

Penghampiran Linear dan Kuadratik untuk Kaedah Kamiran Sempadan bagi Persamaan Laplace Tiga Dimensi dengan Putaran Simetri.

Bachok bin Taib

Jabatan Matematik

Universiti Pertanian Malaysia

43400 UPM Serdang Selangor Darul Ehsan, Malaysia

Received 21 December 1991

ABSTRAK

Kaedah kamiran sempadan digunakan untuk menyelesaikan secara berangka persamaan Laplace tiga dimensi dengan putaran simetri. Penghampiran menggunakan unsur linear dan kuadratik diberikan. Kejituan kedua-dua penghampiran akan dibandingkan.

ABSTRACT

The boundary integral method is used for solving the three dimensional Laplace's equation with rotational symmetry numerically. Linear and quadratic approximations are presented. Accuracy for both linear and quadratic approximation will be compared.

Katakunci: Persamaan Laplace, kamiran sempadan, penghampiran isoparametrik.

PENGENALAN

Kaedah Kamiran Sempadan untuk persamaan Laplace (persamaan keupayaan) berdasarkan kepada rumus Green. Dalam hal ini, kita merumuskan kembali persamaan Laplace menjadi persamaan kamiran Fredholm. Persamaan kamiran hanya melibatkan melibatkan keupayaan dan terbitan normal di atas sempadan kawasan. Dengan ini, dimensi masalahnya dikurangkan satu. Dalam kes masalah keupayaan yang simetri terhadap suatu paksi, kamiran dua dimensi menjadi kamiran biasa dengan menggunakan kamiran eliptik lengkap.

FORMULASI

Untuk sebarang fungsi licin ϕ yang memenuhi persamaan Laplace dalam suatu domain Ω yang mempunyai permukaan licin cebis demi cebis S , rumus kamiran Green boleh ditulis sebagai (Brebbia 1978; Jaswon and Symm 1977; Bachok Taib *et al.* 1984)

$$c(p)\phi(p) + \int_S \phi(q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|p-q|} \right) dS = \int_S \frac{\partial}{\partial n} (\phi(q)) \frac{1}{|p-q|} dS \quad (1)$$

dengan $p \in \Omega + S, q \in S, \frac{\partial}{\partial n}$ terbitan normal berarah keluar dari S , dan

$$c(p) = \begin{cases} 4\pi, & \text{jika } p \in \Omega, \\ 2\pi, & \text{jika } p \in S. \end{cases} \quad (1)$$

Dengan memilih p di atas S , (1) akan menghasilkan persamaan dalam sebutan sama ada ϕ atau $\partial\phi/\partial n (= \psi)$ di atas S setelah pembolehubah lain ditentukan. Jikalau kedua-duanya dapat dikira pada S , persamaan (1) boleh digunakan untuk menjana ϕ di seberang titik $p \in \Omega$. Untuk masalah simetri terhadap suatu paksi, ϕ dan $\partial\phi/\partial n$ bebas daripada sebutan sudut pusingan, dan kamiran terhadap pembolehubah ini boleh dilakukan secara analisis.

BENTUK SIMETRI UNTUK KAMIRAN

Dengan menggunakan koordinat kutub dengan $p = (r_o, 0, z_o)$ dan $q = (r, \theta, z)$, kita dapati

$$\frac{1}{|p - q|} = \frac{1}{\left[(r + r_o)^2 + (z - z_o)^2 - 4rr_o \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2)$$

Jika permukaan S diparameterkan oleh pembolehubah panjang lengkung $\xi \in [0, 1]$ maka,

$$\begin{aligned} \int_S \frac{1}{|p - q|} dS &= \int_0^1 \frac{r(\xi) \left(\left(\frac{dz}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dr}{d\xi} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\left((r(\xi) + r_o)^2 + (z(\xi) - z_o)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} d\xi \\ &\times \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{4r(\xi)r_o \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\left((r(\xi) + r_o)^2 + (z(\xi) - z_o)^2 \right)} \right)^{-\frac{1}{2}} d\theta. \end{aligned}$$

