Esta cartilla pertenece a la serie Unidades didácticas en Educación Matemática de "una empresa docente" (Facultad de Educación, Universidad de los Andes) y ediciones SM. Propone el diseño de una unidad didáctica con el que se busca contribuir al aprendizaje de la noción de razón trigonométrica. Para ello, la cartilla presenta el material que el profesor de matemáticas de educación media requiere para implementar la unidad didáctica en el aula. La cartilla fue elaborada por los grupos 5 y 6 de la primera promoción de la maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes.

La cartilla se compone de cuatro partes. La primera presenta los aspectos que el profesor debe tener en cuenta antes de implementar las tareas propuestas en la unidad didáctica. La segunda contiene los objetivos de aprendizaje propuestos para los estudiantes y la metodología sugerida al profesor. La tercera describe la fundamentación y secuencia de tareas que conforman la unidad didáctica, e incluye el material fotocopiable para los estudiantes. Por último, se indican sugerencias para evaluar a los estudiantes y se presentan pautas para identificar su nivel de desempeño y determinar el logro de los objetivos de aprendizaje.

La secuencia de tareas busca contribuir a que los estudiantes identifiquen las razones trigonométricas en los triángulos rectángulos y las utilicen para hallar medidas de lados y ángulos en problemas matemáticos y no matemáticos; identifiquen las razones trigonométricas en la circunferencia unitaria y las utilicen para hallar medidas de lados y ángulos en diferentes contextos; identifiquen el triángulo rectángulo en problemas matemáticos y no matemáticos y utilicen las razones trigonométricas para solucionarlos; y reconozcan la importancia de las razones trigonométricas para hallar la medida de ángulos y lados que no se pueden medir directamente y lo hagan en diferentes contextos. Su diseño se basa en dos ideas transversales: la noción de razón trigonométrica es útil en contextos cercanos a los estudiantes y ellos pueden identificarla y comprenderla a partir de su experiencia (por ejemplo, con la medición y búsqueda de regularidades). Las tareas están elaboradas para ser implementadas con estudiantes de grado décimo. Su diseño surge de la necesidad de contribuir al logro del estándar curricular "describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas".

Pedro Gómez
Fernando Torres

Edición académica

sm

Universidad de los Andes
Facultad de Educación

"una empresa docente", CIFE
Colección en Educación Matemática

ISBN 978-958-773-852-0
171522
9 789587 738520

Fredy Arenas
Mauricio Becerra
María Fernanda Mora
Fredy Morales
Eliana Ximena Nieto
Diana Lucía Polanía
Marta Lilia Romero
Leonardo Urrutia
María José González
Pedro Gómez

Autores

Serie Unidades didácticas en Educación Matemática

Razones trigonométricas

Universidad de los Andes
Facultad de Educación

sm

Fredy Arenas
Mauricio Becerra
María Fernanda Mora
Fredy Morales
Eliana Ximena Nieto
Diana Lucía Polanía
Marta Lilia Romero
Leonardo Urrutia
María José González
Pedro Gómez

Autores

Serie Unidades didácticas
en Educación Matemática

Razones trigonométricas

Universidad de los Andes
Facultad de Educación

sm

Primera edición: 15 de junio de 2016

Serie Unidades didácticas en Educación Matemática
"una empresa docente" (Facultad de Educación, Universidad de los Andes)

Ediciones SM

Director Pedro Gómez

Edición académica Pedro Gómez
Fernando Torres

Coordinación editorial Marta Osorno

Autores Fredy Arenas
Mauricio Becerra
María Fernanda Mora
Fredy Morales
Eliana Ximena Nieto
Diana Lucía Polanía
Marta Lilia Romero
Leonardo Urrutia
María José González
Pedro Gómez

Diseño Rocío Duque

ISBN: 978-958-773-852-0
Depósito legal

Impreso en Colombia - Printed in Colombia

Esta publicación se realizó en el marco del programa de investigación 5424, correspodiente a la convocatoria 731 de 2015 que tiene el apoyo del Fondo Francisco José de Caldas (Colciencias).

Contenido

1 Introducción. Antes de implementar la cartilla

Esta cartilla pertenece a la serie Unidades didácticas en la Educación Matemática y propone una secuencia de tareas con la que buscamos contribuir al aprendizaje de la noción de razón trigonométrica. La cartilla fue elaborada por los grupos 5 y 6 de la primera promoción de la concentración en Educación Matemática de la maestría en Educación de la Universidad de los Andes y adaptada por Gemad como herramienta de ayuda para que el profesor de matemáticas de educación media la pueda implementar en el aula.

La cartilla se compone de cuatro partes. La primera presenta los aspectos que el profesor debe tener en cuenta antes de implementar las tareas propuestas en la unidad didáctica. La segunda contiene los objetivos de aprendizaje propuestos para los estudiantes y la metodología sugerida al profesor. En la tercera parte, decribimos la fundamentación y la secuencia de tareas que conforman la unidad didáctica, e incluye el material fotocopiable para los estudiantes. Por último, indicamos sugerencias para evaluar a los estudiantes y presentamos pautas para identificar su nivel de desempeño y determinar el alcance de los objetivos iniciales.

Con las secuencia de tareas, buscamos que los estudiantes se aproximen a diferentes formas de ver las razones trigonométricas. Las tareas se centran en los conceptos de triángulo y circunferencia. Una idea fundamental y transversal de esta cartilla es la utilidad que la noción de razón trigonométrica tiene en contextos cercanos a los estudiantes y la intención de que sean ellos quienes, con base en su experiencia (medición y búsqueda de regularidades, entre otras), lleguen a identificarla.

Las tareas están elaboradas para ser implementadas con estudiantes de grado décimo. Su diseño surge de la necesidad de realizar aportes al alcance del estándar curricular "Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas" (MEN, 2006, p. 88).

1.1 Objetivos de aprendizaje

La secuencia de tareas propuesta, pretende contribuir al desarrollo de los siguientes objetivos de aprendizaje.

1. Identificar las razones trigonométricas en los triángulos rectángulos y utilizarlas para hallar medidas de lados y ángulos en problemas matemáticos y no matemáticos.
2. Identificar las razones trigonométricas en la circunferencia unitaria y utilizarlas para hallar medidas de lados y ángulos en diferentes contextos.
3. Identificar el triángulo rectángulo en problemas matemáticos y no matemáticos y utilizar las razones trigonométricas para solucionarlos.
4. Reconocer la importancia de las razones trigonométricas para hallar la medida de ángulos y lados que no se pueden medir directamente y hacerlo en diferentes contextos.

1.2 Esquema general de la unidad didáctica

La secuencia de tareas se desarrolla en 15 sesiones de clase de 60 minutos cada una. En primer lugar, se presenta la tarea diagnóstica que diseñamos al tener en cuenta los conocimientos previos que se requieren para afrontar con éxito las tareas que prosiguen. El objetivo es identificar dificultades para brindar las ayudas que sean necesarias. Luego, proponemos las tareas con las que se busca contribuir al logro de cada uno de los objetivos. Para dar cierre a la secuencia de tareas, proponemos una evaluación final. Con este instrumento, se pretende identificar el impacto de la secuencia de tareas en el aprendizaje de los estudiantes. A continuación, describimos brevemente la secuencia de tareas y su contribución al logro de los objetivos de aprendizaje.

La escalera y Características son las tareas que aportan al primer objetivo. Con estas tareas, se busca que los estudiantes, a partir de conocimientos previos como la semejanza y propiedades generales de los triángulos, exploren y encuentren regularidades que les permitan identificar ideas cercanas a la correspondencia de los ángulos con las razones entre lados de triángulos rectángulos, independientemente del tamaño; identifiquen, con base en una serie de pistas, a qué se le llama seno, coseno y tangente; y concreten los diferentes criterios que determinan cada una de las razones trigonométricas.

La rueda de Chicago es la tarea que contribuye al logro del segundo objetivo. Los contenidos que esta tarea involucra son, entre otros, los elementos de la circunferencia, la equivalencia entre grados y radianes y las identidades de ángulos complementarios y suplementarios. Se busca que los estudiantes reconozcan que es posible hallar la razón trigonométrica asociada a cualquier ángulo.

Canicas y La sombra son las tareas que contribuyen al logro del tercer objetivo. Estas tareas implican problemas en los que la principal dificultad yace en el hecho de identificar el triángulo rectángulo, figura que no se encuentra usualmente de forma concreta en las situaciones reales.

La cometa y Las moscas son las tareas que proponemos para el cuarto objetivo. Buscan destacar la utilidad que la noción de razón trigonométrica tiene para hacer mediciones de magnitudes que no se pueden realizar directamente.

Las tareas que configuran la secuencia se organizan en fases. La fase de inicio reúne la prueba diágnostica y la tarea La escalera, actividades que posibilitan el establecimiento de relaciones entre los conocimientos previos y los abordados con las tareas que desarrollan explícitamente la razón trigonométrica. La fase de desarrollo reúne las tareas Características, La rueda de Chicago, Canicas, La sombra, La cometa y Las moscas. Estas tareas están enfocadas a la utilización de conceptos trigonométricos que se centran en el triángulo y la circunferencia e involucran la razón trigonométrica. En la fase de cierre, proponemos la aplicación de una evaluación final.

En la tabla 1, mostramos el cuerpo completo de la unidad didáctica e indicamos las fases, las tareas que componen cada fase, el número de sesiones necesarias para desarrollarlas y los objetivos de aprendizaje a los que buscan contribuir.

Tabla 1

Estructura general de la secuencia de tareas

Fase	Tareas	No. Sesiones	Objetivo
Inicial	Diagnóstico	2	
	La escalera	2	1
Desarrollo	Características	2	1
	La rueda de Chicago	2	2
	Canicas	2	3
	La sombra	2	3
	La cometa	1	4
	Las moscas	1	4
Cierre	Evaluación final	1	
Total sesiones		15	

La unidad didáctica busca contribuir a las competencias de pensar y razonar, hacer uso de lenguaje simbólico, representar, modelar y usar herramientas tecnológicas. Se destaca la contribución al desarrollo de la competencia modelar. En la tabla 2, relacionamos las tareas con las competencias que se pretenden desarrollar e indicamos la meta de cada una.

Tabla 2

Competencias que se pretenden desarrollar con cada una de las tareas

Tarea	Meta	Competencias							
		PR	A	C	M	RP	R	LS	UH
La escalera	Introducir a la noción de razón trigonométrica a partir de la semejanza de triángulos		✓	✓	✓				
Características	Realizar acuerdos en relación con la definición de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo		✓					✓	
La rueda de Chicago	Involucrar la circunferencia para ampliar la noción que hasta el momento se tiene de razón trigonométrica		✓						
Canicas	Utilizar los acuerdos a los que se han llegado para dar solución a un problema en el que el triángulo no es explícito		✓		✓	✓	✓		
La sombra	Aportar al significado de las razones trigonométricas a partir de la traducción entre diferentes sistemas de representación y las transformaciones sintácticas dentro de un sistema de representación	✓	✓		✓	✓	✓		✓
La cometa	Aplicar lo aprendido en problemas similares o más complejos a los desarrollados	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓
Las moscas	Fortalecer los aprendizajes logrados	✓	✓		✓	✓	✓		

Nota. PR = Pensar y razonar; A = Argumentar; C = Comunicar; M = Modelar; RP = Resolución de problemas; R = Representar; LS = Lenguaje simbólico; UH = Uso de herramientas tecnológicas.

1.3 Articulación con los contenidos

Con base en el estándar seleccionado, establecimos que los contenidos que se pueden abordar con la unidad didáctica están asociados a la solución de situaciones problema haciendo uso de la razón trigonométrica. En el mapa conceptual de la figura 1, destacamos cuatro conceptos fundamentales que están implicados en el tema razón trigonométrica: ángulo, razón, triángulo rectángulo y circunferencia. Además de estos cuatro conceptos hay otros elementos que conforman el campo conceptual. Los hechos, que por el tamaño del mapa no alcanzan a aparecer en el mismo, hacen referencia a las unidades más pequeñas de información dentro de un tema matemático. En este caso, se refieren a elementos como cateto, hipotenusa, sentido de los ángulos, radián, grado, cuerda, radio, diámetro, longitud de la circunferencia y propiedades de los triángulos como la suma de los ángulos internos. Dentro del mapa se hacen explícitos otros conceptos, además de los cuatro centrales, como identidad trigonométrica y ecuación trigonométrica. En cuanto a estructuras, la misma razón trigonométrica constituye un ejemplo.

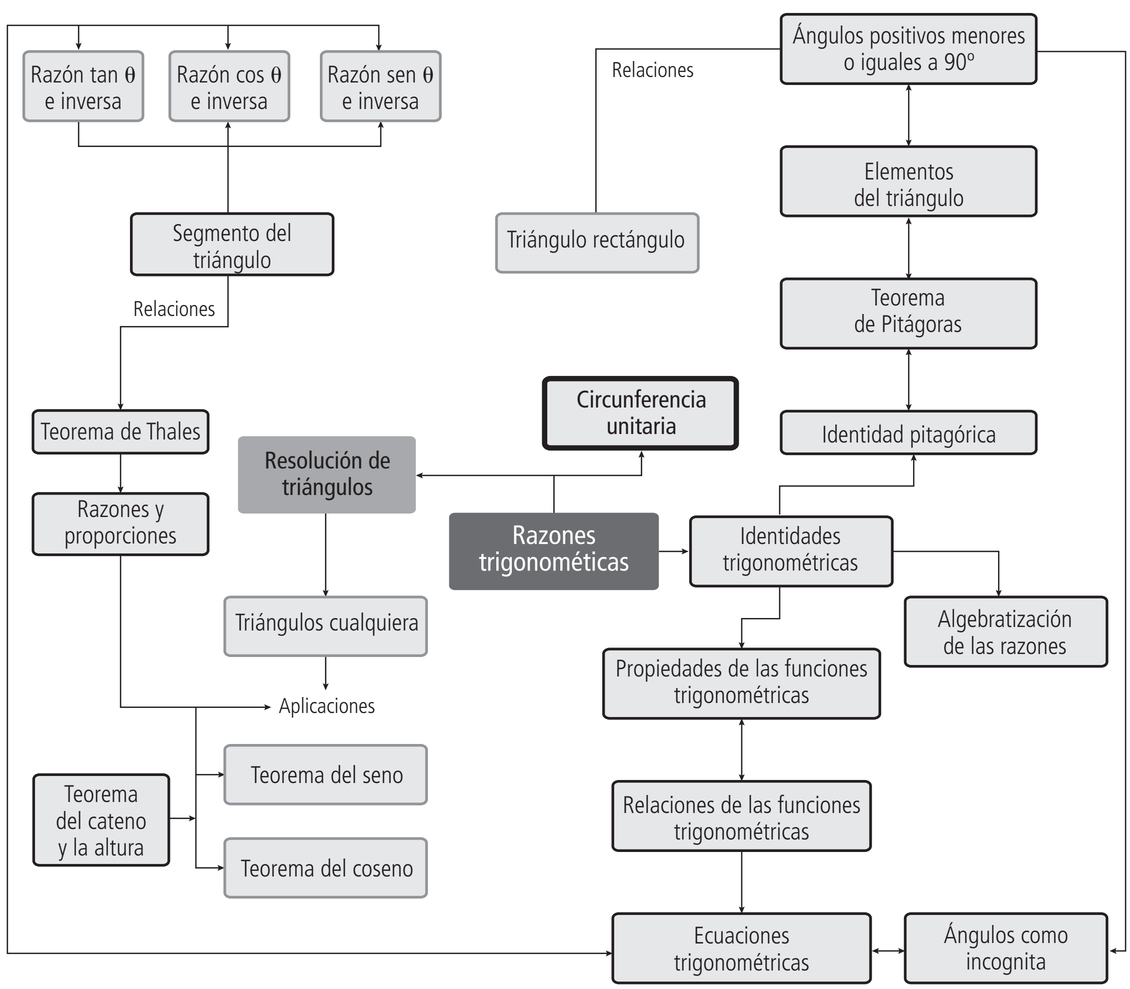


Figura 1. Mapa conceptual de las razones trigonométricas

Al determinar relaciones entre los diferentes elementos del campo conceptual se originan otros: destrezas, razonamientos y estrategias. Estos elementos son propios del campo procedimental. En relación con este campo, destacamos las siguientes ideas.

Destrezas. Entre las destrezas, se encuentran manejar la calculadora u otra herramienta; calcular el valor de razones trigonométricas para cualquier tipo de ángulo; relacionar sen(x), cos(x) y tan(x) con sus recíprocas; realizar conversiones entre grados y radianes; relacionar cualquier ángulo con uno agudo; solucionar ecuaciones trigonométricas sencillas; identificar diferentes representaciones del concepto; y construir ángulos utilizando diferentes elementos.

Razonamientos. Entre los razonamientos, se encuentran comprobar que las razones trigonométricas son válidas solo para triángulos rectángulos al probar en triángulos no rectángulos (razonamiento inductivo); identificar regularidades en triángulos rectángulos (inductivamente); y demostrar identidades que requieran varias propiedades geométricas (razonamiento deductivo).

Estrategias. Se abordan estrategias para solucionar triángulos rectángulos, describir la ubicación de objetos respecto a un eje coordenado y utilizar identidades.

1.4 Capacidades que se potencian en los estudiantes

Una capacidad es una expectativa del profesor sobre el conjunto de conocimientos elementales y de procedimientos rutinarios que los estudiantes tienen que aprender sobre un tema de las matemáticas escolares (Gómez, González y Romero, 2014). Se refieren, por ejemplo, a la realización de algún procedimiento específico, al uso de algún sistema de representación o a la traducción entre varios sistemas de representación. Para el caso de las razones trigonométricas, identificamos tres categorías de capacidades: geométricas, generales y trigonométricas. Las capacidades geométricas hacen referencia a conocimientos relacionados con características de las figuras geométricas y a las habilidades implicadas en su construcción. También implican un lenguaje propio. Por ejemplo, incluyen términos clave (como cuerda, radio, hipotenusa, cateto y altura) y el conocimiento de propiedades generales de los triángulos y características propias de algunas clases (como es el caso del teorema de Pitágoras). Llamamos generales a aquellas capacidades que se requieren para cualquier actividad matemática en el nivel en el que se trabaje. Destacamos las capacidades relacionadas con acciones propias de la competencia modelar, como hacer un gráfico de la situación, relacionar los elementos del gráfico con los de la situación y cuestionar la lógica de los resultados. Las capacidades trigonométricas implican la utilización explícita de alguna razón trigonométrica para la solución de situaciones. La tabla 3 presenta el listado de capacidades organizadas en las tres categorías mencionadas.

