداکسیونی که بهترین توضیح را ارائه می‌دهد، قضاوت کنند. همچنین قادر خواهند بود توضیحات بالقوه‌ی بد و خوب را جدا کنند [۹]. همچنین این آگاهی می‌تواند مانع از تفکر گمراهانه‌ی دانش‌آموزان که هر چیزی تعمیم ابداکتیو هست، گردد.

طرحواره‌ی فضای R^3

در الگوهای شکلی یک‌متغیره، طرحواره‌ی مورد نیاز، فضای دوبعدی R^2 است. یک متغیر مستقل وجود دارد که مربوط به شماره‌ی شکل و یا مرحله‌ی الگو است و یک متغیر وابسته که مربوط به یک جنبه‌ی قابل تعیین از الگو می‌باشد. در الگوهای شکلی دو متغیره، طرحواره‌ی فضای سه‌بعدی برای تعمیم نیاز است. در این فضا دو متغیر مستقل و یک متغیر وابسته وجود دارد و برای درک این فضا، ساختارشناختی جدیدی نیاز نیست. آنچه که در انتقال از فضای دو بعدی به سه بعدی رخ می‌دهد می‌تواند مکانیسم جذب در تعمیم توسعه‌ای باشد. در واقع جذب دانش به مکانیسمی اشاره دارد که فرد به وسیله‌ی آن می‌تواند یک ساختار شناختی را ضرورتا بدون تغییر استعمال کند تا شیء شناختی را که فرد قبلا با آن برخورد نکرده است، شامل شود. هرل و تال نیز تعمیم را از منظر شناختی و تشکیل طرحواره در سه دسته طبقه‌بندی می‌کنند: تعمیم توسعه‌ای، تعمیم بازسازی کننده و تعمیم منفصل [۳۲]. در تعمیم توسعه‌ای، فرد دامنه‌ی کارآمدی یک طرحواره را گسترش می‌دهد، بدون اینکه بخواهد طرحواره را بازسازی کند. در واقع این تعمیم شامل توسعه دادن اطلاعات موجود بدون تغییر در مفاهیم و ایده‌های قبلی است. به عنوان مثال، در فضای برداری دانشجویان ابتدا روی R و R^2 می‌آموزند. سپس مولفه‌ی دیگری به صفحه‌ی R^2 افزوده می‌شود و فضای R^3 به آنها معرفی می‌شود. اگر چه فضای معرفی شده جدید هست ولی نیازی به تغییر در طرز فکر و انگاره‌های جاری آن‌ها نیست [۱۱]. در تعمیم بازسازی کننده فرد یک طرحواره‌ی موجود را بازسازی می‌کند تا بتواند دامنه‌ی کارآمدی آن را گسترش دهد. در تعمیم منفصل، فرد در حرکت از یک موقعیت آشنا به یک موقعیت جدید، برای کنار آمدن با موقعیت جدید، یک طرحواره‌ی جدید و جدا از طرحواره‌ی قبلی می‌سازد و آن را به طرحواره‌هایش اضافه می‌کند. از نظر هرل و تال، مطلوب‌ترین رویکرد به تعمیم، فراهم آوردن تجربه‌هایی است که به یک درک معنادار از موقعیت منجر شده و شرایط حرکت به سوی موارد کلی را با استفاده از تعمیم توسعه‌دهنده ممکن سازد. الگوهای شکلی دومتغیره دانش‌آموزان را در معرض چنین تعمیمی قرار می‌دهد.

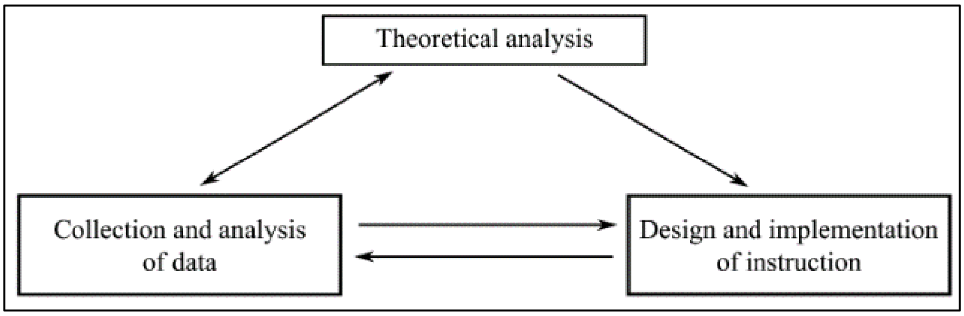
روش تحقیق مبتنی بر APOS

نظریه‌ی APOS، نظریه ای شامل مؤلفه‌های نظری، روش‌شناسی و پداگوژیکی است که بسیار به هم نزدیک هستند. یک تحقیق یا توسعه‌ی برنامه‌درسی مبتنی بر نظریه APOS شامل سه مؤلفه است: تحلیل نظری، طراحی و اجرای آموزش، جمع آوری و تحلیل داده‌ها [۲۵]. شکل ۳ نشان می‌دهد که چگونه این سه مؤلفه در ارتباط هستند:

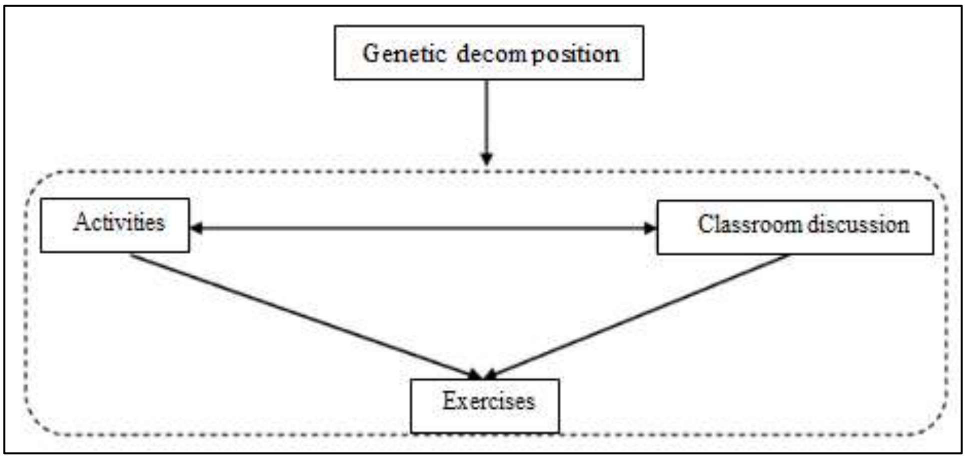
طبق این نظریه، تحقیقی که با استفاده از چارچوب APOS انجام می‌شود با یک تحلیل نظری یا حدسی از سازه‌های ذهنی مورد نیاز دانش‌آموزان برای ساخت یک مفهوم خاص، شروع می‌شود. این حدس بر پایه‌ی تحلیل خود مفهوم ریاضی، تجربه‌های کلاسی محققین و یا نتایج هر داده‌ی در دسترس ساخته می‌شود و منجر به تدوین تجزیه تکوینی مقدماتی می‌گردد و سپس با پاسخ‌های دانش‌آموزان به ابزارهای مختلف تحقیق، مورد آزمون قرار می‌گیرد. تجزیه تکوینی توصیفی منحصر به فرد و یا قطعی از چگونگی درک دانش‌آموزان نیست، بلکه فقط یک مدل از چگونگی درک دانش‌آموزان از موضوع است و فایده‌ی آن برای تجزیه

و تحلیل اطلاعات به دست آمده از دانش‌آموزان می‌باشد. آنچه که نوعا رخ می‌دهد این است که دانش‌آموزان، شواهدی از برخی سازه‌های ذهنی پیش بینی نشده نشان می‌دهند و مشکلاتی در به کار بردن برخی سازه های ذهنی حدس زده شده، دارند که این امر منجر به اصلاح تجزیه تکوینی می‌شود تا سازه‌هایی را که دانش‌آموزان می‌سازند بهتر منعکس کند و همچنین اطلاعاتی از طراحی و آزمون کلاسی دهد تا به دانش‌آموزان فرصتی داده شود برای غلبه بر مشکلات، سازه‌هایی را بسازند. بنابراین تحلیل نظری جلوبرنده‌ی طراحی و اجرای آموزش از طریق فعالیت‌هایی است که توسط تحلیل نظری، برای پروردن ساخت‌های ذهنی ایجاب شده‌اند. فعالیت‌ها و تمرین‌ها برای کمک به دانش‌آموزان در ساخت اعمال و درونی‌سازی آنها به فرآیندها، فشرده‌سازی فرآیندها به اشیاء و هماهنگ‌سازی دو یا چند فرآیند برای ساختن فرآیندهای جدید، طراحی شده‌اند. اجرای آموزش فرصتی برای جمع آوری و تحلیل داده‌ها فراهم می‌کند و در روش تحقیق مبتنی بر APOS، توسط چرخه‌های ACE انجام می‌شود. این چرخه، یک استراتژی پداگوژیکی هست که شامل سه گام فعالیت‌ها، بحث کلاسی و تمرین‌ها می‌باشد.

