Philosophia Scientiæ
Travaux d'histoire et de philosophie des sciences

24-3 | 2020
Lectures et postérités de *La Philosophie de l'algèbre* de Jules Vuillemin

Vuillemin : Dedekind initiateur de l'Algèbre de l'Algèbre

Vuillemin : Dedekind at the Origins of the Algebra of Algebra

Hourya Benis-Sinaceur et Emmylou Haffner

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/2552
DOI : 10.4000/philosophiascientiae.2552
ISSN : 1775-4283

Éditeur
Éditions Kimé

Édition imprimée
Date de publication : 25 octobre 2020
Pagination : 159-195
ISBN : 978-2-84174-
ISSN : 1281-2463

Référence électronique
Hourya Benis-Sinaceur et Emmylou Haffner, « Vuillemin : Dedekind initiateur de l'Algèbre de l'Algèbre », *Philosophia Scientiæ* [En ligne], 24-3 | 2020, mis en ligne le 01 janvier 2021, consulté le 31 mars 2021. URL : http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/2552 ; DOI : https://doi.org/10.4000/philosophiascientiae.2552

Vuillemin : Dedekind initiateur de l'Algèbre de l'Algèbre

Hourya Benis-Sinaceur
IHPST, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, CNRS, ENS, Paris (France)

Emmylou Haffner
Laboratoire de mathématiques d'Orsay, Université Paris-Saclay, Orsay (France)

Résumé : Dans le deuxième volume, inédit, de *La Philosophie de l'Algèbre*, Jules Vuillemin fait une lecture inattendue et suggestive de l'œuvre de Richard Dedekind. Nous avons essayé de comprendre, en mobilisant les idées et outils de Vuillemin, les résultats de cette lecture. Ceux-ci nous semblent poser en particulier le problème des rapports entre histoire des sciences et philosophie des sciences. Notre article propose un diptyque pour présenter les questions que nous avons voulu poser au texte de Vuillemin. D'une part, nous analysons de quelle manière Vuillemin continue et approfondit le travail de Jean Cavaillès. D'autre part, nous souhaitons accentuer la distance qu'établit Vuillemin entre l'histoire mathématique et son interprétation par les filiations conceptuelles qu'il propose comme essentiellement distinguées des relations historiques.

Abstract: In the second unpublished volume of *La Philosophie de l'Algèbre*, Jules Vuillemin gave an unexpected and suggestive reading of Richard Dedekind's works. We tried to understand the results of this reading by using Vuillemin's own ideas and tools. To us, these results seemed to question the relations between history of science and philosophy of science. Our paper proposes a diptych to present the questions we wanted to ask to Vuillemin's text. Firstly, we analyze how Vuillemin continued and deepened Jean Cavaillès' work. Secondly, we aimed to emphasize the distance Vuillemin set between the history of mathematics and his interpretation of the conceptual parentage which he considered essentially distinct from historical relations.

Philosophia Scientiæ, 24(3), 2020, 159–195.

1 Introduction

Le caractère inachevé du deuxième tome, resté à ce jour inédit, de *La Philosophie de l'Algèbre* de Jules Vuillemin [1] en rend la lecture encore plus ardue que celle du premier tome. Les rapprochements abrupts entre mathématiciens et philosophes par-dessus les frontières disciplinaires et par-dessus les siècles ont de quoi provoquer un choc salutaire et ouvrir des perspectives vertigineuses sur un horizon où Platon et Aristote, Descartes et Fichte voisinent avec les constructions purement arithmétiques des nombres entiers et les théorèmes de structure des algèbres abstraites. L'ambition est prométhéenne : vouloir saisir dans une vision synoptique surplombante *le sens ultime* des apports particuliers, divers et successifs, ressortissant aux mathématiques, à la logique, à la philosophie, à la métaphysique ou à la théologie, et cependant tous plus ou moins indirectement liés entre eux par des liens cachés et profonds. Il est bien question de se mettre en quête du sens ultime et non plus seulement, comme dans le premier tome de *La Philosophie de l'Algèbre*, de suggérer analogiquement, entre Lagrange (1736-1802) et Fichte (1762-1814) par exemple, des « affinités historiques qui tiennent au *Zeitgeist* » [Vuillemin 1962, 102, note 1]. Et il est bien question de « totaliser » la somme des connaissances, neutralisant ainsi les frontières, en vue d'une « philosophie pure » qui pose les questions décisives.

En première approche, dans un panorama qui reste malgré tout inchoatif, on décèlera principalement les entrelacs de deux lignes, une ligne mathématique allant de Gauss à Birkhoff en passant par Kummer, Riemann, Kronecker et Dedekind, et une ligne philosophique allant de Platon à Husserl en passant par Descartes, Kant et Fichte, sans oublier Frege qui renverse cet héritage subjectif. Cependant, le dédale des longs exposés techniques d'algèbre parsemés de vues philosophiques, qui interpellent d'autant plus qu'elles sont, elles, rarement explicitées et demeurent, pour la plupart, de brèves et succinctes indications, aboutit à un programme en quatre points très clairs :

1. Déterminer la signification de la logique, à l'origine, dans la philosophie grecque, sous-entendu remettre en question la paternité exclusive d'Aristote au profit de Platon (théorie des idées comme éléments simples de pensée, méthode de la dichotomie comme méthode de pensée interactive [2]).

1. [Vuillemin inédit]. Nous nous réfèrerons à cet ouvrage par [PA2].

2. Vuillemin a publié, en 1998-1999, un long article, « La méthode platonicienne de division et ses modèles mathématiques » [Vuillemin 1998-1999]. À la fin de [PA2] Vuillemin écrit : « Enfin, des notions analogues aux théorèmes de décomposition propres aux treillis n'apparaissent-elles pas dans les systèmes philosophiques ? On fait généralement remonter à Aristote l'origine de la Logique, mais outre que sa *Métaphysique* et l'*Organon* lui-même se présentent très souvent comme une réponse aux difficultés du platonisme, deux arguments pressent le philosophe à chercher dans

2. Établir les éléments d'une logique philosophique, c'est-à-dire une logique qui ne se résume pas à la logique mathématisée moderne et en diffère par l'intention proprement philosophique d'en problématiser, y compris sur un plan métaphysique, les principales caractéristiques. Dans le tome I de *La Philosophie de l'Algèbre*, Vuillemin définit l'objet de sa « Philosophie de la logique » comme « élucidation des motifs rationnels qui justifient le choix de tel ou tel système axiomatique en Logique et en Mathématiques » [Vuillemin 1962, 505]. Ici est illustré en divers endroits le fait qu'un choix scientifique est extrinsèque à la science et relève de la métaphysique. On peut dire que le projet de Jules Vuillemin de « logique philosophique » fut prémonitoire de la tendance actuelle à construire, dans un geste contraire au positivisme du XXe siècle, la métaphysique de telle ou telle logique [3], ou, plus généralement la métaphysique des sciences *versus* la métaphysique scientifique [4].
3. Classer, en vertu de principes formels, les divers systèmes philosophiques, programme accompli dans les ouvrages *Nécessité ou Contingence* [Vuillemin 1984] et *What are philosophical systems?* [Vuillemin 1986].
4. Enfin, savoir ce qu'il en est de la nature de l'idée de Dieu, autrement dit si l'on peut conclure de *l'idée* de Dieu à *l'existence* de Dieu, programme métaphysique antithétique du positivisme scientifique et de la méthode phénoménologique de l'ἐποχή réalisé dans *Le Dieu d'Anselme* [Vuillemin 1971]. Vuillemin entendait en effet remettre à l'ordre du jour philosophique les questions d'existence et avec elles la question du fondement de l'objectivité. Il pense qu'en

   > mettant entre parenthèses la question de l'existence, la méthode phénoménologique empêche le développement de la

---

Platon la première théorie de la science. D'abord la théorie platonicienne de la connaissance se trouve, par rapport à la découverte de Pythagore et aux contestations de Zénon, dans une position assez semblable à celle de la Logique moderne par rapport à la Théorie des ensembles. En second lieu, tant les procédés de la méthode de division que l'obscure théorie des nombres idéaux cherchent à déterminer des méthodes logico-mathématiques spécifiques pour analyser la pensée » [PA2, 361].

3. C'est un aspect de la théorie des types de Per Martin-Löf, qui, philosophiquement, est une théorie de la signification [*theory of meaning*]. Celle-ci consiste en effet à donner une signification aux entités ou notions syntaxiques basiques d'un langage formel : les propositions, les jugements ou assertions, la *vérité* d'une proposition, qui se dit d'une proposition dont on connaît une preuve canonique, la *validité* d'une preuve d'un jugement, cette dernière étant « la notion métaphysique de vérité », par opposition à la notion de vérité d'une proposition. Martin-Löf plaide pour un « réalisme métaphysique » compatible avec l'intuitionnisme mathématique et phénoménologique. Voir [Martin-Löf 1987, nous soulignons].

4. Celle-ci défend et justifie l'option réaliste et essentialiste en philosophie et en science (voir les cours de Claudine Tiercelin au Collège de France, disponibles sur www.college-de-france.fr/site/claudine-tiercelin/_course.htm), option qui fut aussi celle de Vuillemin.

> philosophie critique [en tant que celle-ci cherche] le fondement et les limites de notre pouvoir de penser. [PA2, 361]

Ce quatrième volet du programme est théologico-mathématique, car l'idée d'infini est pour Vuillemin étroitement associée à l'idée de Dieu, comme elle l'a été pour la philosophie ancienne et classique, comme elle l'a été aussi pour le mathématicien Georg Cantor (1845-1918). Richard Dedekind (1831-1916), au contraire, a traité l'idée d'infini sur un plan strictement mathématique, ou strictement humain, indépendant d'une hypothétique garantie divine. Son « théorème » 66 de *Was sind und was sollen die Zahlen?* [Dedekind 1888] (ci-après dénommé *Zahlen*), censé démontrer l'existence d'un ensemble simplement infini, n'en appelle pas à Dieu, comme cela était le cas chez Descartes ou Spinoza, mais à son propre moi [*mein eigenes Ich*] et au monde de ses pensées [*meine Gedankenwelt*]. Or c'est un objectif important de la Critique générale ambitionnée par Vuillemin que

> d'examiner systématiquement non seulement comme l'avait fait Kant si Dieu existe hors de nous, mais encore, si l'idée de Dieu, en nous, correspond à une véritable « réalité objective », [problème ontologique] retrouvé au détour de ses créations mathématiques par Cantor lui-même. [PA2, 361]

Dans cette perspective, Vuillemin fait une analyse extrêmement fine et détaillée de la proposition 66 de *Zahlen*. Nous y revenons plus bas. Mais il nous faut tout de suite avancer une observation préalable à garder à l'esprit : ce qui intéresse Vuillemin ce sont moins des filiations historiques linéaires et confinées aux domaines disciplinaires que des lignées conceptuelles transversales révélant des liens inédits [5]. Et son point de vue est commandé, semble-t-il, par la question globale suivante : que valent les données et acquis mathématiques pour la philosophie, ou que valent-ils philosophiquement, c'est-à-dire quelle est leur teneur philosophique ? Quels arguments fournissent-ils aux raisons du philosophe ?

Deux questions agitent l'esprit de Vuillemin : l'existence de l'infini *versus* l'existence de Dieu, et l'organisation du champ de la connaissance, depuis ses origines grecques, en classes de problèmes et types de réponses. Dedekind est l'auteur d'une définition mathématique de l'infini et d'une définition du concept qui recevra le nom de treillis, où Vuillemin découvre un principe

5. « La philosophie théorique doit être soigneusement distinguée de la Psychologie et de l'Histoire des sciences. Ces deux dernières disciplines n'étudient les connaissances que dans leur acquisition individuelle ou collective, telles que les présente le développement de l'expérience. La philosophie théorique, au contraire, ne tient compte que de l'ordre des choses mêmes, c'est-à-dire de la validité objective liée à la nature de nos *jugements* et non aux hasards ou aux bonheurs de l'invention » [Vuillemin 1962, 3, nous soulignons « jugements », qui indique l'adhésion de Vuillemin, ici, à une philosophie du jugement].

classificateur d'une grande fécondité. Aussi Dedekind fait-il figure de héros de ce tome II de *La Philosophie de l'Algèbre*, où deux chapitres entiers sont consacrés respectivement à sa théorie des idéaux et à sa théorie des ordinaux naturels (chap. X et XI) ; notre propos se restreindra à l'examen de quelques thèses avancées par Vuillemin à propos de l'œuvre de Dedekind. Mais dans une première partie, nous voudrions préciser en quoi et comment Vuillemin prolonge, élargit et approfondit l'œuvre de Jean Cavaillès. Confronter Vuillemin à Cavaillès permet de mettre en valeur, par contraste, l'originalité de ses vues. Ce fut, en tout cas, pour nous une manière de pénétrer quelque peu la pensée extraordinairement imbriquée de Jules Vuillemin.

Notre but dans cet article sera de suivre les différents chemins que trace Vuillemin en plaçant Dedekind au cœur de la naissance de « l'Algèbre de l'Algèbre ». Nous tenterons de saisir la signification philosophique de certains rapprochements qui nous ont parfois semblé vertigineux. En décortiquant les raisonnements de Vuillemin, nous serons parfois confrontées à notre propre lecture de Dedekind, qui est beaucoup plus naïve mais d'une certaine façon inverse de celle de l'auteur, puisqu'elle se veut proche de la lettre des textes. Sans que cela mette en question l'ambition philosophique de Vuillemin, il nous a paru important d'indiquer le décrochage délibéré qu'effectue l'interprétation par rapport aux écrits originaux. Par exemple, le rapprochement entre Descartes et l'algèbre structurale met assurément le doigt sur une séquence philosophique qu'il était important de mettre en vue. Néanmoins, il nous paraît utile de souligner que Vuillemin porte sur les textes mathématiques un regard philosophique, métaphysique même, qui les extrait de leur contexte pour tisser une immense tapisserie basée sur une architecture conceptuelle (re)construite par recollements de sources historiques. Il ne s'agit alors certainement pas de contester ou récuser la superstructure proprement philosophique qu'édifie Vuillemin, mais simplement d'attirer l'attention du lecteur sur les difficultés qu'un tel édifice peut poser à une compréhension primaire.

