



**Escola de Camins**

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Camins, Canals i Ports  
UPC BARCELONATECH

## **GLARE: Caracterización mecánica y simulación numérica con Kratos-Multiphysics**

Treball realitzat per:

**Joaquín de Arespachaga Martínez**

Dirigit per:

**Prof. Lucia Gratiela Barbu**

**Prof. Alejandro Cornejo Velázquez**

**Prof. Sergio Jiménez Reyes**

Grau en:

**Enginyeria Civil**

Barcelona, 11 de febrer de 2021

Departament de Enginyeria Civil i Ambiental

**TREBALL FINAL DE GRAU**



# **GLARE: Caracterización mecánica y simulación numérica con Kratos-Multiphysics**

**Joaquín de Arespachaga Martínez**



Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona

Universitat Politècnica de Catalunya

Trabajo Final de Grado

Tutores:

**Prof. Lucia Gratiela Barbu**  
**Prof. Alejandro Cornejo Velázquez**  
**Prof. Sergio Jiménez Reyes**

Febrero 2021

# **GLARE: Caracterización mecánica y simulación numérica con Kratos-Multiphysics**

**Joaquín de Arespachaga Martínez**

Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona  
Universitat Politècnica de Catalunya

Trabajo Final de Grado

Tutores:

**Prof. Lucia Gratiela Barbu**

**Prof. Alejandro Cornejo Velázquez**

**Prof. Sergio Jiménez Reyes**

Febrero 2021



## Agradecimientos

A medida que avanzaba en la realización de esta tesina, me he dado cuenta de la cantidad de conocimientos que he podido ir adquiriendo, así como la experiencia ganada a base de cometer errores e intentar superarlos continuamente. Esta tarea no hubiera sido posible sin el apoyo de mis tutores, los profesores: Lucia Gratiela Barbu, Alejandro Cornejo y Sergio Jiménez. Todos ellos me han ayudado en la resolución de los múltiples problemas que han ido apareciendo.

También quiero expresar mi agradecimiento al CIMNE por facilitarme el acceso a las herramientas necesarias para la realización de este trabajo en el que he podido aprender muchas cosas nuevas y en las que he disfrutado.

También quiero agradecer la ayuda y enseñanza a todos mis profesores en la Escuela a lo largo de estos años.

No podría terminar este apartado sin mencionar a mi familia. A todos ellos les debo el haber llegado hasta aquí. En concreto quiero agradecer a mis padres que seguro, desde el cielo, están muy orgullosos y satisfechos de que haya llegado hasta aquí. A mis hermanos, a mis hijos y a mi mujer por haberme aguantado en esos momentos en los que he tenido que priorizar los estudios frente a las demás cosas. Muchas gracias a todos, familia.





## Resumen

GLARE, acrónimo de “GLASS REinforced aluminium”, es un material compuesto, laminado de fibra y metal (FML). GLARE consiste en capas de aluminio y un compuesto de fibra de vidrio preimpregnadas (prepreg) con resina epoxi. Las capas de fibra de vidrio están orientadas en distintas direcciones para mejorar así las propiedades mecánicas del material [1] [2] [3] [4].

El objeto de este trabajo es la caracterización mecánica y simulación numérica de GLARE y sus componentes para el rango lineal y no lineal bajo cargas cuasi estáticas y dentro del rango de pequeños desplazamientos, mediante el Método de Elementos Finitos (MEF) [5].

La tecnología de los compuestos de fibra y metal (FML) combina las ventajas de los materiales metálicos (resistencia y reparación) con las ventajas de los polímeros reforzados con fibras (elevada resistencia mecánica y rigidez, buena resistencia a fatiga y a la corrosión). Los FML están siendo cada vez más utilizados en las aplicaciones aeronáuticas y aeroespaciales [1].

El laminado se ha simulado diseñando cada capa del laminado como capa individual, cada capa con su ecuación constitutiva y el conjunto de capas con la teoría de mezclas en paralelo (PROM). La formulación PROM permite definir el material como un conjunto de capas de distintos materiales y para cada material su ecuación constitutiva. De esta forma no es necesario definir las capas en la geometría. Se han obtenido, como era de esperar, los mismos resultados.

Las simulaciones se han planteado como un proceso incremental de complejidad en que se han ido revisando los modelos constitutivos, desde los más simples a los más complejos, para capturar el comportamiento real del material, pasando de un modelo elástico, sobre una ley de mezclas, hasta utilizar modelos no lineales para cada uno de los materiales componentes.

El aluminio se ha simulado según distintas ecuaciones constitutivas: elástico lineal, plasticidad perfecta y plasticidad con endurecimiento (aproximación polinómica de datos experimentales). Las capas del compuesto (fibra/matriz epoxi), se han modelado mediante la teoría de mezclas serie-paralelo SPROM [6]. El comportamiento mecánico de los componentes del compuesto, la fibra y matriz, se han modelado, con un modelo elástico-lineal y también, usando un modelo de daño isótropo.

La formulación SPROM se ha utilizado antes para otros materiales. No hay referencias de su utilización en el modelado del compuesto, fibra de vidrio-resina de GLARE, esta es una de las principales aportaciones de este trabajo.

Los resultados se han analizado mediante los diagramas tensión-deformación de un ensayo a tracción simple unidimensional (carga estática). Se han comparado los resultados con distintas simulaciones realizadas en otros trabajos obteniéndose una buena aproximación con los resultados experimentales disponibles.



## GLARE: Caracterización mecánica y simulación numérica con Kratos-Multiphysics

Al final del documento, hay una relación de la documentación que se ha analizado de GLARE y de las diferentes tecnologías numéricas empleadas en la actualidad.





## Resum

GLARE, acrònim de "GLAss REinforced aluminium", és un material compost, de fibra i laminat metàl·lic (FML). GLARE consta de capes d'alumini i un compost preimpregnat de fibra de vidre (pregreg) amb resina epoxi. Les capes de fibra de vidre estan orientades en diferents direccions per millorar les propietats mecàniques del material. [1] [2] [3] [4].

L'objecte d'aquest treball és la caracterització mecànica i la simulació numèrica de GLARE i els seus components per a rang lineal i no lineal sota càrregues quasi estàtiques i dins del rang de petits desplaçaments, utilitzant el Mètode d'Element Finitis (MEF) [5].

La tecnologia composta de fibra i metall (FML) combina els avantatges dels materials metàl·lics (resistència i reparació) amb els avantatges dels polímers reforçats amb fibra (alta resistència mecànica i rigidesa, bona resistència a la fatiga i la corrosió). Les FML s'utilitzen cada vegada més en aplicacions aeronàutica i aeroespacial [1].

El laminat s'ha simulat dissenyant cada capa del laminat com una capa individual, cada capa amb la seva equació constituent, i el conjunt de capes amb teoria de mesclades paral·lela (PROM). La formulació PROM permet definir el material com un conjunt de capes de diferents materials i per a cada material la seva equació constituent. D'aquesta manera no cal definir les capes de la geometria. Els mateixos resultats s'han obtingut, tal com s'esperava.

S'han proposat simulacions com un procés incremental de complexitat en el qual s'han revisat els models constituents, des dels més senzills fins als més complexos, per capturar el comportament real del material, passant d'un model elàstic, sobre una llei de mescla, a utilitzar models no lineals per a cadascun dels materials components.

L'alumini s'ha simulat segons diferents equacions constituents: elasticitat lineal, plasticitat perfecta i plasticitat endurida (aproximació polinòmica de dades experimentals). Les capes dels materials compostos (fibra/ matriu epoxi) s'han modelat utilitzant la teoria de mesclades sèrie-paral·lel SPROM. El comportament mecànic dels components compostos, fibra i matriu, han estat modelats, amb un model elàstic-lineal i també, utilitzant un model de dany isotròpic [6]. El comportament mecànic dels materials compostos, fibra i matriu, han estat modelats, amb un model elàstic-lineal i també, utilitzant un model de dany isotròpic.

La formulació SPROM s'ha utilitzat abans per a altres materials. No hi ha referències del seu ús en modelatge compost, resina i fibra de vidre amb GLARE, aquesta és una de les principals aportacions d'aquest treball.

Els resultats s'han analitzat utilitzant els diagrames tensió- deformació d'un assaig de tracció unidimensional (càrrega estàtica). Els resultats s'han comparat amb diferents simulacions realitzades en altres treballs, aconseguint una bona aproximació amb els resultats experimentals disponibles.



## GLARE: Caracterización mecánica y simulación numérica con Kratos-Multiphysics

Al final del document, hi ha una llista de la documentació que s'ha analitzat de GLARE i les diferents tecnologies numèriques utilitzades actualment.



## Abstract

GLARE is an acronym for GLASS REinforced aluminium, is a fiber metal-laminate (FML) composite material. GLARE consists of layers of aluminium and fiberglass pre-impregnated (prepreg) with epoxy resin. The fiberglass layers are oriented in different directions to improve the mechanical properties of the material. [1] [2] [3] [4].

The target of this work is the mechanical characterization and numerical simulation of GLARE and its components, for linear and nonlinear range, under quasistatic loads and within the range of small displacements using the Finite Element Method (FEM) [5].

The technology of fiber-metal composites (FML) combines the advantages of metallic materials (resistance and repair) with the advantages of fiber-reinforced polymers (high mechanical strength and stiffness, good resistance to fatigue and corrosion). FML's are being increasingly used in aeronautical and aerospace applications.

The laminate has been simulated by designing each layer of the laminate as an individual layer, each layer with its constituent equation and the set of layers with the theory of parallel rule of mixtures (PROM). The PROM formulation allows you to define the material as a set of layers of different materials and define its constituent equation for each material. This way you do not need to define the layers in the geometry. As expected, the same results have been obtained.

The simulations have been proposed as an additive process of complexity in which the constituent models have been reviewed, from the simplest to the most complex, to capture the actual behavior of the material, going from an elastic model, over a mixtures law, to using nonlinear models for each of the component materials.

The aluminium has been simulated according to different constituent equations: linear elasticity, perfect plasticity and plasticity with hardening (polynomial approximation of experimental data). The layers of the compound (fiber/epoxy matrix) have been modelled using the SPROM series-parallel mixture theory [6]. The mechanical behavior of composite components, fiber and matrix, have been modelled, with an elastic-linear model and, using an isotropic damage model.

The SPROM formulation has been used before for other materials. There are no references to its use in modelling GLARE's fiberglass-resin compound, this is the main contribution of this work.

The results have been analyzed using the stress-strain diagrams of a simple one-dimensional tensile test (static load). The results have been compared with different simulations carried out in other works. We obtained a good approximation with the available experimental results.

At the end of the document, there is a list of the documentation that has been analyzed from GLARE and the different numerical technologies currently used.