Tabla 3
Listado de capacidades

C	Capacidad	C	Capacidad
	Geométricas		
C1	Construir las alturas de un triángulo	C8	Construir modelos geométricos en tercera dimensión en el software GeoGebra, en función de la solución del problema
C2	Comprender que para un paralelepípedo la longitud máxima es la que corresponde al segmento que une un vértice con el opuesto al de la cara contraria	C9	Utilizar la semejanza para la resolución de triángulos
C3	Conservar los elementos geométricos de un sólido al momento de representarlo bidimensionalmente	C10	Relacionar ángulos cualesquiera con uno en posición normal y viceversa
C4	Usar el teorema de la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo euclídeo	C11	Medir ángulos y longitudes para calcular razones trigonométricas utilizando diferentes instrumentos de medida (regla, transportador, programa de computador, etc.)
C5	Clasificar los triángulos según la longitud de sus lados y la medida de sus ángulos	C12	Medir ángulos utilizando como unidades patrón el grado y el radián y relacionar los resultados obtenidos
C6	Conocer y mencionar los elementos del triángulo rectángulo	C30	Relacionar una medida dada en grados con una medida dada en radianes utilizando la calculadora
C7	Calcular la medida de los lados en el triángulo rectángulo a partir del teorema de Pitágoras		
	Generales		
C13	Realizar conversiones de medidas	C17	Ubicar los datos conocidos y desconocidos en la representación gráfica
C14	Reconocer las propiedades necesarias en el despeje de ecuaciones (lineales, razones trigonométricas, cuadráticas “sencillas”, entre otras)	C18	Ubicar los datos conocidos en la ecuación del teorema de Pitágoras
C15	Asignar los datos dados (parámetros) del problema a una ecuación trigonométrica	C19	Calcular las longitudes y ángulos a partir de instrumentos de medida en situaciones concretas
C16	Establecer una representación gráfica del problema	C20	Relacionar el vocabulario utilizado (catetos adyacente y opuesto, ángulos de depresión y de elevación) con los elementos de la representación gráfica-pictórica-geométrica que se utilice

Tabla 3
Listado de capacidades

C	Capacidad	C	Capacidad
	Generales		
C16.1	Representar un problema con objetos concretos	C21	Interpretar los resultados
C22	Identificar regularidades y patrones	C23	Proponer situaciones problema que involucren la resolución de triángulos
	Trigonométricas		
C24	Representar gráficamente cada razón trigonométrica asociada a un ángulo	C33	Identificar ángulos de elevación y depresión de acuerdo a la información de la tarea
C25	Expresar un problema como la razón trigonométrica tangente (representación simbólica)	C34	Expresar un problema como la razón trigonométrica seno utilizando lenguaje simbólico
C26	Calcular la medida de ángulos y lados en el triángulo a partir de las razones trigonométricas	C35	Expresar un problema como la razón trigonométrica coseno utilizando lenguaje simbólico
C27	Reconocer que la relación existente entre los parámetros e incógnitas que aparecen en la representación gráfica del problema (el triángulo), es una relación trigonométrica	C36	Representar e identificar las razones trigonométricas en la circunferencia goniométrica
C28	Reconocer el valor numérico de las razones trigonométricas como longitudes de segmentos	C37	Usar la fórmula fundamental ($sen^2(\propto) + cos^2(\propto) = 1$) de la trigonometría para deducir identidades trigonométricas
C29	Hallar ángulos teniendo en cuenta los valores numéricos obtenidos en las razones trigonométricas y su inversa	C38	Utilizar adecuadamente el lenguaje funcional en razones trigonométricas
C30	Identificar el signo de las razones trigonométricas en cada cuadrante de la circunferencia	C39	Calcular todas las razones trigonométricas a partir de una dada
C31	Identificar el cateto adyacente, el opuesto y la hipotenusa, a partir del establecimiento del ángulo	C40	Conocer las razones trigonométricas de los ángulos: 30º, 45º, 90º, 180º, 270º y 360º
C32	Usar los recursos tecnológicos (calculadora, tabletas entre otros) en función de la solución de un problema trigonométrico		

Nota: C = capacidad

1.5 Posibles errores en los que pueden incurrir los estudiantes

Al plantear la secuencia de tareas, resulta útil pensar en las dificultades y errores en los que los estudiantes pueden incurrir cuando las abordan. Algunos de esos errores pueden ser causados por conocimientos parciales o erróneos. En la tabla 4, mostramos las posibles dificultades que se pueden presentar y los errores mediante los cuales se expresan.

Tabla 4
Posibles errores en los que pueden incurrir los escolares

E	Descripción del error	E	Descripción del error
	Dificultad para utilizar las unidades de medida: grados y radianes		
E1.1	Asignar erróneamente una unidad de medida que no corresponde a la magnitud sobre la que se preguntaba	E1.3	Utilizar la calculadora empleando un sistema distinto al que se está trabajando (grados por radianes o al contrario)
E1.2	Realizar conversiones incorrectas en los diferentes sistemas de medidas de un ángulo		
	Dificultad para utilizar instrumentos para medir ángulos		
E2.1	Asignar una medida equivocada a un ángulo por la forma como se ubica el transportador		
	Dificultad para manejar el lenguaje funcional que se maneja en trigonometría		
E3.1	Omitir la inscripción de símbolos que son relevantes en expresiones trigonométricas		
	Dificultad para verificar la veracidad de una identidad trigonométrica		
E4.1	Considerar como identidad una expresión que sea verdadera para ciertos valores, no para todos		
	Dificultad para aplicar teoremas y propiedades trigonométricas		
E5.1	Interpretar y usar definiciones de forma inadecuada	E5.3	Establecer de forma equivocada la razón trigonométrica a partir del modelo gráfico del problema
E5.2	Hallar la amplitud de un ángulo afirmando que el valor obtenido por una razón trigonométrica lo representa		
	Dificultad para superar modelos implícitos		
E6.1	Considerar que las funciones trigonométricas son crecientes (modelo creciente)		
	Dificultad para modelar situaciones problema		
E7.1	Representar gráficamente (mediante triángulos) de forma equivocada una situación problema que involucra razones trigonométricas	E7.5	Asignar incorrectamente los ángulos en la representación gráfica de un problema trigonométrico

Tabla 4

Posibles errores en los que pueden incurrir los escolares

E	Descripción del error	E	Descripción del error
	Dificultad para modelar situaciones problema		
E7.2	Representar inadecuadamente con expresiones simbólicas una situación	E7.6	Confundir las longitudes dadas en un problema dentro de su representación gráfica
E7.3	Confundir el vocabulario utilizado (catetos adyacente y opuesto, ángulos de depresión y de elevación) con los elementos de la representación gráfica-pictórica-geométrica que se utilizan	E7.7	Colocar equivocadamente los datos conocidos en la representación gráfica del problema
E7.4	Confundir las relaciones entre los resultados obtenidos y la situación planteada	E7.8	Asignar incorrectamente los datos al determinar la razón trigonométrica que resuelve el problema
	Dificultad para identificar elementos característicos de las figuras geométricas		
E8.1	Desconocer triángulos rectángulos	E8.5	Desconocer que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180º
E8.2	Confundir la hipotenusa con los catetos	E8.6	Confundir los catetos de un triángulo respecto a un ángulo dado
E8.3	Confundir el ángulo recto con los ángulos agudos en un triángulo rectángulo	E8.7	Representar en lo bidimensional figuras de tercera dimensión sin la perspectiva adecuada
E8.4	Trazar incorrectamente las alturas en cualquier triángulo		
	Dificultad para identificar la correspondencia del lenguaje matemático de calculadoras y otras TIC con el usado en los textos		
E9.1	A pesar que el estudiante conoce la razón trigonométrica para encontrar el ángulo pedido en el problema, no determina su valor al hacer uso de la herramienta tecnológica	E9.2	Utilizar incorrectamente las herramientas tecnológicas para resolver el problema
	Dificultad para realizar transformaciones sintácticas en el sistema de representación simbólico		
E10.1	Realizar procedimientos incorrectos para despejar variables		

Nota: E = Error.

La secuencia está compuesta por siete tareas que describimos a continuación. Incluimos también la descripción de la tarea diagnóstica. Presentamos, para cada tarea, la meta que se quiere alcanzar, los recursos a utilizar (incluyendo el material fotocopiable), la organización grupal sugerida, los contenidos abordados y algunas sugerencias metodológicas. Estas últimas incluyen aclaraciones de la tarea, capacidades que se espera que los estudiantes activen, los posibles caminos de aprendizaje que pueden activar, los errores en los cuales pueden incurrir y las actuaciones o interacciones que puede propiciar el profesor para promover el aprendizaje de los conceptos y procedimientos abordados, es decir, los roles del profesor y del estudiante.

2 Tarea diagnóstica (TD). Sesiones 1 y 2

La tarea diagnóstica es un conjunto de preguntas cuya solución permite identificar las dificultades que los estudiantes pueden tener en relación con los conocimientos previos requeridos para afrontar con éxito las tareas que se proponen.

2.1 Descripción de la tarea

Describimos la tarea en términos de sus metas, los conceptos y procedimientos que se abordan, los materiales y recursos que se utilizan, y el esquema de agrupamiento que se propone.

Meta. La meta de esta tarea consiste en obtener información del estado inicial de los estudiantes en relación con capacidades que involucran conocimientos previos a la razón trigonométrica y determinar un conjunto de ayudas en caso de que dichas capacidades no estén desarrolladas o lo estén parcialmente.

Conceptos y procedimientos abordados. Las preguntas que conforman la tarea están relacionadas con los contenidos que se consideran necesarios para el trabajo temático de la unidad didáctica. Se clasifican en aspectos geométricos y algebraicos. En los primeros, proponemos preguntas relacionadas con la clasificación, definición y medidas de ángulos, elementos y propiedades de los triángulos, del triángulo rectángulo y de la circunferencia, y la semejanza de triángulos. En los aspectos algebraicos, consideramos el planteamiento de ecuaciones.

Sistemas de representación que se activan. Se espera que los estudiantes hagan uso del sistema de representación geométrico al responder las preguntas 1, 2, 4, y 5. En las preguntas 3, 8 y 9, se realizan traducciones entre los sistemas de representación geométrico y simbólico. En las preguntas 6, 7 y 8, es posible activar los sistemas de representación geométrico y numérico.

Contexto en el que se sitúa la tarea. Las primeras preguntas están situadas en un contexto científico, al incluir aspectos netamente matemáticos. La última pregunta se sitúa en un contexto profesional, pues aborda la labor de una persona dedicada a la ornamentación.

Materiales y recursos. Los materiales para esta tarea son el material fotocopiable, el transportador y la regla.

Agrupamiento de los estudiantes e interacciones previstas. Sugerimos que la tarea se realice individualmente.

2.2 Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Es importante que antes de implementar la tarea 2, el profesor haga una revisión de lo que contestaron los estudiantes en esta tarea y realice un listado de los resultados individuales y grupales que se obtuvieron. Esto será clave para que el profesor brinde a sus estudiantes las ayudas que sean necesarias.

2.3 Capacidades y caminos de aprendizaje

La tarea permite identificar dificultades relacionadas con las capacidades C4, C5, C6, C7, C9, C11, C14 y C18 (ver tabla 3).

2.4 Errores en los que pueden incurrir los estudiantes

Al abordar la tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores como E1.1 y E2.1 (ver tabla 4).

2.5 Ayudas para el profesor

Sugerimos una ayuda para cada una de las posibilidades que se pueden presentar en la solución de la tarea. La primera posibilidad consiste en que los estudiantes no reconozcan las diferentes clases de triángulos, las propiedades de la suma interna de sus ángulos y la desigualdad triangular. Para superar estas, dificultades el profesor puede proponer a los estudiantes construir triángulos con diferentes medidas, e incluir algunas con las que sea imposible construir un triángulo, como, por ejemplo, 3 cm, 4 cm y 1 cm. Otra dificultad que el profesor puede identificar, consiste en que los estudiantes no reconozcan elementos de la circunferencia y del círculo. Al respecto, se recomienda proponer actividades manipulativas en las que deban utilizar la idea de radio, diámetro y arco. Por ejemplo, se puede guiar la construcción de un ying-yang. Finalmente, los estudiantes pueden tener dificultades para comprender el teorema de Pitágoras. El profesor puede orientar el trabajo de los estudiantes utilizando rompecabezas con los que se demuestra geométricamente el teorema.

2.6 Evaluación

Sugerimos no calificar los resultados de la tarea. Su propósito es determinar el estado inicial de cada estudiante frente a los conceptos previos. Es importante no enfocar la prueba en la memorización de definiciones. Por esta razón, también sugerimos hacer explícitas las definiciones de las siguientes figuras: triángulo rectángulo, obtusángulo, acutángulo, escaleno, isósceles, escaleno y equilátero, circunferencia y círculo.

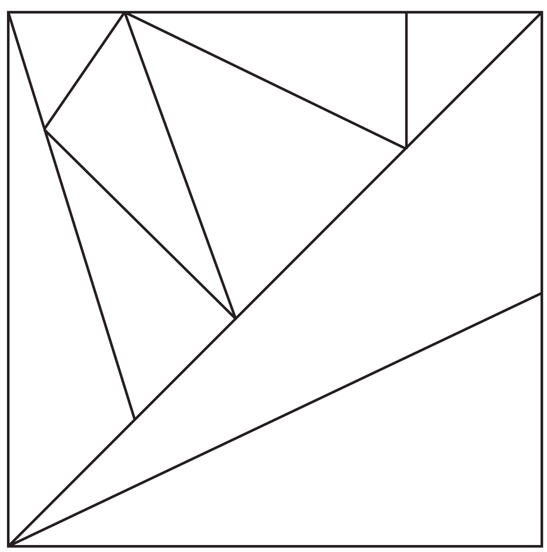
2.7 Material fotocopiable

Prueba diagnóstica

Nombre: ____ Fecha: ____________

Observa la figura y con base en esta contesta las preguntas 1 a 5.

1. ¿Qué tipos de triángulos puedes distinguir en la figura? Escoge uno, cálcalo, recórtalo, y pégalo al lado de la figura, luego dí qué tipo de triángulo es.



   Mide los ángulos internos de al menos tres triángulos de la figura. ¿Cuánto suman los ángulos internos en cada triángulo? ____________, ____________ y ____________.

2. Con base en la solución que le diste a la pregunta anterior, indica si es posible que los ángulos de un triángulo midan: (a) 35°, 83° y 54°; (b) 30º, 80º y 75º y (c) 32º, 77º y 71º. Justifica cada una de las respuestas.

3. Selecciona tres triángulos, mide sus lados y simboliza sus medidas con las letras c, d y e. Según tus resultados, di si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones.

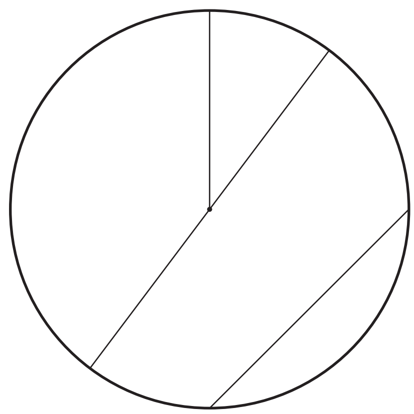
   a. $c + d = e$, b. $c + d < e$ c. $c + d > e$.

   Justifica cada una de las respuestas.

4. A continuación se presentan cuatro afirmaciones. Escoge la opción que identifica aquellas afirmaciones que son verdaderas. Justifica tu respuesta.
   I. Existen triángulos que son equiláteros y obstusángulos.
   II. Existen triángulos que son isósceles y obtusángulos.
   III. Existen triángulos que son escalenos y rectángulos.
   IV. Existen triángulos que son equiláteros y rectángulos.

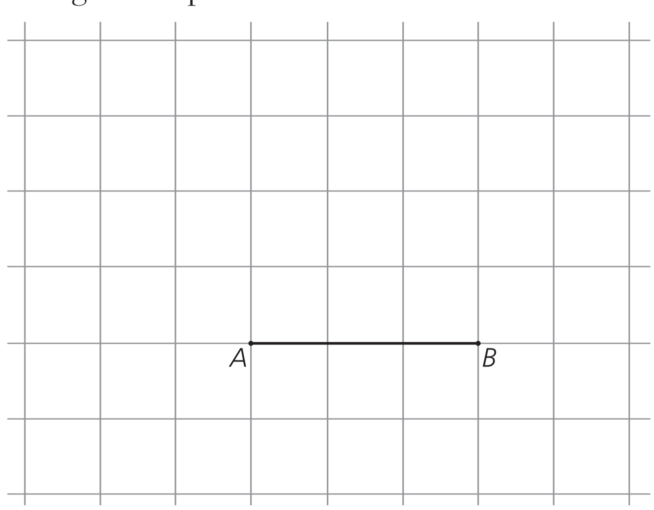
   a. I, II, y IV
   b. II, III y IV
   c. II y III
   d. II, III y IV

5. Observa la siguiente figura.

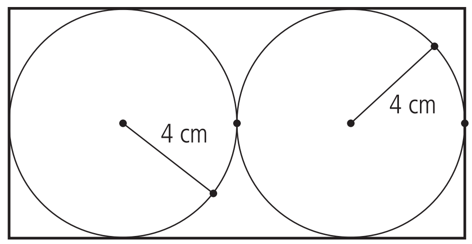


- Identifica las líneas que se encuentran en el círculo y resalta con un color distinto cada una.
- Escribe el nombre con el que se conoce a cada una de estas líneas frente al color que utilizaste para distinguirlas.
- Si no identificas ninguna, describe tu dificultad para reconocerlas.

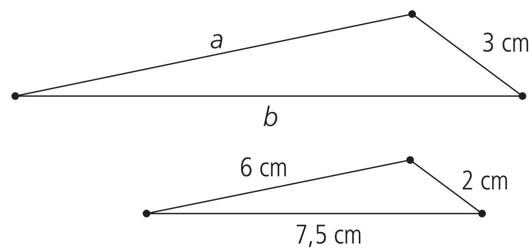
6. Traza, a partir del segmento $\overline{AB}$, ángulos de 60°, 420°, −60° y −420° y describe la relación que encuentras entre estos ángulos. Utiliza como vértice de cada uno de los ángulos el punto A.



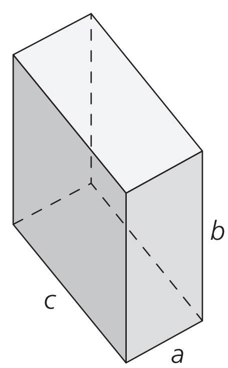
7. Observa la figura y determina el perímetro del rectángulo. Describe cada uno de los pasos que realizaste para lograrlo.



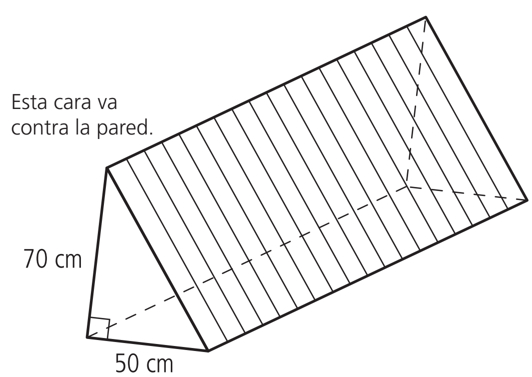
8. Si los triángulos representados en la figura son semejantes, las longitudes de los lados *a* y *b* son
   a. 9 cm y 11,5 cm
   b. 9 cm y 11,25 cm
   c. 7 cm y 8,5 cm
   d. 7 cm y 6,5 cm



9. Teniendo en cuenta la siguiente imagen, halla una expresión para determinar el volumen del sólido mostrado.



10. Para proteger su pintura, se quiere poner una teja en el frente de una casa. Para ello se consiguió una estructura como la que se muestra en la figura.



La medida del lado más pequeño de la teja, aproximadamente es

a. 8,6 m b. 86 m
c. 0,86 m d. 7 400 cm

3 Tarea 1: La escalera (T1). Sesiones 3 y 4

La tarea La escalera está estructurada en tres fases. La primera fase es de exploración. En ella, los estudiantes miden y obtienen diferentes datos como el ángulo de inclinación, altura, profundidad y largo de diferentes escaleras. Además, establecen las razones entre las últimas tres cantidades. En la segunda fase, cada grupo de estudiantes socializa sus resultados. La tercera fase implica resolver dos preguntas problema a partir de lo concluido en la primera fase y los acuerdos a los que llegaron en la segunda. La socialización de esta parte se debe orientar para llegar a identificar el ángulo de la escalera con las relaciones entre las variables estudiadas y reconocer las dificultades que surgieron a lo largo del proceso.

3.1 Descripción de la tarea

Describimos la tarea en términos de sus metas, los conceptos y procedimientos que se abordan, los materiales y recursos que se utilizan, y el esquema de agrupamiento que se propone.

Meta. La meta de la tarea consiste en relacionar ángulos con razones que permanecen constantes.

Conceptos y procedimientos abordados. La tarea abarca contenidos conceptuales que se refieren a conocimientos previos. En particular, implica la semejanza de triángulos y los elementos y propiedades de los triángulos rectángulos. La tarea implica los siguientes contenidos procedimentales: identificación de regularidades y patrones, representación de datos de un problema a partir de dibujos, medición de ángulos y longitudes, y resolución de triángulos a partir de la semejanza.

Sistemas de representación que se activan. Se espera que los estudiantes hagan uso del sistema de representación geométrico. A diferencia de la tarea anterior, se incluye el sistema de representación tabular. Este sistema es fundamental para que el estudiante identifique regularidades que le permitan comprender la meta que se tiene con la tarea. El sistema de representación numérico también se activa. Las transformaciones entre diferentes signos del sistema de representación numérico se pueden presentar de varias formas. Por ejemplo, al medir las longitudes, los estudiantes pueden recurrir a aproximaciones, si son medidas directas; o a valores exactos, si son medidas indirectas. En la misma tabla se pueden escribir transformaciones como las siguientes: $\frac{5}{5} = 1, \sqrt{2} \approx 1{,}414$.

