

Esta cartilla pertenece a la serie Unidades didácticas en Educación Matemática de "una empresa docente" (Facultad de Educación, Universidad de los Andes) y ediciones SM. Propone el diseño de una unidad didáctica con el que se busca contribuir al aprendizaje de la adición y sustracción de números enteros. Para ello, la cartilla presenta el material que el profesor de matemáticas de educación media requiere para implementar la unidad didáctica en el aula. La cartilla fue elaborada por el grupo 1 de la primera promoción de la maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes.

La cartilla se compone de cuatro partes. La primera presenta los aspectos que el profesor debe tener en cuenta antes de implementar las tareas propuestas en la unidad didáctica. La segunda contiene los objetivos de aprendizaje propuestos para los estudiantes y la metodología sugerida al profesor. La tercera describe la fundamentación y secuencia de tareas que conforman la unidad didáctica, e incluye el material fotocopiable para los estudiantes. Por último, se indican sugerencias para evaluar a los estudiantes y se presentan pautas para identificar su nivel de desempeño y determinar el logro de los objetivos de aprendizaje.

La secuencia de tareas busca contribuir a que los estudiantes reconozcan y utilicen el vocabulario empleado en un enunciado que involucre adición y sustracción de números enteros; resuelvan tareas matemáticas al atender a las relaciones y propiedades de la adición y la sustracción de los números enteros, y explicar cada paso de la resolución; e interpreten y resuelvan problemas en diferentes situaciones de la vida real que involucren la adición y sustracción de números enteros. Las tareas están elaboradas para ser implementadas con estudiantes de grado séptimo de educación básica. El diseño surge de la necesidad de contribuir al logro de los estándares curriculares "justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones" y "formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos".

Oscar Becerra  
Maritza Buitrago  
Sonia Calderón  
María Cañadas  
Pedro Gómez

  
Autores

Serie Unidades didácticas  
en Educación Matemática

# Adición y sustracción de números enteros

Pedro Gómez  
Fernando Torres

  
Edición académica



 Universidad de  
los Andes  
Facultad de Educación

"una empresa docente", CIFE  
Colección en Educación Matemática

ISBN 978-958-773-853-7



 Universidad de  
los Andes  
Facultad de Educación



Oscar Becerra  
Maritza Buitrago  
Sonia Calderón  
María Cañadas  
Pedro Gómez

  
Autores

Serie Unidades didácticas  
en educación matemática

# Adición y sustracción de números enteros

Primera edición: 15 de junio de 2016

Serie Unidades didácticas en Educación Matemática  
“una empresa docente” (Facultad de Educación, Universidad de los Andes)

Ediciones SM

© Universidad de los Andes, Centro de Investigación y Formación  
en Educación (CIFE), respecto a esta edición

**DIRECTOR** Pedro Gómez

**EDICIÓN ACADÉMICA** Pedro Gómez  
Fernando Torres

**COORDINACIÓN EDITORIAL** Marta Osorno

**AUTORES** Oscar Becerra  
Maritza Buitrago  
Sonia Calderón  
Maria Cañadas  
Pedro Gómez

**DISEÑO** Rocío Duque

© Ediciones SM  
ISBN: 978-958-773-853-7  
Depósito legal

*Impreso en Colombia - Printed in Colombia*

Esta publicación se realizó en el marco del programa de investigación 5424, correspondiente a la convocatoria 731 de 2015 que tiene el apoyo del Fondo Francisco José de Caldas (Colciencias).

Todos los derechos reservados. Esta publicación no puede ser reproducida ni en su todo ni en sus partes, ni registrada en o transmitida por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio sea mecánico, fotoquímico, electrónico, magnético, electroóptico, por fotocopia o cualquier otro, sin el permiso previo por escrito de la editorial.

# Contenido

---

<b>1</b>	Introducción. Antes de implementar la cartilla .....	5
<b>2</b>	Tareas e implementación de la cartilla .....	10
<b>3</b>	Tarea diagnóstica: Punto gol (PG). Sesión 1 .....	10
<b>4</b>	Tarea 1: Representaciones en la recta numérica (T1). Sesión 2 .....	14
<b>5</b>	Tarea 2: El joven y el mar (T2). Sesión 3 .....	16
<b>6</b>	Tarea 3: Lucho el ciclista (T3). Sesión 4 .....	19
<b>7</b>	Tarea 4: Encontrar las llaves (T4). Sesión 5 .....	24
<b>8</b>	Tarea 5: El clima del aeropuerto (T5). Sesión 6 .....	27
<b>9</b>	Tarea 6: El minero (T6). Sesión 7 .....	30
<b>10</b>	Tarea 7: El skater (T7). Sesión 8 .....	34
<b>11</b>	Tarea 8: El repartidor de pizzas (T8). Sesión 9 .....	37
<b>12</b>	Evaluación: Examen final (EF). Sesión 10 .....	40
<b>13</b>	Referencias .....	44
<b>14</b>	Material fotocopiable .....	45



# 1 Introducción.

## Antes de implementar la cartilla

La unidad didáctica que se presenta a continuación aborda los elementos que consideramos necesarios para la solución de las dificultades que los estudiantes de grado séptimo pueden encontrar al resolver situaciones que involucran la adición y sustracción de números enteros. Está enmarcada en los requerimientos descritos en los estándares básicos de competencias en matemáticas de la legislación colombiana (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006, p. 86), en los cuales se expresa que se espera que los estudiantes justifiquen procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones, y formulen y resuelvan problemas en situaciones aditivas y multiplicativas en diferentes contextos y dominios numéricos.

### 1.1 Objetivos de aprendizaje

La secuencia de tareas propuesta ofrece oportunidades para que los estudiantes:

1. reconozcan y utilicen el vocabulario empleado en un enunciado que involucre adición y sustracción de números enteros (O1);
2. resuelvan tareas matemáticas atendiendo a las relaciones y propiedades de la adición y la sustracción de los números enteros, explicando cada paso de la resolución (O2); y
3. interpreten y resuelvan problemas en diferentes situaciones de la vida real que involucren la adición y sustracción de números enteros (O3).

### 1.2 Esquema general de la unidad didáctica

Cada tarea propuesta en las diferentes sesiones contribuye al desarrollo de algunas competencias. El Proyecto PISA entiende por competencia el conjunto de capacidades puestas en juego por los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando resuelven o formulan problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones. Las competencias propuestas por el proyecto PISA son pensar y razonar, argumentar, comunicar, modelar, plantear y resolver problemas, representar, utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones, y usar herramientas y recursos (OCDE, 2004, p. 40). Cada momento de la unidad didáctica apunta al logro de alguno de los objetivos propuestos. De esta manera, en la sesión S1 se realiza la presentación de la unidad (P), sus objetivos (PO), el sistema de evaluación (SE) y el desarrollo de la tarea diagnóstica Punto gol (PG). En las siguientes siete sesiones, se desarrollan ocho tareas que contribuyen al logro de los objetivos propuestos. examen final (EF) y su realimentación (R) se proponen para la sesión S9. El diario de clase es un instrumento en el que los estudiantes registran la solu-

ción a preguntas abiertas sobre los diferentes temas y su estado de ánimo durante las etapas de cada sesión. La puesta en común es la socialización de los resultados obtenidos por los estudiantes. (ver tabla 1).

Tabla 1

*Sesiones de la unidad didáctica*

S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
	O1	O1	O2	O2	O3	O3	O3	O3
P	Entrega PG calificada	T2	Entrega T3 calificada	Entrega T4 calificada	Entrega T5 calificada	Entrega T6 calificada	Entrega T7 calificada	Entrega T8 calificada
PO			Glosario					
SE	T1	T3	T4	T5	T6	T7	T8	EF
PG			Diario de clase					R
			Puesta en común					

El diseño está centrado en el desarrollo de las siguientes competencias del estudio PISA: pensar y razonar (PR), argumentar (A), comunicar (C), modelar (M), plantear y resolver problemas (RP), representar (R), y utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones (LS). Estas competencias están relacionadas con los cinco procesos generales de la actividad matemática propuestos por MEN (2006, pp. 50-51). La tabla 2 muestra cómo las tareas propuestas contribuyen al desarrollo de las competencias.

Tabla 2

*Esquema general de la secuencia de tareas*

Objetivos	Tareas	No. de sesiones	Contribución a competencias
	Presentación de la unidad		
	PG. Punto gol	1	R
O1	T1. Representaciones en la recta numérica	1	R
	T2. El joven y el mar		R
	T3. Lucho el ciclista	1	C
	T4. Encontrar las llaves	1	LS
O2	T5. El clima del aeropuerto	1	M
	T6. El minero	1	PR
	T7. El <i>skater</i>	1	RP
O3	T8. El repartidor de pizzas	1	RP
	Examen final	1	
Total sesiones		9	

### 1.3 Articulación de los contenidos

La figura 1 muestra algunos elementos relacionados con la adición y sustracción en el conjunto de los números enteros,  $\mathbb{Z}$ . El conjunto  $\mathbb{Z}$  contiene los números positivos, negativos y el 0, se puede ordenar en la recta numérica y es posible realizar adiciones y sustracciones con sus elementos utilizando sus propiedades y siguiendo la jerarquía de las operaciones. Esto se aplica para resolver situaciones aditivas mediante el método formal, al usar los algoritmos correspondientes en una expresión aritmética, o mediante el método gráfico, al hacer uso de la recta numérica.

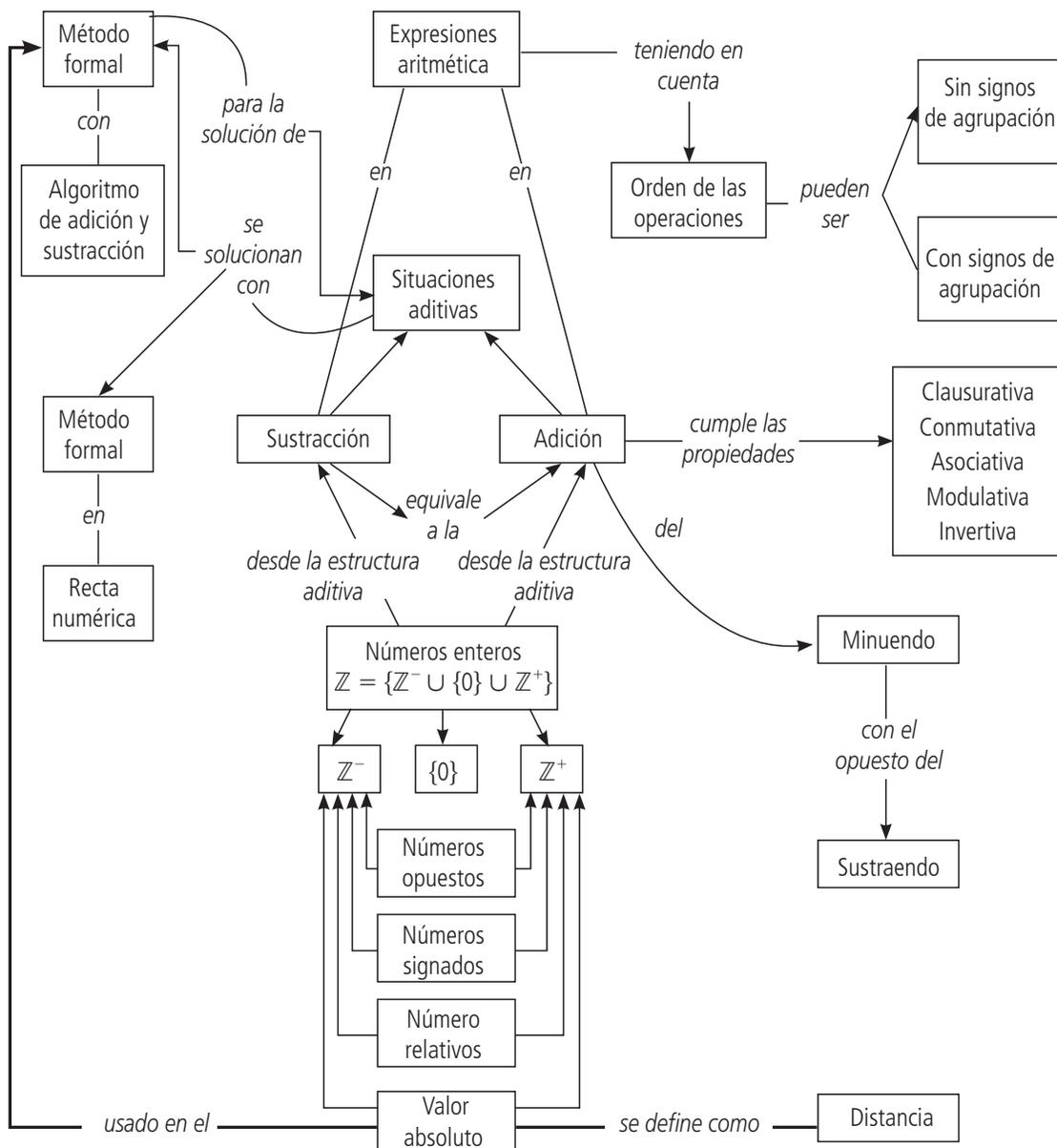


Figura 1. Estructura conceptual de la adición y sustracción de números enteros

## 1.4 Capacidades que se potencian en los estudiantes

Una capacidad se define como una expectativa del profesor sobre la actuación de un estudiante con respecto a cierto tipo de tarea asociada a un tema matemático. Las capacidades se manifiestan mediante conductas observables de los estudiantes (González y Gómez, 2013). Se espera que los estudiantes activen una sucesión de capacidades en la solución de cada tarea. Por ejemplo, para la recta numérica, se identifican capacidades como la correspondencia de un número entero a un punto, la solución de adiciones y sustracciones entre números enteros, la traducción de una situación aditiva entre diferentes sistemas de representación y la verificación de los resultados obtenidos. Las capacidades se denotan con la letra “C” acompañada de un número, como se muestra en la tabla 3.

Tabla 3  
*Listado de capacidades*

C	Descripción	C	Descripción
C1	Establecer la correspondencia entre el conjunto de los números enteros y los puntos de la recta numérica.	C9	Interpretar los resultados y, de acuerdo con su signo, expresarlos en un lenguaje matemático apropiado.
C2	Ubicar números positivos y negativos en la recta numérica, tomando al cero como referente.	C10	Ejecutar la operación indicada de un par de números enteros, y obtener un resultado.
C3	Realizar adiciones y sustracciones entre números enteros utilizando la recta numérica.	C11	Plantear la operación a realizarse (adición o sustracción) de acuerdo con la situación propuesta en un problema.
C4	Hallar el valor absoluto de un número entero.	C12	Identificar el signo de un número teniendo en cuenta el contexto de la situación planteada.
C5	Ejecutar las operaciones indicadas de acuerdo con los signos de agrupación.	C13	Aplicar la simplificación de ceros en el momento de realizar operaciones.
C6	Aplicar las propiedades asociativa, conmutativa, clausurativa o modulativa de la adición para los números enteros.	C14	Aumentar los ceros simplificados al dar la respuesta de un problema.
C7	Traducir una situación aditiva a una expresión aritmética, gráfica o verbal y viceversa.	C15	Identificar las cantidades y datos relevantes para la resolución de un problema.
C8	Verificar los resultados obtenidos a partir de la formulación de una situación aditiva.	C16	Calcular mentalmente operaciones de adición y sustracción entre números enteros.
		C17	Validar los procedimientos aritméticos realizados en una expresión.

