

VARGA GERGELY–VINCZE JÁNOS

Megtakarítási típusok – egy adaptív-evolúciós megközelítés

A közgazdaságtanban az ágensalapú modellezés egyik alkalmazási területe a makroökonómia. Ebben a tanulmányban néhány népszerű megtakarítási szabály létét feltételezve adaptív-evolúciós megközelítésben endogén módon próbálunk következtetni e szabályok relatív életképességére. Három különböző típusú ágenszt vezetünk be: egy prudens, egy rövidlátó és egy, a permanensjövedelem-elméletnek megfelelően működőt. Rendkívül erős szelekciós nyomás mellett a prudens típus egyértelműen kiszorítja a másik kettőt. A második legéletképesebbnek a rövidlátó típus tűnik, de már közepes szelekciós nyomásnál sem tűnik el egyik típus sem. Szokásos tőkehatékonyság mellett a prudens típus túlzott beruházási tendenciát visz a gazdaságba, és a gazdaság az aranykori megtakarítási rátánál magasabbat ér el. A hitelkorlátok oldása még nagyobb mértékű túlzott beruházáshoz vezethet, a hitelek mennyiségének növekedése mellett a tőketulajdonosok mintegy „kizsákmányoltatják” magukat azokkal, akiknek nincs tőkejövödelmük. A hosszú távú átlagos fogyasztás szempontjából a három típus kiegyensúlyozott aránya adja a legjobb eredményt, ugyanakkor ez jóval nagyobb ingadozással jár, mint amikor csak prudens típusú háztartások léteznek.*

Journal of Economic Literature (JEL) kód: E03, E14, E27.

Az ágensalapú modellek (*Agent-Based Model, ABM*) a közgazdasági modellezés egy olyan sajátos válfaja, amely az utóbbi 20 évben számos területen egyfajta alternatívát jelent a hagyományos megközelítésekhez képest. Ez az új megközelítés egymással összefüggő, részben elméleti (filozófiai), részben pedig matematikai (metodológiai) szempontokat is magában foglal. Elméleti szempontból ezek a modellek általában nem tartalmaznak optimalizáló ágenseket, de legalábbis nem tartalmaznak olyanokat, amelyek esetében az optimalizálás nem fejezhető ki explicit függvény

* Köszönetünket fejezzük ki *Simonovits Andrásnak* a cikkhez fűzött megjegyzéseiért, javaslataiért. A kutatást az OTKA K 108 658. projektje finanszírozta.

Varga Gergely, Budapesti Corvinus Egyetem (e-mail: gergely.varga@uni-corvinus.hu).

Vincze János, Budapesti Corvinus Egyetem és MTA KRTK Közgazdaság-tudományi Intézet (e-mail: janos.vincze@uni-corvinus.hu).

A kézirat első változata 2015. szeptember 9-én érkezett szerkesztőségünkbe.

DOI: <http://dx.doi.org/10.18414/KSZ.2016.2.162>

formájában. Tehát az ágensalapú modellek ágensei eleve csak „kiszámítható” (*computable*) viselkedésűek (az ágensalapú modellezésről általában lásd *Gilbert* [2008], *Heath és szerzőtársai* [2009], valamint elsősorban közgazdasági nézőpontból lásd *Tesfatsion* [2001], [2006]).

Az ágensalapú modellek egy másik, filozófiai aspektusa a heterogenitás hangsúlyozása. Léteznek hagyományos modellek is, amelyek „sokszereplősek”, ahol a szereplők különböznek egymástól (lásd például az új keynesiánus DSGE modelleket), de a heterogenitás egy tipikus ágensalapú modellben „lényegesebb”, mint egy végtelen szereplős DSGE-ben, abban az értelemben, hogy nem vezethető le olyan aggregációs szabály (még közelítően sem), amely az egyedi viselkedéseket egy aggregált egyenletbe tudná sűríteni. Ennek oka elsősorban az információ kezelése. Publikus (mindenki számára hozzáférhető, globális) információk alapulnak a döntések az ágensalapú modellekben is, de szinte minden ilyen modellben az ágensek heterogenitása abban is megnyilvánul, hogy jelentős részben egyedi (lokális) információval rendelkeznek a környezetükről.

Egy másik fontos jellemző, hogy az ágensalapú modellekben nem létezik „racionális várakozás”. Logikailag a racionális várakozások hipotézise (azaz adott információ mellett a jövő „objektív” valószínűségeloszlásának az ismerete) nem összeegyeztethetetlen az ágensalapú modellek filozófiájával, ám gyakorlatilag lehetetlen olyan, nem triviális modellt alkotni, amelyben a racionális várakozások hipotézise megvalósítható lenne.

Matematikai szempontból egy ágensalapú modell általában nagy dimenziószámú, nemlineáris differenciaegyenlet-rendszer, amelynek létezik explicit megoldása, és ez az explicit megoldás az, amit a modell egy szimulációja során bizonyos (természetesen véges) időszakra ki is számolunk. Analitikus állítások csak egyszerű ágensalapú modellek esetében fordulnak elő, és ott is inkább csak közelítéseként. Ez a metodológia ugyan relatíve új, illetve ritka a közgazdaságtanban, ám korántsem ismeretlen a természettudományokban vagy az ökológiában.

Jóllehet racionális várakozások nem léteznek ágensalapú modellekben, ezek a modellek sem zárják ki azt, hogy bizonyos döntések a jövővel kapcsolatos várakozásokon alapuljanak, és azt sem, hogy ezek a várakozások intelligensek legyenek, vagyis hogy a döntéshozók tanuljanak. A tanulási folyamatot igyekeznek azonban a tanulásal kapcsolatos pszichológiai tudásuk alapján megfogalmazni, ami kizárja a tökéletességet. (Tanulásról az ágensalapú modellekben lásd *Duffy* [2006], *Brenner* [2006].)

Egy ágensalapú modellben a tanulás két válfaját is megkülönböztethetjük. Az egyik fajta (kvantitatív) azt jelenti, hogy megpróbáljuk előre jelezni a jövedelmünket vagy a jövőbeli hozamokat. Létezik azonban egyfajta kvalitatív tanulás is, aminek során valakinek a viselkedése minőségileg is változhat. Nyilván a különbség matematikai szempontból viszonylagos: a kvalitatív tanulás is parametrizálható kvantitatív tanulásként. A lényeges megkülönböztetés talán az időtényező figyelembevétele. Míg a kvantitatív tanulás gyorsabb, a kvalitatív tanulás lassabb, és ritkábban van rá mód. Az előbbi fajta tanulás számos ágensalapú közgazdasági modellt jellemez, az utóbbi viszonylag ritkább (*Arifovic* [2000] példa a genetikus

algoritmusok használatára a közgazdaságtanban, ami elsősorban az utóbbi kategóriába tartozik.)¹

A közgazdaságtanban az ágensalapú modellek egyik újabb alkalmazási területe a makroökonómia (lásd *Deissenberg és szerzőtársai* [2008], *Delli Gatti és szerzőtársai* [2011]).² Mára kialakult ezeknek a modelleknek egy bizonyos fajta standardja is, némi különbségekkel attól függően, hogy milyen problémára alkalmazzák őket. Egy makroökonómiai modell szükségképpen többfajta szereplőt (háztartás, vállalat, bank stb.) és számos, különbözőfajta döntést tartalmaz. Az ágensalapú modellek készítői az egyes ágensek viselkedésének leírásakor sokfajta nem standard viselkedési forma között választhatnak. Ilyen fogyasztási függvényt specifikál például a BAM (*Bottom-up Adaptive Macroeconomics*) modell (lásd *Delli Gatti és szerzőtársai* [2011]). Igyekeznek empirikusan igazolt döntési szabályokat alkalmazni, de ennek lehetőségei korlátozottak, hiszen a valóban „bizonyított” empirikus viselkedési szabály nagyon ritka, s ezért gyakran plauzibilis, ám *ad hoc* megoldásokat alkalmaznak.

Ebben az írásban a makroökonómiai modellek egy nagyon fontos elemére, a megtakarítási szabályra koncentrálunk, és azt szeretnénk megtudni, hogy az adaptív viselkedést feltételező ágensalapú megközelítés képes-e a makromodellek számára hozzátenni valamit arról, hogy milyen megtakarítási szabályt célszerű feltételezni, illetve azoknak milyen következményei vannak. Tudomásunk szerint az adaptív megközelítést a megtakarítási magatartás szempontjából eddig nem alkalmazták ágensalapú modellekben. A kérdés pedig érdekes, és nem triviális, hiszen mind a hagyományos, mind az újabb modellek anélkül feltételezik látszólag „alacsonyabb rendű” viselkedési formák létét, hogy ezek hosszú távú fennmaradását magyaráznák.

A következőkben először áttekintjük a témánkhoz tartozó, hagyományos megtakarítási irodalmat, majd a kapcsolódó ágensalapú irodalmat. Ezután kvalitatíve megkülönböztetjük a megtakarítók – mind elméletileg, mind empirikusan alátámaszthatónak tűnő – három típusát, majd egy ágensalapú modell elemzésével azt vizsgáljuk, hogy milyen körülmények között élhetnek együtt ezek a típusok; együttélésük milyen következményekkel jár az aggregált megtakarítói viselkedésre. Mint látni fogjuk, az eredmények összetettek, arra utalnak, hogy a szelekciós erő és a társadalmi eredményesség közötti kapcsolatok sokkal bonyolultabb kölcsönhatásban vannak, mint ahogy azt a közgazdászok – talán naivan – sokáig értelmezték. A tanulmány végén javaslatokat teszünk arra, hogy ágensalapú modellekben hogyan lehetne továbbfejleszteni a megtakarítások modellezését.

¹ A tanulási algoritmusok irodalma rendkívül gyorsan fejlődik. Ez az irodalom jelentős részben a mesterséges intelligenciával kapcsolatos kutatások (mellék)terméke, és nem feltétlenül alkalmazható közvetlenül emberi viselkedés modellezésére. Ugyanakkor léteznek kognitív pszichológiai modellek, amelyek a tanulást sokkal mélyebben vizsgálják, mint ami a közgazdaságtani ágensalapú modellekben megszokott (lásd például *Sun* [2005]).

² A makrogazdasági ágensalapú modellek egy sajátos típusának tekinthetők az empirikus adatokkal feltöltött, gyakorlatban is használt mikroszimulációs modellek (lásd például *Birkin-Wu* [2012]).