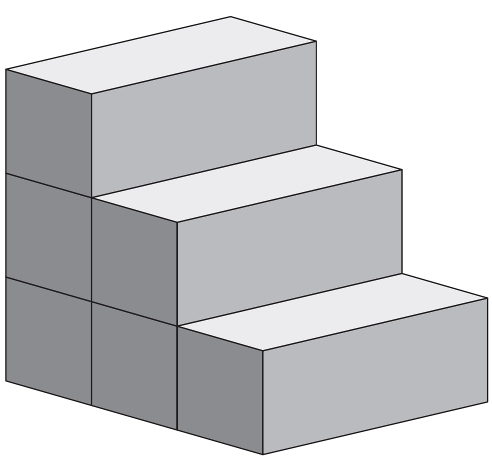
Contexto en el que se sitúa la tarea. Esta tarea se ubica en un contexto personal. Puntualmente se busca reflexionar sobre las propiedades geométricas de un objeto que hace parte de la cotidianidad de las personas.

Materiales y recursos. En la tarea, se utilizan seis prismas de base cuadrada, en cartón, un transportador, una cinta métrica para cada uno de los grupos de estudiantes, papel periódico o craft, y marcadores permanentes. Pueden utilizarse fichas en forma de prisma, cualquiera que sea el material. Para adaptaciones de esta tarea, se han utilizado fichas del juego Jenga. Recomendamos que todas las fichas estén hechas con las mismas medidas.

Agrupamiento de los estudiantes e interacciones previstas. Sugerimos que los estudiantes conformen grupos de tres personas. Cada estudiante desarrollará un rol activo y deberá medir ángulos y longitudes con la mayor precisión posible, deducir regularidades a partir de la tabla que ha completado y contestar preguntas a partir de las deducciones a las que llegue. El profesor tendrá roles diferentes dependiendo de la fase de la tarea. Si los estudiantes están trabajando en grupo, el profesor debe pasar por cada uno de ellos y realizar preguntas orientadoras. Mencionamos algunos ejemplos en las ayudas para el profesor.

3.2 Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

La tarea está dividida en tres fases. En la primera, se entrega a cada grupo el desarrollo plano, en cartón, de seis prismas iguales de base cuadrada, para que construyan una escalera de tres escalones (ver figura 2). Se pide que completen la tabla que se encuentra en el material fotocopiable y que aborden la pregunta ¿qué relación hay entre el ángulo de inclinación y las relaciones entre a y d, y entre a y l? El grupo de estudiantes debe hacer una cartelera con la tabla que completó.



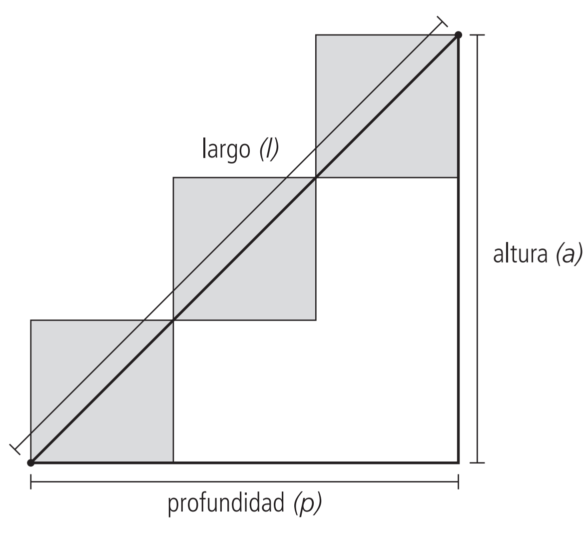


Figura 2. Escalera

En la segunda fase, cada grupo comparte los resultados de la primera fase con todo el curso. Se espera que el profesor guíe la participación de los estudiantes con el ánimo de que reconozcan las relaciones entre las variables. En la tercera fase, cada grupo debe enumerar las posibles dimensiones de los escalones —sin contar con material concreto— que tendrían los prismas para formar una escalera con un ángulo de inclinación de 30°, al considerar los resultados obtenidos en las fases 1 y 2. En esta fase, los estudiantes deberán contestar las siguientes preguntas.

- ¿Cuál será el largo de una escalera de 10 escalones que tiene un ángulo de inclinación de 45º?
- Si se sabe que el ángulo de inclinación de una escalera es 30º, ¿cuáles podrían ser las dimensiones de los prismas que forman dicha escalera? y ¿cuál sería la altura a la que se encontraría el escalón 10?

Se realiza luego una socialización con la que se busca llegar a los primeros acuerdos relacionados con la invariabilidad del ángulo y de las relaciones entre la profundidad y la altura, la profundidad y el largo de la escalera, y la altura y el largo de la escalera.

3.3 Capacidades y caminos de aprendizaje

La tarea busca activar las siguientes capacidades: C6, C11, C7, C9, C16, C10, C21 y C22 (ver tabla 3).

3.4 Errores en los que pueden incurrir los estudiantes

Al abordar la tarea los estudiantes pueden incurrir en errores como E7.1, E2.1, E3.1 y E7.4 (ver tabla 4).

3.5 Ayudas para el profesor

Al abordar la tarea, los estudiantes pueden manifestar dificultades como no identificar el triángulo rectángulo y asignar una medida equivocada a un ángulo por la forma en la que se ubica el transportador. Ambas dificultades pueden superarse si se hacen preguntas que orienten la exploración que el estudiante realiza. Para la primera, puede hacerse la pregunta ¿ves alguna relación entre la escalera que construiste y el gráfico de la tabla? Para la segunda, algunas preguntas que se pueden formular son las siguientes: ¿las medidas que tomaste son acordes con la construcción?, ¿cuál es la forma adecuada de utilizar el transportador?, ¿crees que hay otra forma?, ¿cuál?

Además de tener en cuenta las dificultades que podrían presentarse, sugerimos fomentar el debate con el fin de llegar a conclusiones tales como que el ángulo y las razones se mantienen sin importar el tamaño de la escalera. El debate podría orientarse con preguntas como las siguientes: ¿la escalera puede construirse con prismas más grandes de tal manera que posea el mismo ángulo de inclinación que la escalera inicial? y ¿cuántas posibilidades de dimensiones del prisma hay para obtener una escalera con un ángulo de inclinación de 30º?

3.6 Evaluación

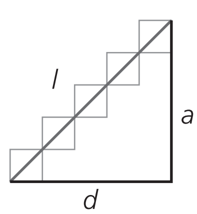
Teniendo en cuenta que esta tarea se centra en la identificación de regularidades y la argumentación que sobre estas se hace, recomendamos focalizar la mirada en los criterios generales que se encuentran en la tabla 7.

3.7 Material fotocopiable

Grupo: ______________________________

Integrantes: ______________________________

Con los prismas que se les ha dado, formen escaleras con el número de escalones que se indica en cada fila de la tabla y realicen las medidas del ángulo de inclinación, profundidad, altura y largo con la mayor precisión posible. Con base en la información que han obtenido, diligencien la siguiente tabla. Para el caso de siete escalones, tendrán que inferir los datos de todas las celdas, ya que el material dado no les será suficiente.

No. del escalón	2	3	7
Ángulo de inclinación			
Altura del escalón desde el suelo (*a*)			
Profundidad desde el pie de la escalera hasta el escalón (*d*)			
Largo de la escalera (*l*)			
Relación entre *a* y *d*			
Relación entre *a* y *l*			
Gráfico 			

¿Qué relación hay entre el ángulo de inclinación y las relaciones entre *a* y *d*, y entre *a* y *l*?

____

____

____

____

4 Tarea 2: Características (T2). Sesiones 5 y 6

Esta tarea se estructura en tres fases: (a) introducción a la terminología con la que se conocen las razones trigonométricas y los criterios que las definen; (b) búsqueda de acuerdos a partir de los elementos identificados por los estudiantes en la primera fase; y (c) búsqueda de las primeras razones trigonométricas y confirmación de los criterios que se han identificado en las fases anteriores. Aunque la tarea está enmarcada en una situación matemática y tiene un objetivo que se centra en el reconocimiento de acuerdos (definición y simbolos) que existen para la razón trigonométrica, fomenta la búsqueda de regularidades.

4.1 Descripción de la tarea

Describimos la tarea en términos de sus metas, los conceptos y procedimientos que se abordan, los materiales y recursos que se utilizan, y el esquema de agrupamiento que se propone.

Meta. La meta de la tarea consiste en establecer acuerdos sobre los nombres con los que se conocen las razones trigonométricas e identificarlas independientemente de la posición del triángulo.

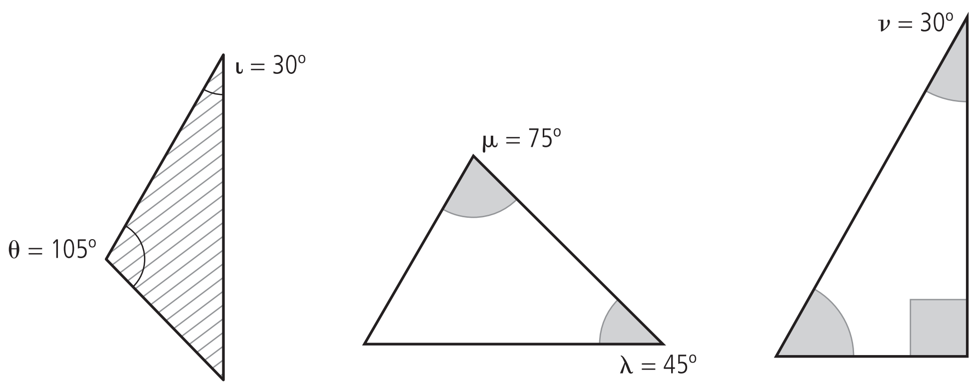
Conceptos y procedimientos abordados. La tarea abarca contenidos conceptuales que se refieren a los elementos y propiedades de los triángulos rectángulos y a las razones trigonométricas. La tarea implica los siguientes contenidos procedimentales: identificación de regularidades y patrones, cálculo de razones a partir de otras dadas y utilización del lenguaje funcional de las razones trigonométricas.

Sistemas de representación que se activan. Esta tarea activa el sistema de representación simbólico. Esto conlleva la inclusión de los nuevos símbolos que implica la trigonometría: sen(ω), cos(σ) y tan(ω). El énfasis de la tarea está puesto en las traducciones que permiten a los estudiantes relacionar estos signos con signos del sistema de representación geométrico y del sistema de representación numérico.

Contexto en el que se sitúa la tarea. La tarea está situada en un contexto científico. Todos los elementos implicados en la tarea pertenecen al campo de las matemáticas.

Materiales y recursos. En la tarea, se utiliza el material fotocopiable, regla y transportador. Es importante aclarar que las figuras que se entregan a los estudiantes en la tercera fase deben tener al menos cuatro características: (a) precisión en la construcción (pues van a ser medidas por los estudiantes y se espera que lleguen a resultados cercanos a los que se pueden determinar con una calculadora o tabla de valores trigonométricos); (b) debe haber triángulos rectángulos y no rectángulos; (c) la medida de los ángulos de los triángulos debe corresponder a los que se les pide en el momento de hallar las razones trigonométricas; (d) debe existir la posibilidad de que los estudiantes manipulen el material para armar triángulos rectángulos con un ángulo que coincida con los descritos en la guía 3 del material fotocopiable; y (d) los estudiantes deben poder deducir un ángulo agudo al realizar construcciones de triángulos rectángulos, sin importar el tamaño de las fichas que utilice (ver ejemplo en la figura 3). Sugerimos que el profesor realice una ampliación de la guía 3 antes de multicopiar y recortar el material para los estudiantes.

Fichas para hallar el seno, coseno y tangente de 60º



Construcción con las fichas para hallar el seno, coseno y tangente de 60º

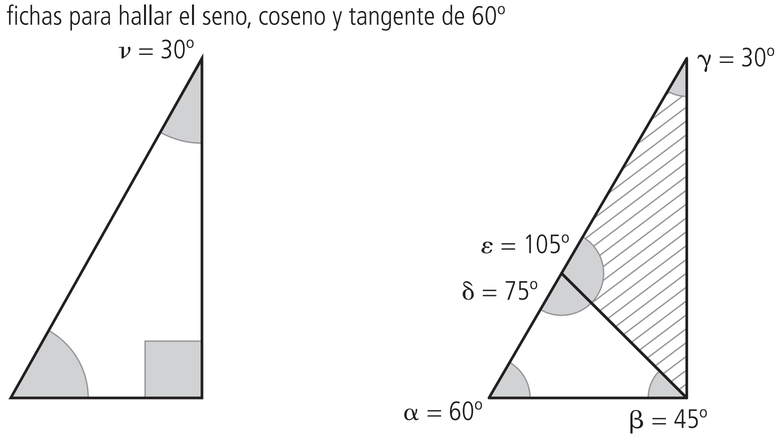


Figura 3. Ejemplo de construcción de un triángulo rectángulo con un ángulo de 60°

Agrupamiento de los estudiantes e interacciones previstas. Se proponen dos agrupamientos distintos. En la primera fase, el trabajo es individual. En las fases 2 y 3, los estudiantes trabajarán en parejas. Cada estudiante desarrollará un rol activo en la clase. Deberá identificar los criterios para determinar cada una de las razones trigonométricas, exponer sus conclusiones ante sus compañeros de grupo y hallar razones trigonométricas a partir de mediciones. El profesor tendrá roles diferentes dependiendo de la fase de la tarea. Si los estudiantes están trabajando en parejas, debe pasar por cada una de ellas y realizar preguntas orientadoras. Mencionamos algunos ejemplo en las ayudas para el profesor.

4.2 Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Al iniciar el trabajo en la sesión de clase, cada estudiante recibe la guía 1 que presenta ejemplos de razones entre los lados de un triángulo. Algunas de ellas son razones trigonométricas y otras no. A partir de la información anterior, se les pide que llenen la guía 2. Posteriormente, deben confrontar en parejas los resultados obtenidos en la primera fase y construir una solución grupal. Finalmente, se entrega a cada grupo de estudiantes los triángulos oblicuángulos, con los que deben formar triángulos rectángulos y hallar las razones trigonométricas para los ángulos 30°, 34°, 40°, 50° y 75°. Sugerimos que el profesor no de instrucciones para que los estudiantes construyan triángulos rectángulos. Se espera que ellos descubran este tipo de triángulos durante el desarrollo de la tarea.

4.3 Capacidades y caminos de aprendizaje

La tarea busca contribuir a la activación de las siguientes capacidades: C22, C40, C39, C21, C20 y C38 (ver tabla 3).

4.4 Errores en los que pueden incurrir los estudiantes

Al dar solución a la tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores como E3, E4, E5.1 y E7.3 (ver tabla 4).

4.5 Ayudas para el profesor

El profesor puede fomentar el debate al realizar preguntas como las siguientes: ¿qué afirmaciones, argumentos y conjeturas le surgió en el desarrollo de la actividad?, ¿para qué tipos de triángulos se dan las razones trigonométricas?, ¿para qué clase de ángulos se establecen las razones trigonométricas?, ¿cuántas razones trigonométricas hay?, ¿cuáles son los nombres de las razones? y ¿qué condiciones, características, similitudes y diferencias hay entre ellas?

4.6 Evaluación

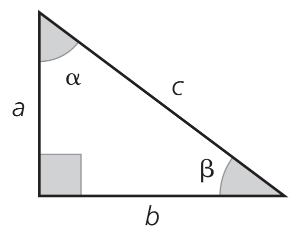
Dado que esta tarea se centra en la identificación de regularidades y la argumentación que se haga sobre ellas, recomendamos focalizar la mirada en los criterios generales que se encuentran en la tabla 7.

4.7 Material fotocopiable

Guía 1: Características

Identifica los criterios que determinan cada una de las razones trigonométricas. Escríbelos al respaldo de esta guía.

Estas sí son razones trigonométricas

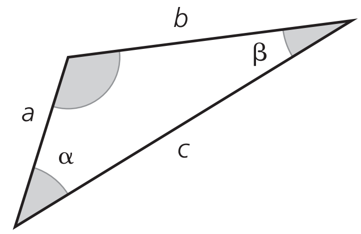


$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{a}{c}$

$\cos(\beta) = \frac{b}{c}$

$\tan(\beta) = \frac{a}{b}$

Estas no son razones trigonométricas

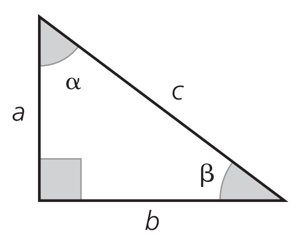


$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{b}{c}$

$\cos(\alpha) = \frac{a}{c}$

$\tan(\alpha) = \frac{b}{a}$

Estas sí son razones trigonométricas

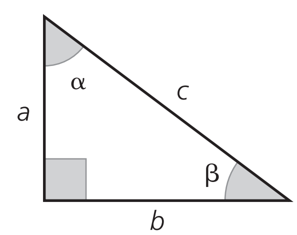


$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{b}{c}$

$\cos(\alpha) = \frac{a}{c}$

$\tan(\alpha) = \frac{b}{a}$

Estas no son razones trigonométricas

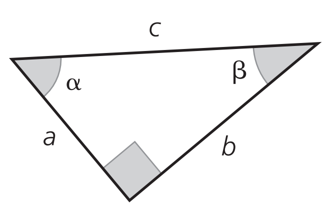


$\operatorname{sen}(90^{o}) = \frac{c}{c}$

$\cos(90^{o}) = \frac{b}{c}$

$\tan(90^{o}) = \frac{c}{b}$

Estas sí son razones trigonométricas

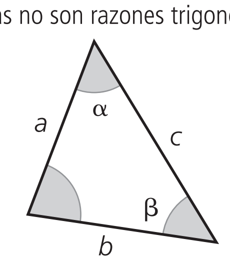


$\csc(\alpha) = \frac{c}{b}$

$\sec(\alpha) = \frac{c}{a}$

$\operatorname{ctg}(\alpha) = \frac{a}{b}$

Estas no son razones trigonométricas



$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{b}{c}$

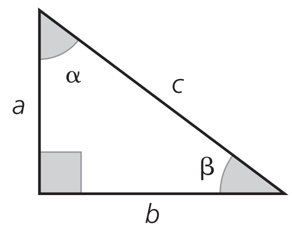
$\cos(\alpha) = \frac{a}{c}$

$\tan(\alpha) = \frac{b}{a}$

Guía 2: Características

Con base en los criterios identificados en la guía 1, completa las igualdades.