## 1.5 Posibles errores en los que pueden incurrir los estudiantes

Se consideran como limitaciones de aprendizaje aquellas dificultades y errores que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas. Una dificultad es un conocimiento parcial que el estudiante tiene sobre un tema y, con motivo de este, incurre en errores cuando aborda tareas concretas. Se identifican seis dificultades y 16 errores. La tabla 4 muestra estas posibles dificultades y errores. Los ejemplos corresponden a posibles razonamientos de los estudiantes.

Tabla 4

*Posibles errores en los que pueden incurrir los estudiantes*

Error	Enunciado
D1. Dificultad en la utilización del lenguaje matemático y verbal en situaciones aditivas	
E1	No diferenciar entre la sustracción y el concepto de número negativo en su representación verbal y simbólica.
E2	Plantear inadecuadamente una expresión aritmética, malinterpretando expresiones como excede, disminuido en, aumenta en y/o diferencia entre.
E3	Obtener un resultado negativo para una distancia.
D2. Dificultad en la utilización de la recta numérica para la adición y sustracción de números enteros	
E4	Usar de manera incorrecta la recta numérica para realizar operaciones aditivas: iniciar contando desde el número que indica la operación, lo que llevará a obtener en el resultado una cantidad mayor o menor a la correcta. El estudiante cuenta los puntos que se ha desplazado y no los espacios entre ellos.
E5	Ordenar los números negativos y positivos en la recta numérica extrapolando el orden de los naturales a los negativos.
E6	Cambiar el orden de los números en una operación para efectuar una conocida.
D3. Dificultad para realizar operaciones que involucran números enteros	
E7	Omitir el signo cuando el resultado de una operación es un número negativo.
E8	Utilizar la definición de resta como un desplazamiento hacia la izquierda en la recta numérica y omitir los demás signos implicados en la operación.
E9	Omitir los signos de agrupación al resolver una expresión aritmética.
E10	Prescindir del signo del número entero al realizar operaciones.
E11	Utilización inadecuada de la ley de signos.
E12	Interpretar la resta de números negativos como la acción de quitar el sustraendo al minuendo.
E13	Adicionar o sustraer el inverso aditivo en una expresión aritmética.
D5. Dificultad para dar sentido a un resultado negativo	
E14	Pensar que siempre el minuendo debe ser mayor que el sustraendo (como ocurre en los naturales).
E15	Asegurar que la respuesta a una operación no puede dar negativa.
D6. Dificultad en la utilización del valor absoluto	
E17	Pensar que si el valor absoluto de un número negativo es una cantidad positiva, el valor absoluto de un número positivo será un número negativo.

## 2 Tareas e implementación de la cartilla

Como se mencionó en el apartado anterior, la secuencia de tareas está compuesta por nueve tareas. La tarea diagnóstica (PG) está diseñada para que los estudiantes la resuelvan individualmente, mientras que el resto de tareas están propuestas para ser desarrolladas en parejas. A continuación, se describe cada una de las tareas, se presentan las sugerencias metodológicas y el material fotocopiable. La descripción contiene las metas de la tarea, los recursos que puede utilizar, el agrupamiento de los estudiantes y los conceptos abordados. Las sugerencias metodológicas incluyen aclaraciones de la tarea, capacidades que se espera que los estudiantes activen en el momento de resolver la tarea, los posibles caminos de aprendizaje que pueden seguir al abordar la tarea, los errores en los cuales pueden incurrir y las actuaciones o interacciones que puede propiciar el profesor para promover el aprendizaje de los conceptos y procedimientos abordados. El material fotocopiable ofrece actividades, ejercicios o acciones para ser desarrollados en forma grupal o individual según las indicaciones dadas en cada descripción. Adicionalmente, se espera que, en cada sesión de clase, el profesor asuma unos roles específicos para determinados momentos. La mayoría de las tareas pueden desarrollarse en cuatro etapas: (a) motivación y comentarios sobre la situación a tratar; (b) entrega de la tarea impresa e inicio de la solución; (c) entrega de los materiales y acuerdos sobre la solución de la tarea; y (d) socialización de procedimientos y resultados.

En el apartado de descripción de las tareas y sugerencias metodológicas, mostramos los componentes que describen cada tarea. Presentamos las metas, recursos, agrupamiento de los estudiantes y conceptos abordados en la sesión de clase. Después de la descripción, enumeramos las sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea, y terminamos con las características de la evaluación de los estudiantes.

## 3 Tarea diagnóstica: Punto gol (PG). Sesión 1

La secuencia de tareas comienza con Punto gol (PG), que pretende activar y verificar los conocimientos previos de los estudiantes, necesarios para el desarrollo de las tareas. En Punto gol, se presentan dos tablas con los puntajes correspondientes a varios equipos de fútbol y posteriormente se debe dar respuesta a una serie de preguntas. En la solución de la tarea, se deben retomar conceptos como números signados y relativos y orden de los números enteros. Además, se sugiere realizar una interpretación de los números que presenta la actividad de acuerdo con el contexto.

### 3.1 Descripción de la tarea

Para describir la tarea, se establecen las metas, conceptos y procedimientos que aborda, los sistemas de representación necesarios, los materiales y recursos que implica y el tipo de agrupamiento de los estudiantes.

*Meta.* La meta de la tarea se centra en activar los conocimientos previos de los estudiantes, necesarios para el desarrollo de las demás tareas.

*Conceptos y procedimientos abordados.* La tarea aborda los siguientes conceptos y procedimientos: números signados, números relativos y orden de los números enteros.

*Sistemas de representación que se activan.* Se activa el sistema de representación simbólico, al proponer un número signado y/o relativo; el gráfico, al representar un número en la recta numérica; y el verbal, al traducir un enunciado.

*Contexto en el que se sitúa la tarea.* La tarea se encuentra en el contexto cultural, que permite representar los puntajes de equipos de fútbol a través del uso de números enteros.

*Materiales y recursos.* Se utilizan material fotocopiable, lápiz, borrador y regla.

*Agrupamiento de los estudiantes e interacciones previstas.* Los estudiantes trabajan inicialmente de manera individual. Se da inicio con la lectura de la tarea en voz alta. Posteriormente, los estudiantes la desarrollan de manera individual, momento en el que el profesor está atento a las dudas que puedan surgir. Al finalizar la solución de la tarea, se realiza una socialización, en la que el profesor participa como moderador.

### 3.2 Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Antes de implementar la tarea diagnóstica, es necesario que el profesor haya trabajado números signados, números relativos y orden de los números enteros. El tiempo estimado para resolver la tarea es de 50 minutos, distribuidos de la siguiente forma.

*Distribución del material, lectura y explicación de la tarea.* El profesor aclara a los estudiantes que la solución de la tarea es individual, pues se quiere tener un diagnóstico de los conceptos y procedimientos que manejan los estudiantes (5 minutos).

*Desarrollo de la tarea.* El profesor interactúa con los estudiantes para orientar y solucionar posibles dudas (25 minutos).

*Socialización de los resultados.* El profesor actúa como moderador frente a la participación de los estudiantes (20 minutos).

### 3.3 Capacidades y caminos de aprendizaje

Los estudiantes pueden activar los siguientes conocimientos previos al momento de abordar la tarea: reconocer los elementos del conjunto de los números enteros; conocer el orden de los números enteros; asociar expresiones como “en contra”, “deuda” o “pérdida” con valores negativos; y asociar expresiones como “a favor”, “aumento” o “ganancia” con valores positivos.

Se entiende como camino de aprendizaje de una tarea la secuencia de capacidades que pueden activar los estudiantes al abordarla. Los caminos de aprendizaje sirven como referente para que el profesor prevea las acciones que ellos pueden realizar al enfrentar una tarea y los errores en los que pueden incurrir.

Los conocimientos para esta tarea hacen referencia a las siguientes actuaciones.

- Aplicar los algoritmos de las operaciones adición y sustracción en el conjunto de los números naturales.
- Resolver expresiones aritméticas en el conjunto de los números naturales de acuerdo a la jerarquía de las operaciones indicadas.
- Resolver expresiones aritméticas en el conjunto de los números naturales de acuerdo a sus signos de agrupación.
- Definir el conjunto de los números enteros.
- Reconocer los elementos del conjunto de los números enteros.
- Conocer el orden de los números enteros.
- Asociar expresiones como “en contra”, “deuda” o “pérdida” con valores negativos.
- Asociar expresiones como “a favor”, “aumento” o “ganancia” con valores positivos.

### 3.4 Errores en los que pueden incurrir los estudiantes

Los estudiantes pueden presentar dificultades al encontrar el valor absoluto de un número o dar sentido a un resultado negativo, por lo que puede incurrir en los errores E17, E14, o E2, (ver tabla 4).

### 3.5 Ayudas para el profesor

Si los estudiantes manifiestan dudas al completar la tabla de puntajes o al responder a las preguntas propuestas, el profesor puede acudir a realizar preguntas como:

- entre los números  $-9$  y  $3$ , ¿cuál es mayor? y
- ¿cuántos números enteros hay entre  $-3$  y  $3$ ?

Asociados a estos momentos, es oportuno que el profesor proponga a los estudiantes ubicar los números  $0$ ,  $-5$ ,  $12$  y  $-8$  en una recta numérica y que acuda a situaciones de deudas y préstamos que permitan observar pérdida y ganancia.

### 3.6 Evaluación

Debido a que esta tarea corresponde al diagnóstico, se espera que el profesor se concentre en observar en qué medida sus estudiantes activan las capacidades previas al resolver la tarea teniendo en cuenta la verificación de tres aspectos: tareas cortas, preguntas y verificación de ayudas.

*Tareas cortas.* Se proponen tareas como ordenar números enteros de menor a mayor o de mayor menor; realizar avances o retrocesos en la recta numérica; realizar adiciones y sustracciones entre números enteros de una sola cifra utilizando la recta numérica; y cancelar un número adicionándole su opuesto.

*Preguntas e instrucciones.* Se pueden realizar preguntas como las siguientes: entre los números  $-9$  y  $3$ , ¿cuál es mayor?; ubica los números  $0, -5, 12$  y  $-8$  en una recta numérica; o ¿cuántos números enteros hay entre  $-3$  y  $3$ ?

*Verificación de ayudas.* Es necesario constatar si es claro que no pueden tenerse distancias negativas.

### 3.7 Material fotocopiable

En la tabla 5, se muestran los puntos a favor y en contra de los equipos participantes en un torneo interno de fútbol para los diferentes cursos de grado séptimo. Para la primera ronda, entre los equipos A y C ¿quién obtuvo mayor puntaje?; entre B y D ¿quién obtuvo mayor puntaje en la segunda ronda?; entre G y H ¿quién obtuvo menor puntaje en la primera ronda? De acuerdo con la tabla, ¿puedes dar el orden de la premiación?

Tabla 5  
*Punto gol*

Equipos	Primera ronda		Segunda ronda		Puntajes		Resultado final
	Puntos a favor	Puntos en contra	Puntos a favor	Puntos en contra	Primera ronda	Segunda ronda	
A	1	0	5	0			+6
B	0	4	0	3			-7
C	5	0	2	0			+7
D	0	2	0	4			-6
F	3	0	0	5	+3	-5	-2
G	1	2	2	4	-1	-2	-3
H	4	0	6	1		+5	+9

## 4 Tarea 1: Representaciones en la recta numérica (T1).

### 4 Sesión 2

La tarea Representaciones en la recta numérica se trabaja como una tarea de ejercitación. Se tiene en cuenta que, en la representación de los números enteros en la recta numérica, puede evidenciarse de una manera clara la correspondencia del conjunto de los números enteros y los puntos de la recta numérica, junto con la ubicación de números positivos y negativos en la recta.

#### 4.1 Descripción de la tarea

*Meta.* La meta de la tarea consiste en representar el conjunto de los números enteros en la recta numérica.

*Conceptos y procedimientos abordados.* La tarea aborda los siguientes conceptos y procedimientos: números signados, números relativos, orden de los números enteros, recta numérica y correspondencia de los números enteros en la recta numérica.

*Sistemas de representación que se activan.* Se activa el sistema de representación gráfica, al realizar la representación del conjunto de los números enteros.

*Contexto en el que se sitúa la tarea.* La tarea corresponde a un contexto cercano que permite traducir situaciones reales a esquemas o estructuras matemáticas.

*Materiales y recursos.* Se utilizan material fotocopiable, lápiz y borrador.

*Agrupamiento de los estudiantes e interacciones previstas.* Esta tarea se realiza de manera individual. Se sugiere iniciar la actividad con la lectura en voz alta de la tarea. Posteriormente, los estudiantes la desarrollarán de manera individual, momento en el que el profesor está atento a las dudas que puedan surgir. Al finalizar la solución de la tarea por parte de los estudiantes, se realiza una socialización, en la que el profesor participa como moderador.

#### 4.2 Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Antes de implementar la tarea Representaciones en la recta numérica, es necesario que el profesor haya trabajado el concepto de número entero, la correspondencia de números enteros con los puntos de la recta y su representación gráfica. El tiempo estimado para resolver la tarea es de 50 minutos, distribuidos de la siguiente forma.

*Distribución del material, lectura y explicación de la tarea.* El profesor aclara a los estudiantes que la tarea se realiza de manera individual (5 minutos).

*Desarrollo de la tarea.* El profesor interactúa con los estudiantes para orientar y solucionar posibles dudas (30 minutos).

*Socialización de los resultados.* El profesor actúa como moderador frente a la participación de los estudiantes (15 minutos).

### 4.3 Capacidades y caminos de aprendizaje

Los estudiantes pueden activar todas o algunas de las capacidades C1, C2 y C3. Un posible camino que pueden seguir los estudiantes al resolver la tarea es el siguiente.



Complementario a lo anterior, se puede activar una serie de capacidades previas para la ejecución de esta tarea que se refieren a

1. definir el conjunto de los números enteros;
2. reconocer los elementos del conjunto de los números enteros; y
3. conocer el orden de los números enteros.

### 4.4 Errores en los que pueden incurrir los estudiantes

La principal dificultad que pueden presentar los estudiantes está en la utilización de la recta numérica para la representación de números enteros, por lo que se puede incurrir en el error E5 (ver tabla 4).

### 4.5 Ayudas para el profesor

Los estudiantes pueden ubicar de manera incorrecta los números negativos en la recta numérica. En este caso, se sugiere que el profesor coloque un espejo en el punto cero de la recta numérica para que los estudiantes puedan observar cuál es el orden adecuado de los números, y resaltar además la necesidad de agregar el signo negativo.

### 4.6 Evaluación

Es posible determinar si la meta de la tarea se ha alcanzado cuando los estudiantes evidencian las siguientes acciones.

- Establecen adecuadamente la correspondencia entre los números enteros y los puntos en la recta numérica.

- Ubican enteros negativos y enteros positivos tomando el cero como referente.
- Representan alguna situación en la recta numérica.

## 4.7 Material fotocopiable

- A. Realiza los siguientes pasos para representar gráficamente el conjunto de los números enteros  $\mathbb{Z}$ . Ten en cuenta que la distancia entre los puntos debe ser la misma.
1. Elige un punto cualquiera de la recta y asígnale el número cero.
  2. Ubica un punto a la derecha del cero y asígnale a este el número 1.
  3. Ubica un punto a la derecha del 1 y asígnale el número 2.
  4. Ubica un punto a la izquierda de cero y asígnale el número  $-1$ .
  5. Ubica un punto a la izquierda de  $-1$  y asígnale el número  $-2$ .
  6. Ahora ubica cuantos puntos puedas a la izquierda y a la derecha, y asígnales el número correspondiente, ya sea positivo o negativo.
- B. Escribe qué número representa cada punto señalado en la recta numérica.
- C. Dibuja en una recta numérica una situación que se pueda representar con números enteros. Emplea una escala diferente a la presentada en el punto A.