Megtakarítói típusok

A fogyasztás–megtakarítás hagyományos elméletei

A fogyasztási–megtakarítási döntések empirikus modellezői régóta foglalkoztak az egyének közti heterogenitás problémájával. Vannak, akik hagyományosan két csoportra osztják az egyéneket (háztartásokat): egyrészt azokra, akik a hosszú távon hasznosságot maximalizáló fogyasztó – eredetileg Irving Fisher által megfogalmazott – elméletének megfelelően cselekszenek (racionális ágensek), másrészt azokra, akik – látszólag – rövidlátó módon mindig annyit fogyasztanak, amennyit csak tudnak. A különböző elméletek az utóbbiakat illetően lényegében csak annyiban térnek el egymástól, hogy rövidlátásnak, egyszerű irracionitásnak vagy likviditási (hitel) korlátoknak tulajdonítják ezt a viselkedést. *Campbell–Mankiw* [1989] az „irracionális” felfogást követi: a háztartások egy nem elhanyagolható része rövidlátóan jövedelme nagy hányadát elfogyasztja minden időszakban, anélkül hogy törődne a jövővel. E fogyasztók esetében a pillanatnyi jövedelem és fogyasztás között szoros a korreláció, függetlenül attól, hogy a jövedelem változásai permanens vagy időleges tényezőktől függ.

Az utóbbi évtizedek viselkedési közgazdaságtani modelljei a rövidlátás és irracionális modellezésére törekedtek, és különböző elméletek alakultak ki ennek magyarázatára. Ezek közül leginkább talán a hiperbolikus diszkontálás modellje (lásd *Laibson* [1997]) terjedt el, amellyel az utóbbi időben gyakran elemzik a megtakarítási döntéseket, de megjelentek – ha nem is terjedtek el ugyanolyan mértékben – olyan elméletek is, amelyek a korlátozott kognitív képességeket hangsúlyozzák, és olyanok is, amelyek az emberi psziché belső inkonzisztenciájának feltevésén nyugszanak (kettős-elméletek – lásd például *Fudenberg–Levine* [2006]). Mindezek az elméletek a racionális és irracionális megtakarítási viselkedés perzisztens együttéléséhez vezetnek, de nem magyarázzák meg, hogy a (kulturális) evolúció miért nem képes kirádirozni egy látszólag alacsony hatékonyságú viselkedési mintát.

A racionális (fogyasztássimító és előrelátó) viselkedésnek több változata létezik az irodalomban. A korai elméletek nem foglalkoztak a jövedelem nem diverzifikálható kockázataival, ezért a fogyasztók kockázatviselő képessége nem játszik különösebb szerepet ezekben a modellekben. Egy általános eredmény, hogy ilyen feltételek mellett a vagyon nem stacionárius, illetve a fogyasztás véletlen bolyongást követ végtelem időszakra tervező háztartás esetében. Az ilyen fogyasztók permanensjövedelem-sokkokra vonatkozó fogyasztási határhajlandósága jóval nagyobb, mint az átmeneti sokkokra vonatkozó fogyasztási határhajlandósága. Empirikus tanulmányok egy része azt próbálja igazolni, hogy a háztartások egy részét valóban ehhez hasonló magatartás jellemzi (*Hall–Mishkin* [1982]).

Olyan elméletek is születtek, amelyek kiemelik a munkajövedelmek nem diverzifikálható kockázatát és a véges élettartam jelentőségét is. Ezek fontos szerepet szánnak a kockázatelutasításnak, sőt a prudens módon felállított preferenciáknak. Az empirikus fogyasztási függvény irodalmának egyik legismertebb eredménye a puffer modell, amely egy – a hagyományos elméletből levezetett – nem parametrikus

empirikus fogyasztási függvény (lásd *Carroll–Summers* [1991]). Az eredmény úgy foglalható össze, hogy a prudens preferenciákkal és viszonylag jelentős nem diversifikálható munkajövedelem-kockázattal rendelkező háztartások vagyoni/jövedelem arányukkal jellemezhető vagyonpuffer fenntartására törekcsenek (például a vagyonpuffer a féléves jövedelemnek feleljen meg). Ha a puffer túl nagy, akkor többet fogyasztanak a szokásosnál, ha túl kicsi, kevesebbet. *Carroll* [1996] empirikus eredményei a gyakorlatban is igazolták egy ilyen jellegű reláció létét.³

Megtakarítási szabályok ágensalapú makromodellekben

A makroökonómiai ágensalapú modelleknek természetesen tartalmazniuk kell valamilyen megtakarítási szabályt is. Mivel ezekben a modellekben általában nincsenek hasznossági függvények, a modellezők az empirikus irodalomra hivatkozva igazolják választásukat. *Dosi és szerzőtársai* [2013] például annak a stilizált ténynek az alapján, hogy a fogyasztás jól „nyomon követi” a folyó jövedelmet, azzal a feltevés-sel él, hogy a háztartások minden időszakban igyekeznek a teljes folyó jövedelmüket elfogyasztani, azaz mintha a fogyasztók alapvetően rövidlátók lennének. Egy másik jól ismert stilizált tény a fogyasztási függvény konkávitása, vagyis az a megfigyelés, hogy a megtakarítási határhajlandóság a rendelkezésre álló források növekvő függvénye. Ilyen fogyasztási függvényt specifikál például a BAM (*Bottom-up Adaptive Macroeconomics*) modell (lásd *Delli Gatti és szerzőtársai* [2011]).

Egyre több olyan ágensalapú modell van, amely a pufferelméletből indul ki. Ennek az elméletnek egy leegyszerűsített (parametrizált és linearizált) változatát több ágensalapú makromodell is használta (például a BAM egy változata, valamint az EURACE – lásd *Deissenberg és szerzőtársai* [2008].)

A három típus és versenyük

Az elmondottak alapján a háztartások három – a szakirodalom által azonosított – típusa rajzolódik ki, amelyek „létére” vannak bizonyítékok is. Ez a három típus eléggé különbözik egymástól ahhoz, hogy kvalitatíve különbözőknek tekintsük őket.

1. Permanensjövedelem-típus. Ez a fajta háztartás hosszú távon tervez, igyekszik előre jelezni a jövedelmét, valamint a fogyasztását simítani, szükség esetén hajlandó a megtakarításra is, és a hitelfelvételre is.

2. Prudens típus. Ez a háztartás prudens módon tartalékol, de amennyiben túlzottan nagyok a tartalékai, hajlandó leépíteni azokat. Bár mindig pozitív vagyoni elérésre törekcszik, véletlenszerűen előfordulhat, hogy adósságot vállal, ám ezt igyekszik minél hamarabb törleszteni.

³ A megtakarítási irodalomban léteznek egyéb fontos elméletek is, a leglényegesebb ezek közül az életsiklus-elmélet. Ez azonban eddig nem kapott szerepet az ágensalapú irodalomban.

3. Rövidlító típus. Nem törődik a jövővel, a fogyasztás rövid távú maximalizálására törekszik. Ha ehhez hitelt kell felvennie, megteszi, de mintegy véletlenszerűen előfordulhat az is, hogy feleslege van, és vagyont is felhalmozhat.

Ez a három típus nem adódik szigorúan a hasznosságmaximalizáló modellek típusaiból, csak hasonlít hozzájuk. Mivel nem tételezünk fel hasznossági függvényt, nem kérdezhetjük azt, hogy szubjektíve megéri-e valamilyen típusúnak lenni, viszont megvizsgáljuk, hogy hosszú távon megéri-e. A „fittségi” kritériumunk az időbeli átlagos fogyasztás, feltesszük, hogy létezik egy olyan adaptációs evolúciós mechanizmus, amely a hosszú távú fogyasztás szempontjából eredményesebb viselkedési mintákat terjeszti a társadalomban.

Milyen hátrányai és előnyei lehetnek az egyes típusoknak? A rövidlító típusnak várhatóan alacsony nettó tőkéje lesz hosszú távon, s emiatt fogyasztása sem lehet nagyon magas, hosszú távú fennmaradása erősen kétségesnek tűnik, ha az adaptáció kényszere nagy. A permanensjövedelem-típusú fogyasztó józanul törekszik vagyona szinten tartására, azaz stabil fogyasztást igyekszik biztosítani magának. Véthet azonban hibákat a jövő előrejelzésénél, ami költséges lehet, továbbá mivel ő is szívesen vesz fel hitelt, összességében nem biztos, hogy tőkejöveldelme nagyon nagy lesz. A prudens háztartás biztonságra törekszik, akkor is módja lesz eladósodás nélkül fogyasztani, ha a munkajöveldelme alacsony, de lehet, hogy túlzottan takarékos, keveset fogyaszt ahhoz képest, hogy mekkora vagyont tart „fölszlegesen”.

Kérdés az is, hogy milyen „társadalmi” hatást fejtenek ki az egyes típusok. Első látásra egy prudens fogyasztó társadalmi (másokra való) hatása pozitív, míg egy rövidlító hatása negatív, amennyiben az első növeli, a második pedig csökkenti a társadalmi tőkét, és ezáltal a munka termelékenységét is. Nem triviális, hogy lehetséges-e együttélésük, és milyen hatással jár. Az ágensalapú modellek csak egyetlen típus létét tételezik fel, ami nagyon valószínűtlen. Szinte minden vizsgálat azt bizonyítja, hogy léteznek prudens háztartások, de hogy csak ilyenek léteznének, azt cáfolni látszik a háztartások néha jelentős eladósodása. Nehezen hihető az is, hogy csak rövidlító fogyasztók vannak, hiszen minden társadalomban vannak hosszú távon is pozitív megtakarítók.

A három típus konkrét modellezésekor számos kérdést kell tisztáznunk. Például a rövidlító fogyasztónál valahonnan származtatni kell a fogyasztási célt, a prudens ágensnél a kívánt vagyonpuffer nagyságát, a permanensjövedelem-típusnál pedig azt, hogy miként határozza meg permanens jövedelmét. A modell részletes leírásánál adunk választ ezekre a kérdésekre. Az egyes típusok közötti verseny mellett feltételezni fogjuk, hogy léteznek „bizonyos” altípusok, közöttük verseny zajlik, és az egyes típusokon „belül” kiválasztódási mechanizmus érvényesül.

