Recherches en éducation

40 | 2020
Rôle des interactions langagières dans l'élaboration du travail individuel et collectif

Reproduire un cercle et en parler en classe de mathématique : est-ce si simple ? Quelques éléments d'analyse d'une étude didactique comparant trois mises en œuvre d'une même situation

Reproducing a circle and talking about it in math class: is it that simple? Some elements of analysis of a didactic study comparing three implementations of the same situation

Caroline Bulf et Valentina Celi

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/ree/468
DOI : 10.4000/ree.468
ISSN : 1954-3077

Éditeur
Université de Nantes

Référence électronique
Caroline Bulf et Valentina Celi, « Reproduire un cercle et en parler en classe de mathématique : est-ce si simple ? Quelques éléments d'analyse d'une étude didactique comparant trois mises en œuvre d'une même situation », *Recherches en éducation* [En ligne], 40 | 2020, mis en ligne le 01 mars 2020, consulté le 03 septembre 2020. URL : http://journals.openedition.org/ree/468 ; DOI : https://doi.org/10.4000/ree.468

Reproduire un cercle et en parler en classe de mathématique : est-ce si simple ? Quelques éléments d'analyse d'une étude didactique comparant trois mises en œuvre d'une même situation

Caroline Bulf & Valentina Celi[1]

Résumé

Intéressées par des questions sur les rôles des interactions langagières dans l'enseignement et d'apprentissage de la géométrie à l'école primaire, nous analysons ici les données recueillies dans trois classes différentes où un même problème a été proposé (reproduire un cercle). Les analyses proposées ici mettent au jour des éléments potentiellement différenciateurs en termes d'apprentissage venant d'une gestion de connaissances implicites très différentes chez les trois enseignantes observées.

Notre recherche aborde des questions sur le rôle du langage[2] dans un contexte[3] d'enseignement et d'apprentissage de la géométrie. Le contenu de notre article s'articule autour de l'analyse d'une situation[4] qui semble offrir aux élèves des potentialités d'apprentissage sur le cercle (Bulf & Celi, 2016). Notamment, elle vise à construire des connaissances sur le cercle via un travail de mise en lien de l'utilisation d'un gabarit de demi-disque et du compas et donc entre la mobilisation de diverses conceptions possibles du cercle. L'un des objectifs de la situation est une matérialisation des caractéristiques du cercle en obtenant le centre par l'intersection du tracé de deux diamètres alors que ces éléments caractéristiques (centre, rayon, diamètre) sont souvent introduits dans l'enseignement primaire de façon ostensive (c'est-à-dire en montrant un tracé de cercle, comme un schéma par exemple *: ceci est un cercle, ceci est le centre du cercle, ceci est un rayon, ceci est un diamètre...*).

Plus particulièrement, nous supposons que la mise en commun qui va suivre la phase de recherche individuelle peut susciter la confrontation de différents points de vue[5] des élèves, voire une négociation de formes partagées du savoir en jeu essentiellement dans le langage. Notre travail souhaite ainsi participer à la réflexion cherchant à mieux comprendre la manière dont se construisent les savoirs dans les discours produits entre les élèves et l'enseignant ou entre élèves.

Jean-Paul Bernié (2002), Martine Jaubert et Maryse Rebière (2012) développent dans leurs travaux l'idée qu'apprendre dans une discipline c'est apprendre des modes d'agir-parler-penser dans un univers spécifique. « Chaque discipline propose un cadre, un contrat de communication, des valeurs, des outils, des techniques, des savoirs. […] L'élève est ainsi confronté à la nécessi-

---

[1] Caroline Bulf & Valentina Cel, Laboratoire d'épsitémologie et didactique des disciplines (LabE3D), Université de Bordeaux.

[2] Nous précisons dès à présent ce que nous entendons par langage (oral) et la distinction que nous faisons entre *langue* et *langage :* la langue est vue comme un système de signes linguistiques et codes permettant la communication, et le langage est lui vu comme une activité humaine dialogique et située mettant en jeu la langue et ses codes écrits ou verbaux (Jaubert & Rebière, 2012). Nous développerons notre positionnement théorique plus loin dans l'article.

[3] Le terme de *contexte* est utilisé dans notre article dans son acception générale, c'est-à-dire qu'il s'agit ici de trois classes différentes dont les conditions culturelles, sociales, historiques, personnelles, institutionnelles, etc. sont différentes.

[4] Nous référons au cadre de la théorie des situations didactiques (TSD) pour définir le terme de situation. Guy Brousseau (cité dans Bosch & Perrin-Glorian, 2013, p.276) définit les situations mathématiques à usage didactique : « une situation mathématique est ainsi définie par un milieu et une question problématique qu'on modélise par un jeu c'est-à-dire un but et des règles du jeu (des contraintes). Résoudre le problème c'est gagner le jeu. Les connaissances permettent d'agir sur le milieu et avec le milieu ; elles permettent d'interpréter les rétroactions du milieu ». Dans notre texte, tout comme dans cette citation, nous parlons de « problème à résoudre » qui consiste ici à « reproduire un cercle » sous certaines conditions.

[5] Nous renvoyons à l'article de Bernadette Kervyn (2014, p.51) qui traite en profondeur de la polysémie du terme de « point de vue de l'élève » qui peut être « proche selon les cas des notions de représentation, de rapport à, de posture, de position énonciative ou encore de termes tels que opinion, avis, position, ressenti, vécu ». Dans le cadre de notre recherche ici, nous partageons une acception large de ce terme qui peut être renseignée par « l'interprétation de l'ensemble des données construites et analysées à partir de l'activité (verbale, physique, cognitive…) de l'élève (des élèves) » (*ibid.*).

té de s'inscrire dans de nouveaux contextes, ceux des savoirs scolaires, ce qui suppose qu'il réorganise son activité et ses modes d'agir-parler-penser usuels, pour s'approprier les techniques sociales, les pratiques discursives qui donnent leur substance à ces savoirs. » (Jaubert & Rebière 2012, p.5)

Dans notre travail, nous nous intéressons aux transformations et aux adaptations des différents modes d'agir-parler-penser du cercle, autrement dit à la manière dont se manifestent les liens entre les usages des instruments, les façons de parler et le rapport à la figure[6] ; ces transformations et adaptations seront vues comme des témoins du processus d'apprentissage en train de se faire (ou son absence). Nous développons ce que nous entendons plus précisément par *apprentissage* dans la première partie de ce texte. Notre travail s'appuie également sur le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) pour modéliser ce processus et nous nous intéresserons plus particulièrement dans cet article au processus d'institutionnalisation. De nombreux travaux ont pointé le caractère complexe du processus d'institutionnalisation en classe de mathématiques (Hersant, 2001 ; Laparra & Margolinas, 2008 ; Coulange, 2012 ; Allard, 2015), ce dernier étant *en tension* avec le processus de dévolution, et les phases de structuration du savoir comme la production de traces écrites étant souvent inexistants (Allard, 2015 ; Butlen et al., 2015).

En comparant trois classes différentes dans lesquelles a été proposé le même problème à résoudre, nous avons cherché à étudier la possible continuité entre *connaissances* et *savoir* (au sens de Brousseau, 1998 ; Laparra & Margolinas, 2010) – distinction sur laquelle nous revenons dès la première partie de l'article – à propos de la notion de cercle et de ses éléments caractéristiques. En effet, nous mettrons en évidence comment les différents modes d'agir-parler-penser du cercle peuvent se constituer en un réseau dense et enchevêtré afin de mieux décrire et comprendre le(s) rôle(s) déterminant(s) joué(s) par le langage dans le processus d'institutionnalisation.

Aussi, après avoir exposé l'arrière-plan théorique qui encadre notre recherche dans la première partie de cet article, nous fournissons des éléments sur le protocole et la méthodologie d'analyse suivis. Dans une troisième section, nous présentons quelques éléments contextuels des classes observées et analysons les données recueillies : ici, outre deux classes françaises, nous incluons une classe italienne, cela afin de mieux mettre en évidence les points communs ou divergences entre ces différentes classes aussi bien du point de vue de l'activité des élèves que de celle des enseignants. Nous consacrons la dernière section à un retour sur les questions de départ et quelques éléments de discussion et perspectives.

1. Cadrage théorique : le rôle du langage dans l'apprentissage de la géométrie

Au-delà des processus de dévolution et d'institutionnalisation

La distinction entre connaissance et savoir est fondamentale et fondatrice de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) : « Une connaissance est ce qui réalise l'équilibre entre le sujet et le milieu, ce que le sujet met en jeu quand il investit une situation. Il s'agit d'un concept très large, qui inclut à la fois des connaissances du corps, des connaissances dans l'action, des connaissances de l'interaction, des connaissances mémorisées, etc. Un savoir est d'une autre nature, il s'agit d'une construction sociale et culturelle, qui vit dans une institution (Douglas, 1986-2004) et qui est par nature un texte (ce qui ne veut pas dire qu'il soit toujours matériellement

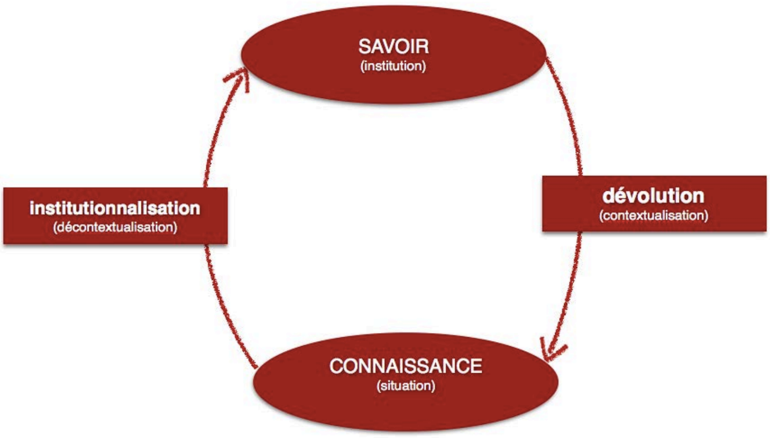
[6] Dans le temps, plusieurs auteurs ont tenté de définir la distinction entre dessin et figure (Parzysz, 1988 ; Laborde & Capponi, 1994). Plus récemment, Valentina Celi & Marie-Jeanne Perrin-Glorian (2014) préfèrent parler de *figure matérielle* plutôt que de *dessin* « parce que les représentations matérielles de figures géométriques sont des dessins particuliers sur lesquels doit s'exercer un regard spécifique (Duval & Godin, 2005) pour y voir des éléments de la figure géométrique qu'ils représentent ». Anne Cécile Mathé & Joris Mithalal (2019) redéfinissent ce qu'ils appellent un « rapport géométrique aux dessins » : « Les dessins sont tour à tour rattachés à des problèmes, des géométries, des arrière-plans épistémologiques, des pratiques de nature variées. Le détail de ces différentes dimensions, pointées par les travaux de didactique, nous semble pouvoir mieux éclairer les phénomènes et les perspectives propres à la géométrie de l'école primaire » (p.49).

