
Éclairer les mathématiques par les exemples ?

Highlighting mathematics through examples?

Alain Kuzniak, Marc Rogalski et Laurent Vivier



Édition électronique

URL : <https://journals.openedition.org/ree/6245>

DOI : 10.4000/ree.6245

ISSN : 1954-3077

Éditeur

Université de Nantes

Référence électronique

Alain Kuzniak, Marc Rogalski et Laurent Vivier, « Éclairer les mathématiques par les exemples ? », *Recherches en éducation* [En ligne], 27 | 2016, mis en ligne le 01 octobre 2016, consulté le 05 juin 2021. URL : <http://journals.openedition.org/ree/6245> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/ree.6245>



Recherches en éducation est mise à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International.

Éclairer les mathématiques par les exemples ?

Alain Kuzniak, Marc Rogalski & Laurent Vivier¹

Résumé

Nous exposons tout d'abord le lien étroit qu'entretiennent mathématiques et exemples d'un point de vue des fondements mêmes de l'activité mathématique. Puis, nous présentons rapidement des tentatives didactiques pour développer un enseignement basé sur l'usage raisonné des exemples. Cette première approche s'appuie sur six entretiens conduits avec des enseignants-chercheurs avec lesquels nous abordons les différents types d'usages des exemples dans l'enseignement supérieur français. Ceci nous conduit à une conclusion quelque peu paradoxale. En effet, si les exemples sont reconnus comme un élément essentiel nécessaire à la réalisation d'un travail mathématique efficace, y compris dans l'enseignement, leur usage reste minoré dans les pratiques des enseignants de mathématiques du supérieur, notamment dans le travail en responsabilité des étudiants. Nous interprétons cela en termes de problématisation, perçue comme essentielle pour comprendre les enjeux des mathématiques, et d'adidacticité, pour que les connaissances émergent du travail en responsabilité des étudiants.

Cet article présente une première étude exploratoire sur l'usage des exemples dans l'enseignement des mathématiques à l'université. Basée sur six entretiens avec des enseignants-chercheurs, l'étude s'inscrit dans une perspective comparative développée en commun avec des collègues d'autres disciplines (physique, chimie, géographie, histoire), où un travail analogue a eu lieu. En effet, les questions proposées dans l'entretien sont communes aux différentes recherches. Par contre, la méthodologie suivie pour exploiter les entretiens est spécifique à chaque discipline. Pour ce qui est des mathématiques, les analyses s'appuient notamment sur une étude préalable menée par les auteurs sur la notion d'exemples et ses usages dans l'enseignement des mathématiques (Khanfour-Armaïe & Vivier, 2013).

Pour illustrer la spécificité supposée des mathématiques par rapport aux autres disciplines en matière d'usage d'exemples et d'études de cas dans l'enseignement supérieur, nous présentons tout d'abord le lien étroit qu'entretiennent mathématiques et exemples d'un point de vue épistémologique. Puis, nous exposons quelques tentatives didactiques, essentiellement effectuées dans l'enseignement secondaire, pour développer un enseignement basé sur l'usage raisonné des exemples. Dans les deux dernières sections (3 et 4), nous abordons la question particulière de l'emploi des exemples dans l'enseignement des mathématiques dans le supérieur. Dans la section 3, après avoir explicité notre méthodologie, nous illustrons, à l'aide de verbatim, les différents usages des exemples dans des cours et des travaux dirigés (TD), tels que des enseignants-chercheurs ont pu les exprimer dans les entretiens. Il est ainsi possible de confronter notre analyse épistémologique *a priori* sur le rôle des exemples et ce qu'on peut en induire pour des approches didactiques, avec ce que disent ces enseignants de mathématiques universitaires sur l'usage possible des exemples dans l'enseignement. Ceci nous conduit à une conclusion quelque peu paradoxale. En effet, si les exemples sont reconnus comme un élément essentiel et nécessaire à la réalisation d'un travail mathématique efficace, leur usage reste minoré dans la pratique des enseignants de mathématiques qui privilégient les grandes constructions théoriques avec leurs théorèmes emblématiques. Dans la section 4, en nous appuyant notamment sur des éléments de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1986), nous nous intéressons à ce que révèlent ces entretiens sur l'enseignement des mathématiques à l'université. Il nous est ainsi possible de mettre en évidence deux

¹ Alain Kuzniak, professeur, Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR), Université Paris Diderot. Marc Rogalski, professeur émérite à l'université de Lille 1 et LDAR. Laurent Vivier, maître de conférences, LDAR et Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier (I3M), Université de Montpellier.

caractéristiques de cet enseignement : l'absence d'adidacticité et la sensibilité à la question de la problématisation.

1. Exemples et mathématiques : divers points de vue

Nous commençons cet article par une mise au point sur la question générale de la place des exemples dans le travail mathématique. Il nous semble qu'en effet loin d'être un élément contingent, le travail sur et avec les exemples est constitutif de l'activité mathématique. En outre, cette première étude, préalable à la présente étude exploratoire, nous aidera à analyser les entretiens avec les enseignants-chercheurs (voir la section 3).

La place des exemples peut être envisagée suivant différentes perspectives : épistémologique, historique, psychologique et bien sûr didactique.

