

## **Kaedah Susur dan Lantun untuk Masalah Pengaturcaraan Linear Dua dan Tiga Dimensi**

**Ismail bin Mohd, Azmi bin Jaafar, Harun bin Budin,  
Mansor bin Monsi dan Leow Soo Kar**

*Jabatan Matematik  
Fakulti Sains dan Pengajian Alam Sekitar  
Universiti Pertanian Malaysia  
43400 UPM Serdang, Selangor Darul Ehsan, Malaysia*

Received 24 November 1994

### **ABSTRAK**

Dalam makalah ini, suatu kaedah permulaan mudah yang dikenali sebagai Kaedah Susur Lantun dalam penyelesaian masalah pengaturcaraan linear akan dikemukakan. Sehingga hari ini, selain kaedah simpleks yang begitu dikenali, beberapa algoritma penyelesaiannya juga telah diperkenalkan.

### **ABSTRACT**

In this article, a simple preliminary method called Bounce and Explore Method for solving linear programming problems is presented. To date, several methods for solving this problem have been published besides the widely known simplex method.

**Kata kunci: pengaturcaraan linear; susur dan lantun**

### **PENGENALAN**

Sesungguhnya kaedah simpleks (Dantzig 1963) telah menjadi begitu terkenal dan setakat ini belum ada kaedah yang dapat mengatasinya baik dari segi teori mahupun amalnya. Namun demikian, pada tahun 1979 L. G. Khachian, ahli matematik Russia telah membuktikan wujudnya satu algoritma polinomial bagi pengaturcaraan linear yang dikenali sebagai Algoritma Ellipsoid (Khachian 1979). Ini diikuti pula oleh Algoritma Karmarkar (Karmarkar 1984), yang dikatakan lebih mencabar kaedah simpleks jika dibandingkan dengan kaedah ellipsoid.

Dalam makalah ini, kita akan membentangkan suatu kaedah yang setakat ini boleh dikatakan memberi perangsang yang besar bagi mengembangkannya sebagai suatu kaedah alternatif malah pengganti kepada kaedah simpleks. Dari segi teori, bentuknya sangat sederhana dan tidak memerlukan matematik yang tinggi serta dapat diimplementasikan pada komputer.

Pembentangan kaedah melalui makalah ini dibuat dalam beberapa bahagian yang setiap satunya memainkan peranan yang penting bagi memasyhurkan kaedah tersebut. Dalam Bahagian 2, kita memperkatakan tentang bentuk masalah pengaturcaraan linear dan beberapa teori vektor yang amat diperlukan dalam membina kaedah seperti yang dihasratkan.

Kaedah simpleks berkaitan dengan kelemahannya mengikut pandangan penulis akan disentuh sedikit dalam Bahagian 3. Berdasarkan kelemahan ini, penulis cuba mengemukakan suatu kaedah alternatif seperti yang termaklum dalam makalah ini. Manakala, garis dan satah yang merupakan bahan binaan yang digunakan dalam merekacipta kaedah alternatif ini, akan dibincangkan dalam Bahagian 4. Hipersatah pula merupakan perluasan kepada satah. Jadi, kita tidak perlu membincangkannya dengan terperinci.

Bahagian 5, 6, 7 dan 8 adalah bahagian-bahagian yang menghuraikan tentang kaedah yang hendak dimasyhurkan ini dengan terperinci, khususnya untuk dua atau tiga dimensi. Penentuan sesuatu titik ekstrim sebagai suatu penyelesaian dihuraikan dalam Bahagian 9. Dalam bahagian ini juga dikemukakan ciri-ciri yang dapat digunakan bagi menyatakan tentang penyelesaian masalah pengaturcaraan linear. Dengan ciri-ciri ini, kita dapat merasakan bahawa kaedah ini memang boleh digunakan sebagai alternatif kepada kaedah simpleks.

### MATEMATIK ASAS

Masalah pengaturcaraan linear yang akan dipertimbangkan dalam makalah ini ialah masalah pemaksimuman sahaja yang secara amnya berbentuk seperti yang berikut.

$$\begin{aligned} &\text{Maksimumkan } f(x) = m^T x \\ &\text{tertakluk kepada } Ax \{ \leq, = \geq \} b \\ &\text{dan } x \geq 0 \\ &\text{dengan} \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} m &= (m_1, \dots, m_n)^T, \\ x &= (x_1, \dots, x_n)^T, \\ A &= (a_{ij})_{k \times n}, \\ b &= (b_1, \dots, b_k)^T, \end{aligned}$$

<sup>T</sup> menyatakan transposisi dan  $n \in \{1, 2, 3\}$ . Seterusnya, rantau yang dibina oleh sistem kekangan bagi masalah (2.1) di atas adalah cembung.

Misalkan ungkapan fungsi matlamat  $f$  dinyatakan oleh

$$f(x) = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n$$

dan kekangan ke- $i$  mempunyai persamaan

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n = b_i$$

Jika  $\vec{N}$  dan  $\vec{N}_i$  ialah vektor-vektor normal kepada hipersatah fungsi matlamat dan hipersatah kekangan ke- $i$  secara tertib, maka jelas

$$\vec{N} = (m_1, m_2, \dots, m_n) \text{ dan } \vec{N}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}).$$

Dimisalkan juga  $\vec{N}_i$  ialah vektor yang ortogonal kepada vektor normal  $\vec{N}_i$ .  
Jadi  $\vec{N}_i \bullet \vec{N}_i = 0$ .

Jika T dan R ialah vektor yang masing-masing terletak pada garis yang melalui titik-titik P dan Q dalam arah  $\vec{N}$  dan  $\vec{N}_i$  maka didapati bahawa

$$\vec{T} = \vec{P} + \alpha \vec{N} \text{ dan } \vec{R} = \vec{Q} + \beta \vec{N}_i,$$

Jika titik T pula terletak pada persamaan kekangan ke- $i$  tadi, maka nilai  $\alpha$  dapat dikira asalkan titik P =  $(p_1, \dots, p_n)$  diketahui, iaitu

$$a_{i1}(p_1 + \alpha m_1) + \dots + a_{in}(p_n + \alpha m_n) = b_i$$

Dengan  $\bullet$  menandakan hasil darab dalaman, maka diperoleh

$$\alpha = \frac{b_i - N_i \bullet P}{N_i \bullet N}$$

Dengan cara yang sama  $\beta$  dapat dikira.

Khusus untuk dua dimensi, kita menjelmakan setiap kekangan ke- $i$  untuk  $i = 1, \dots, k$  dalam bentuk

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \{ \leq, =, \geq \} b_i \tag{2.2}$$

dengan keadaan tanda pekali-pekali  $a_{i1}$ ,  $a_{i2}$  dan pemalar  $b_i$  adalah salah satu daripada

$$(1) (a_{i1} \geq 0) \wedge (a_{i2} \geq 0) \wedge (b_i \geq 0),$$

$$(2) (a_{i1} \leq 0) \wedge (a_{i2} \geq 0) \wedge (b_i \geq 0),$$

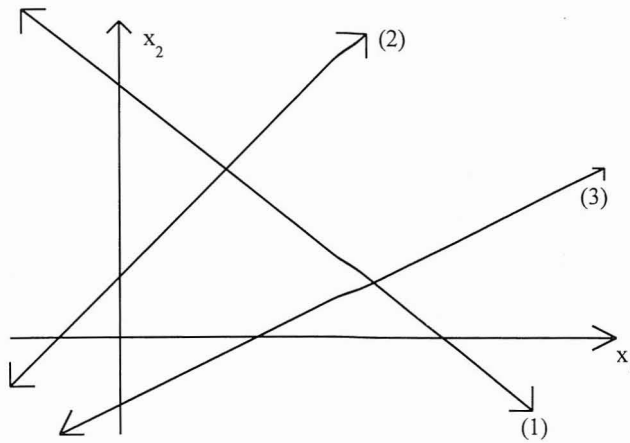
atau

$$(3) (a_{i1} \leq 0) \wedge (a_{i2} \geq 0) \wedge (b_i \leq 0).$$

Jika diplotkan graf bagi ketiga-tiga bentuk persamaan (2.2) diperoleh graf seperti yang ditunjukkan dalam *Rajah 1*.

