ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2009 Управление, вычислительная техника и информатика № 3(8)

УДК 336.01:51(075.8)

Г.А. Медведев

ПЕРЕХОДНЫЕ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Получены в явной форме и форме разложения по собственным функциям переходные плотности вероятностей марковских процессов диффузионного типа в случае, когда функция диффузии является полиномом второго порядка, а функция дрейфа – полиномом первого порядка. Показано, что вид плотностей существенно зависит от свойств функции диффузии и классифицируется по свойствам ее корней на шесть основных типов. Полученные плотности охватывают все типы плотностей семейства распределений Пирсона и являются часто используемыми на практике плотностями вероятностей.

Ключевые слова: *диффузионные процессы*, *марковские процессы*, *семейство распределений Пирсона*, *разложение по ортогональным полиномам*, *маргинальные и переходные плотности.*

Теория и практика анализа независимых выборок из временных рядов довольно хорошо и полно разработана. Этого нельзя сказать о зависимых выборках. Проблема в том, что мало известны многомерные распределения вероятностей для выборок, состоящих из наблюдений процессов, не являющихся нормальными. Вообще говоря, до сих пор даже нет ясных подходов к проблеме конструирования многомерных распределений. Если известна маргинальная плотность вероятностей $p(z)$ некоторого процесса, то будет ли структура совместной плотности $p(z_1, z_2)$ инвариантной относительно типа зависимости, что характерно для нормального распределения? Видимо, это не так. Обычно совместные распределения для одних и тех же маргинальных плотностей принимают различные формы в зависимости от постановки задачи, метода конструирования и задаваемых свойств [1, с. 447]. Ситуация более или менее ясная в случае, когда выборка реализуется при наблюдении марковского процесса. В этом случае многомерная плотность конструируется единственным образом путем умножения на исходную маргинальную плотность последующих условных плотностей вероятностей (обычно называемых переходными). Таким образом, для построения многомерной плотности выборки марковского процесса необходимо иметь только маргинальную и переходную плотности вероятностей.

В последнее время растет интерес к диффузионным процессам, которые широко используются в качестве математических моделей реальных процессов, в частности при анализе финансовых рыночных показателей. В настоящей статье внимание сосредоточено на проблеме определения маргинальных и переходных плотностей вероятностей для диффузионных процессов, когда функция диффузии описывается полиномами второго порядка, а функция дрейфа – полиномами первого порядка. В этом случае распределения вероятностей процессов относятся к классу распределений, называемых распределениями Пирсона. Для этого класса процессов большинство получающихся маргинальных плотностей оказываются широко известными, поэтому представляло интерес выяснить, какими будут переходные плотности. Такие плотности для некоторых частных случаев известны из литературы. Здесь рассмотрены все возможные версии рассматриваемого класса.

1. Диффузионные процессы и уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова

Математическая теория диффузионных процессов была разработана Колмогоровым [2], который вывел свои знаменитые уравнения для переходных плотностей вероятностей диффузионных процессов, предложил способ их решения путем преобразования функций распределения и рассмотрел некоторые частные случаи решения этих уравнений.

Рассмотрим стационарный марковский процесс, порождаемый стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX(t) = \mu(X(t))\,dt + \sigma(X(t))\,dW(t),\ t > t_0,\ X(t_0) = X_0. \tag{1}$$

Для того чтобы стохастическое дифференциальное уравнение (1) имело единственное сильное решение, являющееся марковским процессом с однородной по времени переходной плотностью вероятностей и стационарной маргинальной плотностью вероятностей, достаточно [3, с. 415], чтобы

1) функции дрейфа и диффузии $\mu(x)$ и $\sigma^2(x)$ являлись шесть раз непрерывно дифференцируемы по x;

2) сходился интеграл

$$\int_{\eta}^{\zeta} \frac{1}{\sigma^2(x)} \exp\left(-\int_{x}^{\xi} \frac{2\mu(u)}{\sigma^2(u)}\,du\right) dx$$

по области определения случайного процесса $x \in (\eta, \zeta)$ и

3) расходился интеграл от функции

$$\exp\left(\int_{x}^{\xi} \frac{2\mu(u)}{\sigma^2(u)}\,du\right)$$

на обеих границах области определения случайного процесса $x \in (\eta, \zeta)$. Константа ξ выбирается внутри интервала (η, ζ), а ее конкретное значение несущественно.

Переходная плотность вероятностей $f(x, t \mid y, s)$, $t > s$, процесса $X(t)$ удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова (уравнению Фоккера – Планка)

$$\frac{\partial f(x,t \mid y,s)}{\partial t} + \frac{\partial[\mu(x) f(x,t \mid y,s)]}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2[\sigma^2(x) f(x,t \mid y,s)]}{\partial x^2} = 0\,. \tag{2}$$

Уравнение (2) впервые было рассмотрено Фоккером (1914) в [4] и Планком (1917) в [5] для описания броуновского движения частиц. Позже Колмогоров (1931) в [2] разработал строгие аналитические методы исследования диффузионных процессов, получил это уравнение и предложил методы его решения.

Начальные условия устанавливаются равенством

$$\lim_{t \to s} f(x,t \mid y,s) = \delta(x - y)\,.$$

Краевые условия уравнения (2) связаны с наличием отражающих границ области определения процесса $X(t)$. Это формально означает, что поток вероятности через границы равен нулю. В нашем случае уравнение (2) можно переписать в виде

$$\frac{\partial f(x,t \mid y,s)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x) f(x,t \mid y,s) - \frac{1}{2}\frac{\partial[\sigma^2(x) f(x,t \mid y,s)]}{\partial x}\right] = 0\,.$$

Выражение в квадратных скобках во втором слагаемом, вычисленное при $x = \xi$, называется потоком вероятности $G(x,t)$ в точке $x = \xi$:

$$G(x,t) = \mu(x)\,f(x,\,t\mid y,\,s) - \frac{1}{2}\frac{\partial[\sigma^2(x)f(x,t\mid y,s)]}{\partial x}. \tag{3}$$

При наличии отражающих границ поток вероятности $G(x,t)$ через границы $x = \eta$ и $x = \zeta$ должен быть равен нулю для всех моментов времени t [6, с.121].

