Pertanika J. Sci. & Technol. **10(1)**: 89 - 97 (2002)

ISSN: 0128-7680

Model Resapan Mekanik Kuantum Zarah Bebas dalam Selang Terbatas

Shaharir bin Mohamad Zain & Nik Rusdi bin Yaacob

Pusat Pengajian Sains Matematik
Universiti Kebangsaan Malaysia
43600 UKM, Bangi
Selangor, Malaysia

Diterima: 8 Januari 2001

ABSTRAK

Mengikut tafsiran piawai (tafsiran Born dan tafsiran Copenhagen Bohr) mekanik kuantum, magnitud kuasa dua fungsi gelombang bagi sesuatu zarah selama ini dianggap mewakili fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi zarah berkenaan berada dalam keadaan tersebut apabila sukatan dilakukan ke atasnya. Dalam makalah ini, ditunjukkan bahawa bagi zarah yang secara klasiknya berupa zarah bebas (potensinya sifar) berjisim m dalam selang terbatas, kuasa dua modulus fungsi gelombangnya memenuhi persamaan resapan dengan pekali resapan $\rho = \hbar/2m$, pekali hanyutan $-2\frac{\partial F}{\partial x}$ dan bersumberkan $W = 2(U + \frac{1}{4}\kappa^2)$ dengan F ialah fasa fungsi gelombang berkenaan, κ suatu ungkapan yang melibatkan fasa dan tenaga zarah tersebut, dan $U = \rho\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial t} + \rho\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2$ ialah sumber bagi resapan yang berpekali resapan dan hanyutan yang sama.

ABSTRACT

Acoording to the standard interpretation of quantum mechanics (Born and Bohr-Copenhagen interpretations), the square of the magnitude of the wave function represents a probability density function for a particle in a state whereby a measurement is made on it. In this article it is shown that a quantum particle which is classically a free particle in a bounded interval with mass *m*, has its wave function whose square modulus satisfies a diffusion equation with a diffusion coefficient $\rho = \hbar/2m$, a drift coefficient $-2\frac{\partial F}{\partial x}$ and a source $W = 2(U + \frac{1}{4}\kappa^2)$ where F is the phase function, κ depends on the phase and the energy of the particle, and $U = \rho\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial t} + \rho\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2$ is a source of a diffusion with the same diffusion and drift coefficients.

PENGENALAN

Semenjak kemunculan persamaan Schroedinger (1926) yang terkenal itu, selepas ini dirujuk sebagai PsS sahaja, iaitu

$$\hbar k \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V)\Psi, k=\sqrt{-1}),\ \hbar \text{ pemalar Planck-Dirac,} \quad (1)$$

bagi zarah klasik berjisim m dan berpotensi V, pelbagai tafsiran telah diberikan kepada fungsi gelombang Ψ sehingga melahirkan berbagai-bagai mazhab dalam mekanik kuantum. Tafsiran yang paling terkenal ialah tafsiran Born (1926), iaitu $|\Psi|^2$ ialah fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi zarah berkenaan itu berada dalam sesuatu kedudukannya apabila sukatan dilakukan ke atasnya. Tafsiran ini cuba diperjelaskan oleh ramai pihak dan sekaligus mendapat tentangan daripada pelbagai pihak yang lain sehingga melahirkan banyak mazhab dalam mekanik kuantum (Lihat keadaan ini umpamanya dalam Wick 1995). Hujah-hujah Born yang asal itu telah cuba diperjelaskan oleh ramai penyokongnya dari semasa ke semasa hingga hari ini seperti yang dapat dilihat dalam Pais (1982), Cartwright (1987) dan Robinett (1997) kerana tafsiran ini (yang terkenal sebagai tafsiran Copenhagen) masih menjadi ikutan umum walaupun kelemahannya juga diutarakan dari semasa ke semasa (sejak Einstein mengkritik keras Bohr dan rakan-rakan sealirannya di Copenhagen itu) dan kritikan yang panjang lebar dan canggih pada dua dasawarsa terakhir ini ialah yang dilakukan oleh Healey (1990). Keserupaan PsS dengan persamaan resapan, selepas ini yang kemudian itu dirujuk sebagai PsR sahaja,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (r\nabla^2 + U)w \quad (2)$$