Vektor normal kepada kekangan (2.2) ialah  $N_i = (a_{i1}, a_{i2})$ . Seterusnya vektor yang ortogonal kepada normal tadi yang akan digunakan dalam makalah ini mengikut graf dalam *Rajah 1* ialah

$$N_i^{\perp} = \begin{cases} (-a_{i2}, a_{i1}) \text{ untuk garis (1)} \\ (a_{i2} - a_{i1}) \text{ untuk garis (2) dan (3)}. \end{cases}$$



Rajah 1: Bentuk graf garis lurus

### KAEDAH SIMPLEKS

Dalam bahagian ini, kita tidak bermaksud menghuraikan kaedah simpleks dengan terperinci tetapi hanya ingin menyebut beberapa perkara disekitarnya sebagai renungan bersama.

Bagi menyelesaikan masalah (2.1) menggunakan kaedah simpleks, kita memerlukan suatu penyelesaian tersaur asas awal untuk memulakan kaedahnya. Bagi memperoleh penyelesaian tersaur asas awal itu kita menambahkan beberapa pembolehubah baru yang disebut pembolehubah lalai atau lebihan. Namun begitu, kadang kala selepas penambahan pembolehubah lalai atau lebihan ini, kita masih belum juga memperoleh penyelesaian tersaur asas awal seperti yang dimaksudkan. Oleh itu, diperkenalkan pula pembolehubah buatan bagi membantu mencari penyelesaian tersaur asas awal itu seperti yang dikemukakan dalam (Mohd. 1991).

Jadi pada pandangan penulis, ini adalah suatu kelemahan yang ketara yang ada pada kaedah simpleks. Maksudnya kenapa kita tidak gunakan sahaja maklumat yang ada pada fungsi matlamat, fungsi kekangan dan sifat keter-sauran yang sememangnya sedia ada pada masalah pengaturcaraan linear itu sendiri? Inilah asas kaedah yang akan dikemukakan oleh penulis, untuk diisytiharkan dalam makalah ini, Insya Allah.

### GARIS DAN SATAH

Jika masalah pengaturcaraan linear dua pembolehubah, maka fungsi matlamat adalah berbentuk garis lurus dan persilangan antara kekangan akan membina suatu rantau tersaur yang dibatasi oleh beberapa sempadan berbentuk garis lurus. Kadang kala rantau tersaur yang dibentuk oleh persilangan antara

kekangan itu, boleh merupakan suatu rantau yang tak terbatas luasnya. Walaupun demikian, jika masalah yang dipertimbangkan adalah masalah maksimum, boleh jadi kita memperoleh penyelesaian yang terbatas atau tidak terbatas.

Boleh jadi juga dalam menyelesaikan masalah pengaturcaraan linear tadi, kita memperoleh bilangan penyelesaian yang tak terhingga banyaknya. Lagi sekali kita akan berhadapan dengan pemilihan manakah yang sesuai diambil sebagai penyelesaiannya.

Oleh sebab itu, yang paling mudah dan menyenangkan kita, rantau tersaur yang dipertimbangkan hendaklah terbatas dan masalah hendaklah mempunyai penyelesaian unik pada rantau tersebut. Namun begitu, kita tidak dapat mengelak menyelesaikan masalah yang penyelesaiannya adalah tidak terbatas atau bilangan penyelesaian pula tidak terpermanai, supaya kaedah kita yang akan dikemukakan nanti berkeupayaan menjejaki penyelesaian yang sedemikian.

Oleh kerana fungsi matlamat adalah berbentuk garis lurus dan fungsi kekangan pula akan membentuk rantau yang disempadani oleh garis lurus, maka kita akan menggunakan garis-garis lurus tadi untuk membina suatu algoritma bagi menyelesaikan masalah pengaturcaraan linear. Inilah dia ciri yang istimewa yang dimiliki oleh kaedah yang akan dikemukakan dalam makalah ini.

Sekali lagi ditegaskan, kita tidak perlu pembolehubah lalai atau lebihan, lebih-lebih lagi pembolehubah buatan dalam kaedah baru ini.

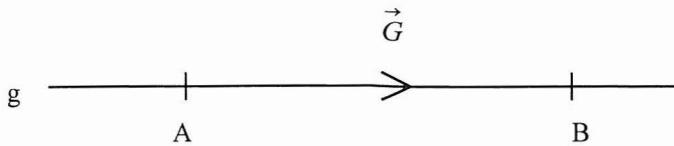
Untuk masalah yang melibatkan tiga dimensi, satah-satah fungsi matlamat dan sisi kekangan yang berupa satah dapat juga digunakan dalam mengira dan menemui titik optimumnya seperti untuk dua dimensi.

## MENYUSUR DAN MELANTUN

Menyusur bererti mengikut atau bersama-sama dengannya dan melantun pula ialah bergerak meninggalkannya secara tegak lurus atau mencangcang atau ortogonal. Mudahnya, jika kita diberi garis AB maka gerakan dari A ke B di sepanjang garis AB dikatakan gerakan menyusur garis AB. Begitu juga, jika titik C tidak terletak pada garis yang melalui AB, maka gerakan dari garis yang melalui AB ke C secara mencangcang dikatakan gerakan melantun garis tersebut. Secara matematik pentakrifan menyusur dan melantun diberikan seperti berikut.

### Takrif 5.1

Misalkan garis  $g$  melalui 2 titik A dan B. Gerakan daripada A ke B di sepanjang garis yang melalui titik A dan B dikatakan gerakan *menyusur*. Ini dinyatakan dalam *Rajah 2*.



Rajah 2. Gerakan menyusur

Dalam *Rajah 2*,  $\vec{G}$  ialah vektor arah daripada A ke B.

**Takrif 5.2**

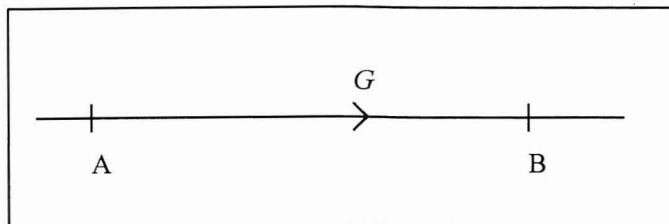
Misalkan garis  $g$  melalui 2 titik A dan B. Misalkan juga titik C berada di luar garis  $g$  tersebut. Gerakan daripada garis  $g$  di titik A ke titik C dalam keadaan mencangcang dikatakan gerakan *melantun*. Ini dinyatakan dalam *Rajah 3*.



Rajah 3. Gerakan melantun

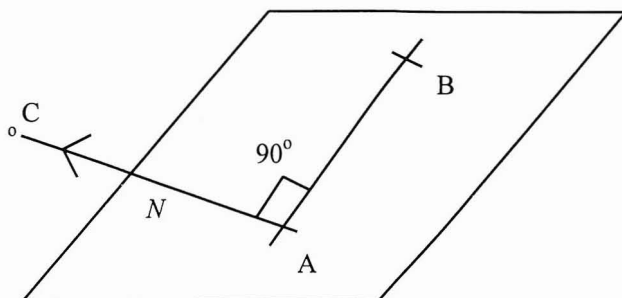
Dalam *Rajah 3*,  $\vec{N}$  ialah vektor arah gerakan dari garis  $g$  ke titik C.  $\vec{N}$  dikenal dengan gelaran vektor normal kepada garis  $g$ .

Gerakan menyusur suatu satah ialah suatu gerakan di sepanjang satah seperti yang ditunjukkan dalam *Rajah 4*. Sementara gerakan melantun suatu



Rajah 4. Gerakan menyusur di atas satah

satah pula ialah gerakan menjauhi satah dalam arah vektor normalnya seperti yang ditunjukkan dalam *Rajah 5*.