Une première perspective épistémologique n'est qu'une autre manière de dire le lien étroit qui va exister dans la constitution des mathématiques entre l'usage des exemples et contre-exemples et les modes de validation en mathématiques. Dans cette optique, le travail d'Imre Lakatos (1976) sur « Preuves et réfutations » occupe une place centrale dans la réflexion épistémologique sur certains types de construction des mathématiques. Dans son approche, les exemples acquièrent une fonction créatrice dans le processus même de l'invention mathématique à travers une dialectique des preuves et des réfutations qui s'appuie sur les exemples et les contre-exemples. Les contre-exemples ne sont plus vécus comme une « catastrophe dont la conséquence est l'abandon pur et simple des positions conquises lors de la résolution du problème. » (Balacheff, 1987, p.166), mais ils pourront avoir des conséquences positives sur la construction de la conjecture et de la preuve ou plus largement sur les connaissances mises en œuvre. Nous verrons plus loin les conséquences didactiques de cette approche.

Dans d'autres modes de fonctionnement des mathématiques, plusieurs exemples de théories déjà connues servent d'appui à une approche par unification à un niveau supérieur de généralité, de formalisme et d'abstraction. Cette idée de généralisation à partir d'exemples est souvent à l'œuvre dans l'histoire des mathématiques, ce qui est généralisé pouvant être très variable : des objets, des relations entre objets, des types de calculs, des formules... Cette approche permet de mieux comprendre « ce qui a marché » et de résoudre de nouveaux problèmes.

Assumant complètement l'idée que l'activité mathématique se manifeste pleinement dans la résolution de problème, le mathématicien George Polya (1957) a développé ce qu'il qualifie d'approche heuristique de l'enseignement. Pour cela, il exhibe certaines méthodes générales pour résoudre les problèmes qui s'appuient sur l'idée d'exemple historique. Toutefois, cette approche heuristique reste trop vague, trop générale, et Alan Schoenfeld (1978, 1980) soutient qu'il faut y substituer, notamment pour les activités de résolution de problème, une notion de « méthode » valable dans un domaine précis des mathématiques.

Une question bien particulière aux mathématiques, au moins dans la façon de la poser, renvoie à la nature du lien entre un exemple et la classe d'objets à laquelle il appartient, en particulier dans les activités de communication. D'un point de vue mathématique, il s'agit de relier une classe d'équivalence avec un représentant de cette classe. D'un point de vue logique, tous les représentants se valent mais du point de vue de la compréhension et de la notion, il en va tout autrement et il y a un intérêt cognitif à choisir un objet le plus « quelconque » possible, autrement dit n'ayant aucune propriété particulière que ne partage pas le reste des éléments de la classe (Gauvrit, 2013). Cet exemple « quelconque » pourra renvoyer à l'idée d'exemple prototypique. Cet exemple sera souvent celui choisi dans les pratiques pédagogiques d'ostension où l'enseignant propose un exemple pour éviter de donner une définition d'un objet relativement complexe.

2. Quelques études didactiques sur la notion d'exemple

Il s'agit de retenir ici des points qui ont été bien identifiés par les recherches dans le domaine² et que nous pourrions par la suite utiliser pour l'analyse des entretiens que nous avons effectués avec des enseignants-chercheurs dans l'enseignement supérieur. Dans leur étude, Paul Goldenberg et John Mason (2008) s'appliquent à dégager les différents usages des exemples dans l'enseignement des mathématiques. Le cas le plus commun, et qui n'est pas spécifique aux mathématiques, concerne le jeu entre abstraction et monde empirique. À partir d'exemples, il est possible de généraliser et de définir certains objets ou concepts et, dans le sens inverse, un exemple permet de donner du sens et de la substance à des définitions abstraites. Ainsi Paul Goldenberg et John Mason (2008) insistent sur le fait que *voir un objet mathématique comme un exemple de quelque chose* est un acte fondamental dans la compréhension de la signification d'une notion mathématique. Il s'agit là d'un point qui peut intervenir de façon centrale dans l'enseignement.

De ce fait, un autre type d'étude sur les exemples s'inscrit délibérément dans une approche purement pédagogique avec l'idée de bâtir des dispositifs d'enseignement basés sur l'usage des exemples. Dans cette direction, une des réalisations les plus abouties est celle d'Espace d'exemples (Watson & Mason, 2005). Un Espace d'exemples est une collection d'exemples dans un sens très étendu intégrant des diagrammes et divers objets mathématiques, voire métamathématiques. Ainsi des preuves particulières peuvent être vues comme des exemples de démonstrations, des définitions peuvent être des exemples du processus de définition, etc. Cette notion est liée à une vision constructiviste de l'apprentissage des mathématiques en relation avec le niveau de l'apprenant. Elle est associée à celle de *Learner Generated Example* qui semble essentiel aux auteurs dans leur approche pédagogique qui construit les notions mathématiques à partir d'une structuration des exemples de la notion. On demande aux étudiants de produire un exemple avec un certain but. Cet exemple doit faire émerger dans un second temps la connaissance visée. Ainsi, il est demandé aux étudiants d'obtenir un entier dans un produit du type $(a+\sqrt{b})(c+\sqrt{d})$ afin de faire émerger la notion de conjugaison (Watson & Shipman, 2008).

