Pertanika 9(2), 241 – 255 (1986)

Beberapa Ulasan Baru Tentang Struktur Aljabar Tensor

SHAHARIR BIN MOHAMAD ZAIN dan MURIATI BTE MUKHTAR
Jabatan Matematik,
Pusat Pengajian Kuantitatif,
Universiti Kebangsaan Malaysia,
Bangi, Selangor, Malaysia.

Kata Kunci: Tensor; isomorfisma; tarikan balik; tolakan ke depan; pengecutan; hasil darab terkedalam; ruang Riemannan; metrik Riemannan.

ABSTRAK

Dalam bidang aljabar tensor klasik, masih terdapat banyak konsep yang belum diformulasikan dengan menggunakan konsep-konsep di dalam aljabar multilinear dan analisis atas manifold. Oleh itu, kami cuba menformulasikan semula hal yang dipersoalkan dalam analisis tensor klasik dan beberapa persoalan lain yang kami cam dan leraikan. Persoalan-persoalan tersebut: makna kesetaraan tensor peringkat satu dengan vektor, struktur tarikan balik dan tolakan ke depan, struktur aljabar pengecutan tensor, istilah hasil darab terkedalam, ds^2 sebagai pembeza dan struktur aljabar tensor relatif serta ketumpatan tensor.

ABSTRACT

In the field of classical tensor algebra, there still exists a few concepts that have not been formulated by using concepts of multilinear algebra and analysis on manifolds. Hence, we have tried to reformulate some matters that arise in classical tensor analysis and a few others that we had identified and resolved. These being: the meaning of the equivalence of first order tensor with vector; the pull back and push forward structure, the structure of contraction of tensors, the inner product term, ds^2 as a differential and the algebraic structure of relative tensors and tensor densities.

1. PENDAHULUAN

Usaha ke arah memahami dan menyatukan analisis tensor klasik ke dalam domain analisis sejagat dan aljabar multilinear telah dilakukan sejak tahun lima puluhan lagi. Walaupun begitu, sebagaimana yang telah diperkatakan oleh Shaharir (1984), masih banyak konsep yang terdapat di dalam aljabar tensor klasik yang belum diformulasikan dengan memuaskan dengan menggunakan jargon-jargon dan konsep-konsep di dalam aljabar multilinear dan analisis atas manifold. Di dalam kertas ini kami cuba menjawab sebahagian besar daripada hal yang dipersoalkan itu dan juga persoalan-persoalan lain yang telah kami cam dan leraikannya. Persoalan-persoalan yang kami leraikan ialah makna kesetaraan tensor peringkat satu dengan vektor, struktur tarikan balik dan tolakan ke depan dalam konteks topologi aljabar, struktur aljabar pengecutan tensor, kesesuaian istilah "hasil darab terkedalam" di dalam analisis tensor klasik dengan hasil darab terkedalam di dalam analisis fungsian, ds^2 sebagai pembeza dan struktur aljabar tensor relatif serta ketumpatan tensor.

2. KESETARAAN TENSOR PERINGKAT SATU DENGAN VEKTOR

Di sini kami akan menjelaskan hubungan sebenar antara tensor peringkat satu dengan vektor. Memanglah sudah terkenal yang ruang vektor V berisomorfisma dengan ruang dualnya V* (lihat umpamanya Dodson dan Poston (1979)). Mengikut takrifnya, unsur V* berupa tensor kovarian peringkat satu. Oleh itu tensor kovarian peringkat satu berisomorfisma dengan vektor.

Sementara itu memanglah juga terkenal yang V berisomorfisma dengan (V*)* atau ringkasnya V** menerusi pemetaan $v \mapsto v^{**}$

(lihat umpamanya Spivak (1970)). Ini menunjukkan tensor kontravarian peringkat satu (unsur V^{**}) juga berisomorfisma dengan vektor.

Sekarang kami akan membuktikan bahawa dua isomorfisma di atas berbeza di antara satu dengan lain. Perbezaan ini akan menjadi jelas apabila kita mempertimbangkan perkara berikut.

Andaikan $i_V : V \to V^{**}$ sebagai suatu pemetaan yang ditakrifkan sebagai
$i_V(v)(\lambda) = \lambda(v)$ untuk $v \in V$, $\lambda \in V^*$.

Jelaslah bahawa i_V adalah suatu isomorfisma. Kami akan menunjukkan bahawa, bagi sebarang pemetaan linear $f : V \to W$, gambarajah berikut kalis tukar tertib.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i_V"] \arrow[d, "f"'] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ W \arrow[r, "i_W"'] & W^{**} \end{tikzcd}$$

Rajah 2.1

Iaitu, kami akan tunjuk

$$i_W \circ f = f^{**} \circ i_V$$

Di sini f^{**} ditakrifkan sebagai
$(f^{**}(S))(\lambda) = S(f^*(\lambda))$ untuk $\lambda \in W^*$, $S \in V^{**}$
dan $f^* : W^* \to V^*$ ditakrifkan sebagai
$(f^*(\lambda))(u) = \lambda(f(u))$, $u \in V$, $\lambda \in W^*$.

Pertimbangkan

$$\begin{aligned} (f^{**} \circ i_V(v))(\lambda) &= f^{**}(i_V(v))(\lambda), \quad \lambda \in V^*, \\ &\qquad \text{dan } v \in V \\ &= i_V(v)(f^*(\lambda)), \text{ takrif } f^{**} \\ &= (f^*(\lambda))(v), \text{ takrif } i_V \\ &= \lambda(f(v)), \text{ takrif } f^* \end{aligned}$$

Sementara itu,

$$\begin{aligned} (i_W \circ f(v))(\lambda) &= (i_W f(v))(\lambda), \lambda \in W^* \text{ dan } v \in V \\ &= \lambda(f(v)), \text{ takrif } i_W \end{aligned}$$

Jadi $f^{**} \circ i_V = i_W = i_W \circ f$: iaitu gambarajah itu kalis tukar tertib.

Sekarang pertimbangkan gambarajah berikut pula.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i_V"] \arrow[d, "f"'] & V^* \arrow[d, "g = (f^*)^{-1}"] \\ W \arrow[r, "i_W"'] & W^* \end{tikzcd}$$

Rajah 2.2

Kami akan membuktikan bahawa tidak wujud isomorfisma $i_V : V \to V^*$ yang membuat gambarajah pada rajah 2.2 di atas kalis tukar tertib untuk sebarang f yang linear. Kami pertimbangkan kasus
$V = \mathcal{N} = W$, iaitu gambarajah berikut:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{N} \arrow[r, "i_{\mathcal{N}}"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{N}^* \arrow[d, "g = (f^*)^{-1}"] \\ \mathcal{N} \arrow[r, "i_{\mathcal{N}}"'] & \mathcal{N}^* \end{tikzcd}$$

Rajah 2.3

Kami hendak tujuk $i_{\mathcal{N}} \circ f \neq (f^*)^{-1} \circ i_{\mathcal{N}}$
untuk suatu f dengan sebarang $i_{\mathcal{N}}$

Seperti yang disyorkan oleh Spivak (1970) ambil $f(x) = 2x$, $x \in \mathcal{N}$ dan sebarang isomorfisma $i_{\mathcal{N}}$, maka jelaslah f linear dan
$i_{\mathcal{N}} \circ f = 2i_{\mathcal{N}}$ sedangkan

$$(f^*)^{-1} \circ i_{\mathcal{N}} = \tfrac{1}{2}\, i_{\mathcal{N}}$$

Dengan itu kita membuat kesimpulan tidak wujudnya sebarang isomorfisma yang dapat membuat gambarajah pada rajah 2.3 kalis tukar tertib, untuk semua f. Ini dengan sendirinya menunjukkan bahawa tidak wujud isomorfisma $i_v : V \rightarrow V^*$ yang dapat membuat gambarajah pada rajah 2.2 kalis tukar tertib untuk sebarang V, W dan f linear.