2 Vuillemin continuateur de Cavaillès

Le manuscrit de Vuillemin traite des notions de structure, d'infini et d'ordre. Comme Cavaillès et d'autres penseurs, Vuillemin considérait que l'infini est le cœur et le moteur de la mathématique moderne, sa marque distinctive par rapport à la mathématique classique, qui tout en développant les méthodes du calcul infinitésimal n'avait pas réussi à définir positivement un concept mathématique de l'infini [Vuillemin 1962, 519–532]. Pour commenter à son tour la construction par Dedekind de l'ensemble infini des nombres naturels, il se sert abondamment des *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles* de Cavaillès [Cavaillès 1938a]. Mais seul, à notre connaissance, il porte un regard philosophique sur la structure d'ordre, et se sert de la notion de treillis comme schéma classificateur, applicable en particulier à la collection des systèmes philosophiques. Ce fut l'un des puissants motifs de son intérêt pour les travaux de Dedekind sur les nombres et sur ce que ce mathématicien appelait les *Dualgruppen*, qui reçurent par la suite le nom de « treillis ». Et ce fut la raison pour laquelle Vuillemin a dénoncé « le dogmatisme » mathématique consistant à n'utiliser que la seule notion de groupe comme principe classificateur.

Dans ce manuscrit du tome II de *La Philosophie de l'Algèbre*, plus clairement peut-être que dans le tome I, où il récusait explicitement dès son introduction les limites de l'épistémologie historique régionalisée à la Bachelard, Canguilhem ou Cavaillès, Jules Vuillemin semble bien continuer, élargir, et radicaliser ou approfondir le travail de Jean Cavaillès. En quel sens ?

2.1 Méthodes structurales et théorie de la connaissance

En ce sens d'abord que pour « réaliser le programme critique de la connaissance » [PA2, 360], il faut préalablement examiner les méthodes mathématiques structurales, qui fourniront, et même constitueront les lignes de force d'une théorie de la connaissance renouvelée et, pour Vuillemin, le point d'appui pour ses préoccupations métaphysiques. Mais ce postulat général est monnayé de façon différente par Cavaillès et par Vuillemin. Soit l'exemple de l'œuvre de Dedekind qui fut un objet de réflexion commun. Cavaillès l'avait étudiée comme fondatrice, avec celle de Cantor, de la théorie des ensembles. À ce titre il avait analysé *Stetigkeit und irrationale Zahlen* [Dedekind 1872] comme « première utilisation de la méthode axiomatique en acte » [Cavaillès 1938a, 39], et *Was sind und was sollen die Zahlen?* [Dedekind 1888] comme « essai de réduction des mathématiques à la logique » [Cavaillès 1938a, 120], encore qu'il relevât le caractère d'« expérience arithmétique, analysée conceptuellement » de cet écrit. Cavaillès, qui s'appuyait probablement sur une remarque d'Ernst Zermelo (1871-1953) [6], fut sans doute, en langue française, le premier à suggérer, prudemment, une interprétation logiciste de l'essai sur les nombres de Dedekind. Interprétation nuancée et rectifiée, dans *Méthode axiomatique et formalisme*, où Cavaillès distingue Dedekind des « logicistes stricts Frege, Peano et Russell » [Cavaillès 1938b, 53, 56–58]. Sur ce point, Vuillemin est plus nuancé encore, comme on le verra plus loin. Mais il voit en Dedekind moins l'initiateur de la théorie des ensembles que l'initiateur de « l'Algèbre de l'Algèbre ».

6. « La théorie des ensembles est la branche des mathématiques à laquelle il revient d'étudier mathématiquement les concepts fondamentaux de nombre, d'ordre et de fonction dans leur simplicité originaire, et par là, de développer les bases logiques de l'arithmétique tout entière et de l'analyse. Elle constitue de ce fait une partie intégrante de la science mathématique » [Zermelo 1908], cité dans [Cavaillès 1938a, 142].

De fait, Cavaillès travaille sur le patrimoine mathématique établi par Cantor, Dedekind, David Hilbert (1862-1943), Paul Bernays (1888-1977), Zermelo, pour ne citer que certains des acteurs dominants. Il a décrit les caractéristiques de ce premier structuralisme dans ses thèses de doctorat [Cavaillès 1938a,b] bien avant qu'elles ne deviennent des marques distinctives du bourbakisme que le lecteur retrouve dans le livre, *Les Grands Courants de la pensée mathématique*, publié par François Le Lionnais en 1948. Vuillemin connaît la période subséquente et s'appuie, pour les treillis, sur les travaux de Øystein Ore (1899-1068) et Garrett Birkhoff (1911-1996), présentés dans le livre de Eric T. Bell, *The Development of mathematics* [Bell 1940], nommément cité dans [PA2] [7].

Comme Cavaillès, Vuillemin veut réformer la *Critique de la raison pure* en l'amputant de l'Esthétique transcendantale, c'est-à-dire en rejetant « le principe de la possibilité de l'expérience [8] ». Il s'agit non pas de rendre compte des phénomènes du monde mais d'observer le fonctionnement de la raison réduite à ses propres ressources. Or c'est Dedekind qui a clairement énoncé l'ambition de fonder la théorie des nombres indépendamment des notions d'espace et de temps, lesquelles constituaient pour Kant les formes *a priori* de la sensibilité, qui précèdent et rendent possible l'expérience :

> En considérant l'Arithmétique (l'Algèbre, l'Analyse) comme une simple partie de la logique, j'exprime déjà que je tiens le concept de nombre [*Zahlbegriff*] pour totalement indépendant des représentations [*Vorstellungen*] ou intuitions [*Anschauungen*] de l'espace et du temps, et que j'y vois plutôt une émanation directe des pures lois de la pensée. [Dedekind 1888, 133]

Il s'agit bien de pensée pure ayant ses propres lois indépendantes du principe de la possibilité de l'expérience. Cavaillès cherchait certes à caractériser la pensée pure, mais sans faire des écrits de Dedekind une analyse aussi fouillée que celle que nous livre Vuillemin dans ce tome II, et surtout sans y situer le début d'une nouvelle Algèbre. Vuillemin, lui, explique que la théorie des idéaux de Dedekind « contenait en germe » l'idée d'une « Algèbre de l'Algèbre » [PA2, 287-287a].

Cette « algèbre au second degré » [PA2, 326], qui donne lieu chez Vuillemin à de si amples développements, porte non sur le comportement des éléments

---

7. Voir la contribution de S. Decaens dans ce dossier : « *La Philosophie de l'Algèbre*, tome II, un témoin de la circulation des treillis en France ».

8. Par cette expression Vuillemin renvoie à la thèse kantienne bien connue, selon laquelle les données de l'expérience sensible doivent se régler sur les formes *a priori* de l'intuition que sont l'espace et le temps et sur les catégories de l'entendement. Les catégories sont les conditions de possibilité de l'expérience, et « les conditions *a priori* d'une expérience possible en général sont en même temps conditions de la possibilité des objets de l'expérience » [Kant 1781,1787, trad. fr., 186]. Vuillemin note que « le principe de la possibilité de l'expérience vient subordonner notre pouvoir de pensée au fait de la thèse du monde » [PA2, 248].

d'une structure particulière, mais sur le comportement des structures elles-mêmes :

> [L'Algèbre de l'Algèbre] s'intéresse non plus à des éléments particuliers comme l'ancienne Algèbre, non plus même à la structure abstraite qui relie des éléments non particularisés, comme l'Algèbre abstraite, mais [à] l'ensemble des relations entre une structure et les formes structurales qu'on y peut établir. [PA2, 329]

Dedekind en était bien un précurseur, notamment par sa démonstration que le nombre des classes d'idéaux d'un corps de nombres algébriques est fini [Dedekind 1894a]. Elle s'épanouit dans les travaux d'Emmy Noether (1882-1935) et d'Emil Artin (1898-1962), héritiers de Richard Dedekind et de David Hilbert. C'est le moment de floraison de ce qu'on appelait les « théorèmes de structure » [voir Benis-Sinaceur 1991, 189–191]. Justement Vuillemin accorde une place particulière au théorème de Wedderburn sur les algèbres linéaires associatives [Wedderburn 1908] [9], dont Artin a souligné l'influence sur le développement de l'Algèbre moderne [Artin 1950]. Comme Artin, Vuillemin considère que ce théorème constitue la véritable césure dans ce développement.

> Le théorème de Wedderburn est symptomatique de l'évolution de l'Algèbre moderne. En mettant en lumière les analogies qu'on peut établir entre les structures algébriques et les algèbres des structures, il préparait la voie à l'Algèbre générale, esquissée tant dans les travaux de Boole que dans ceux de Dedekind. [PA2, 329]

Généralisé par Artin aux anneaux [Artin 1927] [10], ce théorème exhibe en effet la structure des algèbres sur un corps commutatif. Selon Artin, Wedderburn sut « trouver la véritable signification et la véritable importance de la structure d'algèbre simple » [Artin 1950] [11]. Selon Vuillemin, le théorème de Wedderburn préparait la voie à l'Algèbre générale. Jugement localisé pour le premier, vue plus générale pour le second.

« L'Algèbre générale, écrit Vuillemin, procède éminemment par concepts et sans construction [de concepts dans l'intuition] » [PA2, 333]. Aussi n'y a-t-il plus lieu de retenir la distinction entre mathématiques et philosophie léguée par Kant [12]. On peut supposer que le rôle majeur donné par Dedekind

9. Vuillemin énonce, p. 327, le théorème sous la forme suivante : « 1) Toute Algèbre linéaire associative sur un corps F est la somme d'une Algèbre semi-simple et d'une sous-Algèbre invariante nilpotente toutes les deux sur F. 2) Une algèbre semi-simple sur F ou bien est simple, ou bien est la somme directe d'Algèbres simples sur F. 3) Toute algèbre simple sur F est le produit direct d'une Algèbre de division et d'une Algèbre matricielle simple, toutes deux sur F, en incluant la possibilité que le module soit la seule unité d'un facteur. »

10. Une preuve plus simple fut donnée par Ernst Witt en 1930 et une autre preuve s'en trouve dans la *Moderne Algebra* de van der Waerden [van der Waerden 1930].

11. Une algèbre est simple si elle n'a pas de sous-algèbre invariante.

12. Pour Kant la philosophie procède par concepts, tandis que les mathématiques procèdent par construction de concepts dans l'intuition [Kant 1781,1787, trad. fr., 603 *sq.*].

aux concepts a contribué à l'initiative de Vuillemin de proposer une nouvelle manière de distinguer les deux disciplines, qui n'apparaissait pas dans le tome I de *La Philosophie de l'Algèbre*. Bien entendu, Dedekind n'est pour rien dans le contenu de cette nouvelle manière, que nous allons préciser.

2.2 La philosophie pure : théorie transcendantale de l'Algèbre abstraite et des treillis

Cavaillès considérait que l'étude des structures mathématiques permet d'examiner le fonctionnement de la raison en elle-même, isolée de ses sources et de ses applications mondaines, et qu'à ce titre elle est un objet pour le philosophe préoccupé de construire une théorie de la connaissance. Pour Cavaillès les mathématiques sont le modèle parfait de l'activité rationnelle [Cavaillès 1938b, 21]. Vuillemin est beaucoup plus radical. Il pense trouver dans l'algèbre universelle *l'expression mathématique* de la théorie de la connaissance. Il écrit :

> L'Algèbre abstraite demeurait un objet pour la théorie de la connaissance. L'Algèbre générale *n'est autre que cette théorie elle-même*, exprimée sous la forme symbolique des mathématiques. [PA2, 330, nous soulignons]

En commentant la *Wissenschaftslehre* de Fichte à la suite de son analyse de la théorie de Galois, Vuillemin avait souligné que « les structures formelles se lisent en filigrane sur les structures philosophiques » [Vuillemin 1962, 279]. Ici, il continue :

> Si la philosophie, dans sa partie théorique, ne se confond cependant pas avec l'Algèbre générale, ce n'est point qu'un écart demeure entre leurs objets, puisqu'elles *étudient systématiquement les opérations de pensée en général sous la condition de leur validité objective* [*nous soulignons*], et qu'ainsi est rempli le rêve séculaire de *Mathesis universalis*, mais c'est que l'analyse transcendantale [13] doit manifester le rapport de ces enchaînements avec la conscience qui les pense, tandis que l'Algèbre proprement dite ne s'intéresse qu'à la cohérence exprimée du symbolisme, en faisant l'économie d'une référence constante au sens. [PA2, 330]

C'est écrire noir sur blanc que « les opérations de pensée en général » ne sont pas simplement modélisées par les opérations mathématiques, mais sont elles-mêmes la cible et l'outil de « l'Algèbre générale ». En étudiant celle-ci on comprendra comment user de celles-là pour édifier la « philosophie pure »,

13. Rapportons la précision donnée par Vuillemin : « Dans le langage kantien, *transcendantal* désigne le rapport à la possibilité de la connaissance, que Kant identifie avec la possibilité de l'expérience. J'entends ici ce mot en un sens libéré de cette restriction. Est transcendantale une connaissance en tant qu'elle est rapportée à l'acte de pensée qui la fonde » [PA2, 330, note 1, soulignement de Vuillemin].