La perception des mathématiques avancée par Imre Lakatos (1976) entre parfaitement en harmonie avec les attentes des chercheurs dans le domaine de l'enseignement des mathématiques qui souhaitent promouvoir dans cet enseignement une attitude plus active et plus constructive de la part des élèves. C'est ainsi que le modèle de Imre Lakatos a été décliné en didactique tout d'abord par Nicolas Balacheff (1987), l'un de ses traducteurs français. Il a également été finalisé par Ramón Marrades et Ángel Guttierrez (2001) dans un modèle rendant compte des différences entre preuve empirique et démonstration formelle en mathématiques. Dans ce cadre est introduite l'idée d'exemple générique qui est un représentant particulier de la classe sur lequel il est possible de faire le raisonnement général qui sera valide ensuite pour la classe entière.

Dans la littérature didactique, à côté des exemples et des contre-exemples on rencontre aussi, de manière plus originale, les non-exemples. Pour une propriété $P(x)$ donnée, un non-exemple est un exemple x qui ne vérifie pas la propriété : un carré n'est pas un triangle car il n'a pas trois côtés (ou trois angles). Les non-exemples permettent de jouer explicitement sur l'opposition entre les éléments possédant la propriété et ceux qui ne la possèdent pas. Il est ainsi possible de questionner les prototypes comme on peut le voir quand les élèves du primaire doivent classer des triangles et qu'ils commencent par rejeter les triangles qui n'ont pas, de manière prototypique, une base horizontale. Les non-exemples servent ainsi à définir les limites d'une définition ou bien du champ de validité d'une notion. Cette notion de non-exemple est parfois proche de celle des contre-exemples, qui sont des cas particuliers de non-exemples permettant d'invalider une conjecture portant sur une classe d'objets (avec un quantificateur universel).

² Pour un point plus détaillé sur cette question, voir Khanfour-Armale et Vivier (2013).

Dans une étude sur l'usage des exemples par des professeurs, *High school teachers*, Iris Zodik et Orit Zaslavsky (2008) notent deux grands types d'usage : les exemples planifiés et les exemples spontanés. Les premiers sont intégrés dans le cours (plan de cours, manuels) et les seconds vont apparaître comme une réponse à des interrogations ou comme des propositions des élèves. Les deux catégories d'exemples se répartissent également dans leur étude.

3. Notre étude sur l'enseignement supérieur français : premiers résultats

Dans cette section, nous précisons la méthodologie utilisée pour notre étude préliminaire, en particulier la grille d'analyse pour les entretiens effectués. Cela permettra de recenser les différents usages des exemples qui sont apparus dans les entretiens, certains étant spécifiques aux mathématiques.

L'analyse des résultats sera complétée à la section suivante où nous nous livrerons à une interprétation didactique de ce que disent les entretiens du rôle attribué par les enseignants aux étudiants dans la construction des savoirs en jeu.

■ Méthodologie

- *Grille d'analyse*

Dans cette étude exploratoire, nous n'utilisons pas de cadre d'analyse *a priori* dans le but de rester ouverts aux phénomènes didactiques qui pourraient émerger des entretiens. Néanmoins, nous n'avons pas un regard naïf sur le sujet. En particulier, nous appuyons notre réflexion sur le travail de deux ans d'un groupe de travail en didactique de la chimie, des mathématiques et de la physique sur la question des exemples (Khanfour-Armale & Vivier, 2013). Nous basons les analyses de cette section sur une typologie générale sur la notion d'exemple qui fait consensus (Michener, 1978).

Dans les études didactiques relatives aux exemples, les auteurs proposent une utilisation chronologique des exemples en phase avec la construction des notions mathématiques. C'est ainsi qu'on trouve régulièrement reprise la succession proposée par Edwina Rissland Michener (1978) : un exemple introductif pour motiver la notion, un exemple référentiel pour fonder l'intuition, un exemple générique comme modèle et enfin des contre-exemples pour percevoir les limites de la notion étudiée. Dans les entretiens que nous avons réalisés, ces différents types vont apparaître mais nous les avons regroupés dans plusieurs rubriques avec un ordre différent qui, comme on pourra le noter, ne renvoie pas à une progression du cours mais plutôt à une réflexion sur l'importance mathématique des exemples en question.

- *La population des entretiens*

Les professeurs interrogés sont tous des enseignants-chercheurs responsables de cours magistraux ou de cours-TD. Leurs parcours universitaires et professionnels sont homogènes et correspondent à la très large majorité des enseignants-chercheurs en mathématiques dans le supérieur. Ils n'ont en particulier jamais enseigné dans le secondaire et ont tous été étudiants dans des filières d'élite (Classes Préparatoires aux Grandes Écoles et/ou Écoles Normales Supérieures).

Cette étude exploratoire se base sur six entretiens d'enseignants-chercheurs nommés de EC1 à EC6 (les trois interviewers sont nommés I dans les extraits donnés). Cela nous permet d'identifier certains points saillants, des consensus, des absences qui pourront servir pour une étude ultérieure. Mais en aucun cas il ne s'agit d'un échantillon représentatif. Les collègues interviewés ont surtout été choisis pour leurs disponibilités et leurs proximités géographiques. En

particulier, il n'y a aucune femme et ils sont tous, hormis l'un d'eux, en poste en région parisienne.

Très souvent, pour cette population d'enseignants-chercheurs, le point de vue sur l'enseignement des mathématiques est d'abord un point de vue de mathématicien, dans le sens où tout l'enseignement est piloté par une organisation du contenu basée en premier lieu sur les savoirs mathématiques. De même, les points de vue constructivistes à l'œuvre dans les tentatives didactiques relatées ci-dessus sont souvent éloignés de leurs préoccupations. Ces deux constats, quoique communs, pourraient n'être que des impressions trompeuses, mais nous allons voir qu'ils vont être largement confirmés par l'analyse des interviews effectuées.