Dengan penjelasan dua jenis isomorfisma di atas, satunya yang menyebabkan gambarajah 2.1 kalis tukar tertib dan yang lainnya tak kalis tukar tertib, amatlah wajar masing-masing digelar *isomorfisma bersahaja* dan *isomorfisma tak bersahaja*. Hal ini ada dibincangkan di dalam Abraham & Marsden (1978) dan Spivak (1970), dan di sini kami telah memperincikan pandangan mereka itu.

Kita boleh membuat kesimpulan bahawa sebarang isomorfisma (jika ia berlaku) di antara V dan V* merupakan isomorfisma tidak bersahaja kerana kegagalannya membuat gambarajah pada rajah 2.2 kalis tukar tertib; sementara isomorfisma di antara V dengan V** berupa isomorfisma bersahaja.

Perbezaan di antara kedua-dua isomorfisma ini juga jelas apabila kita mempertimbangkan isomorfisma di antara V dengan V*; iaitu:

$$B : e \longmapsto e^* ;$$
$$e_i \longmapsto e^i \text{ dengan } e^i(e_j) = \delta^i_j.$$

Isomorfisma yang tertakrif seperti ini bergantung kepada pemilihan asas V; umpamanya jika kita pilih $e = \{½e_1, ..., ½e_n\}$ maka kita dapati isomorfisma yang lain pula iaitu:

$$B' : e \longmapsto e^*$$
$$½e_i \longmapsto 2e^i$$

sehinggakan $2e^i(½e_j) = \delta^i_j$.

Ini berlainan dengan isomorfisma di antara V dengan V**, kerana untuk itu kita tidak perlu membuat sebarang pemilihan asas.

Daripada hujah-hujah di atas jelaslah terdapat perbezaan di antara kedua-dua jenis isomorfisma ini. Pencaman V dengan V* jarang diamalkan kerana sebab di atas dan juga kerana jika kita mempertimbangkan ruang vektor bermatra tidak terhingga isomorfisma di antara V dengan V* ini mungkin tidak wujud sama sekali (lihat Dodson & Poston (1979)). Oleh itu di dalam analisis, V dengan V** dibezakan; sedangkan V dengan V** tidak dibezakan langsung. Dengan ini pencaman klasik "tensor peringkat satu ialah vektor" haruslah difahami sebagai "tensor kontravarian peringkat satu itulah vektor".

3. STRUKTUR TARIKAN BALIK DAN TOLAKAN KE DEPAN DI DALAM ANALISIS TENSOR

Di sini kami mengkaji kesesuaian atau tidaknya istilah Tarikan Balik dan Tolakan ke Depan di dalam analisis tensor daripada sudut teori kategori dan topologi aljabar. Operasi-operasi ini terdapat di dalam analisis tensor moden seperti Spivak (1965, 1970) dan Abraham & Marsden (1978).

Sifat kefungtoran Tolakan ke Depan (fungtor kovarian) dan Tarikan Balik (fungtor kontravarian) memang sudah diketahui umum (lihat Spivak (1965, 1970) dan Abraham & Marsden (1978)) sungguhpun mereka telah menyalahgunakan simbol fungtor sebenar yang terbabit di sini, dengan menamakan $\Phi.^*$ atau Φ^* t sebagai Tarikan Balik (sebenarnya * sahaja yang betul) dan Φ_* atau Φ_* t sebagai Tolakan ke Depan (sebenarnya $_*$ sahaja yang betul).

Ini menimbulkan percanggahan tatanama "tensor kovarian" dan "tensor kontravarian" klasik dari segi pandangan kefungtoran seperti yang telah dibicarakan oleh Spivak (1970), Shaharir (1984) dan Muriati (1984). Hal ini tidaklah kami minati lagi. Kami lebih berminat kepada struktur aljabar pengoperasi Tarikan Balik * dan Tolakan ke Depan $_*$ itu. Apakah tatanama ini bersesuaian dengan tatanama Tarikan Balik dan Tolakan ke Luar di dalam topologi aljabar? Untuk memudahkan perbincangan, kami perturunkan takrif-takrif yang berkenaan dahulu.

Takrif 3.1 (Tolakan ke Depan dan Tarikan Balik dalam analisis tensor)

Jika $\Phi : M \longrightarrow N$ difeomorfisma dan $t \in \mathcal{T}^r_s(M)$, Tolakan ke Depan $*$ (bintang ditakrifkan sebagai

$$\Phi_* t = (T\Phi)^r_s \circ t \circ \Phi^{-1}$$

dengan

$$\begin{aligned}(T\phi)^r_s\,(t(m))\,(\beta^1, \ldots, \beta^r, \varphi_1, \ldots, \varphi_s) &= t(m)\,(\beta^1 \circ T_m\Phi, \ldots, \beta^r \circ T_m\Phi,\\ &\quad T\Phi^{-1}(\varphi_1), \ldots, T\Phi^{-1}(\varphi_s))\,;\\ &\quad \beta^i \in T^*N,\ \varphi_i \in TN\end{aligned}$$

Tarikan Balik * (bintang atas) ditakrifkan sebagai

$$\Phi^* t = (\Phi^{-1})_* t$$

untuk $\quad t \in \mathcal{T}^r_s(N)$

(Takrif ini berupa perhalusan kepada (takrif-takrif dalam susastera yang telah dirujuk di atas).

Takrif 3.2 (Tolakan ke Luar dan Tarikan Balik dalam topologi aljabar)

Andaikan K suatu kategori. Pertimbangkan rajah 3.1 dan 3.2 di bawah. Gambarajah pada rajah 3.1 digelar Tolakan ke Luar untuk i_1, i_2, jikka

a) gambarajah itu kalis tukar terbit, iaitu $u_1 \circ i_1 = u_2 \circ i_2$;
b) u_1, u_2 memenuhi sifat semesta-Φ untuk sifat (a); iaitu jika gambarajah pada rajah 3.2 kali tukar tertib, maka wujud suatu morfisma unik $v : C \rightarrow C'$ sehinggakan $v \circ u_1 = v_1$, $v \circ u_2 = v_2$(i_1, i_2, u_1, u_2, v_1 dan v_2 morfisma untuk K). Lihat rajah 3.3 yang merupakan ikhtisar kepada a) dan b) di atas.