dengan $\rho > 0$ sebagai pekali resapan yang boleh bergantung pada masa dan U sebagai sumber resapan, telah mendorong ramai pihak mengkaji PsS menerusi PsR kerana, antara lainnya, PsR berhubung rapat dengan proses stokastik yang taburannya diberikan oleh penyelesaian PsR itu, dan membawa kepada penyelesaian Kac dan Feynman yang sorotan mutakhirnya dapat dilihat dalam tesis Zainal (1997). Sementara itu Bess (1994) cuba berhujah menerusi mekanik statistik klasik dan persamaan Jakobi-Hamilton dalam mekanik zarah klasik bagi memperoleh PsS yang bertujuan menzahirkan asal-usul kebarangkalian dalam mekanik kuantum itu. Karya yang lebih meyakinkan dan lebih komprehensif dan luas jangkauannya ialah kerja Nagasawa (1993) dan Aebi (1996), tetapi mereka ini memulakan kajian analogi PsS dan konjugatnya dengan sepasang PsR yang satu daripadanya berpekali resapan negatif, yang tentunya menimbulkan banyak kemusykilan. Yang lainnya berpuas hati dengan model mekanik bendalir klasik dan hidrodinamik klasik dengan mengimbau kepada persamaan keselanjaran dan persamaan Euler dalam bidang ini, iaitu suatu kajian yang dimulai oleh Madelung (1926) dan mendapat sambutan yang hebat juga sehingga kini seperti yang dapat dilihat dalam karya Gilson (1978, 1980), Sonego (1991) dan Wallstrom (1994). Satu kumpulan lagi, yang mendapat inspirasi dan galakan daripada Einstein, ialah yang langsung ingin menyingkir tafsiran kebarangkalian dalam mekanik kuantum kerana mereka tidak percaya kepada hukum alam (tabii atau *sunnatullah*) yang secara intrinsiknya berkebarangkalian (atau kini didapati lebih am lagi hukum kemungkinan menerusi model kabur itu). Sarjana yang paling berjaya dalam pendekatan ini ialah Bohm

(1952, 1984) yang kini melahirkan mekanik yang dinamai mekanik Bohman (Berndl *et al.* 1995, Cushing *et al.* 1996) dan implikasi falsafah dan metafiziknya cukup besar seperti yang dapat dilihat dalam Bohm *et al.* (1987), Bohm dan Hiley (1993) dan Sharpe (1993).

Kajian kami ini juga dimotivasikan oleh analogi PsS dengan PsR tetapi berbeza daripada karya-karya yang tersebut di atas, kerana kami menumpukan kepada sifat $|\Psi|^2$ modulus kuasa dua fungsi gelombang itu, dan buat permulaan ini kepada kasus zarah bebas (iaitu potensi V = 0) dalam selang terhingga (a,b) (sehingga tenaganya menjadi diskret dan positif). Kami membuktikan kuantiti ini memenuhi persamaan resapan dan resapan kuasa dua iaitu persaman untuk bagi u memenuhi PsR, persamaan (2) itu. Kajian ini ialah pelengkap kepada kajian kami sebelum ini (Shaharir dan Nik Rusdi 2000) yang menyelesaikan isu ini menerusi penyelesaian kamiran (daripada teknik jelmaan Fourier dan bukan pemisahan pemboleh ubah yang dilakukan di sini), walaupun tersirat dalam penyelesaian kamiran (menerusi jelmaan Fourier itu) terkandung kasus tenaga diskret ini. Kami sedar tentang betapa istilah zarah bebas yang biasanya dimaksudkan sebagai zarah berpotensi sifar atas seluruh set nombor nyata yang mengimplikasikan mekanik kuantumnya menghasilkan hanya tenaga positif yang kontinum dan oleh itu sudah pun dibicarakan dalam makalah kami (2000) sebelum ini.

Teorem 1

Apabila Ψ memenuhi PsS zarah bebas berjisim m dengan syarat awalnya $\Psi(\bullet,0) = \phi(x)$, fungsi yang kuasa duanya terkamirkan Lebesgue, dan zarah atom itu berada dalam selang terbatas (a,b) sehingga $\Psi(a,\bullet) = \Psi(b, \bullet)$, maka kuasa dua modulus fungsi gelombang $S = |\Psi|^2$ memenuhi persamaan resapan yang berpekali resapan $\rho = \frac{\hbar}{2m}$ dan berpekali hanyutan $-2\rho\frac{\partial F}{\partial x}$ serta bersumberkan $W=2(U + \frac{1}{4}\rho\kappa^2)$ yang

$$F = \tan^{-1}\left[\frac{\sum|c_r|\sin[(p_r x - E_r t + \varphi_r)/\hbar]}{\sum|c_r|\mathrm{kos}[(p_r x - E_r t + \varphi_r)/\hbar]}\right]$$ fasa fungsi gelombang,