Dengan menggantikan

$$k^2(\xi) = \frac{4r(\xi)r_o}{\left((r(\xi) + r_o)^2 + (z(\xi) - z_o)^2 \right)},$$

kamiran θ menjadi

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 - k^2 \cos^2 \frac{\theta}{2})^{\frac{1}{2}}} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{(1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

dengan $K(k)$ kamiran eliptik lengkap jenis pertama. Jadi kita punyai

$$\int_s \frac{1}{|p-q|} dS = \int_0^1 \frac{4r(\xi) \left(\left(\frac{dz}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dr}{d\xi} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} K(k)}{\left((r(\xi) + r_0)^2 + (z(\xi) - z_0)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} d\xi. \quad (3)$$

Normal unit \hat{n} boleh dituliskan sebagai

$$\hat{n} = \frac{1}{\left(\left(\frac{dz}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dr}{d\xi} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{dz}{d\xi} \cos(\theta), \frac{dz}{d\xi} \sin(\theta), -\frac{dr}{d\xi} \right).$$

Dari (2) kita boleh menuliskan,

$$\nabla \frac{1}{|p-q|} = \frac{-(r(\xi) \cos \theta - r_0, r(\xi) \sin \theta, z(\xi) - z_0)}{\left((r(\xi) + r_0)^2 - 4r(\xi)r_0 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + (z(\xi) - z_0)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Dengan menggunakan penggantian yang sama

$$k^2(\xi) = \frac{4r(\xi)r_0}{(r(\xi) + r_0)^2 + (z(\xi) - z_0)^2}.$$

kita dapati

$$\int_s \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|p-q|} \right) dS = -4 \int_0^1 \frac{r(\xi) d\xi}{\left((r(\xi) + r_0)^2 + (z(\xi) - z_0)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \times \left[\left(\frac{dz}{d\xi} (r(\xi) + r_0) - \frac{dr}{d\xi} (z(\xi) - z_0) - \frac{2}{k^2(\xi)} \frac{dz}{d\xi} r_0 \right) \frac{E(k)}{1 - k^2(\xi)} + \frac{2}{k^2(\xi)} \frac{dz}{d\xi} r_0 K(k) \right] \quad (4)$$

dengan $E(k)$ kamiran eliptik lengkap jenis kedua yang ditakrifkan sebagai

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} d\alpha .$$

Hampiran bagi $K(k)$ dan $E(k)$ boleh didapati dalam Hastings (1955) dalam bentuk

$$\begin{aligned} K(k) &= P(x) - Q(x) \ln(x) \\ E(k) &= R(x) - S(x) \ln(x) \end{aligned} \tag{5}$$

dengan

$$x = 1 - k^2(\xi)$$

dan P, Q, R dan S suatu polinomial berdarjah empat.

PENGHAMPIRAN BAGI BENTUK, KEUPAYAAN DAN TERBITAN NORMAL

Untuk pengiraan kita memerlukan perwakilan bagi permukaan, keupayaan dan terbitan normalnya di atas permukaan tersebut. Dalam perihal seterusnya, keupayaan dan terbitan normalnya akan disebut fungsi.

Permukaan Linear-Fungsi Malar. (L-M)

Permukaan digantikan dengan suatu set yang mengandungi N tembereng linear S_j , dengan keupayaan dan terbitan normalnya malar di atas setiap tembereng tersebut. Persamaan kamiran sempadan digantikan dengan bentuk kolokasi dengan menggunakan titik tengah setiap tembereng sebagai titik kolokasi. Keterangan lanjut terdapat dalam Taib *et al.* (1983).

Permukaan Linear-Fungsi Linear. (L-L)

Permukaan digantikan dengan suatu set N tembereng linear S_j . ϕ_j dan ψ_j dianggap bernilai satu di titik hujung bagi setiap tembereng linear hampiran, kepada permukaan tersebut. Jika tembereng dituliskan dalam bentuk persamaan berparameter dengan ξ dalam julat $[0,1]$, kita takrifkan suatu fungsi bentuk,

$$\begin{aligned} M_1(\xi) &= 1 - \xi \\ M_2(\xi) &= \xi \end{aligned}$$

dan kita gunakan penghampiran isoparametrik untuk permukaan dan fungsi. Di atas tembereng S_j kita punyai

$$\begin{aligned} r(\xi) &= r_{j-1}M_1(x) + r_jM_2(\xi) \\ z(\xi) &= z_{j-1}M_1(x) + z_jM_2(\xi) \\ \phi(\xi) &= \phi_{j-1}M_1(x) + \phi_jM_2(\xi) \\ \psi(\xi) &= \psi_{j-1}M_1(x) + \psi_jM_2(\xi) \end{aligned}$$