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & C_1 \arrow[d, "u_1"] \\ C_2 \arrow[r, "u_2"'] & C \end{tikzcd}$$

Rajah (3.1)

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & C_1 \arrow[d, "v_1"] \\ C_2 \arrow[r, "v_2"'] & C' \end{tikzcd}$$

Rajah (3.2)

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & C_1 \arrow[d] \arrow[dr, bend left, "v_1"] & \\ C_2 \arrow[r, "u_2"] \arrow[drr, bend right, "v_2"] & C \arrow[dr, dashed] & \\ & & C' \end{tikzcd}$$

Rajah (3.3)

Sekarang kami perturunkan takrif Tarikan Balik. Pertimbangkan rajah (3.4) dan (3.5). Gambarajah (3.4) digelar Tarikan Balik (untuk i_1, i_2) jikka

a) gambarajah itu kalis tukar tertib, iaitu $i_1 \circ u_1 = i_2 \circ u_2$;
b) u_1, u_2 memenuhi sifat semesta-Φ untuk sifat (a); iaitu jika gambarajah pada rajah (3.4) kalis tukar tertib maka wujud suatu morfisma unik $v: C' \rightarrow C$ sehinggakan $u_1 \circ v = v_1$, $u_2 \circ v = v_2$. Lihat rajah 3.6 yang merupakan ikhtisar kepada a) dan b) ini.

$$\begin{tikzcd} C_0 & C_1 \arrow[l, "i_1"'] \\ C_2 \arrow[u, "i_2"] & C \arrow[l, "u_2"] \arrow[u, "u_1"'] \end{tikzcd}$$

Rajah (3.4)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{N}^m & \mathcal{N}^n \arrow[l, "f"'] & \\ \mathcal{N}^m \arrow[u, "id"] & T^*_p\mathcal{N}^n \arrow[l, "g = f\circ u_1"] \arrow[u] & \\ & & T^*_{f(p)}\mathcal{N}^m \arrow[ul, dashed, "f^*"'] \arrow[ull, bend left, "\pi_1"] \arrow[uul, bend right, "f^{-1}\circ\pi_1"'] \end{tikzcd}$$

Rajah (3.7)

$$\begin{tikzcd} C_0 & C_1 \arrow[l, "i_1"'] \\ C_2 \arrow[u, "i_2"] & C' \arrow[l, "v_2"] \arrow[u, "v_1"'] \end{tikzcd}$$

Rajah (3.5)

$$\begin{tikzcd} C_0 & C_1 \arrow[l, "i_1"'] & \\ C_2 \arrow[u, "i_2"] & C \arrow[l, "u_2"] \arrow[u, "u_1"'] & \\ & & C' \arrow[ul, dashed, "v"'] \arrow[uul, bend right, "v_1"'] \arrow[ull, bend left, "v_2"] \end{tikzcd}$$

Rajah (3.6)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{N}^m & \mathcal{N}^n \arrow[l, "f"'] & \\ \mathcal{N}^m \arrow[u, "id"] & T_{f(p)}\mathcal{N}^m \arrow[l, "\pi_2"] \arrow[u, "f^{-1}\circ\pi_2"'] & \\ & & T_p\mathcal{N}^n \arrow[ul, dashed, "f_* = Tf"'] \arrow[ull, bend left, "f_o\pi_1"] \arrow[uul, bend right, "\pi_1"'] \end{tikzcd}$$

Rajah (3.8)

(Takrif-takrif di atas telah dipetik daripada Brown (1968) dan Mitchell (1965)).

Dari segi topologi aljabar, kami dapati istilah dalam takrif 3.1 tidak tepat kerana kedua-dua pemetaan itu sebenarnya Tarikan Balik dalam takrif 3.2 (lihat rajah (3.7) dan (3.8)). Malah pertimbangkan kategori manifold terbezakan dengan difeomorfisma atasnya. Memadai ambil manifold tempatan $\mathcal{N}^m$ dan $\mathcal{N}^n$. (Lihat rajah (3.7) dan (3.8)).

4. STRUKTUR ALJABAR PENGECUTAN TENSOR

Mengikut satu pandangan moden, pengecutan medan tensor berupa suatu operasi yang membabitkan suatu pemetaan, (Lihat Thirring (1978)),

$$V^l_k : \mathcal{T}^r_s(M) \rightarrow \mathcal{T}^{r-1}_{s-1}(M)$$

yang $\mathcal{T}^r_s(M)$ berupa suatu set semua medan tensor jenis (r, s) atas manifold M. Di dalam suatu sistem koordinat piawai jika

$$T = T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1, \ldots j_s} \partial_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s},$$

maka

$$V^{\ell}_{k}(T) = V^{\ell}_{k}\left(T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \partial_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}\right);$$

iaitu

$$V^{\ell}_{k}(T) = T^{i_1 \ldots i_{\ell-1}\, j\, i_{\ell} \ldots i_{r-1}}_{j_1 \ldots j_{k-1}\, j\, j_k \ldots j_{s-1}} \partial_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_{r-1}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_{s-1}}$$

yang

$\ell = 1, \ldots, r; k = 1, 2, \ldots, s.$

Hubungan di antara takrif ini dengan takrif klasik itu jelas, sebab komponen $V^{l}_{k}(T)$ ialah $T^{i_1 \ldots i_{\ell-1}\, j\, i_{\ell} \ldots i_{r-1}}_{j_1 \ldots j_{k-1}\, j\, j_k \ldots j_{s-1}}$ yang sama dengan komponen tensor T yang dikecutkan secara klasik (Lihat Lawden (1962)).

Satu pandangan lain tentang proses pengecutan tensor telah disebut oleh Abraham & Marsden (1978), yang perinciannya telah ditinggalkan sebagai latihan dan kemudian sebahagian daripadanya dibincangkan oleh Shaharir (1984). Cara ini bergantung kepada isomorfisma yang wujud di antara ruang tensor jenis (1, 1) dengan ruang pemetaan linear $L(T_q(M); T_q(M))$.

Walau bagaimanapun, sebelum kami melengkapkan huraian tentang hal ini, kami ingin memaparkan teorem yang berupa prakeperluan kepada perkara ini. (Buktinya terdapat dalam Abraham & Marsden (1978)).

Teorem 4.1

Ruang tensor jenis (1, 1), $\mathcal{J}^{1}_{q,1}(M)$ berisomorfisma (bersahaja) dengan ruang semua pemetaan linear di antara $T_q(M)$ dengan $T_q(M)$, iaitu $L(T_q M); T_q(M))$, menerusi pemetaan $J : \mathcal{J}^{1}_{q,1}(M) \to L(T_q(M); T_q(M))$, $J(S) = T$ dengan $S(v, \lambda) = \lambda(T(v))$.

Sekarang kami akan memperlihatkan betapa isomorfisma ini membenarkan kita mengaitkan surih matriks perwakilan pemetaan dengan pengecutan tensor.

Jika diberi sebarang $T \in \mathcal{J}^{1}_{q,1}(M)$

$T : T_q(M) \times T_q{}^*(M) \to \mathcal{N}$

kita boleh mengambil surih matriks perwakilan pemetaan linear $S : T_q(M) \to T_q(M)$; dan nombor itu layak digelar pengecutan T dengan cara berikut. Andaikan $\partial_1, \ldots, \partial_n$ sebagai asas $T_q(M)$ dan $T = T^j_i dx^i \otimes \partial_j$ maka kita dapat mencari matriks $A = (a^j_i)$, iaitu matriks perwakilan pemetaan S yang ditakrifkan sebagai

$$S(\partial_i) = a^j_i \partial_j \text{ di dalam sebutan } T^j_i$$

Kita ada

$$\begin{aligned} T(\partial_i, dx^j) &= dx^j(S(\partial_i)), \text{ teorem (4.1)} \\ &= dx^j(a^k_i \partial_k) \\ &= a^k_i \delta^j_k \end{aligned}$$

Ini bermakna $T^{\ell}_{m} dx^m \otimes \partial_{\ell}(\partial_i, dx^j) = a^j_i$

iaitu

$$T^{\ell}_{m} \delta^m_i \delta^j_{\ell} = a^j_i,$$

atau

$$T^j_i = a^j_i.$$

Oleh itu
Surih (A) $= a^i_i = T^i_i =$ Pengecutan (T).

Sekarang kami akan memperluaskan teknik yang dibincangkan di atas kepada tensor peringkat (r, s) yang disyorkan oleh Abraham & Marsden (1978).