$$\kappa = \frac{2\sum|c_r c_s|p_r \sin(f_{rs})}{\hbar\sum|c_r c_s|\mathrm{kos}(f_{rs})},\quad f_{rs} = [(p_r - p_s)x+E_r - E_s)t + \varphi_r - \varphi_s]/\hbar,\ \varphi_r = \hbar\ \mathrm{huj}(c_r),$$

c_n ialah pekali Fourier kompleks bagi fungsi ϕ gelombang awal, E_r ialah aras tenaga ke-r, $p_r^2 = 2mE_r$ dan $U = \rho\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial t} + \rho\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2$ ialah sumber bagi resapan yang dipenuhi oleh $R = |\Psi|$ yang berpekali resapan dan hanyutan yang sama dengan resapan S itu.

Bukti:

Penyelesaian PsS zarah bebas dan dalam selang terbatas (a,b) ialah

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| \text{eksp}[(<\mu_n, q> + \varphi_n)k/\hbar] \tag{i}$$

$$\varphi_n / \hbar = \text{huj}(c_n) \tag{ii.a}$$

$$\mu_n = (p_n, E_n), q = (x,t) \tag{ii.b}$$

$$p_n^2 = 2mE_n = \left(\frac{n\pi\hbar}{b-a}\right), \ E_n > O, \ n, \text{ integer} \tag{ii.c}$$

dan

$$<\mu, q) = px - Et, \tag{ii.d}$$

$$c_n = \frac{1}{\|\Psi_n\|^2} \int_a^b \varphi(x) \text{eksp}[-kp_n x / \hbar] dx \tag{ii.e}$$

yang

$$\Psi_n(x) = \text{eksp}[kp_n x / \hbar] \tag{ii.f}$$

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx \tag{ii.g}$$

dan

$$\int_a^b \Psi_n(x) \overline{\Psi}_m(x) dx = \|\Psi_n\|^2 \delta_{mn} \tag{ii.h}$$

[Dalam buku-buku teks, selang yang dipertimbangkan ialah selang simetri (-b,b). Lihat umpamanya Schiff 1968]

Dalam bentuk perwakilan kutub, fungsi gelombang ini ialah

$$\Psi = Re^{kF} \tag{iii}$$

dengan

$$R^2 = S = \sum |c_n c_r| \text{eksp}(kf_{nr}) \tag{iv.a}$$

$$f_{nr} = L_n - L_r \tag{iv.b}$$

$$L_n = [\langle \mu_n, q \rangle + \varphi_n]/\hbar = (p_n x - E_n t + \varphi_n)/\hbar, \mu = (x, t) \tag{iv.c}$$

$$\varphi_n = \text{huj}(c_n) \tag{iv.d}$$

dan

$$F = \tan^{-1}\left[\frac{\sum |c_n| \sin(L_n)}{\sum |c_n| \text{kos}(L_n)}\right] \tag{v}$$

Oleh itu

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{\hbar} k \sum |c_n c_r| \text{eksp}[kf_{nr}](E_r - E_n) \tag{vi.a}$$

$$= -\frac{2}{\hbar} \sum |c_n c_r| \sin(f_{nr}) E_r, \text{ sebutan kos itu menjadi sifar,} \tag{vi.b}$$

dan

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{\hbar} k \sum |c_n c_r| \text{eksp}[kf_{nr}](p_n - p_r) \tag{vii.a}$$

$$= -\frac{2}{\hbar} \sum |c_n c_r| \sin(f_{nr}) p_n \text{ , sebutan kos menjadi sifar.} \tag{vii.b}$$

Oleh itu

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = -\frac{1}{\hbar^2} \sum |c_n cr| \text{eksp}[f_{nr}](p_n - p_r)^2 \tag{viii.a}$$

$$= -\frac{1}{\hbar^2} \sum |c_n c_r| \text{eksp}[kf_{nr}](2m(E_n + E_r) - 2p_n p_r) \tag{viii.b}$$

$$= -\frac{2}{\hbar^2} \sum |c_n c_r| \text{kos}(f_{nr})(2mE_n - p_n - p_r) \tag{viii.c}$$

Dengan ini, maka

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = -\frac{2}{\hbar} \Sigma |c_n c_r| \sin(f_{nr}) E_r + \frac{\gamma}{\hbar^2} \Sigma |c_n c_r| \mathrm{kos}(f_{nr}) (4mE_r - 2p_n p_r) \quad \text{(ix)}$$

Jelaslah $\gamma = \frac{\hbar}{2m}$ ialah nilai pekali resapan yang paling bersahaja lagi memenuhi keperluan unit atau matra jasmani bagi persamaan di atas.