Kita gunakan kedua-dua titik hujung sebagai titik kolokasi. Ini akan menghasilkan $N + 1$ anu. Kamiran di atas setiap tembereng boleh ditulis sebagai,

$$\int_{S_j} \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{1}{|p - q|} dS = b_{1ij} \psi_{j-1} + b_{2ij} \psi_j \quad (6)$$

dengan

$$b_{kij} = S_j \int_0^1 M_k(\xi) d\xi \int_0^{2\pi} \frac{1}{|p_i - q(\xi, \theta)|} d\theta$$

dan

$$\int_{S_j} \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|p - q_j|} \right) dS = a_{1ij} \phi_{j-1} + a_{2ij} \phi_j \quad (7)$$

dengan

$$a_{kij} = S_j \int_0^1 M_k(\xi) d\xi \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|p_i - q(\xi, \theta)|} \right) d\theta.$$

Persamaan (1) dapat dituliskan sebagai

$$2\pi\phi_i + \sum_{j=1}^{N+1} \phi_j \int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|p - q_j|} \right) dS = \sum_{j=1}^{N+1} \frac{\partial}{\partial n} (\phi_j) \int_{S_j} \frac{1}{|p - q_j|} dS. \quad (8)$$

Dengan memasukkan (6) dan (7) ke dalam (8), kita dapati

$$2\pi\phi_i + \sum_{j=1}^{N+1} (a_{1ij} \phi_{j-1} + a_{2ij} \phi_j) = \sum_{j=1}^{N+1} (b_{1ij} \psi_{j-1} + b_{2ij} \psi_j) \quad (9)$$

dengan $i = 1, \dots, N + 1$.

Persamaan (9) boleh dituliskan dalam bentuk matriks sebagai,

$$2\pi\phi_j + \sum_{j=1}^{N+1} \hat{H}_{ij} \phi_j = \sum_{j=1}^{N+1} G_{ij} \psi_j, \quad (10)$$

Dengan mentakrifkan $H_{ij} = \hat{H}_{ij} + 2\pi\delta_{ij}$ (10) boleh ditulis sebagai,

$$H\Phi = G\Psi \tag{11}$$

yang akan diselesaikan untuk mendapatkan sama ada Φ atau Ψ .

Permukaan Kuadratik-Fungsi Kuadratik. (K-K)

Kita takrifkan fungsi bentuk

$$\begin{aligned} M_1(\xi) &= (\xi - 1)(2\xi - 1) \\ M_2(\xi) &= 4\xi(1 - \xi) \\ M_3(\xi) &= \xi(2\xi - 1) \end{aligned}$$

dan kita gunakan penghampiran isoparametrik kepada permukaan dan fungsi. Di atas tembereng S_j kita punyai,

$$\begin{aligned} r(\xi) &= r_{j-1}M_1(\xi) + r_jM_2(\xi) + r_{j+1}M_3(\xi) \\ z(\xi) &= z_{j-1}M_1(\xi) + z_jM_2(\xi) + z_{j+1}M_3(\xi) \\ \phi(\xi) &= \phi_{j-1}M_1(\xi) + \phi_jM_2(\xi) + \phi_{j+1}M_3(\xi) \\ \psi(\xi) &= \psi_{j-1}M_1(\xi) + \psi_jM_2(\xi) + \psi_{j+1}M_3(\xi) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan kedua-dua titik hujung dan titik tengah sebagai titik kolokasi, akan menghasilkan $2N + 1$ persamaan dengan $2N+1$ anu. Kamiran di atas tembereng boleh ditulis sebagai,

$$\int_{S_j} \frac{\partial\phi}{\partial n} \frac{1}{|p-q|} dS = b_{1ij}\psi_{j-1} + b_{2ij}\psi_j + b_{3ij}\psi_{j+1} \tag{12}$$

dengan

$$b_{kij} = S_j \int_0^1 M_k(\xi) d\xi \int_0^{2\pi} \frac{1}{|p_i - q(\xi, \theta)|} d\theta$$

dan

$$\int_{S_j} \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|p-q_j|} \right) = a_{1ij}\phi_{j-1} + a_{2ij}\phi_j + a_{3ij}\phi_{j+1} \tag{13}$$

dengan

$$a_{kij} = S_j \int_0^1 M_k(\xi) d\xi \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|p_i - q(\xi, \theta)|} \right) d\theta.$$