Takrifkan

$$i_U : \mathcal{T}^{\,r}_{q,s}(M) \rightarrow \mathcal{T}^{\,r-1}_{q,s}(M) \text{ dan}$$

$$i_W : \mathcal{T}^{\,r}_{q,s}(M) \rightarrow \mathcal{T}^{\,r}_{q,s-1}(M)$$

sebagai

$$i_{U_a}(t)(U_1, \ldots, \widehat{U}_a, \ldots, U_r, W_1, \ldots, W_s)$$
$$= t(U_1, \ldots, U_a, \ldots, U_r, W_1, \ldots, W_s)$$

dan

$$i_{W_b}(t)(U_1, \ldots, U_r, W_1, \ldots, \widehat{W}_b, \ldots, W_s)$$
$$= t(U_1, \ldots, U_r, W_1, \ldots, W_b, \ldots, W_s) \text{ untuk } t \in \mathcal{T}^{\,r}_{q,s}(M)$$

Di sini $\widehat{U}$ melambangkan tiada U manakala $U_i \epsilon\, T^*_q(M)$ dan $W_j \epsilon\, T_q(M)$, $i = 1, \ldots, r; j = 1, \ldots, s$.

Pemetaan ini dikenali dengan nama *hasil darab pedalaman* (Abraham & Marsden (1978). Sekarang pertimbangkan

$$i_{U_a} \circ i_{W_b} = \mathcal{T}^{\,r}_{q,s}(M) \rightarrow \mathcal{T}^{\,r-1}_{q,s-1}(M)$$

yang

$$(i_{U_a} \circ i_{W_b})(t)(U_1, \ldots, \widehat{U}_a, \ldots, U_r, W_1, \ldots, \widehat{W}_b, \ldots, W_s)$$
$$= t(U_1, \ldots, U_a, \ldots, U_r, W_1, \ldots, W_b, \ldots, W_s)$$
$$= t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}\, \partial_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}$$
$$(U_1, \ldots, U_a, \ldots, U_r, W_1, \ldots, W_b, \ldots, W_s)$$

Sekarang tetapkan $U_a = dx^k$, $W_b = \partial_k$

$$(i_{dx^k} \circ i_{\partial_k})(t)(U_1, \ldots, \widehat{dx}^k, \ldots, U_r, W_1, \ldots, \widehat{\partial}_k, \ldots W_s)$$
$$= t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}\, \partial_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}$$
$$(U_1, \ldots, dx^k, \ldots, U_r, W_1, \ldots, \partial_k \ldots, W_s)$$
$$= t^{i_1 \ldots i_a \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_b \ldots j_s}\, \partial_{i_1}(U_1) \ldots \partial_{i_a}(dx^k) . \partial_{i_r}(U_r)\, dx^{j_1}(W_1)$$
$$\ldots dx^{j_b}(\partial_k) \ldots dx^{j_s}(W_s).$$

Oleh kerana $\partial_{i_a}(dx^k) = \delta^k_{i_a}$ dan $dx^{j_b}(\partial_k) = \delta^{j_b}_k$ maka,

Persamaan di atas

$$= t^{i_1 \ldots k \ldots i_r}_{j_1 \ldots k \ldots j_s}\, \partial_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_a} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_b} \otimes$$
$$\ldots \otimes dx^{j_s}(U_1, \ldots, \widehat{dx}^k, \ldots, U_r, W_1, \ldots, \widehat{\partial}_k, \ldots, W_s)$$

Dengan itu

$$i_{dx^k} \circ i_{\partial_k}(t) = t^{i_1 \ldots k \ldots i_r}_{j_1 \ldots k \ldots j_s}\, \partial_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_a} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_r}$$
$$\otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_b} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s},$$

iaitu pengecutan t terhadap indeks ke-a & ke-b

Daripada takrif i_U dan i_W di atas, jelaslah

$$P = i_{U_1} \circ \ldots \circ \widehat{i_{U_a}} \circ \ldots \circ i_{U_r} \circ \ldots \circ i_{W_1} \circ \ldots \circ \widehat{i_{W_b}} \circ$$
$$\ldots \circ i_{W_s} : \mathcal{T}^{\,r}_{q,s}(M) \rightarrow \mathcal{T}^{\,1}_{q,1}(M)$$

dengan
$P(t)(U_a, W_b) = t(U_1, \ldots U_a, \ldots, U_r, W_1, \ldots, W_b, \ldots, W_s)$. P(t) suatu tensor jenis (1, 1) dan dengan teorem isomorfisma tadi, maka wujud suatu matriks perwakilan $A = (a^j_i)$ yang surihnya pengecutan P(t).

$$P(t)(U_a, W_b) = P(t)^{i_a}_{j_b} \; \partial_{i_a} \otimes dx^{j_b} (U_a, W_b)$$

$$= t^{i_1 \ldots i_a \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_b \ldots j_s} \, \partial_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_a} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_b} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}$$

$$(U_1, \ldots, U_a, \ldots, U_r, W_1, \ldots, W_b, \ldots, W_s)$$

$$\text{Pengecutan}\,(P(t)) = P(t)^k_k$$

$$= t^{i_1 \ldots k \ldots i_r}_{j_1 \ldots k \ldots j_s} \, \partial_{i_1} \otimes \ldots \otimes \widehat{\partial_{i_a}} \otimes \ldots \partial_{i_r}$$

$$\otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes \widehat{dx^{j_b}} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}$$

$$(U_1, \ldots, \widehat{dx^k}, \ldots, U_r, W_1, \ldots, \widehat{\partial_k}, \ldots, W_s),$$

iaitu nilai tensor t yang dikecutkan terhadap indeks ke-a dan ke-b-nya diberi oleh surih matriks perwakilan P(t) menerusi isomorfisma bersahaja antara $\mathcal{J}^1_{q,1}(M)$, dengan $L(T_q(M); T_q(M))$.

5. HASIL DARAB TERKEDALAM ANTARA DUA TENSOR

Dari segi klasiknya, "hasil darab terkedalam" dua tensor ditakrifkan menerusi beberapa contoh. Umpamanya hasil darab A^i_{jk} dengan B^r_s ditakrifkan sebagai $A^i_k B^r_i$ (Lawden 1962)).

Jelaslah daripada pandangan modennya pula, hasil darab ini menjadi gubahan antara hasil darab tensor dengan pengecutan, iaitu

$$(A, B) \xrightarrow{\otimes} A \otimes B \xrightarrow{\text{pengecutan}} C$$

Persoalannya adakah istilah "hasil darab terkedalam" ini serupa atau berhubung rapat dengan hasil darab terkedalam di dalam analisis fungsian (perluasan kepada hasil darab bintit)?

Untuk dua tensor atas manifold Riemannan peringkat satu jawapannya hampir positif, kerana kita boleh mentakrifkan

$$h: TM \to T^*M \to IK = \{\text{kompleks}\}$$

dengan

$$h(A, B^*) = A^i B_i = g_{ij} A^i B^i$$
$$= g(A, B),$$

g sebagai metrik Riemannan yang terkenal itu. Pada amnya "hasil darab terkedalam" antara dua tensor bercampur boleh ditakrif sebagai pemetaan:

$$h^a_b : \mathcal{J}^{r_1}_{s_1}(M) \times \mathcal{J}^{r_2}_{s_2}(M) \to \mathcal{J}^{r_1+r-1}_{s_1+s_2-1}(M)$$

$$h^a_b(A, B) = A^{i_1 \ldots \hat{i_a} \ldots i_{r_1}}_{j_1 \ldots \ldots \ldots j_{s_1}} B^{k_1 \ldots k_{r_2}}_{\ell_1 \ldots \widehat{\ell_b} \ldots \ell_{s_2}}$$

$$dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes \widehat{dx^{\ell_b}} \otimes \ldots \otimes dx^{j_{s_1+s_2-1}}$$

$$\otimes \partial_{i_1} \otimes \ldots \otimes \widehat{\partial_{i_a}} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_{r_1+r_2-1}}$$

Jelaslah ini bukan hasil darab terkedalam di dalam analisis fungsian.