Tetapi

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{\hbar S} \Sigma |c_n c_r| p_n \mathrm{kos}(f_{nr}) \quad \text{(x)}$$

Oleh itu

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{s} \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial F}{\alpha x} - \frac{1}{\hbar^2 S} \Sigma |c_n c_r| p_n (p_r - pn) \sin(f_{rn})$$

atau

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} S = \Sigma |c_n c_r| \left(\frac{2mE_n}{\hbar^2} \right) \sin(f_{rn}) \quad \text{(xi)}$$

setelah menggunakan identiti

$$\Sigma |c_n c_r| p_n p_r \sin(f_{rn}) = 0 \quad \text{(xii)}$$

kerana $f_{rn} = -f_{nr}$ sedangkan faktor lainnya simetri.

Dengan hasil (xi) ini, maka persamaan (ix) menjadi

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = -2\rho \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} - 2\rho \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} S + \frac{\gamma}{\hbar^2} \Sigma |c_n c_r| \mathrm{kos}(f_{nr}) (4mE_r - 2p_n p_r) \quad \text{(xiii)}$$

Tetapi

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar S} \Sigma |c_n c_r| E_r \mathrm{kos}(f_{nr}) \quad \text{(xiv)}$$

Oleh itu persamaan (xiii) menjadi

$$\frac{\partial S}{\partial t}-\gamma\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}=-2\left[\rho\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial x}+\rho\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}S+\frac{\partial F}{\partial t}S\right]-\frac{2\gamma}{\hbar^2}\Sigma|c_n c_r|kos(f_{nr})p_n p_r \tag{xv}$$

Tetapi daripada persamaan (x)

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2=\frac{1}{\hbar^2 S^2}\Sigma\Sigma|c_n c_r||c_u c_v|p_n p_u kos(f_{nr})kos(f_{uv})$$

$$=\frac{1}{\hbar^2 S^2}\Sigma\Sigma|c_n c_r c_u c_v|p_n p_u\{kos(f_{nu})\ kos(f_{rv})\ -\ sin(f_{nr})sin(f_{uv})\}$$

$$=\frac{1}{\hbar^2 S}\Sigma|c_n c_u|p_n p_u kos(f_{nu})-\frac{1}{\hbar S}\Sigma|c_n c_r|p_n\ sin(f_{nr})\frac{1}{\hbar S}\Sigma|c_u c_v|p_u\ sin(f_{uv})$$

...........(xvi)

$$=\frac{1}{\hbar^2 S}\Sigma|c_n c_u|p_n p_u kos(f_{nu})-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 \tag{xvii}$$

Persamaan (xv) dan (xvi) memberikan bahagian pertama teorem.

Persamaan R didapati menerusi hubungan R = √S yang memberikan

$$\frac{\partial R}{\partial t}-\gamma\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}=\frac{1}{2\sqrt{S}}\left[\frac{\partial S}{\partial t}-\gamma\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}-\frac{\gamma}{S}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\right]$$

Teorem terbukti dengan menggunakan bahagian satu teorem ini dan persamaan (xvii).

KESIMPULAN

Teorem di atas membuktikan bahawa zarah bebas kuantum dapat dianggap sebagai zarah klasik yang pergerakannya dapat dimodelkan sebagai suatu resapan tidak bebas yang berpekali resapan, berpekali hanyutan dan bersumber luar W atau U dalam teorem itu. Ini tentunya boleh menguatkan lagi keesahan tafsiran Born (tafsiran piawai atau tafsiran Copenhagen) tentang tabii kebarangkalian tentang zarah kuantum itu dengan lebih bersahaja lagi kerana penyelesaian persamaan resapan inilah yang menjadi taburan kebarangkalian itu. Pada masa yang sama teorem ini juga dapat digunakan untuk menguatkan tafsiran bukan berkebarangkalian tentang mekanik kuantum seperti yang pertama kali diutarakan oleh Bohm itu, walaupun potensi kuantum kami berbeza daripada yang diperolehi Bohm itu. Kajian ini bersama dengan kajian kami sebelum ini (Shaharir dan Nik Rusdi 2000) melengkapkan program pentafsiran semula zarah bebas kuantum mengikut model resapan dan zarah bebas klasik dalam fasa pertamanya. Kajian selanjutnya ialah memodelkan hasil-hasil kajian ini menerusi kalkulus stokastik pula.