Estas sí son razones trigonométricas

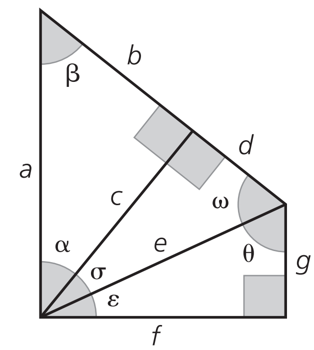


$\csc(\beta) = \frac{c}{a}$

$\sec(\beta) = \frac{c}{b}$

$\text{ctg}(\beta) = \frac{b}{a}$

Completar

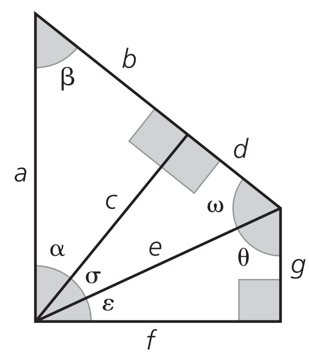


$\text{sen}(\beta) =$ —

$\cos(\beta) =$ —

$\tan(\beta) =$ —

Completar

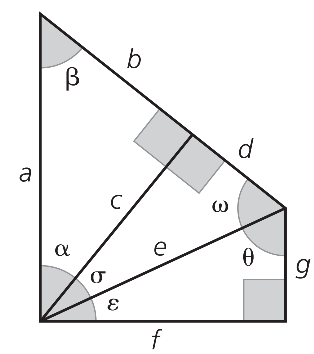


$\text{sen}(\theta) =$ —

$\cos(\theta) =$ —

$\tan(\theta) =$ —

Completar

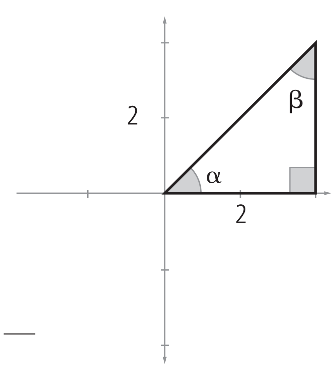


$\text{sen}(\omega) =$ —

$\cos(\omega) =$ —

$\tan(\omega) =$ —

Completar

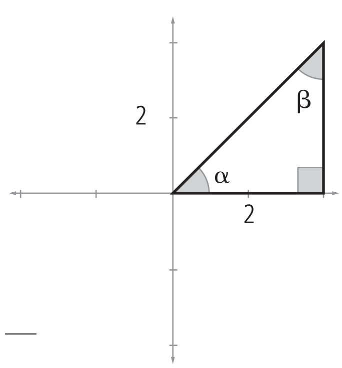


$\text{sen}(\beta) =$ —

$\cos(\beta) =$ —

$\tan(\beta) =$ —

Completar

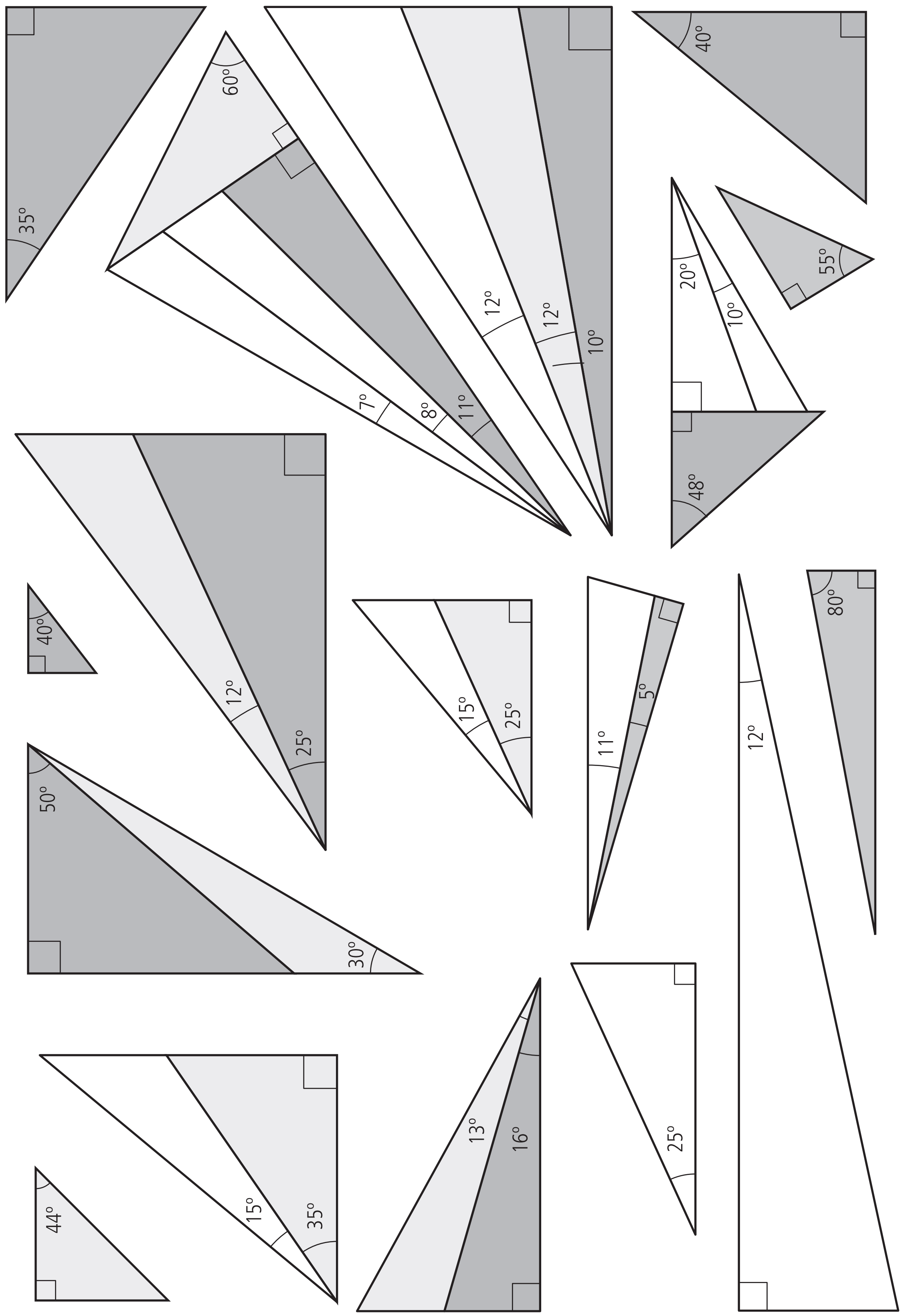


$\csc(\beta) =$ —

$\sec(\beta) =$ —

$\text{ctg}(\beta) =$ —

Guía 3: triángulos para recortar



Guía 4: Características
Completa la siguiente tabla a partir de las mediciones que hagas en las figuras entregadas. Las medidas deben ser lo más precisas posible.

Ángulo	sen	cos	tan	ctg	sec	Dibuja el triángulo que utilizaste (localiza en ese triángulo los datos que necesites para calcular las razones)
40º						
50º						
30º						
34º						
75º						

5 Tarea 3: La rueda de Chicago (T3). Sesiones 7 y 8

Esta tarea introduce otro significado de la razón trigonométrica relacionado con la noción de circunferencia. Hasta esta parte de la secuencia de tareas, la razón trigonométrica solo ha sido relacionada con ángulos agudos y triángulos rectángulos. Al introducir esta nueva noción, se incluyen sus elementos: la noción de pi (π) y la medida de los ángulos con radianes. Estas nociones se incluyen en el planteamiento de la tarea.

5.1 Descripción de la tarea

Describimos la tarea en términos de sus metas, los conceptos y procedimientos que se abordan, los materiales y recursos que se utilizan, y el esquema de agrupamiento que se propone.

Metas. Al resolver la tarea, se espera que los estudiantes calculen la razón seno y coseno de cualquier ángulo, establezcan la relación del seno y coseno de los ángulos complementarios y suplementarios, y deduzcan el signo de las razones seno y coseno en cada uno de los cuadrantes.

Conceptos y procedimientos abordados. La tarea abarca contenidos conceptuales que se refieren a medidas de ángulos en grados y radianes, ángulos en posición normal, equivalencia entre ángulos, elementos de la circunferencia, circunferencia goniométrica y razones trigonométricas de ángulos de cualquier medida. La tarea implica los siguientes contenidos procedimentales: representación gráfica de las razones trigonométricas; identificación de regularidades y patrones;

representación de datos de un problema a partir de dibujos; representación de las razones trigonométricas en el círculo goniométrico; identificación de identidades trigonométricas; utilización del lenguaje funcional de las razones trigonométricas; identificación de identidades relacionadas con el signo de la razón, según el cuadrante, y con ángulos complementarios y suplementarios; y solución de situaciones.

Sistemas de representación que se activan. Esta tarea activa el sistema de representación manipulable-ejecutable que propicia la identificación de resultados comunes para diferentes casos. Un ejemplo lo constituye la cantidad de radios que se requiere para medir una circunferencia. Al solucionar la tarea, también se activa el sistema de representación tabular con el que los estudiantes organizan la información para deducir ciertas regularidades. Por ejemplo, el seno, coseno y tangente de cualquier ángulo mayor a 90º se puede deducir con el seno, coseno o tangente de un ángulo de 0º a 90º. Los sistemas de representación simbólico y numérico también se activan al resolver esta tarea.

Contexto en el que se sitúa la tarea. La tarea pertenece a un contexto personal y científico. Se basa en un problema que exige el uso de elementos matemáticos para encontrar relaciones entre diferentes medidas angulares y lineales halladas en la noria de un parque de diversiones.

Materiales y recursos. El diseño de la tarea incluye las guías de trabajo del material fotocopiable y seis construcciones en el software GeoGebra. [www.e-sm.net/1gemad01]

Agrupamiento de los estudiantes e interacciones previstas. Se sugiere que los estudiantes se organicen en parejas. Se considera importante que cada uno de los estudiantes cuente con la oportunidad de manipular las construcciones, debido a que tal manipulación le facilitará hacer hipótesis que luego podrá compartir con su compañero de trabajo y con toda la clase.

5.2 Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

La tarea está dividida en tres fases. Para el desarrollo de las dos primeras, proponemos un trabajo en la sala de sistemas, dado que se requiere la manipulación de las construcciones en el computador. Antes de empezar la primera fase, se sugiere presentar el problema con el que empieza la guía 1. Luego, se explica a los estudiantes que la tarea se resolverá en tres fases descritas en el material fotocopiable.

La primera fase involucra cuatro construcciones: Radián, Pi, Arco, y Longitud de la circunferencia. Con las tres primeras construcciones, se busca que los estudiantes exploren y caractericen la noción de radián; que asocien la medida de un ángulo en radianes con grados y las medidas en grados y radianes con giros en la circunferencia; y que identifiquen diferentes unidades de medida para un ángulo. Con la cuarta construcción, se espera que los estudiantes reconozcan la relación entre la longitud de arco, radio y medida del ángulo central determinada por el arco. La guía 1 contiene las preguntas para trabajar en las cuatro construcciones.

La segunda fase involucra dos construcciones: Seno y coseno de ángulos menores a 90°, y Seno y coseno. Con la primera construcción, se busca que, a partir de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, ubicados como ángulos centrales en el primer cuadrante, los estudiantes asocien el seno de dichos ángulos con la distancia del punto sobre la circunferencia al eje y y asocien el coseno con la distancia del punto sobre la circunferencia al eje x. Con la segunda construcción, se busca que generalicen esas nuevas nociones de seno y coseno a ángulos de los otros cuadrantes. Además, se espera que los estudiantes identifiquen identidades de ángulos suplementarios y el signo de las razones según el cuadrante. Para la exploración de cada una de estas construcciones, se sugieren las preguntas de la guía 2 (ver material fotocopiable).

La fase tres consiste en solucionar individualmente las preguntas de la situación planteada al inicio de la tarea.

5.3 Capacidades y caminos de aprendizaje

La tarea busca contribuir a la activación de las siguientes capacidades: C12, C36, C10, C7, C26, C32, C30 y C37 (ver tabla 3).

5.4 Errores en los que pueden incurrir los estudiantes

Al dar solución a la tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores como E1.2, E2 y E4 (ver tabla 4).

5.5 Ayudas para el profesor

Recomendamos que el profesor genere una estrategia que permita que cada pareja de estudiantes cuente desde el inicio de la tarea con las seis construcciones de GeoGebra. Contar con un proyector puede ayudar a realizar la orientación para el trabajo en cada una de las construcciones.

5.6 Evaluación

Dado que esta tarea se centra en la identificación de regularidades y la argumentación que se haga de ellas, recomendamos focalizar la mirada en los criterios generales que se encuentran en la tabla 7.

5.7 Material fotocopiable

Rueda de Chicago

Lee la siguiente situación y genera tus primeras hipótesis sobre las respuestas que puedes dar a cada una de las preguntas. A continuación de la situación, se describen una serie de fases. Desarrolla cada una y finalmente retoma la situación para abordar nuevamente las preguntas.

La siguiente figura muestra un dibujo de la atracción mecánica Rueda de Chicago en un parque de diversiones. Supón que una persona se encuentra en la canastilla 1 de la atracción.

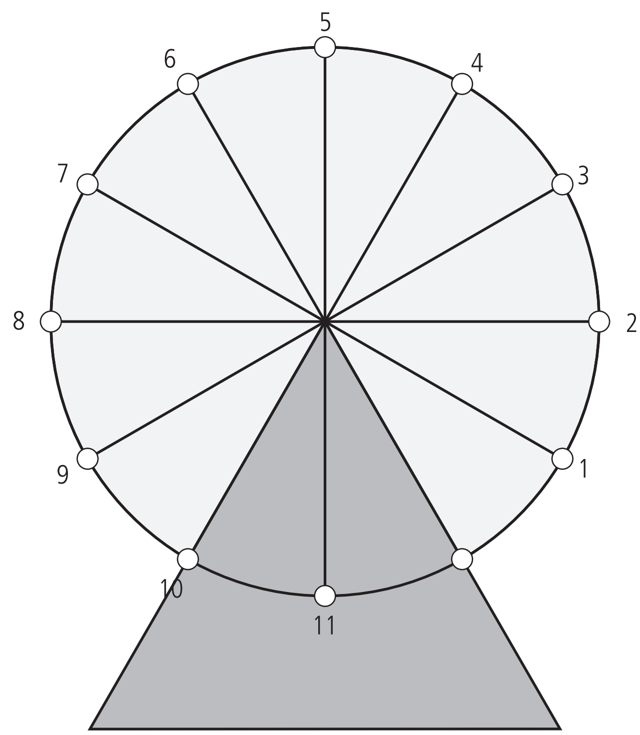


Figura 4. Rueda de Chicago

1. Transcurrido un tiempo, la persona se encuentra en la posición de la canastilla 3. Si el brazo que sostiene cada canastilla es de 20 m, ¿cuántos metros ha recorrido la persona en dicha canastilla?
2. Y si la persona se encuentra en la posición de la canastilla 6, ¿cuántos metros habrá recorrido?
3. Si la rueda girara en el sentido de las manecillas del reloj, ¿cuál debe ser el ángulo que forma el brazo de la canastilla 1 con el brazo de la nueva posición, para que la distancia recorrida sea la misma a las mencionadas en las preguntas 1 y 2?
4. Si la persona está en la canastilla 1, ¿qué ángulo debe recorrer su canastilla para que quede en la posición de la canastilla 3?

5. ¿Cuál es la distancia de la canastilla 3 al brazo de la canastilla 1? Con la distancia, nos referimos a la medida del segmento que va desde el centro de la canastilla y es perpendicular al brazo de la otra canastilla
6. ¿Cuál es la distancia de la canastilla 3 al brazo de la canastilla 4?

Fase 1

Abre cada una de las construcciones y responde las preguntas que se describen a continuación. [www.e-sm.net/1gemad01]

Construcción 1: Radián

1. Mueve el punto verde. ¿Qué cambia en la circunferencia?¿Qué representa *S*?
2. Ubica el ángulo 72°. ¿Qué semirrectas forman este ángulo? ¿Cuál es el vértice? ¿Cuánto miden el radio de la circunferencia y el arco azul?
3. Mueve el punto verde hasta conseguir que el radio y el arco tengan la misma longitud.
4. ¿Qué medida tiene en ese momento el ángulo correspondiente? A esa medida se le llama 1 radián.
5. Mueve el punto *B* y observa. ¿Qué medidas cambian de la circunferencia? ¿Cuáles permanecen constantes?
6. ¿Qué ángulo es mayor, uno de 1 radián u otro de 60º?
7. Describe con tus palabras qué es un radián.

Construcción 2: Pi

1. Mueve el punto verde hasta visualizar un ángulo de 2 radianes. ¿Cuántos grados mide? ¿Y el de 3 radianes? ¿Y el de 5 radianes? ¿Y medio radián?
2. Visualiza un ángulo de 180º. Aproximadamente, ¿cuántos radianes son? ¿Puedes hallar el valor exacto? ¿Por qué?

Construcción 3: Arco

1. ¿Cuántos puntos encuentras sobre la circunferencia?
2. ¿Cuánto mide cada ángulo central formado con el punto *C*?
3. Mueve el punto verde y compara el valor que observas del ángulo con el que escribiste en el punto anterior.
4. Completa la tabla.

Giro	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{12}{12}$
Ángulo en radianes												

5. Dibuja la circunferencia que observas en la construcción. Ubica en ella 2π, π, $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$.
6. ¿Cuántos radianes serán 180º y 90º? ¿Por qué?

7. Completa la siguiente tabla.

Ángulo en grados	0º	30º	60º	90º	120º	150º	180º	210º	240º	270º	300º	330º	360º
Ángulos en radianes													

8. Con la información anterior, ¿cómo hallarías la medida de un ángulo de 45º en radianes? ¿Cómo hallarías la de 55º, 75º, 125,5º, 275º, 5 y 333,45º?

Construcción 4: Longitud de la circunferencia

1. Ubica el punto *B* en 2; es decir, deja la circunferencia con radio 2 ($r = 2$). Desplaza el punto verde y observa qué cambia en la circunferencia. Luego, completa la siguiente tabla. Utiliza una calculadora para completar $r\alpha$.

α		S	$r\alpha$
Grados	Radianes		
0º			
10º			
30º			
50º			
70º			
90º			

2. Conserva la circunferencia de radio 4; es decir, ubica el punto *B* en 4. Completa una tabla como la utilizada en la pregunta anterior.
3. Conserva la circunferencia de radio 5, es decir, ubica el punto *B* en 5. Completa otra tabla igual a la utilizada en la pregunta anterior. Utiliza una calculadora para completar la columna $r\alpha$. ¿Qué concluyes a partir de las tablas de estos dos últimos ítems?

Fase 2

Abre cada una de las construcciones, sigue las instrucciones y responde las preguntas que se hacen. [www.e-sm.net/1gemad01]

Construcción 5: Seno y coseno para ángulos menores a 90°

Al mover el punto rojo cambia el punto *C* sobre la circunferencia y el ángulo central que este punto determina. En la parte superior, encuentras información de la coordenada del punto *C* sobre la circunferencia y la distancia de los catetos del triángulo rectángulo *ACD*. Explora la construcción moviendo el punto rojo.

1. Ubica en el triángulo el ángulo central 30º. Con la información que se te muestra ¿cómo calcularías el valor de sen(30º) y cos(30º)? ¿Cuál es la distancia entre el punto *C* y el eje *x*? ¿Y la distancia entre el punto *C* y el eje *y*?
2. Ubica en el triángulo el ángulo central 45º. ¿Cuál es el valor de sen(45º) y cos(45º)? ¿Cuál es la distancia entre el punto *C* y el eje *x*? ¿Y la distancia entre el punto *C* y el eje *y*?

3. Ubica en el triángulo el ángulo central 60º. ¿Cuál es el valor de sen(60º) y cos(60º)? ¿Cuál es la distancia entre el punto C y el eje x? ¿Y la distancia entre el punto C y el eje y?
4. Ubica en el triángulo el ángulo central 70º. ¿Cuál es el valor de sen(70º) y cos(70º)? ¿Cuál es la distancia entre el punto C y el eje x? ¿Y la distancia entre el punto C y el eje y?
5. Completa la tabla con los resultados obtenidos en los puntos anteriores.

Coordenada Punto C	Ángulo: α	sen(α)	cos(α)	Distancia de C al eje x	Distancia de C al eje y

6. ¿Hay alguna relación entre el valor del seno y coseno del ángulo determinado por el punto sobre la circunferencia y la distancia de este punto al eje x y la distancia al eje y?

Construcción 6: Seno y coseno

1. Considera los ángulos del cuadrante II, III y IV y completa la tabla.

Coordenada del punto C	Ángulo: α	Cuadrante al que pertenece el ángulo α	sen(α)	cos(α)	Distancia de C al eje x	Distancia de C al eje y
	95º					
	115º					
	120º					
	135º					
	170,5º					

2. ¿Qué valores toma seno cuando los ángulos pertenecen al cuadrante I? ¿Y a los cuadrantes II, III y IV?
3. ¿Qué valores toma coseno cuando los ángulos pertenecen al cuadrante I? ¿Y a los cuadrantes II, III y IV?
4. ¿Entre qué números se encuentran los valores de seno y coseno de cualquier ángulo de 0° a 360°?
5. Toma 3 ángulos del cuadrante II y completa la siguiente tabla.

Ángulo: α	sen(α)	sen(180º − α)

6. ¿Qué puedes concluir de los resultados de la tabla?

7. Toma 3 ángulos del cuadrante III y completa la tabla.

Ángulo: α	$\text{sen}(\alpha)$	$-\text{sen}(\alpha - 180°)$

8. ¿Qué puedes concluir de los resultados de la tabla?
9. Considera 3 ángulos de cada cuadrante y completa la tabla.