6. PERLUASAN HASIL DARAB TERKEDALAM (PSEUDO-TERKEDALAM) DALAM RUANG RIEMANNAN

Sebagaimana yang telah diketahui umum (lihat Westenholz (1978)) metrik Riemannan g_x mentakrifkan suatu hasil darab terkedalam (pseudo-terkedalam) atas $T_x(M)$. Hasil darab ini boleh diperluaskan kepada suatu hasil darab terkedalam (pseudo-terkedalam) untuk ruang tensor $\mathcal{J}^r_{x,s}(M)$. Ini memang tersirat di dalam analisis tensor klasik, tetapi pembuktiannya secara formal seperti yang akan kami lakukan ini belum kami temui di dalam susastera. Kita perlu mempertimbangkan pemetaan:

$$J = j\otimes\ldots\otimes j\otimes j^{-1}\otimes\ldots\otimes j^{-1} : \overbrace{T_x(M)\times\ldots\times T_x(M)}^{r\ \text{kali}}$$

$$\times\overbrace{T_x^*(M)\times\ldots\times T_x^*(M)}^{s\ \text{kali}}$$

$$\to \underbrace{T_x^*(M)\times\ldots\times T_x^*(M)}_{r\ \text{kali}}\times\underbrace{T_x(M)\times\ldots\times T_x(M)}_{s\ \text{kali}}$$

dan pemetaan

$$\tau = \overbrace{T_x^*(M)\times\ldots\times T_x^*(M)}^{r\ \text{kali}}\times\overbrace{T_x(M)\times\ldots\times T_x(M)}^{s\ \text{kali}}\longrightarrow$$

$$(\underbrace{T_x(M)\times\ldots\times T_x(M)}_{r\ \text{kali}}\times\underbrace{T_x^*(M)\times\ldots\times T_x^*(M)}_{s\ \text{kali}})$$

yang ditakrifkan sebagai

$$\tau(U_1^*,\ldots,U_r^*,V_1,\ldots,V_s)(U_1,\ldots,U_r,V_1^*,\ldots,V_s^*)$$

$$=\langle U_1^*,U_1\rangle\ldots\langle U_r^*,U_r\rangle\langle V_1,V_1^*\rangle\ldots\langle V_s,V_s^*\rangle$$

$$U_i,V_j\in T_x(M)\,;\,U_i^*,V_j^*\in T_x^*(M)$$

dengan $\langle\ ,\ \rangle$ sebagai pemetaan bilinear (hasil darab terkedalam ke atas $T^*M\times TM$).

Kewujudan pemetaan J memang sudah terkenal (Kobayashi & Nomizu (1963)), manakala pemetaan τ berupa perluasan kepada teorem yang sudah terkenal juga (lihat Kobayashi – Nomizu (1963)) yang dapat dibuktikan dengan aruhan.

Jadi,

$$\tau\circ(\underbrace{j\otimes\ldots\otimes j}_{r\ \text{kali}}\otimes\underbrace{j^{-1}\otimes\ldots\otimes j^{-1}}_{s\ \text{kali}}) : T_{x,s}^{\ r}(M)$$

$$\to (T_{x,s}^{\ r}(M))^*$$

Hasil darab terkedalam G atas $\mathcal{J}_{x,s}^{\ r}$ ditakrifkan sebagai $G(t,U) = \langle(\tau\circ(j\otimes\ldots\otimes j\otimes j^{-1}\otimes\ldots\otimes j^{-1}))(t),U\rangle$

dengan $t, U\in T_{x,s}^{\ r}(M)$.

Kami akan membuktikan G yang ditakrif seperti ini memang memenuhi aksiom-aksiom hasil darab terkedalam.

i) *Sifat Simetri*

$$G(t,U) = \langle(\tau\circ(j\otimes\ldots\otimes j\otimes j^{-1}\otimes\ldots\otimes j^{-1})(t),U\rangle$$

$$=\langle\tau\circ(j\otimes\ldots\otimes j\otimes j^{-1}\otimes\ldots\otimes j^{-1})(t^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}\partial_{i_1}\otimes\ldots\otimes\partial_{i_r}\otimes dx^{j_1}\ldots\otimes dx^{j_s}),U\rangle$$

$$=\langle\tau(t^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}g_{i_1\ell_1}\ldots g_{i_r\ell_r}g^{j_1k_1}\ldots g^{j_sk_s}dx^{\ell_1}\otimes\ldots\otimes dx^{\ell_r}\otimes\partial_{k_1}\otimes\ldots\otimes\partial_{k_s}$$

$$,U^{u_1\ldots u_r}_{v_1\ldots v_s}\partial_{u_1}\otimes\ldots\otimes\partial_{u_r}\otimes dx^{v_1}\otimes\ldots\otimes dx^{v_s}\rangle,$$

$$=\langle t^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}g_{i_1\ell_1}\ldots g_{i_r\ell_r}g^{j_1k_1}\ldots g^{j_sk_s}\tau(dx^{\ell_1}\otimes\ldots\otimes dx^{\ell_r}\otimes\partial_{k_1}\otimes\ldots\otimes\partial_{k_s}),$$

$$U^{u_1 \ldots u_r}_{v_1 \ldots v_s} \partial_{u_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{u_r} \otimes dx^{v_1} \otimes \ldots \otimes dx^{v_s} >,$$

sebab τ linear ,

$$= t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} g_{i_1 \ell_1} \ldots g_{i_r \ell_r} g^{j_1 k_1} \ldots g^{j_s k_s}$$

$$(\tau(dx^{\ell_1} \otimes \ldots \otimes dx^{\ell_r} \otimes \partial_{k_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{k_s})) (U^{u_1 \ldots u_r}_{v_1 \ldots v_s} \partial_{u_1}$$

$$\otimes \ldots \partial_{u_r} \otimes dx^{v_1} \otimes \ldots \otimes dx^{v_s}), \text{ takrif} <,>$$

$$= t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} U^{u_1 \ldots u_r}_{v_1 \ldots v_s} g_{i_1 \ell_r} \ldots g_{i_r \ell_r} g^{j_1 k_1} \ldots g^{j_s k_s}$$

$$\delta^{\ell_1}_{u_1} \ldots \delta^{\ell_r}_{u_r} \ldots \delta^{v_1}_{k_1} \ldots \delta^{v_s}_{k_s}$$

$$= t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} U^{\ell_1 \ldots \ell_r}_{k_1 \ldots k_s} g_{i_1 \ell_1} \ldots g_{i_r \ell_r} g^{j_1 k_1} \ldots g^{j_s k_s} \;:$$

Dengan cara yang sama kita akan dapati $G(U, t)$ juga memberikan jawapan yang serupa.