Egy ágensalapú modell

A modell technikai vázát az úgynevezett Bewley-típusú modellektől vettük át (*Bewley* [1980]). Ezeket a modelleket főként azért tanulmányozták, hogy mit lehet mondani a makromodellek egyensúlyáról nem teljesen piaci körülmények között. A modellben egyéni technológiai bizonytalanság létezik, de aggregált

technológiai bizonytalanság nem. Kétfajta megtakarítási lehetőség van benne: fizikai tőke és magánhitel. Az itt tárgyalt modellt a hagyományos Bewley-típusú modellektől megkülönbözteti az aktívapiacok kezelése és a fogyasztói viselkedés modellezése.

A termelési-elosztási oldal

A modell termelési és elsődlegesjövedelem-elosztási része *Aiyagari* [1994] cikkét követi. Létezik *Nex ante* azonos háztartás, amelyek mindegyike végtelen élettartamú. Minden háztartás (homogén) munkakínálatát azonos, kétállapotú Markov-lánccal jellemezzük, amelynek az átmenetmátrixa:

	L_1	L_2
L_1	p	$1 - p$
L_2	$1 - q$	q

ahol L_1 a háztartás munkakínálata a „rossz” állapotban, L_2 a háztartás munkakínálata a „jó” állapotban ($L_1 < L_2$, $p < q$). Tehát ha a háztartások száma nagy, akkor a munkakínálati aggregált bizonytalanság kicsi, jóllehet az egyéni kínálati bizonytalanság lehet jelentős. A munkapiacok mindig egyensúlyban vannak, és a munka díjazása határtermékén történik. A gazdaság aggregált termelési függvénye Cobb–Douglas-típusú, argumentumai az aggregált munka és az aggregált tőke.

$$L_t = \sum_k L_{t,k}, \quad K_t = \sum_k K_{t,k} \quad \text{és} \quad Y_t = K_t^{1-\alpha} L_t^\alpha, \quad (1)$$

ahol L_t az aggregált munka, $L_{t,k}$ a k -adik háztartás munkakínálata, K_t az aggregált fizikai tőke, $K_{t,k}$ a k -adik háztartás fizikai tőkeállománya, Y_t az aggregált output a t -edik időszakban, és $0 < \alpha < 1$.

Az egységbér (w_t) és az egységnyi tőkeszolgáltatások járadéka (r_t^K) implicit módon kifejezhető, mint

$$w_t L_t = \alpha Y_t \quad \text{és} \quad r_t^K K_t = (1 - \alpha) Y_t. \quad (2)$$

A szimulációk első időszakában minden ágens véletlen nagyságú tőkével rendelkezik. A tőke időszakonként $100 \times \delta$ százalékból amortizálódik.

Jóllehet ez a modell tartalmaz egyéni munkakínálati bizonytalanságot, az aggregált munkakínálat nagyszámú ágens esetén közelítően konstans, és ez a konstans munkakínálat (L) egyértelműen meghatározható a Markov-lánc paramétereiből, valamint az ágensek számából. Ekkor értelmezhető ebben a Cobb–Douglas-féle termelési függvénnyel leírt gazdaságban a (közelítő) aranykori megtakarítási ráta és az ennek megfelelő aranykori tőkeállomány és fogyasztás. Tudjuk, hogy Cobb–Douglas-esetben az aranykori megtakarítási ráta $1 - \alpha$ és

$$K^* = \left(\frac{1-\alpha}{\delta} \right)^{1/\alpha} L, \quad (3)$$

$$C^* = \alpha K^{1-\alpha} L^{1-\alpha} \quad (4)$$

az aranykori tőkeállomány és fogyasztás.

A fogyasztási oldal

Minden időszak kezdetén idioszinkratikus (egyénre jellemző) munkakínálati sokkok zajlanak le, majd megtörténik a termelés és az elsődleges jövedelem elosztása. Az egyes háztartások összes rendelkezésre álló erőforrása:

$$A_{t,k} = (1 + r_t^K - \delta)K_{t,k} + (1 + r_t)B_{t,k} + w_t L_{t,k} - (1 + r_t)D_{t,k}, \quad (5)$$

ahol $A_{t,k}$ a k -adik háztartás erőforrásai, δ az amortizációs ráta, r_t a kamatláb, amit a hiteleken érvényesítenek, $B_{t,k} \geq 0$ a háztartás más háztartásoknak nyújtott, az időszak elején lejáró hitelei és $D_{t,k} \geq 0$ a háztartás általi tartozások (a hitelezésről lásd később). Az $A_{t,k}$ tehát tartalmazza a nettó vagyont ($K_{t,k} + B_{t,k} - D_{t,k}$), a jelenlegi jövedelmet ($r_t^K K_{t,k} + r_t B_{t,k} + w_t L_{t,k}$), de levonjuk az amortizációt és a kamatkidadásokat ($\delta K_{t,k} + r_t D_{t,k}$).

A háztartások egy Erdős–Rényi-féle véletlen gráf csomópontjain helyezkednek el (Erdős–Rényi [1959]), amelyben minden lehetséges ágenspárt ρ_1 valószínűséggel kötöttünk össze, dg pedig a reguláris (minden csúcspont fokszáma azonos) kezdeti gráf fokszáma. Az ágensek között a gráfot minden időszakban adott ρ_2 valószínűséggel újrageneráljuk. Egy adott időszakban minden fogyasztó három típus valamelyikéhez tartozik: $T_t(k) = a$, $T_t(k) = b$ vagy $T_t(k) = c$, ahol a a permanensjövedelem-típust, b a prudens típust, c pedig a rövidlátó típust jelöli. Az első időszakban az ágensek egyenlő valószínűséggel kerülnek a három típus valamelyikébe. Mindhárom típusnak megvan a saját fogyasztástervezési szabálya, amelynek paraméterei azonban függenek a háztartás aktuális állapotától.

A PERMANENSJÖVEDELEM-TÍPUS TERVEI • A permanensjövedelem-típushoz tartozók megpróbálják előre jelezni teljes életpályavagyonukat, és azt tervezik, hogy ennek alapján konstans (nem negatív) fogyasztást realizálnak:

$$C_{t,k}^P = \chi_{t,k} \max \left[0, \frac{\tilde{E}_{t,k}(r_k)}{1 + \tilde{E}_{t,k}(r_k)} A_{t,k} + \frac{1}{1 + \tilde{E}_{t,k}(r_k)} \tilde{E}_{t,k}(LW_k) \right], \quad (6)$$

ahol $C_{t,k}^P$ a k -adik háztartás tervezett fogyasztása a t -edik időszakban, ha $T_t(k) = a$, $\chi_{t,k}$ a háztartás optimizmusát jellemző paraméter, $\tilde{E}_{t,k}(LW_k)$ és $\tilde{E}_{t,k}(r_k)$ az átlagos munkajövedelem és kamatláb várt értékei. $\chi_{1,k}$ egy $[\underline{\chi}, \bar{\chi}]$ intervallumon egyenletes

eloszlású valószínűségi változó realizációja, alakulásának mikéntjét az Adaptáció–szelekció–mutáció című alfejezetben ismertetjük. A várakozások a változók reálizált értékeinek súlyozott átlagai, exponenciálisan csökkenő súlyokkal. Rekurzívan a következőképpen definiálhatók:

$$\tilde{E}_{t,k}(LW_k) = \sigma \tilde{E}_{t-1,k}(LW_k) + (1-\sigma)w_t L_{t,k}, \quad (7)$$

$$\tilde{E}_{t,k}(Er_k) = \sigma \tilde{E}_{t-1,k}(Er_k) + (1-\sigma)r_t. \quad (8)$$

Az első szimulációs periódusban:

$$\tilde{E}_{1k}(LW_k) = w_1 L_{1k}, \quad (9)$$

$$\tilde{E}_{1k}(r_k) = r_1. \quad (10)$$

A háztartások tehát múltbeli tapasztalataik alapján a történelmi átlagokat vetítik előre, de oly módon, hogy minél távolabb megyünk vissza a múltba, a megfigyelések súlya egyre kisebb lesz. Nem stacionárius körülmények között ez a súlyozás intuitívan ésszerű, mivel ilyenkor a távoli múlt információi egyre lényegtelenebbek. Viszont ha mégis stacionárius lenne a világ, akkor hosszú távon a súlyozás nem csökkentené lényegesen az előrejelzés hatékonyságát.

A PRUDENS TÍPUS FOGYASZTÁSI TERVEI • Minden fogyasztó rendelkezik egy számára kívánatos vagyon/jövedelem aránnyal:

$$h_{t,k} = \frac{A_{t+1,k}}{Inc_{t,k}}, \quad (11)$$

ahol a k -adik háztartás jövedelme a t -edik időszakban

$$Inc_{t,k} = (r_{t,k}^K - \delta) + w_t L_{t,k} + r_t (B_{t,k} - D_{t,k}) \quad (12)$$

A $h_{1,k}$ egy \bar{h} várható értékű, exponenciális eloszlású valószínűségi változó realizációja. Értéke később módosulhat: ennek mikéntjét az Adaptáció–szelekció–mutáció című alfejezetben ismertetjük. Ha az aktuális vagyon/jövedelem arány ($A_{t,k}/Inc_{t-1,k}$) magasabb a kívánt aránynál, akkor többet fogyasztanak a szokásosnál, ha kisebb, akkor kevesebbet. *Delli Gatti és szerzőtársai* [2011] leírását követve ekkor a prudens fogyasztó fogyasztási szabálya a következőképpen alakul:

$$C_{t,k}^P = \max(0, A_{t,k} - h_{t,k} Inc_{t,k}). \quad (13)$$

A RÖVIDLÁTÓ TÍPUS FOGYASZTÁSI TERVEI • A rövidlátó háztartások kizárólag a fogyasztásra koncentrálnak. A szomszédos ágensek közül a legmagasabb szinten fogyasztót tekintjük referenciának, és ha optimizmusuk fokának megfelelően az ő fogyasztását szeretnék elérni, azaz ha $T_t(k) = c$, akkor

$$C_{t,k}^P = \chi_{t,k} \max\left(0, C_{t,k}^{\max}\right), \quad (14)$$

ahol $C_{t,k}^{\max}$ a szomszédos ágensek fogyasztása közül a legmagasabb a t -edik időszakban, $\chi_{t,k}$ ismét a háztartás optimizmusát jellemző paraméter, $\chi_{t,k}$ egy $[\underline{\chi}, \bar{\chi}]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó realizációja, amelynek alakulásáról az Adaptáció–szelekció–mutáció című alfejezetben írunk.