## Abreviaturas

FEM	Finite Element Method
FML	Fiber Metal Laminate. Laminado de fibra y metal
GiD	GiD es un programa gráfico, definición y preparación datos destinados simulación numérica y visualización de sus resultados.
GLARE	GLAss REinforced aluminium
Kratos	“Kratos Multiphysics”, software simulación métodos numéricos
L	Dirección longitudinal. Dirección laminado aluminio. Dirección de las fibras 0º
MEF	Método Elementos Finitos
LT	Dirección transversal
PROM	Parallel Rule of Mixtures. Teoría de mezclas paralelo
RT	Room Temperature. Temperatura ambiente
SPROM	Serial Parallel Rule of Mixtures. Teoría de mezclas serie-paralelo





## Tabla de contenido

1	Introducción .....	1
1.1	Objetivos .....	1
1.2	Esquema general del documento .....	1
2	Introducción al Método de Elementos Finitos.....	3
2.1	El MEF. Teoría Elasticidad 2D .....	4
2.1.1	Campo de desplazamientos, deformaciones y tensiones .....	6
2.1.2	Principio de los Trabajos Virtuales .....	8
2.1.3	Elemento triangular de 3 nodos.....	8
2.1.4	Discretización del campo de desplazamientos, deformaciones y tensiones .....	9
2.1.5	Ecuaciones de equilibrio de la discretización.....	11
2.2	Introducción a la Elasticidad 3D .....	15
2.2.1	Campo de desplazamientos, deformaciones y tensiones.....	16
2.2.2	Principio de los trabajos virtuales en 3D.....	17
2.2.3	El tetraedro de cuatro nodos .....	17
2.2.4	Discretización del campo de desplazamientos .....	17
2.2.5	Matriz de deformaciones .....	19
2.2.6	Ecuaciones de equilibrio.....	20
3	Teoría de mezclas Serie-Paralelo .....	21
3.1	Evolución de la Teoría de la Mezclas.....	21
3.1.1	La teoría de mezclas .....	21
3.1.2	Teoría clásica de mezclas .....	22
3.1.3	La teoría de mezclas en paralelo.....	22
3.1.4	La Teoría de mezclas Serie-Paralelo.....	24
3.1.5	Metodologías del Campo Medio .....	24
3.2	Modelado de materiales compuestos.....	25
3.2.1	Descripción del problema serie-paralelo .....	25
3.3	Formulación Serie-Paralelo regla de mezclas (SPROM) .....	26
3.3.1	Material compuesto, relación matriz y fibras .....	26
3.4	Ejemplo de simulación de material compuesto.....	27



4	Introducción a los modelos de plasticidad.....	29
4.1	Introducción. Conceptos básicos .....	32
4.1.1	Hipótesis de aditividad .....	33
4.1.2	Superficie de fluencia .....	34
4.1.3	Ley de fluencia. Potencial plástico .....	34
4.2	Ley de endurecimiento.....	35
4.3	Ecuación general de la plasticidad .....	36
4.4	Modelos clásicos de fluencia (Modelos de Plasticidad perfecta) .....	36
4.4.1	El criterio Rankine de máxima tensión de tracción.....	37
4.4.2	El criterio Tresca de máxima tensión desviadora.....	39
4.4.3	Modelo de Von Mises.....	40
4.4.4	El criterio Mohr-Coulomb de tensión desviadora octaédrica .....	42
4.4.5	El criterio de Drucker-Prager.....	43
4.5	Modelos de plasticidad con endurecimiento (hardening) .....	45
4.5.1	Rigidización isótropa .....	45
4.5.2	Rigidización cinemática .....	45
5	Introducción a los modelos de daño .....	47
5.1	Teoría del daño.....	47
5.1.1	Teoría del daño Uniaxial.....	47
5.1.2	Teoría del daño isótropo .....	50
5.2	Leyes de Evolución del daño .....	52
5.2.1	Ablandamiento exponencial .....	52
5.2.2	Ablandamiento Lineal .....	52
5.3	No linealidad asociada al daño.....	53
6	Sistemas de Ecuaciones No-Lineales.....	55
6.1	Método de Newton.....	55
6.2	Método de la secante.....	56
6.3	Método de Newton-Raphson.....	57
6.4	Aplicación al MEF .....	58
7	Ejemplos de simulación. Kratos & GiD .....	59
7.1	¿Qué es GiD? .....	59





7.2 ¿Qué es Kratos?.....	60
7.2.1 Licencia .....	60
7.2.2 Principales características .....	60
7.2.3 Principales aplicaciones.....	60
7.3 Ejemplos de validación.....	61
1.1.1 Test0. Viga en voladizo. Análisis mediante MAT-FEM .....	61
7.3.1.1 Descripción del problema .....	61
7.3.1.2 Resultados analíticos.....	61
7.3.1.3 Resultados de la simulación. Viga 1D.....	63
7.3.2 Test1. Viga en voladizo. Análisis mediante Kratos .....	64
7.3.2.1 Descripción del problema .....	64
7.3.2.2 Resultados analíticos.....	64
7.3.2.3 Resultados de la simulación. Sólido 2D.....	65
7.3.2.4 Resultados de la simulación. Estructura 3D .....	66
7.3.3 Test2. Pórtico sencillo. Análisis mediante Kratos.....	68
7.3.3.1 Descripción del problema .....	68
7.3.3.2 Resultados analíticos.....	68
7.3.3.3 Resultados de la simulación. Viga 2D.....	68
7.3.3.4 Resumen de Resultados. Comentarios.....	71
8 Descripción de los materiales: GLARE .....	73
8.1 Aleación Aluminio .....	73
8.1.1 Propiedades mecánicas.....	73
8.1.2 Ecuaciones constitutivas .....	74
8.2 Resina Epoxi .....	76
8.3 Fibra de vidrio.....	77
8.4 Compuesto (Fibra de Vidrio + Resina Epoxi) .....	77
8.5 GLARE .....	79
9 Ejemplos de Aplicación. Simulaciones Numéricas .....	83
9.1 Geometría del espécimen .....	83
9.1.1 Malla.....	83
9.1.2 Modelos.....	84



9.1.3 Condiciones de contorno .....	86
9.2 Resultados experimentales .....	87
9.3 Formulaciones analizadas. Ecuaciones constitutivas .....	89
9.4 Resultados de las simulaciones .....	89
9.4.1 Espécimen GLARE H1 .....	90
9.4.2 Espécimen GLARE H4 .....	94
9.5 Resumen .....	95
9.5.1 Simulaciones .....	95
9.5.2 Resultados .....	95
10 Conclusiones y trabajos futuros .....	97
10.1 Conclusiones .....	97
10.2 Trabajos futuros .....	97
11 Referencias .....	99
12 Anexo A. Descripción Materiales Kratos .....	103
12.1 Aluminio .....	103
12.1.1 Aluminio [AL1.2] .....	103
12.1.2 Aluminio [AL1.3] .....	103
12.2 Compuesto .....	104
12.2.1 Epoxi [EX1.2] .....	104
12.2.2 Fibra de vidrio & Epoxi [FG1.2] .....	104
12.3 GLARE .....	106
12.3.1 GLARE3 [H1] .....	106
12.3.2 GLARE3 [H4] .....	109
13 Anexo B. Resultados simulaciones .....	114
13.1 Inicio y progreso del daño en el compuesto .....	114
13.2 Resultados daño, tensiones, deformaciones .....	115



## Lista de figuras

Figura 2.1 Ejemplos de problemas de tensión plana [5] .....	5
Figura 2.2 Ejemplos de problemas de deformación plana [5] .....	6
Figura 2.3 Ejemplo de discretización de una estructura en elementos triangulares de 3 nodos [5] .....	9
Figura 2.4 Fuerzas sobre un elemento triangular de 3 nodos [5].....	11
Figura 2.5 Ensamblaje de la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales equivalentes [5].....	14
Figura 2.6: Estructuras que requieren un análisis en 3D [5].....	15
Figura 2.7 Tetraedro de 4 nodos. Desplazamientos nodales $u_i; v_i; w_i$ y fuerzas de equilibrio nodales $F_{xi}, F_{yi}, F_{zi}$ [5] .....	18
Figura 3.1 Límites superior e inferior de las propiedades mecánicas de un material compuesto según la teoría de mezclas [15] .....	22
Figura 3.2 Diagrama tensión-deformación del compuesto bajo cargas en la dirección paralela.....	28
Figura 3.3 Diagrama tensión-deformación del compuesto bajo cargas en la dirección serie .....	28
Figura 4.1 Plasticidad isótropa (izquierda) y cinemática (derecha) [18] .....	29
Figura 4.2 Efecto Bauschinger [19].....	30
Figura 4.3 Diagramas de plasticidad implementados en Kratos .....	31
Figura 4.4 Ensayo de tracción uniaxial [20] .....	32
Figura 4.5 Comportamientos idealizados del material [20] .....	33
Figura 4.6 Superficie de fluencia [20] .....	34
Figura 4.7 Potencial plástico y vector de deformaciones plásticas [20] .....	35
Figura 4.8 Superficie de fluencia de Rankine en el espacio de tensiones principales [18].....	38
Figura 4.9 Superficie de fluencia de Tresca en el espacio de tensiones principales [18] [20] .....	39
Figura 4.10 Superficie de fluencia de Von Mises en el espacio de tensiones principales [21] .....	40
Figura 4.11 Superficies de fluencia de von Mises y Tresca en el plano de las tensiones principales $\sigma_1$ y $\sigma_2$ . [21].....	41
Figura 4.12 Superficie de fluencia de Mohr-Coulomb en el espacio de tensiones principales [18] [20] ...	43
Figura 4.13 Superficie de fluencia de Drucker-Prager en el espacio de tensiones principales [18] .....	44
Figura 4.14 Rigidación isótropa y rigidización cinemática [20] .....	45
Figura 5.1 Idealización del material con carga uniaxial [25].....	47
Figura 5.2: Idealización del material dañado [25] .....	48
Figura 5.3 Curvas Tensión- deformación; Tensión efectiva-deformación; Daño-deformación. [25] .....	49
Figura 5.4 Modelo de daño uniaxial a través de una carga no-monótona [25] .....	50
Figura 5.5 Leyes de ablandamiento exponencial y lineal [25].....	52
Figura 6.1 Método de Newton. Interpretación unidimensional [26] .....	56
Figura 6.2 Ejemplo de divergencia del método de Newton [26] .....	56
Figura 6.3 Método de la secante. Interpretación unidimensional [26] .....	57
Figura 7.1 GiD. Preproceso, Customización y postproceso [10].....	60
Figura 7.2 Test0.Viga en voladizo. [28].....	61
Figura 7.3 Test0.Resultados. Tensión de Cauchy $S_{xx}$ [Pa]. .....	62
Figura 7.4 Test0.Resultados. Desplazamientos verticales [m]. .....	62
Figura 7.5 Test0. Resultados. Ley de momentos flectores .....	63
Figura 7.6 Test0. Resultados. Desplazamientos verticales .....	63
Figura 7.7 Viga en voladizo bajo carga puntual en un extremo. [28] .....	64
Figura 7.8 Test1. Solido 2D Distribución de la tensión de Cauchy[Pa]. .....	65
Figura 7.9 Test1. Solido 2D. Desplazamientos verticales sobre la deformada [m]. .....	65
Figura 7.10 Test1. Solido3D. Lamina. Malla .....	66