Persamaan (1) dapat dituliskan sebagai

$$2\pi\phi_i + \sum_{j=1}^{2N+1} \phi_j \int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|p - q|} \right) dS = \sum_{j=1}^{2N+1} \frac{\partial}{\partial n} (\phi_j) \int_{S_j} \frac{1}{|p - q|} dS. \quad (14)$$

Dengan memasukkan (12) dan (13) ke dalam (14), kita dapati

$$2\pi\phi_i + \sum_{j=1}^{2N+1} (a_{1ij}\phi_{j-1} + a_{2ij}\phi_j + a_{3ij}\phi_{j+1}) = \sum_{j=1}^{2N+1} (b_{1ij}\psi_{j-1} + b_{2ij}\psi_j + b_{3ij}\psi_{j+1}) \quad (15)$$

dengan $i = 1, \dots, 2N + 1$.

Persamaan (15) boleh dituliskan dalam bentuk matriks sebagai,

$$2\pi\phi_j + \sum_{j=1}^{2N+1} \hat{H}_{ij}\phi_j = \sum_{j=1}^{2N+1} G_{ij}\psi_j. \quad (16)$$

Dengan mentakrifkan $H_{ij} = \hat{H}_{ij} + 2\pi\delta_{ij}$ (16) boleh ditulis sebgai,

$$H\Phi = G\psi \quad (17)$$

yang akan diselesaikan untuk mendapatkan sama ada Φ atau ψ .

KAMIRAN BERANGKA

Pengiraan unsur matriks H dan G dilakukan secara berangka. Kaedah kamiran Gauss Legendre digunakan, kecuali jika titik kolokasi p_i berada di atas tembereng S_j , atau di titik hujung. Dalam kes ini kamiran menjadi singular. Untuk kamiran singular, kita buang kesingularannya dengan menolakkan sebutan yang mengandungi logaritma, kemudian gunakan skema kamiran khas untuk bahagian yang mengandungi sebutan logaritma.

Kesingularan Di $\xi = 0$

Kesingularan berlaku apabila p adalah titik $(r_0, z_0) = (r(0), z(0))$. Persamaan (3) dan (4) dapat ditulis sebgai

$$\int_s \frac{1}{|p - q|} dS = \int_0^1 \frac{4r(\xi)J(\xi)K(k)}{D(\xi)} d\xi \quad (18)$$

dan

$$\int_s \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|p-q|} \right) dS = - \int_0^1 \frac{4r(\xi) d\xi}{D^3(\xi)} \times \left[\left(\frac{dz}{d\xi} (r(\xi) + r_0) - \frac{dr}{d\xi} (z(\xi) - z_0) - \frac{2}{k^2(\xi)} \frac{dz}{d\xi} r_0 \right) \frac{E(k)}{1 - k^2(\xi)} + \frac{2}{k^2(\xi)} \frac{dz}{d\xi} r_0 K(k) \right] \quad (19)$$

dengan

$$J(\xi) = \left[\left(\frac{dz}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dr}{d\xi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

dan

$$D(\xi) = \left[(r(\xi) + r_0)^2 + (z(\xi) - z_0)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Dengan menuliskan

$$\ln(x) = \ln\left(\frac{x}{\xi^2}\right) + 2\ln(\xi)$$

dan menggunakan (5), kita asingkan kesingularan logaritma seperti berikut,

$$\int_s \frac{1}{|p-q|} dS = 4 \left\{ \int_0^1 \frac{r(\xi)}{D(\xi)} \left[P(x(\xi)) - Q(x(\xi)) \ln\left(\frac{x(\xi)}{\xi^2}\right) \right] J(\xi) d\xi + 2 \int_0^1 \frac{r(\xi)}{D(\xi)} Q(x(\xi)) \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) J(\xi) d\xi \right\} \quad (20)$$