Fogyasztás

Ha $C_{t,k}^P \leq A_{t,k}$, akkor a háztartás pillanatnyi fogyasztási tervét képes megvalósítani, tehát

$$C_{t,k} = C_{t,k}^P, \quad (15)$$

és a háztartás megtakarított erőforrás-állománya:

$$W_{t+1,k} = A_{t,k} - C_{t,k} \geq 0, \quad (16)$$

különben:

$$C_{t,k} = \min\left[C_{t,k}^P, \max\left(0, A_{t,k} + \frac{\bar{D}_t}{1+r_{t+1}}\right)\right], \quad (17)$$

ahol \bar{D}_t egy általános hitelkorlát, r_{t+1} a kamatláb a $t+1$ -edik periódusban lejáró hiteleken. A hitelkorlát értékét a „legrosszabb esetben” realizálható bérjövedelem örökjáradékosított értéke határozza meg, ahol a kamatláb értékét perturbáltuk, hogy minden esetben pozitív maradjon.

A k -adik háztartás hitelkereslete:

$$D_{t+1,k} = \max\left[0, \min\left(\frac{1}{1+r_{t+1}} \bar{D}_t, C_{t,k}^P - A_{t,k}\right)\right]. \quad (18)$$

A hitelpiac

A kamatlábat meghatározó összefüggés:

$$r_{t+1} = \omega \left(\sum_k D_{t-1,k} / Y_{t-1} \right)^2 + \max(0, r_t^K - \delta), \quad (19)$$

vagyis a hitelpiacon a kamatláb mindig legalább akkora, mint a tőke realizált nettó hozama. Ez egy naiv centralizált hitelpiacot tételez fel, ahol az előző időszaki hozamot mintegy referenciának tekintik, de a hitelezők felhasználva azt, hogy a hitel felvevőknek „szükségük” van rájuk, erre „rátesznek” egy kis felárat (ω). Továbbá a kamatláb értékét úgy perturbáljuk, hogy semmiképpen ne legyen negatív.

Ha teljesül a megvalósíthatósági kritérium

$$\sum_k W_{t+1,k} \geq \sum_k D_{t+1,k}, \quad (20)$$

akkor a megtakarítások kínálata konzisztens a hitelkereslettel. Ebben esetben

$$B_{t+1,k} = W_{t+1,k} \frac{\sum_k D_{t+1,k}}{\sum_k W_{t+1,k}}, \quad (21)$$

$$K_{t+1,k} = W_{t+1,k} - B_{t+1,k}, \quad (22)$$

vagyis a hitelek és a fizikai tőke portfólióbeli súlyai azonosak minden háztartás esetében, ha a háztartás nettó megtakarításainak egyenlege pozitív. Amikor a megvalósíthatósági feltétel nem teljesül, a hitelezők leírják az adósok adósságát ($B_{t+1,k} = D_{t+1,k} = 0$ minden k -ra), de a hitelezés a következő időszaktól újra beindul.

Adaptáció–szelekció–mutáció

A modellben nincs szubjektív hasznosság, de az akkumulált hasznosság mintegy életre valóssági (*fitness*) kritériumként funkcionál (*Brock–Hommes* [1997]). Az ágensek sikerességét akkumulált fogyasztásukban mérjük a (23) módon:

$$U_{t,k} = \lambda U_{t-1,k} + (1 - \lambda) C_{t,k} \quad 0 < \lambda < 1. \quad (23)$$

Egy ágens minden időszakban egy kis (ρ_3) valószínűséggel képes típust váltani. Ilyenkor beazonosítja mindhárom csoportban (permanensjövedelem-típus, prudens típus, rövidlátó típus) a legnagyobb U_{t-1} értékkel rendelkezőket. Legyenek ezek az értékek $U_{t-1,k(a)}^*$, $U_{t-1,k(b)}^*$ és $U_{t-1,k(c)}^*$! Ekkor a k -adik ágens típusa τ ($\tau = a, b$ vagy c) lesz a (24) valószínűséggel

$$\Pr[T_t(k) = \tau] = \frac{\exp\left(\frac{U_{t-1,k(\tau)}^*}{\gamma}\right)}{\exp\left(\frac{U_{t-1,k(a)}^*}{\gamma}\right) + \exp\left(\frac{U_{t-1,k(b)}^*}{\gamma}\right) + \exp\left(\frac{U_{t-1,k(c)}^*}{\gamma}\right)}, \quad (24)$$

ahol egy nagy $\gamma > 0$ azt jelenti, hogy a típusváltásnál a siker majdnem irreleváns, míg ha γ értéke 0-hoz közeli, akkor nagy a valószínűsége, hogy a sikeresebb típus győz. Bármelyik eset is realizálódik, a k -adik háztartás örökli a „győztes” sikermutatóját, habár ez azonnal erodálódik, amennyiben $\lambda < 1$. A sikermutatón felül az ágensek öröklik a „győztes” optimizmusának fokát ($\chi_{t,k}$), ha $T_t(k) = a$ vagy $T_t(k) = c$; a $T_t(k) = b$ esetén pedig annak kívánt vagyon/jövedelem arányát ($h_{t,k}$).

Egy kis valószínűséggel (ρ_4 , illetve ρ_5) az ágensek mutálódnak: optimizmusuk foka és a kívánt vagyon/jövedelem arányuk véletlenszerűen megváltozhat. Az optimizmus fokának új értéke a régi érték és egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó konvex kombinációja:

$$\chi_{t,k}^n = \phi \chi_{t,k}^o + (1 - \phi) \varsigma_{t,k}, \quad (25)$$

ahol $\chi_{t,k}^n$ az optimizmus új, $\chi_{t,k}^o$ a régi értéke, $\varsigma_{t,k}$ egy $[\chi, \bar{\chi}]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó realizációja, $0 < \phi < 1$ pedig a régi érték súlya a kombinációban. A kívánt vagyon/jövedelem arány esetén pedig

$$\log h_{t,k}^n = \log h_{t,k}^o + v_{t,k}, \quad (26)$$

ahol $h_{t,k}^n$ az új arány, $h_{t,k}^o$ a régi, $v_{t,k}$ pedig egy normális eloszlású valószínűségi változó $[v_{t,k} - N(\mu, \sigma)]$ realizációja.

A szimulációk eredményei

A „hőmérséklet” (γ) kivételével a közölt szimulációkban a modelleírásban szereplő paraméterek értéke ugyanaz. Ezeket az 1. táblázatban mutatjuk be.

Az adott paraméterek mellett az aranykori aggregált tőke mennyiség 96 745,5, az aggregált aranykori fogyasztás pedig 982,1135. A fogyasztási és tőke adatokat a táblázatokban és az ábrákon is a megfelelő aranykori egységekben (szorozva 100-zal) fejezzük ki. Tehát például $K = 120$ jelentése: az aranykori tőke 120 százaléka. Mint látni fogjuk, a szimulációk eredményeként adódó idősorok, úgy tűnik, függenek a tőke kezdő értékétől. A következőkben az aranykori aggregált tőkével mint kezdő tőkével számolunk.

Az időperiódus interpretációját az amortizációs ráta alapján végezhetjük el. A 0,005 (0,5 százalék) durván havi amortizációs rátának feleltethető meg.

1. táblázat

A rögzített paraméterek értéke

Paraméter	Jelentése	Érték
N	az ágensek száma	200
p	az alacsony munkakínálati állapot megmaradásának valószínűsége	0,4
q	a magas munkakínálati állapot megmaradásának valószínűsége	0,95
L_1	alacsony munkakínálat	0,1
L_2	magas munkakínálat	1
α	a munka részesedése a jövedelemből	0,67
δ	amortizációs ráta	0,005
ρ_1	az ágensek közötti kapcsolat valószínűsége	0,05
ρ_2	a kapcsolatváltás valószínűsége	0,01
ρ_3	a típusváltás lehetőségének valószínűsége	0,001
ρ_4	az optimizmus foka mutációjának valószínűsége	0,01
ρ_5	a kívánt vagyonpuffer mutációjának valószínűsége	0,01
dg	a reguláris kezdeti gráf fokszáma	6
$\bar{\chi}$	az optimizmus fokának felső korlátja	1,1
$\underline{\chi}$	az optimizmus fokának alsó korlátja	0,9
θ	memóriaparaméter	0,8
h	kívánt vagyonpuffer	120
ω	marzsparaméter a hitelpiacon	0,002
λ	életre valóssági memória paramétere	0,9
φ	optimizmusmemória paramétere	0,95
μ	kívánt vagyonpuffer mutációs paraméter (várható érték)	0
σ	kívánt vagyonpuffer mutációs paraméter (variancia)	0,02

A szimulációk értelmezése

A makroökonometriában használt módszerek [például a vektor-autoregresszív (VAR) modellek] többnyire felteszik az empirikus makroökonómiai idősorok ergodicitását. Hagyományos makroökonómiai elméleti modellekből generált idősorok általában stacionáriusak, sőt ergodikusak. Ágensalapú makromodellek esetében az analitikus eredmények hiánya miatt ezek a tulajdonságok csak tapasztalat útján állapíthatók meg, vagyis a szimulált idősorok formális vagy informális tesztelésével. Intuitívan egy modell stacionárius, ha egy szimulált idősor minden részidősora hosszú távon „sztochasztikusan azonos”. Elméletileg léteznek olyan stacionárius idősorok is, amelyek nem ergodikusak, vagyis amelyek esetében ugyan egy adott szimuláció különböző „részei” hasonlóak, de különböző szimulációk eredményei lényeges eltéréseket mutatnak. (Például minden szimulációban az átlag konvergál, de ezek az átlagok nem

ugyanahhoz a számhoz konvergálnak.) A stacionaritás és ergodicitás hangsúlyozottan aszimptotikus tulajdonságok, meglétük vagy hiányuk véges mintából nem állapítható meg 1 valószínűséggel, de léteznek tesztek ezek „eldöntésére”. A heterogenitás miatt az ágensalapú modellek dimenziószáma nagy, s ezért tesztjei teljes részletességgel nem is végezhetőek el. Emiatt általában bizonyos aggregált változók hosszú távú viselkedését szokás vizsgálni.

