http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6
ISSN: 2254-8351

Educación Matemática en la Infancia

Visualización y simetría en la formación de maestros de Educación Infantil

Majorie Sámuel
Universidad Católica del Maule, Chile, msamuel@ucm.cl
Yuly Marsela Vanegas Muñoz
Universitat Autónoma de Barcelona, Bellaterra, España, yulymarsela.vanegas@uab.cat
Joaquim Giménez Rodríguez
Universitat de Barcelona, Barcelona, España, quimgimenez@ub.edu

Fecha de recepción: 6-05-2016
Fecha de aceptación: 15-06-2016
Fecha de publicación: 24-06-2016

RESUMEN

Se presenta una investigación orientada a reconocer posicionamientos de futuros maestros de educación infantil cuando analizan tareas escolares que involucran conocimientos geométricos y son desarrolladas por niños de 5-6 años. Se analizan en detalle como estudio previo, las respuestas de tres futuros docentes a una tarea profesional. Los resultados muestran que domina una perspectiva superficial sobre cómo deben interpretarse las acciones de los niños y evidencian algunas aproximaciones sobre sus concepciones y su interpretación de las matemáticas a enseñar, mostrando que la idea de visualización y conceptualización de patrones como la simetría son procesos cognitivos complejos y muy desconocidos.

Palabras clave: formación de maestros, educación infantil, simetría, visualización.

Visualization and symmetry in Early Childhood Teachers Training

ABSTRACT

This article presents a research aimed to recognize positions of early childhood future teachers, when analyzing school assignments involving geometry. The activity is developed by children aged 5-6 years old. They are discussed in detail as previous study, responses of three future teachers to a professional task. The results show that it dominates a superficial perspective on how to interpret the actions of children. It also appears some views and interpretations of mathematics teaching. The idea of visualization and conceptualization of patterns like symmetry were found as complex cognitive processes and much unknown.

Key words: Teacher training, early childhood education, symmetry, visualization.

1. Introducción

Desde hace unos años, hay un acuerdo casi total de los educadores matemáticos sobre la formación del futuro profesor de Educación Infantil en el que se señala, la importancia de mostrar un conocimiento del contenido matemático *de* y *sobre* las matemáticas y un conocimiento de la materia para su enseñanza (Carrillo, 2007). Por otra parte, se resalta la importancia que los niños aprendan y desarrollen habilidades matemáticas desde los primeros años, pues se considera que ello proporcionara una base sólida para el aprendizaje posterior (Baroody, Lai, y Mix, 2006; Brenneman, Boyd, y Frede, 2009). Se plantea entonces la necesidad de diseñar e implementar propuestas formativas, que posibiliten al futuro profesor, reflexionar sobre cómo gestionar situaciones específicas de enseñanza que potencien el desarrollo del pensamiento matemático de los niños (Sowder, Sowdery, Nickerson, 2010).

Diversos autores interesados en analizar el conocimiento que requiere un profesor para enseñar matemática, han propuesto diferentes modelos buscando sistematizarlo y caracterizarlo. Uno de ellos, es el denominado "Mathematical Knowledge for Teaching" – MKT (Ball, Thames & Phelps, 2008), en este modelo se enfatiza la idea que los profesores de matemáticas, que pretendan apoyar el desarrollo de las competencias matemáticas de sus estudiantes, necesitan de al menos dos tipos de conocimiento: *el conocimiento del contenido* y el *conocimiento didáctico del contenido*.

Estos dos tipos de conocimiento se "subdividen" en seis subdominios: *conocimiento común del contenido* (CCK), que se refiere al conocimiento matemático y habilidades necesarias para resolver una tarea matemática (que dependerá del nivel con el que se esté trabajando); *conocimiento especializado del contenido* (SCK), alude al conocimiento matemático que permite a los profesores participar en tareas de enseñanza, proporcionando explicaciones matemáticas precisas y adecuadas; *conocimiento del horizonte* (HCK), que se reconoce como un conocimiento que permite reconocer conexiones intra y extra-matemáticas, así como la trayectoria de un contenido matemático a lo largo de las diversas niveles educativos; *conocimiento del contenido y los estudiantes* (KCS), el cual incluye las habilidades que tienen los profesores para predecir lo que a los alumnos les parecerá fácil, difícil, interesante, aburrido, agobiante o motivador, es un conocimiento que combina los saberes acerca de los estudiantes y acerca de las matemáticas que éstos pueden tener; *conocimiento del contenido y la enseñanza* (KCT), refiere al conocimiento que relaciona el conocimiento sobre las matemáticas y su enseñanza. El cual incide por ejemplo, en la toma de decisiones sobre qué tipo representaciones es más adecuada para enseñar un contenido específico o el uso de diferentes métodos para enseñar un contenido matemático; y el *conocimiento del currículo* (KCC), como su nombre lo indica se relaciona con el conocimiento sobre diversos programas educativos, sus características e influencias en los planes de estudio (Ball, et al., 2008).