dont le but théorique est de dresser le système des systèmes philosophiques. Thèse forte, qui semble ignorer la distinction que Vuillemin avait faite dans la note 1 de la page 262 du tome I de *La Philosophie de l'Algèbre*, entre « notion mathématique et notion philosophique d'opération [14] », et surmonter la barrière méthodologique qu'il maintenait entre philosophie et mathématique formelle [15]. Et c'est aussi faire du rapport à la conscience l'élément discriminant décisif entre la philosophie et l'Algèbre générale et, en même temps, ne considérer la signification d'une proposition mathématique que dans son rapport à l'activité ou à l'intentionnalité de la conscience en négligeant ce qu'il en est objectivement déposé dans les contenus mathématiques eux-mêmes, y compris ceux des sphères les plus générales et les plus abstraites. L'idée de contenu, qui permettait à Cavaillès de laisser la conscience jouer, dans l'ombre, les seconds rôles, n'accroche pas du tout l'attention de Vuillemin :

> En tant que cette question [Qu'est-ce qu'une connaissance ? c'est-à-dire quel ensemble de représentations exprimées en propositions mérite le nom de science ?] appartient à la philosophie pure, *on y fait abstraction de tout rapport à la matière* à laquelle s'applique ce système de connaissances et il ne demeure donc que la forme de la théorie. Sans doute est-ce Fichte le premier qui a clairement formulé ce problème en tentant de décrire *a priori* la constitution transcendantale d'une Théorie de la science. [PA2, 330, nous soulignons]

Cavaillès avait, dans une ligne de pensée fidèle à Hilbert, laissé de côté « la machinerie transcendantale » pour se focaliser sur les contenus mathématiques eux-mêmes. L'objectivité de ces derniers n'était ni rapportée à l'esprit (psychologisme) ni produite transcendantalement (constitution idéaliste). De même pour les processus épistémologiques d'idéalisation et de thématisation considérés du point de vue de leurs effets. Comme Brunschvicg

14. Il promettait alors de revenir sur « les confusions qui se glissent » entre les deux notions. Dans un autre passage [Vuillemin 1962, 294 *sq.*], Vuillemin identifiait « concevoir », « juger », « raisonner » comme opérations de la connaissance pure. Puis il mettait en place la distinction entre « opérateurs objectifs » de la logique et « opérations transcendantales » telles que « je pense que », « je mets en doute que », « je juge que », etc. Vuillemin observe que ces dernières sont caractérisées par « la propriété d'être non réversibles, liées et non associatives » [Vuillemin 1962, 300].

15. « On aura soin de remarquer toutefois que les structures des opérations de la réflexion sont dépourvues des caractères principaux des opérations de la Mathématique formelle. L'associativité surtout leur fait défaut. De plus, le philosophe se propose d'examiner la légitimité des systèmes d'axiomes posés par le mathématicien : celui-ci suppose l'existence ou la déduit, celui-là la fonde. Cette double différence est l'occasion d'imaginer que si l'on peut espérer appliquer à la philosophie les préceptes de la méthode mathématique, il convient de chercher le fondement de ce droit non pas dans une correspondance particulière et pour ainsi dire matérielle entre deux disciplines aussi différentes, mais dans *un rapport très général et touchant aux principes les plus fondamentaux de la science* » [Vuillemin 1962, 476, nous soulignons]. Sur l'associativité dans *La Philosophie de l'Algèbre*, voir la contribution de Benoît Timmermans dans le présent dossier.

et, antérieurement, Spinoza, Cavaillès pense que la raison est *immanente* à ses produits. Le rapport à la conscience n'était, certes, pas totalement absent, surtout au début, dans *Méthode axiomatique et formalisme*, mais il était marginalisé et la conscience finalement dispersée en divers moments [Cavaillès 1947, 2e éd. 1960, 78]. Vuillemin, au contraire, s'intéresse à la constitution transcendantale *de la forme* du système de connaissance qu'est l'Algèbre générale. Car c'est en cette tâche que consiste la philosophie pure :

> [...] dans sa partie pure, la philosophie n'est que la théorie transcendantale de l'Algèbre abstraite et des treillis. [PA2, 279]

Vuillemin est focalisé sur la conscience transcendantale, car clairement, pour lui, ce qui distingue l'Algèbre générale de la philosophie « c'est non pas son objet, mais le rapport que celle-ci maintient et que celle-là oublie à la conscience constituante » [PA2, 333]. La conscience continue d'être une et pourvoyeuse de la synthèse unificatrice où se dévoile le sens. La question du sens est héritée de Husserl (comme chez Cavaillès), mais le sens n'est ni déterminé de manière précise ni inséré dans une théorie qui en développerait les caractéristiques. Vuillemin se limite à dire que les mathématiques ont le privilège de formuler de manière exacte ce que les philosophes aperçoivent de manière floue ou indécise, le philosophe conservant l'avantage d'exhiber le sens de ce qui est formulé.

> Le philosophe ne dit pas autre chose que le mathématicien : il en montre seulement le sens. [PA2, 333]

Dans la postérité de Kant, Vuillemin évoque Fichte comme celui qui a, le premier, proposé une description *a priori* de la constitution transcendantale de la théorie de la science, puis Husserl comme celui qui a mis la théorie des variétés au cœur de la logique et a ainsi ouvert la voie à un traitement logique du rapport entre structures et sous-structures ou parties qui les composent [PA2, 330]. Fichte et Husserl sont les maillons intermédiaires entre Descartes et les structures algébriques. Vuillemin promet en effet de montrer comment les théorèmes sur la décomposition de telle ou telle structure algébrique sont une expression précise et objective de la notion d'« analyse philosophique » et de l'idée cartésienne de réduction du complexe au simple énoncée dans la deuxième règle du *Discours de la Méthode*[16] :

> On verra comment [...] le problème de la décomposition unique d'une théorie scientifique ou d'un système déductif permet de formuler de façon enfin précise et objective le problème classique de l'« analyse » philosophique et de donner un statut autre qu'imaginaire aux anciennes notions d'idées « simples » et complexes et de réduction du complexe au simple. Telle est la voie dans laquelle la Mathématique moderne cherche et détermine

16. « Diviser chacune des difficultés [...] en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre. » De manière complémentaire, la troisième règle recommande d'ordonner progressivement ses pensées en considérant d'abord les objets les plus simples pour arriver à la connaissance des plus complexes.

> la réponse à la question que Descartes posait implicitement en formulant la seconde règle du discours de la méthode. On peut retracer historiquement l'émergence de la conscience de ce problème aujourd'hui. Le théorème de Wedderburn l'illustre à propos de la structure des algèbres linéaires. [PA2, 331-332]

Pour surprenant que cela puisse paraître, au premier abord, rapprocher les théorèmes de structure avec la deuxième règle de la méthode de Descartes, et traiter sur un même plan Wedderburn et Descartes, ne manque ni d'audace ni de profondeur. Brusquement est ouverte une improbable et prodigieuse voie pour la pensée. On découvre là un de ces liens cachés que nul, sans doute, avant Vuillemin n'avait aperçu. Et l'on est confondu d'admiration. Et l'on se souvient de l'injonction de Cavaillès : creuser au plus profond, « dans le sol commun de toutes les activités rationnelles » [Cavaillès 1938b, 21]. Vuillemin donne à cette injonction une ampleur insoupçonnée. Pourtant, ne doit-on pas rappeler que la factorisation unique des nombres premiers date d'Euclide ? Que donc la règle de Descartes consigne pour le philosophe un geste caractéristique de la mathématique, dès son origine ? Que Descartes avait justement l'ambition de construire sur la base solide du raisonnement mathématique les règles pour « bien appliquer » son esprit ?

Tout cela, Vuillemin le savait, bien sûr. Mais son idée est surtout, ici, d'affirmer que l'affaire du philosophe est la même que celle de l'algébriste : exhiber la décomposition unique d'une structure en ses éléments. Et de même que « toute la connaissance mathématique est une classification des structures » [PA2, 357], de même toute la philosophie sera classification des systèmes philosophiques, une fois ceux-ci décomposés en leurs éléments constitutifs. Et c'est ce que Vuillemin réalise en ordonnant ces systèmes de manière arborescente, sur le modèle des treillis que Dedekind avait commencé à définir dès 1894 [Dedekind 1894b, 1897, 1900]. Mais la philosophie est aussi celle qui pose la question du simple et du complexe au niveau transcendantal, niveau que Vuillemin veut lire dans la démarche des mathématiciens depuis le fameux mémoire d'Abel sur l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales de degré supérieur à quatre [Abel 1826] [PA1, chap. III] :

> à quelles conditions doit répondre un système déductif, pour être susceptible d'être, selon le vœu de Descartes, analysé en ses « éléments ». [PA2, 333]

Rien de tel ne se trouve dans les écrits de Cavaillès, qui n'établissait pas de parallélisme analogique entre mathématiques et philosophie.

2.3 La phénoménologie : l'idée d'invariance et le monde des essences

Vuillemin est moins sévère que Cavaillès à l'égard de la phénoménologie. Bien plus, il reprend ou prête à Husserl nombre d'aperçus intéressants. Par exemple, il soutient que l'idée mère de la phénoménologie est de substituer à la méthode génétique, parfaitement représentée par Fichte, une méthode où le possible détrône le réel. Pour lui, ce qu'Abel a fait en mathématique, passer du réel au possible, de l'équation déterminée à sa structure, Husserl l'a effectué en philosophie en appliquant à la pensée les procédés de l'Algèbre des structures :

> À son second moment l'Algèbre et la philosophie se rapprochent. On tente d'appliquer à la pensée les procédés de l'Algèbre des structures. Telle est l'idée mère de la phénoménologie. [PA2, 361]

Vuillemin lui-même pratique cette application et l'application inverse. Il note, on vient de le voir, que par sa théorie des multiplicités, Husserl a ouvert la voie à un traitement logique du rapport entre structures et sous-structures. Lui-même poursuit dans cette même voie en exploitant les théorèmes de structure en Algèbre et la théorie des treillis de Birkhoff. Il y a des affinités entre Vuillemin et Husserl et on est loin de l'autonomie du mathématique par rapport à la logique chère à Cavaillès

Aussi Vuillemin a-t-il scruté l'intrication chez Husserl entre philosophie ou logique et mathématique. Il a mis en lumière (chap. IX), d'une manière qui ne doit rien à la tradition phénoménologique, l'utilisation par Husserl du concept mathématique d'invariant. Il observe notamment que le programme d'Erlangen de Felix Klein et la phénoménologie « ont en commun de rapporter l'idée d'objectivité à celle d'invariance » [PA2, 268]. Et tandis qu'il affirme d'un côté que les mathématiques structurales définissent l'objectivité par l'invariance à l'intérieur d'une classe d'équivalence [PA2, 37], il souligne de l'autre que la variation eidétique n'est pas liée à la thèse du monde, n'obéit pas au « principe de la possibilité de l'expérience », ce pourquoi elle autorise un usage non restreint du concept. Celui-ci n'est plus, comme chez Kant, contraint par les conditions de réalité imposées par l'objet qui doit le remplir, et qui est lui-même soumis en retour aux lois de la pensée. Par une variation libre et quelconque de ses objets, nous pouvons nous représenter l'essence d'un concept indépendamment de l'application à la réalité physique ou sensible. Aussi pourrait-on « comparer, écrit Vuillemin, la méthode phénoménologique à l'Algèbre pure : elle développe la théorie pure des formes sans se soucier de leurs réalisations » [PA2, 264]. Plus précisément :

> De même que l'Algèbre moderne a libéré les structures de groupe, d'anneau, de corps et surtout d'ensemble de la gangue des applications où ces structures étaient engagées, de même la phénoménologie a libéré les structures matérielles, qualitatives et significatives des analyses empiriques où les maintenait la thèse du monde, c'est-à-dire le préjugé de la possibilité de l'expérience ou de l'objet naturel donné *hic et nunc*. [PA2, 265]

La variation eidétique est « la méthode qui nous fait passer de l'existence à l'essence, du fait à l'Eidos » [PA2, 253]. Pour Vuillemin, Husserl a eu le mérite de rouvrir à l'enquête philosophique le monde des essences, dont Cavaillès s'était détourné, et plus particulièrement, en ce qui concerne la logique, le monde du jugement analytique. Husserl a ainsi élargi le périmètre de l'héritage kantien. Mais il reste pour Vuillemin à faire la critique de cet élargissement.

> La méthode que nous proposons, écrit-il, est entièrement différente de la méthode descriptive de Husserl. Elle est critique et procède axiomatiquement conformément au précepte d'Abel. [PA2, 268i]

Ce que Vuillemin appelle ici le « précepte d'Abel » renvoie notamment à son commentaire de la page 221 du tome I de *La Philosophie de l'Algèbre*, où il oppose les démonstrations générales aux démonstrations particulières par le fait qu'elles « ont trait au possible et partent du seul concept, en ignorant les conditions restrictives de la sensibilité ». Vuillemin reproche en effet à Husserl d'accorder « une place disproportionnée » à l'intuition eidétique. Celle-ci ne fait pas bon ménage avec le concept pur. La validité des essences doit donc être fondée autrement, et, pour ce qui concerne les régions formelles, « en examinant à quelles conditions une essence doit répondre pour correspondre à une réalité ». Comme en d'autres occasions, la démarche proposée est de type transcendantal. Vuillemin illustre son propos par l'exemple philosophique qui le hante, la preuve ontologique de l'existence de Dieu. Nous avons l'idée de Dieu, mais pouvons-nous de cette idée conclure à l'existence de Dieu. Ou, en termes cartésiens, peut-on de la réalité objective de l'idée de Dieu conclure à sa réalité formelle ? Question que Vuillemin proposait dans son tome I [Vuillemin 1962, 221] comme « objet suprême de la Critique générale » et dont il traite dans sa longue conclusion en examinant les réponses d'Aristote, de Descartes et de Fichte [Vuillemin 1962, 506–518]. Question qu'il repose dans le tome II, notamment lorsqu'il exprime sa volonté d'annuler l'ἐποχή husserlienne et de restaurer le problème de l'existence, tout particulièrement celui de l'existence de Dieu, qui fera l'objet d'une analyse détaillée dans *Le Dieu d'Anselme*. C'est, en un sens, le retour à Descartes pour qui la question de Dieu faisait partie intégrante de la philosophie, tandis que Kant l'avait évacuée hors des limites de la raison pure, montrant « qu'il est impossible de démontrer, *par un procédé théorique*, l'existence de Dieu » [Vuillemin 1962, 216].