Esetünkben a kézenfekvő aggregált állapotváltozó az összes tőke mennyisége. Ennek alakulása alapján próbálunk a modell hosszú távú viselkedéséről állításokat tenni. Itt most csak az első momentumra, azaz a várható értékre fogunk koncentrálni. Ha az ergodicitás biztosított, akkor elegendő lenne egyetlen „nagyon hosszú” szimulációt lefuttatnunk egy paraméteregyüttesre, és az abból számított átlagok konzisztens becslést adnának az aggregált stacionárius eloszlásról. Ha az ergodicitás nem teljesül, de a stacionaritás igen, akkor az egyes hosszú futásokból elvben csak „lokális” információt kaphatunk, minden szimuláció (amelynek egyébként ugyanazok a paraméterei) átlagai, bár értelmezhetőek várható értéként, eltérők lehetnek, és így nem azonosíthatók az „egész” folyamat várható értékével. Ha az ergodicitás teljesüléséről nem vagyunk biztosak, megtehetjük, hogy egy adott paraméteregyütteshez sok hosszú (de nem „nagyon hosszú”) szimulációt futtatunk, és az ezek átlagaiból képzett eloszlást vizsgáljuk. A hosszú szimuláció esetünkben 5000 periódust jelent, amit több száz évnek feleltethetünk meg valós időben, míg a nagyon hosszút 50 000 periódusként, amit tehát több ezer évnek. Láthatóan ezek az időtávok meghaladják azt, ami közgazdasági szempontból releváns, ám nem biztos, hogy az elméleti aszimptoticitás szempontjából is elegendően hosszúnak tekinthető-e. Mindenesetre több módszert alkalmazunk vizsgálatukra: formális nem paraméteres stacionaritási és ergodicitási tesztek, paraméteres stacionaritási tesztek, egyes szimulált idősorok vizuális megfigyelését és összehasonlítását, egyszerű átlagok számítását és az eloszlásaik összehasonlítását.

NEM PARAMETRIKUS STACIONARITÁSI TESZTEK • Az irodalom alapján több nem parametrikus teszt is használható a stacionaritás vizsgálatára (lásd *Gibbons* [1985]). Mi egy olyan módszert választottunk, amelyet többször alkalmaztak ágensalapú modellekre, és amely a *Wald-Wolfowitz*-teszt (*Wald-Wolfowitz* [1940]) kiterjesztése (*Grazzini* [2012]).

A *Wald-Wolfowitz*-próba („futamteszt”) azt vizsgálja, hogy két minta azonos eloszlásból származik-e. A kiterjesztése azt teszteli, hogy egy függvény jól illeszkedik-e a megfigyelések egy halmazához – jó illeszkedés esetén a megfigyeléseknek véletlenszerűen kell szóródniuk a függvény fölött és alatt, függetlenül a hibák eloszlásától. Adott becslt függvény mellett 1 szimbólumot rendelünk a függvény fölötti, 0 szimbólumot a függvény alatti megfigyelésekhez. Futamnak az azonos szimbólumok sorozatát tekintjük, amelyet az ellentétes szimbólum előz meg és követ. A szimbólumok sorozata nem véletlenszerű, ha a futamok száma túl nagy vagy túl alacsony. Ebben az esetben a nullhipotézist, amely szerint a megfigyelések véletlenszerűen szóródnak az adott függvény körül, elutasítjuk (*Gibbons* [1985]).

A stacionaritás teszteléséhez a modellt 50 500 időszakra szimuláltuk, és az aggregált tőke idősorát 100 egyenlő szakaszra bontottuk az első 500 időszak elhagyása után.

Kiszámoltuk mindegyik szakasz átlagát, és megvizsgáltuk, hogy a részminták átlagai a teljes idősor átlagánál (ez az a függvény, amelynek illeszkedését teszteljük) nagyobbak (1 szimbólum) vagy alacsonyabbak (0 szimbólum). A szimbólumokra a futamtesztet kétoldali alternatív hipotézissel alkalmaztuk (lásd *Grazzini* [2012]). Amennyiben a részminták átlagai véletlenszerűen szóródnak a teljes átlag körül, a stacionaritás nullhipotézisét az első momentum esetén nem tudjuk elutasítani.

A tesztet $\gamma = 0,001$, $\gamma = 10$ és $\gamma = 1000$ értékek mellett végeztük el, és az minden szignifikanciaszinten a stacionaritás nullhipotézisét visszautasította. Nem parametrikus tesztek alapján tehát az idősorok nem stacionárusnak tűnnek.

PARAMETRIKUS STACIONARITÁSI TESZTEK • A stacionaritás vizsgálatára hagyományosan alkalmaznak parametrikus tesztek is, amelyek közül az egyik leggyakrabban használtat, a kibővített Dickey–Fuller-próbát (*Dickey–Fuller* [1979]) mi is elvégeztük a középső 10 000 időszak adatain, $\gamma = 0,001$, $\gamma = 10$ és $\gamma = 1000$ esetben (2. táblázat). A teszt az idősor általános autoregresszív reprezentációján vizsgálja az egységgyök jelenlétét. Nullhipotézise – szemben a Wald–Wolfowitz-próbával – az idősor nem stacionaritását jelenti. A nem parametrikus tesztekkel ellentétben azonban az eredmények alapján az egységgyök-folyamatot (a nem stacionaritást) $\gamma = 0,001$ mellett minden szignifikanciaszinten elutasíthatjuk, $\gamma = 10$ és $\gamma = 1000$ mellett azonban csak 7,27, illetve 15,59 százalékos szignifikanciaszinten tehetjük meg ugyanezt.

2. táblázat

A kibővített Dickey–Fuller-próbák eredményei $\gamma = 0,001$, $\gamma = 10$ és $\gamma = 1000$ esetben

	γ		
	0,001	10	1000
McKinnon-féle p -érték	0,0000	0,0727	0,1559

ERGODICITÁSI TESZTEK • Az ergodicitás teszteléséhez ismét a futamtesztet alkalmaztuk, de ezúttal az eredeti, *Wald–Wolfowitz* [1940] által javasolt formában. A teszt első lépései hasonlóak a stacionaritás tesztjéhez: újra 50 500 időszakra szimuláljuk a modellt, az aggregált tőke hosszú idősorát 100 egyenlő szakaszra osztjuk az első 500 időszak elhagyásával, és minden szakasznak kiszámoljuk az átlagát. A teszt első mintáját (x_t) a 100 részminta átlagából alakítjuk ki. Második lépésként az exogén sztochasztikus változók 100 darab különböző realizációira 1000 időszakos idősort generáltunk, és mindegyik így generált idősorra kiszámoltuk az aggregált tőke átlagát az utolsó 500 időszakra. Az ergodicitás tesztjének második mintáját a 100 mintaátlag képezi (y_t). Ezt követően egyesítettük a két mintát (x_t és y_t), és egy olyan Z halmazt állítottunk elő belőlük, amely x_t és y_t elemeit növekvő sorrendbe rendezi. Végül egy V sorozatot képeztünk a következőképpen: $v_i = 0$, ha $z_i \in x_t$ és $v_i = 1$, ha $z_i \in y_t$. A sorozatra alkalmaztuk a futamtesztet egyoldali alternatív hipotézissel, ahol a nullhipotézis szerint x_t és y_t átlagok azonosak (lásd *Grazzini* [2012]), és az adatgeneráló folyamat ergodik.

Az ergodicitás nullhipotézisét mindegyik értékre, minden szignifikanciaszinten elutasítjuk, az eredmények tehát itt egyértelműen az ergodicitás hiányára utalnak.

INFORMÁLIS TESZTEK • Ha nincs stacionaritás (ergodicitás), az lényegében azt jelenti, hogy a modell pályája hosszú távon sem független a kezdeti feltételektől. Ezt informálisan tesztelhetjük úgy is, hogy különböző aggregált kezdő tőkékhöz több szimulációt számolunk, és az egyes szimulációk átlagainak eloszlását vizsgáljuk meg. Mivel 20 szimulációról van szó, az eloszlásnak csak két tulajdonságát tekintjük paraméterkombinációnként: az átlagot és a terjedelmet. A 3. táblázatból látszik, hogy különböző hőmérsékletek mellett az egyes szimulációk átlagai jól megkülönböztethetők, majdnem diszjunkt intervallumokban foglalnak helyet. (Alacsony és közepes hőmérsékleteknél az intervallumok elég „kicsik”).

3. táblázat

Az aggregált tőkeállomány szimulációnkénti átlagainak átlaga, minimuma és maximuma a „hőmérséklet” (γ) különböző értékei mellett, az aranykori tőkeállomány százalékában

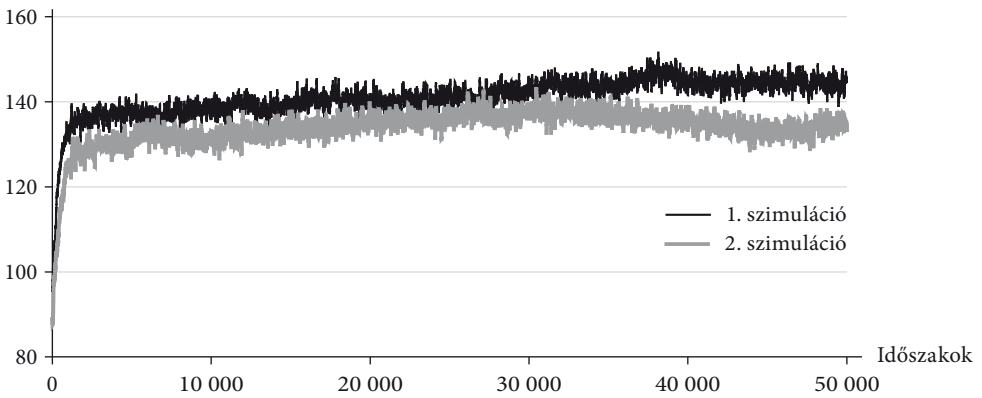
	γ		
	0,001	10	1000
Átlag	130,51	115,45	100,15
Minimum	127,10	105,80	79,93
Maximum	133,76	124,89	113,21

Végül informális tesztként végezzünk vizuális vizsgálatot!