dan

$$\int_s \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|p-q|} \right) dS = - \int_0^1 \frac{4r(\xi)}{D^3(\xi)} \left\{ \frac{R(x(\xi)) - S(x(\xi)) \ln(x(\xi)/\xi^2)}{1 - k^2(\xi)} \times \left[\frac{dz}{d\xi} (r(\xi) + r_0) - \frac{dr}{d\xi} (z(\xi) - z_0) - 2 \frac{dz}{d\xi} \frac{r_0}{k^2(\xi)} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \frac{dz}{d\xi} \frac{r_o}{k^2(\xi)} \left[P(x(\xi)) - Q(x(\xi)) \ln \left(\frac{x(\xi)}{\xi^2} \right) \right] d\xi \\
 - 8 \int_0^1 \frac{r(\xi)}{D^3(\xi)} & \left\{ \frac{S(x(\xi))}{1 - k^2(\xi)} \left[\frac{dz}{d\xi} (r(\xi) + r_o) - \frac{dr}{d\xi} (z(\xi) - z_o) - 2 \frac{dz}{d\xi} \frac{r_o}{k^2(\xi)} \right] \right. \\
 & \left. + 2 \frac{dz}{d\xi} \frac{r_o}{k^2(\xi)} Q(x(\xi)) \right\} \ln \left(\frac{1}{\xi} \right) d\xi \tag{21}
 \end{aligned}$$

Kesinggularan Di $\xi = 1/2$

Kadaan ini berlaku apabila p adalah titik $(r_o, z_o) = (r(1/2), z(1/2))$. Dengan menulis

$$\ln(x) = \ln \left(\frac{x}{(2\xi - 1)^2} \right) + 2 \ln(2\xi - 1)$$

kita dapati

$$\begin{aligned}
 \int_S \frac{1}{|p-q|} dS &= 4 \left\{ \int_0^1 \frac{r(\xi)}{D(\xi)} \left[P(x(\xi)) - Q(x(\xi)) \ln \left(\frac{x(\xi)}{(2\xi - 1)^2} \right) \right] J(\xi) d\xi \right. \\
 & \left. - 2 \int_0^1 \frac{r(\xi)}{D(\xi)} Q(x(\xi)) \ln |2\xi - 1| J(\xi) d\xi \right\}. \tag{22}
 \end{aligned}$$

Kamiran kedua dalam (22) boleh pecahkan seperti berikut,

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{r(\xi)}{D(\xi)} Q(x(\xi)) \ln |2\xi - 2| J(\xi) d\xi &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r(\xi)}{D(\xi)} Q(x(\xi)) \ln(1 - 2\xi) J(\xi) d\xi \\
 & + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{r(\xi)}{D(\xi)} Q(x(\xi)) \ln(2\xi - 1) J(\xi) d\xi \tag{23}
 \end{aligned}$$

gantikan $\eta = 1 - 2\xi$ untuk kamiran pertama dalam (23) dan $\eta = 2\xi - 1$ untuk kamiran kedua, kita dapati,

$$\begin{aligned}
 \int_S \frac{1}{|p-q|} dS &= 4 \int_0^1 \frac{r(\xi) J(\xi)}{D(\xi)} \left[P(x(\xi)) - Q(x(\xi)) \ln \left(\frac{x(\xi)}{(2\xi - 1)^2} \right) \right] d\xi \\
 + 4 \int_0^1 & \left[\frac{r\left(\frac{1-\eta}{2}\right) Q\left(x\left(\frac{1-\eta}{2}\right)\right) J\left(\frac{1-\eta}{2}\right)}{D\left(\frac{1-\eta}{2}\right)} + \frac{r\left(\frac{1+\eta}{2}\right) Q\left(x\left(\frac{1+\eta}{2}\right)\right) J\left(\frac{1+\eta}{2}\right)}{D\left(\frac{1+\eta}{2}\right)} \right] \ln \left(\frac{1}{\eta} \right) d\eta \tag{24}
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan teknik yang sama, kita perolehi,