- *Le guide d'entretien*

L'entretien est semi-directif et prévu pour une durée d'une demi-heure. Les cinq questions préparées (voir ci-dessous) ne sont pas nécessairement posées dans cet ordre, ni forcément sous cette forme, mais permettent de structurer l'entretien : l'important est que toutes ces questions soient abordées, que la question soit explicitement posée ou non, et on peut, au gré de l'entretien, poser une nouvelle question dont le besoin aurait émergé. Cela permet de rester ouvert, ce qui est essentiel pour une étude préliminaire. La conséquence de cela est la nécessité de s'adapter aux discours des enseignants-chercheurs interviewés.

Le guide d'entretien a été élaboré de manière transdisciplinaire par l'équipe du projet de recherche qui regroupe des collègues de plusieurs disciplines universitaires. Ainsi, les questions ne réfèrent pas à une discipline en particulier, avec ses spécificités, ni aux didactiques de ces disciplines.

L'entretien commence par un préambule pour préciser l'objectif de l'entretien : « *Dans le cadre de l'Institut des Humanités de Paris, nous réalisons une recherche sur l'usage de l'exemple, dans l'enseignement supérieur ou secondaire. Cette recherche est pluridisciplinaire. Elle mobilise des chercheurs en mathématiques, physique, chimie, sciences de la vie et de la terre, histoire et géographie. Nous souhaitons cerner comment les différentes disciplines mobilisent les exemples.* »

Les cinq questions autour desquelles se structure l'entretien ont été formulées de la manière suivante :

Q1 - Comment s'intègrent les exemples dans vos enseignements ?

L'objectif est de caractériser et de nommer les différents usages qui ressortent.

Q2 - Pourquoi utilisez-vous les exemples ?

Q3 - Pourriez-vous faire un cours sans exemple ? Pourquoi ?

Q4 - Quand utilisez-vous les exemples ?

La question se pose à différents niveaux : dans la séance, en fonction du type de cours, au cours d'une année, dans le cadre de projet, de sortie de terrain.

Q5 - Est-ce qu'il y a des exemples que vous utilisez à différents niveaux ?

Dans le préambule tout comme dans les questions, la notion de « cas » n'apparaît pas explicitement. Cela permet en particulier de questionner, selon les disciplines, l'émergence spontanée de cette notion à partir d'une discussion sur les exemples, puis d'essayer de comprendre les différences et les similitudes entre exemples et cas.

Pour ce qui est des mathématiques, et contrairement à certaines disciplines comme l'histoire ou la géographie, nous ne nous attendons pas à voir émerger la notion de « cas » au sens d'« exemple à étudier pour lui-même ». En effet, le mot « cas » réfère plutôt en mathématiques à un raisonnement par « disjonction de cas », sans lien direct avec la notion d'exemple. Ainsi, avons-nous prévu de poser spécifiquement une question sur le cas (Q6) en fin d'entretien, pour nourrir l'étude pluridisciplinaire.

■ **Importance des exemples**

Compte tenu d'une position des enseignants-chercheurs en mathématiques largement en faveur d'une organisation des contenus, et au vu des aspects épistémologiques de la section 1, on ne peut s'étonner de l'importance qu'ils accordent à l'usage des exemples dans l'enseignement. En témoigne cette remarque d'un des professeurs interrogés sur la possibilité de ne pas utiliser des exemples dans les cours (Q3) :

« Non, humpf, là franchement, si je veux faire le malin oui, en séminaire recherche si j'ai envie d'impressionner tout le monde oui, mais bon c'est pas trop mon style, donc, non je ne crois pas, je ne crois pas. » (EC1)

Ce même lien est exprimé d'une autre façon tout aussi affirmative dans un autre entretien :

« Ah non ! [Rires] ça permet d'incarner, en fait, des choses qui sont relativement abstraites. En mathématiques, on fait souvent des définitions par compréhension, il y a besoin d'incarner cela par des exemples par extension pour voir concrètement ce que ça signifie. Moi, je vois ça de manière tout à fait indispensable. » (EC2)

■ **Exemple central ou de référence**

Il y a d'abord ce que les enseignants présentent comme l'exemple central ou de référence :

« objets de référence qu'on donne en exemple, les fonctions classiques qu'on va rencontrer en analyse au lycée, c'est indispensable de les connaître... » (EC2)

Ces exemples doivent être riches, accessibles, et même structurants, en montrant comment s'utilisent les notions introduites – souvent en résolvant avec elles des problèmes variés sur l'exemple en question.

« Oui, par exemple dans le cours de L1, quand on a fait les suites récurrentes, j'ai pris un exemple que j'ai étudié à fond, cela a bien pris trois quarts d'heure à une heure du cours. [...] Donc tu prends un exemple où un peu tous les phénomènes qui peuvent arriver soient représentés, et tu traites cela. » (EC3)

Dans ce type de rubrique, nous citerons aussi les exemples concrets ou d'application, propres à mettre en valeur l'importance de certaines notions ou méthodes introduites, par les résultats qu'ils permettent d'obtenir dans d'autres disciplines.