*Rajah 5. Gerakan melantun dari satu satah*

Berpandukan keterangan dalam Bahagian 2, titik B dapat ditentukan dengan menggunakan kedudukan titik A dan arah dari A ke B iaitu  $\vec{G}$  (lihat *Rajah 2*). Jadi jika vektor  $\vec{G}$  dan titik A diketahui, maka vektor  $\vec{B}$  dapat ditentukan menerusi rumus

$$\vec{B} = \vec{A} + \alpha \vec{G}$$

dengan  $\alpha$  ialah skalar nyata. Setelah vektor  $\vec{B}$  diketahui, maka sudah tentu, titik B diperoleh.

Titik C pula (lihat *Rajah 3*) dapat ditentukan secara melantun dari garis AB dengan menggunakan vektor normal kepada garis g menerusi rumus

$$\vec{C} = \vec{A} + \beta \vec{N}$$

dengan  $\beta$  ialah skalar nyata.

### KAEDAH SUSUR-LANTUN DUA DIMENSI

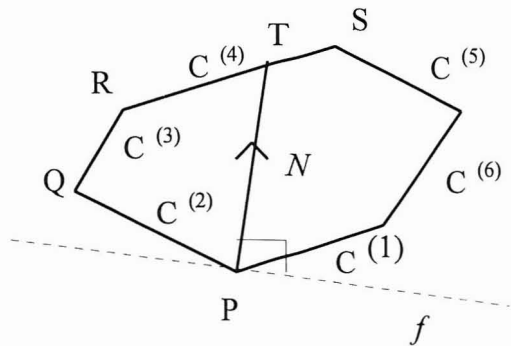
Kita akan pertimbangkan kaedah susur yang dibina menggunakan gerakan susur dan kaedah lantun yang dibina menggunakan gerakan melantun satu per satu seperti yang berikut.

Dalam kaedah susur-lantun ini, kaedah susur dimaksudkan gerakan di sepanjang persamaan garis, satah atau hipersatah sesuatu kekangan. Sementara kaedah lantun pula bergerak di sepanjang vektor normal kepada persamaan garis, satah atau hipersatah suatu fungsi matlamat di suatu titik tertentu.

*Kaedah Lantun*

Pertimbangkan *Rajah 6* yang menyatakan suatu rantau tersaur bagi suatu masalah pengaturcaraan linear. Dalam *Rajah 6*  $C^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) menyatakan nama setiap sisi kekangan,  $\vec{N}$  ialah vektor normal fungsi matlamat  $f$  dan P, Q, R, S ialah titik-titik ekstrim seterusnya T ialah titik pada sisi kekangan  $C^{(4)}$ .

Katakan P ialah sebarang titik tersaur yang diketahui terletak pada satu sisi kekangan tertentu. Dalam *Rajah 6*, garis putus ialah garis fungsi matlamat, dan secara kebetulan, P ialah suatu titik ekstrim. Jadi, P tidak semestinya titik ekstrim. Selanjutnya menerusi pemerinyuan kita dapati titik optimum ialah titik S yang jelas kelihatan dalam *Rajah 6*.



*Rajah 6. Rantau tersaur*

Menerusi gerakan melantun dari titik P menuju ke suatu titik tertentu di sepanjang vektor normal  $\vec{N}$ , kita boleh mencari titik tersaur yang terletak pada salah satu sisi kekangan  $C^{(i)}$  ( $i=1, \dots, 6$ ) dan mempunyai nilai fungsi matlamat yang terbesar dalam arah vektor  $\vec{N}$  tersebut. Titik maksimum tersaur yang terletak pada salah satu sisi kekangan dan juga berada dalam arah vektor  $\vec{N}$  yang bermula daripada titik P ialah titik T. Titik T yang tersaur ini dapat dikira menerusi rumus vektor

$$\vec{T} = \vec{P} + \alpha \vec{N}.$$

Jika titik T terletak pada sisi kekangan  $C^{(4)}$  dan jika  $\alpha_4$  diketahui, maka titik T mestilah memenuhi persamaan kekangan  $C^{(4)}$  iaitu

$$\vec{T} = \vec{P} + \alpha_4 \vec{N}. \tag{6.1}$$

Misalkan  $P = (p_1, p_2)$ ,  $N = (n_1, n_2)$  dan kekangan  $C^{(4)}$  mempunyai persamaan

$$a_{41}x + a_{42}y = b_4.$$



Maka daripada (6.1), diperoleh titik

$$\vec{T} = (p_1, p_2) + \alpha_4(n_1, n_2) = (p_1 + \alpha_4 n_1, p_2 + \alpha_4 n_2)$$

Oleh kerana T terletak pada kekangan  $C^{(4)}$ , maka titik T memenuhi persamaan kekangan C tersebut, ialah

$$\alpha_{41}(p_1 + \alpha_4 n_1) + \alpha_{42}(p_2 + \alpha_4 n_2) = b_4$$

Jadi

$$\alpha_{41}(a_{41}n_1 + a_{42}n_2) = b_4 - a_{41}p_1 - a_{42}p_2$$

atau

$$\alpha_4 = \frac{b_4 - a_{41}p_1 - a_{42}p_2}{a_{41}n_1 + a_{42}n_2}$$

atau

$$\alpha_4 = \frac{b_4 - N_4 \bullet P}{N_4 \bullet N}$$

dengan

$$N_4 = (a_{41}, a_{42})$$

vektor normal kepada kekangan  $C^{(4)}$ .

Hendaklah diperhatikan bahawa titik lantun T seperti yang diterangkan di atas mestilah terletak pada salah satu persamaan kekangan dan tersaur. Jadi untuk Rajah 6.1, diperoleh 6 titik  $T_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) yang setiap satu terletak pada persamaan kekangan  $C^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, 6$ ), yang dikira menerusi rumus

$$\vec{T}_i = \vec{P} + \alpha_i \vec{N}$$

sehingga didapati bahawa

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \alpha_3 > 0, \alpha_4 > 0, \alpha_5 > 0 \text{ dan } \alpha_6 < 0,$$

dan hanya  $\alpha_4$  sahaja yang menjadikan  $T_4$  tersaur dengan keadaan  $f(P) < f(T_4)$  dan nilai  $f(T_4)$  adalah terbesar dalam arah  $N$ . Ringkasnya  $\alpha_2$  dikatakan  $\alpha$  maksimum tersaur apabila

$$\alpha_4 = \text{maks}\{\alpha_i \mid f(P) \leq f(P + \alpha_i N), P + \alpha_i N \text{ tersaur}, i = 1, \dots, 6\}.$$

Secara amnya, jika  $\alpha_m$  ialah maksimum tersaur maka

$$\alpha_m = \text{maks}\{\alpha_i \mid f(P) \leq f(P + \alpha_i N), P + \alpha_i N \text{ tersaur}\}_{i=1, \dots, k}$$

**Takrif 6.1**

Fungsi  $f$  mencapai nilai maksimum dalam arah vektor  $N$  bermula dari vektor  $P$  jika dan hanya titik  $T$  yang diperoleh menerusi rumus vektor

$$T = P + \alpha N,$$

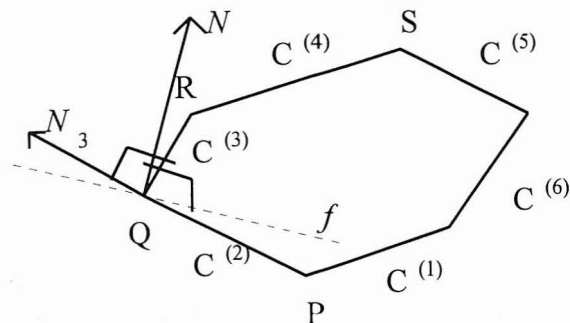
dengan

$$\alpha_m = \text{maks}\{\alpha_i \mid f(P) \leq f(P + \alpha_i N), P + \alpha_i N \text{ tersaur}\}_{i=1, \dots, k}$$

adalah tersaur dan terletak pada salah satu sempadan kekangan. Jika  $\alpha = 0$  maka  $T = P$ .