Los profesores por tanto requieren de un entramado de conocimientos, que les permita interpretar cada vez mejor los contenidos específicos que tienen que enseñar, a fin de hacerlos comprensibles a otros. Por ello, cconsideramos, que en la formación de maestros de Educación Infantil, se deben llevar a cabo tareas profesionales que permitan a los futuros profesores, por una parte, reconocer características de prácticas matemáticas escolares y por otra, aspectos sobre la manera como los niños se enfrentan a estas, dando así, oportunidades al desarrollo de sus competencias profesionales, entre otras, aquella que les permite aprender a mirar con sentido diversas situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Llinares, 2013).

En nuestro estudio, planteamos el diseño de tareas profesionales con el propósito de reconocer distintos aspectos de las matemáticas para la enseñanza que poseen futuros maestros de educación infantil. En particular, algunos relacionados con el conocimiento geométrico. Sarama y Clements (2009, 2011), argumentan que la geometría y los conceptos espaciales a menudo son ignorados o minimizados a principios de la educación, esto puede explicarse, por la concepción de los maestros, que suponen que los niños no pueden aprender ciertos contenidos por su complejidad y nivel de abstracción, o porque los maestros presentan dificultades para construir oportunidades de aprendizaje geométrico. Apreciaciones comunes plantean, Báez e Iglesias (2007); Espinoza, Barbé y Dinko (2007), quienes señalan que los profesores tienden a postergar la enseñanza de la geometría dada su escasa formación matemática y didáctica.

En este artículo nos proponemos identificar elementos del conocimiento matemático para la enseñanza, relacionados con aspectos geométricos que poseen futuros maestros de educación infantil, a partir de las interpretaciones que hacen de las producciones matemáticas de niños y niñas cuando realizan una actividad escolar que implica procesos de visualización. Nuestra hipótesis es que los futuros docentes no asocian algunas dificultades que tienen los niños en la realización de la actividad, con la identificación de propiedades relevantes de las figuras geométricas, como la simetría. Esperamos que los futuros docentes sepan identificar que hay figuras que no son simétricas como el caso del romboide.

2. Formación docente, visualización y simetría

El conocimiento geométrico no se adquiere recibiendo información, ni consiste en reconocer determinadas formas y saber su nombre correcto, implica desarrollar capacidades muy diversas en cada persona. Supone un largo proceso, que requiere: explorar, comparar, expresar verbalmente e interiorizar (Canals, 1997). En educación infantil, una actividad geométrica que busca un aprendizaje significativo involucra diversas habilidades (de dibujo, de construcción, de comunicación, de aplicación y transferencia, entre otras), por ello es importante potenciar procesos cognitivos como la visualización, el razonamiento y la representación (Hoffer, 1981; Alsina, Burgués y Fortuny, 1987; Giménez y Vanegas, 2007).

Los problemas de visualizar objetos, se estudian desde hace tiempo para comprender como actúa el razonamiento espacial desde edades tempranas. La enseñanza sistemática de los procesos y transformaciones geométricas vinculados a la comprensión del espacio físico desarrolla en el sujeto habilidades visuales, verbales (o de comunicación), de dibujo, visualización y construcción, lógicas (o de pensamiento), así como de aplicación o transferencia (Bishop, 1980; Bressan, 2000).

El desarrollo de las ideas de visualización y los razonamientos basados en las llamadas imágenes mentales se asocia al pensamiento geométrico (Hershkowitz, 1989; Duval, 2006). Dichos procesos permiten no sólo representar y comunicar información, sino también avanzar en la comprensión de conceptos geométricos (Arcavi, 2003). Entendemos visualización como un tipo de razonamiento basado en el uso de elementos del espacio visual percibido o interpretado (Gutiérrez, 1996; Presmeg, 2006). Dado que hay pocas investigaciones que se planteen las relaciones entre visualización y simetría en el ámbito de dar sentido a la actividad geométrica en educación infantil, en este trabajo se pretende identificar evidencias de la comprensión del conocimiento matemático para la enseñanza de futuros profesores de infantil en el análisis de actividades escolares.

La simetría, entre otros conceptos, se relaciona con la creación de patrones que nos ayudan a organizar nuestro mundo conceptual (Knuchel, 2004). Trabajar con la noción de simetría en edades tempranas es importante en el desarrollo de habilidades de visualización porque: a) sabemos que hay una capacidad de percibir y jugar con la simetría, b) se mueven afectos, c) hay un enlace entre lo que se trabaja en Infantil y Primaria en el tema, d) se relaciona con procesos de razonamiento mediante composición y descomposición y e) hay formas gestuales asociadas desde una perspectiva neuronal, se reconocen las neuronas espejo, que nos ayudan a planear situaciones relacionadas con el movimiento.

Detrás de los planteamientos de este trabajo está la idea de que la visualización y conceptualización de objetos tridimensionales es un proceso cognitivo complejo (Battista, 2007), y requiere que los futuros docentes reconozcan como se desarrollan las habilidades espaciales de los niños y como codificar y decodificar informaciones espaciales (Markopoulos et al., 2015), para construir determinados conceptos, propiedades o situaciones (Alsina et al., 2009).