در اولین گام این چرخه فعالیت‌ها هستند و معمولا دانش‌آموزان به صورت تشریک مساعی روی تکالیفی کار می‌کنند که به منظور کمک به آنها در ساختن ساخت های ذهنی پیشنهاد شده توسط تجزیه تکوینی، طراحی شده‌اند. بحث کلاسی دومین گام این چرخه شامل بحث‌های کلاسی در گروه های کوچک و بحث های کلاسی تحت هدایت آموزشگر است. بحث های کلاسی و کار در کلاس به افراد فرصتی می‌دهد تا روی کارشان تعمق کنند. چنانچه آموزشگر بحث را هدایت می‌کند، ممکن است دانش‌آموزان تعاریفی ارائه دهند، توضیحاتی بدهند و یک مروری بر آنچه سایر دانش‌آموزان فکر و کار کرده‌اند، داشته باشند. تمرین خانه، گام سوم این چرخه، شامل مسائل استانداردی است که بحث کلاسی را تقویت می‌کند و از توسعه‌ی ساخت ذهنی پیشنهاد شده توسط تجزیه تکوینی حمایت می‌کند. همچنین کمک می‌کند تا افراد آنچه را یاد گرفته‌اند به کار ببرند و مفاهیم مرتبط ریاضی را لحاظ کنند. شکل۴ چگونگی ارتباط این سه گام را نشان می‌دهد. فلش از تجزیه تکوینی به کادر نقطه‌چین مبین این حقیقت است که تجزیه تکوینی روی هر سه مولفه‌ی ACE تاثیر دارد.



شکل ۳: چرخه‌ی تحقیق (برگرفته از [۳۳])
Fig. 3: Research cycle (adapted from [33])



شکل ۴: چرخه تدریس ACE
Fig. 4: The ACE teaching cycle

روش تحقیق

تحقیق حاضر بخشی از یک تحقیق گسترده است که به روش تحقیق کمی-کیفی (آمیخته) انجام شده است. چهارچوب تحقیق، چهارچوب APOS با به کار گیری چرخه‌های تدریس ACE می‌باشد. این تحقیق در سه مرحله انجام گرفت. در مرحله‌ی اول تجزیه تکوینی مقدماتی برای تعمیم الگوهای شکلی دو متغیره، با استفاده از پیشینه‌ی تحقیق، تحلیل خود مفهوم و تجربیات محقق طراحی شد. در مرحله‌ی دوم، جامعه‌ی آماری، دانش آموزان پایه‌ی هفتم مدارس دولتی شهرستان ملکان به تعداد ۴۹۳ دانش آموز بودند. مطابق با فرمول تعیین حجم نمونه‌ی کوکران، تعداد ۲۲۰ نفر دانش آموز دختر و پسر پایه هفتم شهرستان ملکان (آذربایجان‌شرقی)، درترم دوم سال تحصیلی ۲۰۱۸ میلادی، در آزمون اولیه شرکت کردند. آزمون شامل ۷ تکلیف با موضوع الگوهای شکلی (یک‌متغیره، دومتغیره) بر اساس چهارچوب APOS طراحی شد و روایی آزمون توسط سه آموزشگر ریاضی و چهار معلم مجرب بررسی و مورد تایید قرار گرفت. پایایی آزمون و هماهنگی درونی سؤالات با یافتن ضریب آلفای کرونباخ و آلفای ۰/۶۸ تأیید گردید. مدت زمان پاسخگویی حدودا ۹۰ دقیقه بود. مرحله‌ی سوم تحقیق با اخذ رضایت از اداره آموزش و پرورش شهرستان و مدیران مدارس و اولیای دانش‌آموزان جمعا با ۱۹ دانش‌آموز داوطلب آغاز شد. این مرحله به صورت کیفی در سه چرخه‌ی تحقیق مطابق با شکل۳، با زیر چرخه های تدریس ACE انجام گرفت:

چرخه‌ی اول

- مرحله اول: تکمیل تجزیه تکوینی مقدماتی با تجزیه و تحلیل پاسخ‌های کتبی دانش‌آموزان به سؤالات آزمون اولیه و مصاحبه‌ی نیمه ساختار یافته با تعداد ۷ دانش آموز داوطلب.
- مرحله دوم: طراحی آموزشی، آزمون کلاسی و مصاحبه با دانش اموزان جهت تشخیص سازه های موجود و سازه‌های ناقص طبق چرخه‌های ACE.

چرخه‌ی دوم

- مرحله اول: تکمیل تجزیه تکوینی بر اساس نتایج چرخه اول، مصاحبه نیمه ساختار یافته از سؤالات آزمون اولیه طراحی شده با چارچوب APOS با تعداد ۷ دانش‌آموز جدید.
- مرحله دوم: استفاده از طراحی‌های آموزشی اصلاح شده‌ی چرخه‌ی اول و مصاحبه‌های نیمه ساختار یافته با دانش‌آموزان در آزمون‌های کلاسی طبق چرخه‌های ACE.

چرخه‌ی سوم

- مرحله اول: تکمیل تجزیه تکوینی بر اساس نتایج چرخه دوم، مصاحبه نیمه‌ساختاریافته از سؤالات آزمون اولیه طراحی شده با چارچوب APOS با تعداد ۵ دانش‌آموز جدید.
- مرحله دوم: استفاده از طراحی‌های آموزشی اصلاح شده‌ی چرخه‌ی دوم و مصاحبه‌های نیمه ساختار یافته از دانش‌آموزان در آزمون‌های کلاسی طبق چرخه‌های ACE، رسیدن به تجزیه تکوینی پایدار.

این چرخه‌ها، همراه با ضبط صوتی و تصویری، در خارج از مدارس دانش‌آموزان و در محل خانه ریاضیات شهرستان انجام گردید. ابزار جمع‌آوری داده‌ها، مشاهده‌ی کلاسی، مصاحبه، آزمون‌ها، بحث‌های کلاسی، فیلم‌ها و صوت‌های ضبط شده در چرخه‌های تدریس، بودند. جلسات پژوهش چهار ماه، به طول انجامید. چرخه‌ی اول در ۶ جلسه (فروردین ماه)، چرخه‌ی دوم در ۵ جلسه (اردیبهشت ماه و خرداد ماه) و چرخه‌ی سوم در ۴ جلسه (تیرماه) اجرا گردید. هر جلسه به طور میانگین یک و نیم ساعت بود. طبق نمرات میان‌ترم که از مدرسه‌ی محل تحصیل دانش‌آموزان اخذ شده بود، در هر چرخه، دانش‌آموزانی از هر سه دسته‌ی متوسط، پایین‌تر و بالاتر از میانگین، حضور داشتند.