*Kaedah Susur*

Sekarang pertimbangkan *Rajah 7*. Katakan kita berada pada titik  $Q$ . Secara pemerinyuan,  $S$  ialah titik optimum yang dikehendaki. Jika kita bergerak melantun dalam arah vektor  $N$  maka sudah tentu kita tidak dapat menambah nilai fungsi matlamat kerana nilai maksimum fungsi  $f$  pada titik tersaur dalam arah vektor tersebut ialah di  $Q$  itu sendiri dan sesuai dengan kaedah lantun  $\alpha_m = 0$ . Oleh itu, kita perlu menyusur sisi kekangan  $C^{(3)}$  untuk mencapai titik  $R$  dan seterusnya menyusuri sisi kekangan  $C^{(4)}$  untuk mencapai  $S$ . Jadi dari sini timbul ide kaedah susur.



*Rajah 7. Rantau tersaur*

Untuk menyusuri sisi kekangan  $C^{(3)}$  ini kita perlu vektor arah yang menuju R daripada Q. Untuk dua pembolehubah atau dua dimensi jika vektor normal kepada kekangan  $C^{(3)}$  ialah  $N_3$  dengan  $N_3 = (a_{31}, a_{32})$  maka vektor arah dari titik Q ke titik R ialah  $N_3'$  dengan  $N_3' = (-a_{32}, a_{31})$ . Jadi lagi sekali seperti cara dalam kaedah melantun, titik R dapat ditentukan menerusi rumus vektor

$$\vec{R} = \vec{Q} + \beta \vec{N}_3'$$

Seperti kaedah lantun, untuk Rajah 6.2,  $\beta$  yang sesuai ialah

$$\beta_i = \max\{\beta_i \geq 0 \mid Q + \beta_i N_i' \text{ tersaur}\} \text{ dengan } \beta_i \text{ ditentukan apabila } Q + \beta_i N_i'$$

$i=1, \dots, 6; i \neq 3$

terletak pada persamaan kekangan  $C^{(3)}$  ( $i = 1, \dots, 6$ ).

Jelas, dari perbincangan dua kaedah susur dan kaedah lantun seperti yang diterangkan di atas, kaedah susur-lantun bagi dua dimensi dapat dibina dengan menggabungkan kedua-dua kaedah ini. Jadi dengan jelas kita dapat melihat kaedah yang diperkenalkan ini memainkan peranan yang besar dalam menentukan optimum suatu masalah pengaturcaraan linear dengan hanya menggunakan fungsi matlamat dan kekangannya sahaja. Untuk tiga dimensi kita akan terangkan dalam Bahagian 7.

### KAEDAH SUSUR-LANTUN TIGA DIMENSI

Kaedah susur-lantun bagi masalah yang melibatkan dua dimensi atau dua pembolehubah, dapat diperluaskan kepada masalah yang melibatkan tiga pembolehubah atau lebih. Namun begitu, kita hanya akan menerangkan untuk tiga pembolehubah sahaja.

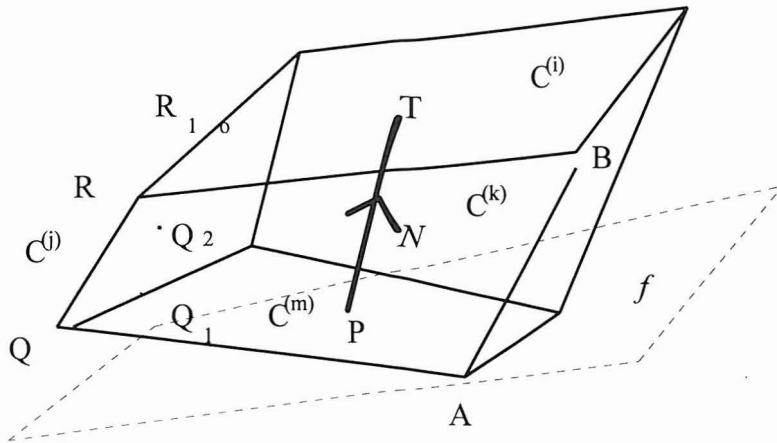
#### *Kaedah Lantun*

Dalam *Rajah 8*, titik P diketahui dan terletak di atas garis hasil persilangan antara satah kekangan kesamaan  $C^{(m)}$  dengan satah fungsi matlamat.  $\vec{N}$  ialah vektor normal kepada satah fungsi matlamat. Bucu R terletak diatas garis yang dihasilkan daripada persilangan antara satah-satah  $C^{(i)}$ ,  $C^{(j)}$  dan  $C^{(k)}$ . Begitu juga dengan titik-titik yang lain yang terletak di atas garis hasil persilangan antara dua satah yang lain dan bucu adalah persilangan antara tiga satah.

Seperti dalam dua dimensi, titik T yang tersaur dan terletak pada satah  $C^{(i)}$  yang nilai fungsinya terbesar dalam arah vektor N dapat dikira dengan menggunakan rumus vektor

$$\vec{T} = \vec{P} + \alpha \vec{N}$$

dan  $\alpha$  hendaklah ditentukan seperti dalam Bahagian 6.



Rajah 8. Rantau tersaur tiga dimensi

*Kaedah Susur*

Kita mengetahui bahawa dalam tiga dimensi, bilangan vektor yang ortogonal kepada suatu vektor adalah tak terhingga banyaknya dan tidak seperti dalam dua dimensi penentuan vektor yang ortogonal ini mudah jika diketahui vektor yang ortogonal tadi. Oleh sebab itu, gerakan susur pada permukaan sesuatu satah hendaklah tepat agar dalam gerakan tersebut, nilai fungsi matlamat selalu bertambah. Dengan menggunakan vektor-vektor normal kepada kekangan dan fungsi matlamat, kita masih boleh menentukan arah yang sesuai untuk diikuti dalam menyusuri sesuatu satah. Gerakan susur dalam suatu satah terbahagi kepada tiga kes seperti yang akan diterangkan nanti.

**Kes 1:**

Sekarang, katakan kita berada pada titik Q (titik bucu) seperti yang ditunjukkan dalam *Rajah 8*. Keadaan gerakan adalah serupa dengan yang dua dimensi yakni kita mesti menyusuri C<sup>(i)</sup> melalui tepi atau sisi QR menuju suatu titik R yang terletak di atas garis persilangan antara satah C<sup>(i)</sup> dengan satah C<sup>(j)</sup>. Susuran hendaklah melalui tepi ini, kerana melalui arah ini, nilai fungsi matlamat akan bertambah. Penentuan R adalah seperti yang berikut.

Diketahui garis QR ortogonal kepada vektor normal satah C<sup>(j)</sup> iaitu  $\vec{N}_j$ . Begitu juga garis QR ortogonal kepada normal satah C<sup>(k)</sup> (satah ini melalui titik A, B, R dan Q). Jika  $\vec{N}_k$  ialah normal kepada satah C<sup>(k)</sup> maka

$$\vec{N}_j \perp QR \text{ dan } \vec{N}_k \perp QR$$

Oleh sebab itu, satah yang melalui normal  $\vec{N}_j$  dan  $\vec{N}_k$  pasti ortogonal kepada QR. Jadi QR menjadi normal kepada satah yang melalui  $\vec{N}_j$  dan  $\vec{N}_k$ . Maka menerusi pendaraban vektor (silang), jika  $N_b$  mewakili vektor QR, didapati

$$\vec{N}_b = \vec{N}_j \times \vec{N}_k$$

Supaya dapat dipilih arah yang sesuai (nilai fungsi matlamat bertambah) maka kiralah  $f(N_b)$  dan  $f(-N_b)$ . Jika  $f(N_b) < f(-N_b)$  maka  $N_b := -N_b$  selainnya  $N_b := N_b$ . Dengan demikian kita selalu dapat menentukan arah yang sesuai untuk gerakan susur ini. Tanpa ragu-ragu lagi kita memperoleh titik R dengan menggunakan rumus vektor

$$\vec{R} = \vec{Q} + \beta \vec{N}_b$$

**Kes 2:**

Misalkan kita berada pada titik  $Q_1$ , iaitu pada persilangan satah  $C^{(i)}$  dan  $C^{(m)}$ . Dari  $Q_1$  kita menyusur ke Q dengan menggunakan arah susur  $\vec{N}_j \times \vec{N}_m$  seperti yang dijelaskan dalam kes 1. Jika arah  $\vec{N}_j \times \vec{N}_m$  adalah sesuai (nilai fungsi matlamat bertambah), maka diperolehi titik Q menerusi penggunaan rumus