Рассмотрим вначале проблему нахождения стационарной плотности исследуемого процесса. Поскольку процесс $X(t)$ однороден по времени, то стационарная плотность, если она существует, не зависит ни от временной разности $(t - s)$, ни от начального значения процесса $y = X(s)$. Так что стационарная маргинальная плотность $f(x)$ получается из условной плотности вероятностей $f(x,\ t \mid y,\ s)$ при помощи предельного перехода, когда $(t - s) \to \infty$:

$$f(x) = \lim_{t-s\to\infty} f(x,t\mid y,s).$$

Поэтому для стационарной плотности $f(x)$ из (2) получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d[\mu(x)f(x)]}{d\,x} - \frac{1}{2}\frac{d^2[\sigma^2(x)f(x)]}{d\,x^2} = 0.$$

Интегрируя это равенство по x один раз, убеждаемся, что результатом является поток стационарной вероятности, равный некоторой константе. Однако из-за условия отражающих границ эта константа должна быть равной нулю. И окончательно для стационарной плотности $f(x)$ получаем дифференциальное уравнение

$$\mu(x)f(x) - \frac{1}{2}\frac{d[\sigma^2(x)f(x)]}{d\,x} = 0 \tag{4}$$

с граничным условием в виде условия нормировки: $\int_\eta^\zeta f(x)dx = 1$.

Уравнение (4) легко разрешается, и мы получаем

$$f(x) = \frac{c(\omega)}{\sigma^2(x)}\exp\left(\int_\omega^x \frac{2\mu(u)}{\sigma^2(u)}du\right), \tag{5}$$

где $c(\omega)$ – постоянная нормировки, ω – фиксированное число из $(\eta,\ \zeta)$, конкретное значение которого роли не играет.

Вернемся теперь к рассмотрению уравнения (2) для переходной плотности вероятностей. Для однородных по времени процессов, когда функции дрейфа и диффузии $\mu(x)$ и $\sigma^2(x)$ не зависят явно от времени, решение уравнения (2) естественно искать методом разделения переменных. Представим переходную плотность вероятностей в виде произведения $f(x,\ t \mid y,\ s) = u(x)v(t)$, где сомножители $u(x)$ и $v(t)$ зависят соответственно от y и s как от параметров, то есть $u(x) = u(x|y)$ и $v(t) = v(t|s)$. Заметим, что согласно начальному условию $f(x,\ t \mid y,\ s) \to \delta(x - y)$ при $t \to s$, поэтому $u(x|y) \to \delta(x - y)$ и $v(t|s) \to 1$ при $t \to s$. Подставляя представление $f(x,\ t \mid y,\ s) = u(x)v(t)$ в уравнение (2) и поделив полученное соотношение на $u(x)v(t)$, получим соотношение

$$\frac{1}{v(t)}\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{1}{u(x)}\left(\frac{d[\mu(x)u(x)]}{d\,x} - \frac{1}{2}\frac{d^2[\sigma^2(x)u(x)]}{d\,x^2}\right) = -\lambda,$$

в котором константа $\lambda > 0$ подлежит определению с помощью краевых условий.

Таким образом, вместо уравнения с частными производными (2) мы получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\frac{dv(t)}{dt} + \lambda v(t) = 0\,; \tag{6}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2[\sigma^2(x)u(x)]}{d\,x^2} - \frac{d\,[\mu(x)u(x)]}{d\,x} + \lambda u(x) = 0. \tag{7}$$

Уравнение (6) легко разрешимо: с учетом отмеченного выше начального условия $v(t|s) \to 1$ при $t \to s$ компонента $v(t)$ находится в виде

$$v(t) = v(t\,|\,s) = e^{-\lambda(t-s)}. \tag{8}$$

Из выражения (8) понятно, почему необходимо, чтобы $\lambda > 0$: при $(t - s) \to \infty$ имеем $f(x, t\,|\,y, s) \to f(x)$ и частные решения уравнения (7) с ненулевыми λ должны стремиться к нулю. Из выражения (8) видно, что это возможно только при $\lambda > 0$.

Основную трудность представляет решение уравнения (7) с краевыми условиями, задающими отражающие границы. Представим теперь функцию $u(x)$ также в виде произведения: $u(x) = f(x)\varphi(x)$, где $f(x)$ – определенная выше стационарная плотность (5). Тогда уравнение (7) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dx}\left(\left[\frac{1}{2}\frac{d[\sigma^2(x)f(x)]}{d\,x} - \mu(x)f(x)\right]\varphi(x) + \sigma^2(x)f(x)\frac{1}{2}\frac{d\varphi(x)}{d\,x}\right) + \lambda f(x)\varphi(x) = 0.$$

С учетом уравнения (4) выражение в квадратных скобках равно нулю. Поэтому для функции $\varphi(x)$ получаем самосопряженное уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sigma^2(x)}{2}f(x)\frac{d\varphi(x)}{d\,x}\right) + \lambda f(x)\varphi(x) = 0. \tag{9}$$

Чтобы получить краевые условия для этого уравнения, запишем поток вероятности $G(x,t)$, определяемый выражением (3), для рассматриваемого представления $f(x, t\,|\,y, s) = u(x)v(t) = f(x)\varphi(x)v(t)$:

$$G(x,t) = \left[\mu(x)f(x)\varphi(x) - \frac{1}{2}\frac{\partial[\sigma^2(x)f(x)\varphi(x)]}{\partial\,x}\right]v(t) =$$

$$= \left[\left(\mu(x)f(x) - \frac{1}{2}\frac{d[\sigma^2(x)f(x)]}{d\,x}\right)\varphi(x) - \frac{\sigma^2(x)f(x)}{2}\frac{d\varphi(x)}{dx}\right]v(t)\,.$$

Используя уравнение (4) и тот факт, что $v(t) \neq 0$, получаем, что равенство нулю потока вероятности на границах области определения процесса $X(t)$ обеспечивается следующими краевыми условиями на функцию $\varphi(x)$:

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}f(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} = 0 \quad \text{для} \;\; x = \eta \;\; \text{и} \;\; x = \zeta. \tag{10}$$

Таким образом, функция $\varphi(x)$ определяется уравнением (9) с граничным условием (10). Задача определения функции $\varphi(x)$ в такой постановке известна как задача Штурма – Лиувилля о собственных значениях и собственных функциях [7, с. 16].