# 5 Tarea 2: El joven y el mar (T2).

## Sesión 3

La tarea hace referencia a una situación de observación de la naturaleza. A partir de un dibujo, el estudiante debe responder una serie de preguntas enfocadas a la correspondencia de números enteros y de los elementos que componen el dibujo. Para ello, se deben identificar los números enteros y realizar desplazamientos en la recta numérica. Al abordar la tarea, el estudiante aplica conceptos y definiciones que le permiten dar solución a la situación planteada.

### 5.1 Descripción de la tarea

*Metas.* La tarea tiene las siguientes metas: (a) reforzar conceptos previos sobre la correspondencia de números enteros en la recta numérica; (b) realizar desplazamientos en la recta numérica; y (c) traducir una situación representada un gráfico a un lenguaje simbólico.

*Conceptos y procedimientos abordados.* La tarea aborda los conceptos de números signados, recta numérica y valor absoluto, y los procedimientos relacionados con la correspondencia de los enteros en la recta y con el valor absoluto.

*Sistemas de representación que se activan.* El sistema de representación simbólico se activa con el planteamiento de los valores correspondiente para cada pregunta; el gráfico se activa cuando se ubican los puntos y desplazamientos en la recta numérica; y el verbal se activa al traducir un enunciado.

*Contexto en el que se sitúa la tarea.* La tarea se ubica en un contexto gráfico que promueve la lectura de datos directamente de tablas o datos.

*Materiales y recursos.* Se utiliza lápiz y papel para resolver la tarea.

*Agrupamiento de los escolares e interacciones previstas.* Esta tarea se desarrolla en tres fases: (a) inicial en gran grupo; (b) de desarrollo en forma individual; y (c) de cierre en parejas y gran grupo.

## 5.2 Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

En la fase inicial, se sugiere socializar la situación a tratar en el problema mediante reflexiones y comentarios de situaciones de, por ejemplo, submarinos, aviones, aves y peces. Esto se lleva a cabo en 5 minutos. El propósito de estas preguntas es motivar a los estudiantes e introducirlos en la situación que se va a trabajar.

En la fase de desarrollo, el profesor entrega la tarea impresa a cada estudiante para iniciar su solución. En este momento, se reciben comentarios sobre las posibles relaciones entre la gráfica presentada y la motivación anterior (5 minutos). La función del profesor es orientar a cada estudiante, al emplear ejemplos y preguntas, con el propósito de aclarar las dudas que se presenten y encaminarlo a que plantee y solucione la expresión aritmética propuesta (15 minutos).

En la fase de cierre, los estudiantes inicialmente comparan sus respuestas con las de sus compañeros e intercambian ideas y procedimientos, para llegar así a una solución común (10 minutos). Posteriormente, el profesor organiza a los estudiantes para la socialización de la tarea (15 minutos). En este proceso, se espera que los estudiantes realicen aportes o comentarios que encaminen a la solución correcta de la tarea y, al mismo tiempo, se concluyan aspectos relevantes de la situación. Finalmente, se sugiere que el profesor oriente al grupo y escriba en el tablero los aportes de los estudiantes hasta llegar a un acuerdo común sobre la solución de la tarea.

## 5.3 Capacidades y caminos de aprendizaje

La tarea activa capacidades relacionadas con la identificación de los datos relevantes y sus signos, la traducción de la situación desde lo gráfico a lo verbal y el planteamiento de números signados que representen cada situación. C1 – C2 –

C12 – C4 (ver tabla 3) es un posible camino que los estudiantes pueden seguir al resolver la tarea.

## 5.4 Errores en los que pueden incurrir los estudiantes

En el momento de abordar la tarea, el estudiante puede incurrir en los errores E4 y E5, relacionados con dificultades en la utilización de la recta numérica para la adición y sustracción de números enteros (ver tabla 4).

## 5.5 Ayudas para el profesor

Cuando los estudiantes no están obteniendo el resultado esperado al realizar operaciones con la recta numérica, con motivo del error E4, el profesor puede plantear preguntas como ¿estás contando los saltos (número de espacios recorridos entre dos o más puntos en la recta numérica) incluyendo el punto de partida?

## 5.6 Evaluación

Se espera que el profesor se concentre en observar en qué medida sus estudiantes

- identifican datos relevantes y sus signos, y
- realizan la traducción de la situación, desde lo gráfico a lo verbal y el planteamiento de números signados que representen cada situación.

## 5.7 Material fotocopiable

Observa la siguiente imagen y responde:

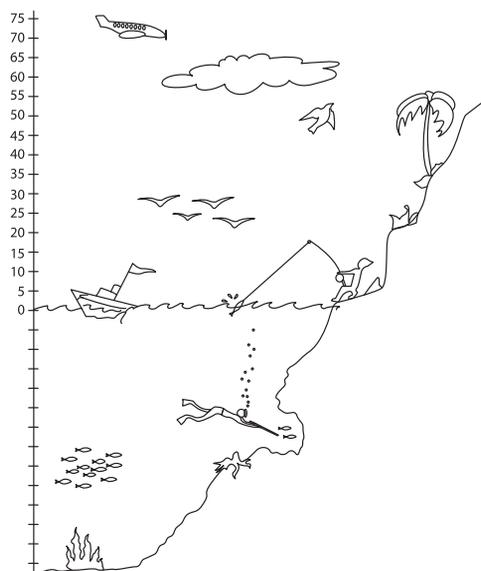


Figura 2. El joven y el mar

1. ¿A qué altura aproximada está cada uno de los elementos que se encuentran situados sobre el nivel del mar?
2. ¿A cuántos metros está el nivel del mar?
3. ¿Cómo marcarías las alturas dentro del agua?
4. ¿Cómo ordenarías según la altura en que se encuentran, a cada uno de los elementos que ves dibujados?
5. Si el buceador quiere pescar el pulpo, ¿cuántos metros tendrá que recorrer?
6. Si las gaviotas quieren beber agua, ¿cómo y cuánto se desplazarán?
7. ¿A qué altura está el avión respecto a la nube? y ¿a qué altura el pájaro?
8. Si el buceador quiere ir a ver si hay algún pez detrás de las algas ¿qué tendrá que hacer?
9. Si después quiere salir a respirar y descansar bajo la palmera, ¿qué distancia recorrerá?

## 6 Tarea 3: Lucho el ciclista (T3).

### Sesión 4

La tarea presenta los recorridos realizados por un ciclista en sus entrenamientos, que se pueden representar en la recta numérica. Su función dentro de la secuencia de tareas es la elaboración y construcción de significados, ya que se requiere reconocer términos como avanzar o devolverse y su equivalente en matemáticas. Esta tarea permite la construcción del algoritmo para adicionar y sustraer números enteros. Se hace uso de la sumadora de enteros como material que permite verificar operaciones de adición y sustracción en la recta numérica.

#### 6.1 Descripción de la tarea

*Metas.* La tarea tiene las siguientes metas: (a) representar en la recta numérica los recorridos realizados por el ciclista; y (b) escribir y ejecutar una expresión aritmética que represente los recorridos del ciclista para cada día.

*Conceptos y procedimientos abordados.* Se abordan los conceptos de números relativos, números signados, recta numérica y valor absoluto, y los procedimientos de correspondencia de los enteros en la recta, adición y sustracción de enteros y valor absoluto.

*Sistemas de representación que se activan.* Se activa el sistema de representación manipulativo con la utilización de los materiales; el simbólico, con el planteamiento de la expresión aritmética; el gráfico, con la ubicación de puntos y desplazamientos en la recta numérica; y el verbal, al traducir un enunciado.

*Contextos en los que se sitúa la tarea.* La tarea se ubica en un contexto deportivo, al que los estudiantes pueden tener acceso a través de los medios de comunicación, y permite la construcción del algoritmo que se debe emplear para resolver la tarea.

*Materiales y recursos.* Se utilizan material fotocopiable, lápiz, borrador, regla, recta numérica y la sumadora de enteros.

*Agrupamiento de los estudiantes e interacciones previstas.* Se realiza trabajo en parejas, organizado en cuatro momentos: (a) introducción de la tarea, agrupación de los estudiantes y comentarios sobre el entrenamiento de los ciclistas; (b) entrega de la tarea impresa y de la recta numérica, para ser resuelta por los estudiantes en parejas; (c) entrega del material sumadora de enteros; y (d) socialización de las soluciones obtenidas por las parejas.

## 6.2 Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Para el desarrollo de esta tarea, se han planificado las siguientes etapas. En los primeros cinco minutos, el profesor motiva la situación. Después, entrega de la tarea (para un trabajo individual y posteriormente en parejas). En esta etapa, pueden presentarse dudas por parte de los estudiantes. El profesor los orienta mediante ejemplos y preguntas, con el fin de aclararlas (15 minutos). En seguida, el profesor entrega del material sumadora de enteros, (tres rectas numéricas paralelas, con una distancia específica entre ellas). El objetivo es que si se representan números enteros en las rectas de los laterales y se traza una recta que una ambos números, esta recta corte a la recta numérica del centro en un punto. Este número es el resultado de la adición de los números representados inicialmente en las rectas de los lados. Además de obtener resultados, este recurso permite verificar el resultado de una adición (o sustracción) entre dos o más números enteros. Finalmente, se estudia la solución compartida de la tarea, al realizar una puesta en común de 10 minutos, sobre los resultados obtenidos por los estudiantes. El profesor escribe en el tablero los aportes propuestos (10 minutos). Además, se da respuesta a la pregunta final de la tarea, ya que se ha diseñado para que en la socialización (gran grupo) se compartan las expresiones escritas para cada día de entrenamiento del ciclista (10 minutos).

## 6.3 Capacidades y caminos de aprendizaje

La tarea activa capacidades relacionadas con la representación gráfica, simbólica y verbal, y con algunas capacidades que involucran la verificación de resultados. El siguiente es un posible camino de aprendizaje que pueden seguir los estudiantes al resolver la tarea (ver tabla 3).



## 6.4 Errores en los que pueden incurrir los estudiantes

En el momento de abordar la tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores relacionados con el planteamiento inadecuado de una gráfica o una expresión aritmética. Pueden usar incorrectamente la recta numérica para realizar operaciones aditivas, omitir el signo de un resultado e indicar que un resultado negativo pueda representar una distancia. Estos y otros errores se identifican como E2, E3, E4, E6, E7 (ver tabla 4).

## 6.5 Ayudas para el profesor

El profesor puede formular preguntas como las siguientes. ¿Por dónde sale el sol, oriente u occidente? ¿Qué signo le asignamos al oriente y al occidente? ¿Si te devuelves (ir al occidente), los números aumentan o disminuyen? El profesor formula estas preguntas en el momento en que observa que hay estudiantes que ubican el oriente hacia la izquierda del cero en la recta numérica, puesto que esto puede llevar posteriormente a proponer un número equivocado en la expresión aritmética.

Si al realizar las operaciones aditivas de los trayectos del ciclista en la recta numérica, se presenta E4, el profesor puede formular la pregunta: ¿estás contando los saltos, incluyendo el punto de partida?

Las ayudas con la sumadora de enteros pueden ser empleadas durante la socialización (gran grupo), cuando los estudiantes muestren resultados equivocados, causados por E6 o E7. En este momento, el profesor realiza la orientación necesaria para utilizar la sumadora mediante un ejemplo y pide a los estudiantes que verifiquen sus cálculos con este recurso.

## 6.6 Evaluación

Es posible determinar si la meta de la tarea se ha alcanzado cuando los estudiantes evidencian las siguientes acciones.

- Traducen la situación, desde la representación gráfica o desde su enunciado, para representarla en la recta numérica.
- Plantean una expresión aritmética que describa los recorridos realizados por el ciclista.
- Interpretan y verifican los resultados obtenidos.

## 6.7 Material fotocopiable

Lucho el ciclista entrena diariamente para una competencia sobre una autopista recta y en terreno llano. La autopista está ubicada justo en frente de su casa que conecta el occidente con el oriente. Lucho tiene un acompañante con quien regresa a casa, en carro, después de cada entrenamiento. En la tabla 6 aparecen

los últimos cuatro días de entrenamiento en los que realizó diferentes recorridos, saliendo siempre desde su casa.

Tabla 6  
*Lucho el ciclista*

Día	Descripción
Primero	Recorrió 15 km hacia el oriente, tomó agua y avanzó 40 km más, descansó un momento y luego recorrió 30 km más en la misma dirección.
Segundo	Recorrió 10 km hacia el oriente, avanzó 25 km más y se devolvió 30 km por la misma autopista.
Tercero	Recorrió 20 km hacia el occidente, se devolvió 30 km por la misma autopista y finalmente recorrió 15 km hacia el occidente.
Cuarto	Recorrió 50 km hacia el occidente, descansó un momento, recorrió 25 km más en la misma dirección y finalmente recorrió 30 km también al occidente.

1. Representar cada uno de los cuatro días de entrenamiento en las rectas numéricas dadas. Para tal propósito, se establece que la casa de Lucho es el punto cero de la recta, el oriente representa los números enteros positivos y el occidente los números enteros negativos.
2. ¿A qué distancia de la casa quedó Lucho al finalizar cada uno de los entrenamientos?
3. Para cada día, ¿en qué punto de la recta numérica quedó ubicado Lucho, justo antes de regresar a su casa?
4. ¿Qué expresiones aritméticas podrías escribir para justificar las respuestas obtenidas en el numeral 3?
5. Verifica tus resultados empleando la sumadora de enteros.