« les exemples pratiques c'est par exemple quand je fais des équations différentielles [...] je tire énormément d'exemples de la physique [...] Pour moi les exemples doivent être évidents. » (EC4)

Il s'agit là de motivations apparaissant souvent dans un second temps, en particulier parce qu'on y utilise souvent des points essentiels des théories enseignées. Cela dit, une introduction de notions mathématiques peut tout à fait s'appuyer sur ce type d'exemples, c'est le cas en particulier des notions d'intégrale (Grenier et al., 1985) et d'exponentielle (Magnin & Rogalski, 2011).

■ **Les contre-exemples**

Il y a ensuite les contre-exemples, auxquels plusieurs rôles sont dévolus : cerner les limites des définitions (il s'agit alors d'exemples ou de non-exemples de début) ; montrer pourquoi un raisonnement est faux, dans une activité de résolution de problème.

À en croire les enseignants interrogés, il s'agit là d'une spécificité des mathématiques, et cette opinion sera à éclairer par les entretiens faits avec des enseignants des autres disciplines scientifiques.

« Donner des définitions précises, c'est caractéristique des maths ! Donc tu délimites le terrain, tu plantes des piquets : la notion s'arrête là, et si on retranche telle ou telle propriété on n'obtient plus les résultats souhaités. C'est une délimitation du paysage [...] Cela sert à placer des jalons pour expliquer que certaines hypothèses sont nécessaires [...] Cela donne des repères dans la théorie qui permettent de voir ce qu'on peut faire et ce qu'on ne peut pas espérer faire. » (EC3)

« Une autre catégorie d'exemples, pour montrer les erreurs qu'on peut faire. [...] on va lui dire par exemple voilà à tel endroit il y a une erreur de logique. [...] Dis tel quel, très souvent, ça suffit pas et donc il faut donner un exemple relativement similaire où on voit clairement que la conclusion est fautive. On peut appliquer son argument et donc il y a une contradiction. Voilà c'est de manière concrète expliquer une erreur, on a relativement souvent recours à un exemple. » (EC2)

Toutefois un enseignant racontant ses expériences, il y a une vingtaine d'années aux États-Unis d'Amérique, mentionne un point de vue radicalement différent :

« les contre-exemples sont hors-jeu. Ils [les étudiants] comprendraient mal qu'on présente un théorème en l'illustrant par des situations où il ne peut pas s'appliquer... ce serait non compris comme démarche pédagogique. Les exemples du cours ont pour seul but de préparer à la réussite à l'examen, ce qui renvoie à une philosophie sociale du rôle de l'enseignement aux USA. » (EC5)

Et l'enseignant, interrogé spécifiquement sur ses années d'enseignement en première année dans un collège aux États-Unis, précise que, à son avis, l'enseignement y a pour but encore, à ce niveau, de donner confiance aux étudiants et surtout d'éviter qu'ils ne se posent des problèmes. Ainsi l'étude préliminaire que nous présentons se focalise sur l'enseignement universitaire français et ne saurait être étendue à d'autres contextes.

■ **Les exemples pour illustrer, les exemples concrets**

Les exemples pour illustrer, les exemples concrets et les exemples à réutiliser plusieurs fois ont des rôles qui peuvent être multiples :

- illustrer sur un même objet plusieurs niveaux d'approche (par exemple, l'exponentielle peut être étudiée en relation avec les nombres réels, puis avec les nombres complexes, puis avec les matrices...);
- les faire apparaître comme bons candidats pour plusieurs méthodes de résolution différentes, à un même niveau ;
- raccrocher des connaissances nouvelles à des anciennes, incarner des connaissances abstraites.

« Souvent une notion peut être vraiment très abstraite. Donc pour être plus concret, on donne des exemples. En particulier sur des objets où on a des techniques connues pour faire des calculs. » (EC3)

« on peut donner la définition d'un espace vectoriel. [...] Entre un vecteur colonne et puis une fonction, ce sont des objets a priori de nature différente mais pourtant, ils partagent un certain nombre de propriétés et il n'y a qu'à travers les exemples finalement qu'on voit l'intérêt de cette définition relativement générale pour moi. » (EC2)

Rappelons également cette affirmation déjà mentionnée :

« *En mathématiques, on fait souvent des définitions par compréhension, il y a besoin d'incarner cela par des exemples par extension pour voir concrètement ce que ça signifie.* » (EC2)

■ **Exemple générique**

Terminons par l'exemple générique, permettant de faire un raisonnement dans un cas particulier pour éviter un formalisme trop lourd, mais dont on voit aisément qu'on pourrait le faire dans le cas général. Il peut aussi servir, ainsi, à dégager une définition permettant le formalisme indispensable dans le cas général. C'est une utilisation de l'exemple vraisemblablement particulière aux mathématiques, dans la mesure où elle concerne spécifiquement l'activité de démonstration.

« *Le fait que tout rationnel a un développement décimal périodique à partir d'un certain rang, si on veut le faire en toute généralité c'est un peu casse-pied alors qu'en réalité si on prend un exemple [...] si je divise 22 par 7, on va voir effectivement ce qui se passe et le fond de l'affaire est entièrement contenu dans un simple exemple [...] donc là l'exemple a valeur de démonstration.* » (EC1)

■ **Étude de cas**

La notion d'étude de cas n'a pas vraiment été au centre des entretiens dans les disciplines scientifiques, mais comme elle apparaît dans les autres disciplines, nous l'avons brièvement évoquée avec les enseignants de mathématiques interrogés (Q6). À première vue, l'étude de cas semble étrangère au monde des mathématiciens comme le montrent ces réponses à nos questions sur ce point.