Проинтегрируем уравнение (9) от η до ζ и используем краевые условия (10), тогда получим относительно функции $\varphi(x)$ интегральное соотношение

$$\lambda\int_{\eta}^{\zeta} f(x)\varphi(x)dx = 0\ . \qquad (11)$$

Это соотношение может удовлетворяться при $\lambda = 0$. Тогда из уравнений (6) и (7) получаем, что при $\lambda = 0$ $v(t) = 1$ и $u(x) = f(x)$ (т.е. $\varphi(x) = 1$). В случае $\lambda \neq 0$ соотношение выполняется только при дискретном наборе значений $\lambda \in\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots,\}$. При этом каждому (собственному) значению $\lambda_к$ соответствует собственная функция $\varphi_к(x)$. Причем набор собственных функций $\{\varphi_к(x)\}$ является набором ортогональных функций [8, с. 230], таких, что

$$\int_{\eta}^{\zeta} f(x)\varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = \chi_n\delta_{mn}, \qquad (12)$$

где χ_n – нормировочная константа, δ_{mn} – символ Кронекера.

Для унификации обозначений примем $\lambda_0 = 0$, $\varphi_0(x) = 1$.

Решение уравнения (2) мы ищем в виде $f(x, t \mid y, s) = f(x)\varphi(x)v(t)$. Поскольку выяснилось, что существует целый набор собственных значений $\lambda_к$, порождающих соответственно наборы функций $\{\varphi_к(x)\}$ и $\{v_к(t)\}$, то решение уравнения (2) можно записать в форме разложения

$$f(x, t \mid y, s) = f(x)\sum_{n=0}^{\infty}\theta_n e^{-\lambda_n(t-s)}\varphi_n(x), \qquad (13)$$

где коэффициенты θ_n должны зависеть от y, т.е. $\theta_n = \theta_n(y)$. Для определения этих коэффициентов умножим представление (13) на $\varphi_к(x)$ и проинтегрируем его от η до ζ. Используя (11), получим

$$\int_{\eta}^{\zeta} f(x,t \mid y,s)\varphi_к(x)dx = \theta_к \exp[-\lambda_к(t-s)].$$

Начальное условие $\lim_{t\to s} f(x,t \mid y,s) = \delta(x-y)$ приводит к равенству $\theta_к = \theta_к(y) = \varphi_к(y)$. После этого условная плотность вероятностей с учетом нормировочной константы χ_n, определяемой соотношением (12), окончательно находится в виде разложения

$$f(x, t \mid y, s) = f(x)\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n(t-s)}\varphi_n(y)\varphi_n(x)/\chi_n\ . \qquad (14)$$

Получение собственных функций в явной форме с помощью интегрального соотношения (11) затруднительно и обычно это делают с помощью соответствующих дифференциальных уравнений. Для этого подставим стационарную плотность $f(x)$ в форме (5) в уравнение (9). Получаем уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{c(\omega)}{2}\exp\left(\int_{\omega}^{x}\frac{2\mu(u)}{\sigma^2(u)}du\right)\frac{d\varphi(x)}{d\,x}\right) + \lambda\varphi(x)\frac{c(\omega)}{\sigma^2(x)}\exp\left(\int_{\omega}^{x}\frac{2\mu(u)}{\sigma^2(u)}du\right) = 0$$

или

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}\frac{d^2\varphi(x)}{d\,x^2} + \mu(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} + \lambda\varphi(x) = 0. \qquad (15)$$

Уравнение (9) можно представить в нормальной форме. Для этого введем функцию $\phi(x)$ соотношением

$$\phi(x) = \varphi(x)\exp\left(\int_{\omega}^{x}\frac{\mu(u)}{\sigma^2(u)}du\right).$$

Тогда уравнение (15) для $\varphi(x)$ преобразуется в уравнение в нормальной форме для $\phi(x)$:

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}+\left(\frac{2\lambda}{\sigma^2(x)}-\left(\frac{\mu(x)}{\sigma^2(x)}\right)^2-\frac{d}{dx}\left(\frac{\mu(x)}{\sigma^2(x)}\right)\right)\phi(x)=0. \qquad (16)$$

При этом граничные условия (10) для $\phi(x)$ становятся следующими:

$$f(x)\left(\sigma^2(x)\frac{d\phi(x)}{dx}-\mu(x)\phi(x)\right)=0 \quad \text{при } x=\eta \text{ и } x=\zeta.$$

2. Переходные вероятности для семейства распределений Пирсона

Поскольку решения уравнений (9), (15) или (16) не выражаются в явной форме в общем виде, рассмотрим некоторые наиболее интересные частные случаи. Как известно, многие возникающие в практических задачах плотности вероятностей $f(x)$ относятся к семейству распределений Пирсона [9, с. 123], определяемому соотношением

$$\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}=\frac{Ax+B}{Cx^2+Dx+E}. \qquad (17)$$

Колмогоров (1931) обратил внимание на этот класс распределений, как важный для приложений. Позже это семейство распределений рассматривалось Вонгом (1964) в [10]. Для того чтобы стационарная плотность $f(x)$ принадлежала семейству распределений Пирсона (17), достаточно определения функций дрейфа и диффузии $\mu(x)$ и $\sigma^2(x)$ как

$$\mu(x) = ax + b, \quad \sigma^2(x) = 2(cx^2 + dx + e). \qquad (18)$$

При этом должно выполняться неравенство $cx^2 + dx + e > 0$ для всех x из интервала (η, ζ), на котором определена плотность. Соответствие между коэффициентами в формулах (17) и (18) следующее:

$$A = a - 2c, \quad B = b - d, \quad C = c, \quad D = d, \quad E = e.$$

Поскольку плотности вероятностей, определяемые уравнением (2), существенно зависят от свойств функции диффузии $\sigma^2(x)$, рассмотрим последовательно все частные случаи, которые могут здесь возникнуть.