El maestro de Educación Infantil debe ser capaz de aplicar prácticas matemáticas operativas y discursivas, necesarias para resolver los problemas aplicables en este nivel. Debe ser capaz de analizar la actividad matemática en múltiples situaciones, en particular las que involucran la simetría, y el desarrollo de procesos de visualización. Desde nuestra postura sobre la formación de maestros de infantil, esto incluye, saber construir a partir del razonamiento de los niños y de sus estrategias, para ayudarles a mejorar su manera de explorar las ideas matemáticas y desarrollar procesos matemáticos.

3. Metodología del estudio

Para conseguir los objetivos previstos, se diseña una tarea profesional, que se realiza con 32 estudiantes para maestros de educación infantil de tercer año de Universidad con edades comprendidas entre 21 y 26 años, de la asignatura de Didáctica de las Matemáticas.

La tarea profesional, toma como referencia una actividad escolar propuesta por un grupo de profesores de educación infantil del CEIP "San Marcos" de Marcha Real (Jaén) a niños de 5-6 años y las respuestas de algunos de ellos (Figura 1). Dicha actividad se centra en la construcción y reproducción de figuras usando el Tangram.

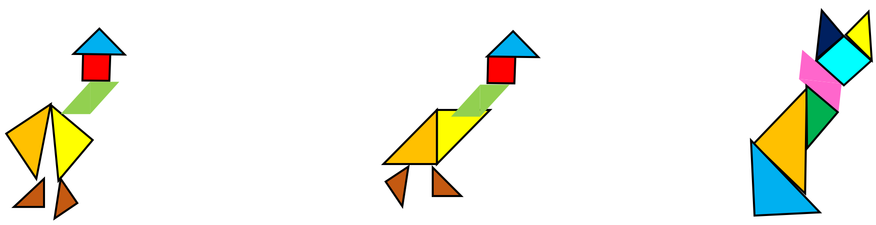
ACTIVIDAD ESCOLAR: "EL TANGRAM "

En un primer momento a cada niño se le entrega un folio con un Tangram fotocopiado (todas las piezas juntas formando un cuadrado), se les pide que lo coloreen y que luego recorten las siete piezas.

El maestro coloca en la pizarra modelos de dibujos realizados combinando de distintas formas las siete piezas. Los estudiantes tendrán que intentar realizar con su "Tangram" dibujos iguales a los modelos.

Modelos colocados en la pizarra a la vista de todos

A continuación se presentan algunas de las producciones finales de los niños



Ana **Luis** **Julia**

Figura 1. Actividad escolar propuesta y algunas respuestas de los niños

Junto a la descripción de la actividad y las respuestas de los niños, se plantea a los futuros maestros una serie de preguntas para "guiar" su análisis y reflexión: 1) Describe lo que está haciendo cada uno de los niños para construir el modelo elegido. 2) ¿En qué te fijas para poder asegurar que Jorge está construyendo el modelo de manera adecuada? 3) Uno de los profesores que propuso la actividad dice que con ella se está trabajando la simetría. ¿Por qué crees que lo dice? 4) En qué cambiaría la actividad si en vez de pedir a los niños que coloreen y recorten las piezas del Tangram, se les diera un Tangram ya elaborado? Y 5) ¿Por qué podemos decir que es "bueno" que el modelo se presente en el plano vertical (pizarra) y se pida a los niños que se desarrolle la reproducción en el plano horizontal (Mesa)?

En efecto, las preguntas realizadas se asocian a diferentes aspectos de los dominios (Ver Tabla 1) propuestos por el MKT: Conocimiento Común del Contenido-CCK; Conocimiento Especializado del Contenido-SCK; Conocimiento del Horizonte-HCK; Conocimiento del Contenido y los Estudiantes-KCS; Conocimiento del Contenido y la Enseñanza-KCT y Conocimiento del Currículo-KCC, (Ball et al., 2008).

Tabla 1. *Preguntas y tipo de contenido asociado en la tarea*

Preguntas de actividad	*Aspectos subdominios MKT*	*Identificadores*
1. Describe lo que está haciendo cada uno de los niños para construir el modelo elegido.	Reconocer habilidades necesarias del alumnado Asociar acciones a procesos matemáticos composición –descomposición Reconocimiento visual respecto del orden de las figuras Reconocer segmentos iguales para construir la figura Hacer coincidir vértices (Conocer si una figura es simétrica o no; por qué una figura es simétrica)	KCS 1 KCS 2a KCS 2b KCS 2c KCS 2d CCK1 CCK2
2. ¿En qué te fijas para poder asegurar que Jorge está construyendo el modelo de manera adecuada? 3. Uno de los profesores que propuso la actividad dice que con ella se está trabajando la simetría. ¿Por qué crees que lo dice?	Comparar para identificar la invariancia Medir o superponer para comprobar la invariancia Ejemplificar que hay un error en quien ha rotado una pieza Explicitar argumentos posicionales relativos Argumentar ventajas y desventajas de utilizar una representación o un modelo determinado Utilizar un lenguaje matemático que permita explicar porque esta actividad provoca reflexionar sobre la simetría de las piezas Reconocer que hay piezas no simétricas por giro que dificultan la copia	KCS 3 KCS 4 KCS 5 KCS 6 HCK1 HCK2
4. En qué cambia la actividad si en vez de pedir a los niños que coloreen y recorten las piezas del Tangram, se les diera uno ya elaborado.	Valorar el usar diferentes métodos y procedimientos permite desarrollar la comprensión de aspectos de la geometría Identificar el papel de los recursos para ayudar o dificultar una tarea, y generar conflicto	KCT1 KCT2
5. ¿Por qué podemos decir que es "bueno" que el modelo se presente en el plano vertical (pizarra) y se pida a los niños que se desarrolle la reproducción en el plano horizontal (Mesa)	Ventajas y desventajas de utilizar una representación o un modelo determinado, Explicar, justificar y usar las ideas matemáticas y procedimientos matemáticos sofisticados, Utilizar un lenguaje matemático que permita explicar porque este modelo presentado de esta manera favorece la realización de la actividad.	SCK1 SCK2 SCK3