Ángulo: α	$\cos(\alpha)$	$\cos(-\alpha)$	$\text{sen}(\alpha)$	$\text{sen}(-\alpha)$

10. ¿Qué puedes concluir de los resultados de la tabla?

Fase 3
Resuelve individualmente las preguntas de la situación planteada al inicio de la tarea.

6 Tarea 4: Canicas (T4). Sesiones 9 y 10

La tarea Canicas presenta un problema cuyo nivel de dificultad radica en la identificación del triángulo rectángulo y en la generalización que este requiere. Para abordarlo, la tarea se divide en tres fases. La primera fase es un trabajo con material concreto, en el que las variables puestas en juego son el ángulo y la distancia inicial entre las canicas. En la segunda fase, el material utilizado es una construcción en GeoGebra en la que pueden identificarse las tres variables —las reconocidas en la primera fase y el radio de la canica—. La fase final es la elaboración de la respuesta al problema a partir de lo que ha sido identificado y establecido en las dos primeras fases.

6.1 Descripción de la tarea

Describimos la tarea en términos de sus metas, los conceptos y procedimientos que se abordan, los materiales y recursos que se utilizan, y el esquema de agrupamiento que se propone.

Metas. Las metas de la tarea se centran en la utilización de las razones trigonométricas para generalizar relaciones entre variables en una situación particular y utilizar la función arcoseno.

Conceptos y procedimientos abordados. La tarea abarca contenidos conceptuales que se refieren a elementos y propiedades de los triángulos rectángulos y a las razones trigonométricas, específicamente a las relaciones seno y arcoseno. También involucra los siguientes contenidos procedimentales: identificación de regularidades y patrones, planteamiento de ecuaciones, utilización del lenguaje funcional de las razones trigonométricas, y resolución de situaciones.

Sistemas de representación que se activan. Esta tarea cuenta con varias características de un problema. Por esa razón, implica varios sistemas de representación como son el numérico, el tabular, el manipulable-ejecutable, el geométrico y el simbólico. La solución que solicita el problema es simbólica. Los demás sistemas de representación son claves para propiciar la traducción entre lo gráfico y lo simbólico o lo tabular y lo simbólico.

Contexto en el que se sitúa la tarea. La tarea se sitúa en un contexto personal.

Materiales y recursos. Para resolver la tarea se necesita el material fotocopiable, dos canicas, dos octavos de cartulina negra, una bolsa pequeña de tiza de trazo en polvo, plastilina, regla, transportador y una construcción en GeoGebra. [www.e-sm.net/1gemad02] El estudiante deberá marcar, con el lápiz blanco y sobre la cartulina negra, un segmento de 10 cm; luego adherirá en uno de los extremos del segmento, con una pequeña porción de plastilina, una canica; y, finalmente, y desde el otro extremo del segmento, lanzará la otra canica habiéndola empolvado previamente con tiza de trazo. Con lo anterior, logrará verse el ángulo de desviación del que trata el problema. Los estudiantes deben realizar el ejercicio el número de veces que consideren necesario para conjeturar sobre el máximo ángulo de desviación después de efectuar el choque entre las canicas. En la construcción en GeoGebra, se representa la situación de las canicas. Sugerimos permitir que los estudiantes manipulen la distancia, el radio de las canicas y el ángulo de desviación, así como realizar trazos sobre la construcción. Por ejemplo, pueden construir segmentos que unan los centros de las dos canicas o un triángulo cuyos vértices serían los centros de las tres canicas (una de ellas representa el movimiento de la canica lanzada).

Agrupamiento de los estudiantes e interacciones previstas. Sugerimos conformar parejas de trabajo. Cada estudiante desarrollará un rol activo en la clase. Deberá realizar la exploración tanto con el material concreto, como con el software, y proponer hipótesis sobre el ángulo de desviación que se basen en la experiencia con ambos materiales. El profesor tendrá roles diferentes dependiendo de la fase de la tarea. Si los estudiantes están trabajando en grupo, el profesor debe pasar por cada uno de ellos y realizar preguntas orientadoras. Hemos mencionado algunos ejemplos en las ayudas para el profesor.

6.2 Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

La tarea está dividida en tres fases. Antes de iniciarlas, el profesor explicitará el enunciado del problema (ver guía 1). En la primera fase, se busca que los estudiantes establezcan experimentalmente el mayor ángulo de desviación con el que puede lanzarse la primera canica para dar a la segunda. Para ello, proponemos que el primer abordaje de la tarea se realice con un caso particular a partir de material concreto. Para esta primera exploración, se explicará a los estudiantes cómo utilizar los materiales manipulativos, esto es, cómo colocar una canica y marcar el ángulo que deberán medir. Los estudiantes deben consignar los resultados obtenidos en la guía. En la segunda fase, se busca que, a partir de la construcción, los estudiantes identifiquen las variables radio, distancia entre las canicas y la relación entre ambas. Para ello, proponemos una construcción en GeoGebra. A partir de la construcción, deberán continuar solucionando la guía. En la tercera fase, se busca que generalicen la situación a partir de lo trabajado en las fases anteriores y, con ello, den solución a la situación planteada inicialmente.

6.3 Capacidades y caminos de aprendizaje

La tarea busca contribuir a la activación de las siguientes capacidades: C1, C6, C7, C35, C8, C14, C33, C12, C17 y C3 (ver tabla 3).

6.4 Errores en los que pueden incurrir los estudiantes

Al dar solución a la tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores como E7.5, E2.1, E7.2, E7.6, E7.4, E3.1 y E1.3 (ver tabla 4).

6.5 Ayudas para el profesor

Sugerimos que en la segunda fase los estudiantes puedan realizar rectas o segmentos en la construcción, ya que esto les permitirá visualizar algo cercano al triángulo rectángulo que requiere la solución del problema.

6.6 Evaluación

Esta tarea permite hacer un primer corte en la unidad didáctica. Permite preparar una realimentación a partir de la evidencia que se obtenga sobre el conocimiento de cada uno de los estudiantes. Los criterios que proponemos para esta tarea son los criterios asociados al objetivo 3 (ver tabla 8).

6.7 Material fotocopiable

Canicas

Grupo: ______________________________ Fecha: ______________

Lee el enunciado del problema y abórdalo siguiendo las tres fases que se proponen. Para la primera fase, necesitarás dos canicas, dos octavos de cartulina negra, una bolsa pequeña de tiza de trazo en polvo, plastilina, regla y transportador. Primero debes marcar con lápiz blanco en la cartulina negra un segmento de 10 cm; luego, adherir una canica en uno de los extremos del segmento, con una pequeña porción de plastilina; y, finalmente y desde el otro extremo del segmento, lánza la otra canica habiéndola empolvado previamente con tiza de trazo. Para la segunda fase, contarás con una construcción en GeoGebra en la que podrás mover cualquiera de los segmentos ubicados a la derecha de la figura. Al moverlos, podrás verificar que varía el aspecto de la figura. Analiza estos cambios y contesta las preguntas que se han planteado para esta fase. En la tercera fase, debes proponer una solución al problema.

Problema. Dos canicas tienen radio r y están separadas una distancia d. Halla el máximo ángulo de desviación con el que puede lanzarse la primera canica para dar a la segunda.

Fase 1

1. Completa la tabla con base en la experimentación con las canicas:

Número del lanzamiento	1	2	3	4	5	6
Distancia entre las canicas	10 cm	10 cm	10 cm	10 cm	10 cm	10 cm
Ángulo de lanzamiento						

2. Realiza gráficos en los que se evidencien tres de los lanzamientos que se describen en la tabla anterior.
3. Halla el máximo ángulo con el que puede golpearse la canica y explica cómo lo estableces.

Fase 2. Trabajo en parejas

1. A partir de la construcción de GeoGebra completa cada una de las siguientes tablas. [www.e-sm.net/1gemad02]

Caso A

Radio	Distancia	Ángulo con el que es posible golpear la canica
1 cm	5 cm	
1 cm	5 cm	
1 cm	5 cm	
1 cm	5 cm	
1 cm	5 cm	
1 cm	5 cm	

Caso B

Radio	Distancia	Ángulo con el que es posible golpear la canica
1 cm	10 cm	
1 cm	10 cm	
1 cm	10 cm	
1 cm	10 cm	
1 cm	10 cm	
1 cm	10 cm	

Caso C

Radio	Distancia	Ángulo con el que es posible golpear la canica
2,5 cm	5 cm	
2,5 cm	5 cm	
2,5 cm	5 cm	
2,5 cm	5 cm	
2,5 cm	5 cm	
2,5 cm	5 cm	

2. Realiza gráficos en los que se evidencien tres de los lanzamientos que se describen en cada una de las tablas anteriores.
3. Para cada uno de los casos (A, B y C), halla el máximo ángulo con el que puede golpearse la canica y explica cómo lo determinas.
4. Para cada uno de los casos (A, B y C), realiza el gráfico en el que se evidencie el máximo ángulo con que debe lanzarse la canica para golpear a la otra.

Fase 3. Trabajo individual

1. ¿Cómo puedes representar el máximo ángulo de desviación con que debe lanzarse una canica para golpear a la otra? El radio de la canica es r y la distancia entre las canicas es d.

7 Tarea 5: La sombra (T5). Sesiones 11 y 12

Esta tarea tiene como propósito la solución de situaciones reales que implican el cálculo de longitudes en contextos inaccesibles haciendo uso de las razones trigonométricas. Se desarrolla en dos fases. En la primera fase, la intención es conocer la altura del árbol más alto del patio de juegos del colegio. En la segunda fase, los estudiantes deben construir un modelo gráfico que represente la situación trigonométrica observada, con ayuda del software GeoGebra.

7.1 Descripción de la tarea

Describimos la tarea en términos de sus metas, los conceptos y procedimientos que se abordan, los materiales y recursos que se utilizan, y el esquema de agrupamiento que se propone.

Meta. La meta de la tarea consiste en calcular longitudes y ángulos en contextos inaccesibles, al hacer uso de las razones trigonométricas, y validar los resultados con el uso del software GeoGebra.

Conceptos y procedimientos abordados. La tarea desarrolla las nociones propias de las razones trigonométricas en función del uso de la razón tangente. Para ello, se utilizan los valores expresados en la situación y se requiere reconocer propiedades de tipo algebraico y geométrico, como el despeje de ecuaciones, la determinación de longitudes desde la perspectiva de distancias, y la medida de ángulos en contextos inaccesibles.

Sistemas de representación que se activan. Con esta tarea, se activan los sistemas de representación numérico, tabular, geométrico y manipulativo-ejecutable. Con este último, se busca que el estudiante logre identificar las variables y la constante presente en el problema.

Contexto en el que se sitúa la tarea. El contexto en el que está ubicada la tarea es científico.

Materiales y recursos. Para el desarrollo de la tarea se requiere el material fotocopiable, un goniómetro casero, cinta métrica, lápiz, papel, calculadora de funciones y el software GeoGebra.

Agrupamiento de los estudiantes e interacciones previstas. En un primer momento, los estudiantes realizan la actividad de forma individual; luego trabajarán en grupos pequeños. Sugerimos que el profesor conforme los grupos de estudiantes.

7.2 Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

La tarea se desarrolla en dos fases. En la primera fase, los estudiantes deben seleccionar un árbol del patio del colegio y, con el uso de la cinta métrica, establecer la longitud de la sombra que el árbol proyecta. Luego, con el uso del goniómetro, deberán establecer el ángulo de elevación del Sol respecto al punto máximo de la sombra proyectada. Sugerimos realizar este procedimiento en horas específicas durante el día, al tomar un registro de los valores encontrados dentro de un instrumento diseñado para este propósito. En la segunda fase, los estudiantes deben realizar una construcción en el programa GeoGebra que represente la situación observada, de manera que sea posible apreciar la variación del ángulo respecto al movimiento de la longitud de la sombra proyectada y calcular la altura del árbol para cada una de las situaciones de variación generadas por el ángulo. Si el patio del colegio no tiene árboles, se puede realizar la tarea eligiendo otro objeto que proyecte sombra y cuya altura no se pueda medir directamente.

7.3 Capacidades y caminos de aprendizaje

La tarea activa las siguientes capacidades: C19, C16, C5, C17, C33, C31, C27, C25, C15, C14, C16, C32 y C21 (ver tabla 3).

7.4 Errores en los que pueden incurrir los estudiantes

Al dar solución a la tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores como E5.3, E8.1, E7.6, E7.5, E8.2, E5.3, E7.8, E10.1, E8.3 y E9.2 (ver tabla 4).

7.5 Ayudas para el profesor

El profesor puede formular preguntas a los estudiantes en dos momentos claramente diferenciados. El primero está relacionado con la etapa de diseño del modelo de representación que se da antes de la lectura del enunciado de la tarea. Las preguntas formuladas en esta parte deben indagar sobre aquellos procesos de argumentación y justificación que generaron y validaron la construcción del modelo de representación gráfica de la situación, realizados por los estudiantes. En este momento, es pertinente formular preguntas que permitan establecer con claridad cuáles fueron los elementos del triángulo que los estudiantes lograron relacionar, a partir de los datos suministrados en el enunciado de la tarea. El profesor también debe indagar sobre la forma como los estudiantes establecen las relaciones, cómo justifican la ubicación de datos en la gráfica y cómo hacen la relación proporcional de las longitudes con los valores dados. El segundo momento está relacionado con la etapa de planteamiento y solución de la razón desde la perspectiva trigonométrica y algebraica. Aquí, las preguntas que se formulen deben procurar indagar sobre las razones por las que los estudiantes deciden optar o no, por unos procedimientos específicos. También se deben formular preguntas que motiven a los estudiantes a justificar la elección de cada procedimiento.

7.6 Evaluación

Dado que esta tarea corresponde a la fase de desarrollo dentro de la estructura de la secuencia de tareas, uno de los objetivos principales de la evaluación consiste en determinar en qué medida se desarrollaron los procesos de representación gráfica del enunciado de la tarea. Es decir, se busca determinar si los esquemas propuestos corresponden a modelos que se ajustan con las condiciones de la tarea. Otro objetivo de la evaluación consiste en establecer la calidad de los argumentos usados por los estudiantes cuando establecen la razón trigonométrica con los datos suministrados (parámetros e incógnitas). También se busca determinar en qué medida el planteamiento de la razón se ajusta a los valores suministrados por el modelo gráfico. Para ello, hay que tener en cuenta los procedimientos algebraicos utilizados por los estudiantes.

7.7 Material fotocopiable

La sombra

Grupo: ______________________________ Fecha: ______________

Se quiere conocer la altura del árbol más alto del patio del colegio (puede escogerse cualquier otro elemento que esté en el exterior).

Fase 1

1. Elige un árbol del colegio para determinar su altura.
2. Registra los datos pedidos en la tabla (unos grupos recogen los datos de la mañana y los otros, los datos de la tarde).
3. Utiliza una cinta métrica para medir la sombra proyectada por el árbol.
4. Utiliza el goniómetro casero para medir el ángulo de elevación del Sol en las distintas horas del día (las mediciones obtenidas no deben variar mucho, se sugiere como máximo 3° de variación).
5. Presenta y discute con tus compañeros los resultados obtenidos en la tabla de cada grupo.

	Medida											
	Grupo 1			Grupo 2			Grupo 3			Grupo 4		
Hora	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Longitud de la sombra												
Ángulo de elevación del Sol												
Altura del árbol												

Fase 2
Cada grupo debe hacer una gráfica en el software GeoGebra [www.e-sm.net/1gemad03] que represente el problema. Para ello, hará uso de un triángulo rectángulo con el cual puedan mantener la altura del árbol fija, mientras que la del ángulo y la sombra varíe. Teniendo en cuenta estas especificaciones y los datos tomados en la tabla, se proponen las siguientes actividades.

1. Cambia el ángulo de elevación en la representación hecha en GeoGebra y establece la relación entre la longitud de la sombra y el árbol.

2. En cada uno de los casos anteriores (variación del ángulo), verifica a partir de la razón trigonométrica la altura del árbol.

8 Tarea 6: La cometa (T6). Sesión 13

Esta tarea tiene como propósito la solución de situaciones reales que implican el cálculo de longitudes y ángulos en contextos inaccesibles al hacer uso de las razones trigonométricas. La tarea se desarrolla en dos fases. La primera fase implica la determinación de una distancia inaccesible expresada en términos de una altura para un momento específico. La segunda fase busca determinar una longitud respecto a un punto de referencia particular.

8.1 Descripción de la tarea

Describimos la tarea en términos de sus metas, los conceptos y procedimientos que se abordan, los materiales y recursos que se utilizan, y el esquema de agrupamiento que propone.

Meta. La meta de la tarea consiste en calcular longitudes y ángulos en contextos inaccesibles haciendo uso de las razones trigonométricas.

Conceptos y procedimientos abordados. Dentro los procedimientos que aborda la tarea se encuentran la determinación de longitudes desde la perspectiva de distancias, la medida de ángulos, la utilización de las razones trigonométricas, el uso de sistemas de ecuaciones en el desarrollo de expresiones trigonométricas y los procesos de modelación para el cálculo de longitudes y ángulos en contextos inaccesibles.

Sistemas de representación que se activan. Con esta tarea, se activan los sistemas de representación geométrico, simbólico y numérico. Es necesario que el profesor oriente a los estudiantes para que realicen transformaciones con los datos presentes en la situación y planteen un sistema de ecuaciones para llegar a la solución del problema.

Contexto en el que se sitúa la tarea. La tarea se ubica en un contexto personal.

Materiales y recursos. La tarea requiere el uso de regla, papel, lápiz, trasportador, compás, calculadora de funciones y el software GeoGebra.

Agrupamiento de los estudiantes e interacciones previstas. Sugerimos realizar grupos de tres estudiantes. La conformación de los grupos tendrá en consideración las preferencias individuales de los estudiantes. El profesor tomará el registro de los grupos como un recurso de verificación y validación de los procesos de continuidad, para desarrollos posteriores.

8.2 Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

La tarea La cometa pertenece a la fase de desarrollo de la unidad didáctica. Por tanto, requiere poner en juego conceptos abordados en tareas previas a esta fase, como las razones trigonométricas seno, coseno y tangente desde la perspectiva de triángulos cualesquiera y las ecuaciones con expresiones trigonométricas.

8.3 Capacidades y caminos de aprendizaje

Las capacidades que se pueden activar en la primera fase de la tarea son las siguientes: C16.1, C16, C1, C7, C5, C27, C25, C15, C14 y C32. Para la segunda fase, se pueden activar las siguientes capacidades: C16.1, C16, C17, C5, C6, C27, C15, C14, C32 y C21 (ver tabla 3).

8.4 Errores en los que pueden incurrir los estudiantes.

Al abordar la primera fase de la tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores como: E5.3, E8.4, E8.1, E8.2, E8.3, E8.5, E5.3, E7.8 y E10.1. En la segunda fase, ellos pueden incurrir en los errores: E5.3, E7.6, E8.5, E8.1, E8.2, E8.3, E7.8, E10.1 y E9.2 (ver tabla 4).

8.5 Ayudas para el profesor

Existen dos momentos para la formulación de preguntas a los estudiantes. El primer momento se ubica en la la etapa de diseño del modelo de representación, previo a la lectura del enunciado de la tarea. En esta parte, las preguntas deben estar orientadas a los procesos de argumentación y justificación que hacen los estudiantes para generar la construcción del modelo de representación gráfica de la situación. En este momento, pueden formularse preguntas sobre la justificación de la ubicación de los datos en la gráfica y sobre los argumentos de tipo geométrico que permitieron validar los procedimientos gráficos. También sugerimos formular preguntas que permitan verificar si las longitudes consideradas en el modelo gráfico tienen relación proporcional con los datos suministrados. El segundo momento se refiere a la etapa de planteamiento y solución de la razón desde la perspectiva trigonométrica y algebraica. En esta etapa, las preguntas deben orientarse al desarrollo de estos procedimientos. Se debe buscar que los estudiantes los justifiquen con el uso de argumentos matemáticos previos a los contenidos de la tarea.

8.6 Evaluación

Dado que esta tarea corresponde a la fase de desarrollo dentro de la estructura de la secuencia de tareas, uno de los objetivos de la evaluación consiste en determinar en qué medida se desarrollaron los procesos de representación gráfica del enunciado de la tarea. Es decir, se busca determinar si los esquemas propuestos corresponden a modelos que se ajustan a las condiciones de la tarea. Otro aspecto a considerar está relacionado con los diferentes argumentos usados por los estudiantes cuando establecen la razón trigonométrica con los datos suministrados (parámetros e incógnitas). Se busca establecer también en qué medida el planteamiento de la razón se ajusta a los valores suministrados por el modelo gráfico, al tener en consideración los procedimientos algebraicos implementados.