Figura 7.11 Test1. Solido 3D. Tensión de Cauchy [Pa].....	66
Figura 7.12 Test1.Solido 3D. Distribución de desplazamientos verticales [m].....	67
Figura 7.13 Pórtico 2D. Descripción del problema .....	68
Figura 7.14 Resultados método analítico .....	68
Figura 7.15 Pórtico 2D. Diagrama de flectores .....	69
Figura 7.16 Pórtico 2D. Deformada .....	69
Figura 7.17 Pórtico 2D. Diagrama de flectores sobre la deformada .....	70
Figura 7.18 Pórtico 2D. Flector máximo y mínimo [Nm] .....	70
Figura 7.19 Pórtico 2D. Flechas máxima y mínima [m] .....	71
Figura 7.20 Resultados para el pórtico .....	71
Figura 8.1 Diagrama tensión-deformación. Plasticidad perfecta [AL1.2].....	74
Figura 8.2 Diagramas tensión-deformación del aluminio. La interpolación polinómica es la utilizada como parámetros en la simulación [AL1.3] .....	75
Figura 8.3 Diagrama tensión-deformación. Curva de ajuste interpolación polinómica. Obtenido en la simulación [AL1.3] .....	75
Figura 8.4 Diagrama tensión-deformación y daño-deformación. Resina Epoxi [EX1.2].....	76
Figura 8.5 Diagrama tensión-deformación: compuesto, fibra de vidrio y resina epoxi en la dirección paralela [FG1.2] .....	78
Figura 8.6 Diagrama tensión-deformación: compuesto, fibra de vidrio y resina epoxi en la dirección serie [FG1.2] .....	78
Figura 8.7 Laminado típico de GLARE y diagrama de capas para el caso de un número par e impar de capas de compuesto (fibra-resina epoxi) [1] .....	79
Figura 9.1 Geometría del espécimen utilizado para las simulaciones. Se utilizan para la simulación las simetrías del espécimen. [2] .....	83
Figura 9.2 Malla de hexaedros utilizada en las simulaciones numéricas que se ha obtenido con GiD .....	84
Figura 9.3 Detalle de la malla de tetraedros. Vista en el espesor de la probeta. Se ve la zona con una malla más densa en la zona con gradiente más alto de tensiones. ....	84
Figura 9.4 Modelo [H1].....	85
Figura 9.5 Modelo [H4].....	85
Figura 9.6 Condiciones de contorno.....	86
Figura 9.7 Condiciones de carga.....	87
Figura 9.8 Resultados experimentales y de las simulación de Hagenbeek para GLARE 3 3/2 0.3 [1] .....	88
Figura 9.9 Resultados experimentales de Hagenbeek [1] .....	88
Figura 9.10 Nodos en la malla en los que se calculan las reacciones y el desplazamiento .....	89
Figura 9.11 Distribución de reacciones en [N]. Nodos desplazamiento impedido.....	89
Figura 9.12 H1 Model. GLARE3.Aluminio, plasticidad perfecta [AL1.2]. Compuesto fibra-resina epoxi, lineal-elástico [FG1.1] .....	90
Figura 9.13 H1 Model. GLARE3.Aluminio, curva polinómica [AL1.3]. Compuesto fibra-resina epoxi, lineal-elástico [FG1.1] .....	91
Figura 9.14 H1 Model. GLARE3.Aluminium curva polinómica [AL1.3]. Compuesto fibra-resina epoxi, daño isotrópico [FG1.2].....	92
Figura 9.15 H1 Model. GLARE3.Aluminio [AL1.2] y Compuesto [FG1.1] vs GLARE3 Aluminio [AL1.3] y Compuesto [FG1.1] vs Aluminio [AL1.3] y Compuesto [FG1.2] .....	93
Figura 9.16 H4 Model. GLARE3.Aluminio [AL1.2] y Compuesto [FG1.1] vs GLARE3 Aluminio [AL1.3] y Compuesto [FG1.1] vs Aluminio [AL1.3] y Compuesto [FG1.2] .....	94
Figura 13.1 Daño [-]. Compuesto inferior (paso 61).....	114
Figura 13.2 Daño [-]. Compuesto inferior (paso 93).....	114
Figura 13.3 Daño en la matriz [-]. Compuesto superior .....	115



Figura 13.4 Daño en la matriz [-]. Compuesto inferior .....	115
Figura 13.5 Tensiones en la matriz [Pa]. Compuesto superior .....	116
Figura 13.6 Tensión en la fibra [Pa]. Compuesto superior .....	116
Figura 13.7 Tensión en el compuesto [Pa]. Compuesto superior.....	117
Figura 13.8 Tensiones en la matriz [Pa]. Compuesto inferior .....	117
Figura 13.9 Tensiones en la fibra [Pa]. Compuesto inferior .....	118
Figura 13.10 Tensiones en el compuesto [Pa]. Compuesto inferior.....	118
Figura 13.11 Desplazamientos[m]. Compuesto superior .....	119
Figura 13.12 Desplazamientos[m]. Compuesto inferior.....	119
Figura 13.13 Desplazamientos en la dirección ortogonal a la carga [m]. Compuesto inferior.....	120





## Lista de Tablas

Tabla 3.1 Propiedades mecánicas de las resinas.....	27
Tabla 8.1 Propiedades mecánicas aleación aluminio 2024 [1] [30] .....	73
Tabla 8.2 Propiedades mecánicas del aluminio 2024-T3 [1] .....	74
Tabla 8.3 Propiedades mecánicas resina epoxi [1].....	76
Tabla 8.4 Propiedades mecánicas fibra de vidrio [1].....	77
Tabla 8.5 Clases estándar de GLARE [3] .....	80
Tabla 8.6 Layout de GLARE 3-3/2-0.3 .....	81







# 1 Introducción

Desde la II Guerra Mundial, los metales y especialmente el aluminio, el acero y el titanio han sido utilizados en la industria aeronáutica. La reducción del espesor del perfil, los problemas de fatiga y la reducción de costes han motivado el estudio de los materiales compuestos, más ligeros, más resistentes y de menor coste, como alternativas. El objeto de este trabajo es la caracterización mecánica y simulación numérica de uno de estos materiales, GLARE (“GLASS aluminium REinforced”), laminado de aluminio y compuesto de fibra de vidrio y resina epoxi [1].

## 1.1 Objetivos

Los objetivos de este trabajo son la caracterización mecánica de GLARE y la realización de simulaciones numéricas utilizando distintas ecuaciones constitutivas de los materiales que componen GLARE. Los resultados obtenidos, en las distintas simulaciones, se han comparado con los resultados experimentales disponibles en la literatura.

Para hacer todo esto, ha sido necesario realizar una formación previa en estas materias: MEF, teorías de mezclas, modelos de plasticidad, modelos de daño y la realización de prácticas en los programas necesarios para realizar las simulaciones y analizar los resultados. La formación constituye, en sí misma, un objetivo de este trabajo.

Para tener en cuenta el comportamiento no-lineal de los materiales se han utilizado los siguientes modelos:

- El comportamiento del aluminio se ha modelado mediante una formulación de plasticidad con endurecimiento (aproximación polinómica de datos experimentales) + una lineal en la fase de endurecimiento (hardening) + una de exponencial para la parte de reblandecimiento (softening).
- El comportamiento ortótropo del compuesto fibra-resina se ha modelado mediante la teoría de mezclas serie-paralelo (SPROM), que permite tener en cuenta el comportamiento del material según sea la orientación de las fibras, así como definir unas respuestas mecánicas independientes en los distintos materiales componentes. Para la resina y la fibra se ha definido un modelo isótropo de daño.

## 1.2 Esquema general del documento

Los trabajos fundamentales realizados, y que se describen en el documento han sido:

- La formación previa, mediante el estudio de las bases teóricas de todas estas metodologías y la realización de prácticas con los programas necesarios,
- realización de simulaciones numéricas, mediante el MEF, de GLARE utilizando las distintas ecuaciones constitutivas analizadas,



- comparación con resultados experimentales y análisis de resultados.

En los siguientes apartados se describen primero, los temas estudiados y después se describen las simulaciones realizadas.

Se hace primero una revisión de la teoría.

- Introducción al MEF [5].
- Teoría de mezclas serie-paralelo (SPROM) que se ha utilizado en la caracterización del material compuesto.
- Introducción a los modelos de plasticidad y de daño que se han utilizados para la caracterización de los materiales,
- Resolución de sistemas no-lineales.

Seguidamente, se presentan casos de estudio que han permitido el entrenamiento como usuario de Kratos [7] [8] [9] en el ámbito de la estática de estructuras y el entorno del programa de pre y post proceso GiD [10].

Se continua con la descripción de los materiales componentes de GLARE: Aluminio, Fibra y Resina Epoxi. Las propiedades mecánicas y las ecuaciones constitutivas de cada uno de ellos (elasticidad lineal, plasticidad, daño, etc.) y la formulación de mezclas serie-paralelo para el compuesto. También se describen las formulaciones numéricas empleadas en los cálculos de GLARE como material compuesto, teoría de mezclas en paralelo y las alternativas de modelos utilizadas (materiales, capas, orientaciones, etc.)

Finalmente se explican los resultados de las simulaciones con GLARE y se comparan estos resultados con los resultados experimentales y con simulaciones realizadas con otros códigos de simulación numérica.

Para finalizar se resumen las principales conclusiones del trabajo y se proponen alternativas de continuidad en el futuro.



## 2 Introducción al Método de Elementos Finitos

La mayor parte de las estructuras en ingeniería son de naturaleza continua y, por tanto, su comportamiento no puede expresarse de forma precisa en función de un número pequeño de variables discretas. Un análisis riguroso de dichas estructuras requiere resolver las ecuaciones matemáticas que expresan el equilibrio de un elemento diferencial genérico de las mismas.

Aunque las estructuras reales son inherentemente tridimensionales (3D), en algunos casos su comportamiento puede describirse adecuadamente por modelos matemáticos uni (1D) o bidimensionales (2D). Esto ocurre, por ejemplo, en el análisis de vigas o en el análisis de placas a flexión en los que el estudio puede limitarse al estudio de deformaciones en la fibra neutra o el plano medio, respectivamente. Esto es extensible a aquellos casos en los que puede hacerse uso de las hipótesis simplificadas de la elasticidad bidimensional (2D) o de revolución como es el caso de algunas presas, terraplenes, depósitos, etc.).