2.4 Histoire *versus* métaphysique

Ce problème, qui demeure au cœur du tome II de *La Philosophie de l'Algèbre*, en arrière-plan des longs exposés techniques qui déploient une certaine évolution des mathématiques depuis les congruences de Carl Friedrich Gauss (1777-1885), marque une différence capitale entre Vuillemin et Cavaillès. Vuillemin n'entend pas, en effet, limiter au noyau central qu'y représente la théorie de la connaissance le projet d'une « philosophie théorique », « rationnelle et systématique », susceptible de formuler de manière précise toute question philosophique, de quelque ordre qu'elle soit, théorique ou pratique. La liaison entre théorie et pratique était forte mais totalement implicite dans les écrits de Cavaillès. C'est le rapport établi avec son combat de résistant qui la mettait en lumière. Vuillemin, lui, la met au cœur de son rationalisme et au sommet de sa philosophie. Aussi le point névralgique de sa réforme du kantisme consiste-t-il, non à lier l'entreprise critique à l'enquête historique comme l'avait fait Cavaillès, mais à rétablir la métaphysique dans ses droits philosophiques en l'incluant dans le cercle de ce qu'il nomme « la Critique générale ». Pour Vuillemin, la mathématique structurale n'évince pas la métaphysique, elle lui offre les moyens de s'exprimer distinctement. C'est dans cette perspective que la question du rapport entre mathématiques ou physique et métaphysique a de manière essentielle occupé la réflexion de Vuillemin : il y a consacré des articles sur Pythagore et Platon, un livre relatif à Descartes, un autre relatif à Kant. Ici, dans ce tome II de *La Philosophie de l'Algèbre*, il soutient, par exemple, que Kant avait eu, déjà, l'idée de « l'identité d'une structure formelle » dans son analyse de la catégorie de la modalité [PA2, 210]. Il faut prendre « structure formelle » en un sens élargi pour comprendre, ou croire comprendre. Par ailleurs, le lien de la mathématique vers la métaphysique est établi pour Leopold Kronecker (1823-1891)[17], et aussi pour Dedekind : nous y reviendrons. Le lien de la métaphysique vers les mathématiques est remarquablement établi dans le cas de Husserl. Mais Husserl a cru pouvoir atteindre « les choses mêmes » indépendamment de toute théorie métaphysique [Vuillemin 1962, 504]. Or le programme de Vuillemin est, au contraire, de voir en la Métaphysique le « centre dont tout dépend » [Vuillemin 1962, 505]. Tandis que Cavaillès restait attaché à la mathématique classique tout en en élaborant une épistémologie semi-intuitionniste, semi-hégélienne, Vuillemin prend acte de la pluralité des axiomatiques pour un même concept mathématique, ou pour des concepts parallèles tels ceux d'ensemble et de *species*, de la pluralité des logiques[18], et de l'importance donnée à l'initiative du choix par le concept de *species* de Brouwer. Cela lui permet de joindre la rigueur de la déduction mathématique à la liberté métaphysique. Et cela *en théorie et en droit*, et pas seulement en fait comme dans le cas de Cavaillès, chez qui c'est le lecteur qui retrouve cette alliance en rapportant son action dans la Résistance à ses écrits théoriques. Dans le tome I de *La Philosophie de l'Algèbre*, nous pouvions déjà lire :

> Toute connaissance, quelle qu'elle soit, est de part en part métaphysique, en ce qu'elle implique en son principe des décisions et des choix qui n'appartiennent pas eux-mêmes à la juridiction interne de cette connaissance. [...] Toute science est engagée et partiale. Il y a plusieurs mathématiques, selon les exigences formulées eu égard aux procédés de construction et aux axiomes d'existence. [...] La tâche [de la philosophie] consiste uniquement à élucider les motifs rationnels qui justifient le choix de tel ou tel système axiomatique en Logique et en Mathématique.

17. « Rien, sinon une idée métaphysique, ne nous contraint *a priori* à admettre le caractère intuitif de l'ensemble des entiers » [PA2, 34, 214].

18. L'Algèbre générale a « introduit dans la logique le principe de tolérance propre aux sciences formelles » [PA2, 360].

> [...] [La philosophie] n'est pas séparable de la Métaphysique et son objet général consiste non pas à tenter d'ignorer les choix métaphysiques, mais à en étudier les motifs *en rapport avec la liberté de l'homme*. [Vuillemin 1962, 505–506, nous soulignons]

Cette liberté conçue au plan métaphysique, Vuillemin la superpose à la liberté créatrice du mathématicien revendiquée par Cantor et par Dedekind. Pour lui la première justifie philosophiquement la seconde.

3 Vuillemin praticien de l'œuvre de Richard Dedekind

Vuillemin crédite Dedekind d'avoir introduit « une conception nouvelle des opérations algébriques et des structures », une conception qui conduit à l'Algèbre de l'Algèbre. Celle-ci est manifeste d'abord dans l'extension de l'opération de divisibilité à des structures plus abstraites qui rendent possible un théorème de factorisation unique en éléments premiers, et commence avec la théorie des idéaux, qui généralise aux entiers algébriques les lois de l'arithmétique des nombres entiers positifs. Cette conception nouvelle est manifeste, ensuite, dans la création des treillis, auxquels Vuillemin attribue le rôle unificateur auparavant tenu par la théorie des groupes.

Vuillemin considère que les mathématiques modernes ont absorbé la logique dans leurs tentatives de s'auto-fonder. Pour lui, issue de la conceptualisation de l'ordre cristallisée dans la notion de chaîne inventée par Dedekind, la théorie des treillis « fait apercevoir l'infrastructure logique des mathématiques » [PA2, 330]. Plus encore, « elle fournit le modèle cohérent et exact de l'étude de la logique, et elle remplit enfin le programme que s'était fixé Aristote dans l'*Organon* ». L'Algèbre générale, alors, « n'est autre que [la] théorie [de la connaissance], exprimée sous la forme symbolique des mathématiques ». Or dans le chemin que retrace Vuillemin vers la théorie des treillis et l'Algèbre de l'Algèbre, qu'il suit via l'émergence et le développement des structures abstraites en mathématiques, Dedekind joue un rôle clef : ses travaux en théorie des nombres inaugurent l'avancée vers l'algèbre des structures, ses travaux fondationnels lient mathématiques et logique, et il est le premier à introduire la notion de treillis.

Et bien que Vuillemin affirme que l'avènement de l'Algèbre générale provient du croisement de l'algèbre abstraite et de l'algèbre de la logique, il la considère comme le produit d'une appropriation de la logique par les mathématiciens sans trop considérer, inversement, la logique du point de vue de sa mathématisation, ce qu'était pourtant à l'origine la perspective de George Boole (1815-1864) [19] et de ses successeurs jusqu'à Tarski (1901-1983) et au-delà.

19. On peut lire dans [Boole 1992, 21, nous soulignons] : « Le but de ce traité est d'étudier les lois fondamentales des opérations de l'esprit par lesquelles s'effectue le

3.1 Dedekind et la logique

Vuillemin a une position nuancée en ce qui concerne le prétendu logicisme de Dedekind [20]. D'une part, il est clair pour lui que « l'analyse logique, pour elle-même, n'est pas le propre de l'*Essai* [*Zahlen* (Nda)] » [PA2, 313]. Lecteur de Frege et averti par ce que ce dernier en dit dans la préface au premier volume des *Grundgesetze der Arithmetik* [21], il se garde bien de prendre la fameuse assertion de Dedekind sur l'appartenance de l'Arithmétique, l'Algèbre et l'Analyse au domaine de la logique, pour une profession de foi logiciste [PA2, 304]. Et à propos de la définition 73, où Dedekind explique que les éléments du système des nombres ordinaux sont libérés de « tout contenu » et qu'en ce sens, on peut à juste titre dire des nombres qu'ils sont « une libre création de l'esprit humain » [Dedekind 1888, 134], Vuillemin observe justement que

> [...] cette liberté s'oppose à une conception « logiciste » de l'Arithmétique, telle que l'a par exemple conçue Frege. Et bien que dans la préface à la première édition, Dedekind ait regardé l'Arithmétique comme une partie de la Logique, Frege ne s'est pas trompé sur le sens de cette déclaration : elle tendait seulement à réfuter les intuitionnistes qui veulent fonder le nombre sur la représentation du temps et de l'espace, alors qu'il « résulte immédiatement des lois de la pensée », mais d'une pensée regardée comme créatrice, toujours susceptible d'introduire des concepts nouveaux, et ne se soumettant qu'à la seule condition d'une *démonstration rationnelle* [*nous soulignons*] et qu'au seul impératif : « Dans la science, rien de ce qui peut être prouvé ne doit être accepté sans preuve. » [PA2, 304]

Du reste, comme nous l'avons montré [22], c'est en l'arithmétique, non en la logique, que Dedekind voit une structure de la connaissance rationnelle et un outil primordial de perception du monde.

Mais d'autre part, Vuillemin interprète la construction des idéaux et la définition des ordinaux finis comme une construction mathématique à l'aide

---

raisonnement ; de les *exprimer dans le langage symbolique d'un calcul*, puis, sur un tel fondement, d'établir la science de la logique et de constituer sa méthode. » De même dans la préface au premier tome des *Vorlesungen über die Algebra der Logik* [Schröder 1890-1905], Ernst Schröder (1841-1902) souligne que le traitement calculatoire de la logique l'a libérée des chaînes où la maintenait le langage vernaculaire.

20. À ce sujet, on pourra consulter, entre autres, [Kitcher 1986], [Stein 1988], [Tait 1997], [Ferreirós 1999], [Demopoulos & Clark 2005], [Detlefsen 2011], [Benis-Sinaceur, Panza *et al.* 2015], [Ferreirós à paraître].

21. « Monsieur Dedekind est aussi d'avis que la théorie des nombres serait une partie de la logique ; mais son essai contribue bien peu à étayer cette opinion, car les expressions "Système" et "une chose appartient à une chose" qu'il utilise ne sont guère usuelles en logique ni ne sont réductibles à quelque chose reconnue comme logique » [Frege 1893, VIII, nous traduisons].

22. Voir [Benis-Sinaceur, Panza *et al.* 2015],[Benis-Sinaceur 2017, 187–198], l'introduction de [Dedekind & Weber 2019] et [Haffner & Schlimm à paraître].

d'une opération qu'il conçoit comme une opération logique : l'inclusion. « La logique, écrit-il, est la science de l'inclusion » [PA2, 286]. Plus précisément, Vuillemin considère que dans sa théorie des idéaux, la traduction par Dedekind de la division entre éléments par l'inclusion entre classes est « la véritable raison mathématique de la subordination des mathématiques à la logique [23] ». Vuillemin ne dit pas que Dedekind revendique cette subordination, mais qu'il en fournit « la raison mathématique ». C'est l'opinion propre de Vuillemin que véhicule cette analyse, qui fait fond sur la correspondance entre PPCM et intersection et PGCD et union d'ensembles. Pour Vuillemin cette correspondance entre opérations arithmétiques (division, PPCM, PGCD) et opérations ensemblistes (inclusion, intersection, union) permet la construction de structures « mi–logiques, mi-algébriques, qui rendent possible l'interprétation pour ainsi dire *minima* du théorème de décomposition unique » [PA2, 326]. La théorie des ensembles est ainsi considérée comme une théorie logique, ou au moins comme le témoin essentiel de l'appropriation de la logique par les mathématiciens. Comme on l'a vu plus haut c'était bien l'avis de Zermelo. Et c'était déjà, dans un contexte antérieur différent, l'avis de Hilbert.