Las respuestas de los futuros maestros a la tarea profesional se recogieron a través de la plataforma online (Moodle). En una primera revisión y sistematización, se codificaron las respuestas de todos los estudiantes a cada uno de los items. Se clasificaron sus respuestas en relación a los subdominios planteados por el MKT y posteriormente, se hizo una revisión con el equipo de investigación y se seleccionaron las respuestas de tres estudiantes que se asumieron para el estudio de caso. El reconocimiento de diferentes aspectos de los subdominios del MKT y la estructuración de las argumentaciones de los futuros maestros permitió reconocer sus posicionamientos respecto del conocimiento matemático para la enseñanza relacionados con ciertos aspectos de la visualización, así como las influencias de la idea de simetría.

4. Resultados

Respecto a la primera pregunta en la que se pide a los futuros maestros de educación infantil (FMI), que describan lo que hace cada niño para construir el modelo, se pueden identificar por una parte, las acciones que ellos consideran importantes, y la relevancia que dan al desarrollo de procesos visuales perceptivos.

> Los pies los ha colocado uniéndolos por un vértice de cada figura (de forma aleatoria). Y por último, la cabeza (triangulo azul) lo ha colocado encima del cubo rojo pero no haciendo coincidir ningún vértice de ambas figuras (FMI 1).

En esta y otras descripciones se reconocen errores en la constatación del contenido matemático. En efecto, se confunde cubo con cuadrado, no tiene claridad respecto de las relaciones de posición en el espacio, al hablar de encima del cubo rojo. Se reconocen algunos procesos de más alto nivel como es la unión de segmentos iguales, pero no se insiste en la posible falta de argumentación, sino que se valora el error del niño, por encima de explicar lo que hizo en sentido positivo.

> … une las dos piezas más grandes por la parte que coinciden, pero al ser no ser correcta del todo esta compenetración, porque se debían unir por otro lado, la construcción final queda descompensada por la unión inadecuada de los lados (FMI 2).

Todos se dan cuenta de procesos composición y descomposición de figuras como fundamentales en la construcción del modelo. Y se alude a la yuxtaposición de las piezas (las piezas se unen por la parte que coinciden, idea de comparación y control de segmentos iguales).

A partir del análisis realizado podemos ver que se reconoce una conceptualización geométrica superficial basada en las descripciones y el reconocimiento de errores. Los futuros maestros aluden a que los niños inician el copiado del modelo con las figuras de mayor tamaño. Dos de ellos precisan que el objetivo es conseguir un cuadrado con dos piezas triangulares. Y sólo uno de los tres realmente conceptualiza que debería aparecer un romboide y no un cuadrado.

> En esta imagen se observa que Ana ha empezado colocando las piezas de mayor tamaño. Además, ha colocado las piezas triangulares (amarilla y naranja) de forma simétrica (formando un cubo), aunque la figura de muestra no es así (FMI 1).
>
> Ana une las piezas, tanto las de mayor tamaño como las de menor, todas correspondiéndose en cuanto a medida, formando así cuadrados más grandes o más pequeños, posiblemente teniendo en mente la forma inicial del Tangram que el maestro había presentado (FMI 2).
>
> Ana está intentando elaborar la figura de la derecha, ha empezado usando las figuras más grandes (la mitad del cuadrado que forman las piezas del Tangram) pero no las ha colocado de la manera correcta, ya que teniendo en cuenta que estos dos triángulos deben colocarse formando un romboide, ella los ha colocado formando un cuadrado (FMI 3).

Cuando les preguntamos a los FMI, sobre en qué se fijan para ver que un niño está construyendo el modelo de manera adecuada, sus posicionamientos reflejan que reconocen transformaciones geométricas en aspectos conceptuales, como nociones de cambio o equivalencia, y van tomando conciencia de las nuevas formas a partir de los objetos.

> Jorge establece continuamente y espontáneamente, equivalencias entre las distintas combinaciones de piezas para resolver las diferentes situaciones problemáticas que le surgen (FMI 2).