El MEF es un método numérico para encontrar la solución aproximada de los problemas de contorno para sistemas de ecuaciones en derivadas parciales. La analogía entre los conceptos del análisis matricial de estructuras de barras y los MEF, facilitan el estudio a los técnicos con conocimiento del cálculo matricial de estructuras de barras [5].

Las etapas básicas del análisis basado en el MEF son las siguientes:

### 1) Preproceso

- Modelo conceptual, con una descripción geométrica del problema, condiciones de contorno y cargas aplicadas. Modelo estructural apropiado para describir el comportamiento de la estructura. Propiedades de los materiales. Alcance del análisis (pequeñas o grandes deformaciones, análisis estático o dinámico de cargas, etc.). Para el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio haremos uso del Principio de Trabajos Virtuales (PTV).
- La estructura se divide en una malla de dominios que no tienen intersección entre sí, los elementos finitos. Este proceso se conoce como discretización de la estructura. Los vértices de los elementos se conocen como nodos. Las variables del problema, p.ej. los desplazamientos en el interior del elemento pueden interpolarse mediante los valores conocidos en los nodos.

### 2) Proceso

- Mediante el PTV se pueden obtener la matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{(e)}$  y los vectores de las cargas  $\mathbf{f}^{(e)}$  de cada uno de los elementos.
- Se procede al ensamblaje de las matrices de rigidez y el vector de cargas de cada elemento en la matriz de rigidez global de la malla de elementos finitos  $\mathbf{K}$  y el vector de cargas en todos los nodos  $\mathbf{f}$ .



- Se resuelve el sistema de ecuaciones  $\mathbf{Ka} = \mathbf{f}$  para calcular los movimientos de todos los nodos de la malla  $\mathbf{a}$ .
- Una vez conocidos los desplazamientos en todos los nodos, se calculan las reacciones en los nodos<sup>1</sup> y las tensiones y deformaciones en cada elemento.

### 3) Postproceso

- Después de una ejecución exitosa de la simulación, el siguiente paso es la interpretación y presentación de los resultados. Éstos se presentan gráficamente para facilitar su interpretación y comprobación (*paso de post procesamiento*).

Después de haber evaluado los resultados, el analista puede considerar varias modificaciones que pueden introducirse en varias etapas del análisis. Por ejemplo, se puede encontrar que el modelo estructural seleccionado es inapropiado y, por lo tanto, debe modificarse adecuadamente y repetir todo el proceso de nuevo.

Se puede concluir que el MEF es una técnica muy potente para obtener soluciones para problemas estructurales. Sin embargo, al ser un método aproximado implica un cierto error en los valores numéricos y los usuarios siempre deben mirar los resultados de MEF con ojo crítico.

Se describe a continuación la formulación MEF para el caso 2D, la sencillez de las geometrías 2D permite una descripción de la metodología más simple, pero sin perder generalidad en muchos casos. Así mismo se hace una descripción resumida de la formulación en 3D.

## 2.1 El MEF. Teoría Elasticidad 2D

En este apartado se presenta la aplicación del MEF al análisis de estructuras en las que se cumplen las hipótesis de la elasticidad bidimensional (2D) [11] (tensión plana y deformación plana).

Muchos de los conceptos estudiados aquí serán útiles cuando planteemos problemas estructurales complejos más adelante. Por consiguiente, este apartado puede considerarse como introductorio a la metodología general de aplicación del MEF a estructuras 2D y 3D.

Existen muchas estructuras en las que se puede hacer uso de las hipótesis de la elasticidad 2D. Dichas estructuras se caracterizan por tener una forma aproximada de prisma recto. Dependiendo de las dimensiones relativas del prisma y del tipo de carga, se pueden clasificar en los siguientes tipos: tensión plana y deformación plana.

---

<sup>1</sup> Las reacciones en los nodos en la dirección en la que el movimiento no está impedido deben ser nulas. Los valores calculados son una aproximación del orden de magnitud del error.



Tensión plana. Una estructura primaria está en “Tensión Plana” si una de sus dimensiones (el espesor) es mucho menor que las otras dos y todas las cargas están contenidas en el plano medio de la estructura. Entre las estructuras que se incluyen en esta categoría están: las vigas de gran canto, las placas con cargas en su plano, las presas de contrafuertes, etc. (Figura 2.1) [5].

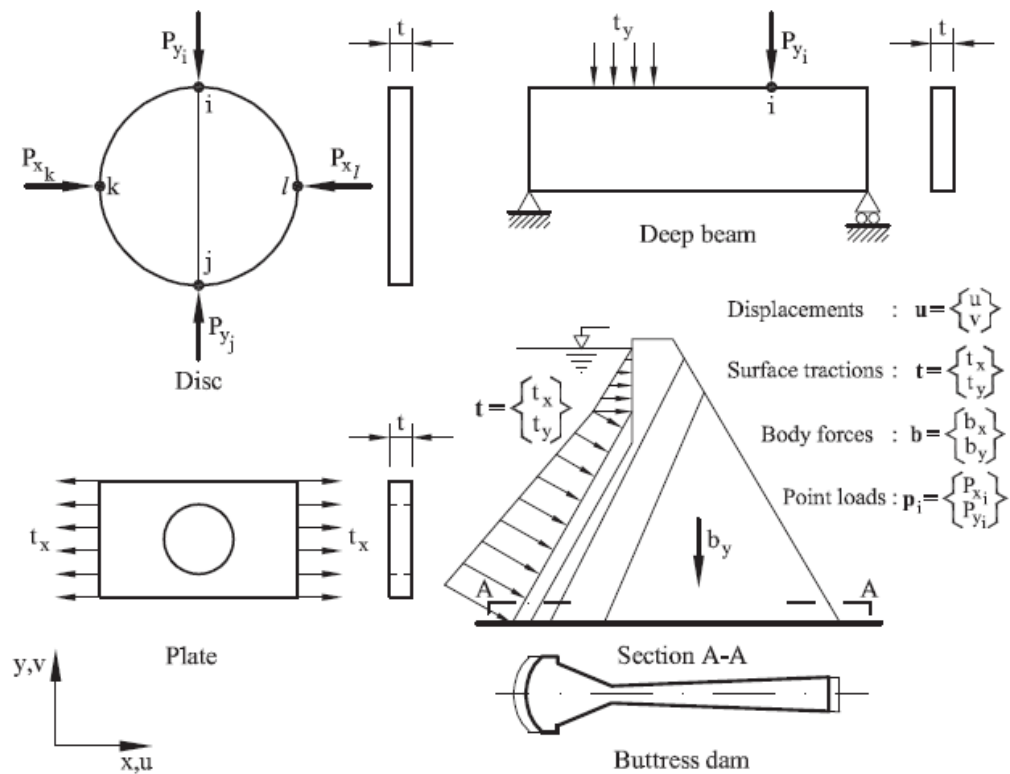


Figura 2.1 Ejemplos de problemas de tensión plana [5]



Deformación plana. Una estructura prismática está en estado de “Deformación plana” si una de sus dimensiones (la longitud) es mucho mayor que las otras dos, y sobre ella actúan únicamente cargas uniformemente distribuidas a lo largo de toda su longitud y contenidas en planos ortogonales al eje que une los centros de gravedad de sus secciones transversales. Entre las estructuras que se incluyen en esta categoría están: las presas de gravedad, las presas de materiales sueltos (terraplenes), las tuberías bajo presión interior y muchos problemas de ingeniería geotécnica (muros de contención, túneles, cimentaciones, etc. (Figura 2.2) [5].

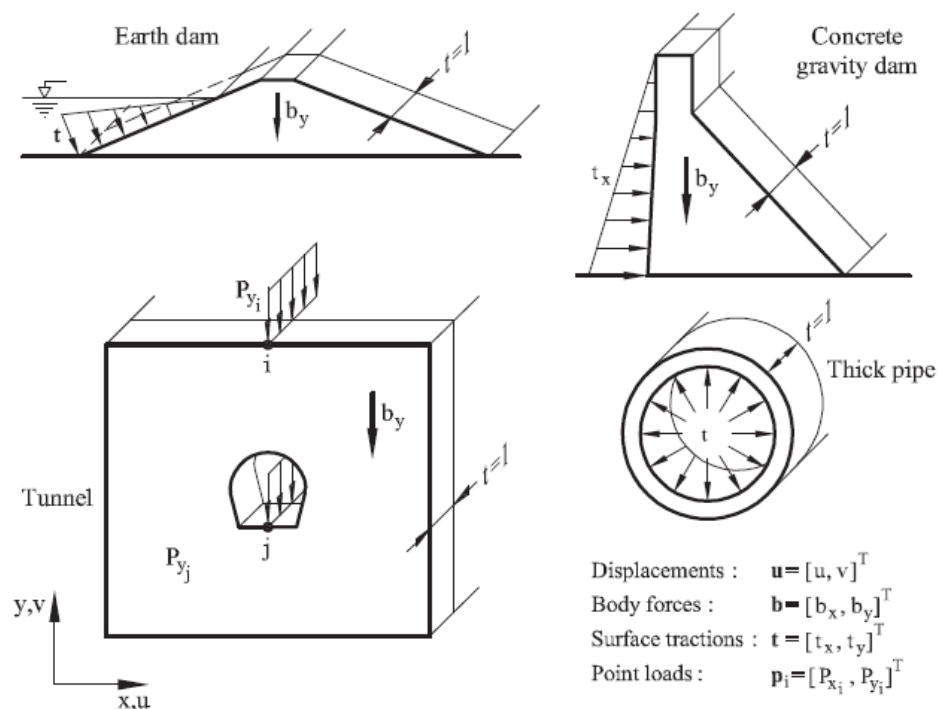


Figura 2.2 Ejemplos de problemas de deformación plana [5].

A continuación, vamos a presentar los conceptos de la elasticidad 2D necesarios para la aplicación del MEF.

### 2.1.1 Campo de desplazamientos, deformaciones y tensiones

Tanto las asunciones de la tensión plana como la deformación plana permiten establecer la hipótesis de que las secciones transversales al eje prismático  $z$  se deforman en su plano y de manera idéntica. Por consiguiente, basta con conocer el comportamiento de cualquiera de dichas secciones 2D en el plano  $x$ - $y$ .

El vector de desplazamientos de un punto se define, por tanto, como:



$$u(x, y) = \begin{cases} u(x, y) \\ v(x, y) \end{cases} \quad (2.1)$$

donde  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  son los desplazamientos de un punto arbitrario en las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente.