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \beta(\vec{N}_j \times \vec{N}_m)$$

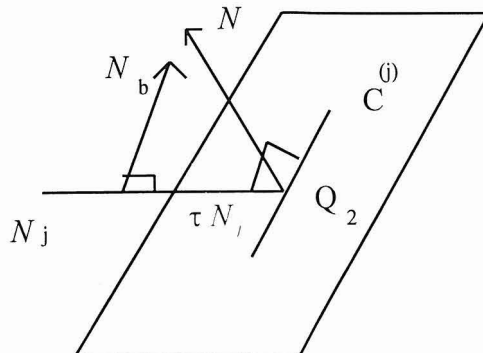
selainnya gunakan rumus

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \beta(-\vec{N}_j \times \vec{N}_m)$$

Seterusnya lakukan gerakan melantun atau meneruskan gerakan susur seperti **kes 1**.

**Kes 3:**

Misalkan kita berada pada permukaan satah  $C^{(i)}$  iaitu di  $Q_2$ . Jelas, tanpa maklumat yang lain, kita masih mampu menggunakan vektor normal fungsi matlamat dan vektor normal  $\vec{N}_j$  sahaja. Berpandukan *Rajah 8*, kita dapat melukis pada kedudukan titik  $Q_2$ , vektor-vektor normal  $\vec{N}$  dan  $\vec{N}_j$  seperti ditunjuk dalam *Rajah 9*



Rajah 9: Pementasan vektor arah

$\tau \vec{N}_j$  ialah vektor yang diperoleh hasil unjuran vektor  $\vec{N}$  kepada vektor  $\vec{N}_j$ .

Untuk masalah pemaksimuman, kita menyusur satah  $C^{(j)}$  dalam arah vektor  $\vec{N}_b$  kerana dalam arah ini, nilai fungsi  $f$  akan bertambah.  $\vec{N}_b$  dikira menerusi rumus hasil tambah vektor sebagai

$$\vec{N}_b = \vec{N} - \tau \vec{N}_j.$$

Jelas  $\vec{N}_b \perp \vec{N}_j$ . Jadi  $\vec{N}_b \bullet \vec{N}_j = 0$ , sehingga diperoleh

$$\tau = \frac{N \bullet N_j}{N_j \bullet N_j}$$

Dengan demikian diperoleh

$$\vec{N}_b = \vec{N} - \frac{N \bullet N_j}{N_j \bullet N_j} \vec{N}_j$$

Sekarang, bergeraklah dari titik  $Q_2$  menyusuri satah  $C^{(j)}$  disepanjang vektor arah  $\vec{N}_b$  hingga mencecah satah  $C^{(j)}$ , katakan pada titik  $R_1$ . Jika  $R_1 = R$  (titik bucu), maka teruskan gerakan sama ada gerakan melantun atau menyusur seperti kes 1. Jika  $R_1 \neq R$  (bukan titik bucu), maka lakukan gerakan seperti gerakan dalam kes 2.

### PENENTUAN PENYELESAIAN TERSAUR ASAS AWAL

Dalam bahagian ini, kita akan menunjukkan cara pencarian penyelesaian tersaur asas awal. Kita boleh memulainya dengan titik asalan atau dengan sebarang titik pada sebarang kekangan bagi mencari titik yang boleh dirujuk sebagai penyelesaian tersaur asas awal.

**Kes 1:** Misalkan  $\mathbf{O}$  ialah asalan dan  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ialah vektor unit. Titik

$$A = \mathbf{O} + \alpha \mathbf{e}_i; (\alpha \text{ skala nyata})$$

dapat ditentukan apabila  $A$  terletak pada kekangan  $C^{(j)}$  untuk  $j = 1, 2, 3, \dots, k$ . Jika  $A$  tersaur maka  $A$  ialah penyelesaian tersaur asas awal. Jika  $A$  tak tersaur, bermula dari  $A$ , bergerak disepanjang kekangan  $C^{(j)}$  bagi mencari titik tersaur  $T$  menggunakan

$$T = A + \beta N_b^{(j)}$$

dengan  $\beta$  skala nyata dan  $N_j$  ialah vektor arah kekangan  $C^{(j)}$ . Titik T ini ialah persilangan kekangan  $C^{(j)}$  dengan salah satu kekangan yang lain. Jika tidak ada titik T yang tersaur maka kekangan  $C^{(j)}$  tidak sepatutnya menjadi kekangan. Jadi sudah pasti melalui gerakan di sepanjang kekangan  $C^{(j)}$  ini akan menemui sekurang-kurangnya satu titik T yang tersaur. Jadi ambillah yang mula-mula ditemui dan seterusnya dirujuk sebagai penyelesaian tersaur asas awal.

**Kes 2:** Jika kita hendak bermula dengan salah satu titik selain titik asalan, titik itu dapat dipilih menerusi pemerinyuan sama ada ia memenuhi salah satu kekangan tertentu atau tidak. Jika telah diketahui titik itu terletak pada salah satu kekangan, maka ujilah ketersaurannya. Jika tersaur, maka kita menjadikan titik itu sebagai penyelesaian tersaur asas awal. Jika tidak, bergeraklah di sepanjang kekangan itu bagi mencari titik tersaur seperti dalam **kes 1**.

**Kes 3:** Jika **kes 1** dan **kes 2** tidak berjaya menemui titik tersaur maka masalah pengaturcaraan linear itu dikatakan tidak mempunyai penyelesaian.

### ALGORITMA

Dari perbincangan yang disajikan dalam Bahagian 6 dan Bahagian 7, diperolehi algoritma untuk menentukan titik destinasi dalam gerakan menyusur dan gerakan melantun.

#### Algoritma lantun

Data:  $C^{(j)}$ , P dan N.

1.  $\alpha = \frac{b_i - P \bullet N_i}{N \bullet N_i}$
2.  $T = P + \alpha N$
3. *kembali.*

#### Algoritma susur

Data:  $C^{(i)}$ ,  $C^{(j)}$ ,  $C^{(m)}$ ,  $C^{(k)}$ , Q dan N.

1. jika  $Q \in \text{ped}(C^{(m)})!$  ped bermaksud pedalaman maka! **Kes 3**

$$1.1. \tau = \frac{N \bullet N_m}{N_m \bullet N_m}$$

1.2.  $N_b := N - \tau N_m$

1.3.  $Q := Q + \beta N_b$

1.4. kira  $\beta$  sehingga  $Q \in C^{(j)}$

1.5. jika  $Q$  bukan titik bucu buat

1.5.1.  $N_b := N_j \times N_m$

1.5.2.  $N_b :=$  jika  $f(N_b) < f(-N_b)$

maka  $-N_b$

selainnya  $N_b$

1.5.3.  $Q := Q + \beta N_b$

1.5.4. kira  $\beta$  sehingga  $Q$  titik bucu

selainnya

1.6. jika  $Q$  bukan titik bucu

maka! **Kes 2**

1.6.1.  $N_b := N_j \times N_m$

1.6.2.  $N_b :=$  jika  $f(N_b) < f(-N_b)$

maka  $-N_b$

selainnya  $N_b$

1.6.3.  $Q := Q + \beta N_b$

1.6.4. kira  $\beta$  sehingga  $Q$  titik bucu

selainnya! **Kes 1**

1.6.5.  $\{! Q \text{ adalah titik bucu}\}$

2.  $N_b := N_j \times N_k$

3.  $N_b :=$  jika  $f(N_b) < f(-N_b)$

maka  $-N_b$

selainnya  $N_b$



4.  $R: = Q + \beta N_b$
5. kira  $\beta$  sehingga  $R \in C^{(i)}$ ! Jelas di sini  $R$  titik bucu.
6. *kembali.*

### PENENTUAN PENYELESAIAN

Menerusi kaedah susur-lantun ini, tiga jenis penyelesaian bagi masalah pengaturcaraan linear iaitu (i) optimum dan unik, (ii) optimum tetapi tak terpermanai bilangannya, dan (iii) penyelesaian tak terbatas dapat ditentukan.