Dengan itu $G(t, U) = G(U, t)$

ii) *Sifat bilinear*

$$G(t, am_1 + bm_2) = < (\tau \circ (j \otimes \ldots \otimes j \otimes j^{-1} \oplus \ldots \otimes j^{-1}))(t), am_1 + bm_2>$$

$$= < J(t), am_1 + bm_2>,$$

jika kita tulis $J = \tau \circ (j \otimes \ldots \otimes j \otimes j^{-1} \otimes \ldots \otimes j^{-1})$,

$$\begin{aligned} G(t, am_1 + bm_2) &= (J(t))(am_1 + bm_2), \text{ takrif} <,> \\ &= a(J(t))(m_1) + b(J(t))m_2, \\ &\quad \text{sebab } J(t) \text{ linear} \\ &= a < J(t), m_1 > + b < J(t), m_2> \\ &= a\,G(t, m_1) + b\,G(t, m_2). \end{aligned}$$

Begitu juga dengan $G(at_1 + bt_2, m)$;

$$\begin{aligned} G(at_1 + bt_2, m) & \\ &= G(m, at_1 + bt_2) &&, \text{ G simetri} \\ &= a\,G(m, t_1) + b\,G(m, t_2) &&, \text{ G linear} \\ &= a\,G(t_1, m) + b\,(G(t_2, m) &&, \text{ G simetri} \end{aligned}$$

iii) *Sifat tentu positif*

Kita perlu membuktikan

$$G(t, t) = t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} t^{\ell_1 \ldots \ell_r}_{k_1 \ldots k_s} g_{i_1 \ell_1} \ldots g_{i_r \ell_r} g^{j_1 k_1} \ldots g^{j_s k_s} \geqslant 0,$$

dengan kesamaan berlaku hanya untuk $t = 0$

Pembuktiannya dengan aruhan dan dengan menggunakan fakta terkenal bahawa setiap $n \times n$ matriks simetri tentu positif A mempunyai nilai egen $\lambda_i \geqslant 0$ dan $A = P \Lambda P^T$, $\Lambda = \text{pep}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $P^T P = I$. Begitu juga dengan songsangannya (lihat umpamanya Perlis (1962)). Untuk sebarang

$t \in \mathcal{J}^1_1(M)$, kita ada

$$\begin{aligned} G(t, t) &= t^r_j g^{jk} g_{rs} t^s_k = t^T_j g^{jk} g t_k \\ &= X^T_j g^{jk} \Lambda X_k \;, X_k = P^T t_k \;, P^T P = I \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\lambda_i} X^i_j) g^{jk} (\sqrt{\lambda_i} X^i_k) \\ &= \sum_{i=1}^{n} Y^{i\,T} g^{-1} Y^i \geqslant 0 \end{aligned}$$

kerana g^{-1} juga tentu positif.
Bagi $t \in \mathcal{J}^1_0(M)$ dan $t \in \mathcal{J}^0_1(M)$ setiap satunya berupa kasus remeh.

Katakanlah untuk $t \in \mathcal{J}^r_s(M)$

$$t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} g^{j_1 \ell_1} \ldots g_{i_r k_r}, \quad t^{k_1 \ldots k_r}_{\ell_1 \ldots \ell_s} \geqslant 0,$$

maka untuk $t \in \mathcal{T}^{r+1}_{s+1}$ (M)

$$G(t, t) = t^{i_1 \ldots i_{r+1}}_{j_1 \ldots j_{s+1}} g^{j_1 \ell_1} \ldots g_{i_r k_r} \; g_{i_{r+1} k_{r+1}}$$

$$g^{j_{s+1} \ell_{s+1}} \; t^{k_1 \ldots k_{r+1}}_{\ell_1 \ldots \ell_{s+1}}$$

$$= X^{T\; i_{r+1}}_{\;\; j_{s+1}} \; A \; g_{i_{r+1} k_{r+1}} \; g^{j_{s+1} \ell_{s+1}} \; X^{k_{r+1}}_{\ell_{s+1}},$$

$$A \geqslant 0$$

$$= \left(Y^{i_{r+1}}_{j_{s+1}}\right)^T \Lambda \; Y^{k_{r+1}}_{\ell_{s+1}} \; g_{i_{r+1} k_{r+1}} \; g^{j_{s+1} \ell_{s+1}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{\lambda_i}\; Y^{i\, i_{r+1}}_{j_{s+1}}\right) g_{i_{r+1} k_{r+1}} \; g^{j_{s+1} \ell_{s+1}}$$

$$\left(\sqrt{\lambda_i}\; Y^{i\, k_{r+1}}_{\ell_{s+1}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Z^{i\, i_{r+1}}_{j_{s+1}} \; g_{i_{r+1} k_{r+1}} \; g^{j_{s+1} \ell_{s+1}} \; Z^{i k_{r+1}}_{j_{s+1}}$$

$\geqslant 0$,

sebab kes $t \in T^1_1(M)$ sudah terbukti.

7. TAFSIRAN ds^2 DALAM RUANG RIEMANNAN

Di dalam geometri kebezaan klasik kuantiti ds, panjang lengkung dalam ruang Riemannan, diberikan oleh

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \tag{7.1}$$

dengan g_{ij} sebagai tensor metrik Riemannan (lihat Lawden 1962).

Sekarang kami akan tunjuk bahawa rumus ds^2 ini dapat diformulasikan menerusi takrif moden metrik Reimannan.

Di dalam sistem koordinat piawai (U, x), metrik Reimannan g boleh ditulis di dalam bentuk

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j \tag{7.2}$$

Mengikut takrifnya, kita tahu

$$g(u,v) = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j \,(U^k \partial_k, V^\ell \partial_\ell), \; \partial_r = \frac{\partial}{\partial x^r}$$

$$= g_{ij}\, U^i V^j$$

$$g(v, u) = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j \,(V^\ell \partial_\ell, U^k \partial_k)$$

$$= g_{ij}\, V^i U^j$$

$$= g_{ji}\, V^j U^i$$

Dengan itu, $g(u, v) = g(v, u)$ mengimplikasikan $g_{ij} = g_{ji}$ (sifat simetri metrik Riemannan klasik)

Jika dx^i klasik dianggap sebagai nombor maka didapati,

$$g(dx^i \partial_i, dx^j \partial_j) = g_{k\ell}\, dx^k \otimes dx^\ell \,(dx^i \partial_i, dx^j \partial_j)$$

$$= g_{ij}\, dx^i dx^j$$

Rumus inilah yang ditandakan sebagai ds^2 di dalam analisis klasik yang telah disebut di atas, persamaan (7.1).

Jelaslah sekarang bahawa persamaan (7.1) yang digunakan dalam analisis tensor klasik sebagai takrif metrik Riemannan boleh diformulasikan terus dengan takrif moden, persamaan (7.2). Dengan ini formulasi Choquet-Bruhat drk (1982) yang mentafsirkan ds^2klasik sebagai

$$[\; \tfrac{1}{2} (dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i)\; g_{ij}$$

itu vakuo.

8. STRUKTUR TENSOR RELATIF DAN KETUMPATAN TENSOR

$\mu^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$ suatu tensor relatif jenis (atau pangkat) (r, s) berpemberat P sekiranya kuantiti ini menjelma mengikut rumus

$$\bar{\mu}^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = \left(\text{ptu} \left[\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right] \right)^P \text{darab}$$

$$\frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{\ell_1}} \frac{\partial \bar{x}^{i_2}}{\partial x^{\ell_2}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_r}}{\partial x^{\ell_r}} \frac{\partial x^{m_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{m_s}}{\partial \bar{x}^{j_s}}$$

$$\mu^{\ell_1 \ldots \ell_r}_{m_1 \ldots m_s}$$

dengan P berupa integer, apabila $x \mapsto \bar{x}$.

Jika P = O tensor relatif ini hanyalah tensor biasa sahaja. Jika P = 1, tensor relatif ini lebih dikenali dengan nama ketumpatan tensor. Takrif-takrif ini terkenal di dalam analisis tensor klasik, umpamanya seperti di dalam Lawden (1962).