A partir del campo de desplazamientos se puede deducir fácilmente las deformaciones mediante el uso de la teoría general de la elasticidad (asumiendo pequeñas deformaciones) [11]. Así:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

La deformación longitudinal  $\varepsilon_z$  es despreciable en el caso de deformación plana. Además, en el caso de tensión plana, la deformación  $\varepsilon_z$  no es cero, pero lo es la tensión  $\sigma_z$ . Por consiguiente, en ninguno de los dos casos hay que considerar la deformación  $\varepsilon_z$  ya que no interviene en las ecuaciones del trabajo de la deformación al ser el producto  $\varepsilon_z \sigma_z$  nulo.

Así pues, el vector de deformaciones significativas se define en ambos casos como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T \quad (2.3)$$

A partir de la Ec. 3.2 se deduce que las tensiones tangenciales  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  son cero. Por las mismas razones indicadas en los párrafos anteriores, se puede definir el campo de tensiones significativas como:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T \quad (2.4)$$

La relación entre tensiones y deformaciones se deduce de la ecuación constitutiva de la elasticidad 3D, con las hipótesis descritas anteriormente para la tensión plana y la deformación plana.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.5)$$

donde  $\mathbf{D}$  es la matriz del material (o matriz constitutiva)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$



Para elasticidad isotrópica tenemos:

Tensión Plana	Deformación plana
$d_{11} = d_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2}$	$d_{11} = d_{22} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$
$d_{12} = d_{21} = \nu d_{11}$	$d_{12} = d_{21} = d_{11} \frac{\nu}{1 - \nu}$
$d_{33} = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G$	$d_{33} = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G$

(2.7)

En las que E es el módulo de elasticidad y  $\nu$  el coeficiente de Poisson.

### 2.1.2 Principio de los Trabajos Virtuales

El PTV tiene la siguiente expresión para la elasticidad 2D:

$$\int \int_A (\delta \epsilon_x \sigma_x + \delta \epsilon_y \sigma_y + \delta \gamma_{xy} \tau_{xy}) t dA = \int \int_A (\delta u b_x + \delta v b_y) t dA + \int_l (\delta u t_x + \delta v t_y) t ds + \sum_i (\delta u_i P_{x_i} + \delta v_i P_{y_i}) \quad (2.8)$$

Los términos de la izquierda son el trabajo de los esfuerzos internos. Los términos de la derecha representan el trabajo de las fuerzas repartidas por unidad de volumen ( $b_x$  y  $b_y$ ), de las fuerzas repartidas sobre el contorno  $t_x$  y  $t_y$  y de las fuerzas puntuales exteriores  $P_{x_i}$  y  $P_{y_i}$ .  $A$  y  $l$ , son el área y el contorno de la sección transversal del sólido y  $t$  su espesor.

### 2.1.3 Elemento triangular de 3 nodos

El elemento triangular de 3 nodos se considera como el primero en el estudio de los problemas estructurales por el MEF. Además, por su simplicidad, permite el aprendizaje del MEF, que es el objetivo de estos párrafos.

Por contrapartida, es un elemento de precisión limitada, como corresponde a una aproximación lineal. En las zonas de gradiente alto de los desplazamientos obliga al uso de redes más tupidas. Pese a ello sigue siendo actualmente un elemento popular y competitivo, además de servir de ejemplo excelente para introducir la formulación de elementos finitos en problemas bidimensionales.



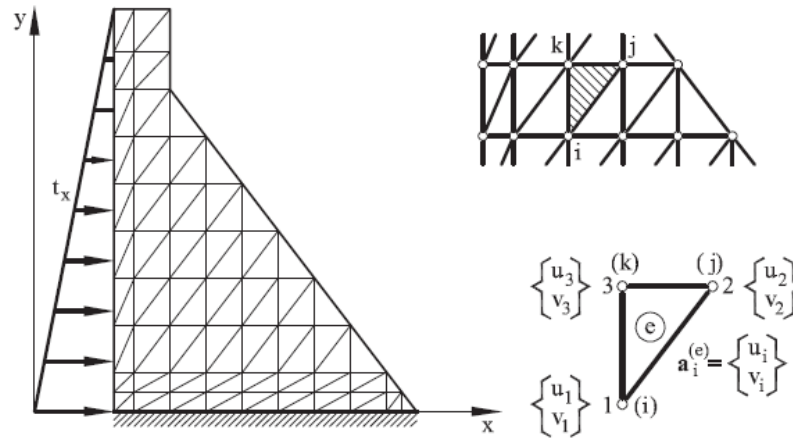


Figura 2.3 Ejemplo de discretización de una estructura en elementos triangulares de 3 nodos [5]

### 2.1.4 Discretización del campo de desplazamientos, deformaciones y tensiones

Consideremos un elemento triangular aislado como el de la Figura 2.3 . Podemos expresar los desplazamientos cartesianos de un punto cualquiera del interior del elemento en función de los desplazamientos de los nodos como:

$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \\ v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Donde  $u_i$  y  $v_i$  son el desplazamiento horizontal y vertical respectivamente y  $N_i$  son las llamadas funciones de forma del nodo  $i$  del elemento.

Estas funciones de forma son las funciones que interpolan la solución entre los valores discretos obtenidos en los nodos de la malla.

La ecuación anterior puede escribirse como:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

o

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{a}^{(e)} \quad (2.11)$$

donde



$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3]; \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Son las matrices de funciones de forma del elemento y del nodo  $i$  del elemento, respectivamente y

$$\mathbf{a}^{(e)} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}; \mathbf{a}_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

Son los vectores de desplazamientos nodales del elemento y de un nodo respectivamente.

Resolviendo el sistema de ecuaciones se puede obtener la siguiente expresión de las funciones de forma:

$$N_i = \frac{1}{2A^{(e)}} (a_i + xb_i + yc_i) \quad (2.14)$$

donde

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j; b_i = y_j - y_k; c_i = x_k - x_j; j, k = 1, 2, 3 \quad (2.15)$$

Se puede comprobar que las funciones de forma  $N_i$  valen uno en un nodo y cero en los otros dos.

Aplicando la misma discretización al campo de deformaciones se puede obtener:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} u_3 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} v_3 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial y} u_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} u_2 + \frac{\partial N_2}{\partial x} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} u_3 + \frac{\partial N_3}{\partial x} v_3 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Esta ecuación puede escribirse en forma matricial como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \vdots & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \vdots & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \vdots & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \vdots & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \vdots & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \vdots & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

o

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{a}^{(e)} \quad (2.18)$$

donde

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3] \quad (2.19)$$



es la matriz de deformación del elemento, y

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

es la matriz de deformación del nodo  $i$ .

La expresión de la discretización del campo de tensiones en el interior del elemento se obtiene sustituyendo en las ecuaciones anteriores:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{DB}\mathbf{a}^{(e)} \quad (2.21)$$

Nótese que las funciones de forma del elemento triangular son funciones lineales. Esto implica que las derivadas de las funciones de forma serán constantes, por lo tanto, las tensiones y deformaciones serán constantes dentro del elemento. Por lo que se necesita una malla más fina en las zonas de la estructura con alto gradiente de tensiones.

### 2.1.5 Ecuaciones de equilibrio de la discretización

Las ecuaciones de equilibrio de la discretización se obtienen al aplicar el PTV a un elemento aislado.

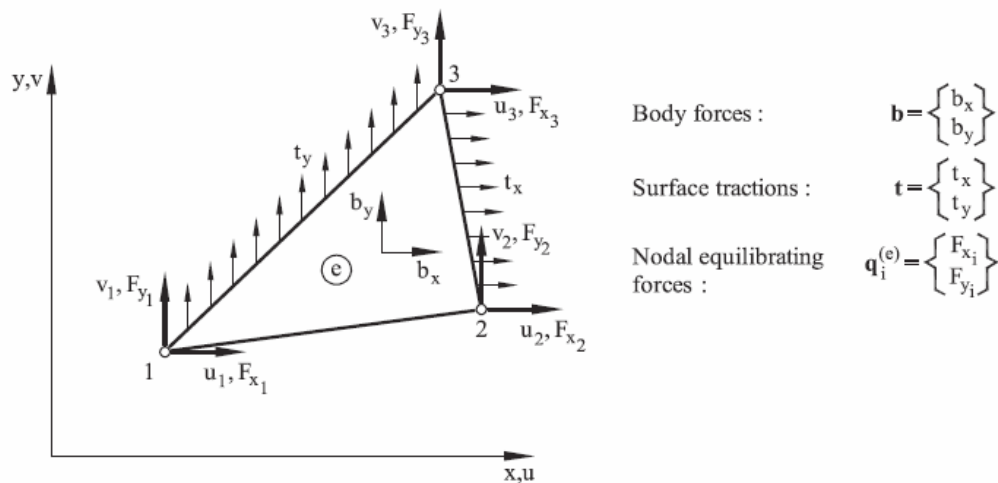


Figura 2.4 Fuerzas sobre un elemento triangular de 3 nodos [5]

En la Figura 2.4 se muestran las fuerzas que actúan en un elemento aislado:

- fuerzas distribuidas  $b$  por unidad de área (fuerzas volumétricas)



- fuerzas distribuidas  $\mathbf{t}$  por unidad de longitud
- fuerzas  $\mathbf{q}$  de equilibrio del nodo

Escribiendo la ecuación de PTV en forma de matriz:

$$\int \int_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} t dA = \int \int_A \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} t dA + \oint_l \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} t ds + \sum_{i=1}^3 (\delta u_i F_{x_i} + \delta v_i F_{y_i}) \quad (2.22)$$

Donde  $\delta u_i$  y  $\delta v_i$  son los desplazamientos virtuales de los nodos y  $F_{x_i}$  y  $F_{y_i}$  las fuerzas de equilibrio nodales en las direcciones horizontal y vertical respectivamente. Siguiendo el mismo procedimiento que antes se puede obtener:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{a}^{(e)} \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{a}^{(e)} \quad (2.23)$$

Sustituyendo en la última ecuación se obtiene:

$$[\delta \mathbf{a}^{(e)}]^T \left[ \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} t dA - \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{b} t dA - \oint_{l^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{t} t ds \right] = [\delta \mathbf{a}^{(e)}]^T \mathbf{q}^{(e)} \quad (2.24)$$

Como el desplazamiento virtual es arbitrario se deduce que:

$$\int \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} t dA - \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{b} t dA - \oint_{l^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{t} t ds = \mathbf{q}^{(e)} \quad (2.25)$$

Sustituyendo las tensiones en función de los desplazamientos de los nodos se obtiene:

$$\int \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T (\mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\sigma}^0) t dA - \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{b} t dA - \oint_{l^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{t} t ds = \mathbf{q}^{(e)} \quad (2.26)$$

entonces

$$\int \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t dA \mathbf{a}^{(e)} - \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^0 t dA + \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^0 t dA - \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{b} t dA - \oint_{l^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{t} t ds = \mathbf{q}^{(e)} \quad (2.27)$$

o

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)} \quad (2.28)$$

donde

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t dA \quad (2.29)$$

es la matriz de rigidez del elemento, y

$$\mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)} + \mathbf{f}_{\boldsymbol{\sigma}}^{(e)} + \mathbf{f}_b^{(e)} + \mathbf{f}_t^{(e)} \quad (2.30)$$

El vector de fuerzas nodales equivalentes del elemento, donde:

$$\mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)} = \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^0 t dA \quad (2.31)$$

$$\mathbf{f}_{\boldsymbol{\sigma}}^{(e)} = - \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^0 t dA \quad (2.32)$$

$$\mathbf{f}_b^{(e)} = \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{b} t dA \quad (2.33)$$



$$\mathbf{f}_t^{(e)} = \oint_{l(e)} N^T t t d a \quad (2.34)$$

Los vectores de fuerzas nodales equivalentes debidos a deformaciones iniciales, tensiones iniciales, fuerzas repartidas por unidad de área y fuerzas repartidas en el contorno, respectivamente.