Пусть $c = d = 0$, $e > 0$. Для существования стационарной плотности в этом случае необходимо также, чтобы $a < 0$. Поскольку в этом случае $\sigma^2(x)$ не зависит от x и не сформулировано никаких ограничений на диапазон изменения случайного процесса, то $x \in (-\infty, +\infty)$. Стационарная плотность $f(x)$ оказывается нормальной с математическим ожиданием $E = -b/a$ и дисперсией $V = -e/a$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V}}\exp\left(-\frac{(x-E)^2}{2V}\right). \qquad (19)$$

Уравнение (15) приобретает вид

$$e\frac{d^2\varphi(x)}{d\,x^2}+(ax+b)\frac{d\varphi(x)}{dx}+\lambda\varphi(x)=0.$$

Преобразованием $x = \sqrt{2V}\,z + E$, $\lambda = -\,an$ это уравнение приводится к виду

$$\varphi'' - 2z\varphi' + 2n\varphi = 0,$$

где штрих обозначает производную по переменной z. Это уравнение имеет нетривиальное решение только в случае, когда $\lambda/(-a) = n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, то есть $\lambda/(-a)$ – целое число. В этом случае решением являются полиномы Чебышева – Эрмита $H_n(z)$ [11, с. 422]:

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2}\,\frac{d^n}{dz^n}\left(e^{-z^2}\right).$$

Поскольку с учетом преобразования $f(x) \sim e^{-z^2}$, а $[H_n(z)]' = 2nH_{n-1}(z)$, граничное условие (10) сводится к требованию

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(e^{-z^2}\right) \to 0 \text{ при } z \to -\infty \text{ и } z \to +\infty,$$

которое выполняется.

Таким образом, в рассматриваемом случае решение уравнения (2) можно записать в форме разложения (14), в котором плотность $f(x)$ определяется по формуле (19), $\lambda_n = n|a|$, а собственные функции $\{\varphi_к(x)\}$ определяются через полиномы Чебышева – Эрмита $\{H_к(z)\}$. Остается определить нормировочную константу [12, с. 851]

$$\chi_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} H_n(z)H_n(z)dz = 2^n n!\sqrt{\pi}\,.$$

Поэтому для случая $\sigma^2(x) = 2e$, $\mu(x) = ax + b$, $a < 0$, $e > 0$, $E = -\,b/a$ и $V = -\,e/a$ получаем решение уравнения (2) в виде

$$f(x, t\,|\,y, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V}}e^{-\frac{(x-E)^2}{2V}}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-|a|n(t-s)}\,\frac{1}{2^n n!}H_n\left(\frac{x-E}{\sqrt{2V}}\right)H_n\left(\frac{y-E}{\sqrt{2V}}\right).$$

Используя формулу Мелера [13, с. 383]

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)H_n(y)}{n!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^n = \sqrt{\frac{1}{1-\rho^2}}\exp\left(\frac{2xy\rho-(x^2+y^2)\rho^2}{1-\rho^2}\right),$$

это разложение можно записать в компактной и более известной форме:

$$f(x, t\,|\,y, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V(1-\rho^2)}}\exp\left(-\frac{[x-E-\rho(y-E)]^2}{2V(1-\rho^2)}\right), \tag{20}$$

где обозначено $\rho = \exp[-|a|(t-s)]$ – корреляционная функция процесса.

Таким образом, в рассматриваемом случае, когда $\sigma^2(x) = 2e$, $\mu(x) = ax + b$, переходная плотность является условной нормальной плотностью.

Пусть теперь коэффициенты в формулах (17) и (18) определены так, что функция диффузии линейна $\sigma^2(x) = 2(dx + e)$, $\mu(x) = ax + b$. Из условия $\sigma^2(x) > 0$ имеем

$d > 0$, $x > -e/d$. Ограничений сверху нет, поэтому плотность вероятностей определена на интервале $x \in (-e/d, +\infty)$. Для существования стационарной плотности необходимо, чтобы $a < 0$ и $bd > ae$, а сама плотность выражается в виде

$$f(x) = \frac{\beta^q (x-\gamma)^{q-1}}{\Gamma(q)} e^{-\beta(x-\gamma)}, \; x \in (\gamma, +\infty). \tag{21}$$

Это значит, что она является сдвинутой гамма-плотностью с параметром сдвига $\gamma = -e/d$, параметром формы $q = [b/d - ae/d^2] > 0$ и параметром масштаба $\beta = -a/d$. Эта плотность вероятностей имеет математическое ожидание $E = - b/a$ и дисперсию $V = (bd - ae)/a^2$.

Уравнение (15)

$$(dx+e)\frac{d^2\varphi(x)}{d\,x^2} + (ax+b)\frac{d\varphi(x)}{dx} + \lambda\varphi(x) = 0$$

при помощи преобразования $z = - ax/d - ae/d^2 = \beta(x - \gamma)$, $\psi(z) = - a\varphi(x)$ приводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению

$$z\psi'' + (1 + \alpha - z)\psi' + n\psi = 0,$$

где обозначено $1 + \alpha = q = [b/d - ae/d^2] > 0$, $n = -\lambda/a$. Штрих обозначает производную по переменной z. Это уравнение имеет нетривиальное решение, когда $\lambda/(-a) = n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, то есть $\lambda/(-a)$ – целое число. В этом случае решением уравнения являются полиномы Лагерра $L_n^{\alpha}(z)$ [13, с. 109]

$$L_0^{\alpha}(z) = 1, \; L_n^{\alpha}(z) = \frac{z^{-\alpha}}{n!} e^z \frac{d^n}{dz^n}[z^{n+\alpha} e^{-z}], \; n \geq 1.$$

С учетом преобразования $(dx + e)f(x) \sim z^q\, e^{-z}$, а $[\, L_n^{\alpha}(z)\,]' = - L_{n-1}^{\alpha+1}(z)$. Поэтому граничное условие (10) сводится к предельному соотношению

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[z^{n-1+q} e^{-z}] \to 0 \text{ при } z \to 0 \text{ и } z \to +\infty,$$

которое имеет место.

Таким образом, в рассматриваемом случае решение уравнения (2) можно записать в форме разложения (14), в котором плотность $f(x)$ определяется по формуле (21), $\lambda = n|a|$, а собственные функции $\{\varphi_n(x)\}$ определяются через полиномы Лагерра $L_n^{\alpha}(z)$. Остается определить нормировочную константу [12, с.858]

$$\chi_n = \int_0^{+\infty} z^{\alpha} e^{-z} L_n^{\alpha}(z) L_n^{\alpha}(z) dz = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}.$$

Поэтому для случая, когда $\sigma^2(x) = 2(dx + e)$, $\mu(x) = ax + b$, при $a < 0$, $d > 0$, $x > -e/d$, $bd > ae$, $\gamma = - e/d$, $q = [b/d - ae/d^2] = \alpha + 1$ и $\beta = -a/d$, получаем решение уравнения (2) в виде разложения по полиномам Лагерра:

$$f(x, t \,|\, y, s) = \frac{\beta^q (x-\gamma)^{q-1}}{\Gamma(q)} e^{-\beta(x-\gamma)} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|a|n(t-s)} \frac{n!}{\Gamma(q+n)} L_n^{q-1}[\beta(x-\gamma)] L_n^{q-1}[\beta(y-\gamma)].$$