- (I) « *Ça évoque quelque chose pour toi : étude de cas ?*
(EC2) *Étude de cas... alors ça ne fait pas partie de mon vocabulaire. Ça c'est clair... étude de cas... je sais pas c'est peut-être plus en médecine qu'on utilise ce vocabulaire-là [Rires] je sais pas ça ne m'évoque rien.*
(I) *C'est un mot qui n'apparaît jamais ? Cas ou étude de cas en mathématiques ?*
(EC2) *On fait des cas. D'un point de vue logique on fait des raisonnements par disjonction de cas mais j'appelle pas ça étude de cas... »*

La même incompréhension amusée se manifeste chez un second chercheur.

- (I) « *Dans d'autres disciplines [...], ils travaillent beaucoup par étude de cas. Qu'est-ce que ça t'évoque ?*
(EC1) *Tu peux me dire ce que c'est que l'étude des cas ? Je ne voudrais pas faire de contresens en interprétant ce que tu dis.*
(I) *C'est pas grave si c'est un contresens, qu'est-ce que ça t'évoque une étude de cas ?*
(EC1) *Ben pour moi c'est un exemple vraiment important, c'est ça un cas, un cas d'école quoi, c'est ça que tu veux dire ? [...] Je ne suis pas sûr de vraiment cerner ce que tu veux dire [rires] ce que tu dis. »*

Mais un autre enseignant déjà cité (extrait EC3, p.86) réagit ainsi à notre sollicitation un peu orientée suite à la présentation de son étude approfondie d'un exemple :

- (I) « *Est-ce que tu pourrais appeler cela une étude de cas ?*
(EC3) *Oui, tout à fait, c'est une étude de cas, exactement.* »

De la même façon, un spécialiste de modélisation réagit positivement à cette notion, même s'il n'utilise pas spontanément cette expression.

- (I) « *Quand on parle d'étude de cas, cela te dit quelque chose, à toi, étude de cas ?*
(EC4) *C'est, comment dire ? Oui, en gros, c'est accumuler des exemples pour arriver à dégager une théorie, cela se rapprocherait assez de la modélisation. On regarde des situations concrètes, on en accumule plusieurs et on essaye de dégager un fil général. Pour moi, c'est ça étude de cas.*
- (I) *Et ça, c'est une façon que t'as de pratiquer ton enseignement.*
(EC4) *Non, non. Enfin si, en un certain sens, par exemple, pour différencier dans cet exercice-là, il y a telles hypothèses et donc il faut s'orienter vers tel théorème. Dans cet autre exercice, assez voisin, il y a telles autres hypothèses donc c'est pas ce théorème-là qu'il faut utiliser, c'est cet autre-là. Ce serait ma façon mais c'est de l'étude de cas d'exercices. »*

L'étude de cas apparaît ici plutôt comme un travail métamathématique sur un théorème avec ses usages et les limites de son usage.

4. Un point de vue didactique exogène : entre adidacticité et problématisation

Comme nous l'avons souligné, les enseignants-chercheurs interrogés sont principalement des mathématiciens qui enseignent. Sur l'enseignement, ils ont développé leur réflexion propre. Ils ne réfèrent jamais à des recherches ou à des notions didactiques qu'ils n'ont, pour certains, jamais rencontrées. De même, il n'y a eu qu'une seule évocation de l'histoire des mathématiques :

« Un exemple un peu central, si on veut utiliser les espaces de Hilbert, il y a l'espace des carrés, des suites de carrés sommables, c'était l'espace de Hilbert originel, le tout premier je crois, donc hee oui on peut passer un cours entier sur un exemple ça peut, c'est possible, j'ai jamais eu l'occasion de faire ça mais ça serait envisageable. » (EC1)

Il peut être intéressant de noter qu'aucun de nos interlocuteurs n'a évoqué la nécessité de traiter des exemples à titre culturel, c'est-à-dire, soit pour leur importance historique, soit comme base de la compréhension d'une certaine épistémologie des mathématiques. D'ailleurs, le mot épistémologie lui-même n'a jamais été prononcé.

Il est ainsi assez difficile de lire leurs propos avec une grille didactique qui leur est exogène. De plus une telle grille serait, par nature, assez refermée sur les mathématiques, alors que notre ambition est de savoir s'il est possible de détecter des similitudes et des différences entre deux ou plusieurs disciplines dans les manières d'utiliser dans l'enseignement des exemples et/ou des études de cas. Néanmoins, il peut être utile d'utiliser certaines notions didactiques pour interpréter certaines des réponses de nos interlocuteurs, ou certaines absences dans leurs réponses.

■ Adidacticité

Une entrée privilégiée peut ainsi être d'identifier la part d'*adidacticité* qu'ils intègrent dans leur pratique, c'est-à-dire la manière dont ils pensent déléguer aux étudiants, à travers l'utilisation de cas ou d'exemples, au moins une part de la construction des savoirs en jeu. La notion d'*adidacticité* a été introduite par Guy Brousseau (1986). Elle joue un rôle essentiel dans les études didactiques françaises qui privilégient des tâches spécifiques conçues par les professeurs pour donner aux élèves un rôle actif dans le processus d'apprentissage des notions mathématiques. De façon plus précise, Guy Brousseau appelle *situation adidactique* une situation didactique s'appuyant sur une entrée épistémologique des savoirs à élaborer, et construite sur les ressorts suivants :

- le problème posé doit être compréhensible pour les élèves ou étudiants compte tenu de leurs connaissances antérieures, ces connaissances doivent les mener à proposer des premiers essais de solutions ;
- la situation doit comporter un milieu capable fournir une rétroaction à l'élève en fonction de ses essais pour en faire ressortir le caractère erroné de façon à le faire progresser vers d'autres essais de solutions, plus adaptés ;
- une fois les « bonnes solutions » formulées, il importe de « décontextualiser » les principes qui ont permis ces solutions, et d'aboutir à des savoirs nouveaux.