Pertimbangkan pemetaan multilinear F yang (lihat Spivak (1970)).

$$F : \underbrace{T_q(M) \times \ldots \times T_q(M)}_{k \text{ kali}} \times$$

$$\underbrace{T_q^*(M) \times \ldots \times T_q^*(M)}_{l \text{ kali}} \to \Lambda^n_q(M)$$

dengan $\Lambda^n_q(M)$ melambangkan set tensor kovarian peringkat n yang antisimetri sepenuhnya atas manifold M bermatra n.

Dengan menggunakan sifat multilinear

$$F(v_1, \ldots, v_k, W^1, \ldots, W^\ell)$$

$$= b_1^{i_1} \ldots b_k^{i_k} a^1_j \ldots a^\ell_{j_\ell} F(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_k}, dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_\ell}),$$

$$F(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_k}, dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_\ell}) \in \Lambda^n_q(M),$$

$$v_r = b^i_r \partial_i, \quad W^p = a^p_i dx^i$$

Ini memberikan

$$F(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_k}, dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_\ell})$$

$$= F^{j_1 \ldots j_\ell}_{i_1 \ldots i_k} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

dengan

$F^{j_1 \ldots j_\ell}_{i_1 \ldots i_k}$ pemalar

Sekarang pertimbangkan

$$F(v_1, \ldots, v_k, w^1, \ldots, w^\ell)(t_1, \ldots, t_n) \quad , t_s \in T_q(M)$$

$$= b_1^{i_1} \ldots b_k^{i_k} a^1_j \ldots a^\ell_{j_\ell} F^{j_1 \cdot j_\ell}_{i_1 \ldots i_k} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n (t_1, \ldots, t_n)$$

$$= F^{j_1 \ldots j_\ell}_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1}(v_1) \ldots dx^{i_k}(v_k)\, \partial_{j_1}(w^1) \ldots \partial_{j_\ell}(w^\ell)$$

$$dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n (t_1, \ldots, t_n)$$

$$= F^{j_1 \ldots j_\ell}_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \otimes dx^{i_2} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k} \otimes \partial_{j_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{j_\ell}$$

$$\otimes (dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n)((v_1, \ldots, v_k, w^1, \ldots, w^\ell), (t_1, \ldots, t_n))$$

Dengan ini kita dapat membuat kesimpulan bahawa

$$F = F^{j_1 \ldots j_\ell}_{i_1 \ldots i_k}\, dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k} \otimes \partial_{j_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{j_\ell}$$

$$\otimes (dx^{i} \Lambda \ldots \Lambda\, dx^{n})$$

Sekarang ditunjukkan cara F berubah dengan perubahan koordinat ($x \longmapsto \bar{x}$). Seperti biasa, F di dalam sebutan asas yang baru berupa

$$F = \bar{F}^{\,j_1 \ldots j_\ell}_{\,i_1 \ldots i_k}\, d\bar{x}^{i_1} \otimes \ldots \otimes d\bar{x}^{i_k} \otimes \bar{\partial}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \bar{\partial}_{j_\ell}$$

$$\otimes (d\bar{x}^1 \Lambda \ldots \Lambda\, d\bar{x}^n),$$

$$\bar{\partial}_r = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^r},$$

$$= F^{j_1 \ldots j_\ell}_{i_1 \ldots i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{\ell_1}} \ldots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial \bar{x}^{\ell_k}} \frac{\partial \bar{x}^{m_1}}{\partial x^{j_1}}$$

$$\ldots \frac{\partial \bar{x}^{m_\ell}}{\partial x^{j_\ell}}\, \mathrm{ptu}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right) \text{darab}$$

$$d\bar{x}^{\ell_1} \otimes \ldots \otimes d\bar{x}^{\ell_k} \otimes \bar{\partial}_{m_1} \otimes \ldots \otimes \bar{\partial}_{m_1}$$

$$\otimes (d\bar{x}^1 \Lambda \ldots \Lambda\, d\bar{x}^n)$$

kerana hubungan

$$dx^1 \Lambda \ldots \Lambda\, dx^n = \mathrm{ptu}\left[\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right] d\bar{x}^1 \Lambda \ldots \Lambda\, d\bar{x}^n,$$

yang terkenal itu (lihat Spivak (1970)).

Pertimbangkan pula pemetaan yang berbentuk seperti berikut:

$$\eta : \underbrace{T_q(M) \times \ldots \times T_q(M)}_{n\ \text{kali}} \rightarrow \mathcal{N}$$

$$\eta(v_1, \ldots, v_n) = [w(v_1, \ldots, v_n)]^P$$

$$w \in \Lambda^n_q(M) = \mathfrak{J}^o_{q,n}(M)$$

P integer positif. Lambangkan $\Omega^{n;P}(T_q(M))$ sebagai set pemetaan seperti η ini. Pertimbangkan pemetaan multiliner.

$$F : \underbrace{T_q(M) \times \ldots \times T_q(M)}_{k\ \text{rangkap}} \times \underbrace{T_q{}^*(M) \times \ldots \times T_q{}^*(M)}_{\ell\ \text{rangkap}}$$

$$\rightarrow \Omega^{n;P}(T_q M)$$

Jelaslah

$$F(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_k}, dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_\ell})(u_1, \ldots, u_n)$$

$$= F^{j_1 \ldots j_\ell}_{i_1 \ldots i_k} [dx^1 \Lambda \ldots \Lambda\, dx^n (u_1, \ldots, u_n)]$$

dengan $F^{i_1 \ldots j_\ell}_{i_1 \ldots i_k} = \alpha^P$, α pemalar

Oleh sebab sebarang $w \in \Lambda^n_q(M)$, kita ada

$$w^P = \underbrace{w \otimes \ldots \otimes w}_{P\ \text{rangkap}} / \mathrm{pep}\left((T_q(M))^n \times \ldots \times (T_q(M))^n\right)$$

dengan

$$\mathrm{pep}(A_1 \times \ldots \times A_m) = \{(a, a, \ldots, a) : a \in A_i\}$$

maka kita boleh tulis

$$F = F^{j_1 \ldots j_\ell}_{i_1 \ldots i_k}\, dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k} \otimes \partial_{j_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{j_\ell}$$

$$\otimes [dx^1 \Lambda \ldots \Lambda\, dx^n]^P$$

Mudah ditunjukkan yang $F^{j_1 \ldots j_\ell}_{i_1 \ldots i_k}$, komponen F ini memenuhi hukum penjelmaan tensor relatif peringkat (ℓ, k) berpemberat positif P. Pertimbangkan pemetaan multilinear G.

$$G : \underbrace{T_q(M) \times \ldots \times T_q(M)}_{k\ \text{kali}} \times \underbrace{T_q{}^*(M) \times \ldots \times T_q{}^*(M)}_{\ell\ \text{kali}}$$

$$\rightarrow \Lambda_{q,n}(M),$$

dengan $\Lambda_{q,n}(M)$ melambangkan set tensor kontravarian peringkat n atas manifold M bermatra n yang antisimetri sepenuhnya (lihat Spivak (1970)). Kita dapati, dengan

$$v_r = b^i_r \partial_i , \tau^p = a^p_i dx^i, \alpha^k \epsilon T_q{}^*(M) ,$$

$$G(v_1, \ldots, v_k, \tau^1, \ldots, \tau^\ell)(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$$

$$= G(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_k}, dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_\ell}) dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k}$$

$$\otimes \partial_{j_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{j_\ell} (v_1, \ldots, v_k, \tau^1, \ldots, \tau^\ell)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \bar{\Lambda} \ldots \bar{\Lambda} \frac{\partial}{\partial x^n} (\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$$

$$= G^{j_1 \ldots j_\ell}_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k} \otimes \partial_{j_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{j_\ell}$$

$$\otimes \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \bar{\Lambda} \ldots \bar{\Lambda} \frac{\partial}{\partial x^n}\right] (v_1, \ldots, v_k, \tau^1, \ldots, \tau^\ell)(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$$