Si bien parece que se identifican cuáles son las estrategias que está utilizando el niño para replicar el modelo, es necesario una mayor profundización de los procesos de razonamiento desarrollados por los niños, para indicar con mayor precisión cuáles son los procesos asociados a las acciones que les permiten iniciarse en estos aspectos, cómo están visualizando la figura para poder hacer sus propia construcción.

Algunos de los futuros maestros, por otra parte consideran importante establecer relaciones de orden separación y continuidad, estos, son elementos básicos de la topología sobre los que se pueden construir otras ideas geométricas.

> En la etapa pre operacional de los niños, en la cual la proximidad y la separación son aspectos influidos por la presencia o ausencia de barreras en el desarrollo del pensamiento espacial (FMI 2).

Identificar que la construcción de conceptos y relaciones geométricas que se forman en una primera etapa aparecen como producto del proceso de las acciones sobre lo concreto, permitirá observar características comunes de los objetos matemáticos. Por otra parte, las relaciones espaciales en relación al objeto, les permiten a los niños/as darse cuenta de la posición que adquieren los objetos en el espacio, su relación con otros objetos y de estos con el sujeto. Es importante que el educador/a cree situaciones donde los niños/as se den cuenta que un mismo objeto no se ve de igual forma desde distintas posiciones.

A partir de lo analizado, podemos concluir que los futuros maestros asumen, que se pueden construir aspectos de la simetría en las actividades de copiado, argumentando que las distintas piezas del Tangram, así como la composición de figuras y las relaciones que se establecen entre los objetos ayuda en esta elaboración de constructos geométricos. Realmente no hay relación directa entre el hecho evocado y la idea de simetría. No se dice por ejemplo, que el hecho de que haya figuras simétricas a copiar y no simétricas provoca dificultades. Aunque si es cierto que reconocen cuáles son las simétricas y no simétricas, no identifican el papel de ese contenido para la enseñanza. Parece que la "razón" está en la existencia de piezas, y no tanto de la inserción de las piezas en la forma global a copiar.

> … con esta actividad también se trabaja la simetría porque los niños pueden observar figuras, o partes de figuras, que son simétricas y otras que no lo son, como por ejemplo las orejas del "gato" (FMI 1).
>
> Además porque las fichas del Tangram tienen simetría bilateral, ya que cuando se dividen en 2 sus partes son iguales. En el caso de esta actividad considero que se trabaja la simetría porqué la disposición de las piezas en las figuras presentadas son simétricas (FMI 3).

En este sentido, si bien se reconoce que un tipo de simetría es la simetría bilateral que se da a partir del eje de simetría, y que cada pieza puede ser simétrica en sí, no explican la simetría como idea de transformación isométrica, que preserva forma y tamaño. Desde este punto de vista se pueden desarrollar las nociones de equivalencia, semejanza y congruencia de figuras, considerando además las distintas combinaciones de piezas y las distintas posiciones para ser igual que el modelo. Esta pregunta requiere por parte del maestro, de un entendimiento de las ventajas y desventajas de utilizar una representación o un modelo determinado, proporcionando explicaciones matemáticas precisas y adecuadas, que justifiquen su conocimiento geométrico y que permita explicar por qué esta actividad favorece la simetría.

4.1. Sobre el uso de material concreto

Se les plantea a los FMI, que respondan en relación a las oportunidades de aprendizaje o desafíos que se generan al ser los niños quienes tuvieran que colorear y recortar las piezas del Tangram, en vez de darles un Tangram ya elaborado. Señalan que la manipulación de las piezas permite al niño establecer relaciones entre estas, y dar cuenta de sus características.

> Manipulando estas piezas, se da la oportunidad también a los niños, de reconocer las partes de cada figura, en el caso del romboide, por ejemplo, está formado por dos lados iguales largos y dos lados iguales cortos, el cuadrado en cambio tiene los cuatro lados iguales y cada triángulo tiene dos lados iguales y uno más largo (FMI 3).

Consideran importante favorecer la manipulación del material en cuanto a posibilidades para establecer relaciones entre los objetos, descripciones, características y propiedades. Esto facilita el desarrollo de procesos de construcción de ideas matemáticas, en este caso ideas geométricas con significaciones adecuadas y precisas de las figuras. La valoración que hace el FMI, respecto de la forma en cómo se ha presentado el material, señalando que "*…debería dejarse a los alumnos un rato para que descubran las piezas y las manipulen, es decir, dar la oportunidad a los alumnos de que puedan llevar a cabo los mismos procesos cognitivos que llevan a cabo los niños y niñas que sí elaboran el Tangram*" (FMI 3), permite reconocer que la manera que se plantea la tarea crea una oportunidad para que los niños hagan un trabajo matemático que no es habitual, creando oportunidades matemáticas de aprendizaje, en el sentido de poder usar diferentes métodos, recursos y procedimientos para desarrollar la comprensión de aspectos de la simetría. Pero no se dilucida qué aspectos del contenido se ponen de manifiesto.