Используя формулу Хилле – Харди [14, с.190]

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\rho^n}{\Gamma(\alpha+n+1)}L_n^{\alpha}(x)\,L_n^{\alpha}(y)=$$

$$=\frac{1}{(1-\rho)(xy\rho)^{\alpha/2}}I_{\alpha}\left(2\frac{\sqrt{xy\rho}}{1-\rho}\right)\exp\left(-\rho\frac{x+y}{1-\rho}\right),\ |\rho|<1,$$

переходную плотность можно записать в компактной форме

$$f(x,t\,|\,y,s)dx=\left(\frac{u}{v}\right)^{(q-1)/2}I_{q-1}(2\sqrt{uv})e^{-u-v}du, \tag{22}$$

где обозначено $u = \beta(x - \gamma)/(1 - \rho)$, $v = \beta\rho(y - \gamma)/(1 - \rho)$, $\rho = \exp[-|a|(t - s)]$ – корреляционная функция процесса; I_q – модифицированная функция Бесселя.

Таким образом, в случае $\sigma^2(x) = 2(dx + e)$, $\mu(x) = ax + b$ уравнение (2) описывает процесс с гамма-распределением, т.е. процесс с распределением типа III по классификации Пирсона. Заметим, что при некоторых значениях параметров гамма распределение преобразуется в другие известные распределения. Например, в случае, когда $b/d - ae/d^2 = 1$ ($\alpha = 0$), имеем экспоненциальное распределение (тип X в классификации Пирсона), когда $b/d - ae/d^2 = n$ – целое число (т.е. $\alpha = n > 0$), – распределение Эрланга, а при $(-a/d) = ½$, $b/d - ae/d^2 = 2n$, n – целое число, – χ^2-распределение с n степенями свободы.

Предположим теперь, что коэффициенты в формулах (17) и (18) определены так, что функции диффузии и дрейфа $\sigma^2(x) = 2(cx^2 + dx + e)$, $\mu(x) = ax + b$. Плотность вероятностей в этом случае будет определяться характером корней уравнения $\sigma^2(x) = 0$. Рассмотрим все возможные случаи последовательно. Пусть корни $x_1, x_2, x_1 < x_2$, уравнения $\sigma^2(x) = 0$ вещественные и различные, тогда функцию диффузии можно записать в виде $\sigma^2(x) = 2c(x - x_2)(x - x_1) > 0$. В этом случае плотность вероятностей будет сосредоточена на интервале $x \in (x_1, x_2)$, если $c < 0$, и на интервалах $(x_2, +\infty)$ или $(-\infty, x_1)$, если $c > 0$. Рассмотрим вначале первый случай $c < 0$. Стационарная плотность вероятностей диффузионного процесса будет существовать, если будут выполнены следующие неравенства $a < 0$, $x_1 < -b/a < x_2$. Введем обозначения

$$\alpha=\frac{ax_2+b}{c(x_2-x_1)}-1,\ \beta=-\frac{ax_1+b}{c(x_2-x_1)}-1.$$

Заметим, что $\alpha + 1 > 0$ и $\beta + 1 > 0$. Стационарная плотность вероятностей находится по формуле

$$f(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\frac{(x_2-x)^{\alpha}(x-x_1)^{\beta}}{(x_2-x_1)^{\alpha+\beta+1}},\ x\in(x_1,x_2).$$

Это означает, что уравнение (2) в этом случае описывает процесс с бета-распределением. Эта плотность вероятностей имеет математическое ожидание E и дисперсию V:

$$E=-\frac{b}{a},\ V=-\frac{c}{a^2}\frac{(ax_2+b)(ax_1+b)}{a+c}.$$

Для нахождения функции $\varphi(x)$ получаем уравнение (15) в виде

$$c(x-x_2)(x-x_1)\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+(ax+b)\frac{d\varphi(x)}{dx}+\lambda\varphi(x)=0.$$

При помощи преобразования $2x=(x_2-x_1)z+(x_2+x_1)$, $\psi(z)=c\varphi(x)$ это уравнение приводится к гипергеометрическому уравнению

$$(1-z^2)\psi''+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)z]\psi'+n(n+\alpha+\beta+1)\psi=0,$$

в котором обозначено $\lambda=n(nc-c+a)$. Штрих обозначает производную по переменной z, $z\in(-1,1)$.

Это уравнение имеет нетривиальное решение, когда $n\in\{0, 1, 2, \ldots\}$. В этом случае решением уравнения являются полиномы Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ [12, с. 1050]:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-z)^{-\alpha}(1+z)^{-\beta}\frac{d^n}{dz^n}[(1-z)^{\alpha+n}(1+z)^{\beta+n}],\ z\in(-1,1).$$

Заметим, что

$$\frac{d}{dz}P_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{\alpha+\beta+n+1}{2}P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(z).$$

С учетом преобразования имеем

$$f(x)dx=p(z)dz=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\frac{(1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta}}{2^{\alpha+\beta+1}}dz,\quad z\in(-1,1).$$

Поэтому $2c(x_2-x)(x-x_1)f(x)\sim(1-z)^{\alpha+1}(1+z)^{\beta+1}$ и граничное условие (10) сводится к предельному соотношению

$$\frac{d^n}{dz^n}[(1-z)^{\alpha+n}(1+z)^{\beta+n}]\to 0 \text{ при } z\to-1 \text{ и } z\to+1,$$

которое выполняется.

Нормировочная константа определяется выражением [12, с. 855]

$$\chi_n=\int_{-1}^{+1}p(z)P_n^{(\alpha,\beta)}(z)P_n^{(\alpha,\beta)}(z)dz=$$

$$=\frac{1}{n!(\alpha+\beta+1+2n)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}.$$

Переходная плотность вероятностей в этом случае имеет вид

$$f(x,t\,|\,y,s)=\frac{(x_2-x)^{\alpha}(x-x_1)^{\beta}}{(x_2-x_1)^{\alpha+\beta+1}}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda_n(t-s)}\theta_n P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{2x-x_1-x_2}{x_2-x_1}\right)P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{2y-x_1-x_2}{x_2-x_1}\right),\tag{23}$$

где для краткости обозначено

$$\lambda_n=n(nc-c+a),\quad \theta_n=\frac{n!(\alpha+\beta+1+2n)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}.$$

Таким образом, когда корни уравнения $\sigma^2(x) = 0$ вещественные и различные и $c < 0$, тогда уравнение (2) описывает переходную плотность вероятностей бета-распределения, являющегося распределением Пирсона типа I. При $\alpha = \beta = 0$ (т.е. $a = 2c$ и $b = d$) это распределение превращается в равномерное.