écrit). Le savoir est dépersonnalisé, décontextualisé, détemporalisé. Il est formulé, formalisé, validé et mémorisé. Il peut être linéarisé, ce qui correspond à sa nature textuelle. » (Laparra & Margolinas, 2010, p.150)

Les connaissances relèvent donc d'une dimension personnelle, fortement contextualisée, et pas nécessairement formalisée ; elles dépendent de la situation proposée et du milieu antagoniste. Tandis que le savoir relève d'une construction et d'une forme institutionnelle partagée.

Dans le cadre de la théorie des situations didactiques (TSD), l'apprentissage est modélisé par un double processus d'adaptation (au milieu) et d'acculturation via les processus complémentaires de dévolution et d'institutionnalisation (figure 1).

Figure 1 - Les processus complémentaires de dévolution et d'institutionnalisation (Laparra & Margolinas (2010, p.246)



Annie Bessot (2004, p.21) parle d'une « double manœuvre » : l'enseignant « cherche à recontextualiser et repersonnaliser le savoir à enseigner, il cherche des problèmes qui vont donner du sens aux connaissances à enseigner, pour que l'activité de l'élève *ressemble* par moment à celle du chercheur. Il y a dévolution à l'élève d'une responsabilité vis-à-vis du savoir, il y a dévolution d'une situation a-didactique ». L'institutionnalisation est le mouvement inverse : « convertir une connaissance chez l'élève en un savoir réutilisable (dépersonnalisée, décontextualisée, détemporalisée) » (*ibid*.).

Dans Bulf, Mathé & Mithalal (2015), nous engageons une réflexion qui cherche à aborder la question du rôle du langage au-delà de sa dimension sociale reconnue dans le cadre de la TSD (et essentiellement modélisée par les processus de dévolution et d'institutionnalisation). Nous reconnaissons plusieurs usages du « langage » (un langage relatif à la dévolution, un langage relatif à la phase de recherche, un langage pour la mise en commun et un langage relatif à la phase de conclusion), mais nous mettons en évidence que sa fonction ne peut être réduite à un moyen de contextualisation, d'effet de contrat ou de mise à distance ; son rôle est moteur et partie prenante de l'activité géométrique de l'élève. D'autres travaux vont également dans ce sens (Barrier & Mathé, 2014) et défendent l'idée que le langage joue un rôle tout aussi essentiel que celui de l'action sur le milieu. Ce faisant, nous rejoignons ainsi des paradigmes qui attribuent au langage un rôle consubstantiel de la construction de la pensée et de l'apprentissage (Jaubert & Rebière, 2012 ; Sfard 2012) dont les arrière-plans théoriques reposent sur les travaux de Lev Vygotski (1934). Aurélie Chesnais (2018, p.128) décrit en d'autres mots cette idée partagée que le langage est donc à la fois *objet* et *moyen,* mais aussi un *indicateur* de l'apprentissage : « C'est en effet, dans l'idée de secondarisation, plus une considération relative qu'absolue : il n'y a pas un avant et un après, mais la conceptualisation est un processus qui n'est jamais achevé et les pratiques langagières (avec les concepts) s'enrichissent et se complexifient à chaque degré de conceptualisation atteint. L'évolution des pratiques langagières des élèves est ainsi moyen, objet et indicateur de l'apprentissage (et le langage est à la fois moyen, (mi)lieu et trace de l'activité). »

Dans cette citation, l'apprentissage a un versant « processus » et un versant « produit [...], référé à la conceptualisation, dans une forme d'opérationnalisation de la définition de concept issue de la théorie de Vergnaud » (Chesnais, 2018, p.65). En effet chez Gérard Vergnaud (1990), le processus de conceptualisation – processus par lequel se construit un concept – est au cœur de l'activité de l'élève, vu comme l'adaptation de schèmes dans une classe de situations données. Ainsi l'acquisition du sens ou des significations[7] d'un concept se fait à partir de la confrontation à des situations problématiques qui mettent en jeu ce concept. Pour nous la conceptualisation peut donc être vue comme un des processus à l'œuvre dans l'apprentissage que nous voyons plutôt comme le résultat d'un processus complexe recouvrant à la fois des dimensions adaptationniste et sociale (sans lien de subordination).

▪ *Hypothèses et questions de recherche*

Nous partons du postulat que la situation au cœur de la recherche présentée ici offre un potentiel d'apprentissage pour le cercle et ses éléments caractéristiques (Bulf & Celi, 2016). En nous concentrant sur l'analyse de cette situation d'action[8], au sens de la théorie des situations didactiques, nous avançons l'hypothèse que sa mise en œuvre en classe peut donner lieu à une co-construction (enseignant-élèves) d'une définition générale du cercle par son centre et son rayon (nous argumentons plus loin cet aspect en explicitant les enjeux et savoirs visés par la situation). En particulier, la phase de mise en commun (entre l'enseignant et les élèves) qui va suivre la phase de recherche individuelle (dans laquelle l'élève cherche à résoudre le problème posé) suppose qu'il peut y avoir confrontation de différents modes d'agir-parler-penser et négociation de formes partagées du savoir en jeu, dans le langage.

Les différents modes d'agir-parler-penser sont situés (attachés à notre problème de reproduction du cercle) et recouvrent donc des connaissances potentiellement mobilisables par les élèves en train de résoudre ce problème. Nos travaux s'appuient sur les travaux précurseurs de Michèle Artigue et Jacqueline Robinet (1982, p.46) qui mettent au jour les définitions possibles du cercle (que nous reprenons plus loin dans l'article) que ces auteures distinguent des conceptions possibles chez l'élève : « elles [les conceptions] correspondent à des façons différentes de voir le cercle, d'utiliser ses propriétés et elles mettent l'accent sur des éléments géométriques et des relations entre ces éléments, différents. »

Les conceptions dont les auteures parlent renvoient à la notion de point de vue de l'élève évoquée précédemment (Kervyn, 2014). Nous admettons donc que, pour les élèves, il existe une pluralité de points de vue possibles sur un même concept (ici le cercle), de modes de traitement ou d'adaptation à la résolution de telle classe de problèmes. Cette distinction est pour nous importante, car elle permet de différencier le savoir que l'enseignant cherche à transmettre des connaissances effectivement construites et mobilisées par l'élève, en situation. Nous pensons néanmoins qu'il reste difficile de décrire la globalité d'une conception d'un élève sur tel ou tel concept mathématique, nous préférons alors parler des différents modes d'agir-parler-penser du cercle qui peuvent être interprétés comme une fenêtre sur les conceptions des élèves (ou, dit de façon imagée, le sommet de l'iceberg) : en cherchant à rendre compte des modes d'action matérielle et langagière des élèves, nous essayons d'en inférer des façons de penser.

Notre travail cherche donc à repérer et à décrire l'évolution et la transformation des modes d'agir-parler-penser des élèves (et de l'enseignant) en situation de résolution de problème. Quels modes d'agir-parler-penser peuvent être mobilisés dans notre situation (*a priori*) ? Lesquels le sont effectivement (*a posteriori*) ? Quels sont ceux qui seront retenus comme prise d'appui par l'enseignant, ou identifiés par ce dernier, pour cheminer vers un mode d'agir-parler-penser parta-

[7] Dans le travail présenté ici nous ne faisons pas une distinction stricte entre sens et signification (*versus* Vygotski, 1934, p.480).

[8] La résolution de la situation en elle-même ne nécessite pas de formulation des savoirs (au sens de Bosch & Perrin-Glorian, 2013, dans le cadre de la théorie des situations didactiques).

gé et validé institutionnellement ? Quelle(s) mise(s) en mot ? Quelle(s) évolution(s) et transformation(s) des discours ? Enfin, les échanges langagiers permettent-ils réellement d'élaborer, de stabiliser des savoirs et d'aller ainsi au-delà de simples échanges permettant de décrire l'action des élèves et/ou de simples oppositions ?

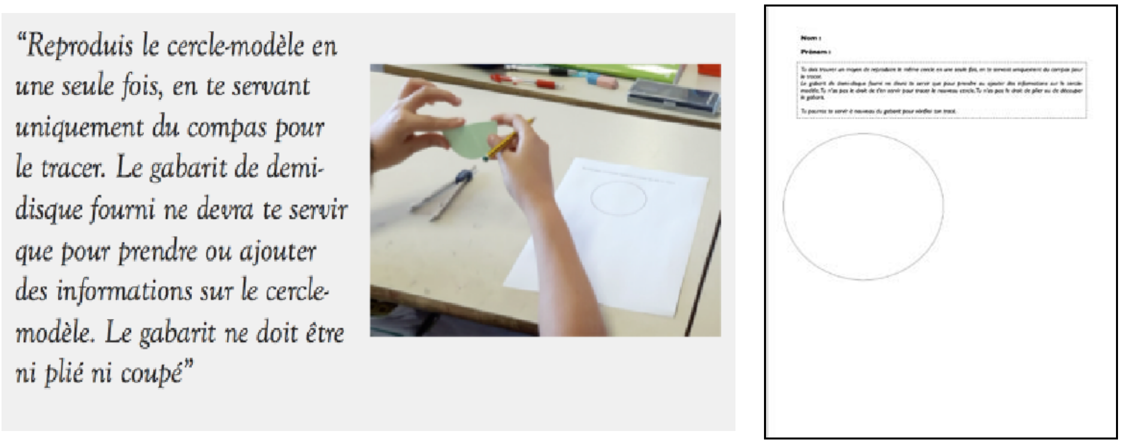
Nous décrivons dans la partie suivante notre protocole et méthodologie d'analyse ainsi que des premiers éléments de réponses à la première question énoncée dans le paragraphe précédent, à savoir : quels modes d'agir-parler-penser peuvent être mobilisés dans notre situation (*a priori*) ?

2. Protocole et méthodologie d'analyse

La situation mise à l'étude et quelques éléments d'analyse a priori

La situation que nous avons choisie d'exploiter ici (figure 2) se situe dans une progression, de la maternelle au début du collège, pour l'apprentissage et l'enseignement des propriétés du cercle[9].

Figure 2 - La consigne et la feuille distribuée aux élèves



L'image à droite est une réduction de la feuille distribuée aux élèves : le texte de la consigne est reporté dans l'image à gauche.

Pour l'élève, il s'agit de reproduire le cercle déjà tracé sur la feuille distribuée (ce que nous appelons *cercle-modèle*, cf. figure 2), en se servant uniquement du compas pour le tracer. Un gabarit de demi-disque (qui se superpose exactement au cercle-modèle) lui est fourni et ne devra lui servir que pour l'analyse du cercle-modèle, en prenant ou en ajoutant des informations supplémentaires (en l'occurrence, tracer des diamètres) et puis, éventuellement, à la fin pour valider le tracé obtenu. La feuille et le gabarit fournis ne peuvent être ni pliés ni coupés.

Pour résoudre ce problème, on peut alors tracer un diamètre avec le gabarit de demi-disque sur le cercle-modèle, puis, en le tournant suivant la trajectoire du bord courbe, on peut en tracer un second qui permettra ainsi de mettre en évidence :

- le centre d'un cercle comme intersection de deux diamètres (le diamètre étant matérialisé par le bord droit du gabarit de demi-disque) ;
- un rayon comme segment joignant le centre du cercle avec l'un de ses points ou avec la ligne du cercle, permettant ainsi de contrôler l'écartement des branches du compas ; le rayon est ici matérialisé par le trait tracé ;
- le diamètre comme segment joignant deux points du cercle et passant par son centre ;
- des points comme intersections d'un diamètre avec le cercle.