4.2. Consideración de la elaboración del modelo en distintos planos

Elaborar representaciones de objetos matemáticos en distintos planos genera un desafío cognitivo en el sentido de que se necesita una apropiación de las relaciones espaciales. Consideramos que los FMI dan argumentos coherentes al hecho de que el modelo se presente en el plano vertical (pizarra) y se pida a los niños que se desarrolle la producción en el plano horizontal (mesa).

> Es mejor que la figura modelo este en un plano vertical y diferente al que se les pide a los niños y niñas, porque de esta manera evitamos que copie la figura modelo, utilizándola como plantilla" (FMI 1).
>
> No se trata solo de comprender la figura en el plano vertical, sino que después el niño/a debe trasladarla al plano horizontal y esto puede suponer un ejercicio mental importante a llevar a cabo sobre los planos (FMI 3).
>
> En este sentido, va modificando sus esquemas de conocimiento espacial y aplicando las nociones básicas de espacio y ubicación (FMI 2).

Los futuros maestros reconocen que los procesos de visualización geométrica permiten a los niños la reproducción de modelos, desarrollando figuras semejantes que son favorecedores para la construcción de ideas o conceptos matemáticos. El niño para poder copiar el patrón, realiza cambios de posición de los objetos, para construir y componer nuevas figuras, esto a partir de la modificación de sus esquemas mentales. Esta capacidad está vinculada con ciertas habilidades necesarias para interpretar las imágenes y establecer uniones operativas y relaciones entre las imágenes y lo representado (Bressan, 2000).

Otro de los planteamientos que recogemos de las interpretaciones, es que para que los niños puedan construir el modelo, uno de los aspectos importantes a desarrollar tiene que ver con la organización espacial, es así, que cuando el niño cuando desarrolla estas habilidades puede hacer representaciones con distintas figuras. En relación al conocimiento del contenido y la enseñanza, los FMI, no reflexionan respecto de cómo estas tareas y el poder diseñar secuencias didácticas, conformadas por varias actividades que impliquen o no niveles de complejidad creciente, les permite desarrollar procesos, representar ideas, proporcionar explicaciones matemáticas más precisas y adecuadas, aplicar modelos y visualizar métodos en la resolución de problemas matemáticos, en este caso relacionados con la simetría. Cuando el maestro está realizando una actividad con los alumnos o cuando la está diseñando, pone en juego una serie de conocimientos y competencias con los que se encuentra familiarizado, de manera de tomar decisiones eficaces, donde la comprensión del proceso de aprendizaje puede guiarlos en la forma de presentar los contenidos para que puedan ser dominados por niños y niñas. En este sentido Mason (2002), plantea que el profesor debe ser consciente de lo que él interpreta de las situaciones de enseñanza y aprendizaje, mediante la adopción de una visión estructurada de lo que es relevante para los objetivos de aprendizaje de sus alumnos.

4.3. Sobre el conocimiento especializado del contenido

Podemos concluir que los FMI identifican que en algunas figuras, se da la simetría bilateral, y que cada pieza puede ser simétrica en sí misma, y que a partir de la posición y ubicación de algunas figuras se pueden representar o construir figuras simétricas. En este sentido la conceptualización de simetría que evidencian los FMI, es muy simple, solo aluden a la idea de dibujar una línea recta o eje por la figura de tal forma que dicha línea divide la figura en dos partes que tienen la misma forma. No se reconoce en sus interpretaciones la idea de simetría como una proporción adecuada de las partes de un todo, con correspondencia de posición, forma y dimensiones de las partes de la figura a uno y otro lado de un plano transversal (bilateral).

Desde un cierto punto de vista reconocemos algunas confusiones, por parte de los FMI, en relación a las ideas de simetría y semejanza, tal confusión puede ser que, tanto las simetrías como las semejanzas, pueden interpretarse como transformaciones del plano (naturalmente muy distintas). En efecto las simetrías (transformaciones isométricas) pueden interpretarse como transformaciones del plano que "mueven" figuras en figuras congruentes, en tanto que una congruencia puede interpretarse como cualquier transformación del plano que hace corresponder a cada figura una figura congruente. Por otra parte reconocen que los procesos de visualización son fundamentales para que el niño desarrolle la capacidad de interpretar imágenes que se representan en distintas situaciones de orientación espacial, y que el desarrollo de la percepción espacial le permitirá reconocer formas propiedades geométricas y transformaciones espaciales.

Es preciso señalar que si bien el modelo MKT, nos permitió, estructurar el diseño de la tarea profesional, hacer unas caracterizaciones iniciales identificando diferentes aspectos de los subdominios, y poder reconocer posicionamientos de los FMI, consideramos pertinente señalar, que la identificación de las respuestas y su relación con cada uno de los subdominios (propuestos desde el modelo), es un proceso complejo, ya que en una misma respuesta podemos reconocer diversos aspectos que involucran un entramado de conocimientos relativos a diferentes subdominios. En consecuencia debemos seguir avanzando en el estudio de dicho análisis y considerar nuevas categorías.