Ce n'était en revanche clairement pas l'avis de Dedekind. Celui-ci place en effet au fondement de *Zahlen*, le concept d'*Abbildung*, préféré au terme de *Substitution*, qu'il avait d'abord utilisé en suivant Galois dans l'étude qu'il lui a consacrée [Dedekind 1856-1858]. Le contexte est algébrique. Il s'agit en l'occurrence d'une généralisation du concept mathématique de fonction, puisqu'elle consiste à « transformer » les éléments d'un système S en éléments d'un système S' (qui peut éventuellement être égal à S), ou à « représenter » ceux-là par ceux-ci. Le but est de pouvoir transporter une structure algébrique d'un domaine à un autre. L'*Abbildung* de Dedekind *n'est pas* l'application de la théorie des ensembles, celle-ci étant définie par son graphe quand celle-là est définie comme correspondance entre deux ensembles. L'*Abbildung* serait plutôt un ancêtre de la flèche des catégoriciens. Cependant, Dedekind présente l'*Abbildung* comme l'expression mathématique de « la capacité de l'esprit à relier des choses à des choses, à faire correspondre une chose à une chose, ou à représenter une chose par une autre, capacité sans laquelle aucune pensée en général n'est possible » [Dedekind 1888, 134–135]. Peut-être est-ce sur cette caractérisation que Vuillemin établit l'identité foncière entre opérations de pensée (opérations logiques) et opérations mathématiques, gommant, dans le tome II de *La Philosophie de l'Algèbre*, leurs différences, évoquées dans le tome I. On comprendrait, dans ce cas, pourquoi il écrit qu'algèbre et philosophie ont le même objet : les opérations de la raison, que

23. « En même temps qu'on abstrait la propriété de divisibilité des domaines concrets auxquels elle se trouvait primitivement mêlée, on aperçoit les structures qui la déterminent. Ces structures ont trait essentiellement aux idées de chaîne et d'idéal développées par Dedekind, et qui fournissent la raison mathématique de la subordination des mathématiques à la logique. Une correspondance abstraite s'établit entre l'opération de division et celle d'inclusion et, parallèlement, entre les opérations respectives de p.p.c.m et d'intersection, de p.g.c.d et d'union » [PA2, 325–326].

la première traduit en termes mathématiques et dont la seconde montre le sens. On rappellera toutefois que le contexte de travail dans lequel Dedekind généralise la notion de fonction en celle de représentation d'un élément par un autre est arithmétique et algébrique, et que son idée fondamentale était que l'arithmétique constitue, en elle-même et par elle-même, une structure formelle de notre expérience sans qu'aucune médiation logique préalable ne soit requise. Ce sont les nombres, non pas l'espace et le temps, qui organisent notre perception des choses du monde extérieur. Ce sont les nombres, non pas les catégories logiques, qui sont l'attribut essentiel et immédiat de la pensée.

Dans un autre passage, Vuillemin s'exprime différemment. Il écrit que la logique est à la théorie des ensembles ce que la philosophie de Platon est à la découverte des irrationnels [PA2, 361]. Ce qui signifie, entre autres, que la logique a permis une réponse aux paradoxes de la théorie des ensembles. Mais là encore, Dedekind n'y est pour rien, ayant laissé à sa postérité le soin d'apporter cette réponse pour *Zahlen*, dont seule la perfection mathématique lui importait. C'est par une lecture fortement rétrospective qu'on veut voir dans Dedekind un représentant de la tendance logiciste éminemment représentée par Frege et Russell.

Si Vuillemin lit les travaux de Dedekind comme s'intégrant dans un mouvement qui subordonne les mathématiques à la logique, c'est parce qu'il considère l'inclusion comme une opération logique. Pour les mathématiciens, en général, l'inclusion, $\subseteq$, est une relation d'ordre entre ensembles, comme $\leq$ est une relation d'ordre entre nombres, et ce qui est proprement logique est l'implication $\Rightarrow$. De fait, il y a une relation entre inclusion et implication, connue depuis Aristote[24], et qui est sans doute responsable de l'idée répandue que l'inclusion est une relation logique. Or l'usage de l'inclusion entre ensembles et sous-ensembles est le « tour » par lequel Dedekind retrouve la factorisation unique des idéaux en idéaux premiers dans un anneau dont tout idéal non nul est inversible. Dans la théorie des idéaux, l'inclusion intervient en tant qu'extension de la divisibilité. Pour deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, Dedekind dit que $\mathfrak{a}$ divise $\mathfrak{b}$ si $\mathfrak{b}$ est inclus dans $\mathfrak{a}$, ce qui lui permet de montrer que l'on peut exprimer la divisibilité des entiers algébriques en termes d'inclusion d'idéaux et ainsi transférer l'étude de la divisibilité des entiers du corps de nombres algébriques à celle des idéaux de ce corps, et y retrouver les lois de divisibilité connues pour les entiers rationnels (en particulier, le théorème de décomposition unique en éléments premiers[25]). Ainsi, définir la division par l'inclusion suppose que Dedekind conçoit, inversement, l'inclusion comme une nouvelle notion de divisibilité, c'est-à-dire une nouvelle notion arithmétique.

24. On peut caractériser l'inclusion comme suit : $A \subset E$ ssi $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in E)$. Inversement, on peut exprimer une implication par une inclusion. Considérons pour ce faire un ensemble E, deux propositions P et Q portant sur les éléments de E, alors l'implication de P vers Q équivaut à l'inclusion : $((\forall x \in E)(P(x) \Rightarrow Q(x))$ ssi $\{x \in E|Q(x)\}$.

25. Dedekind introduit également des notions de PPCM et PGCD comme intersection et union d'idéaux, qui guideront plus tard son invention des treillis.

Naturellement, l'inclusion joue un rôle fondamental dans *Zahlen*, notamment pour la définition du concept de chaîne : est une chaîne une partie K d'un ensemble S muni d'une représentation ϕ dans lui-même telle que $\phi(K) \subseteq K$. La chaîne engendrée par K est l'intersection de toutes les chaînes contenant K. L'ensemble des entiers naturels N est alors un ensemble simplement infini, c'est-à-dire un ensemble susceptible d'une représentation *semblable* (une injection) ϕ en lui-même telle qu'il soit la chaîne d'un élément distingué, appelé 1, qui n'est pas contenu dans son image $\phi(N)$. Les ordinaux de Dedekind sont définis en termes d'ensembles ; ce sont des éléments abstraits dénués de tout contenu, construits d'après le modèle de la suite des nombres familiers. Vuillemin observe également que ce que Dedekind appelle un « idéal principal » généré par un entier α (c'est-à-dire les multiples de α) forme une chaîne [PA2, 292]. Ce n'est, en revanche pas une observation que l'on retrouve chez Dedekind. Bien que l'on ait du mal à imaginer que Dedekind ne l'ait pas vu, rien ne suggère que cela ait été moteur dans l'introduction du concept de chaîne.

Notons, en passant, que Dedekind définit l'inclusion en utilisant un symbole différent de celui que nous a légué Ernst Schröder (1841-1902), dont Dedekind mentionne le *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra* [Schröder 1873] [26], paru en 1873, et non pas les *Vorlesungen über die Algebra der Logik* [Schröder 1890-1905], parues entre 1890 et 1905 [27]. L'interprétation logique de l'inclusion et de la construction des nombres découle sans doute de l'appréciation de Schröder, qui, dans le troisième volume des *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, salue en Dedekind celui qui a « comblé une grosse et importante lacune, qu'aucun auteur, y compris [lui-même Schröder] dans [son] *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*, n'avait remplie » [Schröder 1890-1905, 349, nous traduisons]. Schröder juge en effet que Dedekind a découvert la source logique de l'Arithmétique en définissant logiquement les nombres entiers et, surtout, en démontrant logiquement le principe de l'induction complète :

> C'est le mérite de Dedekind d'avoir, pour la première fois, dépouillé de son aspect arithmétique accessoire le procédé de démonstration bien connu sous le nom d'« inférence de n à $n+1$ », d'en avoir identifié le noyau logique, et d'avoir ainsi *formulé* le « théorème de l'induction complète » comme un théorème de logique générale. [Schröder 1890-1905, 355, nous traduisons, soulignement de l'auteur]

26. Schröder y définit le nombre naturel cardinal comme « une somme d'unités », ce qui est très loin de la définition des ordinaux finis de Dedekind. D'autre part, Schröder utilise le terme *Abbildung* dans un sens totalement différent de celui que lui imprime Dedekind ; il s'en sert pour exprimer qu'un nombre cardinal est l'image de la pluralité des choses dont il est le nombre.

27. Des *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, Dedekind a lu au moins le premier tome entre 1890 et 1895, comme nous en informe son *Nachlass* – donc bien après la conception de *Zahlen*.

Vuillemin insiste à son tour sur « la forme généralisée » [PA2, 294] de l'induction mathématique donnée par Dedekind [*Zahlen*, propositions 59 et 60]. Le texte de Vuillemin ne le dit pas, mais longtemps, la lecture de Schröder s'est imposée contre celle de Frege, plus juste selon nous et plus conforme à l'esprit de l'écrit de Dedekind et au contexte de son élaboration. Et il est clair que le programme de Dedekind était celui d'une Arithmétique générale, non d'une Logique générale.

La lecture rétrospective et surplombante que fait Vuillemin des travaux de Dedekind, très largement influencée par celle de [Bell 1945], dans laquelle Dedekind est un « génie perspicace et prophétique » [Bell 1945, 258], l'amène à prêter à Dedekind une vision très générale que celui-ci n'exprimait pas – qui, en fait, ne l'intéressait pas vraiment. En particulier, si les similarités conceptuelles entre l'ordre défini par une chaîne dans *Zahlen* et celui défini dans un treillis peuvent nous sembler évidentes, il n'est pas certain qu'elles le furent immédiatement pour Dedekind. Grâce à son *Nachlass*, on sait aujourd'hui que ce n'est vraisemblablement qu'au moment de sa lecture de l'*Algebra der Logik* de Schröder, plusieurs années après la parution de *Zahlen*, qu'il s'est intéressé à la structure de treillis des opérations ensemblistes, et ce alors même qu'il avait déjà longuement travaillé sur le sujet dans le contexte de la théorie des nombres algébriques [28].

3.2 Dedekind vers l'Algèbre générale

Reposant sur une notion d'ordre plus simple, plus générale et marquant une nouvelle étape d'abstraction des structures où sont étudiés les rapports entre une structure et ses sous-structures (par exemple, « on démontre que les sous-algèbres d'une algèbre abstraite quelconque forment un treillis complet » [PA2, 344]), les treillis offrent, pour Vuillemin, le nouveau principe unificateur des mathématiques. Ils sont la meilleure expression de l'idée abstraite de structure et mènent à l'Algèbre de l'Algèbre. Vuillemin voit dans la théorie des treillis le résultat de l'abstraction grandissante des structures étudiées par les mathématiques, de l'adaptation des moyens du raisonnement mathématique à la considération de structures « mi-algébriques, mi-logiques » naissant des extensions de l'inclusion et de la théorie des idéaux, et par là du théorème de factorisation unique en éléments premiers qu'il s'agissait alors de pouvoir interpréter minimalement, c'est-à-dire abstraitement. Ainsi, « le domaine primitif de l'Algèbre était étendu [...] [et] une nouvelle Algèbre naissait qu'on peut légitimement appeler Algèbre générale » [PA2, 326].

Rappelons la définition d'un treillis. Un treillis est un ensemble E muni de deux lois internes $\vee$ et $\wedge$ telles que :

— $\vee$ et $\wedge$ sont commutatives, associatives et idempotentes.

28. Plus exactement dans le contexte de la théorie des $\mathbb{Z}$-modules, que Dedekind utilise en théorie des nombres. Dedekind le rappelle dans l'introduction de ses travaux sur les treillis (voir plus bas, p. 181).

— $\vee$ et $\wedge$ vérifient la loi d'absorption : $a \vee (a \wedge b) = a = a \wedge (a \vee b)$.

— On définit d'une relation d'ordre : $a < b \Longleftrightarrow a \vee b = b$ (ou $a \wedge b = a$).

— Pour cette relation d'ordre, $inf(a, b) = a \wedge b$ et $sup(a, b) = a \vee b$.

Dans un treillis $(E, \vee, \wedge, <)$, on définit une chaîne comme un sous-ensemble fini totalement ordonné. Cela permet d'énoncer la condition de chaîne de Jordan-Dedekind [29]. Soulignons que Dedekind ne revendique pas de filiation conceptuelle entre cette notion de chaîne et celle qu'il définit dans *Zahlen* (et c'est encore moins le cas de Birkhoff et de ses successeurs), contrairement à ce que suggère Vuillemin, après avoir énoncé le « théorème de la chaîne » :

> C'est là un exemple de ces nouvelles structures algébrico-logiques dont on doit le développement à la théorie de Dedekind, bien qu'il soit emprunté à l'arithmétique des nombres algébriques, il peut être généralisé à l'algèbre des anneaux commutatifs. Philosophiquement, il introduit le concept fondamental de chaîne, qu'on retrouve au centre des réflexions de Dedekind concernant les entiers rationnels. [PA2, 287]

Bien sûr, au cœur de chacune se trouve le rapport d'ordre d'un terme à son successeur, mais l'homonymie ici n'est pas un signe de stricte correspondance conceptuelle. En réalité, cette notion trouve plutôt sa source dans la théorie des nombres où Dedekind définit une notion de chaîne de modules (ou d'idéaux) comme un ensemble de modules (ou d'idéaux) totalement ordonné par $\subset$ – ce qui mènera aux conditions de chaîne d'Emmy Noether. Le fait que Dedekind n'évoque jamais, lorsqu'il utilise *cette* notion de chaîne, son ouvrage de 1888 est, en soi, un signe fort, puisqu'il ne manquait pas de le faire dès qu'il le pouvait. Par ailleurs, le mot allemand *Kette*, utilisé pour ces deux notions, est assez répandu, et Dedekind l'utilise également pour désigner une suite de nombres ou d'idéaux avec un dénominateur commun, ou même une suite d'équations de la forme :

$$\begin{aligned} a &= mb + c \\ b &= nc + d \\ c &= pd + e \end{aligned}$$

etc.