Primer día



Segundo día



Tercer día



Cuarto día



Figura 3. Entrenamientos

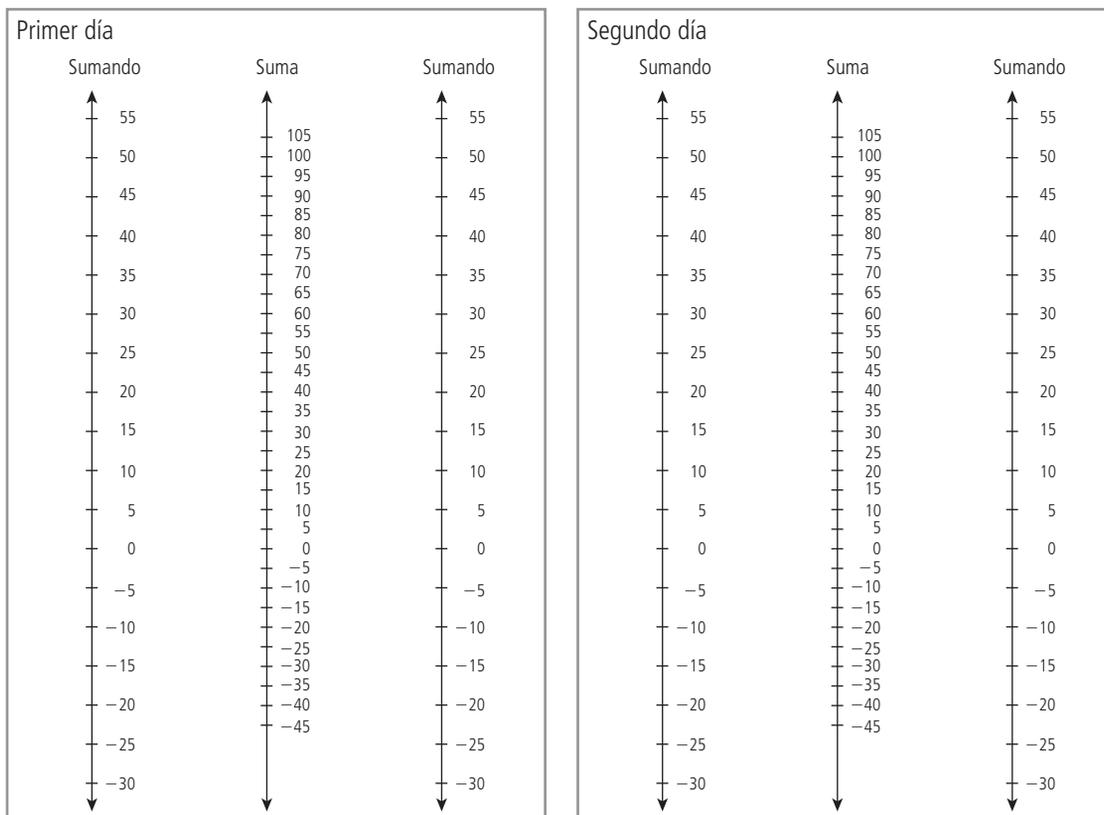


Figura 4. Sumadoras días primero y segundo

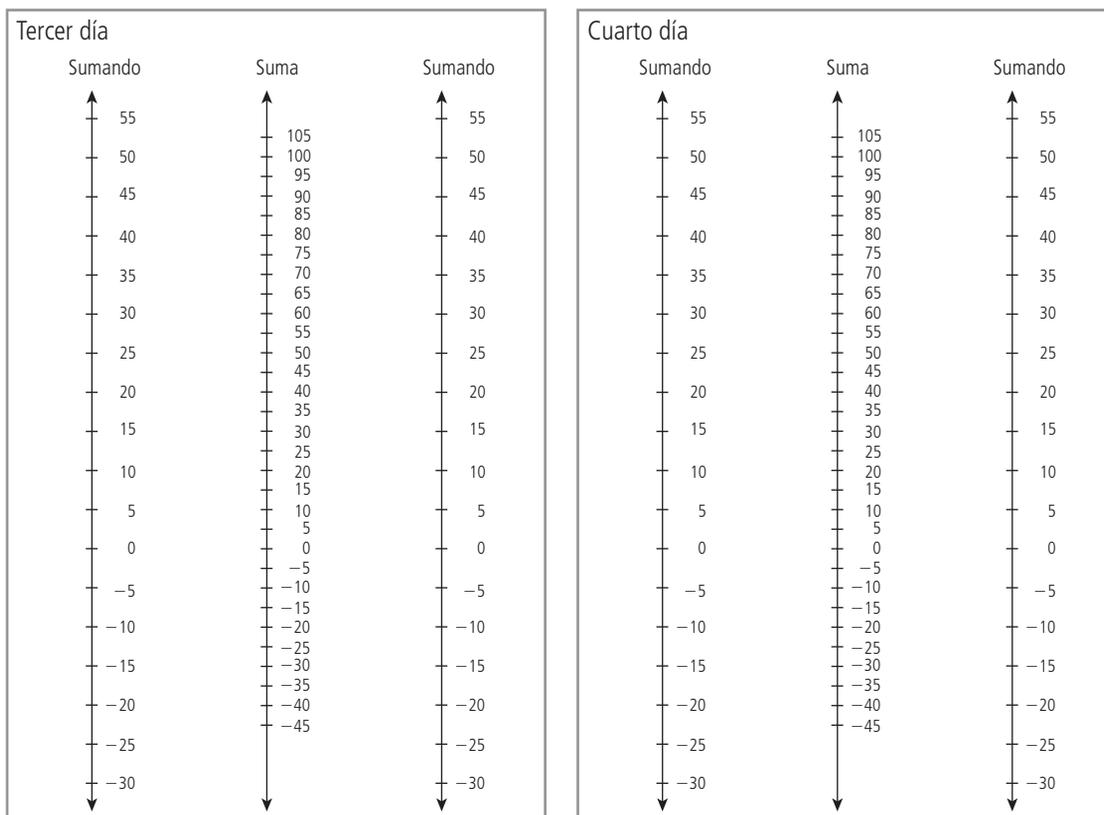


Figura 5. Sumadoras días tercero y cuarto

## 7 Tarea 4: Encontrar las llaves (T4). Sesión 5

Encontrar las llaves es una tarea de ejercitación en la que se resuelven unas expresiones aritméticas que implican la aplicación de las relaciones y propiedades para la adición y sustracción de números enteros, el uso de signos de agrupación y el concepto de valor absoluto.

### 7.1 Descripción de la tarea

*Metas.* Esta tarea tiene dos metas: (a) ejecutar algoritmos de adición y sustracción de números enteros; y (b) eliminar signos de agrupación.

*Conceptos y procedimientos abordados.* La tarea incluye los siguientes conceptos y procedimientos: números enteros, adición y sustracción, propiedades de la adición y sustracción, valor absoluto y signos de agrupación.

*Sistemas de representación que se activan.* Se requiere de una representación simbólica para la resolución de expresiones aritméticas y de una justificación verbal para cada paso en el algoritmo de la adición. El sistema de representación manipulativo permite dar solución a la tarea con el uso de los recursos.

*Contextos en el que se sitúa la tarea.* La tarea se sitúa en un contexto operacional en el que los estudiantes elaboran argumentos que justifican afirmaciones o respuestas.

*Materiales y recursos.* Se utiliza el material fotocopiable, lápiz, borrador y calculadora.

*Agrupamiento de los estudiantes e interacciones previstas.* Se espera que los estudiantes desarrollen la tarea, trabajar en parejas conformadas por el profesor quien da las instrucciones previas a su desarrollo. Se sugiere que el profesor pida a los estudiantes solucionar cada expresión aritmética que aparece en las tablas y escriba al frente la propiedad o relación matemática utilizada. Al finalizar, se realiza la socialización de los resultados en gran grupo.

### 7.2 Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Cada grupo cuenta con tres puertas impresas y un grupo de llaveros. En cada puerta, hay una expresión aritmética y cada llavero tiene asignado un número entero. Se entregará además una hoja con cada una de las tablas en las que los estudiantes deben colocar paso a paso la solución de las expresiones aritméticas (ver el material fotocopiable).

El profesor lee el ejercicio y da indicaciones generales. Los estudiantes inician la resolución de las expresiones aritméticas, al escribir al frente de cada paso, la relación o la propiedad matemática. La calculadora se utiliza luego de realizar las operaciones propuestas en las tablas, con el fin de verificar los resultados obtenidos.

Los estudiantes deben corresponder con una línea la puerta cuya expresión aritmética produzca como resultado uno de los números enteros asignados en los llaveros. Finalmente, se socializan los resultados obtenidos en cada grupo y se muestran cada paso realizado y la propiedad o la relación matemática que permitió llegar a la respuesta. El tiempo estimado para resolver la tarea es de 50 minutos, distribuidos de la siguiente forma.

*Inicio.* El profesor entrega el material, lee y explica la tarea (5 minutos).

*Desarrollo de la tarea.* El profesor interactúa con los grupos para orientar y solucionar posibles dudas (25 minutos).

*Socialización de los resultados.* Cada grupo expone el algoritmo utilizado para solucionar la expresión aritmética y la relación o propiedad matemática tenida en cuenta (20 minutos).

### 7.3 Capacidades y caminos de aprendizaje

El siguiente es un posible camino que pueden seguir los estudiantes al resolver la tarea.



### 7.4 Errores en los que pueden incurrir los estudiantes

En el momento de abordar la tarea, los estudiantes puede incurrir en errores relacionados con el cambio del orden en los números en una operación para efectuar una operación conocida; la omisión del signo cuando el resultado es un número negativo; la omisión de los signos de agrupación al resolver una expresión aritmética; y prescindir del signo del número entero al realizar operaciones. Por otra parte, es posible que interpreten la resta de números negativos como la acción de quitar el sustraendo al minuendo, y piensen que si el valor absoluto de un número negativo es una cantidad positiva, entonces el valor absoluto de un número positivo será un número negativo. Se pueden identificar los siguientes posibles errores: E2, E4, E6 y E7 (ver tabla 4).

## 7.5 Ayudas para el profesor

Los estudiantes pueden presentar dificultad con la adición de números enteros. Se les puede sugerir el uso de la recta numérica para observar el movimiento hacia la derecha o hacia la izquierda de acuerdo con el número que estén trabajando.

Algunas dificultades pueden darse por el manejo inadecuado de los signos de agrupación o por tener un concepto errado de valor absoluto. En este caso, el profesor puede plantear las siguientes preguntas.

- ¿Tuviste en cuenta los signos de cada número? Esta pregunta puede ayudar a los estudiantes a descubrir dónde omitieron el signo.
- ¿Es posible que el valor absoluto de un número sea negativo? Se puede plantear esta pregunta con el fin de afianzar el concepto de valor absoluto.

## 7.6 Evaluación

Es posible determinar si la meta de la tarea se ha alcanzado cuando los estudiantes evidencian las siguientes acciones.

- Ejecutan operaciones indicadas de acuerdo con los signos de agrupación.
- Aplican la propiedad asociativa, conmutativa, clausurativa o modulativa de la adición para los números enteros.
- Dado un par de números enteros, ejecutan la operación indicada y obtienen un resultado.
- Hallan el valor absoluto de un número entero.
- Validan los procedimientos aritméticos realizados en una expresión aritmética.

## 7.7 Material fotocopiable

Resuelve la operación que está en cada puerta, únela con el par de llaves que tiene la respuesta correcta y explica en las siguientes tablas el procedimiento utilizado para cada paso.

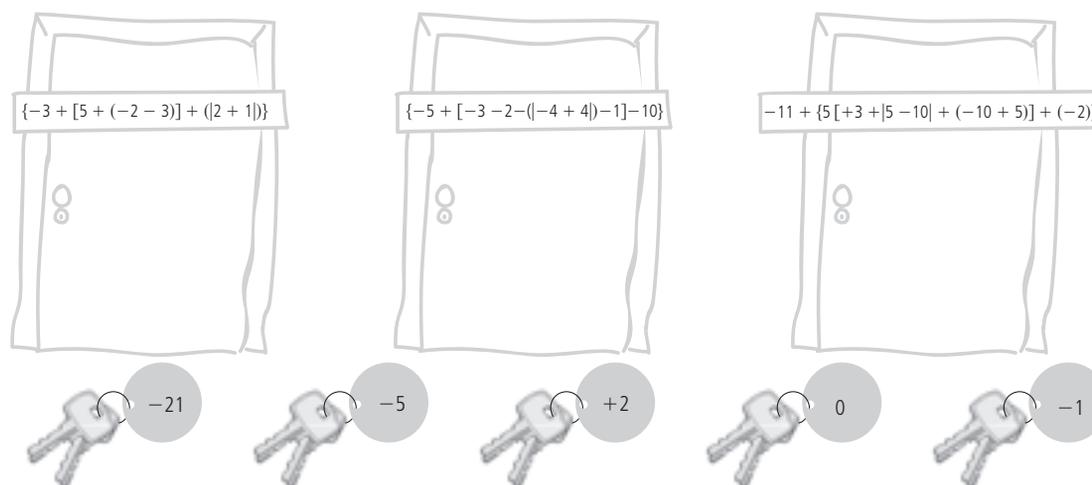


Figura 6. Llaveros y puertas

Tabla 7

*Pasos y justificaciones*

Pasos	Justificación
$\{-3 + [5 + (-2 - 3)] + ( 2 + 1 )\}$	
$\{-5 + [-3 - 2 - ( -4 + 4 ) - 1] - 10\}$	
$-11 + \{5 [+3 +  5 - 10  + (-10 + 5)] + (-2)\}$	

## 8 Tarea 5: El clima del aeropuerto (T5).

### 8 Sesión 6

El clima del aeropuerto es una tarea de ejercitación que hace énfasis en la comprensión de términos y de situaciones que permiten la modelación de expresiones aritméticas que involucran la adición y sustracción de números enteros.

#### 8.1 Descripción de la tarea

*Metas.* La tarea tiene dos metas: (a) activar conocimientos previos; y (b) fomentar el planteamiento de expresiones aritméticas.

*Conceptos y procedimientos abordados.* La tarea aborda los siguientes conceptos y procedimientos: números relativos, números signados, recta numérica, expresiones aritméticas, y algoritmo de adición y sustracción.

*Sistemas de representación que se activan.* Se requiere de una representación simbólica para la resolución de expresiones aritméticas y de una representación gráfica para dar solución a la situación utilizando la recta numérica.

*Contexto en el que se sitúa la tarea.* La tarea se sitúa en un contexto natural. Permite usar modelos explícitos en situaciones concretas.

*Materiales y recursos.* Se utiliza el material fotocopiable, lápiz, borrador y regla. No se permite el uso de calculadoras.

*Agrupamiento de los estudiantes e interacciones previstas.* Los estudiantes trabajan en parejas durante el desarrollo de la tarea. La socialización se realiza en gran grupo.

## 8.2 Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Hasta este momento, el profesor ha trabajado la representación de números en la recta numérica, la traducción entre sistemas de representación y la solución de expresiones aritméticas. El tiempo estimado para resolver la tarea es de 50 minutos distribuidos de la siguiente forma.

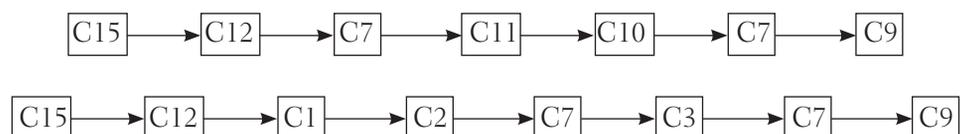
*Distribución del material, lectura y explicación de la tarea.* El profesor aclara a los estudiantes que, para la solución de la tarea, es necesario hacer uso de rectas numéricas diseñadas por ellos y proponer una expresión aritmética que sustente el resultado obtenido gráficamente (5 minutos).

*Desarrollo de la tarea.* El profesor orienta a los estudiantes y soluciona posibles dudas (25 minutos).

*Socialización de los resultados.* El profesor actúa como moderador frente a la participación de los grupos de estudiantes (20 minutos).

## 8.3 Capacidades y caminos de aprendizaje

La tarea propone el planteamiento de expresiones aritméticas que den solución a las situaciones propuestas. Los siguientes son dos posibles caminos que pueden seguir los estudiantes al resolver la tarea el clima del aeropuerto.



Se prevén dos caminos de aprendizaje, ya que se puede dar solución a la tarea utilizando la recta numérica (camino de aprendizaje 1) o planteando y resolviendo expresiones aritméticas (camino de aprendizaje 2).

## 8.4 Errores en los que pueden incurrir los estudiantes

Los errores en los que los estudiantes pueden incurrir surgen de la interpretación de la forma de variación de la temperatura en las dos situaciones propuestas. Es posible que los estudiantes planteen inadecuadamente una expresión

aritmética, porque malinterpretan palabras como “excede”, “disminuido en”, “aumenta en”, “diferencia entre”; usan incorrectamente la recta numérica, en caso de utilizarla; cambian el orden de los números en una operación para efectuar una que sea conocida; u omitan el signo cuando el resultado de una operación es un número negativo. Algunos posibles errores son los siguientes: E2, E4, E6 y E7 (ver tabla 4).

## 8.5 Ayudas para el profesor

Se pueden identificar dos momentos clave para realizar preguntas a los estudiantes: (a) cuando planteen la expresión aritmética o realicen la representación en la recta y (b) cuando den respuesta a la situación, bien sea al resolver la expresión o al realizar movimientos sobre la recta numérica. Asociados a estos momentos, es oportuno que el profesor realice las siguientes preguntas.