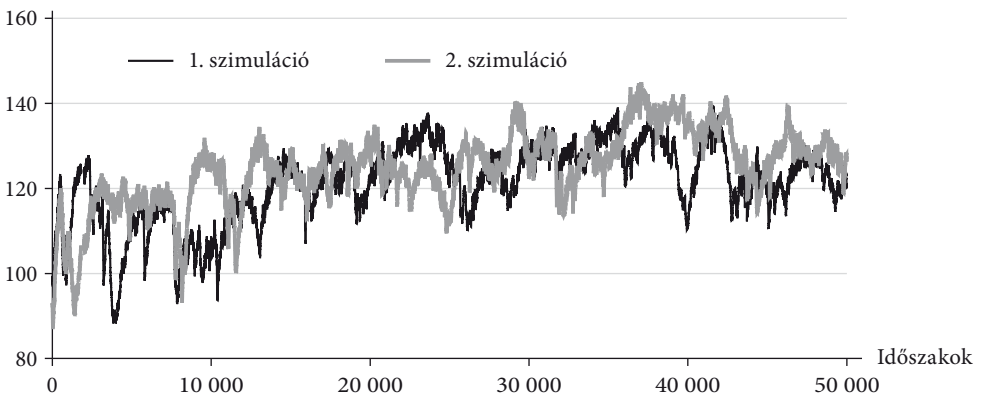
Az 1. ábráról leolvasható, hogy $\gamma = 0,001$ esetén az általunk vizsgált elég hosszú horizonton nem teljesül az ergodicitás (a két görbe nem téveszthető össze), és szigorúan véve a stacionaritás sem, mivel az átlagoknak gyenge trendjük van. Ugyanakkor a trend melletti szóródás elég kicsi. Másfelől a 2. és 3. ábrán azt látjuk, hogy $\gamma = 10$ -nél és $\gamma = 1000$ -nél az ergodicitás nem teljesül, de a stacionaritás talán igen. Itt nincs gyenge trend, viszont jóval nagyobb a szóródás, tehát gyanítható, hogy a stacionaritás látszata inkább a „zajból” adódik.

Milyen következtetések vonhatók le ezekből a vizsgálatoktól? A közgazdaságilag releváns időhorizonton a modell ténylegesen nem stacionárius (tehát nem ergodikus), vagyis egy 5000-es szimulációból kapott átlag nem ad pontos becslést az „igazi” várható értékről, még akkor sem, ha az létezik. Ugyanakkor ez a pontatlanság (ha létezik várható érték) nem feltétlenül túl nagy, és akár létezik várható érték, akár nem, a szimulációs átlagok eloszlása informatív. Az eredmények nem esetlegesek, vagy ha úgy tetszik, jó eséllyel jósolhatjuk meg a modell hosszú távú viselkedését nagyszárendi és kvalitatív szinten a paraméterek függvényében.

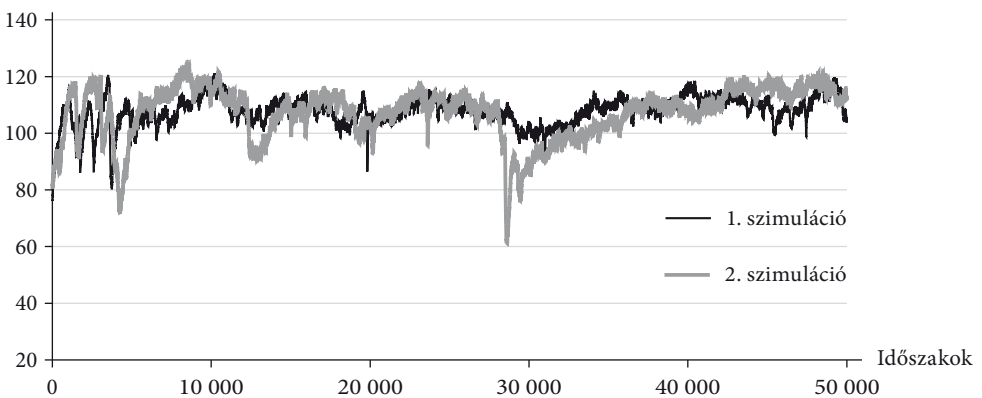
1. ábra

Az aggregált tőkeállomány alakulása $\gamma = 0,001$ esetén

2. ábra

Az aggregált tőkeállomány alakulása $\gamma = 10$ esetén

3. ábra

Az aggregált tőkeállomány alakulása $\gamma = 1000$ esetén

A típusok életképessége és a gazdaság teljesítménye

ÉLETKÉPESSÉGI RANGSOR • Legfontosabb kérdésünk az, hogy van-e és milyen hatása van a szelekciós nyomásnak arra, hogy hosszú távon mely megtakarítási típusok maradnak fenn a gazdaságban. Ezt vizsgálhatjuk úgy, hogy a „hőmérséklet” függvényében tekintjük az egyes típusok átlagos számát. Három „fázist” találtunk. Alacsony γ (nagy szelekciós nyomás) esetén szinte kizárólag prudens típusú háztartások maradnak fenn. A másik véglet a nagy γ , ahol a szelekció gyakorlatilag véletlenszerű, és mindhárom típus közelítően egyforma arányban fordul elő a lakosságban. Végül közepes szelekciós nyomás esetében az egyes típusok arányának sorrendje a következő: a legtöbben a prudens ágensek vannak, őket követik a rövidlátók, végül legkisebb a permanensjövedelem-fogyasztók aránya. (A 4. táblázat három kiválasztott γ esetére mutatja a megoszlásokat.) Tehát az „életképességi” rangsor: 1. prudens, 2. rövidlátó, 3. permanens jövedelem.

4. táblázat

Az egyes háztartástípusok (prudens, rövidlátó és permanens jövedelem) arányának szimulációkénti átlagai: az átlagok átlaga, minimuma és maximuma a „hőmérséklet” (γ) különböző értékei mellett

	γ		
	0,001	10	1000
Prudens			
Átlag	0,9396	0,4485	0,3355
Minimum	0,9303	0,3644	0,3001
Maximum	0,9565	0,5967	0,3821
Rövidlátó			
Átlag	0,0256	0,3554	0,3428
Minimum	0,0134	0,2190	0,2897
Maximum	0,0348	0,5134	0,3899
Permanens jövedelem			
Átlag	0,3490	0,1961	0,3216
Minimum	0,0208	0,1126	0,2849
Maximum	0,0491	0,3787	0,3714

ÉLETKÉPESSÉG ÉS TÁRSADALMI TELJESÍTMÉNY • Ez az életképességi rangsor azonban az egyénekre vonatkozik. Igaz-e az, hogy a nagy szelekciós nyomás javítja az egész társadalom teljesítményét is? Erre nem egyértelmű a válasz. Ha az átlagos tőkeállományokat nézzük, akkor azt látjuk, hogy valóban az erős szelekciós nyomásnál a legnagyobb a tőkeállomány, ami a szelekciós nyomás csökkenésével zsugorodik (3. táblázat), de a fogyasztásnál (5. táblázat) a sorrend – ha nem is nagymértékben – megfordul.

5. táblázat

Az aggregált fogyasztás szimulációnkénti átlagainak átlaga, minimuma és maximuma a „hőmérséklet” (γ) különböző értékei mellett, az aranykori fogyasztás százalékában

	γ		
	0,001	10	1000
Átlag	99,10	99,90	100,09
Minimum	98,36	99,15	99,15
Maximum	99,62	100,79	100,97

Láthatóan a legrosszabb és a legjobb futásokban is az alacsony szelekciós nyomású változat jobb átlagos eredményeket produkált, mint a közepes, és a közepes pedig jobbat, mint a magas. Az átlagos fogyasztás mindenképpen jobb mércéjének tűnik a gazdasági teljesítménynek, mint a tőkefelhalmozás nagysága, és ebben a metrikában mérve egy adott (zárt) gazdaság számára nem az a legjobb, ha nagy a szelekciós nyomás, és a „relatív” életképesebb prudens fogyasztók vannak túlsúlyban. Mivel magyarázható ez az első látásra furcsának tűnő jelenség?

TÚLZOTT FELHALMOZÁSI TENDENCIA • Megérthetjük, ha figyelembe vesszük, hogy semmi nem zárja ki a túlzott mértékű tőkefelhalmozást a modellben, vagyis azt az állapotot, ahol a tőke határterméke kisebb, mint az amortizációs ráta, ami az alapparaméterezésnél 0,005. A 3. táblázat azt mutatja, hogy szimulált gazdaságainkban van túlzott felhalmozási tendencia. Láthatóan a túlzott tőkefelhalmozás jelensége nagyobb gyakorisággal fordul elő a nagyobb szelekciós nyomású esetekben. Úgyis fogalmazhatnánk, hogy a nagy szelekciós nyomás túlságosan sok prudens háztartást választ ki, ami a gazdaság egésze szempontjából negatív nettó tőkehozamhoz, azaz túl sok tőkéhez vezet. (A csak munkajövedelemből élők szempontjából a tőke mennyiségének növekedése egyértelműen pozitív hatású.) Vegyük figyelembe, hogy a puffer nagysága a modellben endogén, vagyis a prudens háztartások hosszú távon endogén módon, szelekció útján határozzák meg azt, hogy mekkora puffervagyont tartanak.

A 6. táblázat azt mutatja, hogy nagyobb szelekciós nyomás esetén hosszú távon a pufferek mérete nagyobb, vagyis a minél nagyobb biztonságra törekvő ágenssek választódnak ki. Ez a megfigyelés azt mutatja, hogy társadalmi szempontból hatékonyságnövelő lehet, ha vannak olyan háztartások is, amelyek némiképpen ellensúlyozzák a prudens háztartások túlzott felhalmozási tendenciáit. Ugyanakkor a kapcsolat nem monoton, közepes szelekciós nyomásnál a legnagyobbak a vagyonpufferek. A tőke azért nem a közepes hőmérsékletnél a legnagyobb, mert a prudens háztartások vagyona tartalmazza az általuk nyújtott hitelek állományát is. A 7. táblázat mutatja, hogy γ alacsony értékénél a hitelállomány alacsony, míg közepes értékénél, ahol már vannak nem elhanyagolható mértékben rövidlító háztartások is, magasabb.