Si bien reconocemos que estas orientaciones generales podrían permitir al maestro mejorar sus prácticas de aula, observamos que la enseñanza de la geometría se reduce simplemente a la identificación de figuras y formas, al cálculo de perímetros y áreas (Chamorro, 2001). En este sentido consideramos relevante las aportaciones de Sarama y Clements, (2009, 2011), quienes argumentan que la geometría y los conceptos espaciales a menudo son ignorados o minimizados a principios de la educación, esto puede explicarse, por la concepción por parte de los maestros que suponen que los niños no pueden aprender los contenidos por su complejidad y nivel de abstracción, o porque los maestros presentan dificultades para construir oportunidades de aprendizaje geométrico. (Báez e Iglesias, 2007; Espinoza, Barbe y Dinko, 2007).

5. Reflexiones finales

La tarea profesional planteada a futuros maestros de infantil, ha permitido describir y caracterizar algunos aspectos de su conocimiento matemático para la enseñanza. Llinares (2011), aporta que las tareas por una parte, deben permitir que los estudiantes para maestro re-examinen su comprensión de las ideas matemáticas para que puedan llegar a cuestionarse su propio conocimiento de las matemáticas escolares, y por otro lado, las tareas matemáticas deben permitir que los estudiantes para maestros amplíen su comprensión de algunos contenidos matemáticos.

Al ser preguntas abiertas se estimula la creatividad en la búsqueda de respuestas, aparecen las debilidades y fortalezas de los respecto del dominio de los contenidos y de la comprensión de las propias situaciones planteadas. En las interpretaciones de los FMI, para reconocer el conocimiento común del contenido matemático que evidencian cuando analizan tareas de simetría, podemos concluir a modo general que los FMI no presentan una visión clara de la idea de simetría como una transformación geométrica, del espacio, de las relaciones espaciales y de cómo el niño va estructurando sus esquemas mentales para ir adquiriendo la noción espacial, lo que le permitiría, describir e interpretar, representar posiciones de objetos y poder comunicarlos con un lenguaje geométrico especializado.

Por otra parte el trabajar en geometría con material manipulable, de un modo experimental, permite llevar a cabo distintas construcciones y poder modificarlas, manteniendo las propiedades o relaciones que se hayan definido previamente. Permite, la búsqueda de relaciones, de procesos de razonamiento inductivo y deductivo.

En relación al conocimiento del contenido y los estudiantes, los FMI, plantean que con la manipulación y experimentación con material concreto, se favorecen procesos de construcción, se desarrolla la capacidad de establecer relaciones de orientación espacial entre las distintas figuras. En relación al pensamiento de los niños interpretan que para construir el modelo estos aluden a procesos de la composición de figuras, y para ello, aluden al tamaño como el atributo más significativo en el proceso de construcción. Entre los aspectos que los FMI, consideran relevantes están los procesos de visualización, y en este sentido señalan que el niño asume que las piezas tienen una posición y ordenación determinada que estarían dadas por el color y la forma de las figuras tal como se representan en el modelo propuesto por el profesor, y que la pieza que representa mayores dificultades para su ubicación es el romboide, por las características geométricas de esta figura.

Los resultados muestran que los FMI tienen una perspectiva superficial sobre cómo deben interpretarse las acciones de los niños, revelando un conocimiento geométrico que debe ser superado. En este sentido observamos que los futuros docentes no son totalmente conscientes de las implicaciones entre las ideas matemáticas que se ponen en juego cuando se usa determinado tipo de tarea o recurso, y la importancia de desarrollar este tipo de tareas en Educación infantil que aparentemente no lleva a un conocimiento matemático determinado, sino que lo ponen en juego. La información visual domina de tal manera que revela la incapacidad de los futuros docentes para identificar las relaciones que puede haber entre la simetría y la construcción de imágenes en una situación como la de copiado. Particularmente, las dificultades asociadas a la posición en la que se encuentran los niños en el momento de desarrollar la tarea, así como el cambio de posición de los objetos, dado que la figura original se encuentra en un plano vertical, mientras que se pide una repetición en el plano horizontal.

Las respuestas de los futuros profesores de Infantil a la tarea profesional evidencian algunas aproximaciones sobre sus concepciones y su interpretación de las matemáticas a enseñar, mostrando que la idea de visualización y conceptualización de patrones como la simetría son procesos cognitivos complejos y muy desconocidos.

Para finalizar, consideramos que es pertinente seguir realizando estudios que nos permitan reconocer las ideas y posicionamientos de los futuros maestros, en aras a mejorar las propuestas de formación, proponiendo tareas profesionales, que realmente les brinden la oportunidad de comprender mejor las matemáticas que deben ser potenciadas en educación infantil.

Agradecimientos

Esta investigación fue patrocinada por la comisión nacional de ciencia y tecnología de Chile, (CONICYT) en el marco del programa: Becas Chile. Doctorado en el extranjero. 2013. Resolución 87. Y desarrollada en el marco de las actividades del grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática, GIPEAM (2014 SGR 972).

Referencias

Alsina, C., Burgés, C. y Fortuny, J.M., (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Editorial Síntesis.