- ¿Tuviste en cuenta los signos de cada número?
- ¿Verificaste los signos?
- ¿Estás contando los saltos (número de espacios recorridos entre dos o más puntos en la recta numérica) incluyendo el punto de partida? ¿Cómo cuentas los pasos cuando caminas?
- ¿Es lo mismo la ubicación donde te encuentras que la distancia que debes recorrer para llegar a ella? Si estás a dos cuadras de tu casa y caminas tres en la misma dirección, ¿a cuántas cuadras de la casa quedas?

## 8.6 Evaluación

Es posible determinar si la meta de la tarea se ha alcanzado cuando los estudiantes evidencian las siguientes acciones.

- Identifican las cantidades y datos relevantes para la resolución de un problema.
- Identifican el signo de un número teniendo en cuenta el contexto de la situación planteada.
- Traducen una situación aditiva a una expresión aritmética, gráfica o verbal y viceversa.
- Plantean la operación a realizarse (adición o sustracción) de acuerdo con la situación propuesta en un problema.
- Dado un par de números enteros, ejecutan la operación indicada y obtienen un resultado.
- Traducen una situación aditiva a una expresión aritmética, gráfica o verbal y viceversa.
- Interpretan los resultados y, de acuerdo con su signo, los expresan en un lenguaje matemático apropiado.

## 8.7 Material fotocopiable

La temperatura medida en el aeropuerto a las 7 a. m. es de  $5^{\circ}\text{C}$  sobre cero; de 7 a. m. a 9 a. m., la temperatura aumentó  $3^{\circ}\text{C}$ ; de 9 a. m. a 1 p. m. disminuyó en  $6^{\circ}\text{C}$ ; de la 1 p. m. a las 3 p. m. no varió; de las 3 p. m. a las 6 p. m. bajó  $2^{\circ}\text{C}$ ; de las 6 p. m. a las 9 p. m. descendió  $4^{\circ}\text{C}$ ; y de las 9 p. m. a las 12 m. descendió  $8^{\circ}\text{C}$ . Con respecto a la temperatura de las 12 m., es correcto afirmar que:

- a) Aumentó  $17^{\circ}\text{C}$ , respecto a la temperatura inicial.
- b) Disminuyó  $17^{\circ}\text{C}$ , respecto a la temperatura inicial.
- c) Aumentó  $12^{\circ}\text{C}$ , respecto a la temperatura inicial.
- d) Disminuyó  $12^{\circ}\text{C}$ , respecto a la temperatura inicial.

Justifica tu respuesta.

De las 9 a. m. a las 3 p. m., la temperatura fue:

- a)  $-6^{\circ}\text{C}$ .
- b)  $6^{\circ}\text{C}$ .
- c)  $-2^{\circ}\text{C}$ .
- d)  $2^{\circ}\text{C}$ .

Justifica tu respuesta.

# 9 Tarea 6: El minero (T6).

## Sesión 7

En esta tarea, se mencionan los recorridos realizados por un minero en un día de trabajo. Con estos recorridos, se pretende dar solución a una situación aditiva mediante el planteamiento de una expresión aritmética que los involucre. Esta tarea es la introducción al objetivo con el que se pretende que los estudiantes interpreten y resuelvan problemas en diferentes situaciones de la vida real que involucren la adición y sustracción de números enteros

### 9.1 Descripción de la tarea

*Meta.* La meta de la tarea consiste en escribir y ejecutar una expresión aritmética que represente la trayectoria del minero.

*Conceptos y procedimientos abordados.* Entre los conceptos que aborda la tarea se pueden encontrar los números signados, recta numérica, adición de números enteros, propiedades aditivas de números enteros y distancia. La tarea involucra procedimientos de representación en la recta numérica, algoritmos de la adición y sustracción y determinación del valor absoluto.

*Sistemas de representación que se activan.* Se activa el sistema de representación verbal, cuando se hace lectura de la tarea y se traduce a un lenguaje matemático; el gráfico, con el uso de la recta numérica para ubicar los recorridos realizados por los mineros; y, el manipulativo, al emplear las fichas bicolores para indicar el valor de los recorridos realizados por los mineros.

*Contexto en el que se sitúa la tarea.* La tarea se ubica en un contexto poco familiar para los estudiantes, con conocimiento de su existencia, y permite justificar resultados, al expresar argumentos con base matemática.

*Materiales y recursos.* La recta numérica se emplea para que los estudiantes representen gráficamente los desplazamientos hechos por el minero en la situación planteada. Se utiliza para resolver la primera pregunta de la tarea. Se utilizan fichas bicolores de dos colores diferentes con una determinada forma geométrica (por ejemplo, circulares como las fichas de damas chinas). Cada ficha tiene valor absoluto igual a 1. Un color indica que la ficha representa un valor positivo y el otro color indica valor negativo. Así, dos fichas positivas equivalen a  $+2$  y tres fichas negativas equivalen a  $-3$ , entonces al colocar una ficha positiva sobre una ficha negativa es lo mismo que tener  $-1 + 1 = 0$ . Estas fichas son empleadas por los estudiantes luego de escribir la expresión aritmética, al ejecutar con ellas las operaciones de la expresión. Con ayuda de este recurso se pueden trabajar las dos últimas preguntas de la tarea. También se utilizan el material fotocopiable, lápiz, borrador y regla.

*Agrupamiento de los estudiantes e interacciones previstas.* La tarea se desarrolla con los siguientes agrupamientos. Inicialmente, se realiza una reflexión en gran grupo acerca de la noticia sobre el rescate de los mineros de Chile en el año 2010 y su posible relación con la tarea (5 minutos). Después, cada estudiante, por separado, desarrolla la tarea (20 minutos). En seguida, las respuestas obtenidas se comparan en parejas y se discute sobre el avance (10 minutos). Finalmente, se motiva una discusión en gran grupo para lograr la mejor respuesta posible al problema. El profesor modera la discusión de los estudiantes: da la palabra, hace preguntas que los oriente y escribe en el tablero los aportes de cada estudiante (15 minutos).

## 9.2 Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Con el objetivo de hacer una introducción de la tarea y motivar a los estudiantes a solucionarla, el profesor puede iniciar la sesión con una reflexión sobre la situación que vivieron los mineros atrapados en una mina en Chile en el año 2010 y la forma como fueron rescatados utilizando un cápsula que solo se podía mover de arriba hacia abajo.

Después de la reflexión, el profesor entrega a cada estudiante la tarea impresa en una hoja y los recursos correspondientes. Se prevé que, durante el desarrollo, los estudiantes realicen preguntas como las siguientes.

- ¿Tengo que utilizar obligatoriamente los recursos?
- ¿Tenemos que sumar o restar los números?
- ¿Debo hallar el valor absoluto?

Para este tipo de preguntas, se espera que el profesor muestre ejemplos sencillos relacionados con el contenido matemático de la pregunta formulada. Es decir, si un estudiante pregunta ¿tenemos que sumar o restar los números?, el profesor puede indicar la siguiente situación: si un equipo de fútbol tiene tres goles en contra y cinco a favor ¿con cuántos goles queda? Ahora, si se presentan errores durante el desarrollo de la tarea, se procede de la misma manera, con preguntas o ejemplos que permitan superarlos.

### 9.3 Capacidades y caminos de aprendizaje

Un posible camino que pueden seguir los estudiantes al resolver la tarea es el siguiente.



### 9.4 Errores en los que pueden incurrir los estudiantes

Al abordar la tarea, los estudiantes pueden plantear inadecuadamente una gráfica o una expresión aritmética, al malinterpretar palabras como excede, disminuido en, aumenta en, diferencia entre; prescindir del signo del número entero al realizar operaciones; cambiar el orden de los números en una operación para efectuar una conocida; obtener un resultado negativo para una distancia; y pensar que si el valor absoluto de un número negativo es una cantidad positiva, el valor absoluto de un número positivo será un número negativo.

### 9.5 Ayudas para el profesor

Se sugiere que el profesor formule a los estudiantes preguntas como las siguientes.

- ¿Es lo mismo la ubicación donde te encuentras que la distancia que debes recorrer para llegar a ella?
- ¿Un punto negativo está a una distancia negativa? ¿Por qué?

Además, puede sugerirles que no se les olvide verificar los signos de los números en las expresiones obtenidas.

## 9.6 Evaluación

Se espera que el profesor se concentre en observar en qué medida sus estudiantes evidencian e identifican las cantidades y datos relevantes para la resolución de la tarea; cómo traducen una situación aditiva a una expresión aritmética, gráfica o verbal y viceversa; cómo, dado un par de números enteros, ejecutan la operación indicada y obtienen un resultado; si hallan el valor absoluto de un número entero; y cómo interpretan los resultados y de acuerdo con su signo, los expresan en un lenguaje matemático apropiado.

## 9.7 Material fotocopiable

Unos mineros están realizando trabajos en un túnel en una mina de esmeraldas ubicada en Boyacá, como muestra la figura.

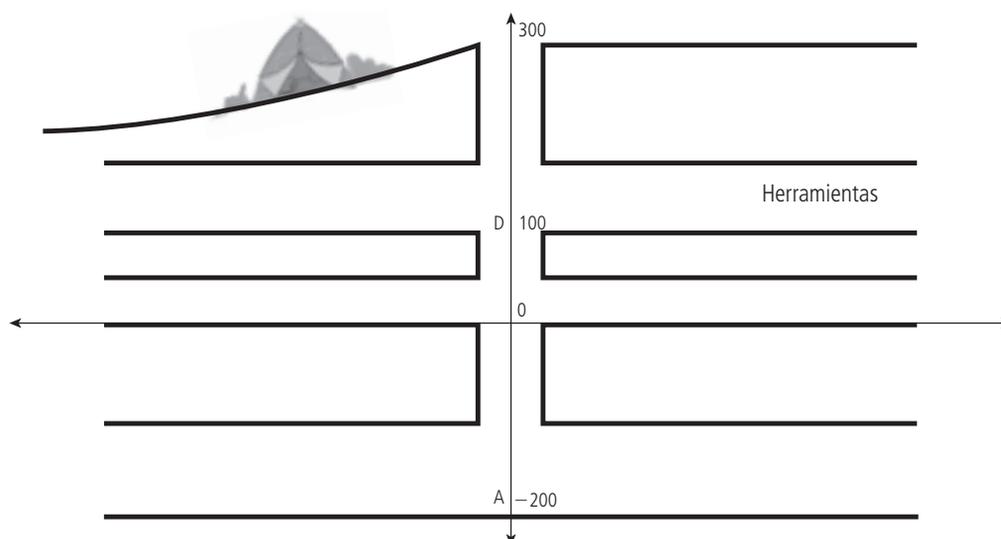


Figura 7. El minero

¿Cómo podrías utilizar la recta numérica para representar los puntos relacionados con los siguientes recorridos hechos por los mineros?

Inicialmente un minero está ubicado en la sección A; de allí, sale a almorzar al campamento ubicado en la cima de la montaña y luego, según indicaciones de su jefe, debe llevar las herramientas a un compañero que se encuentra en el punto D; estando allí, cae en cuenta que dejó la pica olvidada en el punto A y se devuelve a buscarla para hacer la entrega en el punto indicado por su jefe.

Su compañero utiliza las herramientas y se devuelve con él al punto A de la excavación.

1. ¿Mediante qué expresión aritmética, puedes representar los trayectos realizados por cada minero?
2. ¿Podrías indicar con ayuda de las fichas bicolors el valor de estos desplazamientos? ¿Cuál sería?

# 10 Tarea 7: El *skater* (T7).

## Sesión 8

La tarea hace referencia a una situación financiera relacionada con la compra, ahorro y gastos de un estudiante llamado Carlos quien está decidiendo si comprar o no un monopatín (*skateboard*) con base en su estado financiero. Su solución implica la propuesta de una expresión aritmética, la aplicación de conceptos, definiciones, la contrastación y verificación del resultado obtenido, con ayuda de cálculos con papel y lápiz, o con el resultado obtenido en una calculadora científica, utilizando los signos de agrupación.

### 10.1 Descripción de la tarea

*Metas.* La tarea tiene las siguientes metas: (a) comprobar si el dinero con el que cuenta Carlos es suficiente para adquirir el *skateboard* mediante la clasificación de soportes (ingresos y egresos) que le permitan formular una expresión aritmética que muestre la situación; y (b) usar adecuadamente los signos de agrupación en la calculadora científica.

*Conceptos y procedimientos abordados.* Al resolver la tarea se abordan los conceptos de números signados, adición y sustracción, propiedades de la adición, y los procedimientos de signos de agrupación, aplicación de las propiedades y verificación de resultados.

*Sistemas de representación que se activan.* Se activa el sistema de representación manipulativo con la utilización de los materiales; el simbólico, con el planteamiento de la expresión aritmética; y el verbal, con la traducción desde la terminología matemática mencionada a un sistema de representación simbólico o gráfico.

*Contexto en el que se sitúa la tarea.* La tarea se ubica en un contexto cercano que permite seleccionar, comparar y evaluar estrategias para su solución.

*Materiales y recursos.* Se utilizan comprobantes de ingresos y egresos, con los que se busca que los estudiantes relacionen los términos utilizados en la tarea con números signados (tiquete de cine, facturas, cotización de *skateboard* y videojuego para XBOX 360). También se utiliza lápiz, papel y calculadora científica.

*Agrupamiento de los estudiantes e interacciones previstas.* Esta tarea se desarrolla en tres fases: (a) inicial (10 minutos), en gran grupo, (b) de desarrollo (30 minutos), en forma individual, y (c) de cierre (10 minutos), de forma individual y gran grupo.

## 10.2 Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

La tarea se desarrolla en fases. En la fase inicial, se socializa la situación a tratar en el problema mediante preguntas. Estas preguntas las realiza el profesor. Por ejemplo: ¿ustedes ahorran dinero?, ¿qué hacen con ese dinero?, el dinero que reciben, ¿es un ingreso o egreso? El propósito de estas preguntas es motivar al estudiante e introducirlo a la situación que se va a trabajar. En este momento, se entregan los comprobantes y se reciben comentarios sobre las funciones de cada uno.

En la fase de desarrollo, el profesor entrega la tarea a cada estudiante para iniciar su solución. En este momento, se puede hacer uso de los comprobantes. El estudiante separa o agrupa los ingresos de los egresos para facilitar la posterior escritura de la expresión aritmética de números signados. La función del profesor se centra en orientar a los estudiantes mediante ejemplos y preguntas. Esto permite aclarar las dudas que se presenten y encaminarlos a que planteen y solucionen la expresión aritmética adecuada.

En la fase de cierre, los estudiantes utilizan la calculadora para verificar sus respuestas. Posteriormente, el profesor organiza a los estudiantes para la socialización de la tarea. En este proceso, ellos realizan aportes que contribuyen a la solución de la tarea. Los aportes pueden ser referentes, por ejemplo, a la representación de ingresos y egresos mediante números signados o a cuánto le falta a Carlos para comprar su *skateboard*. Finalmente, el profesor orienta a los estudiantes para obtener la solución de la tarea.

## 10.3 Capacidades y caminos de aprendizaje

La tarea plantea el manejo de capacidades relacionadas con la identificación de los datos relevantes y sus signos y la traducción de la situación desde su enunciado para plantear una expresión aritmética que describa los ingresos y egresos del estudiante (C5, C7, C9, C10, C11, C12, C13, C14, C15; ver tabla 3). En esta expresión pueden emplearse signos de agrupación, simplificación de ceros y posteriormente encontrar un resultado a partir de la adición y sustracción. Al abordar la tarea, los estudiantes pueden activar capacidades que permiten interpretar y verificar los resultados obtenidos, con la ayuda de la calculadora científica.