$$\begin{aligned}
 \int_s \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|p-q|} \right) dS = & - \int_0^1 \frac{4r(\xi)}{D^3(\xi)} \left\{ \left[\frac{R(x(\xi)) - S(x(\xi)) \ln \left(\frac{x(\xi)}{(2\xi-1)^2} \right)}{1-k^2(\xi)} \right] \right. \\
 & \times \left[\frac{dz}{d\xi} (r(\xi) + r_0) - \frac{dr}{d\xi} (z(\xi) - z_0) - 2 \frac{dz}{d\xi} \frac{r_0}{k^2(\xi)} \right] \\
 & \left. + 2 \frac{dz}{d\xi} \frac{r_0}{k^2(\xi)} \left[P(x(\xi)) - Q(x(\xi)) \ln \left(\frac{x(\xi)}{(2\xi-1)^2} \right) \right] \right\} d\xi \\
 - \int_0^1 \frac{4r(\lambda)}{D^3(\lambda)} & \left\{ \frac{S(x(\lambda))}{1-k^2(\lambda)} \left[\frac{dz}{d\eta} \left(r(\lambda) + r_0 - \frac{2r_0}{k^2(\lambda)} \right) - \frac{dr}{d\eta} (z(\lambda) - z_0) \right] \right. \\
 & \left. + 2 \frac{dz}{d\eta} \frac{r_0}{k^2(\lambda)} Q(x(\lambda)) \right\} \ln \left(\frac{1}{\eta} \right) d\eta \\
 - \int_0^1 \frac{4r(\omega)}{D^3(\omega)} & \left\{ \frac{S(x(\omega))}{1-k^2(\omega)} \left[\frac{dz}{d\eta} \left(r(\omega) + r_0 - \frac{2r_0}{k^2(\omega)} \right) - \frac{dr}{d\eta} (z(\omega) - z_0) \right] \right. \\
 & \left. + 2 \frac{dz}{d\eta} \frac{r_0}{k^2(\omega)} Q(x(\omega)) \right\} \ln \left(\frac{1}{\eta} \right) d\eta. \tag{25}
 \end{aligned}$$

dengan

$$\lambda = \frac{1-\eta}{2},$$

dan

$$\omega = \frac{1+\eta}{2}.$$

Kesingularan Di $\xi = 1$

Kes ini berlaku apabila p ialah titik $(r_0, z_0) = (r(1), z(1))$. Dengan menuliskan

$$\ln(x) = \ln \left(\frac{x}{(1-\xi)^2} \right) + 2 \ln(1-\xi)$$

kita dapati

$$\begin{aligned}
 \int_s \frac{1}{|p-q|} dS = & 4 \int_0^1 \frac{r(\xi) J(\xi)}{D(\xi)} \left[P(x(\xi)) - Q(x(\xi)) \ln \left(\frac{x(\xi)}{(1-\xi)^2} \right) \right] d\xi \\
 & + 8 \int_0^1 \frac{r(1-\eta)}{D(1-\eta)} Q(x(1-\eta)) J(1-\eta) \ln \left(\frac{1}{\eta} \right) d\eta \tag{26}
 \end{aligned}$$

dan

$$\int_s \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|p-q|} \right) dS = - \int_0^1 \frac{4r(\xi)}{D^3(\xi)} \left\{ \left[\frac{R(x(\xi)) - S(x(\xi)) \ln \left(\frac{x(\xi)}{(1-\xi)^2} \right)}{1 - k^2(\xi)} \right] \right. \\ \left. \times \left[\frac{dz}{d\xi} (r(\xi) + r_0) - \frac{dr}{d\xi} (z(\xi) - z_0) - 2 \frac{dz}{d\xi} \frac{r_0}{k^2(\xi)} \right] \right. \\ \left. + 2 \frac{dz}{d\xi} \frac{r_0}{k^2(\xi)} \left[P(x(\xi)) - Q(x(\xi)) \ln \left(\frac{x(\xi)}{(1-\xi)^2} \right) \right] \right\} d\xi \\ - \int_0^1 \frac{8r(1-\eta)}{D^3(1-\eta)} \left\{ \frac{S(x(1-\eta))}{1 - k^2(1-\eta)} \left[\frac{dz}{d\eta} (r(1-\eta) + r_0) - \frac{dr}{d\eta} (z(1-\eta) - z_0) - 2 \frac{dz}{d\eta} \frac{r_0}{k^2(1-\eta)} \right] \right. \\ \left. + 2 \frac{dz}{d\eta} \frac{r_0}{k^2(1-\eta)} Q(x(1-\eta)) \right\} \ln \left(\frac{1}{\eta} \right) d\eta. \quad (27)$$