ابزار تحقیق

ابزارهایی که در این تحقیق مورد استفاده قرار گرفتند، در این بخش تشریح می‌گردند:

- *آزمون اولیه:* آزمون اولیه شامل ۷ تکلیف بود که طبق چارچوب APOS طراحی شد. در این تحقیق ۴ تکلیف شامل ۲۴ سؤال که در پیوست۱ آمده است، مورد بحث قرار می‌گیرد. تکالیف الگوهای شکلی، با توجه به پیشینه‌ی تحقیق و مطالعه‌ی توابع، طبق دسته-بندی محقق، در چهار دسته‌ی زیر قرار گرفت:

یک متغیره‌ی خطی: رابطه‌ای که برای الگو نوشته می شود، تابع خطی با یک متغیر مستقل و یک متغیر وابسته است. این توابع به شکل کلی $f(x) = ax + b$ می‌باشند. به عنوان مثال رابطه‌ی تابعی الگوی خطی در پیوست ۱ به صورت $f(x) = 3n + 2$ می باشد.

یک متغیره‌ی درجه دوم: رابطه‌ای که برای الگو نوشته می‌شود، تابع درجه دوم با یک متغیر مستقل و یک متغیر وابسته است. این توابع به شکل کلی $f(x) = ax^2 + bx + c$ می‌باشند. رابطه‌ی تابعی تکلیف دوم در پیوست ۱ به صورت $f(x) = n(n+2) + 2 = n^2 + 2n + 2$ می‌باشد.

دو خطی: رابطه‌ای که برای الگو نوشته می‌شود، تابع دو خطی با دو متغیر مستقل و یک متغیر وابسته است. این توابع دارای خاصیت $f(ax, by) = abxy$ می باشند. رابطه‌ی تابعی تکلیف سوم در پیوست ۱ به صورت $f(1n, 1m) = 1nm = nm$ می‌باشد.

دومتغیره‌ی کلی: رابطه‌ای که برای الگو نوشته می‌شود، تابع دو متغیره است که شامل دو متغیر مستقل و یک متغیر وابسته است. رابطه‌ی تابعی تکلیف چهارم در پیوست ۱ به صورت $f(n, m) = n(m+2) + 2 = nm + 2n + 2$ می‌باشد.

این ابزار برای شناسایی طرحواره‌های پیش‌نیاز دانش‌آموزان در تعمیم الگوهای شکلی و در نتیجه تدوین تجزیه تکوینی برای تعمیم الگوهای شکلی دومتغیره، مورد استفاده قرار گرفت.

- *ابزار تدریس و سنجش طرحواره متغیر:* ابزار تدریس و سنجش طرحواره‌ی متغیر شامل سؤالاتی با محتوای انواع کاربردهای متغیر (متغیر به عنوان مجهول خاص، متغیر به عنوان عدد عمومی و متغیر

در رابطه‌ی تابعی) است.از این ابزار در تدریس، ارزشیابی و مصاحبه‌های کلاسی استفاده شد.

- *ابزار تدریس و سنجش طرحواره استدلال:* ابزار تدریس و سنجش طرحواره‌ی استدلال، چهار شرط ریورا و بکر برای استدلال و تعمیم ابداکتیو شامل ۱) شرط غیر یکنواختی ۲) شرط نقاط برش ۳) شرط برون یابی عمودی ۴) شرط ابعاد حذفی است. از این ابزار در حین مصاحبه از آزمون اولیه و آزمون‌های کلاسی استفاده شد. استدلال‌هایی که این شروط را نقض می‌کردند، تصحیح می‌شدند و به دانش‌آموزان تذکر داده می‌شد.

- *ابزار تدریس و سنجش طرحواره R^3 :* ابزار تدریس و سنجش طرحواره R^3 با استفاده ازمفاهیم آشنای مساحت، تناسب چندگانه و عبارت جبری دو متغیره، طراحی شد و در آزمون‌ها و بحث‌های کلاسی استفاده گردید. همچنین از الگوهایی که در آن‌ها دو متغیر از هم تفکیک شده‌اند، استفاده شد تا محقق بتواند مشکلات دانش‌آموزان را در برخورد با دو متغیر مستقل، بهتر شناسایی نماید.

نتایج تحقیق و بحث

در این بخش به سؤالات تحقیق به ترتیب پاسخ داده می‌شود:

سؤال اول: تجزیه تکوینی در تعمیم الگوهای شکلی دو متغیره چگونه است؟

پاسخ: ابتدا تجزیه تکوینی مقدماتی، طبق پیشینه‌ی تحقیق، تحلیل خود مفهوم، تجربه‌ی محقق طراحی شد. طرحواره‌های پیش‌نیاز متغیر، استدلال و R^3 شناسایی شدند، ولیکن چگونگی ارتباط دقیق آنها بعد از آزمون و چرخه‌های تحقیق مشخص گردید.

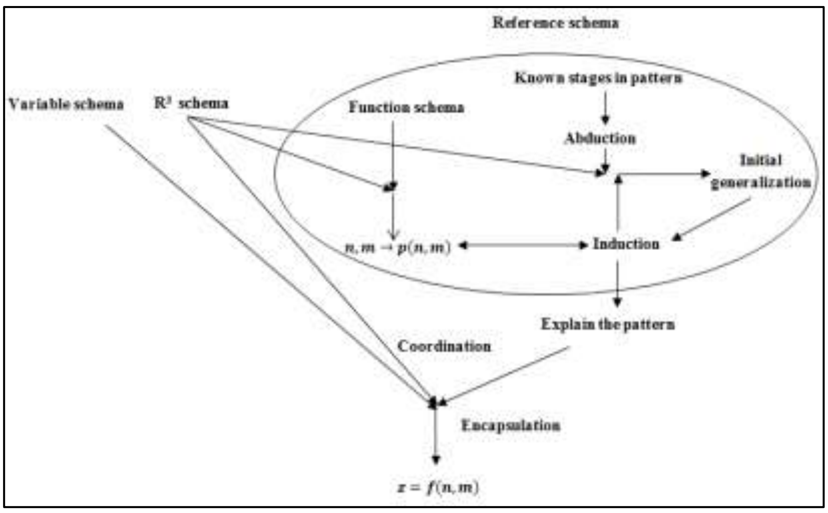
با تجزیه و تحلیل پاسخ‌های تعداد ۲۲۰ دانش‌آموز در آزمون کتبی اولیه و اجرای چرخه‌های تحقیق، تجزیه تکوینی نهایی به صورت شکل ۵ تدوین گردید. طبق این مدل، فرآیند تعمیم در الگوهای شکلی دو متغیره به صورت زیر است:

دانش‌آموز مراحل معلوم در الگوی شکلی را می‌بینند و تعداد را می‌شمارد و می‌نویسد و مرحله‌ی بعدی را می‌کشد (مرحله عمل). در این مرحله استدلال ابداکسیون را با طرحواره R^3 هماهنگ کرده و از روی نتایج دو بعد (ردیف و ستون یا طول و عرض) فرضیه‌ای تبیینی یا تعمیم مقدماتی می‌سازد. سپس این فرضیه را با استقرا (در چند مورد) آزمون می‌کند. طرحواره‌ی تابع و طرحواره‌ی R^3 کمک می‌کنند تا مقدار گزاره‌ای درست یا غلط تحویل داده شود و برای چند مورد تکرار شود. اگر تابع مقدار غلط را تحویل دهد، فرضیه به ابداکسیون برگشت داده می‌شود تا با ابداکسیونی جدید، فرض بهبود یابد یا کنار گذاشته شود، تا زمانی که تمام مقادیری که تابع برمی‌گرداند، درست باشد. دانش‌آموز در این مرحله خواهد توانست الگو را با ساختارش توضیح دهد که نشانه ای از درونی‌سازی عمل و ورود به مرحله‌ی فرآیند است. این توضیح با طرحواره‌های متغیر و R^3 هماهنگ شده و به یک تابع دومتغیره یا تعمیم نهایی فشرده‌سازی می‌شود که نشانه‌ای از ظهور مرحله شیء است.

سؤال دوم: دانش‌آموزان موفق چه سازه‌های ذهنی، در تعمیم الگوهای شکلی دومتغیره دارند؟

پاسخ: طبق تجزیه تکوینی ارائه شده در بخش قبل، دانش‌آموزان موفق درک درستی از مفهوم متغیر دارند و طرحواره‌ی استدلال آن‌ها به درستی بنا شده است. همچنین به‌موقع می‌توانند از طرحواره‌ی R^3 استفاده کنند و تغییرات دو بعد (دو متغیر مستقل) را با هم در نظر بگیرند. این دانش‌آموزان طرحواره‌های استدلال، متغیر و R^3 را هماهنگ کرده و طرحواره‌ی تعمیم خود را شکل می‌دهند. جدول۱ تعداد و درصد دانش‌آموزان موفق در سؤالات تعمیم را نشان می‌دهد.