[9] Cette situation se situe notamment dans une partie consacrée au CE2 et au CM1, juste après l'introduction du compas comme outil pour tracer des cercles. Pour davantage de détails, cf. Bulf et Celi (2016).

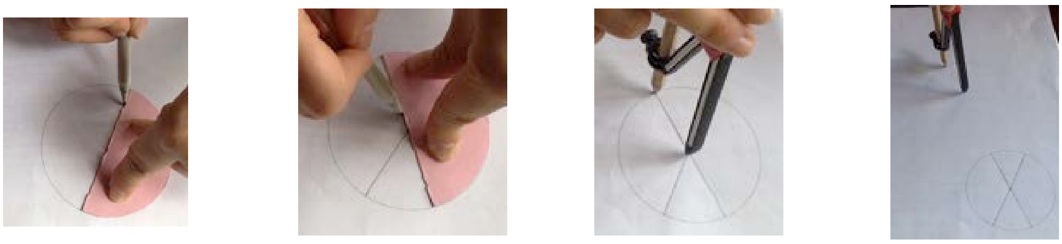
Les valeurs retenues, même en termes d'interdits, des variables didactiques de notre situation favorisent *a priori* le changement de regard porté sur l'objet cercle[10], en articulant une vision « surface » (disque) avec une vision « ligne » (cercle) et en ouvrant la voie vers une vision « réseau de points » (compte tenu du fait que les diamètres tracés auront leurs extrémités sur le cercle). Remarquons, en outre, que divers usages du compas s'articulent aussi : avant de servir en tant que traceur de cercle (étape 4, dans la figure 3), il servira pour reporter une longueur (étape 3 dans la figure 3).

Le cercle-modèle est suffisamment grand pour que les reproductions à l'œil ne soient pas validées, la marge d'erreur serait en effet trop grande pour ne pas être visible en superposant le gabarit de demi-disque lors de la vérification du tracé. Le gabarit a un double emploi, car il sert également à la validation de la figure reproduite. Par sa nature de surface à courbure constante dont on peut tracer le contour, le recours à un gabarit de demi-disque opaque et rigide vise plus particulièrement à faire mobiliser des modes d'agir-parler-penser du cercle en termes de surface (disque), contour de surface (bord du disque), courbure constante (ligne courbe dont la courbure est toujours la même), en lien avec des modes d'agir-parler-penser du diamètre en termes de bord droit d'une surface (bord du demi-disque), d'axe de symétrie (on peut percevoir des « moitiés » de disque), lignes (par les traits tracés)[11].

Le fait que ce soit un demi-disque est important afin que le centre ne soit pas matérialisé directement : par exemple, si le gabarit était un secteur angulaire ou si l'on permettait à l'élève de le plier, le centre serait matérialisé par une « pointe » ; au contraire, si le gabarit était une portion[12] de disque, il ne serait pas du tout possible de matérialiser le centre, ni directement ni indirectement.

La contrainte sur le gabarit de demi-disque (à utiliser seulement sur le cercle-modèle) devrait alors guider l'élève vers la procédure attendue (cf. figure 3), car, autrement, le gabarit de demi-disque convenablement placé et déplacé sur la feuille permettrait de tracer directement un cercle superposable au modèle, sans besoin de matérialiser son centre ni son rayon.

Figure 3 - Description étape par étape de la résolution du problème



Étape 1
Positionner le gabarit dans le cercle-modèle et tracer un premier diamètre.

Étape 2
Tourner le gabarit dans le cercle-modèle et tracer un second diamètre.

Étape 3
Ouvrir le compas pour matérialiser le rayon et le centre.

Étape 4
En gardant l'ouverture du compas, tracer un cercle (superposable au cercle-modèle).

Si l'élève pouvait plier la feuille selon des diamètres du cercle-modèle, il obtiendrait ainsi directement le centre et l'articulation entre les deux instruments à disposition ne serait plus un enjeu de la situation.

[10] Nous renvoyons le lecteur à nos précédentes publications sur le cercle afin d'étayer cet aspect de notre travail plus mathématique.
[11] Voir l'annexe pour plus de détails.
[12] En géométrie, ce gabarit représente plus précisément ce qu'on appelle un « segment de disque ».

Le fait de préciser dans la consigne d'utiliser le compas en « une seule fois » devrait empêcher l'élève de résoudre le problème en cherchant par « tâtonnement » un écartement du compas permettant ensuite de tracer un cercle « à peu près » superposable au cercle-modèle ; la contrainte de l'utiliser seulement pour le tracé de la figure à construire cherche au contraire à forcer son usage. Le compas devient alors porteur de différents modes d'agir-parler-penser du cercle, du diamètre et du centre : ligne courbe fermée, vision dynamique liée à la rotation ou encore une ligne à égale distance du centre. Le rayon est « matérialisé » par l'écartement des branches du compas (même si celui-ci est vide, l'outil est lui bien tangible) ou bien comme point d'intersection des lignes obtenues en faisant deux fois le contour droit du gabarit de demi-disque.

Tous ces modes d'agir-parler-penser du cercle, du diamètre et du centre[13] ne sont pas exclusifs ; plusieurs peuvent cohabiter en même temps chez l'élève ou au contraire se confronter, s'enrichir, etc. C'est ce qui rend complexe l'étude du processus de conceptualisation, comme signalé dans la partie 1 de ce texte.

Par l'articulation d'un gabarit de demi-disque et d'un compas, cette situation vise l'introduction (ou le réinvestissement pour la fin de l'école primaire et début du collège) des éléments caractéristiques du cercle qui sont son centre et son rayon. Telle qu'elle est conçue, elle cherche à mettre en relation plusieurs conceptions possibles du cercle dont les dialectiques sont souvent absentes des pratiques usuelles attachées à l'apprentissage du cercle (Artigue & Robinet, 1982 ; Bulf & Celi, 2016) alors qu'elles sont tout autant porteuses de sens pour l'élève. Les différentes conceptions potentiellement mobilisées ici sont donc celles du cercle :

- comme figure ayant une courbure constante (quelle que soit la position du demi-disque sur le cercle modèle, la courbure du cercle modèle correspond au contour du gabarit) ;
- comme figure invariante par rotation (en faisant « tourner » le gabarit sur lui-même) ;
- comme figure ayant une infinité d'axes de symétrie (tous les diamètres tracés du cercle sont des axes de symétrie) ;
- comme trace graphique résultant du tracé dynamique d'un compas (la pointe sèche fixée et l'écart constant).

Notre situation vise aussi, à terme, à ouvrir la voie vers une conception ponctuelle du cercle, par la matérialisation de points obtenus par l'intersection du cercle (tracé au compas) avec deux de ses diamètres.

Ainsi la situation devrait-elle aider à prendre en compte la dialectique entre différentes conceptions du cercle, le passage du gabarit au compas et l'articulation des différents usages du compas. Nous cherchons alors à créer les conditions favorisant le passage du disque au cercle ainsi que du gabarit au compas en visant la matérialisation du diamètre, du rayon et du centre d'un cercle. Pour résumer, un mode d'agir-parler-penser visé par cette situation pourrait être défini de la façon suivante (déjà décrit au début de cette partie – figure 3) :

- une façon d'agir mobilisant le compas dont l'écartement des branches est obtenu à partir de deux tracés successifs du bord droit du gabarit de demi-disque sur le disque-modèle ;
- une façon de voir le cercle comme une ligne « dynamique » dont la courbure n'est pas aléatoire ;
- une façon d'en parler qui mobilise de nouveaux mots pour caractériser le cercle : le *centre* et son *rayon* et qui permettent de mettre en mot les façons d'agir et de voir.

Comme nous le développons dans le prochain paragraphe, nous pensons que la mise en commun, après avoir individuellement reproduit le cercle, peut être un lieu de confrontation et de négociation de différents modes d'agir sur la figure, d'en parler et de la penser. Lesquels vont être effectivement mobilisés et mis en mots ? Lesquels vont servir de point d'appui pour une mise en commun visant la nécessité d'un vocabulaire spécifique pour désigner les nouveaux objets

[13] Nous parlons de mode d'agir-parler-penser du *cercle (*et *diamètre* et *centre)* de façon générique. Les conceptions sous-jacentes peuvent être bien sûr différentes, c'est justement tout l'enjeu de notre travail, et ce dont rendent compte les tableaux fournis en annexe.

géométriques tracés (comme rayon, centre ou diamètre) et expliciter une signification stabilisée ? Comment les liens entre agir, voir et parler vont-ils être négociés ?

Une méthodologie d'analyse en termes d'agir-parler-penser

L'inter-influence mutuelle entre les manières de voir (au sens de Duval, 2005), les manières d'agir avec ou sans instruments et les manières de parler (en prenant en compte le rôle du langage précédemment explicité) nous amène à considérer *a priori* ce que nous avons donc appelé différents modes d'agir-parler-penser du cercle, du centre et du diamètre. Le recours à une telle méthodologie d'analyse[14] *a priori* en termes d'agir-parler-penser s'appuie sur les différentes conceptions du cercle, déjà évoquées précédemment (Artigue & Robinet, 1982) ainsi que les potentielles relations logiques[15] entre les unités figurales (au sens de Duval, 2005, en considérant les différentes dimensions des figures : surface, lignes ou points). Par exemple, la relation d'« égale distance » entre le centre et la ligne du cercle peut être associée à une façon d'agir qui matérialise cette relation avec le *compas* et une façon de parler peut être *le cercle de centre O et de rayon r*, même si cela demande à être nuancé, car, au début des apprentissages, beaucoup d'écoliers utilisent le compas comme étant l'outil dont la trace graphique est le résultat du « mouvement » du compas qui tourne ; cet instrument n'est justement pas encore associé à l'« égale distance », l'écartement de ses branches étant « vide » ; d'ailleurs, cette relation pourrait être aussi matérialisée par une règle graduée ou une ficelle dont une extrémité tourne autour du centre du cercle.

Nous considérons que cette méthodologie d'analyse *a priori* nous permet de décrire des modes d'agir-parler-penser des élèves qui peuvent potentiellement se manifester, ou pas, au cours de la séance[16] (voir le paragraphe précédent et l'annexe dans laquelle nous les décrivons). *A posteriori*, à partir des extraits filmiques et transcriptions des différents moments qui composent la séance (passation de consignes, phases de recherche des élèves, moments collectifs entre enseignant-élèves ou élèves-élèves, conclusion, etc.), nous cherchons à repérer les évolutions, transformations, mises en relation, ou absences de traces de différents modes d'agir-parler-penser identifiés *a priori*. Pour cela, nous référons à certains outils d'analyse de corpus décrits par Martine Jaubert (2007) : par exemple, nous cherchons les reprises et reformulations, les schématisations (au sens de Grize, 1996), les tentatives de nominalisation, de dénivellation, les dialectiques ancien-nouveau, les tentatives de mise en cohérence sémantique, logique et/ou chronologique, etc.

Dans la section suivante, nous présentons et analysons le matériel recueilli pendant les observations de trois classes différentes.