Des entretiens, il résulte que cette volonté de faire construire, au moins partiellement, les savoirs par les étudiants, est souvent absente chez les enseignants interrogés lorsqu'il s'agit des cours, et elle est rarement présente en TD. Ainsi, c'est plutôt sur le registre de l'absence que le concept de situation adidactique éclaire l'analyse du corpus de réponses aux entretiens effectués.

■ **Problématisation**

Plusieurs préoccupations pédagogiques apparaissent chez nos interlocuteurs (voir la section 3 - *Les exemples pour illustrer, les exemples concrets*), notamment quant à l'utilisation des « exemples du début » :

- raccrocher ce dont on va parler à des connaissances déjà là ;
- illustrer le cours par des exemples qui « parlent » aux étudiants ;
- évoquer des problèmes issus de domaines d'applications, pour « motiver ».

Parfois même, il peut s'agir d'accumuler des exemples « concrets » pour justifier une théorie présentée ensuite.

On peut identifier dans ces préoccupations une possible problématisation des savoirs présentés. Précisément, il peut s'agir de faire surgir chez les étudiants des questions clés qui se posent sur des savoirs nouveaux, avant de développer des propriétés des concepts introduits, qui vont apporter des réponses aux questions évoquées. Cette problématisation, qui peut se développer autour d'exemples bien choisis, à travailler par les étudiants, permet de les faire réfléchir aux *objectifs* des savoirs que l'on va développer. Cette approche est particulièrement utile pour introduire des savoirs qui apparaissent du point de vue épistémologique comme *formalisateurs*, *unificateurs*, *généralisateurs* (FUG) de différents savoirs vus dans différents domaines (un exemple classique très étudié est l'enseignement de l'algèbre linéaire en première année d'université – voir Dorier, 1997). Ce caractère FUG est souvent un obstacle à la construction de situations adidactiques, et la problématisation peut être une méthode alternative pour donner du sens et des raisons d'être à des savoirs difficiles à faire construire, même partiellement, par les étudiants.

Les « exemples du début » cités par nos interlocuteurs, tels ceux donnés ci-dessus, peuvent-ils servir pour la problématisation ? Comme nous le verrons à nouveau à la section suivante, le travail propre des étudiants sur ces exemples est en général absent. De surcroît, les commentaires de nos interlocuteurs, stimulés par nos questions, montrent un discours « méta »³ peu développé dans leur usage des exemples. De ce fait, c'est plutôt un constat d'absence qui s'impose ici aussi...

■ **Travail des étudiants**

En travaux dirigés (TD), les exemples apparaissent soit lors des rappels de cours, soit dans les exercices, qui sont par nature presque tous des exemples. En ce qui concerne les travaux

³ Nous entendons par ce terme (Robert & Robinet, 1996) l'organisation, dans l'enseignement, à la fois d'un discours des enseignants et l'utilisation de situations, aptes à faire comprendre aux étudiants l'origine, les buts de l'introduction de certains concepts, les modalités de leur fonctionnement, leur place dans un ensemble plus vaste de savoirs.

dirigés, l'usage d'exemples riches est évoqué en présentant plusieurs méthodes de résolution de problème dans le domaine étudié.

« Les exemples ça relève plutôt du cours et le TD, l'exercice souvent c'est un exemple en soi, c'est rare qu'aujourd'hui on donne, enfin c'était un peu le cas dans notre génération quand on était étudiant mais on le fait moins aujourd'hui de donner des exercices théoriques. Souvent c'est des exercices d'application et donc on a affaire à un cas concret qui est un exemple, donc on travaille avec un exemple. » (EC1)

Dans les TD, la part de travail personnel des étudiants pourrait y être bien plus grande, et elle permettrait sans doute une construction personnelle des savoirs, mais cet aspect n'est jamais apparu explicitement chez nos interlocuteurs. De fait, il y a très peu de demandes auprès des étudiants pour fournir des exemples. On retrouve ici de manière plus amplifiée encore la relative rareté des exemples dans l'enseignement secondaire pointée par Iris Zodik et Orit Zaslavsky (2008) qui avaient noté 35 exemples proposés par les élèves sur les 604 exemples observés pendant les cours.

Une des raisons invoquées est la difficulté à suggérer des exemples intéressants.

« Oui ça arrive assez, mais souvent les exemples que les étudiants donnent sont assez pauvres, c'est pas très fréquent de leur faire sortir un joli truc qui soit vraiment significatif, donc parce qu'ils veulent montrer de la bonne volonté, ils vont sortir l'exemple trivial qui est juste, mais bon, donc c'est toujours difficile de savoir sur quel pied danser quoi et il faut leur dire bravo parce que c'est juste, faut pas les décourager mais en même temps il faut aussi leur faire comprendre qu'un exemple c'est pas ça, c'est quelque chose qui doit avoir un peu de contenu quand même, qui peut pas être juste l'ensemble vide tout simplement parce que ça répond bien à la définition. » (EC1)

On retrouve ici l'intérêt de provoquer la production d'exemples intéressants comme dans les *Learner Generated Examples* (Watson & Shipman, 2008).