نکته‌ی قابل توجهی که این جدول نشان می‌دهد این است که تنها ۱۰ درصد دانش آموزان به الگوی شکلی دو متغیره‌ی کلی در آزمون اولیه پاسخ داده‌اند که نزدیک به درصد پاسخگویی به الگوی شکلی درجه دوم خطی است.



شکل ۵: تجزیه تکوینی تعمیم الگوی شکلی دو متغیره

Fig. 5: Genetic decomposition of two-variable figural pattern generalization

همچنین ۴۵درصد دانش‌آموزان به الگوی شکلی دومتغیره‌ی دوخطی پاسخ داده‌اند که این درصد نزدیک به درصد پاسخگویی به الگوی شکلی یک‌متغیره‌ی خطی است. با توجه به تنظیم تکالیف با مشخصه‌های یکسان (مانند شکل مربع، پیوسته بودن، شباهت ظاهری مطابق با اصول گشتالت،و درجه‌ی گشتالت که مربوط به وضوح ارتباط شماره‌ی الگو با ساختار فیزیکی الگو است)، به نظر می‌رسد یک متغیره یا دو متغیره بودن عامل تعیین کننده‌ای در موفقیت در تعمیم نباشد و عوامل مؤثر دیگری وجود دارد که در بخش بعد (مربوط به طرحواره های ناقص دانش‌آموزان در تعمیم الگوهای شکلی) به آنها پرداخته می‌شود.

جدول ۱: فراوانی دانش آموزان موفق در تعمیم

Table 1: The frequency of successful students in generalization

Figural pattern	Frequency (220 students)	Percent
One variable- linear	126	57%
One variable-quadratic	39	17%
Bi-linear	100	45%
Tow-variable	24	24%

سؤال سوم: دانش‌آموزان ناموفق چه سازه‌های ذهنی، در تعمیم الگوهای شکلی دومتغیره ندارند؟

طبق جدول ۱، ۹۰ درصد دانش‌آموزان در الگوی دومتغیره‌ی کلی ناموفق بوده‌اند که نزدیک به درصد ناموفقیت در الگوی یک متغیره ی درجه دوم است. همچنین ۵۵ درصد در الگوی دومتغیره‌ی دو خطی ناموفق بوده‌اند که نزدیک به درصد ناموفقیت در الگوی خطی یک متغیره است. با توجه به تجزیه وتحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان ناموفق بر اساس چارچوب APOS، آن‌ها حداقل در یکی از طرحواره‌های متغیر، استدلال و R^3 در زمان تعمیم با مشکل مواجه هستند که به ترتیب به آنها پرداخته می‌شود:

- *طرحواره‌ی ناقص دانش‌آموزان از مفهوم متغیر در تعمیم الگوهای شکلی:* تجزیه و تحلیل پاسخ‌های ۲۲۰ دانش‌آموز به آزمون اولیه و مصاحبه با ۱۹ دانش‌آموز در چرخه‌های تدریس، نشان داد که دانش‌آموزان در تعمیم الگوهای شکلی در رابطه با درک متغیر مشکلاتی دارند. در طی مصاحبه‌ها دانش‌آموزان تعاریف ناقصی از متغیر ارائه می‌دادند:

I: می‌تونید تعریفی از متغیر ارائه بدهید؟

S_1 متغیر یک عدد است عددی که نه جبر داشته باشد و نه مثبت و منفی.

S_2 حرف a یک متغیر است.

S_3 متغیر یعنی تغییر کننده.

در هر سه مورد مطابق با مدل سه کاربرد تریگورس و یورسینی (۲۰۰۳) دانش آموزان تنها به وجهی از کاربرد متغیر اشاره داشتند و هیچکدام نمی‌توانستند تعریفی جامع از متغیر ارائه دهند.

مشکلات دانش‌آموزان در رابطه با درک متغیر، به صورت زیر کدبندی شدند:

- *کد ۱.* تمرکز بر متغیرهای n یا x: علیرغم شماره گذاری متغیر با L در صورت سؤال ، در حین نوشتن رابطه از حرف n استفاده می‌کنند.
- *کد ۲.* مساوی قرار دادن رابطه با یک مقدار: بعد از نوشتن رابطه‌ی تعمیم آن را مساوی عددی قرار می‌دهند و یا اعداد را با ضرایب متغیر جمع می‌کنند و به عنوان حاصل رابطه می‌نویسند.
- *کد ۳.* عدم تواناییِ جانشانی حرف به جای اعداد در رابطه: با این که به ساختار شکل پی می‌برند و رابطه‌ی عددی را می‌نویسند، قادر نیستند به جای اعدادی که مدام تغییر می‌کند یک حرف را جایگزین کنند.
- *کد ۴.* عدم تواناییِ دست ورزی با عبارت جبری که خود نوشته‌اند: در سؤالات معکوس روش حدس و آزمایش انجام می‌دهند و بین یادگیری خود از حل معادلات و تعمیم الگوها نمی توانند ارتباط برقرار کنند و با متغیر دستورزی کنند.
- *کد ۵.* در نظر گرفتن متغیر به عنوان عدد خاص و نوشتن رابطه با مثال عددی: از نوشتن رابطه‌ی نمادین، ناتوان هستند و با عددی که خود مثال می‌زنند رابطه را می‌نویسند.
- *کد ۶.* جمع جملات نامتشابه: جملات نامتشابه را در رابطه، با هم جمع می کنند.
- *کد ۷.* عدم تواناییِ تبدیل رابطه‌ی کلامی به زبان ریاضی: جمله‌ی عمومی یا رابطه را با کلمات می‌نویسند.
- *کد ۸.* عدم توانایی بر تفکیک نام متغیرها: هنگام وجود دو متغیر، نمی توانند دو متغیر انتخاب کنند و جمله‌ی عمومی را با دو متغیر بنویسند.
- *کد ۹.* عدم توانایی بر تشخیص موقعیت وابسته و مستقل در متغیرها در حین نوشتن رابطه: جای یکی از متغیرهای مستقل را در جایگاه متغیر وابسته می‌نویسند.

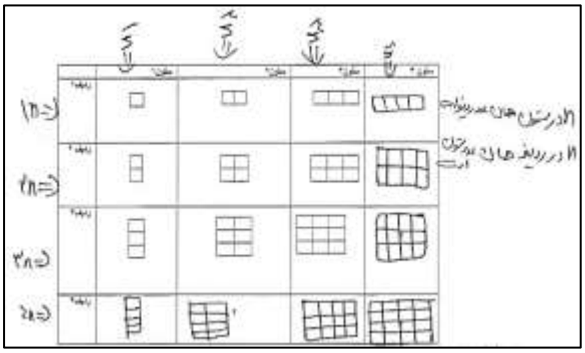
با توجه به این که کدهای ۱ تا ۷ در تحقیقات قبلی [۲۸-۲۷] راجع به بدفهمی‌های متغیر ذکر شده‌اند و این تحقیق نیز تاییدی بر آنهاست، بنابراین از آوردن مثال برای این کدها صرف نظر می‌گردد. کدهای ۸ و ۹ دسته مشکلاتی بودند که درتعمیم الگوهای شکلی دومتغیره رخ دادند. مثالی از هر کدام بیان می‌شود:

در این نمونه، دانش‌آموز قادر نبود نام‌های متمایز برای متغیرهای متفاوت برگزیند. وی به جای هر دوی تعداد ستون و تعداد ردیف، حرف n را انتخاب کرده است.

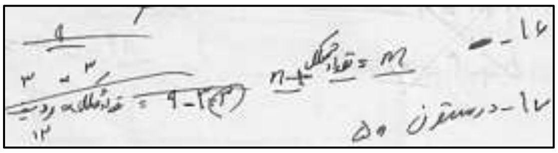
در همان الگو، دانش‌آموز دیگری قادر نبوده جایگاه مناسبی برای متغیرها از نظر مستقل و وابسته بودن در نظر بگیرد. n و m هر دو متغیر مستقل هستند در حالی که با m به صورت متغیر وابسته برخورد کرده است.