Citant [Bell 1945], Vuillemin rappelle, à juste titre, que Dedekind, en 1900, avait seulement reconnu la « forme unifiante » des treillis, sans en développer la théorie abstraite. La lecture très rétrospective de Bell, sur laquelle s'appuie Vuillemin, saute par-dessus les filiations et circulations complexes de l'histoire. Rappelons que les travaux de Dedekind, dans lesquels est défini un concept formellement équivalent aux treillis, appelé *Dualgruppe*, n'ont ni la généralité et l'ampleur que Vuillemin attribue à la théorie des treillis, ni les origines

29. Deux chaînes maximales finies sont de même longueur.

qu'esquisse sa reconstruction [30]. Sur ce second point, Dedekind raconte très explicitement les origines de son nouveau concept :

> Pendant de nombreuses années, j'ai été occupé par ces questions, mais je n'y ai pas été poussé par la logique, mais par la théorie de ces systèmes de nombres que j'appelle modules. Par mes efforts pour obtenir cette théorie à partir du plus petit nombre de lois fondamentales, et non sans grandes difficultés, j'ai reconnu les [propriétés définissant les treillis]. [Dedekind 1897, 113]

Sur le premier point, comme l'a d'ailleurs bien vu Vuillemin, Dedekind ne s'intéresse pas (contrairement à Birkhoff) à la théorie abstraite des *Dualgruppen* mais seulement à quelques cas particuliers, et ce bien qu'il en donne une définition générale. Plus important encore, les articles de Dedekind sur la théorie des treillis n'avaient pas été lus par Birkhoff lorsque celui-ci a publié ses premiers travaux sur le sujet. Ce sont pourtant bien ceux-là qui marquent la naissance et le développement des treillis en tant que théorie [31]. Mais ce n'est pas ce qui importe le plus à Vuillemin, car ce qui l'intéresse ce n'est pas la simple généalogie mathématique, mais le fait qu'a ainsi été développée

> [...] une théorie [qui] s'intéresse donc non plus à des éléments particuliers comme l'ancienne Algèbre, non plus même à la structure abstraite qui relie des éléments non particularisés, comme l'Algèbre abstraite, mais [à] l'ensemble des relations entre une structure et les formes structurales qu'on y peut établir. Ainsi, l'Algèbre générale est bien une Algèbre de l'Algèbre. Au lieu de fournir une théorie des relations entre éléments, elle fournit une théorie des relations entre les théories elles-mêmes. [PA2, 329]

Or cette « Algèbre de l'Algèbre » a, pour Vuillemin, un rôle philosophique. Dans le tome I de *La Philosophie de l'Algèbre*, Vuillemin avait « tenté de montrer que parmi les structures abstraites, celle qui avait joué le rôle unificateur le plus important en Mathématiques était la structure de groupe » [PA2, 329], car liée à la découverte des véritables *raisons* structurales donnant les conditions de possibilité de la résolution des équations algébriques. L'algèbre passait ainsi de l'étude des équations à celle des structures algébriques. Dans le tome II, il suggère que les treillis pourront « [jouer], sur le plan de l'Algèbre générale, le même rôle unificateur que la structure de groupe dans l'Algèbre abstraite » [PA2, 329–330]. Mais alors que le groupe n'était « incorpor[é] dans l'étude de la pensée » que par analogie, les treillis vont plus loin :

> [...] comme la théorie des treillis ne fait usage que des concepts logiques les plus généraux, non seulement, au point de vue technique, elle fait apercevoir l'infrastructure logique des mathématiques, mais elle fournit le modèle cohérent et exact de l'étude

30. Sur la genèse des *Dualgruppen*, voir [Haffner à paraître].

31. Nous renvoyons à la contribution de S. Decaens dans ce dossier pour plus de détails sur l'histoire de la théorie des treillis.

> de la Logique, et elle remplit enfin le programme que s'était fixé Aristote dans l'*Organon*. L'algèbre abstraite demeurait un objet pour la théorie de la connaissance. L'Algèbre générale n'est autre que cette théorie elle-même, exprimée sous la forme symbolique des mathématiques. [PA2, 330]

Non seulement l'Algèbre générale peut donner les outils pour étudier les théories et raisonnements déductifs, mais encore elle permet de retourner au « problème de la décomposition unique d'une théorie scientifique ou d'un système déductif » et de formuler précisément et objectivement « le problème classique de l'"analyse" philosophique, donnant ainsi un statut autre qu'imaginaire ou analogique aux anciennes notions d'idées "simple" et complexe et de réduction du complexe au simple » [PA2, 331–332]. En effet, il existe des isomorphismes structuraux permettant de naviguer entre les opérations logiques et les opérations arithmétiques (divisibilité, PGCD et PPCM) et de retrouver la décomposition en éléments premiers. Pour Vuillemin, alors :

> La tâche fondamentale de l'Algèbre générale consiste à étudier systématiquement cette structure quasi-algébrique, et à examiner à quelles conditions elle assure dans le cas général où l'on a affaire non plus aux nombres, mais aux théories déductives elles-mêmes, la décomposition élémentaire unique souhaitée. [PA2, 336–337]

Immense projet philosophique qui dépasse largement les auteurs qu'utilise Vuillemin.

Revenant sur la notion d'ordre, qui appartient aux mathématiques, à la philosophie, et à la logique et qui, comme l'on sait, constitue une pierre angulaire dans la philosophie de Descartes, Vuillemin opère un nouveau rapprochement vertigineux en liant la notion de *series* selon Descartes au concept de chaîne de Dedekind [PA2, 339]. Mais la notion de *series* chez Descartes est liée à la notion de rapports, héritée de la théorie euclidienne des proportions. Le paradigme en est fourni par les rapports de nombres entiers [32] et l'application étendue aux figures, aux astres, aux sons [Descartes 1628, Règle IV, 50–51] et à « l'enchaînement des propositions » [Descartes 1628, Règle XVII, 112]. En revanche, la chaîne est un concept fondé sur l'inclusion d'ensembles infinis quelconques n'ayant rien à voir *a priori* avec des proportions numériques. Que veut donc signifier Vuillemin par l'identification de la *series* de Descartes à la chaîne de Dedekind ?

Explicitons ce qu'il n'exprime pas, à savoir que le trait commun à la *series* de Descartes et à la chaîne est le rapport constant d'un terme à son successeur. Cela suffit-il cependant pour concevoir la série cartésienne comme la matrice générale de raisonnements incarnés ultérieurement de manière aussi diverse que

32. Voir dans [Descartes 1628, 55–56, la Règle VI], où Descartes donne l'exemple de la suite les nombres 3, 6, 12, 24, 48, etc.

dans le jugement synthétique chez Kant [PA2, 338] [33] et la chaîne de Dedekind ? Ici encore, nous rencontrons un exemple de la méthode de Vuillemin : creuser au plus profond pour exhumer un lien enfoui dans les replis des œuvres et des siècles, et qu'il est le premier, ou peut-être le seul, à établir.

La ligne d'affinité philosophique que Vuillemin trace de Descartes à Dedekind est l'occasion pour nous d'un autre embarras : le rapprochement entre le *Cogito* et la chaîne. Nous allons y consacrer la section suivante.

3.3 Dedekind et l'infini

> Sous l'influence de Dedekind, le rapprochement qui s'est fait entre la Logique et les Mathématiques s'est fait par l'intermédiaire de l'infini. [PA2, 357]

On sait bien, et Vuillemin le souligne [34], que dans *Zahlen* Dedekind définit le fini à partir de l'infini, et non l'inverse comme cela se pratiquait depuis deux mille ans. Cette priorité de l'infini, Vuillemin y voit l'empreinte de la logique et de la philosophie. Et qui dit philosophie y inclut la métaphysique, ce qui explique le parallèle fait par Vuillemin entre l'infini chez Descartes et l'infini chez Dedekind.

Empreinte de la logique dans la définition de la divisibilité des idéaux par l'inclusion entre classes infinies. Pour Vuillemin, Dedekind a dégagé l'idée de structure de sa forme proprement algébrique en ce que « les lois de composition qui la définissent n'ont plus besoin d'être regardées comme des opérations finies » [PA2, 286]. « L'Algèbre des idéaux » donne lieu à des structures logiques « plus abstraites que les structures proprement algébriques » [PA2, 287].

Empreinte de la philosophie également dans la démonstration par Dedekind de l'existence d'un système infini (proposition 66 de *Zahlen*). Après avoir relevé la non-pertinence mathématique de la « preuve » de Dedekind, Vuillemin ajoute qu'elle est, « à vrai dire, extrêmement ingénieuse, [et] peut être regardée comme une contraction – tout à fait dans le style très dense de ce mathématicien – des preuves philosophiques de l'existence de Dieu, qui

33. « Le jugement synthétique kantien, c'est la *series* [de Descartes] appliquée à la succession et à la juxtaposition. » Voir aussi [Vuillemin 1960, 123] : « [...] il suffit de comparer la nature des *nexus* cartésiens et de leurs ramifications dans le système de Kant, pour apercevoir combien, chez Descartes, elle retient de la sériation et de la linéarité propres à l'ordre de la *Géométrie*. La *Critique de la raison pure* se présente, elle aussi, comme une théorie des proportions ; qu'il s'agisse des axiomes de l'intuition, des anticipations de la perception, des analogies de l'expérience et des postulats de toute pensée empirique en général, il faut, trois termes étant donnés, trouver le quatrième proportionnel [cf. Gueroult 1953, II, 278]. »

34. « Un trait constant caractérise le style mathématique de Dedekind, en ceci analogue au style philosophique de Descartes : l'infini est toujours, chez lui, premier par rapport au fini » [PA2, 311].

partent de l'idée d'infini en nous » [PA2, 302]. Le rapprochement est sidérant. Il faut donc expliciter le point de vue de Vuillemin.

Les mathématiciens ont rapidement oublié cette proposition 66 dont le sort a été réglé pour eux par l'axiome de l'infini de Zermelo. Les historiens se bornent, pour la plupart, à exposer les raisons et les circonstances de sa genèse tardive [35]. En revanche, les philosophes et logiciens n'ont cessé de s'y intéresser, peut-être justement en raison de ses failles. Rappelons, à la suite de Pierre Dugac [Dugac 1976, 89], que, dans la première édition de *The Principles of Mathematics* [Russell 1903, 357], qui contient son fameux paradoxe, Bertrand Russell juge correcte cette preuve et trouve évidente l'existence des ensembles infinis ("That there are infinite classes is so evident that it will scarcely be denied"). Mais lors de la rédaction des *Principia mathematica* [Russell & Whitehead 1910-1913], il se rallie à la position de Zermelo. Cependant, la solution mathématique de Zermelo n'a pas arrêté *ipso facto* le train des interprétations épistémologiques. Cavaillès considérait que la proposition 66 de *Zahlen* était une « chute dans le transcendantal, ou réalisme psychologique » [Cavaillès 1938a, 126]. Il fut suivi par d'autres, notamment par David McCarty, dont [McCarty 1995] fit autorité dans le monde anglo-saxon. Dans un article récent, Ansten Klev suggère l'influence de la philosophie de Hermann Lotze, dont Dedekind a suivi les cours, et qui utilise la notion de *Gedankenwelt* [Klev 2018] – influence jointe à la lecture plus tardive de Bolzano [36]. D'autres encore l'ont regardé, non sans raison, comme « une combinaison singulière du *Cogito* de Descartes et de l'idée de l'idée de Spinoza » (Badiou, cité dans [Belna 1996, 93]). Mais cette identification analogique par un lecteur moderne ne vaut naturellement pas filiation généalogique. Elle relève d'une lecture épistémologique *a posteriori* et ne prétend pas retrouver une genèse effective.

Revenons au rapprochement de Vuillemin. Il repose sur le fait qu'il s'agit d'une *preuve d'existence* comme dans le cas de la preuve ontologique. Pour Vuillemin, la solution mathématique fournie par Zermelo en la forme d'un *axiome* de l'infini n'élimine pas la question philosophique de *l'existence* de l'infini. Et il considère celle-ci avec d'autant plus de sérieux que, prenant le contre-pied de la Critique au sens de Kant et de la pratique husserlienne de l'ἐποχή, il veut réintroduire les questions métaphysiques existentielles dans

35. Comme l'a remarqué Dugac [Dugac 1976, 88], ce paragraphe ne faisait pas partie de la version primitive de *Zahlen*. Son rajout répond à l'idée que si des ensembles infinis existent dans le monde idéel, alors ils sont non contradictoires. Ainsi Dedekind répond à Keferstein, qui lui a reproché sa « preuve manquée », que « sans preuve logique d'existence on ne saurait décider si le concept d'un tel système [simplement infini] ne contient pas éventuellement de contradictions internes » [Dedekind 2008, 308]. Mais, en fait, le soubassement de la démarche de Dedekind est sa croyance en la puissance de l'esprit humain à créer des concepts ou objets de pensée [*Gedankendinge*] à partir d'objets plus simples. On pourra également consulter [Klev 2018].

36. Dedekind cite, en effet, le §13 des *Paradoxes de l'infini* dans la note **), p. 17 de l'édition originale de *Zahlen* voir [Dedekind 2008, 174].

la philosophie pure. Car il pense, comme Fichte, que toute philosophie est métaphysique.

Vuillemin retrace donc, en reprenant les analyses données par Gueroult dans [Gueroult 1953, 1955], les étapes de la démonstration par Descartes de l'existence de Dieu. Ce qui retient surtout l'attention est l'argument par lequel Vuillemin soutient que le *Cogito* a une structure de chaîne de Dedekind [37], au sens où je peux réitérer sur le *Cogito ergo sum* lui-même l'acte de réflexion qui m'a une première fois révélé la certitude de mon existence, puis réitérer sur cet acte un nouvel acte et ainsi de suite. Si bien que le *Cogito* me livre à la fois la certitude que j'existe – certitude que la chaîne ne me donne pas – et la conscience d'un pouvoir opératoire indéfini, lequel a une structure de chaîne. « La preuve de Dedekind repose sur la connexion des deux » [PA2, 302'], ce qui signifie que le canevas philosophique de cette preuve se trouve dans le *Cogito ergo sum*. Suit un démontage de cette preuve, difficile à suivre. Nous tâchons d'en exposer un schéma au plus près du raisonnement de Vuillemin.