3. Comparaison des mises en œuvre différenciées

De la situation mathématique à la situation didactique

Nos analyses *a priori* en termes d'agir-parler-penser du cercle, du centre et du diamètre (cf. annexe) permettent de faire un premier constat : il existe de nombreuses conceptions possibles sous-jacentes des élèves qui peuvent surgir dans la résolution de ce problème (quels que soient la classe et le vécu des élèves auquel nous n'avons pas accès). Cette richesse suggère dès lors une certaine complexité qui résulterait de la confrontation, l'articulation, la mise en lien, etc. entre ces différents modes d'agir-parler-penser. L'autre constat que l'on peut faire est que ces différents modes d'agir-parler-penser sont également étroitement liés entre eux et que de nombreux chemins (pas nécessairement linéaires ou ordonnés) sont possibles pour construire/enrichir le savoir ici visé, le *cercle*.

[14] Cette méthodologie a été initialement éprouvée dans Bulf, Mathé & Mithalal (2014).
[15] Pour aller plus loin sur cet aspect théorique que nous ne développons pas ici, nous invitons le lecteur à consulter, entre autres, les travaux de Thomas Barrier et al. (2019).
[16] Nous n'oublions pas que les modes qui se manifestent au cours d'une séance relèvent aussi d'apprentissages antérieurs, dans la classe (la progression dans laquelle le problème traité est inclus) mais aussi en dehors de celle-ci.

Par exemple, le centre du cercle est un point, mais ses différents statuts ne sont pas encore stabilisés chez les élèves de l'âge des classes observées (voire même jusqu'au lycée...). Le centre du cercle ici peut être vu comme un point résultant de l'intersection entre deux lignes pouvant être dénommées ensuite par diamètres ou axes de symétrie ou encore contours du bord droit de demi-disque. Le statut de ce point alterne aussi entre un repère graphique pour positionner le compas et celui d'extrémité (début/fin) d'un segment (rayon ou diamètre) ou encore celui de milieu d'un segment (diamètre), etc. Ces différents sens s'alternent, s'articulent, s'enrichissent mutuellement. Leur mise en lien, non transparente, est ce qui est visé à terme, dans une perspective généralisante, pour construire et enrichir le concept de *cercle* (et de centre, rayon, etc.) en tant que *savoir* géométrique.

Tous ces considérations et potentielles articulations des différents modes d'agir-parler-penser du cercle (et ses éléments caractéristiques) suscitent ainsi des questions quant à la mise en œuvre en classe de la situation, compte tenu notamment du fait, rappelons-le, qu'il s'agit d'une situation d'action au sens de la théorie des situations, c'est-à-dire que ses conditions ne nécessitent pas *a priori* de formuler (comme cela peut être le cas par exemple dans les situations d'émetteur-récepteur en géométrie)[17]. Pour autant, elle présente un potentiel d'apprentissage comme déjà explicité au début de l'article qui pourrait conduire à des moments d'échanges langagiers collectifs. Nos analyses nous conduisent donc maintenant à nous poser des questions sur sa mise en œuvre : Sur quelles connaissances (émanant des élèves) s'appuyer lors de la mise en commun ? Lesquelles retenir et expliciter oralement ? Comment les articuler entre elles ou les faire évoluer vers une formulation du savoir en jeu qui peut être ici : *le cercle de centre x et de rayon n* ? Quelles négociation collective et désignation de ces objets ? Quelle(s) formulation(s) stabilisée(s) des savoirs ou quel(s) savoir(s) exposé(s) (au sens de Bridoux et al., 2015, cité dans Allard, 2015) ?

Pour analyser et pouvoir comparer les différentes mises en œuvre dans les différentes classes que nous présentons dans la partie suivante, nous avons choisi de nous focaliser sur l'usage et l'évolution explicite qui sont faits du bord droit du gabarit de demi-disque vers le diamètre du cercle. Cet élément du milieu (au sens de la théorie des situations didactiques) nous paraît crucial et déterminant *a priori* dans la dynamique d'évolution des modes d'agir-parler-penser du cercle et de ses composants (centre, rayon). En effet, ce bord droit du gabarit renvoie à différents modes d'agir-parler-penser du cercle (et du centre et du rayon) qui vont du matériel (« bord rigide d'une surface marquant la moitié du disque ») au théorique (« diamètre du cercle », « axe de symétrie », segment passant par le centre du cercle). Nous spécifions donc encore nos précédentes questions : Ces modes de penser, qui s'incarnent dans des modes d'agir, sont-ils explicités dans le parler ? Si oui, à quel moment ? Quelle désignation, reprise, reformulation, nominalisation, etc. ? Quelles mises en lien avec les modes d'action associés ? Quelle cohérence entre ces liens ? Comment les élèves se positionnent-ils ? Qu'est-ce que les élèves ou l'enseignant mettent à distance ?

Une autre façon de formuler nos interrogations pour les résumer serait de faire référence au « paradoxe de l'enseignant » (Brousseau, 1986 ; Coulange, 2014) qui consiste, pour l'enseignant, à savoir quand, comment et quoi dévoiler de ses intentions et des connaissances en jeu sans sacrifier les enjeux et objectifs d'apprentissage visé. Autrement dit : quel est le bon moment pour faire formuler et valider aux élèves que ce bord de surface peut aussi donner lieu à une ligne et que cette ligne peut couper une autre ligne, en un point qui est le centre du cercle, et qu'à terme ces lignes sont désignées par le terme savant de diamètre (ou rayons) ?

▪ *Différentes classes observées pour comparer la gestion de certains implicites*

Nous avons examiné le déroulement de notre situation dans trois classes différentes. Nous avons choisi ici de mettre en regard trois classes, car nous estimons qu'elles sont significatives

[17] Pourtant les questions que nous formulons par la suite font écho à celles exposées par Bosch & Perrin-Glorian (2013, p.279) pour étudier les conditions d'une situation relevant de la formulation et de la validation au sens de la théorie des situations didactiques.

des mêmes phénomènes observés lors de nos différentes expérimentations[18]. Comparer deux classes nous paraissait insuffisant et trop dichotomique. En effet, les points communs entre trois classes laissent supposer plus facilement que cela peut concerner potentiellement beaucoup de classes et de la même façon, les divergences entre les trois classes sous-entendent également le rôle potentiellement différenciateur porté par « l'histoire » de chaque classe et/ou l'activité de l'enseignante.

Décrivons brièvement les conditions d'expérimentation dans les trois classes.

Dans la classe d'Émilie (zone rurale, proche de Bordeaux, France), avec des élèves de cours élémentaire deuxième année (CE2, huit ans), c'est l'une des chercheures – et co-conceptrice de la progression dont est issue cette situation – qui prend en charge la classe pour la séance, en mai 2017. L'enseignante de la classe, Émilie, est présente et c'est elle qui filme la séance. L'objectif visé par la séance est celui déjà énoncé précédemment : arriver à formuler une définition du cercle par son centre et son rayon. La chercheure était déjà venue plusieurs fois dans cette classe et avait mené une séance antérieure sur l'usage de divers gabarits (portion de disque, disque...), pour réaliser des dessins. La manipulation technique du compas avait également fait l'objet d'une séance préalable avec l'enseignante de la classe. Ces séances antérieures avaient pour but de familiariser les élèves avec ces nouveaux outils.

Dans la classe d'Alice (Rome, Italie), avec des élèves de niveau équivalent à celui du cours moyen première année (CM1, neuf ans) en France, en avril 2016, l'objectif visé par l'enseignante est le même que celui de la classe d'Émilie. Une des chercheures est présente dans la classe et filme ; une autre personne est présente en tant qu'observateur. Un travail de familiarisation avec le compas a également été mené dans la classe italienne, par l'enseignante elle-même et sans qu'il y ait d'observateurs pendant la séance.

Dans la classe de Stella (Pau, France), avec des élèves de sixième (onze ans), en novembre 2016, l'objectif visé par la séance est celui d'une réactivation de la définition du cercle par son centre et son rayon. Une des chercheures est présente dans la classe et filme.

Toutes ces différences (pays, niveau scolaire, objectifs visés…) peuvent être considérées comme des facteurs jouant sur les phénomènes observés. Nous y reviendrons au fil de nos analyses et notamment à la fin de ce texte.

▪ *Comparaison des débuts des séances : une activité géométrique des élèves proche malgré des phases de dévolution[19] différentes*

- *La passation de consignes*

Dans les classes d'Alice et d'Émilie, la durée de passation est beaucoup plus longue que dans la classe de 6e.

Les enseignantes de l'école élémentaire prennent le temps de contextualiser et de s'approprier le problème : « j'ai tracé quoi ? » ; « vous allez travailler… », « vous allez utiliser… vous avez le droit de… ».

Dans la classe d'Émilie, la chercheure expérimentatrice cherche à expliciter rapidement l'usage du gabarit pour faire des contours et dépasser la vision « surface » portée par l'instrument, en appui sur la mémoire de la classe[20] :

> *Chercheure : « On va continuer notre petit travail sur le cercle […] Ce matériel-là c'est quoi déjà ? […] vous allez utiliser un autre matériel de géométrie que vous avez appris à*

[18] Notre situation a en effet été expérimentée dans d'autres classes encore, de CE2 ou 6e et nous retrouvons des observations similaires.
[19] Dans la TSD, la dévolution correspond notamment aux moments où l'on négocie le contrat didactique avec les élèves : expliciter ce qu'on attend d'eux sans pour autant dévoiler les enjeux de la situation.
[20] Au sens de Brousseau & Centeno (1991).

> *utiliser en début de semaine c'est le compas […] hier on a tracé beaucoup de demi-dis de demi-cercle pardon d'arcs de cercles on a tracé plein de lignes ».*

Tandis que, dans la classe italienne, Alice hésite à dire explicitement que le gabarit sert pour prendre des informations sur le cercle-modèle, elle ne dit en tout cas pas qu'il sert pour apporter des traces supplémentaires à ce modèle :

> *Alice : « vous devez utiliser seulement ce que je vous dis moi / (inaudible) / vous avez à votre disposition votre compas, le crayon, la gomme / d'accord ce sont vos accessoires / et ce gabarit* [elle montre le gabarit de demi-disque] *ok ? ce gabarit / ce gabarit doit vous servir non pas pour dessiner »*
> *Mattia : « mais pour prendre des mesures »*
> *Alice : « disons ainsi / d'une certaine manière oui / d'une certaine manière oui /, mais il vous sert à le comparer avec la figure que vous avez / à comprendre comment vous pourriez faire / pour réussir à obtenir la même forme […] maintenant vous avez un peu de temps pour réfléchir sur la manière de faire / réfléchissez sur ça ensemble / tu as pensé à ça et tu as pensé à ça comparez vos idées / et d'accord / rappelez-vous que cette forme-ci ne vous sert pas […] pour dessiner ok ? / ne vous sert pas pour dessiner elle vous sert pour »*
> *Mattia : « prendre les mesures »*
> *Alice : « nos plus (inaudible) / utiliser / c'est un instrument* [elle fait allusion au gabarit] *pour recueillir des idées sur cette figure ».*

Un élève italien est ainsi amené à deux reprises à associer le gabarit à un instrument de mesure, idée qui est peut-être partagée par d'autres, même s'ils ne se sont pas manifestés.