8.7 Material fotocopiable

La cometa

Dos estudiantes que juegan fútbol en la posición de arqueros observan una cometa que se desplaza justo encima de ellos mientras se encuentran ubicados en la línea de gol de las porterías de la cancha del colegio. La distancia de una portería a la otra es de 30 metros. Al determinar los ángulos de elevación en un momento preciso respecto a la cometa, se encontró que estos medían 87° desde la visual de un arquero y 84° desde la visual del otro arquero.

1. ¿A qué altitud sobre el nivel del suelo está la cometa en el momento en que son medidos los ángulos de elevación?

2. ¿A qué distancia se encuentra la cometa respecto a cada uno de los estudiantes?

9 Tarea 7: Las moscas (T7). Sesión 14

Esta tarea tiene como propósito utilizar las razones trigonométricas para resolver situaciones que implican el cálculo de ángulos en contextos inaccesibles.

9.1 Descripción de la tarea

Describimos la tarea en términos de sus metas, los conceptos y procedimientos que se abordan, los materiales y recursos que se utilizan, y el esquema de agrupamiento que propone.

Meta. La meta de la tarea consiste en utilizar las razones trigonométricas para hallar ángulos en contextos reales.

Conceptos y procedimientos. Algunos de los procedimientos que se abordan en la tarea tienen que ver con el reconocimiento de propiedades geométricas de figuras tridimensionales, la determinación de longitudes, el establecimiento de ángulos, y la utilización del teorema de Pitágoras y de las razones trigonométricas para calcular longitudes y ángulos en contextos inaccesibles.

Sistemas de representación que se activan. Esta tarea activa los sistemas de representación simbólico, geométrico y numérico.

Contexto en el que se sitúa la tarea. La tarea se ubica en un contexto científico.

Materiales y recursos. La tarea utiliza los siguientes materiales y recursos: material fotocopiable, lápiz, papel, calculadora de funciones y el software GeoGebra.

Agrupamiento de los estudiantes e interacciones previstas. Para el desarrollo de esta tarea, sugerimos organizar los estudiantes en parejas. La conformación de las parejas debe atender a las afinidades y preferencias propias de los estudiantes en la selección de un compañero u otro. En la segunda parte de la tarea, se conformarán grupos de cuatro estudiantes, cada uno compuesto por dos parejas.

9.2 Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

La tarea Las moscas promueve la aplicación de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente para hallar ángulos en contextos inaccesibles, en función de los valores expresados en la situación. Se requiere reconocer propiedades de tipo algebraico y geométrico (despeje de ecuaciones y propiedades de figuras tridimensionales) que son requerimientos necesarios para el proceso de solución de la tarea.

9.3 Capacidades y caminos de aprendizaje

Prevemos que esta tarea active secuencialmente las siguientes capacidades: C16.1, C32, C8, C3, C4, C16, C17, C2, C6, C7, C33, C13, C27, C25, C15, C14, C29, C32 y C21 (ver tabla 3).

9.4 Errores en los que pueden incurrir los estudiantes.

Al abordar la tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores como E9.2, E8.7, E5.3, E7.6, E8.1, E8.2, E8.3, E7.5, E7.8, E10.1, E5.2 y E9.2 (ver tabla 4).

9.5 Ayudas para el profesor

El profesor puede formular preguntas y proporcionar ayudas en tres momentos del desarrollo de la tarea. Inicialmente, puede orientar la interpretación que los estudiantes hacen del problema e invitarlos a representar la situación al tomar el salón como modelo. Les puede sugerir que representen las moscas con trozos de papel y las ubiquen en el salón. El profesor debe moderar las discusiones que tengan lugar durante el trabajo de las parejas. Cuando se presenten los resultados al gran grupo, el profesor debe destacar los errores en los que incurran los estudiantes y promover acuerdos que validen los procedimientos que se propongan.

9.6 Evaluación

La tarea permite determinar el desarrollo de los procesos de representación gráfica del enunciado y establecer la capacidad de los estudiantes para identificar la razón trigonométrica que corresponde a ese enunciado. Finalmente, la tarea permite reconocer el uso apropiado de los procedimientos para determinar las ecuaciones trigonométricas implicadas en el modelo y para resolver los sistemas de ecuaciones resultantes.

9.7 Material fotocopiable

Las moscas

Dos moscas están a una distancia máxima en una caja que tiene 80 centímetros de largo, 60 centímetros de ancho y 20 centímetros de alto.

- ¿Cuál es el ángulo que se forma cuando una mosca observa a la otra?

10 Evaluación final (EF). Sesión 15

Proponemos un esquema de evaluación formativa para la unidad didáctica. Uno de sus objetivos es el fomento de aprendizaje de los estudiantes y la obtención de información para que el profesor identifique lo que se puede mejorar en términos de enseñanza. Diseñamos un examen con un conjunto de preguntas que requieren, para su solución, de las capacidades que caracterizan a cada uno de los objetivos abordados en la unidad. También proponemos los criterios de evaluación que permiten determinar el nivel en el que se ha alcanzado determinado objetivo. Consideramos unos criterios de evaluación genéricos, que involucran aspectos actitudinales y de socialización, y otros que contemplan los contenidos matemáticos abordados.

10.1 Evaluación final

La evaluación tiene dos partes. La primera parte corresponde a una prueba escrita compuesta por preguntas de selección múltiple con única respuesta y algunas preguntas abiertas. La segunda parte es una actividad para realizar extra clase.

Meta. La meta de la evaluación consiste en identificar el desempeño que han logrado los estudiantes en relación con los objetivos de aprendizaje.

Conceptos y procedimientos abordados. Se abordan todos los conceptos implicados en la unidad didáctica.

Sistemas de representación que se activan. Al resolver la evaluación final, se espera activar todos los sistemas de representación mencionados en las tareas de la unidad didáctica.

Contexto en los que se sitúa el examen. La tarea se sitúa en los contextos personal y científico.

Materiales y recursos. Para la primera fase, se requiere la prueba escrita, regla, transportador y calculadora de funciones. Para la segunda fase se requiere cinta métrica, goniómetro (hecho para la tarea la Sombra) y cámara fotográfica.

Agrupamiento de los estudiantes e interacciones previstas. La primera parte se desarrolla de forma individual, y la segunda en grupos de tres estudiantes. Cada estudiante deberá realizar las dos partes de la evaluación. La segunda parte debe ser presentada por el grupo a toda la clase con la ayuda de algún programa como PowerPoint. Por su parte, el profesor deberá realizar la realimentación de la evaluación una vez analizados los resultados teniendo en cuenta los criterios descritos.

Capacidades y caminos de aprendizaje. Cada una de las preguntas que conforman la evaluación implica poner en juego una serie de capacidades y pueden inducir a diferentes errores. En la tabla 6, describimos las capacidades que los estudiantes deberían activar con cada pregunta y los errores en los que pueden incurrir.

Tabla 5
Capacidades y errores en el examen final

Pregunta	Capacidades	Posibles errores
Taxi	C6, C7, C26, C9, C38 y C20	E3.1 E5.1 E3.3
Triángulos	C7, C16,C24, C11	E5.1 E3.1
Barco	C16, C7, C26, C32, C21, C20 y C38	E7.1, E7.4, E5.1, E3.3 y E1.3
Ángulos mayores a 90º	C30, C36, C26, C20, C37	E7.3 E5.1, E2.2
Tarea extraclase	C23 C7, C16, C20, C32, C21, C26, C38.	E7.1, E7.4, E5.1, E3.3, E1.3
Avión	C16, C7, C15, C26, C32, C38, C20, C21	E1.3, E3.1, E3.2, E3.3, E5.1, E7.1, E7.2, E7.3, E7.4

Evaluación. Sugerimos tener en cuenta los criterios genéricos y matemáticos que describimos en las tablas 7 y 8.

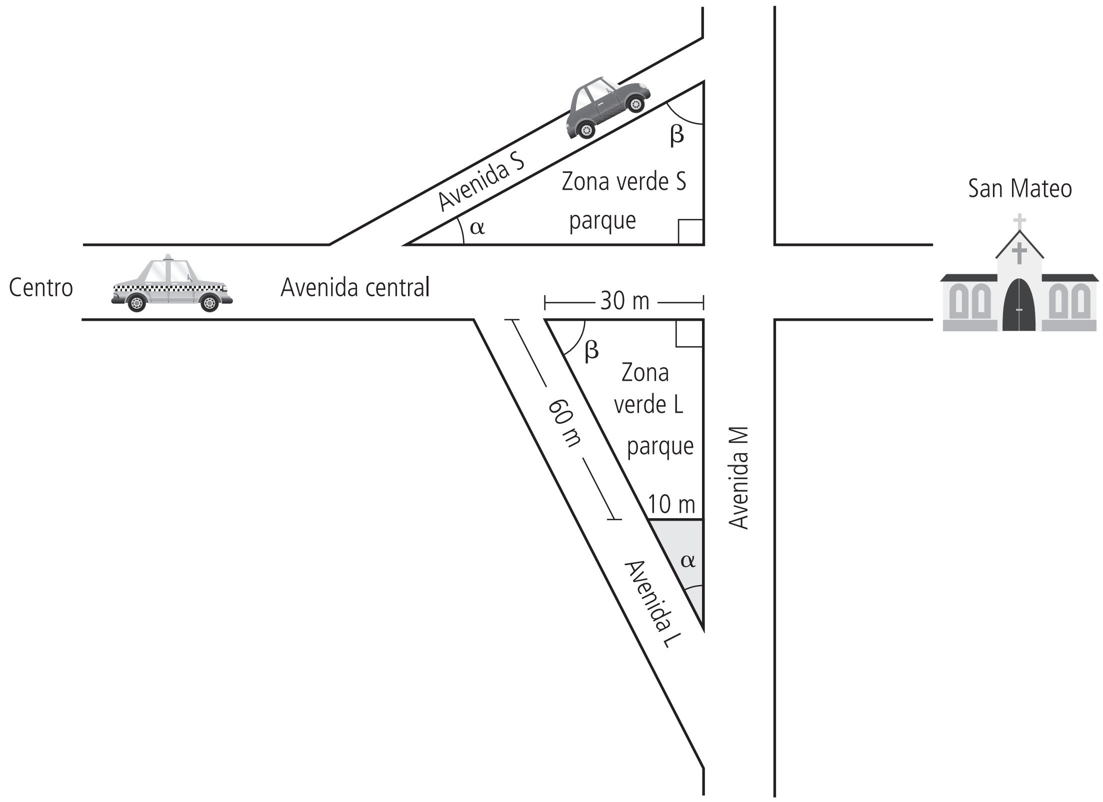
10.2 Material fotocopiable

Nombre: ____

Fecha: ______________________ Curso: ____________________

1. Un taxi que parte del centro hacia la iglesia San Mateo viaja a velocidad constante. No puede continuar por la avenida central y se debe desviar por una de las vías alternas teniendo en cuenta que las zonas verdes tienen la misma área.

La siguiente figura representa la situación, en la que $\alpha < \beta$.



1.1 Selecciona la ruta en la que el taxista gasta menos gasolina.
   a. Desviar por la avenida L, porque el ángulo β es mayor que el ángulo α.
   b. Elegir cualquiera de los desvíos, porque las zonas verdes son de igual área.
   c. Desviar por la avenida S, porque recorrerá una distancia menor.
   d. Desviar por la avenida L, porque la zona verde L es de menor área que la zona verde S.

1.2 ¿Cuál es la diferencia entre la longitud de las rutas S y L?
   a. No hay diferencia la distancia es la misma.
   b. La diferencia entre las dos rutas es de aproximadamente 22 m.
   c. La diferencia entre las dos rutas es de aproximadamente 5 m.
   d. Aproximadamente la diferencia será de 64 m.

1.3 Para calcular el ángulo con el cual se desvía para ir por el camino S, se requiere
   a. $\operatorname{sen}^{-1} \frac{30}{90} = \alpha$ b. $\operatorname{sen}^{-1} \frac{30}{90} = \beta$
   c. $\operatorname{sen}^{-1} \frac{90}{30} = \alpha$ d. $\operatorname{sen}^{-1} \frac{90}{30} = \beta$

2. Dibuja triángulos rectángulos que cumplan las siguientes condiciones.

a. sen $\alpha = \frac{7}{8}$

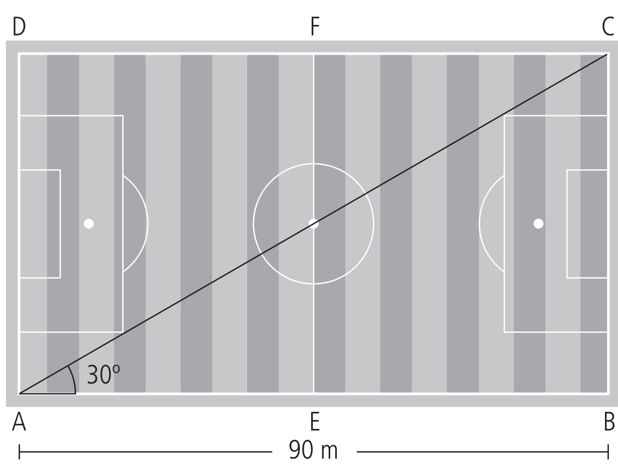
b. cos $\beta = \frac{2,5}{5}$

c. tan $\omega = \frac{1}{9}$

d. cos $\sigma = \frac{5}{9}$

e. ¿A qué ángulos corresponden alfa y beta ?

3. El sonar de un barco de salvamento localiza los restos de un naufragio en un ángulo de depresión de 12°. Un buzo es bajado 40 metros hasta el fondo del mar.
   3.1 ¿Cuánto necesita avanzar el buzo por el fondo para encontrar los restos del naufragio?
   3.2 ¿La distancia que hallaste tiene coherencia con la situación? Justifica tu respuesta.
4. Halla la razón seno y coseno para el ángulo 145° a partir de un triángulo. Enumera por lo menos 5 ángulos cuyo seno sea 0,5. Explica por qué escogiste estos ejemplos.
5. Para saber a qué altura vuela un avión medimos los ángulos de elevación del avión desde el primer piso (55°) y desde la terraza (40°) de un edificio. Como el edificio tiene 15 pisos, su altura aproximada es de 48 m. ¿A qué altura aproximadamente vuela el avión?
6. Un grupo de investigadores realizan una serie de estudios relacionados con la actividad de los árbitros en el desarrollo de un partido de futbol. Algunas medidas del campo de fútbol se observan en la siguiente figura.



a. Para tener un buen cubrimiento del terreno, se le recomienda al árbitro central que efectúe sus desplazamientos siguiendo una línea guía imaginaria entre el punto A y el punto C. ¿Cuál es el valor que se aproxima más a la longitud de la línea guía para el desplazamiento del juez central?
   a. 52 m
   b. 90 m
   c. 104 m
   d. 142 m

b. Durante la ejecución de un tiro de esquina lanzado desde el punto C, el juez de línea 1 debe ubicarse en el punto B y el juez de línea 2 debe ubicarse en el punto F. ¿Es posible determinar la distancia entre los jueces de línea en ese momento?
   a. No, porque no se conoce la distancia entre E y B.
   b. No, porque no se conoce el ancho del campo de juego.
   c. Sí, es igual a $15\sqrt{21}$ m.
   d. Sí, es igual a $30\sqrt{3}$ m.

c. Al inicio del partido, el juez de línea 1 debe ubicarse en el punto E. ¿Cuál es la distancia entre el juez de línea 1 y el centro de campo en ese momento?
   a. $\sqrt{45}$ m
   b. $15\sqrt{3}$ m
   c. 22.5 m
   d. 45 m

7. Siempre hay cosas de las que nos gustarían saber su medida, pero o están demasiado altas o están muy lejos, ¿qué objeto querrías medir que esté en un lugar al que acudes con frecuencia (el colegio, la casa, el barrio, etc.)? Describe cuál y cómo harías para lograrlo.
   Nota. El estudiante deberá realizar esta parte de la tarea en casa y posteriormente entregar evidencias de su trabajo. Las evidencias podran ser fotos, videos, descripción de las herramientas de medida, entre otras. Es importante aclarar que este ítem no hace parte del examen escrito y será presentado a los estudiantes una vez finalice la sesión de examen.

10. 3 Criterios genéricos

En la tabla 7, enumeramos los criterios para evaluar el desempeño de los estudiantes en la socialización que hacen de su trabajo.

Tabla 7

Criterios de evaluación genéricos

Abreviatura	Descripción del criterio
CG1	Llega a una conclusión clara
CG2	Utiliza lenguaje matemático conforme a lo esperado en la tarea
CG3	Da una justificación con la cual argumenta la conclusión a la cual llegó
CG4	Presenta un reporte escrito de lo que se pidió en el desarrollo de la tarea

10.4 Criterios relacionados con los contenidos matemáticos

Los criterios relacionados con el objetivo de aprendizaje 1 y 2 se identifican con la abreviatura Cr1.i., donde i hace referencia al consecutivo en el objetivo. Los criterios relacionados con el objetivo de aprendizaje 3 y 4 se identifican con la abreviatura Cr2.i. Estos criterios aparecen enumerados en la tabla 8.

Tabla 8
Criterios asociados a los objetivos

Abreviatura	Criterio	Capacidades
Cr.1.1	Identifica en un gráfico los elementos de un triángulo rectángulo y los relaciona con condiciones en una situación dada	6, 20, 16 y 16.1
Cr.1.2	Expresa en forma algebraica la relación entre ángulos y lados de un triángulo rectángulo en determinadas situaciones y verifica utilizando la calculadora las relaciones establecidas en casos particulares	27 y 32
Cr.1.3	Se cuestiona sobre la pertinencia de los resultados obtenidos y justifica la validez de estos a partir de las relaciones de los elementos del triángulo y comunica sus conclusiones	21
Cr.1.4	Identifica y calcula la razón trigonométrica para cualquier ángulo y viceversa	26
Cr.2.1	Relaciona los datos de un gráfico con las condiciones en una situación que involucra medidas que no se pueden hallar directamente	6, 20 y 11
Cr.2.2	Realiza un gráfico de la interpretación que hace de la situación que se le presenta, resaltando en éste los elementos que le permitirán solucionar la situación	16
Cr.2.3	Se cuestiona sobre la pertinencia de los resultados obtenidos en una situación que involucra medidas que no se pueden hallar directamente y justifica la validez de los mismos	21
Cr.2.4	Identifica la razón trigonométrica que le permite hallar la medida de ángulos y lados que no se pueden medir directamente	26, 20 38

11 Referencias

Gómez, P., González, M. J. y Romero, I. (2014). Caminos de aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas: objetivos, tareas y evaluación. *Profesorado. Revista de Curriculum y Formación de Profesorado, 18*(3), 319-338. Disponible en http://www.ugr.es/%7Erecfpro/rev183COL7.pdf

Gómez, P., González, M. J. y Romero, I. (2013). Caminos de aprendizaje y formación de profesores de matemáticas. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina y I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 177-183). Granada: Comares.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas.* Bogotá: Autor. Disponible en http://tinyurl.com/bljb3wd

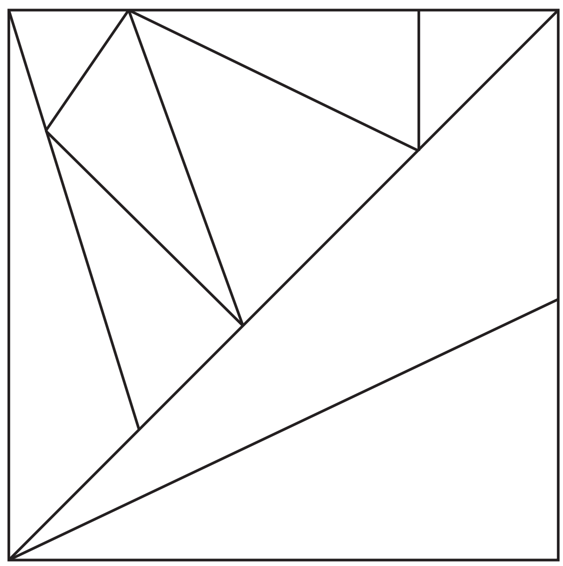
12 Material fotocopiable

TD. Tarea diagnóstica

Nombre: ______________________________ Fecha: __________

Observa la figura y con base en esta contesta las preguntas 1 a 5.