جدول۲ فراوانی دانش‌آموزانی را نشان می‌دهد که نواقص و مشکلاتی را در طرحواره‌ی متغیر خود دارند. بیشترین تعداد مربوط به کد ۴ و۷ است

و بیانگر آن است که هنوز اغلب دانش‌آموزان در پایه‌ی هفتم تسلط کافی بر استفاده از نماد به جای کلمات و دست ورزی با آن را ندارند و این خود نشان می‌دهد که هنوز به مرحله‌ی شیء در درک متغیر و به تبع آن در تعمیم الگو، نرسیده‌اند. تحقیقات کوچک و بزرگ بین‌المللی متعدد نشان داده‌اند که بسیاری از دانش‌آموزان قابلیت‌های جبر را به درستی درک نمی‌کنند و حتی وقتی وادار به استفاده از آن می‌شوند از آن به سطحی‌ترین شکل ممکن استفاده می‌کنند.



شکل۶: عدم توانایی بر تفکیک نام متغیرها
Fig. 6: Inability to distinguish the names of the variables



شکل۷: عدم توانایی بر تشخیص موقعیت وابسته و مستقل در متغیرها
Fig. 7: Inability to recognize the dependent and independent position of the variables

جدول۲: فراوانی دانش‌آموزانی که در درک متغیر مشکل دارند.
Table 2: Frequency of students that have problems in understanding of the variable.

Code	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frequency	9	10	11	111	8	2	47	15	16

بنا به اظهار نظر فرنچ تمرینات دست‌ورزی در کتاب‌های درسی با زمینه‌ی معنادار مطرح نشده است و این کار بر به خاطرسپاری رویه‌ها تاکید دارد تا توسعه‌ی درک درست از ایده‌ها. از این رو دانش‌آموزان معمولا درک صحیحی از معنای نمادهای جبری ندارند [۳۴]. معرفی یک نماد برای شیءانگاری مفاهیم لازم است ولی کافی نیست چرا که ممکن است دانش‌آموز نمادگذاری و دست ورزی را در سطح معناداری انجام ندهد. متغیر از مفاهیمی است که دارای ماهیت دو گانه‌ی فرآیند-شیء است. درک متغیر به عنوان شیء یعنی بتوان به راحتی با متغیر کار کرد و روی آن عملیات جبری انجام داد. دانش‌آموزانی که متغیر را به صورت فرآیند درک کرده‌اند اغلب نمی‌توانند یا تمایلی ندارند با متغیر کار کنند [۳۵]. شجاعی، در نتیجه‌ی تحقیق خود بیان می‌کند که بسیاری از دانش‌آموزان، تعمیم را به درستی تشخیص می‌دهند ولی عدم درک متغیر، تبدیل دانش حسابی به دانش جبری و ارائه‌ی یک بازنمایی جبری را غیر ممکن می‌سازد [۱۴]. زبان مورد استفاده در تعمیم الگوهای شکلی دو متغیره به عنوان عامل مؤثری در انتقال از بیان حسابی به نمادین، نمایان بود. برخی دانش‌آموزان در هنگام توضیح مرحله‌ی خواسته شده، کلمات افقی و عمودی و برخی ستونی و ردیفی و بعضی طولی و عرضی استفاده می‌کردند و برخی قادر نبودند ابعاد تغییر در الگوهای دو متغیره را تفکیک و نامگذاری کنند. عدم انتخاب واژگان مناسب و ترکیب مناسب آن‌ها در بیان کلامی تعمیم، موجب ضعف در بیان جبری تعمیم، به ویژه در الگوهای دومتغیره می‌شود.

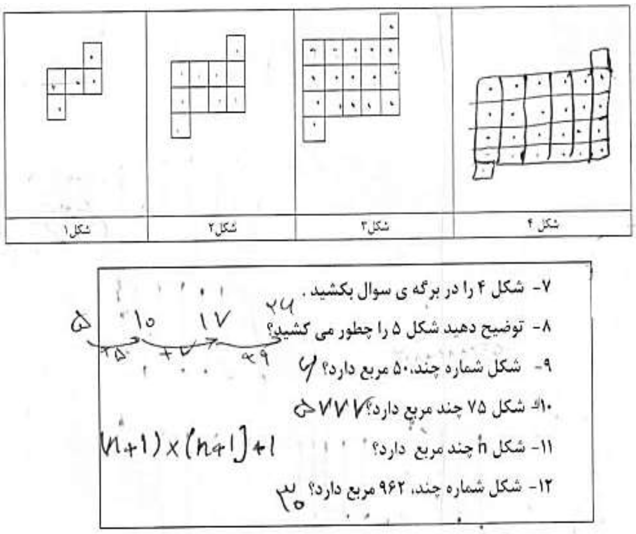
طرح‌واره‌ی ناقص دانش آموزان در استدلال در تعمیم الگوهای شکلی

برخی از دانش‌آموزان در استدلال ابداکسیون با مشکل مواجه بودند. طبق شرایط استدلال ریورا و بکر، انواع مشکلات به صورت زیر کدبندی شدند:

- کد ۱. نقض شرط غیریکنواختی: دانش‌آموز بدون توجه به مفروضات مسئله یا کل مقدمات با مقدمات فرضی خود (فقط جمله‌ی اول، فقط جمله‌ی اول و دوم، فقط جمله‌ی سوم) تعمیم را می سازد.
- کد ۲. نقض شرط نقاط برش: دانش‌آموز با نمونه‌ی کم و صرفا توجه به موارد خاص (به عنوان مثال فقط یک ردیف یا یک ستون) تعمیم می‌دهد و به کل جامعه توجه ندارد و نمی‌تواند تعمیم را در کل جامعه توضیح دهد.
- کد ۳. نقض شرط برون یابی عمودی: دانش‌آموز برای تعمیم از اختلاف متوالی و ویژگی های سطحی استفاده می‌کند و به ویژگی-های ادراکی غیر قابل مشاهده، توجه نمی‌کند.
- کد ۴. نقض شرط ابعاد حذفی: دانش‌آموز نمی‌تواند تعمیمی را انتخاب کند که بیشترین درک از الگو را فراهم کند.

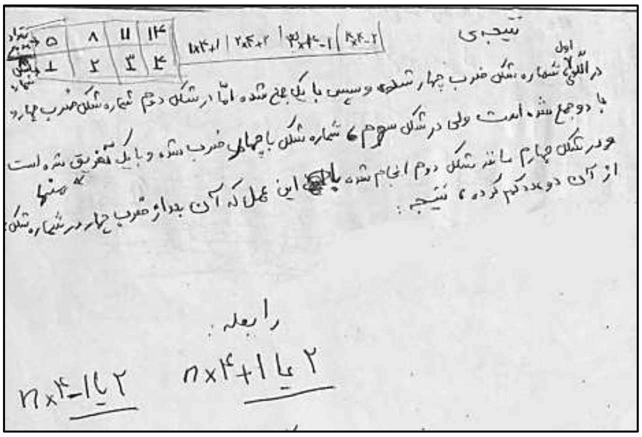
مستندی بر کدهای ۴-۱ در ادامه آورده شده است:

- در شکل ۸ دانش‌آموز با توجه به شکل ۱ و ۲ در الگوی درجه دوم (تکلیف دوم) رابطه را نوشته و در موارد بعدی چک نکرده است.



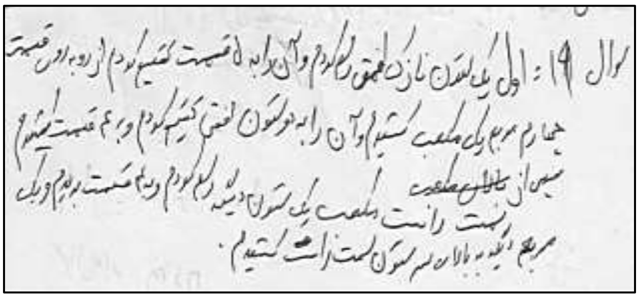
شکل۸: نقض شرط غیر یکنواختی
Fig. 8: Failure in non-monotonic condition

○ در شکل۹ شرط دوم استدلال نقض شده است. دانش‌آموز در پاسخ تکلیف اول رابطه‌هایی نوشته است که فقط در جملات خاص دنباله صدق می‌کند و همه‌ی جملات الگو پوشش داده نمی‌شود.