1. Le *Cogito* délivre une certitude existentielle, donc « il est normal de l'utiliser pour prouver une existence » [PA2, 302c].
2. En fait, le *Cogito* apporte *à la fois* une certitude existentielle et une instanciation « objective » de la chaîne : « C'est objectivement que nous rencontrons une chaîne qui est le *Cogito* » [PA2, 302c].
3. En revanche, le concept de chaîne pourrait être défini dans un cadre intuitionniste comme correspondance entre deux ensembles infinis au sens d'« ensembles inépuisables » ; il n'est pas nécessaire qu'il soit fondé sur des ensembles infinis actuellement donnés dans leur totalité, comme c'est le cas chez Dedekind.
4. Alors, « rien n'interdit de recevoir l'idée de chaîne, sans en conclure, comme le fait Dedekind, l'existence de l'infini actuel » [PA2, 302d].
5. Donc, en ce qui concerne l'existence de l'infini actuel, le raisonnement fondé sur la chaîne n'est pas, en lui-même, conclusif. En revanche,

   > Le *Cogito* est par lui-même, et sans le secours d'aucun principe, la preuve de l'existence de l'infini actuel [38].

   Ici nous rencontrons une difficulté. En effet, si la chaîne ne conduit pas à l'infini actuel, comment le *Cogito*, qui équivaut à existence + pouvoir indéfini ayant structure de chaîne, conduirait-il à l'infini actuel ?
6. Quoi qu'il en soit, selon Vuillemin, la chaîne a un degré d'*évidence* moindre que le *Cogito ergo sum*. Explication :

37. C'est ici le troisième point témoin de la présence inaperçue de l'actif cartésien dans nos démarches actuelles. Descartes a bien sonné le commencement de la mathématique et de la philosophie modernes : la seconde règle de son *Discours de la Méthode* se trouve à l'œuvre dans l'Algèbre structurale, sa notion de série contient déjà en puissance celle de chaîne de Dedekind, et son *Cogito ergo sum* déployait déjà une structure de chaîne.

38. « *Cogito, ergo infinitum actuale est* » [PA2, 302'].

> Le *Cogito ergo sum* est une évidence qui relève de l'entendement. La preuve de Dedekind est une décision de la volonté. [PA2, 302d]

En note Vuillemin commente que c'est là le sens philosophique quand on passe de Descartes à Fichte :

> Chez Descartes, l'intuition intellectuelle est une évidence de la connaissance : elle porte sur des *réalités* qui deviennent des idées que nous apercevons. Chez Fichte, l'intuition intellectuelle est une activité [*Tathandlung*], et, à ce titre, elle échappe à la connaissance proprement dite pour appartenir déjà aux « catégories » de la volonté. [PA2, 302d, nous soulignons]

Ce commentaire est évidemment une réflexion philosophique remarquable, mais à distance du texte de Dedekind, qui, en particulier, n'en appelle pas à l'intuition.

Il faut bien voir que si « le *Cogito* est par lui-même, et sans le secours d'aucun principe, la preuve de l'existence de l'infini actuel », il est alors par lui-même la preuve, dans la perspective cartésienne, de l'existence du seul infini actuel concevable, Dieu, l'infini mathématique n'étant qu'un indéfini ou, comme on dit aussi, syncatégorématique. À son insu, Dedekind aurait donc livré dans les limites de la raison pure [39], sans recours ni à l'idée d'immensité ou de perfection divine, ni au principe métaphysique de causalité qui veut qu'il y ait au moins autant de réalité dans la cause que dans l'effet [PA1, 26], et grâce seulement à la représentation semblable [*ähnliche Abbildung*] et au concept de chaîne, la matrice mathématique, *objectivement instanciée par le Cogito ergo sum*, d'une preuve de l'existence de Dieu. Dedekind aurait apporté à Descartes ce qui lui manquait : l'analyse mathématique de l'infini actuel.

Mais l'homme de Descartes n'a un accès direct qu'à de l'indéfini. Où trouver une fenêtre entrouverte sur l'infini ? Le mouvement de sa conscience serait-il le témoin et le reflet (l'image) en lui d'une réalité en soi, hors de lui, à la fois « son principe et son but » ? Vuillemin pose la question, et n'y répond pas explicitement [PA2, 302']. On peut supposer, cependant, que sa réponse serait de type cartésien, c'est-à-dire affirmative.

Vuillemin analyse la preuve de Dedekind avec les instruments de Descartes. Que peut-on dire si on s'en tient à ceux qu'utilise Dedekind ?

39. C'est pourquoi Vuillemin juge que la preuve de Dedekind est « entièrement compatible avec une philosophie critique », pour peu que celle-ci soit libérée du principe de la possibilité de l'expérience [PA2, 302c]. Il faut rappeler que Vuillemin soutient que « les preuves d'impossibilité ne sauraient valablement s'appuyer sur un fait, fût-ce celui de l'expérience possible, puisque rien ne permet *a priori* de penser que la preuve pourrait avoir lieu sans qu'on invoque un tel fait ». Parmi les preuves d'impossibilité figure celle de la preuve ontologique établie par Kant [Vuillemin 1962, 474]. En récusant le principe de la possibilité de l'expérience, Dedekind aurait permis l'effondrement de l'argument kantien.

Tandis que le *Cogito* noue une certitude *existentielle* (« *Cogito ergo sum* ») à *la conscience* d'un pouvoir indéfini, la preuve de Dedekind repose sur la confiance en notre pouvoir de penser, sans que ce pouvoir n'atteste une existence subjective, ni ne soit intérieurement doublé de conscience. Le pouvoir de penser selon Dedekind est tourné vers son objet, les concepts qu'il crée, non vers la conscience du sujet pensant. Nous avons vu que Vuillemin fait appel, outre à Descartes, à une pensée Critique distincte de celle de Kant, mais de même option intuitionniste [PA2, 302d, en particulier 2e alinéa]. Son argument consiste à dire que la chaîne déroule un indéfini et ne débouche donc pas forcément sur l'infini actuel. Extrait de son contexte et isolé, ce segment ne pointe en effet qu'un indéfini. Mais la notion de chaîne est définie comme partie d'un ensemble infini au sens de Dedekind, et un ensemble infini au sens de Dedekind est celui qui est susceptible d'une représentation semblable (une injection) *sur* une de ses parties propres. Ce segment de la preuve est fondamental. Voudrait-on considérer qu'il est seulement l'habillage mathématique d'une option préalable et serait donc, du point de vue philosophique, non contraignant ? Son degré d'évidence philosophique serait même inférieur à celui du *Cogito ergo sum* ; s'agissant de démontrer une existence, celui-ci réussit plus sûrement que la preuve fondée sur celle-là. Or la construction rationnelle qu'est la chaîne ignore précisément l'évidence intuitive et tire, dans le fait, sa force de son insertion dans un tissu mathématique ensembliste auquel elle s'ajuste. Et si la faille logique de la preuve a conduit à son remplacement pur et simple par l'axiome de Zermelo, il faut rappeler que celui-ci ne remet pas en question la validité de la définition des ensembles infinis mais seulement la preuve d'existence de tels ensembles.

On retournera donc le procédé à Vuillemin lui-même : il lit Dedekind avec les yeux de Descartes, assumant ainsi une option intuitionniste préalable et prêtant à l'attitude du mathématicien une dimension conscientielle qu'elle n'avait aucunement et une dimension constructiviste à laquelle Dedekind s'opposa explicitement. D'une part, le recours au moi de la proposition 66 de *Zahlen* n'est pas un recours à la conscience, et la pensée de la pensée n'est pas en même temps chez Dedekind conscience de la pensée. La réflexivité, mieux l'itérabilité d'un procédé, eût-il pour contenu un objet idéel [*ein Gedankending*], n'est pas le redoublement de la réflexion [40]. D'autre part, la chaîne est définie par une représentation d'un ensemble infini *catégorématique* dans lui-même. Comme le reconnaît Vuillemin lui-même ailleurs [41], dans un contexte où il ne traite ni du *Cogito* ni de la preuve d'existence de l'infini actuel/Dieu, le propos de Dedekind était de rejeter l'intuition des

40. Sur la distinction nécessaire entre « réflexivité » et « réflexion » voir [Benis-Sinaceur à paraître].

41. Voir le texte de [PA2, 304], cité plus haut : « bien que dans la Préface de la première édition, Dedekind ait regardé l'Arithmétique comme une partie de la Logique, Frege ne s'est pas trompé sur le sens de cette déclaration ; elle tendait seulement à réfuter les intuitionnistes qui veulent fonder le nombre sur la représentation du temps ou de l'espace. »

intuitionnistes de type kantien et de détrôner l'empire des constructivistes, défenseurs de l'infini syncatégorématique.

Ainsi, s'il n'est certainement pas suffisant d'assumer les présupposés d'un auteur pour lire fructueusement son texte, et y déceler des implications qu'il ne soupçonnait pas, il n'est pas non plus nécessaire de lui imposer une grille de lecture si contraire.

Poursuivons le jeu subtil de détective philosophique auquel Vuillemin excelle. Voilà qu'il nous livre en Dedekind un homologue mathématique de Fichte. Nous ne serons pas étonnées car nous savons déjà par le tome I de *La Philosophie de l'Algèbre* que Fichte est la figure philosophique de la mathématique libertaire et créatrice du XIXe siècle. En effet, Vuillemin avait souligné, dans le tome I de *La Philosophie de l'Algèbre*, que Fichte avait, contre l'esprit du kantisme, rapproché philosophie et mathématiques. Il avait consacré de très nombreuses pages à établir et nuancer un parallèle entre les opérations de l'axiomatique des groupes et les déductions de Fichte à partir du « Je » et de sa négation [Vuillemin 1962, 273–283]. Et l'accent était mis sur l'objectif présumé de Fichte :

> Ayant restitué à l'intuition intellectuelle, convenablement amendée, sa place de premier principe philosophique, il assujettira toute la Métaphysique à la notion d'*opération*, même s'il la conçoit encore mêlée d'éléments extrinsèques en mathématiques. Sa doctrine marque l'aboutissement logique d'une évolution qui a détaché peu à peu l'idée de son contexte représentatif et théologique, pour la réduire à un *acte de l'intelligence*. [Vuillemin 1962, 59, nous soulignons]

La tendance de certains mathématiciens du XIXe siècle, Bolzano ou Dedekind entre autres, à se défaire du principe de la possibilité de l'expérience revient en effet à mettre tout le poids de la création sur les actes de l'intelligence. D'où l'hypothèse de leur affiliation philosophique supposée à Fichte.

Dans le tome II de *La Philosophie de l'Algèbre*, les principes de la *Wissenschaftslehre* fichtéenne servent à compléter la comparaison, commencée avec le Cogito et la chaîne, entre mathématiques et philosophie, à préciser leur concours, et à décrypter les présupposés inapparents de l'épistémologie présumée convenir à la mathématique de Dedekind. Explicitons par une citation le point de vue selon lequel Vuillemin range Descartes et Fichte du même côté : « dans la mesure où il recourt à une intuition intellectuelle, Fichte retourne à l'inspiration cartésienne » [Vuillemin 1960, 125, note 1] [42].

42. Plus loin, il écrit : « Dans le système de Descartes, fondé sur l'ordre des raisons, il y a analogie entre les Mathématiques et la Métaphysique. Dans le système critique, fondé sur la possibilité de l'expérience, il y a hétérogénéité radicale entre la méthode mathématique qui procède par construction de concepts et la méthode philosophique qui procède par simples concepts. Fichte, le premier, reviendra à Descartes : la *Doctrine de la Science*, par le rôle qu'elle assigne à l'intuition

Le problème est que toute l'œuvre de Dedekind promeut le concept pur contre l'intuition, qu'elle soit sensible ou intellectuelle. Pourtant, Vuillemin voit, en la preuve de Dedekind, non pas une évidence de *l'entendement* comme l'est le *Cogito* mais « une décision de la volonté », dans une perspective de type cartésien, mise en valeur par Fichte (et illustrée ultérieurement par Schopenhauer). Là-dessus pas d'autre éclaircissement. Le renvoi discret à Fichte s'interrompt brutalement. Ce silence vaut sagesse. Car, encore une fois, les analogies qu'il décèle entre des thèmes de la *Wissenschaftslehre* et le positionnement de Dedekind ou de Cantor, Vuillemin en assume la responsabilité. Il ne dit pas que l'activité créatrice de la pensée chez Dedekind, quand celui-ci affirme, par exemple, que « les nombres sont de libres créations de l'esprit humain », renvoie à la *Tathandlung*, pur acte d'autoposition du Moi de Fichte. Contrairement à ce que certains ont pu penser ou écrire, Vuillemin ne dit pas non plus que la proposition 66 est d'inspiration fichtéenne. Il n'établit pas de lien entre le principe de la *Wissenschaftslehre*, le Moi suprême et absolu [*das Ich* ou *absolutes Subjekt*], réplique du sujet transcendantal kantien, distinct donc du moi d'un sujet individuel particulier et condition de possibilité de la conscience, et le moi propre du sujet mathématicien de Dedekind, « *mein eigenes Ich* ». Son esprit acéré évite ces amalgames. Cependant, invoquer « une décision de la volonté », c'est suggérer que cette proposition 66, si « ingénieuse » qu'elle soit, n'est justifiable en philosophie pure qu'au plan métaphysique, le plan où le philosophe détecte les motifs rationnels des choix scientifiques. Et surtout c'est la placer dans la tradition des philosophies de la conscience, ce qui l'éclaire d'un jour imprévu. Sans en appeler à la conscience et en récusant l'intuition, Dedekind serait tout de même héritier, en philosophie, de l'idéalisme absolu. Or lui-même ne se reconnaissait pas en l'idéalisme absolu. Bien au contraire, il le moquait, si l'on en croit l'évocation ironique qu'il fait du principe fondamental de Fichte : « *Das Ich setzt sich selbst* », dans une lettre à sa sœur datée du 11 juin 1852 [43]. Mais peu importe, puisque Vuillemin porte son intérêt principal à la philosophie pure plutôt qu'à l'histoire [Vuillemin 1962, 3], et que, par suite, ses rapprochements extirpent des filiations conceptuelles qui n'ont rien à voir avec la réalité historique. S'il n'est pas consenti par Dedekind, le rapport à Fichte est établi par Vuillemin. Cela est sans doute étrange mais pas totalement inattendu de la part de Vuillemin, qui n'a pas

---

intellectuelle, est construite, comme les *Méditations métaphysiques*, sur l'analogie de la théorie mathématique des proportions. Lorsque Fichte oppose la méthode génétique à la méthode descriptive de Kant, il rétablit en réalité sous une forme nouvelle le principe cartésien de causalité » [Vuillemin 1960, 126–127].