Dans la classe de sixième, Stella n'intervient quasiment pas : elle affiche la consigne au tableau interactif et fournit les gabarits dans une enveloppe. Afin de pouvoir introduire la définition de *corde* d'un cercle, notion qui n'est pas rencontrée par les élèves avant le collège, l'enseignante de cette classe a fait le choix d'ajouter deux autres gabarits : deux portions[21] de disque, l'une contenant un demi-disque, l'autre ne contenant pas le centre, ces deux nouveaux gabarits ayant toujours un bord droit. Ce choix pourrait d'ailleurs permettre de définir un diamètre comme étant une corde particulière (car passant par le centre du cercle).

Dans les trois classes, les négociations du contrat semblent alors se jouer sur des plans différents : en particulier, le rôle du gabarit semble d'emblée négocié de façon très différente, soit en explicitant clairement le rôle que ce gabarit peut jouer pour réaliser des contours (dans la classe de la chercheure-expérimentatrice) soit en étant plus implicite (comme c'est le cas dans la classe italienne) ou en laissant les élèves seuls face à la découverte de la consigne et du matériel.

Malgré ces différences dans le rapport au milieu matériel, les élèves mettent néanmoins en œuvre des procédures sensiblement proches, comme nous le montrons dans le paragraphe suivant.

- *L'activité géométrique des élèves en phase de recherche*

Dans les trois classes, de culture et de niveaux pourtant différents, les élèves partagent les mêmes procédures. Une part importante d'élèves dans les niveaux inférieurs (CM1, CE2) ont tendance à résoudre le problème en positionnant à l'œil le compas sur le bord droit du gabarit du demi-disque ou sur un premier tracé de diamètre obtenu en faisant le contour de ce bord droit sur le cercle-modèle alors que les élèves qui réussissent tracent deux diamètres : un horizontal et un vertical. Les élèves de sixième s'approchent plus rapidement de la procédure attendue.

Ce qui est intéressant à souligner c'est que tout se passe comme si les élèves (quel que soit le niveau) convoquaient des modes d'agir-parler-penser du diamètre (plus ou moins de façon consciente) en liens étroits avec les propriétés de symétrie du cercle. En effet, les élèves ont tendance à agir sur le cercle-modèle en cherchant à le partager en deux (avec un axe médian verti-

[21] Cf. note13.

cal) puis en quatre de façon équitable. Le point obtenu devient alors pour eux le repère permettant de positionner la pointe sèche du compas et l'écartement du compas obtenu assure que la courbure est la même partout :

> *Kelya (CE2, Bordeaux) : « une marque pour me repérer (…) oui parce que là j'ai fait un morceau // après j'ai vu que là c'était exactement les mêmes /// là j'ai refait là parce que // et après // comme il exactement pareil je l'ai retracé là »*
>
> *Paolo (CM1, Rome) : « Et puis nous devons voir si ces quatre formes sont égales (…) J'ai tracé la moitié du disque / et puis aussi de cet autre côté / et il y a ainsi quatre angles »*
>
> *Maxime (6e, Pau) : « Du coup on a coupé en quatre quarts maintenant »*

Les traces dans le parler de cette manière d'agir pourraient aussi être attribuées à la manipulation d'un objet matériel, le gabarit de demi-disque, qui pourrait fonctionner en obstacle à une manière davantage théorique de parler du cercle.

Mais ce qui nous paraît important à remarquer ici c'est que ce mode d'agir-parler-penser du cercle est prégnant dans les trois classes au début de la séance et cela malgré un rapport sans doute différent au cercle pour tous ces élèves-là, compte tenu de leurs passé, culture, langue, etc.

De nombreux travaux (philosophiques, esthétiques, psychologiques, didactiques, etc.) font état du rôle majeur tenu par la recherche d'une paire d'axes de symétrie (horizontale-verticale) dans la façon de voir des images (et donc *a fortiori* des figures géométriques) ou d'agir dessus ; cette manière de voir serait entretenue par des pratiques sociales courantes (on commence par partager en deux une tarte par exemple en coupant avec un axe médian)[22].

Dans Artigue & Robinet (1982, p.61, p.19), la prégnance des axes horizontal et vertical est repérée : « ces deux directions semblent, en quelque sorte, restreindre le champ de validité de certains théorèmes ». Ces auteures l'expliquent de la façon suivante : « Le cercle y apparaît comme une figure géométrique ayant même dimension dans deux directions privilégiées : l'horizontale et la verticale. Il a une longueur et une largeur, voire une largeur et une hauteur et elles ont même mesure. Pour tracer cette longueur et cette largeur, l'enfant ne cherche pas, semble-t-il, à réaliser un maximum de longueur de cordes horizontales ou verticales, mais plutôt à partager le cercle en deux parties égales. Le milieu du cercle est justement le point de croisement de la longueur et de la largeur. De ce fait, longueur et largeur semblent être considérées comme des axes de symétrie plutôt que comme des diamètres ensemblistes. »

On peut donc se poser la question de l'évolution de ces modes d'agir-parler-penser du cercle, car même s'ils sont communs aux trois classes, la façon de désigner le bord droit du gabarit de demi-disque, soit par les élèves soit par les enseignantes, est quant à elle bien différente dans les trois déroulements, et cela, comme nous l'avons déjà évoqué, dès le début de la séance. Quelles sont donc les transformations (ou adaptations) des différents modes d'agir-parler-penser du cercle au cours des phases collectives d'échanges ? Aucune des trois enseignantes observées ne fait référence explicitement au diamètre en tant qu'axe de symétrie[23], connaissance pourtant disponible chez tous les élèves de ces trois classes et qui, comme nous l'avons évoqué précédemment, est à l'origine de certains modes d'agir (consciemment ou non) d'élèves ou qui aurait pu être suggérée par la nature de quelques échanges, comme nous le montrons plus loin.

▪ *Une évolution différenciée de la suite du déroulement effectif*

Nous constatons jusque-là des façons d'agir sur le cercle et d'en parler qui sont différentes (du point de vue de l'enseignant) dans les trois classes, les phases d'échanges langagiers et les né-

[22] Nous invitons le lecteur à consulter le chapitre 1 de la thèse de Bulf (2008) afin de prendre connaissances plus précisément de ces différents travaux issus de divers champs disciplinaires (psychologie, philosophique, etc.) à propos du rôle potentiel de la symétrie axiale dans la perception.
[23] La chercheure elle-même n'avait pas anticipé de le mettre en mot malgré une analyse *a priori* détaillée (cf. annexe).

gociations de signification qui vont suivre vont se dérouler de façon également bien différente, comme nous le montrons ci-après à travers l'analyse de quelques extraits de la phase de mise en commun des séances observées dans chacune des classes.

- *Dans la classe de Stella (6e)*

Dès le début de la mise en commun, Stella amène rapidement les élèves à utiliser un lexique mathématique, cela sans doute parce qu'ils l'ont déjà rencontré à l'école élémentaire.

> *Luc : « en fait ce gabarit vous prenez votre feuille* [il prend la feuille de travail] *vous voyez que c'est une demie-partie du cercle que vous voulez faire* [il parle et, en montrant aux autres élèves, pose le gabarit sur la feuille de travail de façon à ce que son bord courbe coïncide avec une partie du cercle] »
> *Stella : « d'accord il y a l'un des trois gabarits qui est un »*
> *Élève : « un demi »*
> *Stella : « un demi-cercle »*
> *[…]*
> *Luc : « on a fait ça ici »* [Noé tient le gabarit sur le modèle et Luc trace un segment suivant le bord droit du gabarit]
> *Stella : « très bien on enlève / qu'est-ce qu'on trace en faisant ça grâce au demi-disque / Remi »*
> *Remi : « un segment »*
> *Stella : « oui on trace un segment qui a un nom / Noé »*
> *Noé : « un demi-cercle un rayon »*
> *Stella : « un rayon pour Noé / Lisie »*
> *Lisie : « un diamètre »*

Par l'agir de ces élèves, le bord droit du gabarit (jamais évoqué en ces termes) est vite étiqueté, sans aucune explication (de la part des élèves ou de l'enseignant), comme étant un diamètre. Cet épisode aurait pu être une occasion pour caractériser ce dernier en tant qu'axe de symétrie du cercle, d'autant plus qu'ici les élèves ont dû choisir le bon gabarit (le demi-disque), parmi les trois proposés. Notons que l'enseignante commence par parler de « demi-disque », mais très rapidement parlera surtout de « demi-cercle » ce qui suppose également que l'enseignante se situe plutôt du côté de l'objet théorique et non matériel.

Ce n'est que plus loin, encore en s'appuyant sur l'agir des élèves, que Stella parle du diamètre comme segment passant par le centre du cercle, définition d'ailleurs présente dans la trace écrite qu'elle distribue à la fin de la séance :

> *Stella : « tous les diamètres se croisent en un point qui s'appelle … »*
> *Un élève : « intersection »*
> *Stella : « intersection, mais pour le cercle ? »*
> *Un autre élève : « centre »*
> *Stella : « le centre quel que soit le diamètre que vous avez tracé vous devez pouvoir trouver le centre. »*

Dans cette classe, la manière de parler du cercle convoque rapidement le vocabulaire expert (de référence) attaché au cercle. Après avoir choisi le bon gabarit, Stella n'évoque plus son aspect matériel (bord droit ou moitié de disque) alors que les élèves continuent de le manipuler lors de cette phase de mise en commun pour expliciter leur procédure.

Dans la trace écrite, préparée en amont de la séance, Stella inclut la définition suivante :

> « *On considère un point O déjà placé. Un cercle de centre O est l'ensemble de tous les points situés à une même distance du point O* ».

Comme déjà décrit précédemment la situation ne cherche pas à favoriser cette définition du cercle, en termes de lieu géométrique (comme ensemble des points situés à égale distance d'un point donné) : l'enjeu de la situation se situe plutôt au niveau du lien entre le cercle vu comme contour de surface et le cercle en tant que ligne, résultat du tracé du compas. L'objectif de la situation, rappelons-le, est de donner du sens à la caractérisation du cercle par son centre et rayon.

Stella ne s'appuie finalement que de manière anecdotique sur la situation : la trace écrite qu'elle distribue aux élèves renvoie à une définition exclusivement en termes de lieu géométrique, ignorant les modes d'agir-parler-penser du cercle que la situation elle-même peut convoquer et que les élèves pourraient amener au cours des échanges oraux pour décrire leurs actions.

Remarquons enfin que, au cours de cette séance, le compas sert aussi bien pour tracer le cercle que pour comparer ou reporter des longueurs, notamment lors de la mise en évidence de la relation qui existe entre diamètre et rayon :

> *Stella : « alors reprend-le ton rayon là où il a été trouvé au départ avec le compas »*
> [l'élève écarte le compas sur le modèle en posant la pointe sèche sur le centre et l'autre sur le point d'intersection du cercle avec un diamètre tracé avant]
> *Stella : « et le double ça veut dire que / on doit le reporter / deux »*
> *Élève : « deux fois »*
> *Stella : « deux fois n'utilise pas le gabarit essaie de le reporter deux fois* [sous-entendu, le compas] *le rayon sur le cercle »*
> [l'élève reporte deux fois le compas sur un diamètre du cercle tracé]
> *Stella : « une fois et puis / deux fois est-ce que ça marche à peu près ? d'accord »*

Les divers usages du compas ne sont pourtant pas explicités lors des échanges, mais seulement dans la trace écrite préparée pour les élèves.