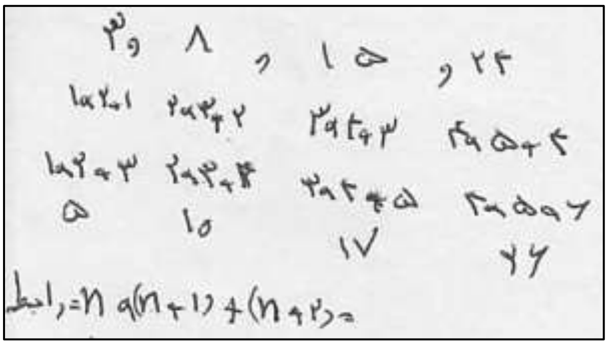
شکل ۹: نقض شرط نقاط برش
Fig. 9: Failure in cut-off point condition

○ در شکل ۱۰، شرط سوم استدلال نقض شده است. در تکلیف چهارم، دانش‌آموز یک توضیح سطحی، بدون توجه به ویژگی‌های ضمنی داده است:



شکل ۱۰: نقض شرط برون‌یابی عمودی
Fig. 10: Failure in vertical extrapolation condition

○ در شکل ۱۱، شرط چهارم استدلال، نقض شده است. در تکلیف دوم، دانش‌آموز با این که رابطه‌ی صحیحی نوشته است، ولی رابطه‌ای که بهترین توضیح را از الگوی شکلی بدهد، نیست. چرا که به سختی در شکل قابل توضیح است.



شکل ۱۱: نقض شرط ابعاد حذفی
Fig. 11: Failure in eliminative dimension condition

جدول ۳ فراوانی دانش‌آموزانی را نشان می‌دهد که شرایط مربوط به استدلال صحیح در تعمیم الگوهای شکلی را نقض کرده‌اند. بیشترین نقض‌ها مربوط به تعمیم با استفاده از نمونه‌های کم (کد ۱) است که برای تعمیم و تصدیق کافی نیست وهمچنین مربوط به استدلال‌های سطحی (کد ۳) است که در نتیجه‌ی عدم توجه به ساختار فیزیکی الگوها رخ می دهد.

جدول۳: فراوانی دانش‌آموزانی که شرایط استدلال صحیح را نقض کرده‌اند.
Table 3: Frequency of students who fail in conditions of the correct reference

Code	1	2	3	4
Frequency	34	11	56	**4**

ریورا در مدلی که حاصل بیست سال مطالعه روی تعمیم الگوها است، به فاکتورهای شناختی و غیر شناختی تأثیرگذار در تعمیم اشاره می‌کند و استدلال ابداکسیون را به عنوان فاکتور مرکزی و مهم در فرآیند تعمیم معرفی می‌نماید [۵]. عدم توانمندی برخی دانش‌آموزان در احراز شرایط استدلال صحیح می‌تواند نشانه‌ای از عدم آموزش آنها در این حوزه باشد. شاهد این ادعا این است که در زمان اجرای چرخه‌های تحقیق، دانش-آموزانی که تنها یک بار به آن‌ها، درباره‌ی شرایط استدلال صحیح تذکر داده می‌شد، خطای مورد نظر را تکرار نمی‌کردند. همچنین، بنا به تجربه‌ی حضور محقق در کارگاه‌های آموزش معلمان، معلمان به هیچ وجه اشاره‌ای به این شرایط ندارند و از این شرایط برای موفقیت دانش‌آموزان در تکالیف تعمیم بهره‌ای نمی‌برند.

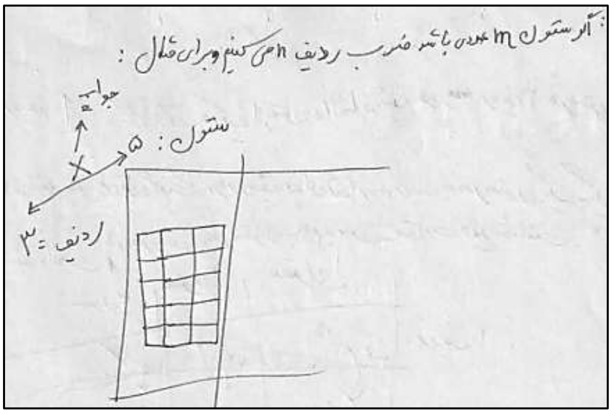
طرحواره‌ی ناقص دانش آموزان در درک فضای R^3 در تعمیم الگوهای شکلی دو متغیره

دانش آموزان در درک فضای سه بعدی در تکالیف الگوهای شکلی دوخطی و دو متغیره، که شامل دو متغیر مستقل و یک متغیر وابسته بود به دو صورت کلی عمل می‌کردند که به صورت زیر کدبندی شد:

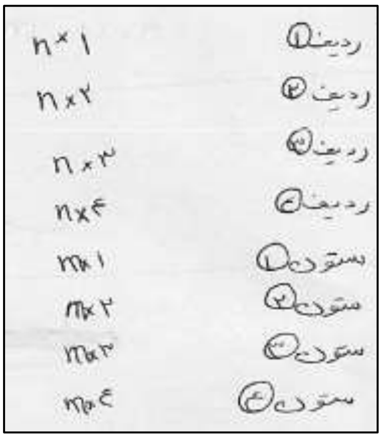
○ کد۱. توانایی در استفاده از طرحواره‌ی R^3: توانسته است تغییرات همزمان دو متغیر را هماهنگ نماید و از دو متغیر در نوشتن رابطه استفاده کند.
○ کد۲. عدم توانایی استفاده از طرحواره‌ی R^3 : تغییرات هر متغیر را جدا در نظر گرفته است و نتوانسته است هر دو متغیر را در موقعیت صحیح خود (مستقل) در رابطه بنویسد.

مستندی بر کدهای ۱ و ۲ در ادامه ذکر می گردد:

در شکل ۱۲، دانش آموز به خوبی توانسته است تغییرات دو بعد را با طرحواره‌ی R^3 هماهنگ کرده و به صورت یک رابطه‌ی صحیح بنویسد.
در شکل ۱۳، دانش‌آموز تغییرات هر دو بعد را جداگانه و صحیح درک کرده است ولی نتوانسته است طرحواره‌ی R^3 را به کار گرفته و رابطه ی دو متغیره را بنویسد.



شکل ۱۲: توانایی در استفاده از طرحواره‌ی R^3
Fig. 12: Ability to use of R^3 schema



شکل۱۳: عدم توانایی استفاده از طرحواره‌ی R^3
Fig. 13: Failure to use R^3 schema

جدول۴ فراوانی دانش‌آموزانی را نشان می‌دهد که در تعمیم الگوهای دومتغیره از طرحواره‌یR^3 استفاده کرده یا نکرده‌اند. با توجه به تعداد دانش‌آموزان، الگوهای دو متغیره‌ی دوخطی می‌توانند زمینه‌ای برای استفاده از طرحواره‌ی R^3 باشند تا دانش‌آموزان را برای استفاده از آن، در الگوهای دومتغیره‌ی کلی آماده نمایند.