6. táblázat

A pufferméret szimulációnkénti átlagainak átlaga, minimuma és maximuma a „hőmérséklet” (γ) különböző értékei mellett

	γ		
	0,001	10	1000
Átlag	114,18	153,31	126,68
Minimum	105,85	116,35	94,07
Maximum	127,63	181,66	145,36

7. táblázat

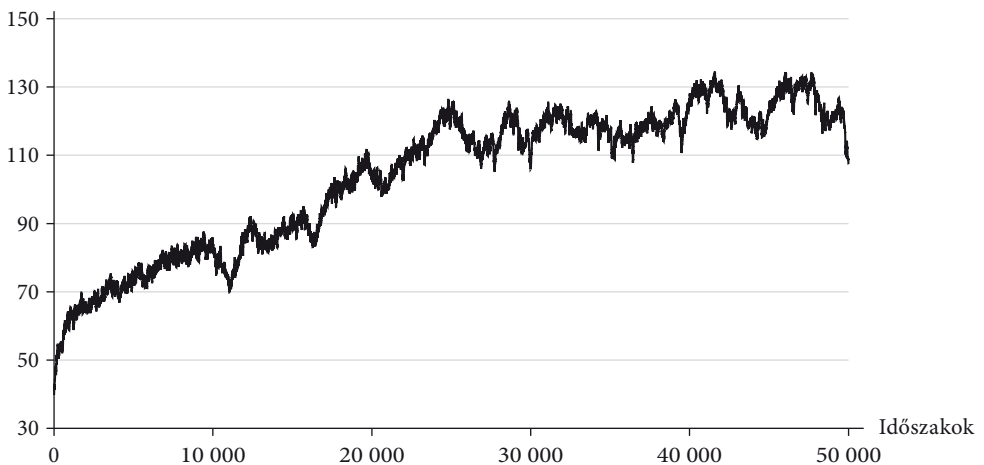
Az adósságráta (D/Y) szimulációnkénti átlagainak átlaga, minimuma és maximuma a „hőmérséklet” (γ) különböző értékei mellett

	γ		
	0,001	10	1000
Átlag	0,8894	2,3551	2,5111
Minimum	0,6675	2,039	2,3484
Maximum	1,0563	2,669	2,7113

Felvetődhet, hogy a túlzott mértékű beruházási tendenciát azt okozza, hogy a kezdeti puffereeloszlás várható értékét túl nagyra állítjuk (120 periódus). Ezért megnéztük, hogy mi történik, amikor ezt a negyedére csökkentjük, azaz 30 periódusra. A 4. ábrából láthatóan hosszú távon a tőkeállomány itt is mintegy 20 százalékkal meghaladja az aranykorit a vagyonpufferek endogén növekedésének köszönhetően.

4. ábra

Az aggregált tőkeállomány alakulása $\bar{h} = 30$ és $\gamma = 10$ esetén



KATASZTRÓFÁK ÉS A TÚLZOTT FELHALMOZÁS • Első látásra furcsa lehet, hogy túlzott felhalmozási tendenciát találunk. Megszoktuk, hogy inkább attól félünk, túl alacsonyak a megtakarítások. Nem szabad azonban elfelejtenünk, hogy itt zárt gazdaságot vizsgálunk, és a világ gazdaság például a 21. század elején is megtakarítási túlkínálatot (*savings glut*) mutatott, vagyis az alacsony megtakarítási ráták lokális problémaként merültek fel. Hosszabb történelmi távlatban már gyanús lehet az a következtetés, hogy az embereknek hajlamuk van a túlzott tőkefelhalmozásra. Modellünk célja nem egy általános gazdaságtörténelmi magyarázat, de megvizsgálunk egy ehhez kapcsolódó részkérdést. A történelem során gyakran voltak olyan katasztrófák (természeti vagy háborús), amelyek a tőke mennyiségének hirtelen csökkenéséhez vezettek. Egy olyan modellt is szimuláltunk (mindhárom fázisban), ahol 1 százalékos valószínűséggel valamely periódusban az aggregált tőke 10 százalékkal csökken (8. táblázat). Azt kapjuk, hogy ez a jelenség a kívánt pufferszintet csökkenti (nem éri meg egyénileg nagy tőkét felhalmozni) (9. táblázat). Tehát a túlzott felhalmozási tendenciát korlátozhatja a tőke tényleges termelékenységének csökkenése, vagyis sok, nagy katasztrófával terhelt időszakokban nem jut feltétlenül érvényre a túlzott felhalmozási tendencia.

8. táblázat

Az aggregált tőkeállomány szimulációnkénti átlagainak átlaga, minimuma és maximuma a „hőmérséklet” (γ) különböző értékei mellett, katasztrófák esetén (az aranykori tőkeállomány százalékában)

	γ		
	0,001	10	1000
Átlag	111,39	90,41	78,99
Minimum	104,85	79,29	69,14
Maximum	120,37	99,16	88,56

9. táblázat

A pufferméret szimulációnkénti átlagainak átlaga, minimuma és maximuma a „hőmérséklet” (γ) különböző értékei mellett, katasztrófák esetén

	γ		
	0,001	10	1000
Átlag	105,51	115,57	100,97
Minimum	96,26	99,41	77,87
Maximum	117,88	132,46	115,36

KOCKÁZAT • Eddigi eredményeink mintha azt mutatnák, hogy a társadalmi és az egyéni racionalitás ellentmond egymásnak. Van-e valamilyen kimutatható társadalmi előnye annak, ha erősebb a szelekciós kényszer? Igen, mégpedig az, hogy erősebb szelekciós kényszer esetén az egyes pályák sokkal stabilabbak, mint gyenge

szelekciós kényszernél. Az 1–3. ábrákon jól látszik, hogy az egyes szimulációkban jóval nagyobb ingadozások vannak olyankor, amikor nem elhanyagolható mértékben vannak rövidlátó és permanensjövedelem-típusú fogyasztók is a gazdaságban, betudhatóan az enyhébb szelekciós kényszernek. Ha tehát nem csak a hosszú távú átlag számít egy zárt populáció gazdasági sikeressége szempontjából, akkor az egyéni és társadalmi racionalitás már inkább összhangban van egymással. Ha az alacsony γ érték melletti szimulációt túl stabilnak tartanánk, akkor emlékezzünk rá, hogy a modell csak egyéni exogén bizonytalanságot tartalmaz – egy klasszikus modellből generált idősorok majdnem determinisztikusak lennének.

INTRANZITÍV ÉLETKÉPESSÉG • Megvizsgáltuk azt is, hogy mi történne, ha a három típus helyett eleve csak kettő létezne. A 10. táblázat mutatja a kialakuló népességmegoszlásokat közepes szelekciós nyomásnál, amikor is egy-egy „nagyon hosszú” (50 000-es) szimulációt futtattunk.

10. táblázat

Az egyes háztartástípusok (prudens, rövidlátó és permanens jövedelem) arányának szimulációkénti átlagai ($Y = 10$), amikor egy típus nem vesz részt a „versenyben”

	Típuspárok		
	permanens jövedelem–rövidlátó	permanens jövedelem–prudens	prudens–rövidlátó
Prudens	0	0,7556	0,388
Rövidlátó	0,2519	0	0,612
Permanens jövedelem	0,7481	0,2444	0

Láthatóan a három típus „körbeveri” egymást. A permanens jövedelem–rövidlátó kombinációknak van egy speciális vonásuk: nagyon hosszú szimulációk esetén szinte biztosan van egy olyan periódus, ahol az aggregált tőke állománya 0-ra csökken. Mondhatjuk azt is, hogy prudens fogyasztók nélkül mintegy hosszabb távon életképtelen a gazdaság. Mi történik, ha csak prudens és rövidlátó fogyasztók vannak? Ilyenkor többségben lesznek a rövidlátó fogyasztók, ami – talán meglepő módon, de – nem növeli a fogyasztás ingadozását. Úgy tűnik tehát, hogy a prudens és a rövidlátó típusnak is van „hasznos” funkciója. Prudensek nélkül hosszú távon nincs tőkefelhalmozás, a rövidlátók mérséklék a túlzott felhalmozási tendenciát. A permanensjövedelem-típusú fogyasztók életképesek, részben kiszorítják a rövidlátó típusokat, de nekik csak akkor lenne „pozitív” szerepük, ha a tőkefelhalmozás túl alacsony lenne.

A HITELKORLÁT SZEREPE • Az alapmodellben alapvetően nem foglalkoztunk a tőkepiac szerepével a megtakarításokban. A hitelkorlátot elég szigorúra vettük ahhoz, hogy az eredményként adódó adósságráták csak nagyon alacsonyak legyenek (7. táblázat). Mint várható is, az adósság túlnyomó részét a rövidlátó fogyasztók „vállalják”. Kipróbáltunk azonban olyan változatokat is, ahol megengedünk jóval

nagyobb („irracionalisan” nagy) eladósodást is, az adósságkorlátot az alapváltozatbeli 10-szeresére növelve. Az ebben a változatban kialakuló adósság szintek jóval nagyobbak, habár nem érik el az eredeti 10-szeresét, és természetesen újra a rövidlátó fogyasztók vesznek fel főként hitelt (11. táblázat). A hitelkorlát oldása nem vezet az átlagfogyasztás növekedéséhez, hanem inkább csökkenti azt. Érdekes azonban a mechanizmus: az átlagfogyasztás csökkenésének oka nem az alacsony mértékű felhalmozás, hanem a még túlzottabb mértékű felhalmozás (12. táblázat).