Пусть теперь $c > 0$. В этом случае процесс развивается или на интервале $(x_2, +\infty)$, или на интервале $(-\infty, x_1)$ в зависимости от того, какому из этих интервалов принадлежит y. Рассмотрим только первую возможность, так как анализ второй отличается только некоторыми переобозначениями. Стационарная плотность вероятностей существует, если выполняются неравенства $a < c$, $x_1 < x_2 < -b/a$. В этом случае величины α и β определим равенствами

$$\alpha = \frac{ax_2 + b}{c(x_2 - x_1)}, \quad \beta = \frac{ax_1 + b}{c(x_2 - x_1)}.$$

Заметим, что $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\beta - \alpha = -a/c$.

Стационарная плотность вероятностей находится по формуле

$$f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)} \frac{(x-x_2)^{\alpha-1}(x-x_1)^{-\beta-1}}{(x_2-x_1)^{\alpha-\beta-1}}, \quad x \in (x_2, +\infty). \tag{24}$$

Эта плотность известна как плотность вероятностей бета-распределения второго рода – распределения Пирсона VI типа. Если 2α и $2(1 + \beta - \alpha)$ являются целыми числами, то плотность (24) характеризует F-распределение (распределение Снедекора). Когда $\alpha = 1$, плотность (24) соответствует распределению Парето, относящемуся к XI типу кривых Пирсона. Для плотности вероятностей бета-распределения второго рода математическое ожидание E существует при $a < 0$, а дисперсия V – при $a + c < 0$. Они формально определяются так же, как и в предыдущем случае:

$$E = -\frac{b}{a}, \quad V = -\frac{c}{a^2}\frac{(ax_2+b)(ax_1+b)}{a+c}.$$

Преобразованием

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{2}{1+z}$$

плотность $f(x)$ преобразуется к плотности $p(z)$ бета распределения

$$p(z) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{2^\beta \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(1-z)^{\alpha-1}(1+z)^{\beta-\alpha}, \quad z \in (-1, +1).$$

Поэтому при определении переходной плотности в этом случае можно воспользоваться вышеприведенным анализом и найти представление переходной плотности в виде разложения по полиномам Якоби в следующем виде:

$$f(x, t \mid y, s) = \frac{(x-x_2)^{\alpha-1}(x-x_1)^{-\beta-1}}{(x_2-x_1)^{\alpha-\beta-1}} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n (t-s)} \theta_n P_n^{(\alpha-1, \beta-\alpha+1)}\left(\frac{2x_2 - x_1 - x}{x - x_1}\right) P_n^{(\alpha-1, \beta-\alpha+1)}\left(\frac{2x_2 - x_1 - y}{y - x_1}\right), \tag{25}$$

где $x \in (x_2, +\infty)$, $y \in (x_2, +\infty)$ и для краткости обозначено

$$\lambda_n = cn(n+\beta),\ \theta_n = \frac{n!(\beta+2n)\Gamma(\beta+n)}{2^{\beta}\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta-\alpha+n+1)}.$$

Пусть теперь корни уравнения $\sigma^2(x) = 0$ вещественные и одинаковые ($d^2 = 4ce$), тогда функцию диффузии можно записать в виде $\sigma^2(x) = 2c(x - x_2)^2 > 0$, $x_2 = -d/2c$. В этом случае $c > 0$, плотность вероятностей будет определена либо на интервале $(x_2, +\infty)$, либо на интервале $(-\infty, x_2)$ в зависимости от того, какому из этих интервалов принадлежит y. Эти два интервала не объединяются, так как оказывается, что поток вероятности при $x = x_2$ равен нулю, и поэтому уровень x_2 имеет свойства отражающей границы. Будем рассматривать только интервал $(x_2, +\infty)$, поскольку анализ этого случая совпадает с анализом альтернативного с точностью до переобозначений.

Стационарная плотность вероятностей существует, если выполняются неравенства $a < c$, $2bc > ad$, и имеет вид

$$f(x) = \frac{\gamma^{1-q}}{\Gamma(1-q)(x-x_2)^{2-q}}e^{-\gamma/(x-x_2)},\ x \in (x_2, +\infty), \tag{26}$$

где $\gamma = (ax_2 + b)/c > 0$, $q = a/c < 1$.

Эта плотность по классификации Пирсона относится к типу V. Для того чтобы у нее существовали моменты порядка $\kappa \ge 1$, должно выполняться неравенство $a + c\kappa < c$ (или $\kappa + q < 1$). При $a + c < 0$ математическое ожидание E и дисперсия V существуют и вычисляются по формулам

$$E = -\frac{b}{a},\ V = -\frac{c}{a^2}\frac{(ax_2+b)^2}{a+c}.$$

При $q = ½$ плотность (26) превращается в плотность вероятностей Леви, которая характеризует устойчивую случайную величину, не имеющую не только дисперсии, но и математического ожидания.

Уравнение (15) при помощи преобразования $z = x - x_2$, $c\varphi(x) = \psi(z)$, $(ax + b)/c = qz + \gamma$ приводится к виду

$$z^2\psi'' + (qz+\gamma)\psi' + \lambda\psi = 0.$$

Решение задачи Штурма – Лиувилля (9), (10) приводит к смешанному набору собственных функций $\varphi(x)$, который содержит кроме конечного множества собственных чисел $\lambda_n = n(cn - c + a)$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$, $q - 2 \le 2N < q$, $(\lambda_n < c(1 - q)^2/4)$, также множество собственных чисел $\lambda \ge c(1 - q)^2/4$, составляющих неограниченный интервал [10, с. 271].