Untuk masalah yang melibatkan dua pembolehubah, ketiga-tiga bentuk penyelesaian di atas dapat diwakilkan seperti yang ditunjuk dalam *Rajah 10*. Rantau berlorek menyatakan rantau tersaur. Kaedah susur-lantun dapat memastikan ketiga-tiga penyelesaian di atas seperti yang akan diterangkan nanti.

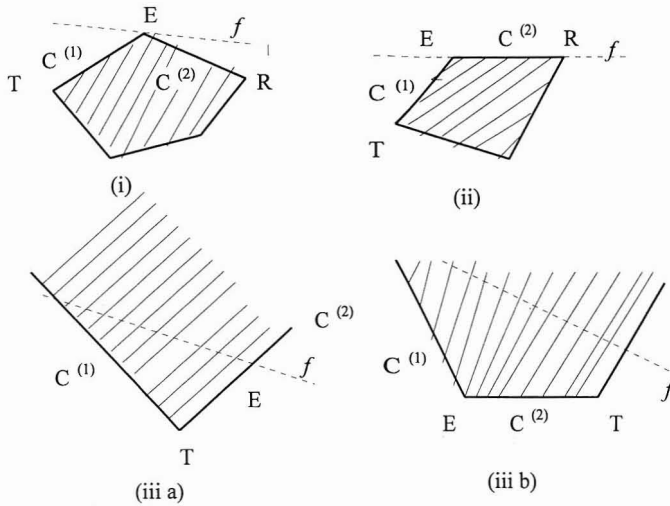
Katakan kita berada pada titik E. Menerusi kaedah lantun, didapati nilai pekali  $\alpha$  dalam gerakan lantun menjadi sifar. Jadi, nilai fungsi matlamat tidak menokok. Oleh itu hanya gerakan susur sahaja yang memainkan peranan dalam menambah nilai fungsi matlamat atau tidak.

Untuk *Rajah 10 (i)*, penyusuran yang dibuat menerusi kekangan  $C^{(1)}$  dan  $C^{(2)}$  menyebabkan nilai fungsi matlamat menyusut, masing-masing pada titik tersaur T dan R. Semasa gerakan susur dari titik E ke titik T atau R, nilai-nilai  $\beta$  boleh jadi negatif atau positif, tetapi yang pentingnya diperoleh dua titik tersaur yang menyebabkan nilai fungsi matlamat menyusut. Oleh itu, apabila keadaan ini terjadi, maka E adalah optimum dan unik.

Untuk *Rajah 10(ii)*, penyusuran dari titik E di sepanjang kekangan  $C^{(1)}$  menyebabkan nilai fungsi matlamat menyusut di titik tersaur T, tetapi penyusuran di sepanjang kekangan  $C^{(2)}$  hingga diperoleh titik tersaur R didapati nilai  $f(R) = f(E)$ . Keadaan ini dapat digunakan untuk menyimpulkan bilangan penyelesaian optimum adalah tak terpermanai dengan nilai fungsi matlamat ialah  $f(R)$  atau  $f(E)$ .

Untuk *Rajah 10(iii)*, penyusuran dari titik E di sepanjang kekangan  $C^{(2)}$  menghasilkan hanya satu sahaja titik tersaur T dan sememangnya sedemikian, dengan keadaan  $f(T) < f(E)$ . Dalam kes ini kita tidak dapat menyusur kekangan yang lain kerana tidak ada yang melalui titik E. Kita tidak boleh menyimpulkan E sebagai optimum kerana tidak ada titik lain katakan  $R \neq T$  sehingga  $f(R) < f(E)$  seperti dalam *Rajah 10.1 (i)*. Jadi penyelesaian yang dapat disimpulkan ialah penyelesaian tak terbatas.

Untuk *Rajah 10(iii)* pula, penyusuran dari titik E di sepanjang kekangan  $C^{(1)}$  tidak menghasilkan titik tersaur yang menyebabkan nilai fungsi matlamat menokok. Penyusuran dari titik E di sepanjang kekangan  $C^{(2)}$  pula menghasilkan titik tersaur T. Jika  $f(T) < f(E)$ , maka keadaannya seperti dalam *Rajah 10.1 (iii)* sehingga dapat disimpulkan masalah mempunyai penyelesaian tak terbatas. Jika  $f(T) > f(E)$ , maka kita bergerak ke titik T. Untuk kes ter-



Rajah 10. Penentuan penyelesaian

akhir ini, keadaannya serupa dengan keadaan *Rajah 10* (iii a). Jadi lagi sekali dapat disimpulkan bahawa masalah mempunyai penyelesaian tak terbatas.

### CONTOH PENGIRAAN

Untuk menyaksikan cara penggunaan kaedah lantun dan kaedah susur perhatikan contoh yang berikut.

#### Contoh 11.1

Maksimumkan  $f(x) = -x_1 + x_2 - x_3$   
 tertakluk kepada

$$C^{(1)} : 3x_2 + 2x_3 \leq 27$$

$$C^{(2)} : 3x_1 + x_3 \leq 24$$

$$C^{(3)} : 3x_2 - 2x_3 \geq 9$$

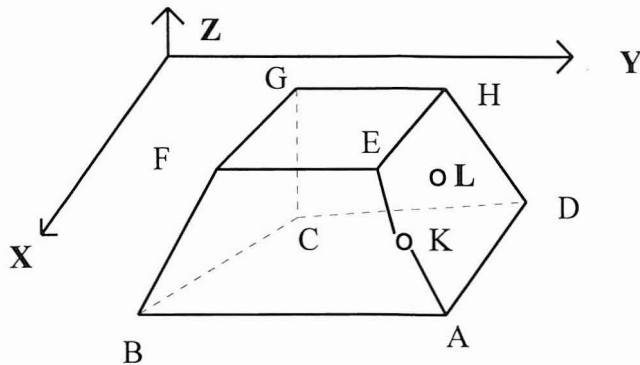
$$C^{(4)} : 3x_1 + x_3 \geq 15$$

$$C^{(5)} : x_3 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

#### Penyelesaian

Dengan melukis kekangan-kekangan di atas diperoleh rantau tersaur yang berbentuk semacam kubus seperti dalam *Rajah 11*. Bucu-bucu bentuk kubus dalam *Rajah 11.1* ialah  $A = (8, 9, 0)$ ,  $B = (8, 3, 0)$ ,  $C = (5, 3, 0)$ ,  $D = (5, 9, 0)$ ,  $E = (7, 7, 3)$ ,  $F = (7, 5, 3)$ ,  $G = (6, 5, 3)$  dan  $H = (6, 7, 3)$ . Titik optimum ialah  $D = (5, 9, 0)$  dengan nilai maksimum fungsi matlamat  $f^* = 4$ .



Rajah 11. Rantau tersaur ABCDEFGH

Dalam *Rajah 11*, satah  $C^{(1)}$  diwakili oleh sisiempat ADHE, satah  $C^{(2)}$  diwakili oleh sisiempat ABFE, satah  $C^{(3)}$  diwakili oleh sisiempat CDHG, satah  $C^{(4)}$  diwakili oleh sisiempat EFGH dan satah ABCD berada dalam satah XOY.