Un posible camino que pueden seguir los estudiantes al resolver la tarea es el siguiente.



## 10.4 Errores en los que pueden incurrir los estudiantes

En el momento de abordar la tarea, cuando realizan la traducción de la situación, los estudiantes pueden incurrir en errores relacionados con el planteamiento in-

adecuado de una expresión aritmética, omitir los signos de agrupación, u omitir el signo de un resultado e indicar que un resultado de una operación no puede ser negativo. Estos y otros errores se identifican como E2, E6, E7, E9, E15 (ver tabla 4).

### 10.5 Ayudas para el profesor

El profesor puede brindar ayudas formulando preguntas cuando los estudiantes incurran en errores. Por ejemplo, si se presenta E1 o E2, el profesor puede preguntar: ¿qué significa tener una deuda? ¿En qué términos puedes expresar una deuda? ¿Cómo puedes representar matemáticamente una deuda? Si algún estudiante omite los signos de agrupación al plantear la expresión aritmética, se puede actuar preguntando: ¿afecta un signo exterior el resultado de una operación con paréntesis? Si el estudiante incurre en E7 y E6, se puede plantear ejemplos reales de compra y venta, ejemplos en la recta numérica y ejemplos con fichas bicolores.

### 10.6 Evaluación

Se espera que el profesor se concentre en observar en qué medida sus estudiantes evidencian e identifican los datos relevantes y sus signos; cómo realizan la traducción de la situación desde su enunciado para plantear una expresión aritmética que describa los ingresos y egresos del estudiante; cómo emplean signos de agrupación, simplifican ceros, y encuentran un resultado a partir de la adición y sustracción; y cómo interpretan y verifican los resultados obtenidos, con ayuda de la calculadora científica.

### 10.7 Material fotocopiable

Carlos Díaz es un estudiante de séptimo grado que recibe una mesada de \$235 000. Al final de cada mes realiza un balance de sus finanzas con ayuda de los comprobantes correspondientes.

Quiere comprar un *skateboard* que tiene un valor de \$35 000 y, para ello, ahorra \$95 000 mensuales y procura ahorrar al máximo el dinero destinado a onces gastando en ello \$50 000 al mes. Va a cine con sus amigos tres veces al mes gastando \$17 000 en la primera película, \$15 000 en la segunda y \$20 000 en la tercera y quiere comprar un video juego para XBOX 360 por valor de \$124 000.

1. ¿Puede comprar Carlos el video juego? Justifica tu respuesta.
2. ¿Es posible plantear una expresión aritmética que involucre números enteros mostrando la situación? ¿Cuál sería esta expresión?

3. Si además del dinero de la mesada, los abuelos le regalan dinero cada domingo, para un total de \$32 000 y arregla el jardín de la casa cada 15 días (por esta labor su padre le paga \$30 000 mensuales), ¿le alcanzará el dinero para adquirir el *skateboard*? ¿Cuánto dinero le faltaría o le sobraría?

## 11 Tarea 8: El repartidor de pizzas (T8). Sesión 9

En esta tarea, los estudiantes deben establecer la relación entre los términos empleados y el lenguaje simbólico, para así aplicar métodos gráficos en la solución del problema. Además, la tarea presenta una serie de características que pueden contribuir al desarrollo de la competencia de resolución de problemas.

### 11.1 Descripción de la tarea

*Meta.* La meta de la tarea consiste en hallar la distancia total recorrida durante la jornada del repartidor y establecer el punto en el que entregó la última pizza.

*Conceptos y procedimientos abordados.* La tarea aborda los siguientes conceptos y procedimientos: recta numérica, números signados, números relativos, adición y sustracción de números enteros, propiedades aditivas de los números enteros y valor absoluto.

*Sistemas de representación que se activan.* Se activa el sistema de representación simbólico, al proponer un número signado y/o relativo; el gráfico, al representar un número en la recta numérica; y el verbal, al traducir un enunciado a un sistema de representación simbólico o gráfico.

*Contexto en el que se sitúa la tarea.* La tarea está ubicada en un contexto real y cercano a los estudiantes que permite generalizar resultados de problemas.

*Materiales y recursos.* Se utilizan el material fotocopiable, lápiz, borrador, regla, recta numérica y sumadora de enteros.

*Agrupamiento de los escolares e interacciones previstas.* El trabajo se realiza en las siguientes etapas y con los siguientes agrupamientos y temporalización: (a) desarrollo de la introducción al tema de la tarea (gran grupo, 5 minutos); (b) desarrollo de la tarea por parte de cada estudiante (individual, 25 minutos); (c) comparación y discusión sobre el avance o respuestas obtenidas (parejas, 10 minutos); y (d) discusión para lograr la mejor respuesta posible al problema (gran grupo, 10 minutos).

## 11.2 Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

El profesor inicia con algunos comentarios a todo el grupo sobre la situación laboral de un repartidor de pizzas y un cartero, y la importancia de las matemáticas en sus ámbitos de trabajo. Posteriormente, entrega la tarea impresa y la recta numérica. La tarea se desarrolla inicialmente de forma individual. En esta etapa, pueden presentarse dudas por parte de los estudiantes y el profesor orienta mediante ejemplos y preguntas, con el fin de aclararlas.

En seguida, cada estudiante comparte su solución de la tarea con otro compañero, en un trabajo de parejas. En este instante, se entrega el segundo recurso, la sumadora de enteros, con la que los estudiantes pueden verificar los cálculos realizados con anterioridad y obtener una solución compartida. Por último, se socializan las soluciones obtenidas de las parejas. En esta etapa, los estudiantes participan y el profesor escribe en el tablero todos los aportes, con el fin de contribuir a la mejor solución de la tarea.

## 11.3 Capacidades y caminos de aprendizaje

Un posible camino que pueden seguir los estudiantes al resolver la tarea es el siguiente.



## 11.4 Errores en los que pueden incurrir los estudiantes

Los errores en los que los estudiantes pueden incurrir surgen de la interpretación de la forma cómo varía la temperatura en las situaciones propuestas. Es posible que los estudiantes planteen inadecuadamente una gráfica o una expresión aritmética, al malinterpretar palabras como “excede”, “disminuido en”, “aumenta en”, “diferencia entre”; usen de manera incorrecta la recta numérica para realizar operaciones aditivas; cambien el orden de los números en una operación para efectuar una conocida; omitan el signo cuando el resultado de una operación es un número negativo; o prescindan del signo del número entero al realizar operaciones. Estos y otros errores se identifican como E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E10, E16 (ver tabla 4).

## 11.5 Ayudas para el profesor

Se pueden identificar tres momentos clave para realizar preguntas a los estudiantes: (a) una vez que los estudiantes planteen la expresión aritmética o realicen la representación en la recta, (b) cuando representen los recorridos realizados por el repartidor, y (c) cuando decidan el momento adecuado para pagar las facturas encargadas. Asociados a estos momentos, es oportuno que

el profesor realice las siguientes preguntas, bien sea de manera individual o de manera general al grupo.

- ¿Tuviste en cuenta los signos de cada número?
- ¿Es lo mismo la ubicación donde te encuentras que la distancia que debes recorrer para llegar a ella? Si estás a dos cuadras de tu casa y caminas tres en la misma dirección, ¿a cuántas cuadras de la casa quedas?
- ¿Estás contando los saltos (número de espacios recorridos entre dos o más puntos en la recta numérica) incluyendo el punto de partida? ¿Cómo cuentas los pasos cuando caminas?
- Recuerda tener en cuenta los signos de los números.
- También se puede aludir a ejemplos con deudas de tipo económico. ¿Es lo mismo tener cinco pesos que deber cinco? ¿Por qué?

## 11.6 Evaluación

El profesor observa en qué medida los estudiantes identifican las cantidades y datos relevantes para la resolución de un problema; identifican el signo de un número de acuerdo con el contexto de la situación planteada; traducen una situación aditiva a una expresión aritmética, gráfica o verbal y viceversa; representan y realizan adiciones y sustracciones entre números enteros utilizando la recta numérica; interpretan los resultados y, de acuerdo con su signo, los expresan en un lenguaje matemático apropiado; aplican la propiedad asociativa, conmutativa, clausurativa o modulativa de la adición para los números enteros; y ejecutan operaciones indicadas de acuerdo a los signos de agrupación.

## 11.7 Material fotocopiable

### *El repartidor de pizzas*

Una pizzería en Bogotá está ubicada sobre la avenida Caracas con calle 0, es decir, en la calle que separa al norte del sur. El repartidor de pizzas distribuyó los pedidos del sur y los del norte de la siguiente manera.

En el primer recorrido entregó una pizza cinco cuadras en dirección sur de la pizzería y dos pizzas diez cuadras más en dirección sur del sitio del primer pedido. Para la tercera entrega, antes de arrancar, verificó el pedido y advirtió que no era correcto, así que debió devolverse a la pizzería.

Dió inicio al segundo recorrido con el pedido errado que era ocho cuadras al sur de la segunda entrega. Partió de allí en dirección norte y entregó cinco pizzas doce cuadras al norte del último lugar. El último pedido lo entregó diecisiete cuadras al norte de la última entrega.

Para el tercer recorrido debía entregar cuatro pizzas en un edificio de apartamentos ubicado nueve cuadras al norte de la pizzería, dos pizzas cuatro cuadras al norte de la entrega realizada y la última pizza veintiún cuadras al sur de la última entrega.

1. Utiliza colores diferentes para representar en una recta numérica cada uno de los tres recorridos realizados por el repartidor.

Además de entregar los pedidos, el repartidor debe cancelar una factura a uno de los proveedores que está ubicado ocho cuadras al norte de la pizzería y la orden es realizar este pago al finalizar alguno de los recorridos del día. Teniendo en cuenta que debe consumir la mínima cantidad de combustible y que sólo puede cancelar la factura al terminar cualquiera de los tres recorridos, responde las siguientes preguntas.

2. ¿Cuál es el mejor punto para ir hacia la oficina del proveedor?

3. ¿Es posible plantear una expresión que permita ver los recorridos del repartidor y que incluya el pago al proveedor?

4. Para encontrar la distancia a la que quedó el repartidor de la pizzería luego de entregar el último pedido de su jornada, ¿es posible utilizar la expresión planteada anteriormente? Indica cuál es la distancia.

## 12 Evaluación: Examen final (EF). Sesión 10

En esta sesión se presenta el examen final y se indican los criterios de evaluación que permiten determinar en qué nivel de desempeño se encuentra un estudiante en términos del alcance de los objetivos propuestos para la unidad didáctica.

### 12.1 Descripción del examen

El examen final se realiza con el propósito de obtener datos específicos del aprendizaje que han logrado los estudiantes al final de la unidad didáctica. Se diseña el examen con base en los objetivos. Por esa razón, consta de tres partes: (a) ¡En dónde deje mi cuaderno!, para el objetivo 1; (b) La casa entera, para el objetivo 2; y (c) Sube, sube la temperatura, para el objetivo 3.

### 12.2 Criterios de evaluación por niveles de desempeño

Es posible valorar las representaciones, algoritmos y resultados obtenidos por los estudiantes al tener en cuenta las acciones que dan evidencia de las capacidades que activan cuando solucionan el examen final. A continuación, se presentan las

acciones y capacidades que caracterizan el posible nivel de desempeño de los estudiantes.

*Desempeño superior.* El estudiante ejecuta operaciones indicadas de acuerdo con los signos de agrupación; obtiene un resultado al operar un par de números enteros. Aplica la propiedad asociativa para la adición de números enteros; halla el valor absoluto de un número entero; valida los procedimientos aritméticos realizados en una expresión; ingresa de manera adecuada una expresión aritmética que requiera signos de agrupación, en diferentes herramientas tecnológicas; y evidencia la activación de las siguientes capacidades: C2, C4, C7, C9, C10, C11, C12 y C15.

*Desempeño alto.* El estudiante ejecuta operaciones indicadas de acuerdo con los signos de agrupación; obtiene un resultado al operar un par de números enteros; aplica la propiedad asociativa para la adición de números enteros; halla el valor absoluto de un número entero; valida los procedimientos aritméticos realizados en una expresión; y evidencia la activación de las siguientes capacidades: C2, C4, C7, C10, C11, C12 y C15.

*Desempeño básico.* El estudiante ejecuta operaciones indicadas de acuerdo con los signos de agrupación; obtiene un resultado al operar un par de números enteros sin verificar que el resultado sea lógico y coherente con respecto a las situaciones propuestas en las tareas; aplica la propiedad asociativa para la adición de números enteros sólo en algunos pasos, halla el valor absoluto de un número entero; y evidencia la activación de las siguientes capacidades: C2, C7, C11, C12 y C15.

*Desempeño bajo.* El estudiante ejecuta operaciones indicadas de acuerdo con los signos de agrupación, sin verificar que el resultado sea lógico y coherente; aplica adecuadamente la propiedad asociativa para la adición de números enteros sólo en algunos casos; no halla el valor absoluto de un número entero o toma el valor absoluto como el opuesto de un número; y evidencia la activación de las siguientes capacidades: C2 y C15.

### 12.3 Material fotocopiable

#### 1. ¡En dónde dejé mi cuaderno!

El conductor de la ruta #4, sale de su casa a las 5:00 a. m. A esa hora, empieza su recorrido habitual para recoger a las estudiantes y la profesora de ballet. Primero recoge a Andrea, después a María y a Sandra. En este punto, María cae en cuenta que olvidó el cuaderno de matemáticas, necesario para presentar el examen. Entonces solicita al conductor regresar a su casa para recogerlo. Él regresa después de que María acepta pagar la multa de \$7 000, correspondiente a la gasolina

adicional que el bus consumirá entre la casa de Sandra y la estación de servicio. Luego de abastecer el bus con gasolina, recogen el cuaderno de María, y continúan así su ruta pasando por Diana, Ángela y la profesora de ballet. Finalmente, el bus termina su recorrido en el colegio a las 6:00 a. m.

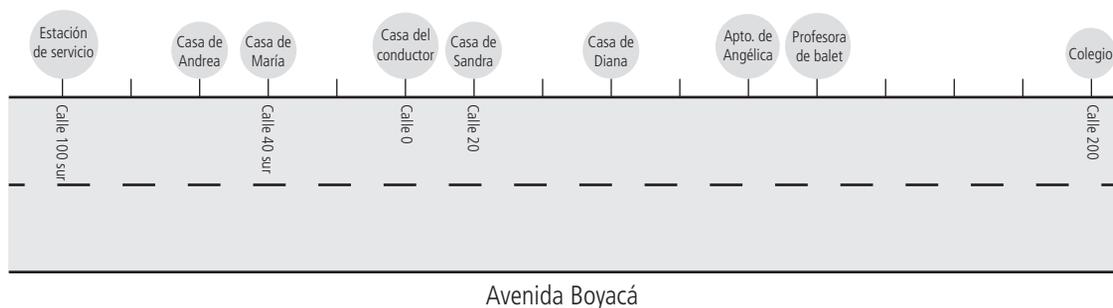


Figura 8. Paradas ruta #4

- Utiliza números enteros para escribir la posición de cada uno de los lugares en los que para la ruta #4, en el orden de su recorrido. Para ello separa por comas cada uno de estos números.
- Escribe una expresión aritmética de números enteros que indique cada uno de los recorridos hechos por la ruta #4 y comprueba que, al realizar todas sus operaciones, el resultado sea el de la posición en donde está ubicado el colegio.
- Teniendo en cuenta que María cuenta con \$10 000 y, aparte de la multa que debe cancelar, le debe \$3 500 a Juanita y no ha pagado la cuota del fondo que con intereses suma \$ 12 300, ¿con qué número entero podrías representar el dinero que adeuda María?