Báez, R. e Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL "El Mácaro". *Enseñanza de la Matemática*, *12*, 67-87.

Ball, D.L., Lubienski, S.T., & Mewborn, D.S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. *Handbook of research on teaching*, *4*, 433-456.

Ball, D., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407.

Baroody, A.J., Lai, M.L. & Mix, K.S. (2006).The development of young children's early number and operation sense and its implications for early childhood education. *Handbook of research on the education of young children*, *2*, 187-221.

Battista, M.T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* , 843-908, Charlotte, NC: Information Age.

Bishop, A. (1980). Spatial abilities and mathematics education: A review. *Educational Studies in Mathematics 11*(3), 257-269.

Bressan, A., Bogisic, B. y Crego, K. (2000). *Razones para enseñar geometría en la educación Básica*. Buenos aires: Ediciones Novedades educativas.

Brenneman, K., Stevenson-Boyd, J., & Frede, E. C. (2009). Math and science in preschool: Policies and practice. *Preschool Policy Brief*, 19, 1-12.

Canals, M.A. (1997). Geometría en las primeras edades escolares, *Suma- Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 25, 31-44.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2007). Un modelo cognitivo para interpretar el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. Ejemplificación en un entorno colaborativo. *Enseñanza de las Ciencias*, *25*(1), 33-44.

Chamorro, M.C. (2001). *Dificultades del aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 79-122). Madrid: Ministerio de Educación Cultura y Deporte.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: the case of geometry. *Journal of mathematics teacher education*, *14*(2), 133-148.

Espinoza, L., Barbé, J., Mitrovich, D., & Rojas, D. (2007). El problema de la enseñanza de la geometría en la educación general básica chilena y una propuesta para su enseñanza en el aula. In *II Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico*.

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2011). «Mirando con sentido» el pensamiento matemático de los estudiantes sobre la razón y proporción. *Acta Scientiae, 13*(1), 9-30.

Garvis, S., Fluckiger, B., & Twigg, D. (2012). Exploring the Beliefs of Commencing Early Childhood Education Graduate Students: Providing Insights to Improve Teacher Education Programs. *Australian Journal of Teacher Education, 37*(1), 93-105.

Giménez, J. y Vanegas, Y. (2007). Vivir el espacio fomentando competencias geométricas. *Novedades Educativas*, Buenos Aires, 195, 41-47.

Gutierrez, A. (1996). Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework. In L. Puig, & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1*, 3-19.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in Geometry—Two Sides of the Coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*, 61-76.

Hill, H.C., Sleep, L., Lewis, J.M. & Ball, D.L. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters and what evidence counts. In F.K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (vol. 1, pp. 111-155). Charlotte, NC : Information Age Pub.

Hill, H.C., Schilling, S.G. & Ball, D.L. (2004).Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal*, *105*(1), 11-30.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher Journal*, *74*, 11-18.

Knuchel, C. (2004). Teaching symmetry in the elementary curriculum. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *1*(1), 3-8.

Llinares, S. (2013). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación matemática, 10*, 53-62.

Llinares, S. (2013). Professional Noticing: A Component of the Mathematics Teacher's Professional Practice. *Sisyphus-Journal of Education*, *1*(3), 76-93.

Markopoulos, C., Chaseling, M., Petta, K., Lake, W., & Boyd, W. (2015). Pre-Service Teachers' 3D Visualization strategies. *Creative Education, 6*, 1053-1059.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. London: Routledge Falmer.

Ponte, J.P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. *La actividad matemática en el aula*, 25-34.

Sarama, J., & Clements, D.H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.

Sowder, J., Sowder, L., & Nickerson, S. (2010). *Reconceptualizing Mathematics for elementary mathematics teacher*. New York: WH Freeman, Inc.

Wheatley, G.H. (1990). Spatial sense and mathematics learning. *Arithmetic Teacher, 37*(6), 10-11.

Marjorie Sámuel. Magíster en Educación. Profesora de Didáctica de la Matemática de la Universidad Católica del Maule en la carrera de Educación Parvularia en Chile. Actualmente, es doctoranda del Departamento de Didáctica de las Matemáticas y Ciéncias Experimentales de la Universitat Autónoma de Barcelona. Su línea de investigación está centrada en la formación de profesores.
Email: msamuel@ucm.cl

Yuly Marsela Vanegas Muñoz. Investigadora Postdoctoral del Departamento de Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales de la Universitat Autónoma de Barcelona. Miembro del grupo de investigación: Práctica Educativa y Actividad Matemática – GIPEAM. Ha publicado diversos artículos y capítulos de libro sobre cuestiones de educación matemática. Línea de investigación: Desarrollo profesional del profesor de matemáticas.
Email: yulymarsela.vanegas@uab.cat

Joaquim Giménez Rodríguez. Catedrático del Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y la Matemática de la Universitat de Barcelona. Miembro del grupo de investigación: GREAV. Formador de profesores en diversas universidades españolas y latinoamericanas. Autor de diversos artículos y libros de Educación Matemática. Línea de investigación: Desarrollo profesional del profesor de matemáticas.
Email: quimgimenez@ub.edu