جدول۴: فراوانی دانش‌آموزان موفق و ناموفق در استفاده از طرحواره‌یR^3
Table 4: Frequency of successful and unsuccessful students in using R^3 schema

Code	Bi- linear	Two-variable
1	102	42
2	75	97

دانش‌آموزان پایه هفتم در کتاب درسی ریاضی خود با فضای دو بعدی آشنا می‌شوند. دستگاه مختصات دکارتی دو بعدی را نیز می‌آموزند. قبل از یادگیری رسمی نیز فضای دو بعدی را تجربه کرده و آموخته‌اند. ولیکن در الگوهای شکلی دو متغیره نیاز هست تا با فضای سه بعدی آشنا شوند. برای آشنا شدن با فضای سه بعدی کافیست به جای تغییر دادن در یک متغیر ،آن را در دو متغیر اعمال کنند و ساختار شناختی جدیدی نیاز ندارند. و لیکن دانش‌آموزان در درک فضای سه بعدی که شامل دو متغیر مستقل و یک متغیر وابسته بود، مشکلاتی نشان می دادند. علیرغم اینکه در کتاب درسی ریاضی هفتم عبارت‌های جبری با سه متغیر و جایگذاری مقادیر در دو متغیر مستقل و به دست آوردن متغیر وابسته وجود داشت و حتی نوشتن عبارت جبری با بیشتر از یک متغیر مستقل از آنها خواسته شده بود و اغلب دانش‌آموزان مورد پژوهش به راحتی با این موارد برخورد می‌کردند و برایشان قابل درک بود، ولیکن در بافت تعمیم الگوهای شکلی دو متغیره با مشکل مواجه می شدند.

به عنوان مثال در سؤال کتاب درسی از آنها خواسته شده بود عبارت جبری با دو متغیر مستقل بنویسند و سپس مقادیر را جایگذاری کنند:

اگر در مغازه ای n بسته مداد رنگی ۶ تایی و m بسته مدادرنگی ۱۲ تایی وجود داشته باشد ، تعداد کل مداد رنگی ها را با عبارت جبری نشان دهید.

اگر ۵ بسته ۶ تایی و ۸ بسته ۱۲ تایی وجود داشته باشد چند عدد مداد رنگی وجود دارد؟

اغلب دانش‌آموزان (۱۷ نفر از ۱۹ دانش آموز شرکت کننده در چرخه‌های پژوهش) پاسخ صحیح به این مسئله و مسائل مشابه ارائه دادند و درک خوبی از کار با دو متغیر داشتند. ولیکن با ورود به بحث الگوی شکلی دو متغیره در نامگذاری متغیرها و به کارگیری درست آنها در جایگاه مستقل و وابسته و جایگذاری مقادیر مشکلاتی بروز می‌دادند. همچنین برخی از دانش‌آموزان درک درستی از تغییرات همزمان دو متغیر نداشتند و نمی‌توانستند تغییرات را با هم اعمال کنند. یا زمانی که تغییرات را به تفکیک متغیرها اعمال می کردند، در نهایت نمی‌توانستند این تغییرات را با هم هماهنگ سازند (ترکیب دو فرآیند) و به یک رابطه برسند.

نتیجه‌گیری

الگوهای شکلی ظرفیتی بی‌نظیر برای ارتقای تفکر تابعی دارند، چنانچه ریورا بعد از سه سال مطالعه‌ی طولی روی دانش‌آموزان ۱۱ ساله بیان می‌کند که دانش‌آموزان بعد از کار کردن با الگوهای شکلی، بدون اینکه در مسائل مدلسازی و تابع آموزش دیده باشند قادر به حل سؤالات مربوط به آنها بودند [۵]. از چندسال پیش، با شناخت ارزش و اهمیت الگوها در توسعه تفکر جبری، آموزش الگوهای شکلی وارد برنامه درسی ریاضی شده است [۳،۳۴،۳۶]. در این میان هیچ پژوهشی در زمینه‌ی الگوهای شکلی دو متغیره در ایران و همچنین در سطح بین المللی انجام نشده است. چنانچه داده‌های تحقیق تایید می‌کند، الگوهای شکلی دو متغیره بدون نیاز به فعالیت‌های شناختی سنگین و صرفا با توسعه‌ی طرح‌واره تعمیم الگوهای شکلی یک متغیره به دو متغیره، قابل درک و تعمیم هستند و طبق بیان هرل و تال در این موقعیت، تعمیم توسعه‌ای رخ می‌دهد که نیازی به بازسازی طرح واره‌ی قبلی وجود ندارد[۳۲]. الگوهای شکلی دو متغیره در کتاب‌های درسی مطرح نشده‌اند و لیکن نتایج این تحقیق می‌تواند تأییدی بر آموزش پذیری آن‌ها و به‌ویژه تأکید بر نقش مؤثر آن‌ها در ارتقای تفکر تابعی، درک بهتر مفهوم متغیر، شیوه-ی استدلال و همچنین کار در فضای سه‌بعدی باشد. در این راستا و برای افزایش توانمندی در مواجهه با موقعیت‌هایی شامل دو متغیر یا بیشتر، نیاز به پژوهش‌های عمیق و دقیق برای شناسایی فرآیند شناختی و

عملکرد ذهنی دانش‌آموزان در این حوزه احساس می‌شد. این تحقیق در سه مرحله انجام گرفت. در مرحله‌ی اول با کمک نظریه APOS ، پیشنیه تحقیق، تحلیل خود مفهوم و تجربیات محقق تجزیه تکوینی مقدماتی برای تعمیم الگوهای شکلی دو متغیره تدوین شد. طرحواره‌های استدلال، متغیر و R^3 به عنوان طرحواره‌های پیش‌نیاز در تعمیم الگوهای شکلی دو متغیره شناسایی شدند، به طوریکه نقص در هر کدام از این سازه‌ها به عدم موفقیت در تعمیم می‌انجامید. سپس در مرحله‌ی دوم آزمونی بر اساس چارچوب APOS طراحی گردیدو با تحلیل پاسخ های ۲۲۰ دانش‌آموز، نقائص دانش‌آموزان در طرحواره‌های پیش‌نیاز، به دقت شناسایی و کدگذاری شدند. در مرحله ی سوم با انجام سه چرخه‌ی تحقیق با سه گروه، که با چرخه‌های تدریس ACE هدایت شدند، به منظور سنجش و تدریس این طرحواره‌ها، با استفاده از پیشنیه‌ی پژوهش و نظریات آموزشی، ابزارهایی طراحی گردید و در مصاحبه‌ها و چرخه‌های تحقیق مورد استفاده قرار گرفت. نتایج حاصل از سه مرحله‌ی تحقیق، رسیدن به تجزیه‌ی تکوینی نهایی و ابزارها و تکالیف طراحی شده‌ای است که می‌توانند به معلمان در امر یاددهی و به دانش‌آموزان در یادگیری بهتر و ایجاد سازه‌های منسجم‌تر برای تعمیم الگوهای شکلی، به‌ویژه الگوهای شکلی دو متغیره، کمک نمایند.

مشارکت نویسندگان

نویســـنده ی اول در بخش نظری، جمع آوری داده‌ها و تحلیل داده‌ها (۵۰ درصـد تحقیق)، نویسـنده ی دوم در بخش نظری و تحلیل داده ها (۴۰ درصـد تحقیق) و نویســندهٔی ســوم در بخش نظری (۱۰ درصـد تحقیق)، نقش مهمی داشته‌اند.

تشکر و قدردانی

این مقاله مستخرج از رساله دکتری آموزش ریاضی می باشد. نویسندگان این مقاله از همکاری اداره آموزش و پرورش شهرستان ملکان و همچنین از جناب آقای دکتر فیروز پاشائی مدیر خانه ریاضیات ملکان در جمع‌آوری داده‌ها، تقدیر و تشکر می‌نمایند.

تعارض منافع

«هیچ‌گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است.»

منابع و مآخذ

[1] Mason J. Expressing generality and roots of algebra. In: Bdnarz N, Kieran C, Lee L (Eds) *Approches to algebra:perspective for research and teaching.* Dordrecht: Kluwer Academic;1996. p.65-86.

[2] Blanton ML , Kaput JJ. Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. *ZDM- International Reviews on Mathematicl Education*. 2011; 37(1):34-42.

[3] Markworth K. *Growing and growing: promoting functional thinking with geometric growing patterns* [doctoral dissertation]. University of North Carolina, ChapelHill; 2010.

[4] Asghari N. Developing a model to enhance elementary teachers, ability to foster functional thinking and algebraic resoning in elementary students. *Jornal of Theory and Practice in Curriculum*. 2014; 2(3): 141-162. Persian.