Собственные функции $\varphi_n(x)$ дискретной составляющей определяются через ортогональные полиномы

$$\Theta_0^q(z) = 1,\ \Theta_n^q(z) = (-1)^n z^{q+1}e^{1/z}\frac{d^n}{dz^n}[z^{2n-q-1}e^{-1/z}],\ n \ge 1.$$

Собственные функции $\varphi(x, \lambda)$ непрерывной составляющей определяются через обобщенные гипергеометрические ряды. Так что общий вид переходной плотности оказывается достаточно сложным и имеет следующую структуру:

$$f(x,t\,|\,y,s)= f(x)\left[\sum_{n=0}^{N} e^{-\lambda_n(t-s)}\varphi_n(y)\varphi_n(x)/\chi_n \;+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{c(1-q)^2/4}^{\infty} e^{-\lambda(t-s)}\varphi(y,\lambda)\varphi(x,\lambda)[\chi(\lambda)]^{-1}d\lambda\right]. \qquad (27)$$

Это выражение является неудобным с практической точки зрения. Более удобной может оказаться аппроксимация, которую можно получить как допредельное значение предыдущего случая при $x_1 \to x_2$. Для этого представим $x_1 = x_2 - \varepsilon$ и рассмотрим предыдущий случай двух вещественных корней при малых ε. Тогда плотность вероятностей (24) запишется как

$$f(x)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)}\frac{(x-x_2)^{\alpha-1}}{\varepsilon^{\alpha-\beta-1}(x-x_2+\varepsilon)^{\beta+1}},\quad x\in(x_2,+\infty),$$

где $\alpha = \gamma/\varepsilon$, $\beta = \gamma/\varepsilon - q$, $\gamma = (ax_2 + b)/c > 0$, $q = a/c < 1$.

Заметим, что $\beta - \alpha + 1 = 1 - q > 0$, $\Gamma(\beta - \alpha + 1) = \Gamma(1 - q)$, а также справедливы следующие предельные соотношения:

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-\beta-1}}=\frac{\Gamma(\gamma/\varepsilon+1-q)}{\Gamma(\gamma/\varepsilon)\varepsilon^{q-1}}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\gamma^{1-q},$$

$$\left(\frac{x-x_2}{x-x_2+\varepsilon}\right)^{\alpha-1}=\left(\frac{x-x_2}{x-x_2+\varepsilon}\right)^{\gamma/\varepsilon-1}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\exp\left(-\frac{\gamma}{x-x_2}\right),$$

$$\frac{1}{(x-x_2+\varepsilon)^{\beta-\alpha+2}}=\frac{1}{(x-x_2+\varepsilon)^{2-q}}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\frac{1}{(x-x_2)^{2-q}}.$$

Поэтому для малых ε справедливо представление

$$f(x)=\frac{\gamma^{1-q}}{\Gamma(1-q)(x-x_2)^{2-q}}e^{-\gamma/(x-x_2)}+O(\varepsilon),\quad x\in(x_2,+\infty),$$

что с точностью до членов порядка малости $O(\varepsilon)$ (24) совпадает с (26). Соответственно разложение переходной плотности по полиномам Якоби приобретает вид

$$f(x,t\,|\,y,s)=\frac{\gamma^{1-q}}{\Gamma(1-q)(x-x_2)^{2-q}}e^{-\gamma/(x-x_2)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda_n(t-s)}\theta_n P_n^{(\gamma/\varepsilon-1,1-q)}\left(\frac{x_2-x+\varepsilon}{x-x_2+\varepsilon}\right)P_n^{(\gamma/\varepsilon-1,1-q)}\left(\frac{x_2-y+\varepsilon}{y-x_2+\varepsilon}\right)+O(\varepsilon),$$

где $x \in (x_2, +\infty)$, $y \in (x_2, +\infty)$ и для краткости обозначено

$$\lambda_n = cn(n+\gamma/\varepsilon-q),\;\; \theta_n=\frac{n!\Gamma(1-q)}{\Gamma(n+1-q)}.$$

Наконец рассмотрим случай, когда уравнение $\sigma^2(x) = 2(cx^2 + dx + e) = 0$ имеет пару мнимых корней, при этом $c > 0$, $d^2 < 4ce$. В этом случае стационарное распределение существует, если $a < c$ определено на всей числовой оси и имеет вид

$$f(x) = \frac{N_1}{(cx^2 + dx + e)^{1-a/2c}} \exp\left[\left(b - \frac{ad}{2c}\right)\frac{2}{\sqrt{4ce-d^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2cx+d}{\sqrt{4ce-d^2}}\right)\right],$$

где N_1 – постоянная нормировки, которую, к сожалению, в явном виде найти не удается. Используя упрощающее преобразование, эту плотность можно записать в более компактной форме $p(z)$:

$$p(z) = N_2 \frac{e^{\nu \operatorname{arctg} z}}{(1+z^2)^{1-q/2}},\ z \in (-\infty, +\infty), \tag{28}$$

где обозначено $z = \frac{2cx+d}{\sqrt{4ce-d^2}}$, $q = \frac{a}{c} < 1$, $\nu = \left(b - \frac{ad}{2c}\right)\frac{2}{\sqrt{4ce-d^2}}$. Эта плотность относится к типу IV кривых Пирсона. Как и в предыдущем случае, моменты порядка $\kappa \ge 1$ существуют, если выполняется неравенство $a + c\kappa < c$ (или $\kappa + q < 1$). В случае, когда $a = 2(1 - n)c$, $b = (1 - n)d$, где n – целое число, эта плотность превращается в t-распределение Стьюдента. Если $q = \nu = 0$ (это соответствует тому, что $a = b = 0$ и функция дрейфа $\mu(x) \equiv 0$) плотность (28) превращается в плотность вероятностей Коши, характеризующую устойчивую случайную величину, не имеющую ни дисперсии, ни математического ожидания.

При определении переходной плотности решение задачи Штурма – Лиувилля (9), (10) при использовании упрощающего преобразования сводится к решению уравнения (15) в форме

$$(1 + z^2)\psi'' + (qz + \nu)\psi' + \lambda\psi = 0.$$

Как и в предыдущем случае одинаковых корней, приходим к смешанному набору собственных функций $\varphi(x)$, соответствующих как конечному множеству собственных чисел $\lambda_n = n(nc - c + a)$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$, $q - 2 \le 2N < q$, ($\lambda_n < c(1 - q)^2/4$), так и множеству собственных чисел $\lambda \ge c(1 - q)^2/4$, образующих неограниченный интервал [10, с. 270]. Однако поскольку $q < 1$, дискретное множество собственных чисел состоит только из одного числа $\lambda_0 = 0$. Собственные функции $\varphi(x, \lambda)$ непрерывной составляющей определяются через обобщенные гипергеометрические ряды. Так что общий вид переходной плотности оказывается достаточно сложным и имеет вид, аналогичный (27).