- *Dans la classe d'Alice (niveau CM1)*

Au moment de la mise en commun, l'enseignante induit à focaliser rapidement le discours vers un objet géométrique particulier, à savoir le point obtenu à l'intersection de deux diamètres, tracés à l'aide du bord droit du gabarit :

> *Alice : « elles forment donc quatre angles »*
> *Élève 1 : « et puis du centre »*
> *Alice : « et donc alors le point »*
> *Élève 2 : « de »*
> *Élève 1 : « départ »*
> *Alice : « non de départ les droites incidentes se… »*
> *Plusieurs élèves (dont Élève 1 et Élève 2) : « se croisent »*
> *Alice : « point de … »*
> *Élève 2 : « de croisement »*
> *Alice : « de rencontre qui se nomme »*
> *Élève 3 : « croisement »*
> *Alice : « ou… »*
> *Élève 4 : « incidente »*
> *Élève 5 : « horizontal »*
> *Alice : « origine et donc dans ce cas c'est aussi … je fais comme ça et je fais comme ça* [on ne voit pas ce qu'elle fait] *c'est aussi le centre »*
> *Élève 2 : « du disque »*
> *Alice : « du cercle »*

De manière réciproque, à plusieurs reprises, le bord droit du gabarit est exploité comme moyen qui permet de tracer des « lignes qui se coupent en un même point ». Par exemple :

> *Alice : « de cette de cette ligne et de celle-ci elles se coupent, n'est-ce pas ? et si je fais comme ça ? et comme ça ?* [elle fait semblant de tracer des diamètres sur le modèle] *… elles se coupent ? elles se coupent toutes ? » […]*
> *Alice*[24] *: « s'il coïncide avec le cercle la moitié toutes les lignes que je trace »*

[24] Ici, Alice s'appuie sur le dessin d'un cercle qu'elle vient de tracer au tableau noir.

Mattia : « sont précises »
Alice : « précises c'est-à-dire ? Elles passent »
Mattia : « sur le même point »
Alice : « elles passent sur le même point et ce point est [elle revient au tableau pour tracer un deuxième diamètre] »
Simone : « le centre »

Et, plus loin, Alice convoque un autre mode de penser le diamètre, à savoir la « ligne qui coupe le disque en deux parts égales », et amène ainsi les élèves à constater que toutes ces lignes ont la même longueur :

Alice[25] : « … et où se coupent-elles ? […] si j'avais un gabarit assez grand je pourrais trouver la la / la moi »
Plusieurs élèves : « la moitié »
Alice : « maintenant je trace d'ici [elle trace un troisième diamètre] *fais-je toujours la moitié ? d'ici fais-je encore la moitié [un autre diamètre] encore la* moitié [encore un autre diamètre] */ toutes ces lignes d'après vous sont-elles égales ? »*

Ces fluctuations entre les différentes visions du diamètre, qui peuvent faire obstacle à la construction de cette notion de la part des élèves, semblent traduire une certaine instabilité dans les objectifs visés par l'enseignante, voire un écart important avec les objectifs visés par la situation.
Nous retrouvons d'ailleurs d'autres points d'instabilité dans l'analyse de ses discours. Notamment, lorsque Alice n'hésite pas à convoquer un nouveau mode d'agir sur le cercle en introduisant une cordelette pour en tracer un au tableau noir, les analogies avec l'usage d'un compas restant à la charge des élèves. Et tout se passe comme si, pour Alice, il y a un seul mode de penser le cercle, car, après avoir tracé un cercle à l'aide d'une cordelette, elle utilise aussi des gestes de la main qui évoquent un autre mode de penser le cercle, à savoir un « ensemble de points à égale distance d'un point ». Et c'est au cours de cet épisode qu'un malentendu s'instaure entre Alice et ses élèves :

Alice : « de là à là de là à là [sur le tableau, elle bouge un doigt d'un point du cercle au centre et vice-versa] *sont-ils égaux ? »*
Plusieurs élèves : « oui »
Alice : « d'après vous du centre jusqu'ici [le cercle] *du centre jusqu'ici* [sur un autre point du cercle] *du centre jusqu'ici du centre jusqu'ici »*
Plusieurs élèves : « c'est pareil »
Alice : « alors que pouvons-nous dire du centre ? »
Un élève : « que c'est un point de repère »
Mattia : « je l'ai déjà dit »
Un élève : « c'est l'origine »
Un deuxième élève : « un point fixe »
Un troisième élève : « c'est le repère de chaque segment [il fait allusion aux rayons tracés dans le cercle au tableau]. »

Alors qu'Alice veut amener les élèves à penser le cercle comme étant un ensemble de points à égale distance d'un point donné (ici nommé le centre), les élèves ne semblent pas enclins à mobiliser cette nouvelle vision, ils semblent plutôt rester ancrés dans celle d'un repère pour placer la pointe du compas. Ils ne regardent pas le dessin qui est au tableau de la même manière que leur enseignante : c'est d'ailleurs flagrant dans la réponse de l'élève qui voit ce point comme une extrémité d'un segment et non pas comme un point « isolé ».

Au cours de la séance, le compas est exploité dans ses divers usages. Notamment, lorsque deux élèves décrivent leur procédure :

Leo : « et pratiquement du centre nous avons pris la mesure et nous avons »
Lisa : « la mesure et »
Alice : « avec quoi avez-vous pris la mesure ? avec la règle ? »

[25] Alice n'a pas prévu de gabarit suffisamment grand pour être utilisé sur le tableau noir.

Plusieurs élèves (dont Leo et Lisa) : « non avec le compas »
Alice : « avec le compas en ouvrant »

Cet extrait illustre la confusion entre grandeur et mesure déjà évoquée plus haut, à la fois par les élèves et peut-être par l'enseignante puisque cette dernière ne lève pas la confusion.

Alice reste fortement ancrée dans le contexte du problème matériel et laisse ses élèves s'exprimer librement. Pourtant, par les allers-retours entre divers modes d'agir-parler-penser le cercle et ses éléments caractéristiques, elle semble créer au sein du groupe une accumulation de modes possibles sans liens entre eux.

- *Dans la classe d'Émilie (CE2)*

Au début de la phase collective, c'est la chercheure qui parle explicitement de « contour droit » pour introduire ensuite le terme « diamètre » en l'associant à différents modes d'agir-parler-penser :

Chercheure : « Qu'est-ce que vous en pensez de son tracé ? […] vous avez fait ça vous aussi ? […] Il a fait le contour droit / ça avait partagé en deux le cercle » […] le contour droit vous savez comment ça s'appelle c'est »
Un élève : « un segment »
Chercheure : « c'est un segment effectivement et ce segment est particulier qu'est-ce qu'il a fait l partageait en deux hein il nous dit Leyric notre figure et vous savez en mathématiques comment on appelle ça […] là le tracé on l'a fait deux fois // ici et ici [elle désigne les deux diamètres vertical et horizontal tracés au tableau] *ça partage en deux // c'est la moitié /// c'est un mot qui désigne la moitié /// le bord droit du demi-disque // ligne qui partageait en deux le cercle // alors vous savez comment ça s'appelle comment on dit vous savez […] en géométrie y a très longtemps voyez pour se mettre d'accord on a décidé d'appeler ça un diamètre […] hein voilà ça c'est un diamètre // Un diamètre c'est donc le bord droit du demi-disque qui a un début et une fin dès lors qu'il rencontre le cercle et vous avez appelé ces intersections entre le bord du demi-disque et le cercle* [elle montre en même temps au tableau sur la figure] *[…] vous avez reconnu que ça faisait des points […] le diamètre il passe toujours par le centre du cercle et par deux points du cercle ».*

La chercheure convoque différents modes d'agir-parler-penser du diamètre, à partir du contour droit du gabarit de demi-disque, « qui partage en deux le cercle » et s'en éloigne progressivement : segment avec les extrémités sur le cercle, segment passant par le centre et par deux points du cercle. D'ailleurs, ces derniers modes sont mis en évidence à partir d'un cercle tracé au tableau blanc. Consciente des différentes désignations possibles du diamètre, la chercheure veille sans doute à les expliciter, mais, ce faisant, elle semble laisser peu de place aux formulations de la part des élèves.

Si le gabarit a été exploité pour agir sur le diamètre et en parler, c'est le compas qui permettra à la chercheure de dialoguer avec les élèves autour du rayon du cercle, cela après avoir défini le centre comme point d'intersection des diamètres, comme point où placer la pointe sèche du compas :

Chercheure : « maintenant on sait où mettre la pointe sèche du compas et maintenant ce qu'il nous restait à faire c'était savoir comme tu disais (Alana) s'il fallait faire pas très large ou très large autrement dit Leyrich il disait il fallait mesurer et donc Ilan toi t'appelles ça comment comment t'appellerais ça //// »
Ilan : « heu »
Chercheure : […] « quand t'as mis la pointe sèche ici après t'as choisi l'écartement et vous savez comment ça s'appelle cet écartement //// » [elle montre l'écartement du compas]
Élève : « les branches »
Chercheure : « ça c'est une branche [elle montre au fur et à mesure sur le compas] *et ça c'en est une autre / un compas ça a deux branches / et puis l'écartement là //// entre les*

> *deux* [elle montre l'espace entre les deux] »
> *Élève : « on sait pas »*
> *Chercheure : « y a rien* là [elle passe avec ses doigts] */// Leyrich il nous a dit qu'il avait mesuré comme ça // vous saviez qu'on pouvait mesurer comme ça / vous saviez qu'on pouvait mesurer avec un segment avec un compas / on mesure pas vraiment, mais par contre qu'est-ce qu'on fait parce que mesurer c'est avec des nombres et on n'a pas utilisé des nombres là parce que /// ce qu'on a fait »*
> *Élève : « c'est un écartement »*
> *Chercheure : « oui cet écartement ça nous a permis d'avoir la longueur /// une longueur* [elle montre l'écartement du compas] */ et cette longueur qui caractérise la taille de notre cercle [elle montre la ligne du cercle]/ en géométrie y a très très longtemps on a décidé que ça s'appellerait le rayon // vous connaissiez ce mot […] Et Leyrich c'est ce qu'il nous disait que ça a permis de mesurer autrement dit de prendre la longueur entre le centre et la ligne / c'est Ilan c'est ça c'est Ilan qui nous disait la longueur avec un point de la ligne d'accord //donc on va appeler ça le rayon / c'est l'écartement du compas // c'est la longueur entre le centre et un point du cercle. »*

L'usage du compas pour reporter des longueurs reste implicite dans ce dialogue et, par le choix d'introduire le rayon à l'aide de cet instrument, la chercheure fait alors le choix d'associer l'agir sur le rayon – l'écartement des branches du compas – aux modes d'en parler et de le penser en termes de longueur. En effet, dans cet extrait, la chercheure ne parle pas de distance puisque ce terme renvoie plutôt à une relation entre deux points ou entre le centre et la ligne alors que les élèves semblent davantage enclins à parler de « taille » du cercle (ce que en effet la situation favorise). Les échanges vont alors porter plutôt sur le rayon en tant que grandeur et sa longueur ; la distinction entre grandeur et mesure est ici mise en mot. Dans la trace écrite, préparée en amont, le rayon est donc défini en tant que segment et en tant que longueur, sa relation avec le diamètre est aussi indiquée : « la longueur du rayon est la moitié de celle du diamètre ».