1. ¿Qué tipos de triángulos puedes distinguir en la figura? Escoge uno, cálcalo, recórtalo, y pégalo al lado de la figura, luego dí qué tipo de triángulo es.



Mide los ángulos internos de al menos tres triángulos de la figura. ¿Cuánto suman los ángulos internos en cada triángulo? __________, __________ y __________.

2. Con base en la solución que le diste a la pregunta anterior, indica si es posible que los ángulos de un triángulo midan: (a) 35°, 83° y 54°; (b) 30º, 80º y 75º y (c) 32º, 77º y 71º. Justifica cada una de las respuestas.

3. Selecciona tres triángulos, mide sus lados y simboliza sus medidas con las letras c, d y e. Según tus resultados, di si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones.

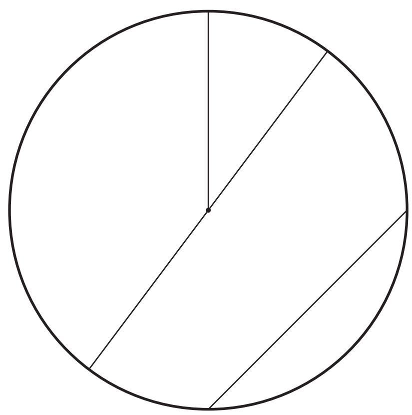
   a. $c + d = e$,   b. $c + d < e$ c. $c + d > e$.

   Justifica cada una de las respuestas.

4. A continuación se presentan cuatro afirmaciones. Escoge la opción que identifica aquellas afirmaciones que son verdaderas. Justifica tu respuesta.
   I. Existen triángulos que son equiláteros y obstusángulos.
   II. Existen triángulos que son isósceles y obtusángulos.
   III. Existen triángulos que son escalenos y rectángulos.
   IV. Existen triángulos que son equiláteros y rectángulos.

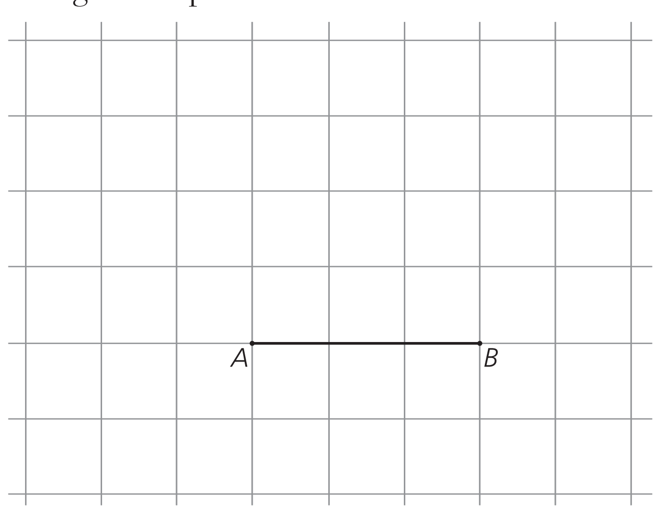
   a. I, II, y IV   c. II y III
   b. II, III y IV   d. II, III y IV

5. Observa la siguiente figura.

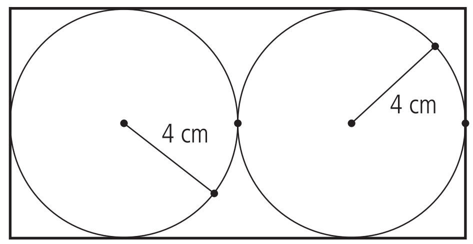


- Identifica las líneas que se encuentran en el círculo y resalta con un color distinto cada una.
- Escribe el nombre con el que se conoce a cada una de estas líneas frente al color que utilizaste para distinguirlas.
- Si no identificas ninguna, describe tu dificultad para reconocerlas.

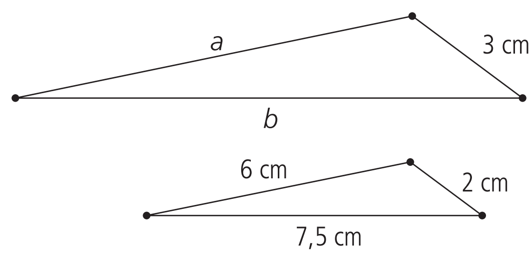
6. Traza, a partir del segmento $\overline{AB}$, ángulos de 60°, 420°, −60° y −420° y describe la relación que encuentras entre estos ángulos. Utiliza como vértice de cada uno de los ángulos el punto A.



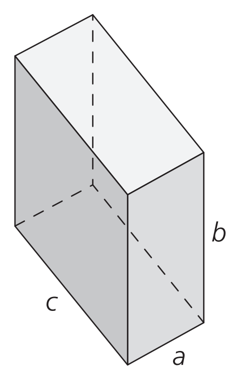
7. Observa la figura y determina el perímetro del rectángulo. Describe cada uno de los pasos que realizaste para lograrlo.



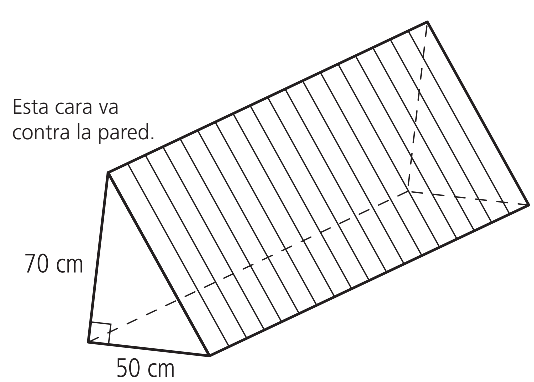
8. Si los triángulos representados en la figura son semejantes, las longitudes de los lados *a* y *b* son
   a. 9 cm y 11,5 cm
   b. 9 cm y 11,25 cm
   c. 7 cm y 8,5 cm
   d. 7 cm y 6,5 cm



9. Teniendo en cuenta la siguiente imagen, halla una expresión para determinar el volumen del sólido mostrado.



10. Para proteger su pintura, se quiere poner una teja en el frente de una casa. Para ello se consiguió una estructura como la que se muestra en la figura.



La medida del lado más pequeño de la teja, aproximadamente es

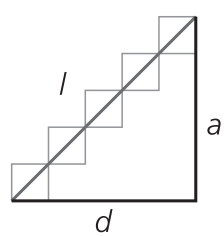
a. 8,6 m
b. 86 m
c. 0,86 m
d. 7 400 cm

T1. La escalera

Grupo:

Integrantes:

Con los prismas que se les ha dado, formen escaleras con el número de escalones que se indica en cada fila de la tabla y realicen las medidas del ángulo de inclinación, profundidad, altura y largo con la mayor precisión posible. Con base en la información que han obtenido, diligencien la siguiente tabla. Para el caso de siete escalones, tendrán que inferir los datos de todas las celdas, ya que el material dado no les será suficiente.

No. del escalón	2	3	7
Ángulo de inclinación			
Altura del escalón desde el suelo (a)			
Profundidad desde el pie de la escalera hasta el escalón (d)			
Largo de la escalera (l)			
Relación entre a y d			
Relación entre a y l			
Gráfico 			

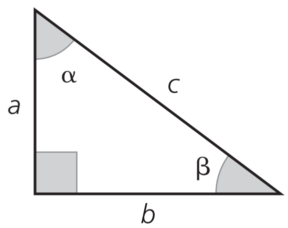
¿Qué relación hay entre el ángulo de inclinación y las relaciones entre a y d, y entre a y l?

T2. Características

Guía 1: Características

Identifica los criterios que determinan cada una de las razones trigonométricas. Escríbelos al respaldo de esta guía.

Estas sí son razones trigonométricas

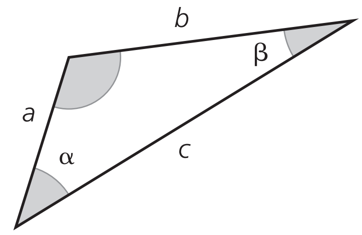


$\text{sen}\ (\beta) = \frac{a}{c}$

$\cos\ (\beta) = \frac{b}{c}$

$\tan\ (\beta) = \frac{a}{b}$

Estas no son razones trigonométricas

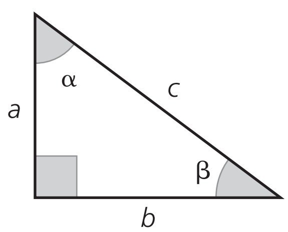


$\text{sen}\ (\alpha) = \frac{b}{c}$

$\cos\ (\alpha) = \frac{a}{c}$

$\tan\ (\alpha) = \frac{b}{a}$

Estas sí son razones trigonométricas

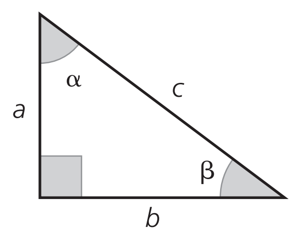


$\text{sen}\ (\alpha) = \frac{b}{c}$

$\cos\ (\alpha) = \frac{a}{c}$

$\tan\ (\alpha) = \frac{b}{a}$

Estas no son razones trigonométricas

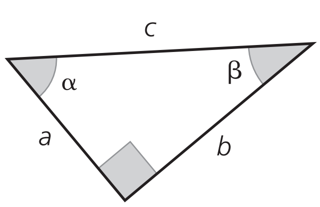


$\text{sen}\ (90^{\circ}) = \frac{c}{c}$

$\cos\ (90^{\circ}) = \frac{b}{c}$

$\tan\ (90^{\circ}) = \frac{c}{b}$

Estas sí son razones trigonométricas

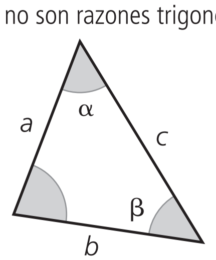


$\csc\ (\alpha) = \frac{c}{b}$

$\sec\ (\alpha) = \frac{c}{a}$

$\text{ctg}\ (\alpha) = \frac{a}{b}$

Estas no son razones trigonométricas



$\text{sen}\ (\alpha) = \frac{b}{c}$

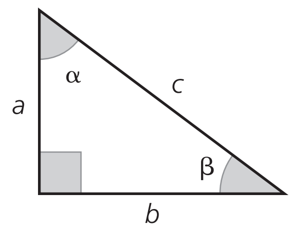
$\cos\ (\alpha) = \frac{a}{c}$

$\tan\ (\alpha) = \frac{b}{a}$

Guía 2: Características

Con base en los criterios identificados en la guía 1, completa las igualdades.

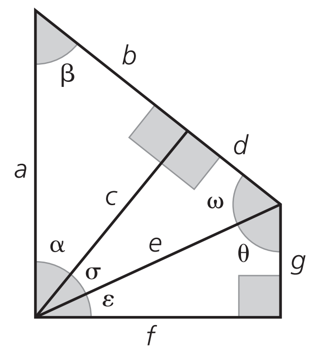
<table>
<tr>
<td>
Estas sí son razones trigonométricas



$\csc(\beta) = \frac{c}{a}$

$\sec(\beta) = \frac{c}{b}$

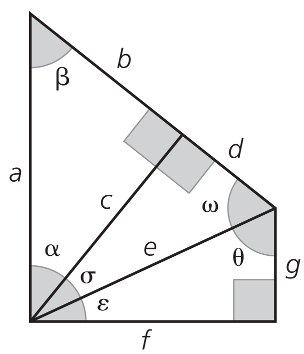
$\operatorname{ctg}(\beta) = \frac{b}{a}$
</td>
<td>
Completar



$\operatorname{sen}(\beta) = —$

$\cos(\beta) = —$

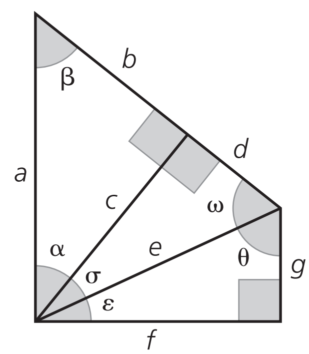
$\tan(\beta) = —$
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Completar



$\operatorname{sen}(\theta) = —$

$\cos(\theta) = —$

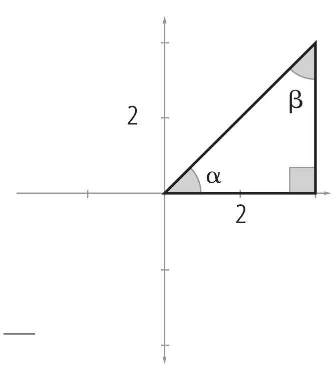
$\tan(\theta) = —$
</td>
<td>
Completar



$\operatorname{sen}(\omega) = —$

$\cos(\omega) = —$

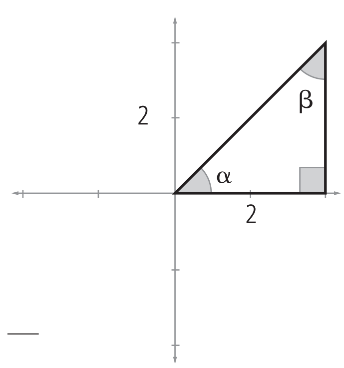
$\tan(\omega) = —$
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Completar



$\operatorname{sen}(\beta) = —$

$\cos(\beta) = —$

$\tan(\beta) = —$
</td>
<td>
Completar

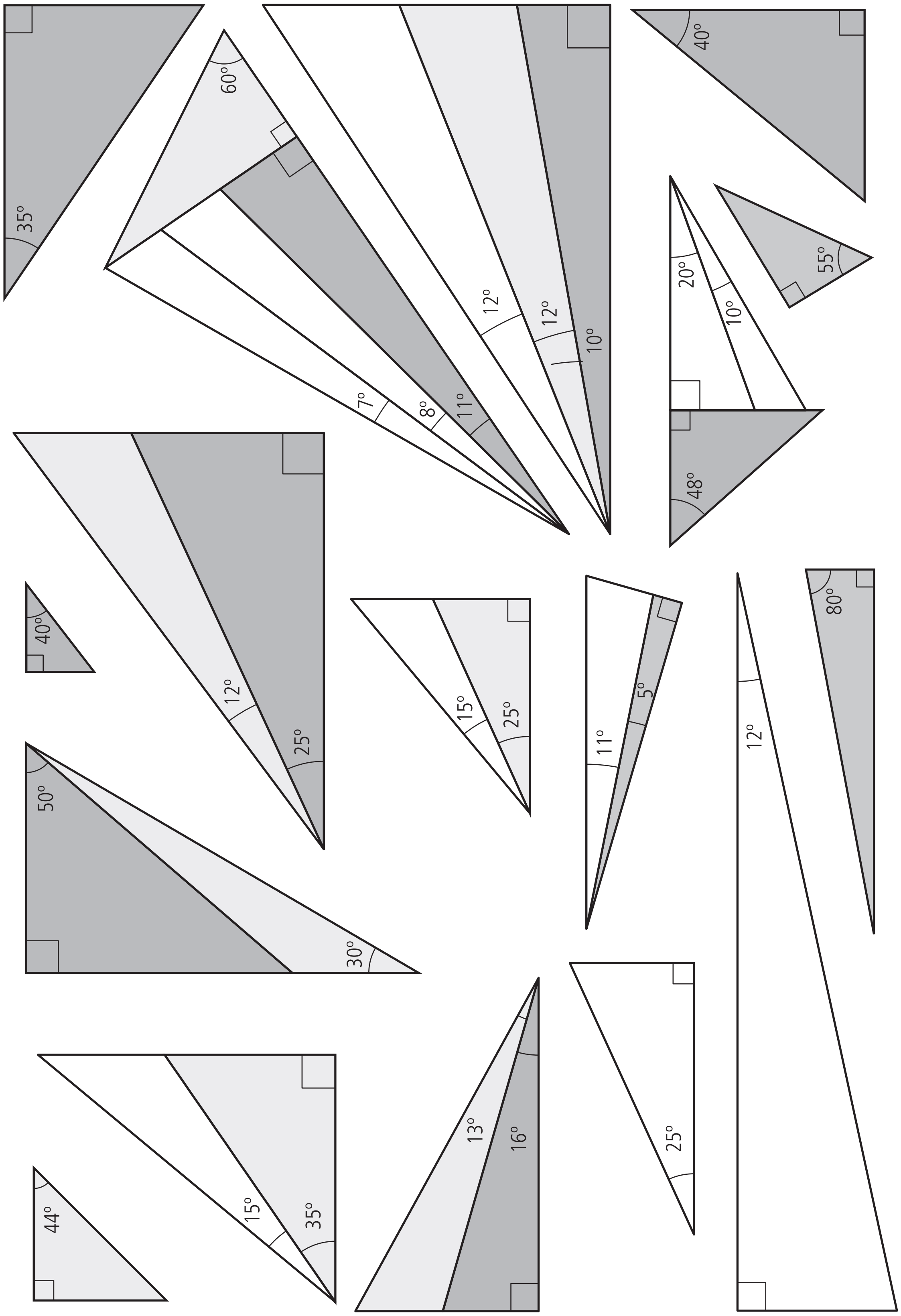


$\csc(\beta) = —$

$\sec(\beta) = —$

$\operatorname{ctg}(\beta) = —$
</td>
</tr>
</table>

Guía 3: triángulos para recortar



Guía 4: Características

Completa la siguiente tabla a partir de las mediciones que hagas en las figuras entregadas. Las medidas deben ser lo más precisas posible.

Ángulo	sen	cos	tan	ctg	sec	Dibuja el triángulo que utilizaste (localiza en ese triángulo los datos que necesites para calcular las razones)
40º						
50º						
30º						
34º						
75º						

T3. Rueda de Chicago

Lee la siguiente situación y genera tus primeras hipótesis sobre las respuestas que puedes dar a cada una de las preguntas. A continuación de la situación, se describen una serie de fases. Desarrolla cada una y finalmente retoma la situación para abordar nuevamente las preguntas.

La siguiente figura muestra un dibujo de la atracción mecánica Rueda de Chicago en un parque de diversiones. Supón que una persona se encuentra en la canastilla 1 de la atracción.

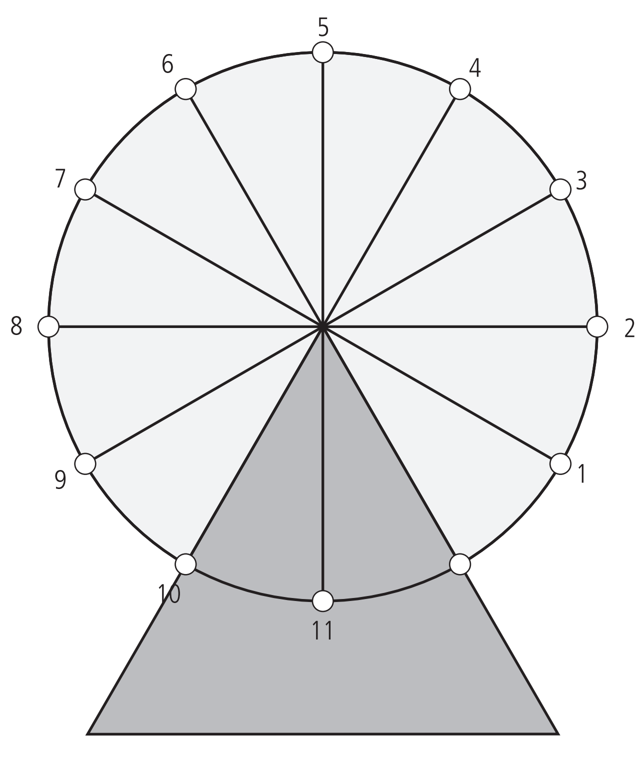


Figura 4. Rueda de Chicago

1. Transcurrido un tiempo, la persona se encuentra en la posición de la canastilla 3. Si el brazo que sostiene cada canastilla es de 20 m, ¿cuántos metros ha recorrido la persona en dicha canastilla?
2. Y si la persona se encuentra en la posición de la canastilla 6, ¿cuántos metros habrá recorrido?
3. Si la rueda girara en el sentido de las manecillas del reloj, ¿cuál debe ser el ángulo que forma el brazo de la canastilla 1 con el brazo de la nueva posición, para que la distancia recorrida sea la misma a las mencionadas en las preguntas 1 y 2?
4. Si la persona está en la canastilla 1, ¿qué ángulo debe recorrer su canastilla para que quede en la posición de la canastilla 3? [www.e-sm.net/1gemad01]
5. ¿Cuál es la distancia de la canastilla 3 al brazo de la canastilla 1? Con la distancia, nos referimos a la medida del segmento que va desde el centro de la canastilla y es perpendicular al brazo de la otra canastilla
6. ¿Cuál es la distancia de la canastilla 3 al brazo de la canastilla 4?