11. táblázat

Az adósságráta (D/Y) szimulációnkénti átlagainak átlaga, minimuma és maximuma a „hőmérséklet” (γ) különböző értékei, valamint alacsony és magas hitelkorlát (\bar{D}) mellett

	γ		
	0,001	10	1000
Alacsony \bar{D}			
Átlag	0,8894	2,3551	2,5111
Minimum	0,6675	2,039	2,3484
Maximum	1,0563	2,669	2,7113
Magas \bar{D}			
Átlag	3,5668	4,9472	5,4875
Minimum	3,4402	4,4766	5,3843
Maximum	3,7366	5,7069	5,5855

12. táblázat

Az aggregált tőkeállomány szimulációnkénti átlagainak átlaga, minimuma és maximuma a „hőmérséklet” (γ) különböző értékei, valamint alacsony és magas hitelkorlát (\bar{D}) mellett

	γ		
	0,001	10	1000
Alacsony \bar{D}			
Átlag	130,51	115,45	100,15
Minimum	127,10	105,80	79,93
Maximum	133,76	124,89	113,21
Magas \bar{D}			
Átlag	154,26	226,57	234,77
Minimum	149,96	198,49	159,22
Maximum	162,05	263,26	270,25

Tehát, ha a tőkepiacok „megőrülnek” (a modellben „centralizált” tőkepiac van, ami szinte egyetlen rendszerként funkcionál, nem vezethető vissza a működése az egyes

ágensek viselkedésére), akkor az ágensek társadalmilag még kevésbé hatékony túlzott felhalmozással válaszolnak, ami mintegy lehetővé teszi a rövidlátók általi még erőteljesebb „kizsákmányolásukat”. (Itt a dolgozó „zsákmányolja ki” a tőketulajdonost.) Természetesen előfordulhatna az is, hogy az aranykor felé mutatna a változás, de ahhoz túlzottan alacsony felhalmozású alappályából kellene indulnunk. Ha ez előállna, például nagy katasztrófák (ténylegesen alacsony hosszú távú tőkehozam) hatására, akkor a tőkepiaci „örültség” hatása összességében akár még pozitív is lehetne.

Összegzés

Úgy tűnik, csak rendkívül erős szelekciós nyomás mellett mondhatjuk azt, hogy a prudens típusú háztartás egyértelműen kiszorítja a másik kettőt. A megtakarításokkal kapcsolatos eddigi kutatások eredményeit azonban nehéz lenne úgy interpretálni, hogy a gazdaságok kizárólag prudens háztartásokból állnak. A (furcsa módon) második legéletképesebbnek tűnő rövidlátó típusnak feltétlenül helye van egy ágensalapú makromodellben. A rövidlátó típus konkrét modellezésére a jelen tanulmányban megfogalmazott változat nem feltétlenül az egyetlen célravezető, itt még sok kutatásra van szükség. Amennyiben kihagyjuk a permanensjövedelem-típusú háztartásokat, akkor arra számíthatunk, hogy a rövidlátó típusnak kell „dominálnia”.

Szokásos tőkehatékonyság ($\alpha = 0,33$) mellett a prudens típus túlzott mértékűvé növeli a gazdaság beruházási tendenciáját. Ha az az empirikus alapfeltevésünk, hogy a reálkamatláb nagyobb, mint a növekedési ütem, akkor ezt más tényezőkből kell levezetni – nem lehet a háztartások viselkedésére (preferenciáira) hivatkozni, mint a hagyományos modellekben, ahol az időpreferencia-paraméternek kulcsszerepe van abban, hogy a gazdaság az aranykori megtakarítási ráta melyik oldalán helyezkedik el.

Az ágensalapú makromodellek általában mellőzni szokták a háztartási adósság (fogyasztási hitelek) problémáját. Ezek azonban korántsem elhanyagolhatók a valós gazdaságok életében. Szimulációink ezzel kapcsolatban egy talán meglepő eredménnyel jártak. A hitelkorlátok oldása nem vezet az aggregált megtakarítási ráta hosszú távú csökkenéséhez, hanem a növekedéséhez.

Számos általánosítási lehetőségünk van, amivel vizsgálatainkat kiterjeszthetjük, illetve eredményeink robusztusságát ellenőrizhetjük a jövőben. Például kérdés, hogy nem túlságosan restriktív-e a Cobb–Douglas-feltevés, illetve hogy alternatív szelekciós-adaptációs mechanizmusok is hasonló eredményeket adnak-e.

Hivatkozások

- AIYAGARI, S.-R. [1994]: Uninsured Idiosyncratic Risk and Aggregate Saving. *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 109. No. 3. 659–684. o. <http://dx.doi.org/10.2307/2118417>.
- ARIFOVIC, J. [2000]: Evolutionary algorithms in macroeconomic models. *Macroeconomic Dynamics*, Vol. 4. No. 3. 373–414. o. <http://dx.doi.org/10.1017/s1365100500016059>.

- BEWLEY, T. F. [1980]: The permanent income hypothesis and long-run economic stability. *Journal of Economic Theory*, Vol. 22. No. 3. 377–394. o. [http://dx.doi.org/10.1016/0022-0531\(80\)90049-6](http://dx.doi.org/10.1016/0022-0531(80)90049-6).
- BIRKIN, M.–WU, B. [2012]: A review of microsimulation and hybrid agent-based approaches. *Megjelent: Agent-based models of geographical systems*. Springer, 51–68. o. http://dx.doi.org/10.1007/978-90-481-8927-4_3.
- BRENNER, T. [2006]: Agent learning representation: Advice on modelling economic learning. *Megjelent: Handbook of Computational Economics*, 2. kötet, 895–947. o. [http://dx.doi.org/10.1016/s1574-0021\(05\)02018-6](http://dx.doi.org/10.1016/s1574-0021(05)02018-6).
- BROCK, W. A.–HOMMES, C. [1997]: A Rational Route to Randomness. *Econometrica*, Vol. 65. No. 5. 1059–1096. o. <http://dx.doi.org/10.2307/2171879>.
- CAMPBELL, J. Y.–MANKIW, N. G. [1989]: Consumption, income and interest rates: Reinterpreting the time series evidence. In *NBER Macroeconomics Annual 1989*. Vol. 4. 185–246. o. MIT Press. <http://dx.doi.org/10.2307/3584973>.
- CARROLL, C. D.–SUMMERS, L. H. [1991]: Consumption growth parallels income growth: some new evidence. *Megjelent: Bernheim, D. B.–Shoven J. B. (szerk.): National saving and economic performance*. University of Chicago Press, 305–348. o. <http://dx.doi.org/10.3386/w3090>.
- CARROLL, C. D. [1996]: Buffer-stock saving and the life cycle/permanent income hypothesis. Working Paper, No. 5788. National Bureau of Economic Research, <http://dx.doi.org/10.3386/w5788>.
- DEISSENBERG, C.–VAN DER HOOG, S.–DAWID, H. [2008]: EURACE: A massively parallel agent-based model of the European economy. *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 204. No. 2. 541–552. o. <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2008.05.116>.
- DELLI GATTI, D.–DESIDERIO, S.–GAFFEO, E.–CIRILLO, P.–GALLEGATI, M. [2011]: *Macroeconomics from the Bottom-up. Description*. New Economic Windows, Springer. <http://dx.doi.org/10.1007/978-88-470-1971-3>.
- DICKEY, D. A.–FULLER, W. A. [1979]: Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 74. No. 366a, 427–431. o. <http://dx.doi.org/10.1080/01621459.1979.10482531>.
- DOSI, G.–FAGIOLIO, G.–NAPOLETANO, M.–ROVENTINI, A. [2013]: Income distribution, credit and fiscal policies in an agent-based Keynesian model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 37. No. 8. 1598–1625. o. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jedc.2012.11.008>.
- DUFFY, J. [2006]: Agent-based models and human subject experiments. *Megjelent: Handbook of Computational Economics*, 2. kötet, 949–1011. o. [http://dx.doi.org/10.1016/s1574-0021\(05\)02019-8](http://dx.doi.org/10.1016/s1574-0021(05)02019-8).
- ERDŐS PÁL–RÉNYI ALFRÉD [1959]: On Random Graphs. *Publicationes Mathematicae*, 6. 290–297. o.
- EVANS, G. W.–HONKAPOHJA, S. [1999]: Learning Dynamics. *Megjelent: Taylor, J. B.–Woodford, M. (szerk.): Handbook of Macroeconomics*, I. Vol. A, 7. fejezet, Elsevier. [http://dx.doi.org/10.1016/s1574-0048\(99\)01010-1](http://dx.doi.org/10.1016/s1574-0048(99)01010-1).
- FUDENBERG, D.–LEVINE, D. K. [2006]: A dual-self model of impulse control. *The American Economic Review*, Vol. 96. No. 5. 1449–1476. o. <http://dx.doi.org/10.1257/aer.96.5.1449>.
- GIBBONS, J. D. [1985]: *Nonparametric Statistical Inference*. Marcel Dekker Inc., New York, 2. kiadás.
- GILBERT, G. N. [2008]: Agent-based models. *Sage, Quantitative Applications in the Social Sciences*, No. 153. <http://dx.doi.org/10.4135/9781412983259>.

- GRAZZINI, J. [2012]: Analysis of the Emergent Properties: Stationarity and Ergodicity. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, Vol. 15. No. 2. 7. <http://dx.doi.org/10.18564/jasss.1929>.
- HALL, R. E.–MISHKIN, F. S. [1982]: The Sensitivity of Consumption to Transitory Income: Estimates from Panel Data on Households. *Econometrica*, Vol. 50. No. 2. 461–481. o. <http://dx.doi.org/10.2307/1912638>.
- HEATH, B.–HILL, R.–CIARALLO, F. [2009]: A Survey of Agent-Based Modeling Practices (January 1998 to July 2008). *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, Vol. 12. No. 4. 9. <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/12/4/9.html>.
- LAIBSON, D. [1997]: Golden Eggs and Hyperbolic Discounting. *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 112. No. 2. 443–477. o. <http://dx.doi.org/10.1162/003355397555253>.
- SUN, R. (szerk.) [2005]: *Cognition and multi-agent interaction. From cognitive modeling to social simulation.* Cambridge University Press, <http://dx.doi.org/10.1017/cbo9780511610721>.
- TESFATSION, L. [2001]: Introduction to the Special Issue on Agent-Based Computational Economics. *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 25. No. 3–4. 281–293. o. [http://dx.doi.org/10.1016/s0165-1889\(00\)00027-0](http://dx.doi.org/10.1016/s0165-1889(00)00027-0).
- TESFATSION, L. [2006]: Agent-Based Computational Economics: A Constructive Approach to Economic Theory. Megjelent: *Tesfatsion, L.–Judd, K. L. (szerk.): Handbook of Computational Economics*, Elsevier, Amszterdam, 2. kötet, 16. fejezet, 831–880. o. [http://dx.doi.org/10.1016/s1574-0021\(05\)02016-2](http://dx.doi.org/10.1016/s1574-0021(05)02016-2).
- WALD, A.–WOLFOWITZ, J. [1940]: On a Test Whether Two Samples are from the Same Population. *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 11. No. 2. 147–162. o. <http://dx.doi.org/10.1214/aoms/1177731909>.