Oleh itu kita boleh tulis

$$G = G^{j_1 \ldots j_\ell}_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k} \otimes \partial_{j_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{j_\ell}$$

$$\otimes \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \bar{\Lambda} \ldots \bar{\Lambda} \frac{\partial}{\partial x^n}\right]$$

$$\bar{G}^{m_1 \ldots m_r}_{\ell_1 \ldots \ell_k} = G^{j_1 \ldots j_\ell}_{i_1 \ldots i_k} \text{ ptu } \left[\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right]^{-1} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{\ell_1}} \ldots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial \bar{x}^{\ell_k}}$$

$$\frac{\partial \bar{x}^{m_1}}{\partial x^{j_1}} \ldots \frac{\partial \bar{x}^{m_r}}{\partial x^{j_\ell}} ,$$

apabila kita menggunakan penjelmaan terkenal (lihat Spivak, (1970)),

$$\partial_1 \bar{\Lambda} \ldots \bar{\Lambda} \partial_n = \text{ptu } \left[\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right]^{-1} \bar{\partial}_1 \bar{\Lambda} \ldots \bar{\Lambda} \bar{\partial}_n$$

Hukum penjelmaan inilah yang di dalam susastera klasik itu dianggap sebagai takrif tensor relatif jenis (l, k) dengan pemberat (− 1). Satu set fungsi yang berbentuk seperti berikut,

$$\mu : \underbrace{T_q{}^*(M) \times \ldots \times T_q{}^*(M)}_{\text{n kali}} \to N$$

dengan

$$\mu(\tau^1, \ldots, \tau^n) = [\lambda(\tau^1, \ldots, \tau^n)]^P$$

yang $\lambda \epsilon \Lambda_{q,n}(M)$, dilambangi sebagai $\Omega^{n;P}(T_q{}^*(M))$; P suatu integer positif.

Sekarang, pertimbangkan pula pemetaan multilinear

$$G: \underbrace{T_q(M) \times \ldots \times T_q(M)}_{\text{k rangkap}} \times \underbrace{T_q{}^*(M) \times \ldots \times T_q{}^*(M)}_{l \text{ rangkap}}$$

$$\to \Omega^{n;P}(T_q{}^*(M)).$$

Didapati

$$G(v_1, \ldots, v_k, \tau^1, \ldots, \tau^\ell)$$

$$= b_1^{i_1} \ldots b_k^{i_k} a^1_{j_1} \ldots a^\ell_{j_\ell} G(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_k}, dx^{j_1}, \ldots, dx^{j}$$

dengan

$$v_i = b_i^\ell \partial_\ell \epsilon T_q(M) , \tau^j = a^j_\ell dx^\ell \epsilon T_q{}^*(M),$$

dan

$$G(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_k}, dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_\ell})(\rho^1, \ldots, \rho^n)$$

$$= [\lambda(\rho^1, \ldots, \rho^n)]^P$$

$$= \alpha^P [(\partial_1 \bar{\Lambda} \ldots \bar{\Lambda} \partial_n)(\rho^1, \ldots, \rho^n)]^P,$$

α pemalar

sebab $\lambda \in \bar{\Lambda}_{q,n}(M)$. Maksud $[(\partial_1 \bar{\Lambda} \ldots \bar{\Lambda} \partial_n)(\rho^1, \ldots, \rho^n)]^P$ di sini sama dengan maksud $[dx^1 \Lambda \ldots \Lambda dx^n (u_1, \ldots, u_n)]^P$, cuma $T_q M$ digantikan dengan $T_q{}^*(M)$.

Oleh yang demikian,

$$G(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_k}, dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_\ell})(\rho^1, \ldots, \rho^n)$$

$$= \alpha^P [\partial_1 \bar{\Lambda} \ldots \bar{\Lambda} \partial_n (\rho^1, \ldots, \rho^n)]^P$$

$$= G^{j_1 \ldots j_\ell}_{i_1 \ldots i_k} [\partial_1 \bar{\Lambda} \ldots \bar{\Lambda} \partial_n (\rho^1, \ldots, \rho^n)]^P$$

Dengan itu, kita boleh tulis

$$G(v_1, \ldots, v_k, \tau^1, \ldots, \tau^\ell)(\rho^1, \ldots, \rho^n)$$

$$= G^{j_1 \ldots j_\ell}_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k} \otimes \partial_{j_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{j_\ell}$$

$$\otimes (\partial_1 \bar{\Lambda} \ldots \bar{\Lambda} \partial_n)^P$$

$$((v_1, \ldots, v_k, \tau^1, \ldots, \tau^\ell), (\rho^1, \ldots, \rho^n))$$

iaitu

$$G = G^{j_1 \ldots j_\ell}_{i_1 \ldots r_k} dx^{i_j} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k} \otimes \partial_{j_1}$$

$$\otimes \ldots \otimes \partial_{j_\ell} \otimes (\partial_1 \bar{\Lambda} \ldots \bar{\Lambda} \partial_n)^P$$

Seperti untuk kasus P = −1, jelaslah untuk kasus ini, perubahan sistem koordinat $x \mapsto \bar{x}$ akan memberikan

$$\bar{G}^{m_1 \ldots m_\ell}_{r_1 \ldots r_k} = \left(\text{ptu } [\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}]\right)^{-P} G^{j_1 \ldots j_\ell}_{i_1 \ldots i_k}$$

$$\frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{r_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial \bar{x}^{r_k}} \frac{\partial \bar{x}^{m_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{m_\ell}}{\partial x^{j_\ell}}$$

Hukum penjelmaan inilah yang dianggap sebagai takrif klasik tensor relatif jenis (l, k) pemberat $(-P)$.

PENGHARGAAN

Penulis kedua kertas ini (Muriati) berterima kasih kepada UKM yang telah membolehkan beliau membuat penyelidikan ini di bawah penyeliaan penulis yang pertama.

RUJUKAN

ABRAHAM, R. dan MARSDEN, J.E. (1978): *Foundations of Mechanics,* Benjamin, Syn: 2.

CHOQUET-BRUHAT, Y. drk. (1982): *Analisis, Manifolds and Physics,* North-Holland, Revised Ed.

DODSON, C.T.J. dan POSTON, T. (1979): *Tensor Geometry,* Pitman.

KOBAYASHI, S. dan NOMIZU, K. (1963): *Foundations of Differential* Geometry, Vol. 1, John Wiley.

LAWDEN, D.F. (1962): *Introduction to Tensor Calculus and Relativity,* Methuen.

MITCHELL, B. (1965): *Theory of Categories,* Ac. Press.

MURIATI BT. MUKHTAR (1984): *Formulasi Tensor Atas Manifold,* Disertasi Sarjana Jabatan Matematik, Universiti Kebangsaan Malaysia.

PERLIS, S. (1962): *Theory of Matrices,* John Wiley.

SHAHARIR BIN MOHAMAD ZAIN, (1984): Satu Kajian Perbandingan Berkenaan Analisis Tensor Moden dan Analisis Tensor Klasik, *Jurnal Malaysiana,* Siri Sains Kuantitatif *13 (2),* 167 – 177.

SPIVAK, M. (1965): *Calculus on Manifolds,* Benjamin.

SPIVAK, M. (1970): *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry,* Vol. 1, Publish or Perish.

THIRRING, W. (1978): *Classical Dynamical Systems,* Springer-Verlag.

WESTENHOLZ, (1978): *Differential Forms in Mathematical Physics,* North-Holland.

(Received 26 November, 1986)