Kamiran pertama di dalam (20), (21), (24), (25), (26), dan (27) tidak mengandungi kesinggularan, dan boleh dikamir menggunakan kaedah Gauss Legendre. Kamiran yang mengandungi kesinggularan logaritma boleh dikamir menggunakan kaedah kamiran yang terdapat di dalam Stroud dan Secrest (1966) bagi kamiran yang berbentuk,

$$\int_0^1 f(x) \ln \left(\frac{1}{x} \right) dx.$$

Titik Di Atas Paksi Simetri

Apabila titik p berada di atas paksi simetri, iaitu $(r_0, z_0) = (0, z_0)$, kamiran boleh diringkaskan seperti berikut,

$$\int_s \frac{1}{|p-q|} dS = 2\pi \int_0^1 \frac{r(\xi) J(\xi)}{\left[r^2(\xi) + (z(\xi) - z_0)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi \quad (28)$$

dan

$$\int_s \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|p-q|} \right) dS = - 2\pi \int_0^1 \frac{r(\xi) \left(\frac{dz}{d\xi} r(\xi) - \frac{dr}{d\xi} (z(\xi) - z_0) \right)}{\left[r^2(\xi) + (z(\xi) - z_0)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi \quad (29)$$

UNSUR PEPEJURU MATRIKS H

Selepas mengira kesemua kamiran dan menghimpunkannya, kita dapati sistem persamaan berikut,

$$H\Phi = C\Psi \quad (30)$$

dan unsur pepejuru bagi matriks H mengandungi pekali $c(p)$. Unsur pepejuru matriks H boleh didapati menggunakan,

$$H_{ij} = \begin{cases} 4\pi - \sum_{j \neq i} H_{ij}, & \text{untuk masalah peluaran,} \\ -\sum_{j \neq i} H_{ij}, & \text{untuk masalah pedalaman.} \end{cases} \quad (31)$$

UJIAN BERANGKA DAN PERBINCANGAN

Untuk menguji kaedah ini, satu masalah telah diselidiki iaitu sebuah gelembung sfera di dalam bahantara takterhingga, berpusat di $(r,z) = (0,0)$ dengan jejari 1.0. Suatu keupayaan seragam $\phi = 1$ diberikan di atas permukaan gelembung tersebut. Keupayaan di beberapa titik di luar gelembung dan terbitan normal keupayaan di atas permukaan gelembung sfera dikira menggunakan bilangan tembereng 4, 8, 16 dan 32.

Penyelesaian analisis keupayaan ialah

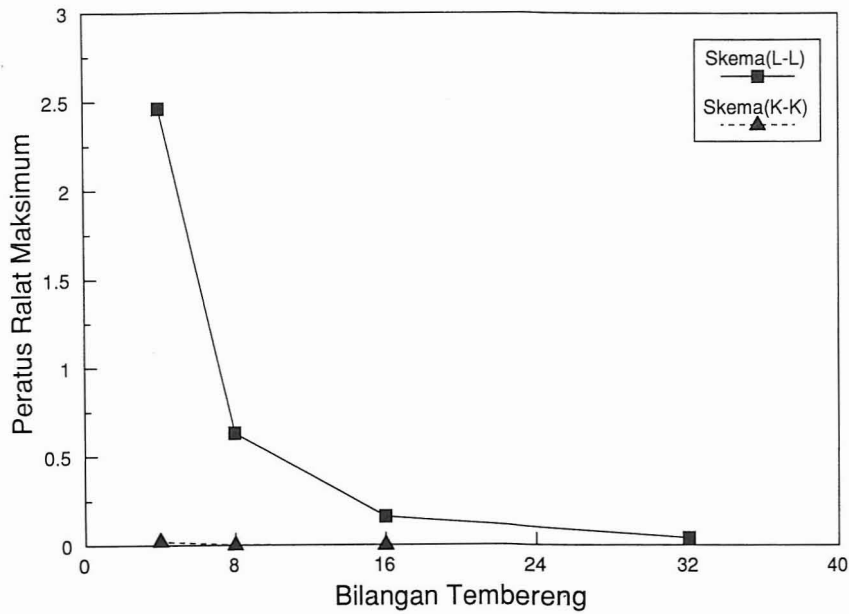
$$\phi = \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

dengan terbitan normal

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -1$$

Ralat maksimum untuk ϕ dan $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ bagi setiap kes digambarkan dalam *Gambarajah 1 dan 2*. *Gambarajah 1* menunjukkan peratus ralat maksimum untuk ϕ menggunakan skema (L-L) untuk bilangan tembereng 4, 8, 16 dan 32 dan skema (K-K) untuk bilangan tembereng 4, 8 dan 16. Seperti yang dijangkakan, didapati bahawa ralat maksimum menurun dengan penambahan bilangan tembereng. Untuk skema (L-L) ralat maksimum menurun dari 2.46% ke 0.04%. Untuk skema (K-K) pula dengan