RUJUKAN

AEBI, R. 1996. *Schroedinger Diffusion Process.* Birkhauser-Verlag.

BERNDL, K., M. DAUMER, D. DURR, S. GOLDSTEIN, dan N. ZANGHI. 1995. A survey of Bohmian Mechanics. *Il Nuovo Cimento* 110B: 737-750.

BESS, L. 1994. New features of the Schroedinger diffusion model. *Physics Essays* **7(1)**: 77-82.

BOHM, D. 1952. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden variables". I and II. Phys. Rev. 85: 166-179; 180-193. Dicetak kembali dalam *Quantum Theory and Measurement*, disunting oleh Wheeler, J.A. & Zurek, W.H. 1983. Princeton Univ. Press.

__________ . 1984. *Causality and Chance in Quantum Physics.* 2nd ed. Routledge.

BOHN, D. dan B.J. HILEY. 1993. *The Undivided Universe.* London: Routledge.

BOHM, D., B.J. HILEY dan P.N. KOLOYEROU. 1987. An ontological basis for the quantum theory. *Phys. Reports* **144(4)**: 321-375.

BORN, M. 1926a. On the quantum mechanics of collisions (preliminary communication). Dlm. *Quantum Theory and Measurement,* disunting oleh Wheeler, J.A. dan W.H. Zurek, 1983. Princeton Univ. Press.

__________ . 1926b. On quantum mechanics of collision. Dlm *Wave Mechanics,* disunting oleh Ludwig, G. 1968. Oxford: Pergamon Press

CARTWRIGHT, N. 1987. Max Born and the reality of quantum probability. Dalam *The Probabilistic Revolution. Vol.2: Ideas in the Sciences,* disunting oleh Kruger, L., Gigerenzer,G. & Morgan, M.S. p. 409-416. MIT Press.

CUSHING, J.T., A. FINE dan S. GOLDSTEIN. 1996. *Bohmian Mechanics and Quantum Theory: An Appraisal.* Dordrecht: Kluwer.

GILSON, J.G. 1980. A classical basis for quantum mechanics. *Ann. Ins. Henri Poincare. Sec.A: Physique Theorie* **XXXII(4)**: 319-325.

__________ . 1978. The fluid process underlying quantum mechanics. *Acta Physicsa Hungaricae.* t. **44(4)**: 333

HEALEY, A. 1990. *The Philosophy of Quantum Mechanics: An Interactive Approach.* Cambridge Univ. Press.

MADELUNG, E. 1926. Quantenttheorie in hydrodynamischer form. *Zeitschrift fur Physik.* t. **40:** 332

NAGASAWA, M. 1993. *Schroedinger Equation and Diffusion Theory.* Birkhauser-Verlag.

PAIS, A. 1982. Max Born's statistical interpretation of quantum mechanics. *Science* **218** Dec: 1193-1198.

ROBINETT, R.W. 1997. *Quantum Mechanics: Classical Results, Modern System, and Visualized Examples.* N.York: OUP.

SCHIFF, I. 1968. *Quantum Mechanics.* 3rd Ed. N. York: McGraw-Hill.

SCHROEDINGER, E. 1926. Quantisation as a problem of proper values, part 1. Dalam Schroedinger, E. 1928. *Collected Papers on Wave Mechanics.* p. 1-12. London: Blackie & Sons Ltd.

SHAHARIR MOHAMAD ZAIN dan NIK RUSDI YAACOB. 2000. Zarah Schroedinger bebas sebagai suatu resapan. Laporan penyelidikan Q/3/99, Pusat Pengajian Sains Matematik, UKM.

SHARPE, K.J. 1993. *David Bohm's World: New Physics and New Religions.* London: Associated Univ. Press

SONEGO, S. 1991. Interpretation of the hydrodynamical formalism of quantum mechanics. *Foundation of Phys.* **21(10)**: 1135-1181

WALLSTROM, T.C. 1994. Inequivalence between the Schroedinger equation and the Madelung hydrodynamic equations. *Phys. Rev. A.* **49(3)**: 1613-1617

WICK, D. 1995. *The Infamous Boundry: Seven Decades of Controversy in Qantum Mechanics.* Birkhauser-Verlag.

ZAINAL ABDUL AZIZ. 1997. Penyelesaian Persamaan Resapan Kompleks yang Serasi dengan Kamiran Feynmanan. Tesis Doktor Falsafah, Jabatan Matematik, UKM. (tidak diterbitkan).