## 2. La casa entera

En una fiesta de números enteros realizada en la casa del signo de agrupación llamado llaves, había un número perdido y sus demás amigos lo necesitaban. La siguiente expresión representa la situación.

$$\{-3 + [? + (|1-5|) + (|15-0+1|) - 20]\} = 0$$

Supón que se registra toda la casa de adentro hacia fuera.

- ¿Puedes ayudarle a los demás números que están en la casa a encontrar el número entero perdido? ¿Cuál es?
- Escribe el orden en el que registraste la casa para encontrar el número ausente y explica el procedimiento empleado.

### 3. *Sube, sube la temperatura*

Me levanté siete horas antes del mediodía y el termómetro marcaba  $-5^{\circ}\text{C}$ . Cuando salí de la casa sentí menos frío y leí en un letrero electrónico que la temperatura era de  $-1^{\circ}\text{C}$ . Sin embargo, sentí curiosidad y quise comparar esa información. Fui a una ferretería para comprar un instrumento que midiera la temperatura. Como no tenía suficiente dinero porque el costo del instrumento era de \$15 000, le di \$4 000 al vendedor y le quedé debiendo el saldo. Observé que el instrumento indicaba tres grados bajo cero. Se me pasó el tiempo y ya era mediodía, miré por última vez el objeto comprado e indicaba una temperatura de veinte grados sobre cero.

El segundo día observé que cada temperatura aumentó dos grados Celsius. Decidí sumar cada una de las temperaturas correspondientes al primer día y todas las correspondientes al segundo día. Escribe en la tabla las expresiones aritméticas correspondientes.

Tabla 8

#### *Sube, sube la temperatura*

Día uno	Día dos
---------	---------

---

a. ¿Qué concluyes al comparar los resultados?

# 13 Referencias

- Alsina, C., Barba, D., Batlle, I., Burgués, C., Giménez, J. y Partegás, J. (1982). *Didáctica de los números enteros*. Madrid, España: Editorial Nuestra Cultura.
- Becerra, O. J., Buitrago, M. R., Calderón, S. C., Gómez, R. A., Cañadas, M. C. y Gómez, P. (2012). Adición y sustracción de números enteros. En Gómez, Pedro (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1* (pp. 19-75). Bogotá: Ediciones Uniandes. Disponible en <http://urlm.in/lzdx>
- González, María José; Gómez, Pedro (2013). *Apuntes sobre análisis cognitivo. Módulo 3 de MAD*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de competencias en Lenguaje Matemáticas, Ciencias y ciudadanas*. (1ed.). Bogotá, Colombia: Autor.
- OCDE (2004). *Learning for tomorrow's world first results from PISA 2003*. París, Francia: Autor.
- Rodríguez, G. (1993) *Estructuras matemáticas 7º*. Bogotá, Colombia: Editorial Rei Andes.

# 14 Material fotocopiable

## TD. Tarea diagnóstica: Punto gol

En la tabla 5, se muestran los puntos a favor y en contra de los equipos participantes en un torneo interno de fútbol para los diferentes cursos de grado séptimo. Para la primera ronda, entre los equipos A y C ¿quién obtuvo mayor puntaje?; entre B y D ¿quién obtuvo mayor puntaje en la segunda ronda?; entre G y H ¿quién obtuvo menor puntaje en la primera ronda? De acuerdo con la tabla, ¿puedes dar el orden de la premiación?

Tabla 5  
*Punto gol*

Equipos	Primera ronda		Segunda ronda		Puntajes		Resultado final
	Puntos a favor	Puntos en contra	Puntos a favor	Puntos en contra	Primera ronda	Segunda ronda	
A	1	0	5	0			+6
B	0	4	0	3			-7
C	5	0	2	0			+7
D	0	2	0	4			-6
F	3	0	0	5	+3	-5	-2
G	1	2	2	4	-1	-2	-3
H	4	0	6	1		+5	+9

## T1. Representaciones en la recta numérica

- A. Realiza los siguientes pasos para representar gráficamente el conjunto de los números enteros  $\mathbb{Z}$ . Ten en cuenta que la distancia entre los puntos debe ser la misma.
1. Elige un punto cualquiera de la recta y asígnale el número cero.
  2. Ubica un punto a la derecha del cero y asígnale a este el número 1.
  3. Ubica un punto a la derecha del 1 y asígnale el número 2.
  4. Ubica un punto a la izquierda de cero y asígnale el número  $-1$ .
  5. Ubica un punto a la izquierda de  $-1$  y asígnale el número  $-2$ .
  6. Ahora ubica cuantos puntos puedas a la izquierda y a la derecha, y asígnales el número correspondiente, ya sea positivo o negativo.
- B. Escribe qué número representa cada punto señalado en la recta numérica.
- C. Dibuja en una recta numérica una situación que se pueda representar con números enteros. Emplea una escala diferente a la presentada en el punto A.

## T2. El joven y el mar

Observa la siguiente imagen y responde:

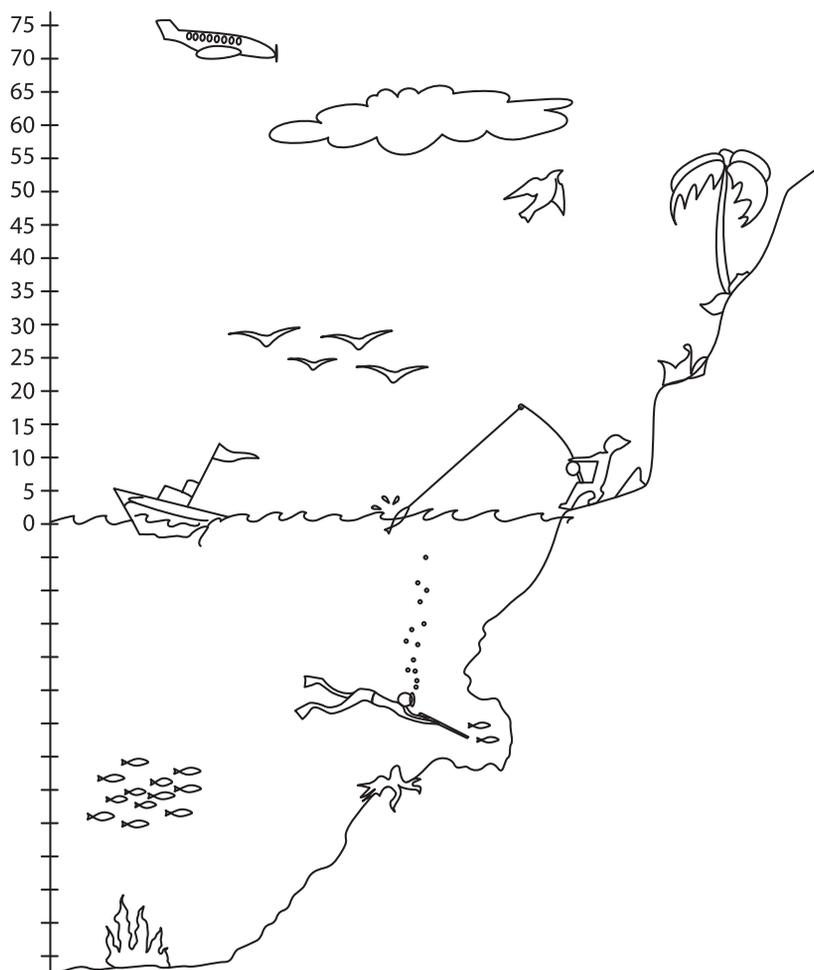


Figura 2. El joven y el mar

1. ¿A qué altura aproximada está cada uno de los elementos que se encuentran situados sobre el nivel del mar?
2. ¿A cuántos metros está el nivel del mar?
3. ¿Cómo marcarías las alturas dentro del agua?
4. ¿Cómo ordenarías según la altura en que se encuentran, a cada uno de los elementos que ves dibujados?
5. Si el buceador quiere pescar el pulpo, ¿cuántos metros tendrá que recorrer?
6. Si las gaviotas quieren beber agua, ¿cómo y cuánto se desplazarán?
7. ¿A qué altura está el avión respecto a la nube? y ¿a qué altura el pájaro?
8. Si el buceador quiere ir a ver si hay algún pez detrás de las algas ¿qué tendrá que hacer?
9. Si después quiere salir a respirar y descansar bajo la palmera, ¿qué distancia recorrerá?

### T3. Lucho el ciclista

Lucho el ciclista entrena diariamente para una competencia sobre una autopista recta y en terreno llano. La autopista está ubicada justo en frente de su casa que conecta el occidente con el oriente. Lucho tiene un acompañante con quien regresa a casa, en carro, después de cada entrenamiento. En la tabla 6, aparecen los últimos cuatro días de entrenamiento en los que realizó diferentes recorridos, saliendo siempre desde su casa.

Tabla 6

#### *Lucho el ciclista*

Día	Descripción
Primero	Recorrió 15 km hacia el oriente, tomó agua y avanzó 40 km más, descansó un momento y luego recorrió 30 km más en la misma dirección.
Segundo	Recorrió 10 km hacia el oriente, avanzó 25 km más y se devolvió 30 km por la misma autopista.
Tercero	Recorrió 20 km hacia el occidente, se devolvió 30 km por la misma autopista y finalmente recorrió 15 km hacia el occidente.
Cuarto	Recorrió 50 km hacia el occidente, descansó un momento, recorrió 25 km más en la misma dirección y finalmente recorrió 30 km también al occidente.

1. Representar cada uno de los cuatro días de entrenamiento en las rectas numéricas dadas. Para tal propósito, se establece que la casa de Lucho es el punto cero de la recta, el oriente representa los números enteros positivos y el occidente los números enteros negativos.
2. ¿A qué distancia de la casa quedó Lucho al finalizar cada uno de los entrenamientos?
3. Para cada día, ¿en qué punto de la recta numérica quedó ubicado Lucho, justo antes de regresar a su casa?
4. ¿Qué expresiones aritméticas podrías escribir para justificar las respuestas obtenidas en el numeral 3?
5. Verifica tus resultados empleando la sumadora de enteros.

Primer día



Segundo día



Tercer día



Cuarto día



Figura 3. Entrenamientos

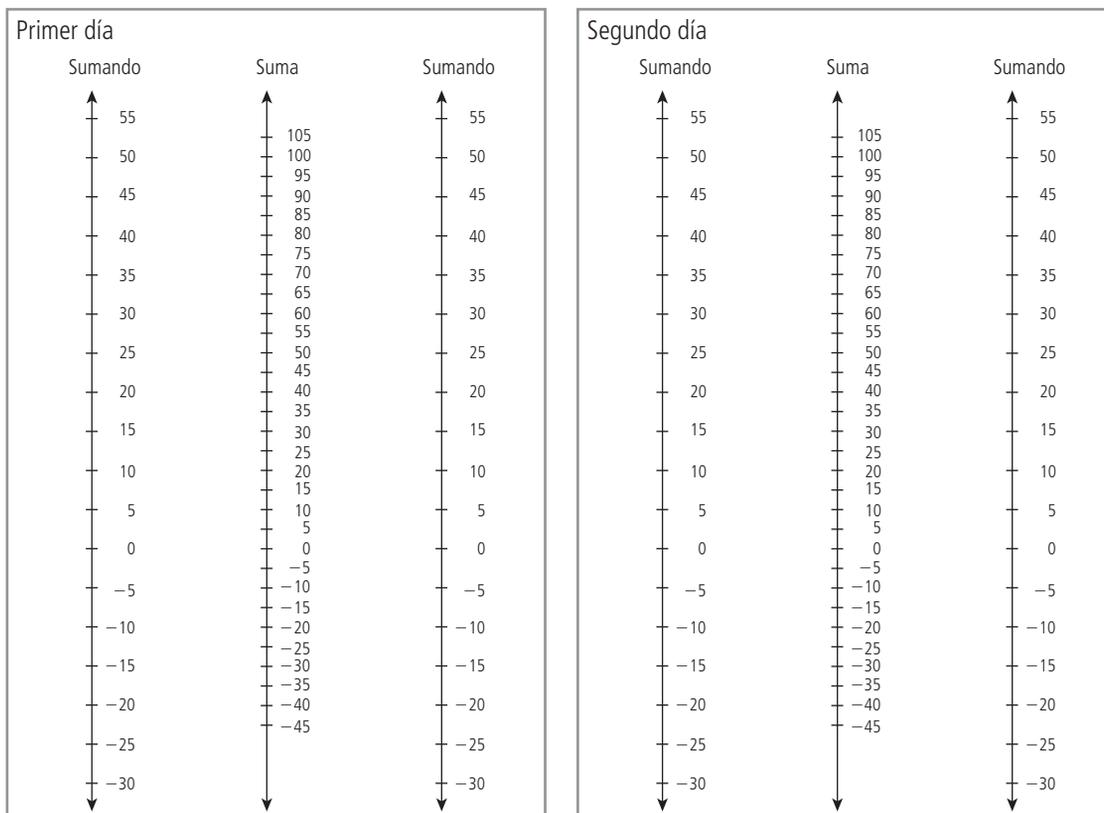


Figura 4. Sumadoras días primero y segundo

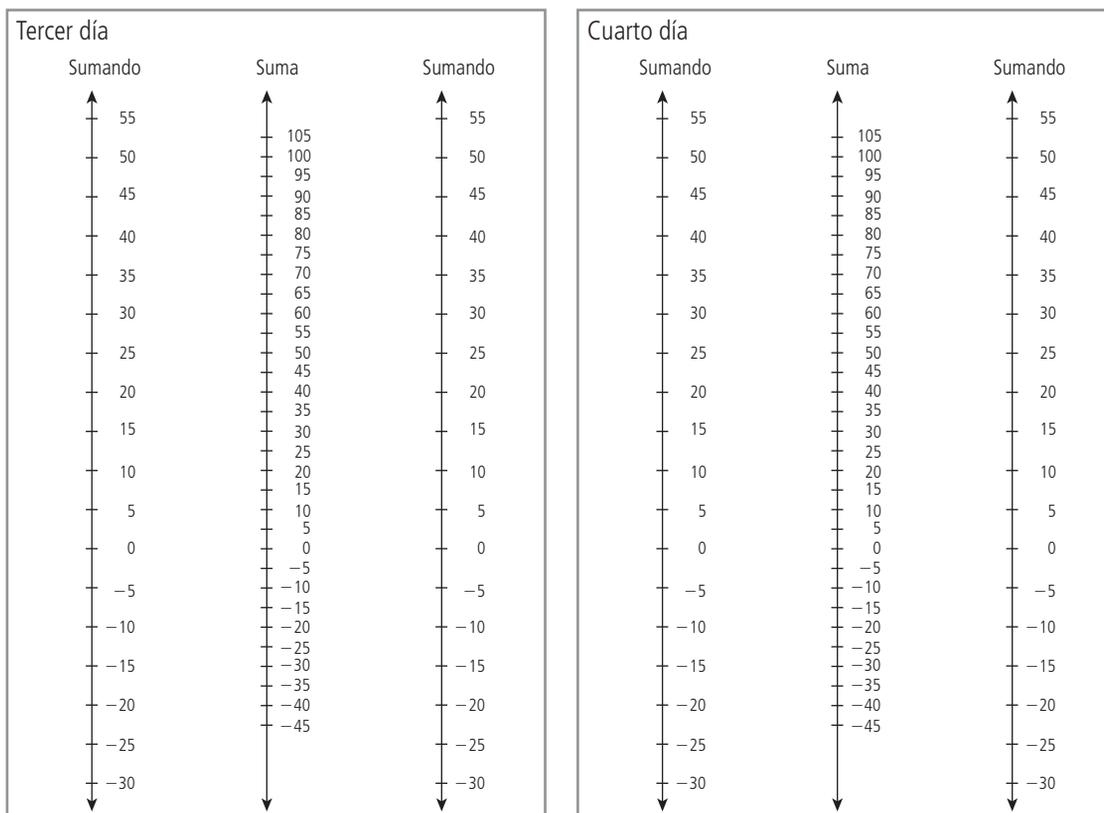


Figura 5. Sumadoras días tercero y cuarto

### T4. Encontrar las llaves

Resuelve la operación que está en cada puerta, únala con el par de llaves que tiene la respuesta correcta y explica en las siguientes tablas el procedimiento utilizado para cada paso.