Pertunjukan kaedah lantun dan kaedah susur bagi contoh ini diberikan dalam beberapa keadaan seperti yang berikut.

*Gerakan Lantun:*

Misalkan titik semasa ialah  $E = (7, 7, 3)$ . Jelas  $f(E) = -3$ .

Gerakan lantun pada E diberikan oleh rumus

$$T = E + \alpha N = (7 - \alpha, 7 + \alpha, 3 - \alpha).$$

Jelas E berada pada  $C^{(1)} \cap C^{(2)} \cap C^{(5)}$ . Jadi kita uji kedudukan titik T pada satah  $C^{(3)}$ ,  $C^{(4)}$  dan satah XOY sahaja.

Jika  $T \in C^{(3)}$ , maka

$$3(7 + \alpha) - 2(3 - \alpha) = 9$$

sehingga

$$\alpha = -1.2.$$

Dengan nilai  $\alpha$  ini memberikan  $T = \left( \frac{41}{5}, \frac{29}{5}, \frac{9}{5} \right)$  tak tersaur.

Jika  $T \in C^{(4)}$ , maka

sehingga  $3(7 - \alpha) - (3 - \alpha) = 15$

$$\alpha = 1.5.$$

Jadi diperoleh titik tersaur  $T = (5.5, 8.5, 1.5)$  yang jelas tak tersaur kerana tidak memenuhi kekangan  $C^{(1)}$ .

Jika  $T \in XOY$ , maka

$$3 - \alpha = 0$$

sehingga  $\alpha = 3$ . Jadi diperoleh titik  $(4, 10, 0)$  yang jelas tak tersaur.

Jadi menerusi gerak melantun, tidak ditemui mana-mana titik tersaur. Oleh sebab itu kita teruskan dengan gerakan menyusur di E.

#### *Gerakan susur*

Untuk ini, kita lihat kes demi kes seperti yang berikut:

#### **Kes 1:**

Pada titik E diperoleh beberapa vektor arah menyusur satah seperti yang dinyatakan oleh vektor yang berikut.

$$N_b = \begin{cases} N_5 \times N_1 \\ N_5 \times N_2 \\ N_2 \times N_1 \end{cases}$$

Jika dipilih arah  $N_5 \times N_1$ , maka didapati  $N_b = (1, 0, 0)$ . Sesuai dengan cadangan dalam kaedah didapati

$$f(1, 0, 0) = -1 < f(-1, 0, 0) = 1$$

sehingga dipilih  $N_b = (-1, 0, 0)$ . Jadi diperoleh titik

$$R = E + \beta N_b = (7 - \beta, 7, 3)$$

dan supaya tersaur hanya  $R \in C^{(4)}$ , sahaja yang boleh dalam arah nilai fungsi matlamat bertambah. Jadi didapati  $\beta = 1$ , sehingga  $R = (6, 7, 3)$  dan  $f(R) = -2$ .

Jika dipilih arah  $N_5 \times N_2$ , maka didapati  $N_b = (0, -1, 0)$ . Sesuai dengan cadangan dalam kaedah didapati

$$f(0, -1, 0) = -1 < f(0, 1, 0) = 1$$

sehingga dipilih  $N_b = (0, 1, 0)$ . Jadi diperoleh titik

$$R = E + \beta N_b = (7, 7 + \beta, 3)$$

dan supaya tersaur hanya  $R \in C^{(3)}$  sahaja yang boleh dalam arah nilai fungsi matlamat bertambah. Jadi didapati  $\beta = -2$ , sehingga  $R = (7, 5, 3)$  dan  $f(R) = -5$ .

Jika dipilih arah  $N_2 \times N_1$ , maka didapati  $N_b = (-1, -2, 3)$ . Sesuai dengan cadangan dalam kaedah didapati

$$f(-1, -2, 3) = -4 < f(1, 2, -3) = 4$$

sehingga dipilih  $N_b = (1, 2, -3)$ . Jadi diperoleh titik

$$R = E + \beta N_b = (7 + \beta, 7 + 2\beta, 3 - 3\beta)$$

dan supaya tersaur hanya  $R \in XOY$  sahaja yang boleh dalam arah nilai fungsi matlamat bertambah. Jadi didapati  $\beta = 1$ , sehingga  $R = (8, 9, 0)$  dan  $f(R) = 1$ . Kesimpulannya pilihlah titik  $R = (8, 9, 0)$ .

### Kes 2:

Pada titik K, vektor arah  $N_b = (-1, -2, 3)$ . Seperti dalam kes 1, pilih  $N_b = (1, 2, -3)$  kerana dalam arah ini, nilai fungsi matlamat akan bertambah. Jelas, sekali lagi diperoleh  $R = (8, 9, 0)$ .

### Kes 3:

Pada titik  $L = (7, 8, 1.5)$ ,  $N = (0, 3, 2)$ . Mengikut rumus dalam kaedah susur didapati bahawa

$$N_b = N - \frac{N \bullet N_l}{N_l \bullet N_l} N_l = \left(-1, -\frac{10}{13}, -\frac{15}{13}\right)$$

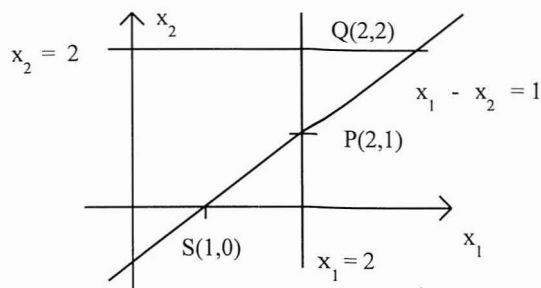
Jadi

$$R = L + \beta N_b = \left(7 - \beta, 8 + \frac{10}{13}\beta, -\frac{15}{13}\beta\right).$$

Gerakan menyusur yang menuju titik tersaur sahaja hanya pada titik  $R = (5, 7, 9, 0)$  dan nilai  $f(R) = 3.3$ .

### Contoh 11.2

Maksimumkan  $f(x) = 2x_1 - x_2$



Rajah 12. Rantau tersaur segmen PQ

tertakluk kepada

$$\begin{aligned} C^{(1)} : x_1 - x_2 &\leq 1 \\ C^{(2)} : x_1 &= 2 \\ C^{(3)} : x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

### Penyelesaian

Rantau tersaur ialah garis segmen PQ dengan  $P(2,1)$  dan  $Q(2,2)$ . Titik optimum ialah  $P(2,1)$  dengan nilai fungsi matlamat  $f^* = 3$ .

Jika kekangan  $C^{(3)}$  tidak wujud, maka rantau tersaur adalah tak terbatas, tetapi penyelesaiannya masih terbatas di  $(2,1)$ .

Pertunjukan kaedah lantun dan kaedah susur bagi contoh ini diberikan dalam beberapa keadaan seperti yang berikut.

### Gerakan Lantun

Misalkan titik semasa ialah  $P = (2,1)$ . Jelas  $f(P) = 3$ .

Gerakan lantun pada P diberikan oleh rumus

$$T = P + \alpha N = (2 + 2\alpha, 1 - \alpha).$$

Jelas P berada pada  $C^{(1)} \cap C^{(2)}$ . Jadi kita uji kedudukan titik T pada satah  $C^{(3)}$  sahaja.

Jika  $T \in C^{(3)}$ , maka

$$1 - \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = -1.$$

Dengan nilai  $\alpha$  ini memberikan  $T = (0,2)$  tak tersaur. Jadi menerusi gerak

melantun, tidak ditemui mana-mana titik tersaur. Oleh sebab itu kita teruskan dengan gerakan menyusur di P.

*Gerakan susur*

Untuk ini, kita lihat kes demi kes seperti yang berikut.