Fase 1

Abre cada una de las construcciones y responde las preguntas que se describen a continuación. [www.e-sm.net/1gemad01]

Construcción 1: Radián

1. Mueve el punto verde. ¿Qué cambia en la circunferencia?¿Qué representa *S*?

2. Ubica el ángulo 72°. ¿Qué semirrectas forman este ángulo? ¿Cuál es el vértice? ¿Cuánto miden el radio de la circunferencia y el arco azul?

3. Mueve el punto verde hasta conseguir que el radio y el arco tengan la misma longitud.

4. ¿Qué medida tiene en ese momento el ángulo correspondiente? A esa medida se le llama 1 radián.

5. Mueve el punto *B* y observa. ¿Qué medidas cambian de la circunferencia? ¿Cuáles permanecen constantes?

6. ¿Qué ángulo es mayor, uno de 1 radián u otro de 60º?

7. Describe con tus palabras qué es un radián.

Construcción 2: Pi

1. Mueve el punto verde hasta visualizar un ángulo de 2 radianes. ¿Cuántos grados mide? ¿Y el de 3 radianes? ¿Y el de 5 radianes? ¿Y medio radián?

2. Visualiza un ángulo de 180º. Aproximadamente, ¿cuántos radianes son? ¿Puedes hallar el valor exacto? ¿Por qué?

Construcción 3: Arco

1. ¿Cuántos puntos encuentras sobre la circunferencia?

2. ¿Cuánto mide cada ángulo central formado con el punto *C*?

3. Mueve el punto verde y compara el valor que observas del ángulo con el que escribiste en el punto anterior.

4. Completa la tabla.

Giro	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{12}{12}$
Ángulo en radianes												

5. Dibuja la circunferencia que observas en la construcción. Ubica en ella 2π, π, $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$.

6. ¿Cuántos radianes serán 180º y 90º? ¿Por qué?

7. Completa la siguiente tabla.

Ángulo en grados	0º	30º	60º	90º	120º	150º	180º	210º	240º	270º	300º	330º	360º
Ángulos en radianes													

8. Con la información anterior, ¿cómo hallarías la medida de un ángulo de 45º en radianes? ¿Cómo hallarías la de 55º, 75º, 125,5º, 275º, 5 y 333,45º?

Construcción 4: Longitud de la circunferencia

1. Ubica el punto *B* en 2; es decir, deja la circunferencia con radio 2 ($r = 2$). Desplaza el punto verde y observa qué cambia en la circunferencia. Luego, completa la siguiente tabla. Utiliza una calculadora para completar $r\alpha$.

α		S	$r\alpha$
Grados	Radianes		
0º			
10º			
30º			
50º			
70º			
90º			

2. Conserva la circunferencia de radio 4; es decir, ubica el punto *B* en 4. Completa una tabla como la utilizada en la pregunta anterior.

3. Conserva la circunferencia de radio 5, es decir, ubica el punto *B* en 5. Completa otra tabla igual a la utilizada en la pregunta anterior. Utiliza una calculadora para completar la columna rα. ¿Qué concluyes a partir de las tablas de estos dos últimos ítems?

Fase 2

Abre cada una de las construcciones, sigue las instrucciones y responde las preguntas que se hacen.

Construcción 5: Seno y coseno para ángulos menores a 90°

Al mover el punto rojo cambia el punto *C* sobre la circunferencia y el ángulo central que este punto determina. En la parte superior, encuentras información de la coordenada del punto *C* sobre la circunferencia y la distancia de los catetos del triángulo rectángulo *ACD*. Explora la construcción moviendo el punto rojo.

1. Ubica en el triángulo el ángulo central 30º. Con la información que se te muestra ¿cómo calcularías el valor de sen(30º) y cos(30º)? ¿Cuál es la distancia entre el punto *C* y el eje *x*? ¿Y la distancia entre el punto *C* y el eje *y*?

2. Ubica en el triángulo el ángulo central 45º. ¿Cuál es el valor de sen(45º) y cos(45º)? ¿Cuál es la distancia entre el punto *C* y el eje *x*? ¿Y la distancia entre el punto *C* y el eje *y*?

3. Ubica en el triángulo el ángulo central 60º. ¿Cuál es el valor de sen(60º) y cos(60º)? ¿Cuál es la distancia entre el punto *C* y el eje *x*? ¿Y la distancia entre el punto *C* y el eje *y*?

4. Ubica en el triángulo el ángulo central 70º. ¿Cuál es el valor de sen(70º) y cos(70º)? ¿Cuál es la distancia entre el punto *C* y el eje *x*? ¿Y la distancia entre el punto *C* y el eje *y*?

5. Completa la tabla con los resultados obtenidos en los puntos anteriores.

Coordenada Punto C	Ángulo: α	sen(α)	cos(α)	Distancia de C al eje *x*	Distancia de C al eje *y*

6. ¿Hay alguna relación entre el valor del seno y coseno del ángulo determinado por el punto sobre la circunferencia y la distancia de este punto al eje *x* y la distancia al eje *y*?

Construcción 6: Seno y coseno

1. Considera los ángulos del cuadrante II, III y IV y completa la tabla.

Coordenada del punto C	Ángulo: α	Cuadrante al que pertenece el ángulo α	sen(α)	cos(α)	Distancia de C al eje x	Distancia de C al eje y
	95º					
	115º					
	120º					
	135º					
	170,5º					

2. ¿Qué valores toma seno cuando los ángulos pertenecen al cuadrante I? ¿Y a los cuadrantes II, III y IV?

3. ¿Qué valores toma coseno cuando los ángulos pertenecen al cuadrante I? ¿Y a los cuadrantes II, III y IV?

4. ¿Entre qué números se encuentran los valores de seno y coseno de cualquier ángulo de 0° a 360°?

5. Toma 3 ángulos del cuadrante II y completa la siguiente tabla.

Ángulo: α	sen(α)	sen(180º − α)

6. ¿Qué puedes concluir de los resultados de la tabla?

7. Toma 3 ángulos del cuadrante III y completa la tabla.

Ángulo: α	sen(α)	−sen(α − 180º)

8. ¿Qué puedes concluir de los resultados de la tabla?

9. Considera 3 ángulos de cada cuadrante y completa la tabla.

Ángulo: α	cos(α)	cos(−α)	sen(α)	sen(−α)

10. ¿Qué puedes concluir de los resultados de la tabla?

Fase 3
Resuelve individualmente las preguntas de la situación planteada al inicio de la tarea.

T4. Canicas

Grupo: ____ Fecha: ________________

Lee el enunciado del problema y abórdalo siguiendo las tres fases que se proponen. Para la primera fase, necesitarás dos canicas, dos octavos de cartulina negra, una bolsa pequeña de tiza de trazo en polvo, plastilina, regla y transportador. Primero debes marcar con lápiz blanco en la cartulina negra un segmento de 10 cm; luego, adherir una canica en uno de los extremos del segmento, con una pequeña porción de plastilina; y, finalmente y desde el otro extremo del segmento, lánza la otra canica habiéndola empolvado previamente con tiza de trazo. Para la segunda fase, contarás con una construcción en GeoGebra [www.e-sm.net/1gemad02] en la que podrás mover cualquiera de los segmentos ubicados a la derecha de la figura. Al moverlos, podrás verificar que varía el aspecto de la figura. Analiza estos cambios y contesta las preguntas que se han planteado para esta fase. En la tercera fase, debes proponer una solución al problema.

Problema. Dos canicas tienen radio r y están separadas una distancia d. Halla el máximo ángulo de desviación con el que puede lanzarse la primera canica para dar a la segunda.

Fase 1

1. Completa la tabla con base en la experimentación con las canicas:

Número del lanzamiento	1	2	3	4	5	6
Distancia entre las canicas	10 cm	10 cm	10 cm	10 cm	10 cm	10 cm
Ángulo de lanzamiento						

2. Realiza gráficos en los que se evidencien tres de los lanzamientos que se describen en la tabla anterior.

3. Halla el máximo ángulo con el que puede golpearse la canica y explica cómo lo estableces.

Fase 2. Trabajo en parejas

1. A partir de la construcción de GeoGebra completa cada una de las siguientes tablas.

Caso A

Radio	Distancia	Ángulo con el que es posible golpear la canica
1 cm	5 cm	
1 cm	5 cm	
1 cm	5 cm	
1 cm	5 cm	
1 cm	5 cm	
1 cm	5 cm	

Caso B

Radio	Distancia	Ángulo con el que es posible golpear la canica
1 cm	10 cm	
1 cm	10 cm	
1 cm	10 cm	
1 cm	10 cm	
1 cm	10 cm	
1 cm	10 cm	

Caso C

Radio	Distancia	Ángulo con el que es posible golpear la canica
2,5 cm	5 cm	
2,5 cm	5 cm	
2,5 cm	5 cm	
2,5 cm	5 cm	
2,5 cm	5 cm	
2,5 cm	5 cm	

2. Realiza gráficos en los que se evidencien tres de los lanzamientos que se describen en cada una de las tablas anteriores.

3. Para cada uno de los casos (A, B y C), halla el máximo ángulo con el que puede golpearse la canica y explica cómo lo determinas.

4. Para cada uno de los casos (A, B y C), realiza el gráfico en el que se evidencie el máximo ángulo con que debe lanzarse la canica para golpear a la otra.

Fase 3. Trabajo individual

1. ¿Cómo puedes representar el máximo ángulo de desviación con que debe lan-

zarse una canica para golpear a la otra? El radio de la canica es r y la distancia entre las canicas es d.

T5. La sombra

Grupo: ______________________ Fecha: ____________

Se quiere conocer la altura del árbol más alto del patio del colegio (puede escogerse cualquier otro elemento que esté en el exterior).

Fase 1

1. Elige un árbol del colegio para determinar su altura.

2. Registra los datos pedidos en la tabla (unos grupos recogen los datos de la mañana y los otros, los datos de la tarde).

3. Utiliza una cinta métrica para medir la sombra proyectada por el árbol.

4. Utiliza el goniómetro casero para medir el ángulo de elevación del Sol en las distintas horas del día (las mediciones obtenidas no deben variar mucho, se sugiere como máximo 3° de variación).

5. Presenta y discute con tus compañeros los resultados obtenidos en la tabla de cada grupo.

	Medida											
	Grupo 1			Grupo 2			Grupo 3			Grupo 4		
Hora	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Longitud de la sombra												
Ángulo de elevación del Sol												
Altura del árbol												

Fase 2

Cada grupo debe hacer una gráfica en el software GeoGebra [www.e-sm.net/1gemad03] que represente el problema. Para ello, hará uso de un triángulo rectángulo con el cual puedan mantener la altura del árbol fija, mientras que la del ángulo y la sombra varíe. Teniendo en cuenta estas especificaciones y los datos tomados en la tabla, se proponen las siguientes actividades.

1. Cambia el ángulo de elevación en la representación hecha en GeoGebra y establece la relación entre la longitud de la sombra y el árbol.
2. En cada uno de los casos anteriores (variación del ángulo), verifica a partir de la razón trigonométrica la altura del árbol.

T6. La cometa

Dos estudiantes que juegan fútbol en la posición de arqueros observan una cometa que se desplaza justo encima de ellos mientras se encuentran ubicados en la línea de gol de las porterías de la cancha del colegio. La distancia de una portería a la otra es de 30 metros. Al determinar los ángulos de elevación en un momento preciso respecto a la cometa, se encontró que estos medían 87° desde la visual de un arquero y 84° desde la visual del otro arquero.

1. ¿A qué altitud sobre el nivel del suelo está la cometa en el momento en que son medidos los ángulos de elevación?
2. ¿A qué distancia se encuentra la cometa respecto a cada uno de los estudiantes?

T7. Las moscas

Dos moscas están a una distancia máxima en una caja que tiene 80 centímetros de largo, 60 centímetros de ancho y 20 centímetros de alto.

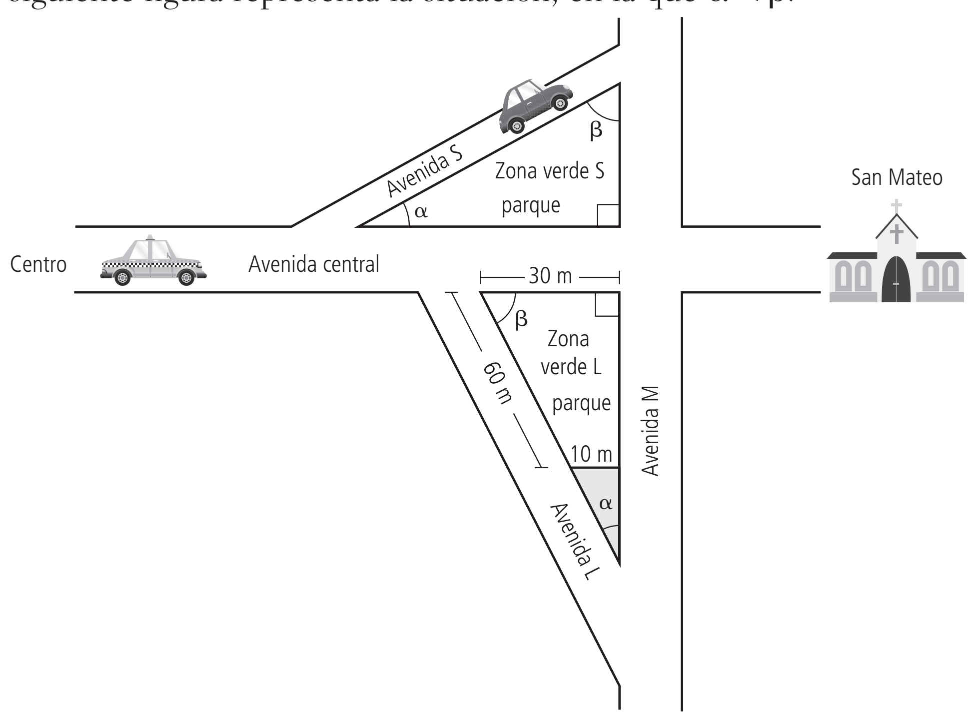
- ¿Cuál es el ángulo que se forma cuando una mosca observa a la otra?

EF. Evaluación final

Nombre: ______________________________________

Fecha: ____________________ Curso: ____________________

1. Un taxi que parte del centro hacia la iglesia San Mateo viaja a velocidad constante. No puede continuar por la avenida central y se debe desviar por una de las vías alternas teniendo en cuenta que las zonas verdes tienen la misma área. La siguiente figura representa la situación, en la que $\alpha < \beta$.



1.1 Selecciona la ruta en la que el taxista gasta menos gasolina.
   a. Desviar por la avenida L, porque el ángulo β es mayor que el ángulo α.
   b. Elegir cualquiera de los desvíos, porque las zonas verdes son de igual área.
   c. Desviar por la avenida S, porque recorrerá una distancia menor.
   d. Desviar por la avenida L, porque la zona verde L es de menor área que la zona verde S.

1.2. ¿Cuál es la diferencia entre la longitud de las rutas S y L?
   a. No hay diferencia la distancia es la misma.
   b. La diferencia entre las dos rutas es de aproximadamente 22 m.
   c. La diferencia entre las dos rutas es de aproximadamente 5 m.
   d. Aproximadamente la diferencia será de 64 m.

1.3. Para calcular el ángulo con el cual se desvía para ir por el camino S, se requiere
   a. $\text{sen}^{-1}\frac{30}{90} = \alpha$ b. $\text{sen}^{-1}\frac{30}{90} = \beta$
   c. $\text{sen}^{-1}\frac{90}{30} = \alpha$ d. $\text{sen}^{-1}\frac{90}{30} = \beta$

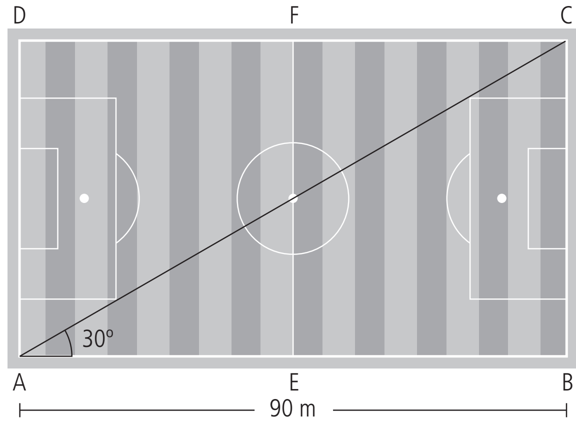
2. Dibuja triángulos rectángulos que cumplan las siguientes condiciones.
   a. $\text{sen}\ \alpha = \frac{7}{8}$ b. $\cos \beta = \frac{2{,}5}{5}$
   c. $\tan \omega = \frac{1}{9}$ d. $\cos \sigma = \frac{5}{9}$
   e. ¿A qué ángulos corresponden alfa y beta ?

3. El sonar de un barco de salvamento localiza los restos de un naufragio en un ángulo de depresión de 12°. Un buzo es bajado 40 metros hasta el fondo del mar.
   3.1 ¿Cuánto necesita avanzar el buzo por el fondo para encontrar los restos del naufragio?
   3.2 ¿La distancia que hallaste tiene coherencia con la situación? Justifica tu respuesta.

4. Halla la razón seno y coseno para el ángulo 145° a partir de un triángulo. Enumera por lo menos 5 ángulos cuyo seno sea 0.5. Explica por qué escogiste estos ejemplos.

5. Para saber a qué altura vuela un avión medimos los ángulos de elevación del avión desde el primer piso (55°) y desde la terraza (40°) de un edificio. Como el edificio tiene 15 pisos, su altura aproximada es de 48 m. ¿A qué altura aproximadamente vuela el avión?

6. Un grupo de investigadores realizan una serie de estudios relacionados con la actividad de los árbitros en el desarrollo de un partido de futbol. Algunas medidas del campo de fútbol se observan en la siguiente figura.



a. Para tener un buen cubrimiento del terreno, se le recomienda al árbitro central que efectúe sus desplazamientos siguiendo una línea guía imaginaria entre el punto A y el punto C. ¿Cuál es el valor que se aproxima más a la longitud de la línea guía para el desplazamiento del juez central?

a. 52 m　　b. 90 m
c. 104 m　　d. 142 m

b. Durante la ejecución de un tiro de esquina lanzado desde el punto C, el juez de línea 1 debe ubicarse en el punto B y el juez de línea 2 debe ubicarse en el punto F. ¿Es posible determinar la distancia entre los jueces de línea en ese momento?

a. No, porque no se conoce la distancia entre E y B.
b. No, porque no se conoce el ancho del campo de juego.
c. Sí, es igual a $15\sqrt{21}$ m.
d. Sí, es igual a $30\sqrt{3}$ m.

c. Al inicio del partido, el juez de línea 1 debe ubicarse en el punto E. ¿Cuál es la distancia entre el juez de línea 1 y el centro de campo en ese momento?

a. $\sqrt{45}$ m　　b. $15\sqrt{3}$ m
c. 22.5 m　　d. 45 m

7. Siempre hay cosas de las que nos gustarían saber su medida, pero o están demasiado altas o están muy lejos, ¿qué objeto querrías medir que esté en un lugar al que acudes con frecuencia (el colegio, la casa, el barrio, etc.)? Describe cuál y cómo harías para lograrlo.

Nota. El estudiante deberá realizar esta parte de la tarea en casa y posteriormente entregar evidencias de su trabajo. Las evidencias podran ser fotos, videos, descripción de las herramientas de medida, entre otras. Es importante aclarar que este ítem no hace parte del examen escrito y será presentado a los estudiantes una vez finalice la sesión de examen.