Conclusion

Pour tous les enseignants-chercheurs que nous avons rencontrés, les exemples sont nécessaires à la compréhension des mathématiques. Celles-ci n'ont pas de sens pour les étudiants si leur activité n'est pas éclairée par la lumière d'exemples bien choisis et riches.

Les cours et les travaux dirigés sont donc l'occasion pour le professeur de fournir ces exemples mais dans le même temps, il n'est pas réellement prévu un travail spécifique et explicite relatif à la production et à l'usage des exemples par les étudiants. Ceux-ci ne sont que très rarement invités à en produire du fait des exigences sur la qualité que doivent avoir les exemples : les enseignants attendent des exemples qu'ils ne se contentent pas d'en être par pur jeu sur la logique formelle (dernier extrait ci-dessus), mais qu'ils concernent des propriétés plus significatives du sens des savoirs en jeu. De même, leurs connaissances des exemples présentés par le professeur ne sont pas évaluées directement. Les exercices et les problèmes apparaissent comme le lieu où se déploient les exemples pour donner du sens aux notions et théorèmes introduits et également afin de servir de modèle en vue de la résolution d'autres exercices.

Comme nous l'avons signalé, certains problèmes sont considérés comme des exemples – qui n'évoquent presque jamais l'étude de cas pour nos interlocuteurs. Il s'agit sans doute d'une particularité des disciplines scientifiques, en particulier des mathématiques et de la physique où

l'enseignement s'articule autour des résolutions de problème qui constituent l'activité principale des étudiants en sciences.

Bien sûr, vu la formation des enseignants de l'étude, on ne s'attendait pas à relever des questionnements didactiques. Cela dit, les rôles didactiques respectifs des enseignants et des étudiants sont rarement évoqués, sauf lorsque la question est posée directement (cf. section 4 - *Travail des étudiants*). De même, le ressort didactique et les conditions pour que les exemples choisis permettent d'atteindre les objectifs attendus sont peu présents dans les entretiens réalisés : les enseignants veulent donner du sens aux savoirs, mais ils n'attendent pas que les étudiants construisent eux-mêmes ce sens. Si la problématisation semble être une préoccupation des enseignants-chercheurs, en revanche aucune référence à une quelconque adidacticité n'apparaît.

Bibliographie

- BALACHEFF N. (1987), « Processus de preuve et situations de validation », *Educational Studies in Mathematics*, n°18, p.147-176.
- BROUSSEAU G. (1986), « Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7, n°2, p.39-115.
- BROUSSEAU G. (1988), « Didactique fondamentale », *Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire, Actes de l'Université d'été de Olivet*, A. ROUCHIER (dir.), Bordeaux, IREM de Bordeaux, p.9-122.
- DORIER J.-L. (dir.) (1997), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- GAUVRIT N. (2013), « Exemples et catégories », *Les exemples. En chimie, en mathématiques, en physique, Cahier du LDAR*, n°7, R. Khanfour-Armaïe & L. Vivier (éds.), Paris, IREM Université Paris Diderot, p.103-109.
- GOLDENBERG P. & MASON J. (2008), « Shedding light on and with example spaces », *Educational Studies in Mathematics*, vol. 69, n°2, p.183-194.
- GRENIER D., LEGRAND M. & RICHARD F. (1985), *Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A première année, Cahiers de Didactique des Mathématiques*, vol. 7, n°22, Paris, IREM de Paris,.
- KHANFOUR-ARMAÏE R. & VIVIER L. (2013), « Les exemples. En chimie, en mathématiques, en physique », *Cahier du LDAR*, n°7, Paris, IREM Université Paris Diderot.
- LAKATOS I. (1976), *Proof and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery. Expanded version of Lakatos (1963-4)*, Cambridge, University Press.
- MAGNIN N. & ROGALSKI M. (2011), « Un scénario pour motiver l'introduction de la fonction exponentielle en terminale S, mise en œuvre dans la classe », *Bulletin vert de l'APMEP*, n°492, p.17-29.
- MARRADES R. & GUTTIEREZ A. (2001), « Proof produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment », *Educational Studies in Mathematics*, n°44, p.87-125.
- MICHENER E. (1978), « Understanding mathematics », *Cognitive Science*, n°2, p.361-383.
- POLYA G. (1957), *How to Solve It*, Princeton, University Press, 2nd edition.
- ROBERT A. & ROBINET J. (1996), « Prise en compte du méta en didactique des mathématiques », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 16, n°1, p.31-70.
- SCHOENFELD A. (1978), « Presenting a strategy for indefinite integration », *American Mathematical Monthly*, vol. 85, n°8, p.673-678.
- SCHOENFELD A. (1980), « Teaching problem-solving skills », *American Mathematical Monthly*, vol. 87, n°10, p.794-805.

WATSON A. & MASON J. (2005), « Mathematics as a constructive activity: learners generating examples », *Studies in Mathematical Thinking and Learning*, Mahwah, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates.

WATSON A. & SHIPMAN S. (2008), « Using learner generated examples to introduce new concepts », *Educational Studies in Mathematics*, vol. 69, n°2, p.97-109.

ZODIK I. & ZASLAVSKY O. (2008), « Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom », *Educational Studies in Mathematics*, vol. 69, n°2, p.165-182.