**Kes 1:**

Bermula pada titik P, susurilah kekangan  $C^{(1)}$ . Normal kepada  $C^{(1)}$  ialah  $N_1 = (1, -1)$ . Jadi  $N_b = (1,1)$ . Sesuai dengan cadangan dalam kaedah didapati

$$f(N_b) = 1 > f(-N_b) = -1.$$

sehingga dipilih  $N_b = (1,1)$ . Jadi

$$R = P + \beta N_b = (2 + \beta, 1 + \beta)$$

dan supaya tersaur hanya  $\beta = 0$ . Jadi tidak berubah, yakni masih di P juga.

**Kes 2:**

Bermula pada titik P, susurilah kekangan  $C^{(2)}$ . Normal kepada  $C^{(2)}$  ialah  $N_2 = (1, 0)$ . Jadi  $N_b = (0, -1)$ . Sesuai dengan cadangan dalam kaedah didapati

$$f(N_b) = 1 > f(0,1) = -1.$$

sehingga dipilih  $N_b = (0,-1)$ . Jadi

$$R = P + \beta N_b = (2, 1 - \beta)$$

dan supaya tersaur dan  $R \in C^{(3)}$  maka  $\beta = -1$ . Jadi diperoleh  $R = (2,2)$ , tetapi  $f(2,2) = 2 < f(2,1) = 3$ .

Jadi jelas gerakan susur tidak mengubah suai nilai fungsi matlamat. Jadi penyelesaiannya ialah  $(2,1)$  dengan  $f^* = 3$ .

**KEPUTUSAN BERANGKA**

Kaedah susur-lantun bagi penyelesaian masalah pengaturcaraan linear telah diuji kepada beberapa masalah pengaturcaraan linear yang berikut.

**Contoh 12.1**

Maksimumkan  $f(x) = 3x_1 + x_2$

tertakluk kepada

$$\begin{aligned} 5x_1 - 4x_2 &\leq 14 \\ -x_1 + 4x_2 &\geq 2 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 5 \\ 6x_1 - x_2 &\geq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4x_1 + 9x_2 &\geq 60 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Penyelesaiannya  $x^* = (6,4)$  dengan nilai fungsi matlamat 22.

**Contoh 12.2**

Maksimumkan  $f(x) = 4x_1 + 3x_2$

tertakluk kepada

$$\begin{aligned}2x_1 + 3 &\leq 6 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Penyelesaiannya  $x^* = (0.6, 1.6)$  dengan nilai fungsi matlamat 7.2.

**Contoh 12.3**

Maksimumkan  $f(x) = x_1 + x_2$

tertakluk kepada

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\geq 1 \\ 5x_1 + 10x_2 &\leq 50 \\ x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Penyelesaiannya  $x^* = (10,0)$  dengan nilai fungsi matlamat 10.

**Contoh 12.4**

Maksimumkan  $f(x) = -3x_1 - 4x_2$

tertakluk kepada

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &\geq 0 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Penyelesaiannya  $x^* = (2,2)$  dengan nilai fungsi matlamat 2.

**Contoh 12.5**

Maksimumkan  $f(x) = 2x_1 + x_2$

tertakluk kepada



$$\begin{aligned} 11x_1 + 3x_2 &\geq 33 \\ 8x_1 + 5x_2 &\leq 40 \\ 7x_1 + 10x_2 &\leq 70 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Penyelesaiannya  $x^* = (5,0)$  dengan nilai fungsi matlamat 10.

**Contoh 12.6**

Maksimumkan  $f(x) = 4x_1 + 5x_2$

tertakluk kepada

$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 &\leq 200 \\ 3x_1 + 6x_2 &= 180 \\ 8x_1 + 5x_2 &\geq 160 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Penyelesaiannya  $x^* = (26.67, 16.67)$  dengan nilai fungsi matlamat 190.

**Contoh 12.7**

Maksimumkan  $f(x) = x_2$

tertakluk kepada

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 &\leq -10 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 6 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 21 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 38 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1 &= 10 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Penyelesaiannya  $x^* = (10,14)$  dengan nilai fungsi matlamat 14.

**Contoh 12.8**

Maksimumkan  $f(x) = -x_1 + x_2 - x_3$

tertakluk kepada

$$\begin{aligned} 3x_2 - 2x_3 &\leq 27 \\ 3x_1 + x_3 &\leq 24 \\ 3x_2 - 2x_3 &\geq 9 \\ 3x_1 - x_3 &\geq 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Penyelesaiannya  $x^* = (5, 9, 0)$  dengan nilai fungsi matlamat 4.

**Contoh 12.9**

Maksimumkan  $f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$

tertakluk kepada

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &\leq 1 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 &\leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Penyelesaiannya  $x^* = (0, \frac{7}{9}, \frac{40}{9})$  dengan nilai fungsi matlamat  $\frac{40}{9}$ .

Dari pengujian yang dilakukan dengan menggunakan komputer Hewlett Packard Vectra 486/33U dan Turbo Pascal 6.0 bagi kedua-dua kaedah susur-lantun dan kaedah simpleks piawai terhadap sembilan contoh di atas, diperoleh keputusan seperti yang diberikan dalam Jadual 12.1.

JADUAL 1

Contoh	Kaedah Simpleks	Kaedah Susur-Lantun
1	0.22 saat	0.17 saat
2	0.06	0.05
3	0.11	0.17
4	0.05	0.05
5	0.11	0.16
6	0.11	0.11
7	0.22	0.11
8	0.22	0.28
9	0.11	0.28

**PERBINCANGAN DAN KESIMPULAN**

Dalam makalah ini, dikemukakan suatu kaedah yang disebut “Kaedah Susur-Lantun’ yang diharap akan menjadi kaedah alternatif kepada kaedah simpleks [1] yang terkenal itu. Khusus untuk makalah ini, kaedah ini dikemukakan bagi menyelesaikan masalah yang melibatkan dua dan tiga pembolehubah sahaja. Untuk masalah yang melibatkan empat atau lebih pem-

bolehubahan akan dikemukakan dalam makalah yang lain. Dalam makalah yang satu lagi itu akan kita huraikan perbandingannya dengan kaedah simpleks [1] secara terperinci. Namun begitu, kita sediakan juga satu jadual perbandingan masa pengiraan penentuan penyelesaian optimum seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 12.1.

Dalam Jadual 12.1, didapati bahawa kaedah simpleks piawai kecekapannya hampir sama dengan kecekapan kaedah susur-lantun. Keputusan mungkin berbeza apabila dikembangkan kepada masalah yang melibatkan empat atau lebih pembolehubah. Insya Allah, pada masa yang akan datang masalah yang melibatkan empat atau lebih pembolehubahan akan dikemukakan.

Sebagai kesimpulan untuk makalah ini, kita dapati bahawa kaedah ini tidak langsung memerlukan pembolehubah-pembolehubah lalain, lebihan dan buatan seperti yang diperlukan oleh kaedah simpleks. Menerusi kaedah ini juga, kita dapat secara langsung mengenal penyelesaian tak terbatas, bilangan penyelesaian yang tak terpermanai dan sudah tentu penyelesaian optimumnya seperti yang disajikan dalam Bahagian 10. Sesungguhnya, keistimewaan kaedah ini terletak pada penggunaan maklumat yang ada pada fungsi matlamat dan fungsi kekangan sahaja. Sudah jelas keistimewaan ini tidak wujud pada kaedah simpleks.

#### RUJUKAN

- DANTZIG, G.B. 1963. *Linear Programming and Extensions*. Princeton N. J.: Princeton University Press. N. J.
- KARMAKAR, N. 1984. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica* **4** (4): 373-395.
- KHACHIAN, L.G. 1979 A polynomial algorithm in linear programming, *Doklady Akademii Nauk SSSR* **244S**: 1093-1096. diterjemahkan dalam Bahasa Inggeris di dalam *Soviet Mathematics Doklady* **20**(1): 191-194.
- MOHD, I.B. 1991. *Teori dan Penggunaan Pengaturcaraan Linear*. Kuala Lumpur: Dewan Bahasa dan Pustaka Malaysia.