Заключение

Таким образом, стохастическое дифференциальное уравнение (1) в форме

$$dX(t) = [aX(t) + b]dt + \sqrt{2[cX^2(t) + dX(t) + e]}\, dW(t),\ t > s,\ X(s) = y, \tag{29}$$

для различных значений постоянных параметров a, b, c, d, e порождает семейство стационарных диффузионных процессов, имеющих плотности вероятностей большого числа используемых на практике типов. В статье найдены маргинальные стационарные плотности и переходные плотности этих процессов, что позволяет с учетом марковского свойства составлять совместные плотности любого порядка. В нижеследующей таблице приведен итоговый перечень плотностей этого семейства, указаны условия существования стационарного режима, принадлежность к тому или иному типу кривых Пирсона и тип переходной плотности.

Типы распределений и соответствующих им переходных плотностей

Распределение	Тип кривой Пирсона	Условие существования стационарного режима $[cx^2 + dx + e \equiv c(x - x_2)(x - x_1)]$	Тип переходной плотности
Гаусса		$c = d = 0, e > 0, a < 0.$	(20)
Гамма	III	$c = 0, d > 0, bd > ae, a < 0.$	(22)
Экспоненциальное	X	$c = 0, d > 0, bd - ae = d^2, a < 0.$	(22)
Эрланга	III	$c = 0, d > 0, bd - ae = nd^2, a < 0.$	(22)
χ^2-распределение	III	$c = 0, d > 0, bd - ae = 2nd^2, a = -d/2.$	(22)
Бета	I	$c < 0, x_1 < -b/a < x_2, a < 0.$	(23)
Равномерное	II	$c < 0, x_1 < -b/a < x_2, a = 2c, b = d.$	(23)
Бета 2-го рода	VI	$c > 0, x_1 < x_2 < -b/a, a < c.$	(25)
F-распределение	VI	2α и $2(1 + \beta - \alpha)$ – целые числа.	(25)
Парето	XI	$c > 0, x_1 < x_2 < -b/a, a < c, \alpha = 1.$	(25)
(26)	V	$c > 0, d^2 = 4ce, a < c, 2bc > ad.$	(27)
Леви	V	$c > 0, d^2 = 4ce, c = 2a, 4b > d.$	(27)
(28)	IV	$c > 0, d^2 < 4ce, a < c.$	(27)
t-распределение	VII	$c > 0, d^2 < 4ce, a = 2(1 - n)c, b = (1 - n)d.$	(27)
Коши	IV	$c > 0, d^2 < 4ce, a = b = 0.$	(27)

Как видно из таблицы, при определенных значениях коэффициентов a, b, c, d, e стохастическое дифференциальное уравнение (29) порождает стационарный диффузионный случайный процесс с одним из указанных в таблице распределений. Таблица совместно с уравнением (29) может служить основой для создания алгоритмов моделирования процессов с заданными маргинальной и переходной плотностями. С другой стороны, знание маргинальной и переходной плотностей позволяет составлять совместные плотности требуемого порядка для марковских процессов, описываемых уравнением (29), что позволяет при наблюдении их реализаций выписывать функции правдоподобия для оценивания параметров наблюдаемых процессов.

Заметим, что семейство кривых Пирсона состоит из 12 типов, из которых в таблице не упомянуты VIII, IX и XII. Эти распределения не рассматривались, потому что они являются частными случаями кривых типа I [9, с.124]. Вообще говоря, с нашей точки зрения, классификацию процессов, соответствующих функциям дрейфа и диффузии (18), по свойствам распределений более естественно производить на основе свойств функции диффузии. При этом получается шесть типов: 1) $\sigma^2(x)$ константа – нормальное распределение; 2) $\sigma^2(x)$ линейная – сдвинутое гамма-распределение; 3) $\sigma^2(x)$ вогнутая и имеет два различных вещественных корня – бета-распределение; 4) $\sigma^2(x)$ выпуклая и имеет два различных вещественных корня – бета-распределение второго рода; 5) $\sigma^2(x)$ имеет два одинаковых вещественных корня – распределение вида (26); 6) $\sigma^2(x)$ имеет мнимые корни – распределение вида (28). Остальные распределения являются частными случаями перечисленных.

Наконец, следует упомянуть, что в литературе имеются описания переходных плотностей диффузионных процессов, не относящихся к рассмотренному здесь семейству. Например, в [15, с.70] рассматривается процесс с распределением Рэлея, а в [16, с.241] – процесс с распределением Накагами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kotz S.*, *Balakrishnan N.*, *Johnson N.L.* Continuous Multivariate Distributions. V. 1. N.Y.: J. Wiley & Sons, 2000. 733 p.
2. *Kolmogorov A.N.* Uber die Analytischen Metoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung // Math. Ann. 1931. Bd. 104. P. 415 – 458.
3. *Aït-Sahalia Y.* Testing continuous-time models of the spot interest rate // Rev. of Financial Studies. 1996. V. 9. No. 2. P. 385 – 426.
4. *Fokker A.D.* Ann. Physik. Bd. 43. 1914. 810 p.
5. *Planck M.* Sitzber. Preufi. Akad. Wiss. 1917. 324 p.
6. *Gardiner C.W.* Handbook of Stochastic Methods. Berlin: Springer-Verlag, 1997. 442 p.
7. *Титчмарш Э.Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 1. М.: ИЛ, 1960. 278 с.
8. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975. 304 с.
9. *Королюк В.С.*, *Портенко Н.И.*, *Скороход А.В.*, *Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. Киев: Наукова думка, 1978. 584 с.
10. *Wong E.* The construction of a class of stationary Markov processes // Stochastic Processes in Mathematical Physics and Engineering: Proceed. of Symp. in Appl. Math., XVI, American Mathematical Society, 1964. P. 264 – 276.
11. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: ГИФМЛ, 1961. 704 с.
12. *Градштейн И.С.*, *Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1962. 1100 с.
13. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: ГИФМЛ, 1962. 500 с.
14. *Бейтмен Г.*, *Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966. 295 с.
15. *Стратонович Р.* Л. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961. 558 с.
16. *Primak S.*, *Kontorovich V.*, *Lyandres V.* Stochastic Methods and Their Applications to Communications. N.Y.: J. Wiley & Sons, 2004. 434 p.

Медведев Геннадий Алексеевич
Белорусский государственный университет (г. Минск, Беларусь)
E-mail: MedvedevGA@Cosmostv.by
Поступила в редакцию 16 мая 2009 г.