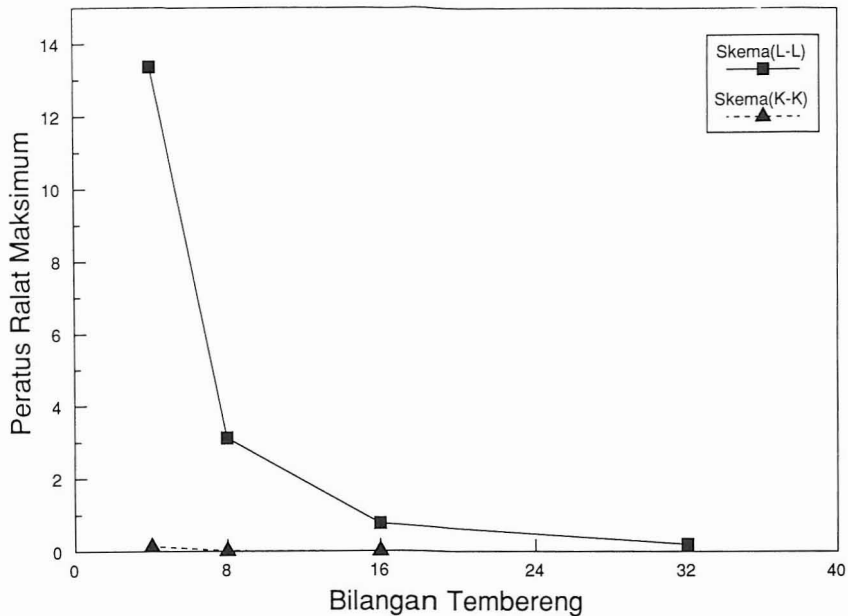
menggunakan bilangan tembereng 4, 8 dan 16 ralat maksimum menurun dari 0.02% ke 0.0000879%.



Gamb. 1. Peratus ralat maksimum ϕ untuk skema (L-L) dan (K-K)

Gambarajah 2 menunjukkan peratus ralat maksimum untuk $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ menggunakan skema (L-L) untuk bilangan tembereng 4, 8, 16 dan 32 dan skema (K-K) untuk bilangan tembereng 4, 8 dan 16. Gelagat yang sama juga didapati dalam kes ini. Dalam hal ini ralat maksimum bagi skema (L-L) menurun dari 13.36% ke 0.19% dan untuk skema (K-K) menurun dari 0.13% ke 0.0031%.

Dari data ralat didapati skema (L-L) mempunyai peringkat $O(h^2)$ sedangkan skema (K-K) mempunyai peringkat $O(h^4)$ dengan h panjang sesuatu tembereng. Semua perkiraan di atas dilakukan menggunakan komputer peribadi HP Vectra 386/25 dengan pengompil NDP FORTRAN 386.



Gamb. 2. Peratus ralat maksimum $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ untuk skema (L-L) dan (K-K)

RUJUKAN

- BACHOK TAIB, G. DOHERTY and J.R. BLAKE. 1984. Boundary integral methods applied to cavitation bubble dynamics. In *Proceedings of The Centre For Mathematical Analysis Australian National University*, ed. S. Å. Gustafson and R.S. Womersley Vol 6. p. 166-185.
- BREBBIA, C.A. 1978. *The Boundary Element Method for Engineers*. London: Pentech Press.
- HASTINGS, C., Jr. 1955. *Approximation for Digital Computers*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.
- JASWON, M.A. and G. T. SYMM. 1977. *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics*. London: Academic Press.
- STROUD, A. H. and D. SECREST. 1966. *Gaussian Quadrature Formulas*. Englewood Cliffs, N.Y.: Prentice-Hall.
- TAIB, B. B., G. DOHERTY and J.R. BLAKE. 1993. Higher order boundary integral modelling of cavitation bubbles. In *Proc. 8th Australasian Fluid Mechanics Conf.*, p. 10B.11-10B.14.