Remarquons enfin que la chercheure n'introduit aucun mode de parler et de penser le cercle, il n'y a que l'agir sur cette figure par les biais du gabarit et du compas.

Conclusion

En guise de conclusion, nous proposons de revenir vers nos questions de départ afin de dégager les principaux éléments de réponse apportés par notre travail ainsi que ses limites. En particulier, quels modes d'agir-parler-penser peuvent être mobilisés dans la situation (*a priori*) ? Lesquels le sont effectivement (*a posteriori*) ? Quels sont ceux qui seront retenus comme prise d'appui par l'enseignant pour cheminer vers des modes d'agir-parler-penser partagés et validés ? Les échanges langagiers permettent-ils réellement d'élaborer, de stabiliser des savoirs et d'aller ainsi au-delà de simples échanges permettant de décrire l'action des élèves et/ou de simples oppositions ?

Dans les différentes classes où le même problème a été proposé, nos analyses nous conduisent à mettre en évidence la difficulté à gérer une continuité possible entre connaissances et savoir (au sens de Brousseau, 1998 ; Laparra & Margolinas, 2010), à propos de la notion de cercle et de ses éléments caractéristiques. En effet, les différents modes d'agir-parler-penser du cercle se constituent en un réseau dense et enchevêtré et l'objectif de notre article était de mettre au jour certains de ces fils et nœuds afin de mieux comprendre le(s) rôle(s) particulier(s) joué(s) par le langage dans le processus d'institutionnalisation.

Nos analyses reposent sur l'idée que les modes d'agir-parler-penser du cercle – et ses éléments caractéristiques – peuvent constituer des indices sur les connaissances mobilisées par les élèves lors de la résolution du problème ; nous recherchions alors des traces de leur transformation vers un mode d'agir-parler-penser du cercle partagé, reconnu par tous, donnant ainsi du sens au savoir visé (ici le cercle caractérisé par un centre et un rayon).

Notre travail a mis en évidence qu'il existe de nombreux modes d'agir-parler-penser du cercle – et ses éléments caractéristiques – et qu'ils peuvent être potentiellement mobilisés par les élèves au cours de cette situation (cf. annexe). Nous supposons dès lors que leur mise en réseau peut être source de difficultés aussi bien pour les élèves que pour les enseignants tant les liens possibles (entre ces différents modes d'agir-parler-penser) semblent denses, voire complexes (voir partie 2 et le début de la partie 3 de ce texte).

Nous avons comparé les déroulements effectifs de cette situation dans trois classes différentes. Nous avons mis en évidence des points saillants de convergence (du point de vue de l'activité des élèves, que les procédures soient correctes ou erronées, et cela malgré une dévolution différente dans les trois classes) ainsi que des points saillants de divergence (cette fois plutôt du point de vue de l'activité des enseignants). Par exemple, dans les trois déroulements, les modes d'agir-parler-penser du cercle en relation avec la symétrie sont tous convoqués par les élèves, mais ne seront jamais repris et explicités par les enseignantes. Ou, encore, les modes d'agir-parler-penser du cercle explicités par l'enseignant dans certaines traces écrites finales (le cercle vu comme un ensemble de points à égale distance) sont déconnectés de l'activité effective des élèves (qui correspond effectivement bien à ce que nos analyses *a priori* soulignaient ; pour autant certains élèves auraient pu malgré tout convoquer cette vision, comme connaissances anciennes, notamment en classe de sixième). Tout se passe comme si la définition du cercle devait être formulée en termes de lieu géométrique quand bien même la situation mise en œuvre n'est pas un problème de lieu géométrique (cf. partie 2). Ces écarts nous renvoient à nos recherches antérieures lorsque, dans les ouvrages scolaires, nous avions identifié des manques importants autour du cercle et du compas (Bulf & Celi, 2016). L'analyse de divers manuels de l'école élémentaire nous avait conduites à constater que le choix le plus fréquemment adopté par les auteurs portait à introduire le cercle rapidement et uniquement comme lieu géométrique de points à égale distance d'un point donné, comme si c'était le seul mode de penser de cette figure géométrique. Le fait que ce soit ce mode de penser qui soit uniquement mentionné en cycle 3 (BO, 2015) peut sans doute expliquer en partie cela, au moins en France. Cette lecture des programmes du cycle 3 semble ainsi faire table rase des préconisations des cycles antérieurs dans lesquelles sont pourtant clairement explicités d'autres modes d'agir et de penser du cercle :

- en cycle 2, l'utilisation du « compas pour tracer des cercles » est indiquée avec un accent fort mis sur l'usage d'autres instruments comme des gabarits, pochoirs, etc. Un travail sur la symétrie axiale est également déjà amorcé conduisant les élèves à percevoir les « partage[s] en deux » ;
- en cycle 1, depuis 2015, la distinction entre disque et cercle est faite (à travers là aussi une incitation à un usage varié d'instruments prenant en charge ces différentes façons de penser le cercle tels que gabarits, pochoirs, etc.) : « cercle ou disque à préférer à rond ».

Dans les ouvrages que nous avions consultés, les divers usages du compas n'étaient jamais suffisamment mis en valeur et certaines conceptions du cercle étaient tout simplement ignorées (notamment celles en lien avec le disque, alors que celles-ci peuvent venir de connaissances « déjà-là » de la maternelle ou de la vie quotidienne en lien notamment avec la symétrie). C'est ainsi que nous avions été encouragées à concevoir une situation (celle présentée dans ce texte) qui, par la présence du gabarit et du compas, avait pour ambition de créer les conditions qui favorisent l'articulation entre différents modes de penser le cercle ainsi que la matérialisation de ses éléments caractéristiques (rayon, diamètre et centre).

Aussi l'analyse des déroulements effectifs de ces trois classes nous amène à faire l'hypothèse qu'il existe une résistance forte du point de vue des enseignants pour envisager des modes d'agir-penser-parler du cercle autres que ceux déjà familiers à l'enseignant (malgré une situation qui proposait de faire autrement). Au-delà des choix mentionnés dans les programmes et rappelés ci-dessus, nous supposons même qu'ici c'est le « rapport à » (au sens de Charlot, 1999) l'objet de savoir *cercle* qui pèserait finalement peut-être le plus sur les conditions d'apprentissage du cercle ; cela pourrait être une piste de travail à poursuivre qui nécessiterait de mener des entretiens plus approfondis avec les enseignants.

Dans notre travail, nous avons finalement eu peu de traces des transformations *effectives* des modes d'agir-parler-penser des élèves *au cours* de la séance bien que nous ayons des traces de ceux effectivement convoqués pour résoudre la situation d'action. Une perspective de travail pourrait être d'analyser les modes d'agir-parler-penser de mêmes élèves au cours de cette même situation d'action puis au cours d'une situation de formulation (par exemple, un élève reçoit un cercle et doit écrire un message pour qu'un autre élève trace le même cercle) ; le langage recouvrirait dès lors une fonction différente pour résoudre le problème posé, cela donnerait ainsi des indices supplémentaires sur le processus d'apprentissage en cours.

Quant à la question : comment les liens entre agir, voir et parler vont-ils être négociés ? Il nous semble qu'au-delà de ce que nous venons de résumer précédemment qui pointe certaines absences de liens entre les différents modes d'agir-parler-penser possibles, les analyses dans la classe de Stella ou Alice mettent aussi en évidence que certaines connaissances semblent transparentes pour l'enseignante (au sens de Margolinas & Laparra, 2011), des connaissances implicites (en lien avec les façons possibles de voir le cercle ou d'agir dessus avec des instruments différents comme nous l'avons largement décrit dans cet article), que l'institution scolaire ne légitime pas en tant qu'objets d'enseignement (l'énumération en étant un exemple emblématique jusqu'à récemment – voir Margolinas & Laparra, 2016) et dont l'enseignant n'a pas toujours conscience. Alice convoque, par exemple, une cordelette pour faire le lien entre les tracés obtenus avec le gabarit de demi-disque sur le cercle modèle et une vision ponctuelle du cercle (comme ensemble de points situés à égale distance) : tout se passe comme si ce mode d'agir pouvait rendre explicite ce mode de penser alors que l'usage de cette cordelette renvoie plutôt à une vision dynamique de rotation et a le mérite de rendre visible et tangible le rayon ; elle ne rend pas plus explicite une vision ponctuelle du cercle. De même, tout se passe comme si les différentes façons de désigner un point étaient transparentes (cf. début partie 3, comme si cela allait toujours de soi de voir une ligne comme une infinité de points ou un point comme intersection de ligne). Cela nous semble faire écho à d'autres travaux désignant la déconstruction dimensionnelle – en unités figurales : figure, ligne, points au sens de Duval (2005) – comme un savoir transparent chez les enseignants (Barrier et al. 2016) alors que celle-ci est fondamentale pour penser les enjeux de l'enseignement et de l'apprentissage de la géométrie (Perrin-Glorian & Godin 2018).

Cela nous amène à adapter certaines de nos futures questions de recherche. Comment rendre explicites les différents usages des instruments en lien avec des façons de parler et de voir les objets et relations géométriques dans une perspective de formation ou de diffusion de ressources en géométrie ? Être exhaustif n'est pas raisonnable (cf. annexe 2) et sûrement insuffisant pour rendre efficace l'appropriation d'une ressource. En effet, les façons d'agir peuvent être certes anticipées (par l'analyse *a priori*), mais les interactions langagières qui lui sont attachées ne permettent pas nécessairement de lever tous les implicites, voire celles-ci peuvent être à l'origine de nouveaux malentendus[26], soit en créant des amas de significations plaqués par l'enseignant (comme dans la classe d'Émilie), soit parce que la définition visée par l'enseignante est en rupture avec l'activité des élèves (comme dans la classe d'Alice), soit parce que l'enseignante traite trop vite une forme généralisée du concept indépendamment de la situation investie par les élèves (comme dans la classe de Stella).

En comparant les déroulements effectifs d'une même situation dans trois classes différentes, nos analyses ont ainsi contribué à mettre en évidence que, derrière un vocabulaire partagé (*cercle, rayon, diamètre, point...*) et une formulation proche d'une définition du cercle (*le cercle caractérisé par un rayon et un centre*), s'élaborent pourtant des discours très différents entre élèves et enseignants convoquant des significations parfois très éloignées.

Références

ALLARD Cécile (2015), *Étude du processus d'Institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions*, Thèse de Doctorat, Université de Paris VII.

[26] Ce que de nombreux travaux ont déjà mis en évidence ; par exemple, cf. Bautier & Rochex (1997).

ARTIGUE Michèle (1982) « À propos des conceptions du cercle », *Grand N*, vol.27, p.45-72, En ligne https://irem.univ-grenoble-alpes.fr

ARTIGUE Michèle & ROBINET Jacqueline (1982), « Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire », *Recherche en didactique des mathématiques*, vol.3.1, p.5-64.