Es importante destacar que las expresiones de la matriz de rigidez del elemento y de los vectores de fuerzas nodales equivalentes son completamente generales y compatibles con cualquier elemento de un sólido 2D.

Por lo tanto, la ecuación de equilibrio global de la malla puede obtenerse con la contribución de las matrices de rigidez y los vectores de fuerzas nodales equivalentes de los elementos, siguiendo las mismas reglas que para las estructuras de barras. La ecuación de equilibrio global puede escribirse como:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (2.35)$$

Donde  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{f}$  son, respectivamente, la matriz de rigidez, el vector de desplazamientos nodales y el vector de fuerzas nodales equivalente de toda la malla.

El proceso de ensamblaje se muestra en la Figura 2.5

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)}$$

$$\mathbf{a}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1^{(e)} \\ \mathbf{a}_2^{(e)} \\ \mathbf{a}_3^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a}_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \mathbf{K}_{11}^{(e)} & \mathbf{K}_{12}^{(e)} & \mathbf{K}_{13}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{22}^{(e)} & \mathbf{K}_{23}^{(e)} & \mathbf{K}_{33}^{(e)} \\ \text{Symm.} & & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1^{(e)} \\ \mathbf{f}_2^{(e)} \\ \mathbf{f}_3^{(e)} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & j & \dots & k & \dots & N \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{K}_{11}^{(e)} & \dots & \mathbf{K}_{12}^{(e)} & \dots & \mathbf{K}_{13}^{(e)} & \dots & & & & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & & \\ \mathbf{K}_{22}^{(e)} & \dots & \mathbf{K}_{23}^{(e)} & \dots & & & & & & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & & \\ \text{Symm.} & & & & \mathbf{K}_{33}^{(e)} & \dots & & & & & \\ \vdots & & & & \vdots & & & & & & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1^{(e)} \\ \mathbf{f}_2^{(e)} \\ \mathbf{f}_3^{(e)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix}$$



Figura 2.5 Ensamblaje de la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales equivalentes [5]

Hay que señalar de nuevo que las fuerzas nodales de equilibrio debidas a las fuerzas de interacción entre los contornos adyacentes se anulan en el ensamblaje. Por lo tanto, solamente hay que considerar el efecto de las fuerzas de superficie, cuando se trate de fuerzas exteriores actuantes sobre lados de elementos pertenecientes al contorno de la estructura. Las reacciones en los nodos se calculan después mediante la ecuación:

$$K\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (2.35)$$



## 2.2 Introducción a la Elasticidad 3D

El estudio realizado para el material GLARE se ha hecho mediante una descripción tridimensional del problema, se presenta aquí una introducción del problema elástico 3D desde el punto de vista del MEF. Muchas estructuras tienen características geométricas, mecánicas o de carga que hacen imposible el uso de los modelos simples de tensión plana / deformación plana estudiados en el capítulo anterior. En estos casos, la única alternativa es realizar un análisis tridimensional (3D) completo basado en la teoría general de la elasticidad 3D.

Ejemplos de estas situaciones se encuentran en sólidos con formas irregulares y en el estudio de sólidos prismáticos con propiedades de material heterogéneas o cargas arbitrarias (ver Figura 2.6).

A pesar de su aparente complejidad, el análisis de un sólido 3D con el MEF no presenta grandes problemas conceptuales. La teoría de la elasticidad 3D es una extensión del caso 2D y los pasos involucrados en el análisis de elementos finitos 3D de una estructura son una repetición de los estudiados en el capítulo anterior. En ese sentido, este capítulo cierra el ciclo de problemas estructurales que pueden ser analizados utilizando la teoría de la elasticidad, ya sea por la forma 3D general o por cualquiera de los casos 2D simplificados previamente estudiados.

Aunque conceptualmente simples, los cálculos de elementos finitos en 3D implican una cantidad considerable de trabajo en comparación con los análisis en 2D. La razón principal es la introducción de una dimensión espacial adicional, ya que esto conduce a un mayor tiempo de cálculo y requiere más esfuerzo para ingresar datos y visualizar los resultados.

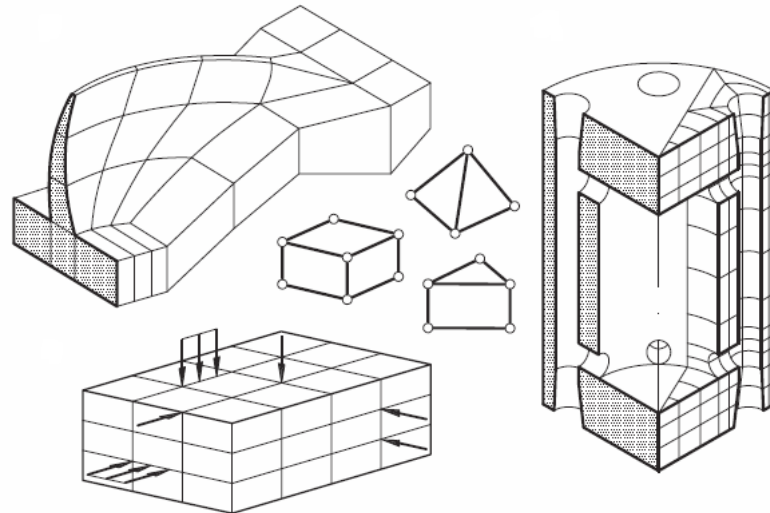


Figura 2.6: Estructuras que requieren un análisis en 3D [5]



### 2.2.1 Campo de desplazamientos, deformaciones y tensiones

Si analizamos un sólido 3D (véase la Fig. 2.72), el movimiento de un punto se define por tres componentes del vector de desplazamiento, es decir.

$$\mathbf{u} = [u, v, w]^T \quad (2.36)$$

dónde  $u, v, w$  son los desplazamientos del punto en las direcciones de los ejes cartesianos  $x, y, z$ , respectivamente. El campo de deformación unitaria se define por las seis componentes estándar de deformación unitaria de elasticidad 3D. El vector de deformación unitaria se escribe como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}]^T \quad (2.37)$$

con

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.38)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.39)$$

De forma análoga, el campo de tensión se define por los seis componentes de tensión correspondientes a las seis deformaciones unitarias distintas de cero de Ec.2.58. El vector de tensión es

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}]^T \quad (2.40)$$

Los materiales isótropos requieren sólo dos parámetros, el módulo de elasticidad  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$ . La matriz constitutiva del material isótropo puede escribirse en ejes cartesianos globales. Si se tienen en cuenta las tensiones y deformaciones iniciales se puede escribir:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0) + \boldsymbol{\sigma}^0 \quad (2.41)$$

donde la matriz constitutiva  $\mathbf{D}$  viene dada por

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \text{Symmetrical} & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$





El vector de deformación unitaria inicial debido a las deformaciones térmicas es:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \alpha(\Delta T)[1,1,1,0,0,0]^T \quad (2.43)$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación térmico.

## 2.2.2 Principio de los trabajos virtuales en 3D

La expresión del Principio de los Trabajos Virtuales (PTV) para sólidos 3D es

$$\int \int \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int \int \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV + \int \int_A \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} dA + \sum_{i=1}^n (\delta \mathbf{a}_i F_i) \quad (2.44)$$

donde  $V$  y  $A$  son respectivamente, el volumen y la superficie del sólido;  $\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]^T$  son las fuerzas de volumen,  $\mathbf{t} = [t_x, t_y, t_z]^T$  las fuerzas de superficie y  $\mathbf{F}_i = [F_{x_i}, F_{y_i}, F_{z_i}]^T$  son las cargas que actúan en el nodo  $i$ .

## 2.2.3 El tetraedro de cuatro nodos

La formulación del MEF se va a introducir para un elemento sencillo, el tetraedro de cuatro nodos, que es análogo al triángulo de 3 nodos utilizado en el caso de 2D. Es importante tener en cuenta que la mayoría de las expresiones son generales y aplicables a cualquier elemento 3D con  $n$  nodos

## 2.2.4 Discretización del campo de desplazamientos

Si se considera un sólido 3D discretizado en tetraedros de 4 nodos como el de la Figura 2.7, el campo de desplazamiento dentro de cada elemento se interpola como

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 \\ N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 \\ N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 + N_4 w_4 \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i \mathbf{a}_i^{(e)} = \mathbf{N} \mathbf{a}^{(e)} \quad (2.45)$$

donde

$$\mathbf{N} = [N_1, N_2, N_3, N_4]; N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

y

$$\mathbf{a}^{(e)} = \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \\ a_3^{(e)} \\ a_4^{(e)} \end{Bmatrix}; \mathbf{a}_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

son la matriz de las funciones de forma y el vector de desplazamiento del elemento y del nodo  $i$ , respectivamente. Como de costumbre, se ha utilizado la misma interpolación para los tres



componentes de desplazamiento. Por lo tanto, las funciones de forma son las mismas para los tres desplazamientos.

La forma analítica de las funciones de forma  $N_i$  se obtiene de forma similar a la del triángulo de 3 nodos. Los cuatro nodos definen un campo de desplazamiento lineal en 3D. La función de forma nodal se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$N_i = \frac{1}{6V^{(e)}} (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) \quad (2.48)$$

donde  $V^{(e)}$  es el volumen del elemento y

$$a_i = \det \begin{bmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{bmatrix} \quad b_i = -\det \begin{bmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$c_i = \det \begin{bmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{bmatrix} \quad d_i = -\det \begin{bmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{bmatrix}$$

Los diferentes parámetros para  $i = 1,2,3,4$ , se obtienen por permutación cíclica adecuada de los índices  $i, j, k, l$ .