43. Cette lettre est reproduite dans [Dugac 1976, 156–157]. Dedekind a une connaissance de seconde main de la philosophie de Fichte. Au semestre d'été de l'année 1852, à l'université de Göttingen, il a suivi, en effet, un cours professé par Hermann Lotze sur l'histoire de la philosophie allemande depuis Kant. Les notes prises par lui comportent 5 chapitres, consacrés successivement à Kant, Fichte, Schelling, Hegel et Herbart. Dans la lettre à sa sœur, qui date précisément de cette période, il plaisante sur l'acuité d'esprit de celui qui de l'Axiome « Le Moi se pose lui-même » déduit tout l'ordre du monde.

rangé Dedekind parmi les logicistes, mais a seulement montré la logique qui sous-entendait son œuvre arithmétique, et la métaphysique présumée qui, en sous-main, la commandait.

Après tout, vu d'en haut, de très haut, c'est une lecture possible. L'épistémologie induite de l'idée fondamentale de la création des concepts n'est ni réaliste ni intuitionniste : l'intuition, que ces deux options mobilisent, différemment certes, n'y joue aucun rôle. Idéaliste donc ? Sans doute. Mais il ne saurait être question ni d'un idéalisme transcendantal ni d'un idéalisme absolu. Dedekind s'est explicitement séparé de Kant et sur Fichte il ne nous a laissé qu'une plaisanterie privée.

4 Conclusion

La lecture de PA2 pose le problème du rapport de la philosophie de la science à l'histoire de la science. La fécondation de l'une par l'autre est non seulement possible mais souhaitable. Cependant elle est semée d'embûches de part et d'autre. On souhaiterait plus de prudence aux historiens qui utilisent, à l'occasion, des concepts philosophiques vulgarisés et hors contexte, comme transcendantalisme. Mais on aimerait plus d'égard pour les spécificités historiques de la part des philosophes. Ici, nous avons vu quels aperçus proprement inouïs apporte une lecture à la fois transversale et détachée des données historiques. Exemples de choix : le rapprochement entre la deuxième règle du *Discours de la Méthode* de Descartes et le théorème de Wedderburn ou entre le *Cogito* et la « preuve » de Dedekind de l'existence d'ensembles simplement infinis. Nous avons ainsi relevé des points d'interprétation philosophique de concepts ou méthodes mathématiques qui nous ont semblé sujets à discussion. Bien plus, il nous a paru que la connaissance du contexte historique de ces concepts ou méthodes conduisait à considérer avec circonspection leur interprétation philosophique. C'est donc que demeure parfois un écart significatif entre mathématique et philosophie et entre un moment de l'histoire et un autre. Par exemple, lire Dedekind en lui prêtant l'ampleur de Birkhoff est avantageux mais contrarie l'ordre historique et induit une interprétation philosophique à notre avis peu ajustée. De même lire Dedekind en cartésien dévoile une fibre conceptuelle fascinante mais voudrait la considération des contextes respectifs. En fait, ces interprétations de Vuillemin, les plus séduisantes et suggestives comme les plus problématiques, nous ont informées davantage sur les idées de Vuillemin lui-même que sur les idées des auteurs concernés. Et ainsi nous avons appris à mieux le connaître et à parcourir, en le suivant, des champs entiers de connaissances.

Bibliographie

Abel, Niels Henrik [1826], Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré, *Journal de Crelle*, 1, 65–84, doi : 10.1515/crll.1826.1.65, repr. in Sylow, L. & Lie, S. (ed.), *Œuvres complètes* de Niels Henrik Abel, I (2e éd., 1881), Grøndahl & Søn.

Artin, Emil [1927], Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 5(1), 251–260, doi : 10.1007/BF02952526.

—— [1950], The influence of J. H. M. Wedderburn on the development of modern algebra, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 56(1), 65–72, doi : 10.1090/S0002-9904-1950-09346-X.

Bell, Eric T. [1940], *The Development of Mathematics*, New York : Mc Graw-Hill.

—— [1945], *The Development of Mathematics*, New York : Mc Graw-Hill, 2e éd.

Belna, Jean-Pierre [1996], *La Notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege*, Paris : Vrin.

Benis-Sinaceur, Hourya [1991], *Corps et modèles. Essai sur l'histoire de l'algèbre réelle*, Paris : Vrin, 1999.

—— [2017], Dedekind's and Frege's views on logic, *Mathematische Semesterberichte*, 64, 187–198, doi : 10.1007/s00591-017-0198-z.

—— [à paraître], Axiomatique et philosophie : Kant, Hilbert, Vuillemin, dans *L'Épistémologie du dedans. Mélanges en l'honneur de Hourya Benis-Sinaceur*, édité par E. Haffner & D. Rabouin, Paris : Classiques Garnier.

Benis-Sinaceur, Hourya, Panza, Marco *et al.* [2015], *Functions and Generality of Logic. Reflections on Dedekind's and Frege's Logicisms*, Cham : Springer, doi : 10.1007/978-3-319-17109-8.

Boole, George [1992], *Les Lois de la pensée*, Paris : Vrin, trad. fr. par S. B. Diagne, titre original *Laws of Thought*.

Cavaillès, Jean [1938a], *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles*, Paris : Hermann, reproduit dans [Cavaillès 1962, 25–178].

—— [1938b], *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques*, Paris : Hermann, 1981.

—— [1947], *Sur la logique et la théorie de la science*, Paris : Vrin, 1960.

—— [1962], *Philosophie mathématique*, Paris : Hermann.

DEDEKIND, Richard [1856-1858], Eine Vorlesung über Algebra, dans *Richard Dedekind 1831-1931. Eine Würdigung zu seinem 150. Geburtstag*, édité par W. Scharlau, Braunschweig : Vieweg und Sohn, 59–108.

—— [1872], *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig : Vieweg und Sohn, trad. fr. dans [Dedekind 2008, 57–90], cité d'après [Dedekind 2008].

—— [1888], *Was sind und was sollen die Zahlen ?*, Braunschweig : Vieweg und Sohn, trad. fr. dans [Dedekind 2008, 131–220], cité d'après [Dedekind 2008].

—— [1894a], Zur Theorie der Ideale, *Nachr. königl. Ges. Wiss. Göttingen*, Math.-phys. Kl., 1, 272–277, cité d'après [Dedekind 1930-1932, II, 43–49].

—— [1894b], Über die Composition der binären quadratische Formen, Supplement X, dans *Vorlesungen über Zahlentheorie*, édité par J. P. G. Lejeune-Dirichlet, Braunschweig : Vieweg und Sohn, 4e éd., 1–222.

—— [1897], Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Teiler, dans *Festschrift der Technischen Hochschule zu Braunschweig*, Braunschweig : Meyer, 1–40, cité d'après [Dedekind 1930-1932, II, 103–147].

—— [1900], Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe, *Mathematische Annalen*, 53, 371–403, doi : 10.1007/BF01448979, cité d'après [Dedekind 1930-1932, II, 236–271].

—— [1930-1932], *Gesammelte mathematische Werke*, Braunschweig : Vieweg und Sohn, sous la dir. de R. Fricke, E. Noether et Ø. F. Ore.

—— [2008], *La Création des nombres*, Paris : Vrin, textes traduits, annotés et présentés par Hourya Benis-Sinaceur.

DEDEKIND, Richard & WEBER, Heinrich [2019], *Théorie des fonctions algébriques d'une variable complexe*, Paris : Vrin, trad. fr. commentée et introduite par E. Haffner.

DEMOPOULOS, William & CLARK, Peter [2005], The logicism of Frege, Dedekind, and Russell, dans *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, édité par S. Shapiro, Oxford : Oxford University Press, 106–202.

DESCARTES, René [1628], Règles pour la direction de l'esprit, dans *Œuvres et lettres*, édité par A. Bridoux, Paris : Bibliothèque de la Pléiade, 40, 1937.

DETLEFSEN, Michael [2011], Dedekind against intuition : Rigor, scope and the motives of his logicism, dans *Logic and Knowledge*, édité par C. Cellucci, E. Grosholz & E. Ippoliti, Cambridge : Cambridge Scholars Publishing, 205–217.

DUGAC, Pierre [1976], *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Paris : Vrin.

FERREIRÓS, José [1999], *Labyrinth of Thought*, Bâle : Birkhäuser, 2e éd., 2007.

—— [à paraître], On Dedekind's logicism, dans *Analytic Philosophy and theFoundations of Mathematics*, édité par A. Arana & C. Alvarez, Londres : Palgrave.

FREGE, Gottlob [1893], *Grundgesetze der Arithmetik*, t. I, Iena : Pohle.

GUEROULT, Martial [1953], *Descartes selon l'ordre des raisons*, Paris : Aubier, 2 vol.

—— [1955], *Nouvelles réflexions sur la preuve ontologique de Descartes*, Paris : Vrin.

HAFFNER, Emmylou [à paraître], Duality as a guiding light in the genesis of Dedekind's *Dualgruppen*, dans *Duality in 19th and 20th century mathematical thinking*, édité par R. Krömer, E. Haffner & K. Volkert, Bâle : Birkhäuser.

HAFFNER, Emmylou & SCHLIMM, Dirk [à paraître], Dedekind et la création du continu arithmétique, dans *L'Épistémologie du dedans. Mélanges en l'honneur de Hourya Benis-Sinaceur*, édité par E. Haffner & D. Rabouin, Paris : Classiques Garnier.

KANT, Immanuel [1781,1787], *Kritik der reinen Vernunft*, Hambourg : Felix Meiner, 1956, trad. fr. A. Renaut, Paris : Aubier, 1997.

KITCHER, Philip [1986], Frege, Dedekind, and the Philosophy of Mathematics, dans *Frege Synthesized : Essays on the Philosophical and Foundational Work of Gottlob Frege*, édité par L. Haaparanta & J. Hintikka, Dordrecht : Springer, 299–343, doi : 10.1007/978-94-009-4552-4_11.

KLEV, Ansten [2018], A road map of Dedekind's Theorem 66, *HOPOS : The Journal of the International Society for the History of Philosophy of Science*, 8(2), 241–277, doi : 10.1086/698660.

MARTIN-LÖF, Per [1987], Truth of a proposition, evidence of a judgement, validity of a proof, *Synthese*, 73(3), 407–420, doi : 10.1007/BF00484985.

McCarty, David Charles [1995], The mysteries of Richard Dedekind, dans *From Dedekind to Gödel : Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*, édité par J. Hintikka, Dordrecht : Springer, 53–96, doi : 10.1007/978-94-015-8478-4_4.

Russell, Bertrand [1903], *The Principles of Mathematics*, t. I, Cambridge : Cambridge University Press.

Russell, Bertrand & Whitehead, Alfred North [1910-1913], *Principia Mathematica*, t. I, II, III, Cambridge : Cambridge University Press.

Schröder, Ernst [1873], *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende*, Leipzig : B. G. Teubner.

—— [1890-1905], *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, t. I, II, III, Leipzig : B. G. Teubner.

Stein, Howard [1988], Logos, logic, and logistiké : Some philosophical remarks on nineteenth-century transformation of mathematics, dans *History and Philosophy of Modern Mathematics*, édité par W. Aspray & Ph. Kitcher, Minneapolis : University of Minnesota Press, 238–259.

Tait, William W. [1997], Frege versus Cantor and Dedekind : On the concept of number, dans *Early Analytic Philosophy*, édité par W. W. Tait, Chicago : The Open court publishing company, 213–248.

van der Waerden, Bartel Leendert [1930], *Moderne Algebra*, Berlin : Springer.

Vuillemin, Jules [1960], *Mathématiques et Métaphysique chez Descartes*, Epiméthée, Paris : PUF.

—— [1962], *La Philosophie de l'algèbre. Tome premier. Recherches sur quelques concepts et méthodes de l'algèbre moderne*, Épiméthée, Paris : PUF.

—— [1971], *Le Dieu d'Anselme et Les Apparences de la raison*, Paris : Aubier.

—— [1984], *Nécessité ou contingence. L'aporie de Diodore et les systèmes philosophiques*, Paris : Minuit ; Fondation Singer Polignac.

—— [1986], *What are Philosophical Systems ?*, Cambridge ; London ; New York : Cambridge University Press.

—— [1998-1999], La méthode platonicienne de division et ses modèles mathématiques, *Philosophia Scientiæ*, 3(3), 1–62, www.numdam.org/article/PHSC_1998-1999___3_3_1_0.pdf.

—— [2001], Formalisme et réflexion philosophique, *Bulletin de la Société française de philosophie*, 94(3), 1–44.

—— [inédit], *La Philosophie de l'algèbre.* II. Structure, infini, ordre, non publié.

WEDDERBURN, Joseph [1908], On hypercomplex numbers, *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2–6(1), 77–118, doi : 10.1112/plms/s2-6.1.77.

ZERMELO, Ernst [1908], Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I, *Mathematische Annalen*, 65(2), 261–281, doi : 10.1007/BF01449999.