[5] Rivera F. *Teaching and learning patterns in school mathematics: Psychological and pedagogical considerations*. Switzeland: Springer Science & Business Media; 2013.

[6] Huntzinger EM. Exploring generalization through pictorial growth patterns. In Greenes C E & Rubenstein R (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* Reston, VA: NCTM; 2008. p. 279-293.

[7] National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and standards for school mathematics.* The National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Reston: USA; 2000.

[8] English LD, Warren EA. Introducing the variable through pattern exploration. In Moses B (Ed.), *Algebraic thinking, Grades K-12,* Reston, VA: NCTM; 1999.

[9] Rivera F, Becker JR. Abductions in pattern generalization, In Woo JH, Lew HC, Park KS and Seo DY (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Seoul: PME; 2007: p. 97-104

[10] National Center for TIMSS and PIRLS :International Studies. *A brief report of Most Important Results of TIMSS and PIRLS 2011 and Comparison with Iranian Students'Performance in the Past Peroids*. Research Center of Education, Tehran: Iran; 2013. Persian.

[11] Hashemi N, Abu MS, Kashefi H, Rahimi KH. Generalization in the learning of mathematics. *The 2nd seminar on quality and affordable education. Malazia.* 2013.

[12] Chua BL, Hoyles C. Modalites of rules and generalizing strategies of year 8 students for a quadratic pattern. In Nicol C, Liljedahl P, Oesterle S and Allan D. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*. Vancouver, Canada: PME; 2014. p. 305-312.

[13] Samson DA. *The Heuristic significance of enacted visualisation*. [dissertation]. Rhodes University, Grahamstown, South Africa;2011.

[14] Shojaie K. *The investigation of ability of the nine grade students' generalization and justification in numeric and geometric number patterns*. [master's thesis]. Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran; 2013. Persian.

[15] Lannin JK, Barker DD, Townsend BE. Algebraic generalization strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal.* 2006;18 (3): 3-28.

[16] Samson DA. *An analysis of the influence of question design on pupils' approaches to number pattern generalisation tasks*.

[master's thesis]. Rhodes University, Grahamstown, South Africa; 2007.

[17] Chua B. L.Features of generalising task: Help or hurdle to expressing generality? *Australian Mathematics Teacher.* 2009; 65(2): 18 – 24.

[18] Chua BL, Hoyles C. The effect of different pattern form on secondray two students' ability to generalize. In Tso,T. Y. (Ed.). *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Taipei, Taiwan: PME; 2012. p.155-162.

[19] Rivera F. Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*. 2010;73(3): 297-328.

[20] Kaput J, Carraher DW, Blanton ML. (Eds.). *Algebra in the early grades. Mahwah.(NJ)*: Lawrence Erlbaum Associates; 2007.

[21] Smith E. Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. *Algebra in the Elementary Grade*; 2008. *P.*133-163.

[22] Wilkie k , Clarke D. Developing students' functional thinking in algebra through different visualisation of a growing pattern's structure. In J. Anderson, M. Cavanagh & A. Prescott (Eds.). *Curriculum in focus: Research guided practice, Proceedings of the 37th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*; 2014. p. 637–644.

[23] Sutarto, Toto N, Subanji S. Local conjecturing process in the solving of pattern generalization problem. *Educational Research and Reviews.* 2016;11 (8): 732-742.

[24] Sutarto, Nusantara T, Subanji S, Hastuti ID. Global conjecturing process in pattern generalization problem.*Journal of Physics: Conference Series.1008 012060*; 2018.

[25] Arnon I, Cottrill J, Dubinsky E, Oktaç A, RoaFuentes S, Trigueros M, Weller K. *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in the mathematics education*. New York: Springer-Verlag; 2014.

[26] Dubinsky E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In Tall D (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers; 1991; 95-126.

[27] Zohrevand SH. *Students' misconceptions about concept of variable in algebra* [master's thesis]. Shahid Rajaee Teacher Training University: Tehran. 2013.Persian.

[28] Álvarez I, Gómez-Chacón I, Ursini S. Understanding the algebraic variable: comparative study of Mexican and Spanish students. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*; 2015; 11(6): 1507-1529.

[29] Peirce CS. *Collected papers of Charles SandersPeirce*. InC.Hartshorne&P.Weiss (Eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press: 1985; 1-6.

[30] Pedemonte B. Argumentation and algebraic proof. *ZDM Mathematics Education*; 2008; 40: 385–400.

[31] Reid D. *Forms and uses of abduction*. Paper presented to Working Group 4: Proof and argumentation. Third Annual Conference of the European Society for Research in Mathematics Education. Bellaria, Italy; 2008.

[32] Harel G, Tall D. The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematic*. 1989*;* 11 (1): 38-42.

[33] Asiala M, Brown A, DeVries D, Dubinsky E, Mathews D, &Thomas KA framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *In Research in Collegiate mathematics education II.* Providence, RI: American Mathematical Society. *CBMS issues in mathematics education*; 1996; 6: 1–32.

[34] Khosroshahi GhL. *Algebraization for Pre-schoolers with a focus on Associativity*.[dissertation]. shahid beheshti university,Tehran; 2016. Persian.

[35] Li X. *Cognitive analysis of student'errors and misconceptions in variables, euations and functions.*[dissertation]. A&M University, Texas ; 2006.

[36] Asghary N, Shahvarani A, Medgalchi A. R. Significant Process of Change for Elementary Teachers to Foster Functional Thinking. *Mathematics Education. Bulletin-*BOLEMA, Brazil; 2013.

معرفی نویسندگان

AUTHOR(S) BIOSKETCHES

ربابه افخمی دانشجوی دکتری آموزش ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی می‌باشند. ایشان مقطع کارشناسی را در دانشگاه امیرکبیر تهران در رشته‌ی ریاضی کاربردی و مقطع ارشد را در دانشگاه فردوسی مشهد در رشته ی آموزش ریاضی گذرانده است. حوزه‌های پژوهشی مورد علاقه‌ی ایشان سواد ریاضی، آموزش ابتدایی و تفکرجبری می باشد.

Afkhami, R., PhD Student, Islamic Azad University, Central Tehran Branch, Tehran, Iran

r_afkhami @yahoo.com

نسیم اصغری دکتری آموزش ریاضی، عضو هیأت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی می‌باشند. ایشان کارشناسی ریاضی را در دانشگاه تبریز و کارشناسی‌ارشد را در دانشگاههای فردوسی مشهد و سپس واحد علوم و تحقیقات تهران در رشته‌ی آموزش ریاضی گذراندند. ایشان فارغ‌التحصیل رتبه اول اولین دوره‌ی دکتری

رشته‌ی آموزش ریاضی از علوم و تحقیقات تهران هستند. علایق پژوهشی ایشان تفکر جبری، مدل‌سازی ریاضی، یاددهی و یادگیری ریاضی، آموزش و توسعه‌ی حرفه‌ای معلمان ریاضی است.

Asghary, N. Instructor, Mathematics Education, Islamic Azad University, Central Tehran Branch, Tehran, Iran
✉ *Nas.Asghari@iauctb.ac.ir*

علیرضا مدقالچی عضو هیأت علمی دانشگاه خوارزمی تهران می‌باشند. ایشان در سال ۱۳۵۲ مدرک کارشناسی ریاضی محض خود را از دانشگاه

تبریز دریافت کرد و پس از گذراندن یک دوره‌ی دو ساله‌ی مدرسی ریاضیات در دانشگاه خوارزمی (مؤسسه ریاضیات) دوره‌ی کارشناسی‌ارشد و دکترای خود را در دانشگاه شفیلد انگلستان در شاخه آنالیز ریاضی سپری و در سال ۱۳۶۱ مدرک دکترای خود را دریافت نمود.

Medghalchi, A. Professor, Pure Mathematics, Kharazmi University, Tehran, Iran
✉ *a_medghalchi@khu.ac.ir*

Citation (Vancoure): Afkhami R, Asghary N, Medghalchi A. [Enhancing functional thinking: Identifying the prior schemas of seventh grade students in generalization of two-variable figural patterns]. *Tech. Edu. J.* 2020; 14(3): 707-722
http://dx.doi.org/10.22061/jte.2019.4844.2127