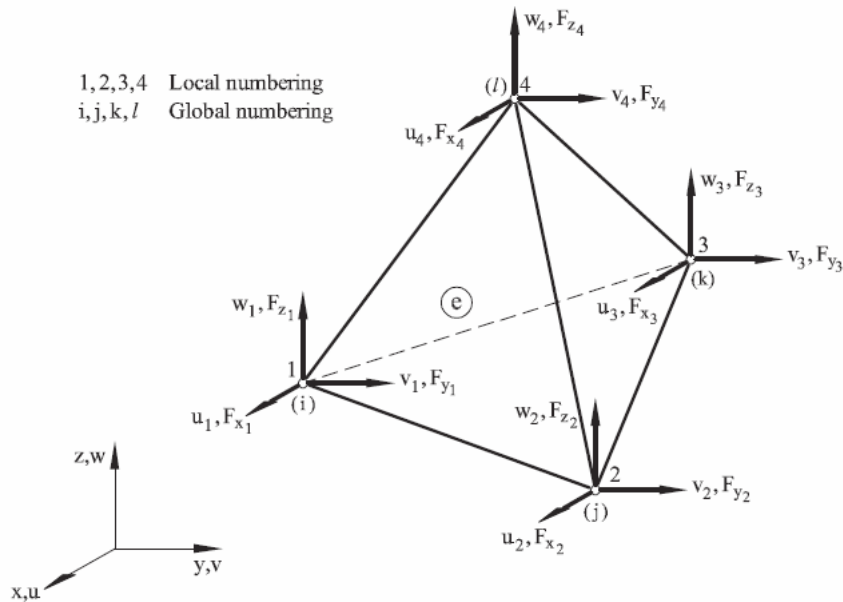


Figura 2.7 Tetraedro de 4 nodos. Desplazamientos nodales ( $u_i; v_i; w_i$ ) y fuerzas de equilibrio nodales ( $F_{x_i}, F_{y_i}, F_{z_i}$ ) [5]



## 2.2.5 Matriz de deformaciones

Sustituyendo la Ec. (2.64) en Ec. (2.58) da un elemento 3D con nodos  $n$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} w_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} u_i + \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} u_i + \frac{\partial N_i}{\partial x} w_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} v_i + \frac{\partial N_i}{\partial y} w_i \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^n B_i a_i^{(e)} = \mathbf{B} \mathbf{a}^{(e)} \quad (2.50)$$

donde  $\mathbf{B}$  es el elemento matriz de deformación dada por

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4] \quad (2.51)$$

y  $B_i$  es la matriz de deformación del nodo  $i$ , con

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Dado que las funciones de forma son polinomios lineales, la matriz de deformación unitaria es constante a lo largo del elemento, como sucede con el triángulo lineal en la elasticidad 2D.



## 2.2.6 Ecuaciones de equilibrio

Los desplazamientos y las deformaciones virtuales se interpolan en términos de los valores de desplazamiento virtual en la forma estándar, es decir:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{a} \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{a} \quad (2.53)$$

Substituyendo en la Ec. (2.44) podemos obtener:

$$\int \int \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int \int \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{t} dA + \mathbf{q}^{(e)} \quad (2.54)$$

Substituyendo la ecuación constitutiva (Ec.2.60) por las tensiones en la expresión anterior se puede obtener la ecuación de equilibrio del elemento en forma matricial:

$$\begin{aligned} & (\int \int \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV) \mathbf{a}^{(e)} - \int \int \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^0 dV + \\ & + \int \int \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^0 dV - \int \int \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV - \int \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{t} dA = \mathbf{q}^{(e)} \end{aligned} \quad (2.55)$$

o

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)} \quad (2.56)$$

El sistema global de ecuaciones  $\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f}$  se obtiene mediante la contribución de  $\mathbf{K}^{(e)}$  y  $\mathbf{f}^{(e)}$  de cada elemento en la forma usual.

El tetraedro de 4 nodos se comporta de forma similar al triángulo lineal de 3 nodos presentado en el capítulo de elasticidad 2D. El elemento tiene una buena capacidad para modelar campos de tensión uniformes. Sin embargo, su precisión es pobre para los problemas dominados por la flexión, así como en presencia de gradientes de tensión altos. En estos casos la solución pasa por utilizar en estas zonas mallas más finas.



## 3 Teoría de mezclas Serie-Paralelo

Hoy en día, existen varias técnicas que permiten la modelización de materiales compuestos. Éstos difieren en función de la escala utilizada, dando lugar a metodologías micromecánicas, macromecánicas o de homogeneización [6].

La teoría de mezclas serie-paralelo (SPROM) puede definirse como una homogenización fenomenológica, en la que el comportamiento del compuesto se obtiene a partir de la respuesta constitutiva de sus materiales componentes. Mediante ésta, es posible tener en cuenta el comportamiento no lineal del material compuesto sin requerir la definición matemática de un modelo constitutivo único para el compuesto en cuestión [6].

La teoría SPROM, inicialmente propuesta por Rastellini [12], es una evolución de la teoría de mezclas en paralelo desarrollada por Car en [13].

La teoría SPROM se puede incluir en la categoría de metodologías Micromecánicas, específicamente se puede catalogar también como un Método de Campo Medio (MFM) [14].

### 3.1 Evolución de la Teoría de la Mezclas

#### 3.1.1 La teoría de mezclas

El origen de la teoría de mezclas se atribuye a Voigt (1889) y Reuss (1929) que desarrollaron una metodología para calcular las propiedades elásticas de un material compuesto.

El modelo de Voigt, establece que una propiedad del compuesto, como por ejemplo el módulo de elasticidad del compuesto  $E_c$  puede obtenerse a partir del módulo de elasticidad de los componentes como (regla en dirección paralela):

$$E_c = fE_f + (1 - f)E_m \quad (3.1)$$

El modelo de Reuss, establece que la misma propiedad del compuesto puede obtenerse como (regla en dirección serie):

$$\frac{1}{G_c} = \frac{f}{G_f} + \frac{(1-f)}{G_m} \quad (3.2)$$

donde:

$$f = \frac{V_f}{V_f + V_m} \quad (3.3)$$

Siendo:

$f$  la fracción volumétrica de las fibras

$E_f, G_f$  módulo de elasticidad longitudinal y transversal de las fibras

$E_m, G_m$  módulo de elasticidad longitudinal y transversal de la matriz



Además, los modelos de Voigt y Reuss establecen unos límites superior e inferior de las propiedades mecánicas del compuesto, tal como se puede ver en la siguiente figura:

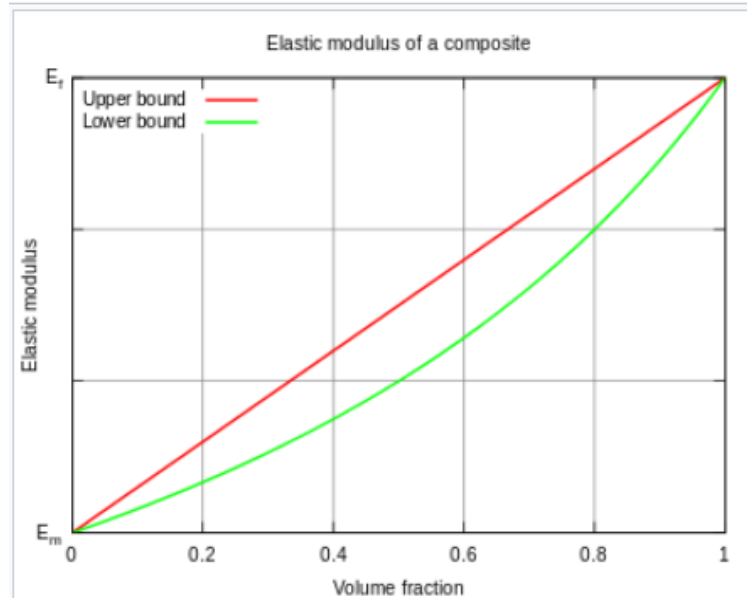


Figura 3.1 Límites superior e inferior de las propiedades mecánicas de un material compuesto según la teoría de mezclas [15]

### 3.1.2 Teoría clásica de mezclas

La teoría clásica de mezclas tiene sus fundamentos en la teoría de mezclas inicialmente formulada por Trusdell y Toupin en 1960 [16]

- Todos los componentes sufren las mismas deformaciones en el compuesto (condición de iso-deformación).
- Cada componente contribuye a la tensión final proporcionalmente a su participación volumétrica en el compuesto

A partir de esta primera formulación, y manteniendo estas mismas hipótesis, Car [13] [17] propuso un primer modelo con el que simular el comportamiento no lineal de los materiales compuestos: la teoría de mezclas en paralelo.

### 3.1.3 La teoría de mezclas en paralelo

Los modelos micro mecánicos estudian los campos de tensión y deformación a nivel de microescala con el fin de construir las leyes constitutivas y las metodologías de campo medio (MFM) añaden a esta concepción el hecho de que:

- Las tensiones y las deformaciones medias de cada uno de los componentes del material compuesto son representativas del comportamiento del compuesto



- Las tensiones y deformaciones en el material compuesto están relacionadas con las tensiones y deformaciones en cada componente.

En esta etapa, la teoría de mezclas analizaba las propiedades micromecánicas del compuesto, mediante la contribución volumétrica de cada componente en relación con todo el material compuesto.

En la teoría de mezclas en paralelo se parte de las condiciones de compatibilidad definidas por Trusdell y Toupin [16] para desarrollar una formulación capaz de acoplar los comportamientos constitutivos (incluso no-lineales) de  $N$  materiales componentes, independientemente de los modelos que se utilicen para simular cada uno de ellos (elasticidad, plasticidad, daño, etc.). Las condiciones de compatibilidad de la teoría de mezclas en paralelo son:

1. Cada volumen infinitesimal del material compuesto contiene un número finito ( $N$ ) de materiales componentes.
2. La contribución de cada componente al comportamiento global del compuesto es directamente proporcional a su participación volumétrica en el compuesto.
3. El volumen de cada componente es significativamente menor que el volumen del compuesto.
4. Los distintos materiales componentes se suponen perfectamente ligados (no existe deslizamiento relativo entre ellos).
5. Todos los componentes sufren las mismas deformaciones en el compuesto (condición de iso-deformación).

Mediante estas condiciones, es posible obtener la respuesta del compuesto a partir del comportamiento de sus materiales constitutivos. La condición de iso-deformación permite conocer las deformaciones en cada uno de estos materiales y, a partir de estas, utilizando la ecuación constitutiva de cada componente es posible obtener las tensiones en cada uno de los materiales simples. Estas tensiones se utilizan posteriormente para obtener la tensión del compuesto. Una descripción más detallada de esta teoría se puede obtener en las referencias previamente mencionadas.