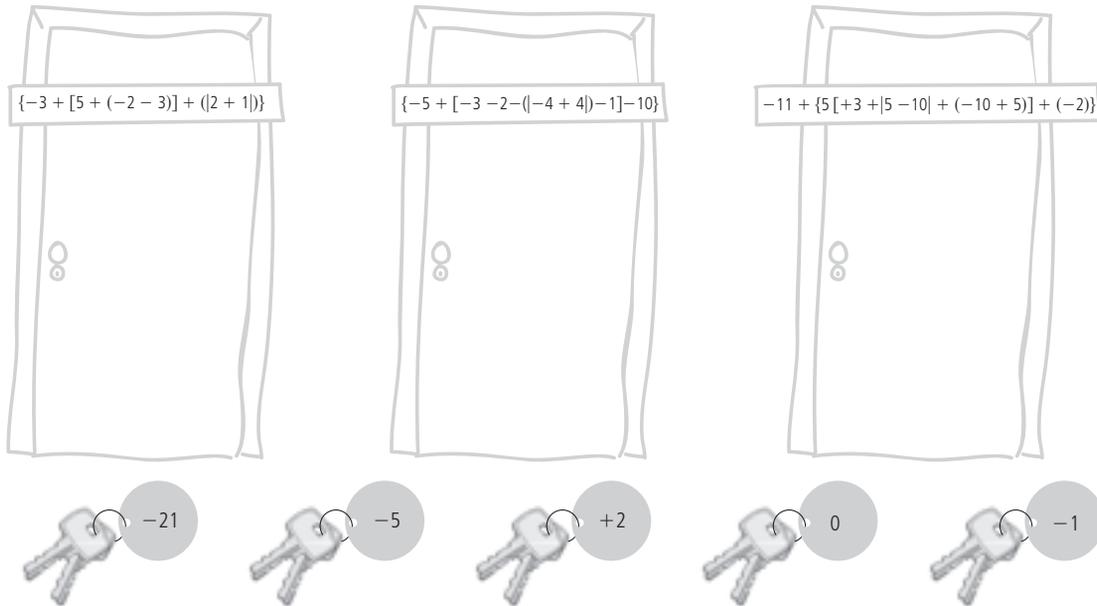


Figura 6. Llaveros y puertas

Tabla 7

*Pasos y justificaciones*

Pasos	Justificación
$\{-3 + [5 + (-2 - 3)] + (2 + 1)\}$	
<hr/>	
Pasos	Justificación
$\{-5 + [-3 - 2 - ( -4 + 4 ) - 1] - 10\}$	
<hr/>	
Pasos	Justificación
$-11 + \{5 [+3 +  5 - 10  + (-10 + 5)] + (-2)\}$	

### T5. El clima del aeropuerto

La temperatura medida en el aeropuerto a las 7 a. m. es de  $5^{\circ}\text{C}$  sobre cero; de 7 a. m. a 9 a. m., la temperatura aumentó  $3^{\circ}\text{C}$ ; de 9 a. m. a 1 p. m. disminuyó en  $6^{\circ}\text{C}$ ; de la 1 p. m. a las 3 p. m. no varió; de las 3 p. m. a las 6 p. m. bajó  $2^{\circ}\text{C}$ ; de las 6 p. m. a las 9 p. m. descendió  $4^{\circ}\text{C}$ ; y de las 9 p. m. a las 12 m. descendió  $8^{\circ}\text{C}$ . Con respecto a la temperatura de las 12 m., es correcto afirmar que:

- Aumentó  $17^{\circ}\text{C}$ , respecto a la temperatura inicial.
- Disminuyó  $17^{\circ}\text{C}$ , respecto a la temperatura inicial.
- Aumentó  $12^{\circ}\text{C}$ , respecto a la temperatura inicial.
- Disminuyó  $12^{\circ}\text{C}$ , respecto a la temperatura inicial.

Justifica tu respuesta.

De las 9 a. m. a las 3 p. m., la temperatura fue:

- $-6^{\circ}\text{C}$ .
- $6^{\circ}\text{C}$ .
- $-2^{\circ}\text{C}$ .
- $2^{\circ}\text{C}$ .

Justifica tu respuesta.

### T6. El minero

Unos mineros están realizando trabajos en un túnel en una mina de esmeraldas ubicada en Boyacá, como muestra la figura.

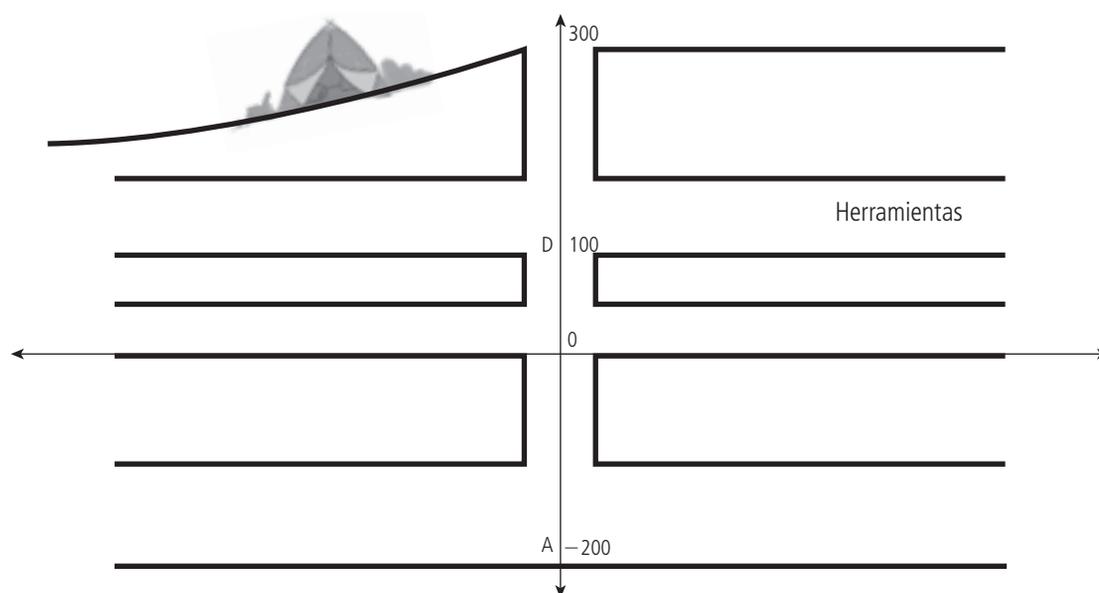


Figura 7. El minero

¿Cómo podrías utilizar la recta numérica para representar los puntos relacionados con los siguientes recorridos hechos por los mineros?

Inicialmente un minero está ubicado en la sección A; de allí, sale a almorzar al campamento ubicado en la cima de la montaña y luego, según indicaciones de su jefe, debe llevar las herramientas a un compañero que se encuentra en el punto D; estando allí, cae en cuenta que dejó la pica olvidada en el punto A y se devuelve a buscarla para hacer la entrega en el punto indicado por su jefe.

Su compañero utiliza las herramientas y se devuelve con él al punto A de la excavación.

1. ¿Mediante qué expresión aritmética, puedes representar los trayectos realizados por cada minero?
2. ¿Podrías indicar con ayuda de las fichas bicolores el valor de estos desplazamientos? ¿Cuál sería?

## T7. El skater

Carlos Díaz es un estudiante de séptimo grado que recibe una mesada de \$235 000. Al final de cada mes realiza un balance de sus finanzas con ayuda de los comprobantes correspondientes.

Quiere comprar un *skateboard* que tiene un valor de \$35 000 y, para ello, ahorra \$95 000 mensuales y procura ahorrar al máximo el dinero destinado a onces gastando en ello \$50 000 al mes. Va a cine con sus amigos tres veces al mes gastando \$17 000 en la primera película, \$15 000 en la segunda y \$20 000 en la tercera y quiere comprar un video juego para XBOX 360 por valor de \$124 000.

1. ¿Puede comprar Carlos el video juego? Justifica tu respuesta.
2. ¿Es posible plantear una expresión aritmética que involucre números enteros mostrando la situación? ¿Cuál sería esta expresión?
3. Si además del dinero de la mesada, los abuelos le regalan dinero cada domingo, para un total de \$32 000 y arregla el jardín de la casa cada 15 días (por esta labor su padre le paga \$30 000 mensuales), ¿le alcanzará el dinero para adquirir el *skateboard*? ¿Cuánto dinero le faltaría o le sobraría?

## T8. El repartidor de pizzas

Una pizzería en Bogotá está ubicada sobre la avenida Caracas con calle 0, es decir, en la calle que separa al norte del sur. El repartidor de pizzas distribuyó los pedidos del sur y los del norte de la siguiente manera.

En el primer recorrido entregó una pizza cinco cuadras en dirección sur de la pizzería y dos pizzas diez cuadras más en dirección sur del sitio del primer pedido. Para la tercera entrega, antes de arrancar, verificó el pedido y advirtió que no era correcto, así que debió devolverse a la pizzería.

Dió inicio al segundo recorrido con el pedido errado que era ocho cuadras al sur de la segunda entrega. Partió de allí en dirección norte y entregó cinco pizzas doce cuadras al norte del último lugar. El último pedido lo entregó diecisiete cuadras al norte de la última entrega.

Para el tercer recorrido debía entregar cuatro pizzas en un edificio de apartamentos ubicado nueve cuadras al norte de la pizzería, dos pizzas cuatro cuadras al norte de la entrega realizada y la última pizza veintiún cuadras al sur de la última entrega.

1. Utiliza colores diferentes para representar en una recta numérica cada uno de los tres recorridos realizados por el repartidor.

Además de entregar los pedidos, el repartidor debe cancelar una factura a uno de los proveedores que está ubicado ocho cuadras al norte de la pizzería y la orden es realizar este pago al finalizar alguno de los recorridos del día. Teniendo en cuenta que debe consumir la mínima cantidad de combustible y que sólo puede cancelar la factura al terminar cualquiera de los tres recorridos, responde las siguientes preguntas.

2. ¿Cuál es el mejor punto para ir hacia la oficina del proveedor?
3. ¿Es posible plantear una expresión que permita ver los recorridos del repartidor y que incluya el pago al proveedor?
4. Para encontrar la distancia a la que quedó el repartidor de la pizzería luego de entregar el último pedido de su jornada, ¿es posible utilizar la expresión planteada anteriormente? Indica cuál es la distancia.

## EF. Examen final

1. *¡En dónde dejé mi cuaderno!*

El conductor de la ruta #4, sale de su casa a las 5:00 a. m. A esa hora, empieza su recorrido habitual para recoger a las estudiantes y la profesora de ballet. Primero recoge a Andrea, después a María y a Sandra. En este punto, María cae en cuenta que olvidó el cuaderno de matemáticas, necesario para presentar el examen. Entonces solicita al conductor regresar a su casa para recogerlo. Él regresa después de que María acepta pagar la multa de \$7 000, correspondiente a la gasolina adicional que el bus consumirá entre la casa de Sandra y la estación de servicio. Luego de abastecer el bus con gasolina, recogen el cuaderno de María, y continúan así su ruta pasando por Diana, Ángela y la profesora de ballet. Finalmente, el bus termina su recorrido en el colegio a las 6:00 a. m.

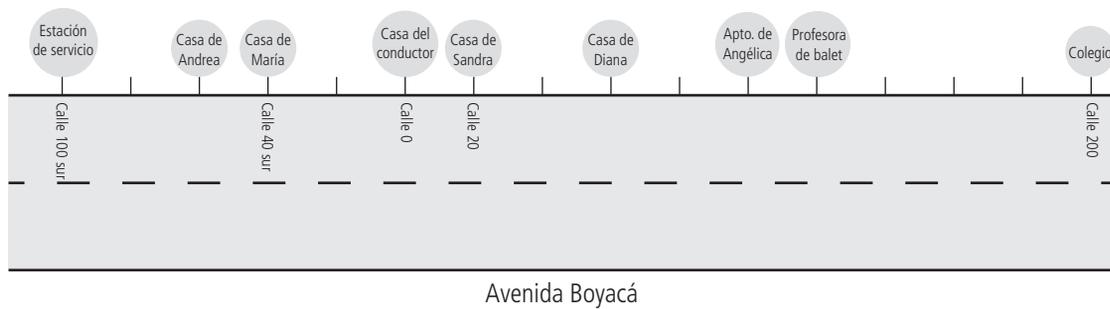


Figura 8. Paradas ruta #4

- Utiliza números enteros para escribir la posición de cada uno de los lugares en los que para la ruta #4, en el orden de su recorrido. Para ello separa por comas cada uno de estos números.
- Escribe una expresión aritmética de números enteros que indique cada uno de los recorridos hechos por la ruta #4 y comprueba que, al realizar todas sus operaciones, el resultado sea el de la posición en donde está ubicado el colegio.
- Teniendo en cuenta que María cuenta con \$10 000 y, aparte de la multa que debe cancelar, le debe \$3 500 a Juanita y no ha pagado la cuota del fondo que con intereses suma \$ 12 300, ¿con qué número entero podrías representar el dinero que adeuda María?

## 2. La casa entera

En una fiesta de números enteros realizada en la casa del signo de agrupación llamado llaves, había un número perdido y sus demás amigos lo necesitaban. La siguiente expresión representa la situación.

$$\{-3 + [? + (|1-5|) + (|15-0+1|) -20]\} = 0$$

Supón que se registra toda la casa de adentro hacia fuera.

- ¿Puedes ayudarle a los demás números que están en la casa a encontrar el número entero perdido? ¿Cuál es?
- Escribe el orden en el que registraste la casa para encontrar el número ausente y explica el procedimiento empleado.

## 3. Sube, sube la temperatura

Me levanté siete horas antes del mediodía y el termómetro marcaba  $-5^{\circ}\text{C}$ . Cuando salí de la casa sentí menos frío y leí en un letrero electrónico que la temperatura era de  $-1^{\circ}\text{C}$ . Sin embargo, sentí curiosidad y quise comparar esa información. Fui a una ferretería para comprar un instrumento que midiera la temperatura. Como no tenía suficiente dinero porque el costo del instrumento

era de \$15 000, le di \$4 000 al vendedor y le quedé debiendo el saldo. Observé que el instrumento indicaba tres grados bajo cero. Se me pasó el tiempo y ya era mediodía, miré por última vez el objeto comprado e indicaba una temperatura de veinte grados sobre cero.

El segundo día observé que cada temperatura aumentó dos grados Celsius. Decidí sumar cada una de las temperaturas correspondientes al primer día y todas las correspondientes al segundo día. Escribe en la tabla las expresiones aritméticas correspondientes.

Tabla 8

*Sube, sube la temperatura*

---

Día uno	Día dos
---------	---------

---

---

a. ¿Qué concluyes al comparar los resultados?