BARRIER Thomas & MATHÉ Anne-Cécile (éds.) (2014), « Langage, apprentissage et enseignement des mathématiques », *Spirale. Revue de recherches en éducation*, n°54, En ligne https://www.persee.fr

BARRIER Thomas, MATHÉ Anne-Cécile & MITHALAL Joris (2016), « Formation initiale des enseignants du premier degré en géométrie : quels savoirs ? », *Les Annales de didactiques et de sciences cognitives*, vol.21, p.317-342.

BARRIER Thomas, DURAND-GUERRIER Viviane & MESNIL Zoé (2019), « L'analyse logique comme outil pour les études didactiques en mathématique », *Éducation et didactique*, n°13(1), p.61-81.

BAUTIER Élisabeth & ROCHEX Jean-Yves (1997), *Ces malentendus qui font la différence,* dans Jean-Pierre Terrail (dir.), *La scolarisation de la France, critique de l'état des lieux,* Paris, La Dispute, p.105-122, En ligne http://www4.ac-nancy-metz.fr

BERNIÉ Jean-Paul (2002), « L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de 'communauté discursive' : un apport à la didactique comparée ? », *Revue française de pédagogie*, vol.141, p.77-88, En ligne http://ife.ens-lyon.fr

BESSOT Annie (2004), « Une introduction à la théorie des situations didactiques », En ligne https://telearn.archives-ouvertes.fr

BOSCH Mariana & PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne (2013), « Le langage dans les situations et institutions » dans A. Bronner et al. (éds.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*, Grenoble, La Pensée Sauvage, p.267-302.

BROUSSEAU Guy (1986), « Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques », *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.7.2, p.33-115.

BROUSSEAU Guy (1998), *Théorie des situations didactiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU Guy & CENTENO Julia (1991), « Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant », *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.11, n°2.3, p.167-210.

BULF Caroline (2008), *Étude des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège,* Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, En ligne https://tel.archives-ouvertes.fr

BULF Caroline & CELI Valentina (2016), « Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire - une articulation clé : gabarit-compas », *Grand N*, n°97, p.21-58, En ligne http://www-irem.ujf-grenoble.fr

BULF Caroline, MATHE Anne-Cécile & MITHALAL Joris (2015) « Langage et construction de connaissances dans une situation de résolution de problèmes en géométrie », *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.35-1, p.7-36.

BULF Caroline, MATHE Anne-Cécile & MITHALAL Joris (2014), « Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation. Langage et activité géométrique », *Spirale. Revue de recherches en éducation*, n°54, p.29-48. En ligne http://www.persee.fr

BUTLEN Denis, CHARLES-PEZARD Monique & MASSELOT Pascale (2015), « Apprentissage et inégalités au primaire : le cas de l'enseignement des mathématiques en éducation prioritaire », Rapport du CNESCO sur les inégalités scolaires d'origine sociale et ethnoculturelle, En ligne http://www.cnesco.fr

CELI Valentina & PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne (2014), Articulation entre langage et traitement des figures dans la résolution d'un problème de construction en géométrie, *Spirale. Revue de Recherches en éducation*, n°54, p.151-174, En ligne http://www.persee.fr

CHARLOT Bernard (1999), *Du rapport au savoir, éléments pour une théorie*, Paris, Anthropos.

CHESNAIS Aurélie (2018), *Un point de vue de didactique des mathématiques sur les inégalités scolaires et le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement*, Note de synthèse, Habilitation à diriger des recherches, Université de Montpellier, En ligne https://hal.archives-ouvertes.fr

COULANGE Lalina (2012), *L'ordinaire dans l'enseignement des mathématiques. Les pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves*, Note de synthèse, Habilitation à diriger des recherches, Université Paris Diderot - Paris 7, En ligne https://tel.archives-ouvertes.fr

COULANGE Lalina (2014), « Les pratiques langagières au cœur de l'institutionnalisation des savoirs mathématiques », *Spirale. Revue de recherches en éducation*, n°54, p.9-27, En ligne https://www.persee.fr

DUVAL Raymond (2005), « Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements », *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol.10, p.5-53.

DUVAL Raymond & GODIN Marc (2005), « Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N*, vol.76, p.7-27, En ligne http://www-irem.ujf-grenoble.fr

GRIZE Jean-Blaise (1996), *Logique naturelle et communication*, Paris, Presses universitaires de France.

HERSANT Magali (2001), *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège*, Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot - Paris 7.

JAUBERT Martine (2007), *Langage et construction de connaissances à l'école : un exemple en sciences*, Bordeaux, Presses universitaires de Bordeaux.

JAUBERT Martine & REBIERE Maryse (2012), « Communautés discursives disciplinaires scolaires et construction de savoirs : l'hypothèse énonciative », En ligne http://www.leseforum.ch

KERVYN Bernadette (2014), *Prendre en compte le point de vue des élèves pour outiller la didactique de l'écriture* dans Bertrand Daunay & Jean-Louis Dufays, *Didactique du français : du côté des élèves. Comprendre les discours et les pratiques des apprenants,* Bruxelles, De Boeck Supérieur, p.51-67.

LABORDE Colette & CAPPONI Bernard (1994), « Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique », *Recherche en didactique des mathématiques*, vol.14, n°1-2, p.165-210.

LAPARRA, Marceline & MARGOLINAS Claire (2008), « Les premiers apprentissages de l'écrit : doxa et malentendus des écrits authentiques », *Les didactiques et leur rapport à l'enseignement et à la formation*, Bordeaux, En ligne https://hal.archives-ouvertes.fr

LAPARRA Marceline & MARGOLINAS Claire (2010), « Milieu, connaissance, savoir. Des concepts pour l'analyse de situations d'enseignement », *Pratiques*, n°145-146, p.141-160, En ligne https://journals.openedition.org

MARGOLINAS Claire & LAPARRA Marceline (2011), « Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire », dans Jean-Yves Rochex & Jean Crinon, *La construction des inégalités scolaires*, Rennes, Presses universitaires de Rennes, p.19-32.

MARGOLINAS Claire & LAPARRA Marceline (2016), *Les premiers apprentissages scolaires à la loupe, des liens entre énumération, oralité et littératie*, Bruxelles, De Boeck.

MATHÉ Anne-Cécile & MITHALAL Joris (2019), « L'usage des dessins et le rôle du langage en géométrie : quelques enjeux pour l'enseignement », dans S. Coppé et al. (éds.), *Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques*, La pensée sauvage, Grenoble, p.47-86.

PARZYSZ Bernard (1988), « Knowing vs Seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures, *Eduacational Studies in Mathematics* », vol.19.1, p.79-92.

PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne & GODIN Marc (2018), « Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège », CORFEM *Ressources pour la formation des professeurs. Savoirs mathématiques à enseigner au collège et au lycée,* Version préliminaire en ligne https://hal.archives-ouvertes.fr

SFARD Anna (2012), « Almost 20 years after: Developments in research on language and mathematics. Review of J. N. Moschkovich (ed.) (2010) Language and mathematics education: Multiple perspectivesand directions for research » – *Educational Studies in Mathematics*, vol.82, p.331-339.

VERGNAUD Gérard (1990), « La théorie des champs conceptuels », *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.10-2/3, p.133-170.

VYGOTSKI Lev (1934/1997), *Pensée et Langage*., Paris, La Dispute.

ANNEXE

Agir-Parler-Penser *a priori* du centre d'un cercle

Manière de penser *Dimensions et relations des différentes unités figurales*	Manières d'agir *Usage des instruments*	Manières de parler
repère, milieu, élément du bord de surface	repère visuel au milieu du bord droit du gabarit de demi-disque	milieu du cercle
point fixe	repère pour positionner la pointe du compas	croix, repère, point, trace point fixe (par rapport au compas qui bouge)
vision <u>intersection de lignes</u> Intersection de 2 (ou plus) diamètres quelconques	intersection des contours droits des gabarits de demi-disque	intersection de traits, point repères
vision bis <u>intersection de lignes:</u> intersection de 2 lignes particulières : horizontale et verticale (longueur - largeur)		croix
vision point : milieu (point particulier) d'un segment (le diamètre) (binaire ou ternaire)	mesure d'un contour droit de gabarit pliage d'une bande de papier	milieu de segment / trait
vision point : extrémité (fixe) d'un rayon / début - fin d'un rayon		bout d'un rayon extrémité

Agir-Parler-Penser *a priori* d'un cercle et d'un demi-cercle

Manière de penser *Dimensions et relations des différentes unités figurales*	Manières d'agir *Usage des instruments*	Manières de parler
vision iconique (surfaces ou lignes)	reconnaissance d'une allure générale main levée (papier crayon)	rond / cercle
vision surface	gabarit de disque deux moitiés de gabarit de demi-disque juxtaposées	
Figure ayant un ou des (une infinité) axes de symétrie vision surface ou contour de surface ou ligne	pliage / superposition	rond / cercle / disque moitié de disque/cercle demi-disque demi-cercle
vision contour de surface	contour d'un gabarit de disque	
vision ligne de courbure constante	superposition et/ou rotation du bord d'un gabarit avec la ligne du cercle tracé	pareil partout
ligne courbe fermée (+ vison dynamique : mouvement d'une ligne ou d'un point autour d'un point)	trace graphique du « mouvement » du compas qui tourne	cercle, rond, compas qui tourne (autour d'un point fixe)
ligne à égale <u>distance</u> d'un point -> relation binaire entre objet (points ou lignes)	trace graphique du compas écartement du compas comme mémoire de cette distance	un cercle de centre X et de rayon n
ensemble de points à même <u>distance</u> d'un point donné -> relation binaire entre objets (points ou lignes)	trace graphique du compas règle graduée	un cercle de centre X et de rayon n

Agir-Parler-Penser *a priori* du rayon et du diamètre

Manière de penser *Dimensions et relations des différentes unités figurales*	Manières d'agir *Usage des instruments*	Manières de parler
vision bord de surface	bord droit d'un gabarit de demi-disque contour droit d'un gabarit de demi-disque	bord droit trait contour droit moitié/milieu
vision ligne : segment porté par une droite/axe de symétrie	contour droit d'un gabarit de demi-disque (ou d'un gabarit quelconque ayant un bord droit)	moitié/milieu de disque/cercle longueur largeur axe, droite, trait, segment, croix
vision ligne et points (intersection de lignes) : segment passant par 2 points du cercle et le centre <u>(relation ternaire d'appartenance / d'alignement</u> : 3 points appartenant à une même droite/segment)	tracé du bord droit du gabarit tracé d'un bord droit —> trait droit	segment/droite passant par un le centre et deux points du cercle corde diamètre
- vision ligne, rayon := segment/ligne/trait passant par le centre (repère) et rejoignant la ligne du cercle - ou relation de distance entre objet (centre et ligne / points du cercle)	Le rayon, écartement du compas ou tracé obtenu par un bord droit d'un gabarit qcq	segment / trait /ligne distance entre le centre et le cercle distance entre le centre et un point du cercle
vision ligne et points (repères) Rayon : moitié d'un diamètre ou diamètre : deux rayons	Le rayon, écartement du compas	le diamètre vaut deux rayons/ la longueur d'un diamètre est deux fois celle d'un rayon Un rayon est la moitié d'un diamètre