### 3.1.4 La Teoría de mezclas Serie-Paralelo

La teoría de mezclas SPROM consisten en una homogeneización fenomenológica del compuesto a partir del comportamiento constitutivo de sus materiales componentes. Este nuevo planteamiento no se hace hasta finales de los años 90, lo que ha llevado a la formulación SPROM a más de veinte años de evolución de la teoría.

La teoría de mezclas en paralelo permite el análisis de estructuras compuestas en el dominio no lineal. A pesar de esto, tiene una gran limitación: la hipótesis de iso-deformación, es decir, todos los materiales del compuesto están sometidos al mismo campo de deformaciones (comportamiento paralelo puro).

Esta limitación puede superarse utilizando una combinación de la condición de iso-deformación (comportamiento paralelo puro) y la condición de iso-tensión (comportamiento serial puro), lo que permite una simulación más general del comportamiento real del material compuesto.

Las condiciones de compatibilidad de mezclas SP son idénticas a las condiciones de compatibilidad de la teoría en paralelo, con la única excepción de que se modifica la condición de iso-deformación (condición 5) y se añade una condición 6 [6]. Esto es:

5. Todos los componentes están sometidos al mismo campo de deformaciones en una determinada dirección específica, normalmente la dirección en la que están orientadas las fibras (dirección paralela).
6. Todos los componentes están sometidos al mismo campo de tensión en las direcciones restantes, condición de iso-tensión. (dirección de serie).

Estas condiciones muestran algo que se ha introducido antes, que el comportamiento del material compuesto depende de la dirección.

### 3.1.5 Metodologías del Campo Medio

La formulación presentada en esta sección será de ayuda para entender cómo se pueden obtener propiedades compuestas de las propiedades de los componentes. A pesar de esto, estas ecuaciones sólo son válidas para el caso de pequeñas deformaciones.

Observe que el SPROM es un MFM y, por lo tanto, los valores de tensión y de deformación calculados aquí serán siempre valores medios de estos campos:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} dV}{\int_{\Omega} dV} \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} dV}{\int_{\Omega} dV} \quad (3.4)$$

Dónde  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  es el dominio del material compuesto. A pesar de esto, la formulación posterior da por sentado este hecho y omite el uso de  $\bar{\bullet}$  para indicar la condición de valor medio de la variable.





## 3.2 Modelado de materiales compuestos

### 3.2.1 Descripción del problema serie-paralelo

Al definir las direcciones serie y paralelo que controlan el comportamiento compuesto, es importante saber qué material compuesto se está modelando. Dependiendo de su topología, los materiales compuestos se pueden clasificar como [14]:

- Materiales con matriz compuesta. Este es el caso de *cermet* (cerámica y metal) y hormigón.
- Materiales con matriz compuesta y fibras cortas. Es el caso del hormigón reforzado con fibra y algunos materiales aeronáuticos.
- Materiales con matriz compuesta y fibras largas. Es el caso del hormigón armado, hormigón pretensado y algunos materiales aeronáuticos como p.ej. los compuestos de fibra de vidrio y resina epoxi utilizados en GLARE.
- Materiales laminares. Este es el caso de algunos materiales y materiales aeronáuticos utilizados en la industria automotriz.

En los materiales con matriz y fibras largas, la dirección que determina el comportamiento paralelo corresponde al establecido por las fibras. En una estructura real modelada mediante el MEF, esto se impone elemento por elemento. Matemáticamente, la dirección paralela se define utilizando el  $e_1$  vector que está orientado a lo largo de la fibra de material:

$$N_p = e_1 \otimes e_1 \quad (3.5)$$

Donde  $e_1$  es el vector base que define localmente el comportamiento paralelo en el elemento estudiado y  $N_p$  es el tensor de proyector paralelo de segundo orden, que se utiliza al obtener la proyección en la dirección de la fibra de un vector  $v$ :

$$v_p = N_p v \quad (3.6)$$

El marco de referencia se completa con los vectores base  $e_2$  y  $e_3$  que definen el comportamiento en serie. Es importante tener en cuenta que para este caso el comportamiento paralelo se impone sólo en una dirección, p.ej.  $e_1$ . Esto sólo sucede en materiales compuestos con fibras largas, pero puede extenderse a dos dimensiones (materiales laminares) o a las tres dimensiones (comportamiento paralelo completo, es decir, enfoque CMT o cambiar a un comportamiento serial completo).

Utilizando el tensor  $N_p$ , se pueden calcular los componentes paralelos y en serie de los campos de tensión y de deformación. Esto se hace definiendo el proyector paralelo de cuarto orden  $\mathbb{P}_p$ :

$$\mathbb{P}_p = N_p \otimes N_p \quad (3.7)$$

y el proyector serie  $\mathbb{P}_s$  de cuarto orden:

$$\mathbb{P}_s = \mathbb{I} - \mathbb{P}_p \quad (3.8)$$



Ahora los componentes paralelos y en serie de los campos de deformación unitaria (Ec. 3.9) y tensión (Ec. 3.10) se definen como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_P = \mathbb{P}_P : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_S = \mathbb{P}_S : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.9)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_P = \mathbb{P}_P : \boldsymbol{\sigma} \quad \boldsymbol{\sigma}_S = \mathbb{P}_S : \boldsymbol{\sigma} \quad (3.10)$$

Estas descomposiciones de la tensión y los campos de deformación conducen a una descripción en serie y paralelo del tensor de cuarto orden constitutivo,  $\mathbb{C}$ :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_P \\ \boldsymbol{\sigma}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{PP} & \mathbb{C}_{PS} \\ \mathbb{C}_{SP} & \mathbb{C}_{SS} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_P \\ \boldsymbol{\varepsilon}_S \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{PP} &= \mathbb{P}_P : \mathbb{C} : \mathbb{P}_P = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_P}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_P} & \mathbb{C}_{PS} &= \mathbb{P}_P : \mathbb{C} : \mathbb{P}_S = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_P}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_S} \\ \mathbb{C}_{SP} &= \mathbb{P}_S : \mathbb{C} : \mathbb{P}_P = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_S}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_P} & \mathbb{C}_{SS} &= \mathbb{P}_S : \mathbb{C} : \mathbb{P}_S = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_S}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_S} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Por último, la ecuación (3.8) muestra que las descomposiciones paralelas y seriales son complementarias. Esto se puede extrapolar al campo de deformación y tensión como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_P + \boldsymbol{\varepsilon}_S \quad (3.13)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_P + \boldsymbol{\sigma}_S \quad (3.14)$$

### 3.3 Formulación Serie-Paralelo regla de mezclas (SPROM)

#### 3.3.1 Material compuesto, relación matriz y fibras

Las expresiones generales presentadas anteriormente son necesarias en la formulación SPROM para describir el comportamiento a todas las escalas, es decir, se utilizan para describir el comportamiento de todo el material compuesto ( $c$ ), pero también el de los componentes la matriz ( $m$ ) y la fibra ( $f$ ).

Utilizando las condiciones de compatibilidad escritas anteriormente, se pueden derivar las siguientes expresiones para un material compuesto con sólo dos componentes: fibra y matriz.

Dirección paralela:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^c = \boldsymbol{\varepsilon}^f = \boldsymbol{\varepsilon}^m \quad (3.15)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^c = \nu^f \boldsymbol{\sigma}^f + \nu^m \boldsymbol{\sigma}^m \quad (3.16)$$

Dirección serie:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^c = \nu^f \boldsymbol{\varepsilon}^f + \nu^m \boldsymbol{\varepsilon}^m \quad (3.17)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^c = \boldsymbol{\sigma}^f = \boldsymbol{\sigma}^m \quad (3.18)$$



donde  $v^f$  y  $v^m$  son coeficientes que reflejan la contribución volumétrica de cada componente y por tanto verifican:  $v^f + v^m = 1$

El modelo constitutivo del compuesto, las ecuaciones de cierre y la descripción del algoritmo del MEF puede verse en [6] [14].

### 3.4 Ejemplo de simulación de material compuesto

En este ejemplo se muestran los resultados de la simulación realizada con Kratos correspondiente al ejemplo que se describe en [6] de un material compuesto formado por un 50% de poliéster y 50% de una resina epoxi. En la siguiente tabla se muestran las propiedades mecánicas de los componentes del compuesto:

Resina	Módulo de Elasticidad [Pa]	Coficiente de Poisson	Limite elástico [Pa]	Energía de fractura [J/m <sup>2</sup> ]
Poliéster	2.8e9	0.38	41.4e6	50e6
Resina epoxi	4.7e9	0.38	100e6	100e6

Tabla 3.1 Propiedades mecánicas de las resinas

En la Figura 3.2 se muestran los resultados del diagrama tensión deformación del compuesto en la dirección paralela.

Estos resultados coinciden con los de [6], aunque no se corresponden con un material real, son un magnífico ejemplo para explicar el comportamiento de los materiales compuestos en la dirección en paralelo y en la dirección serie.



En la Figura 3.2, p.ej. se puede ver muy bien el cambio en la pendiente de la curva tensión-deformación del compuesto coincidente con el inicio del daño en el poliéster.

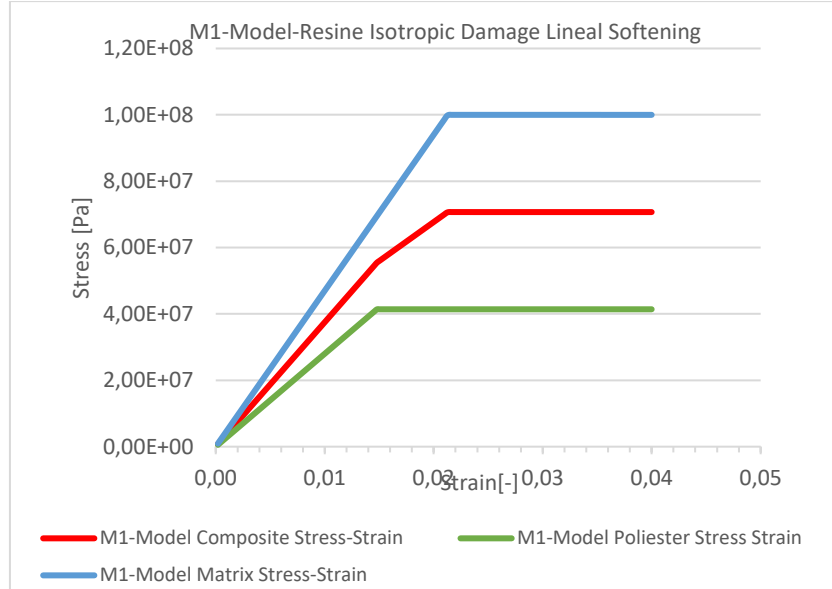


Figura 3.2 Diagrama tensión-deformación del compuesto bajo cargas en la dirección paralela

En la Figura 3.3 se muestran los resultados del diagrama tensión deformación del compuesto en la dirección serie

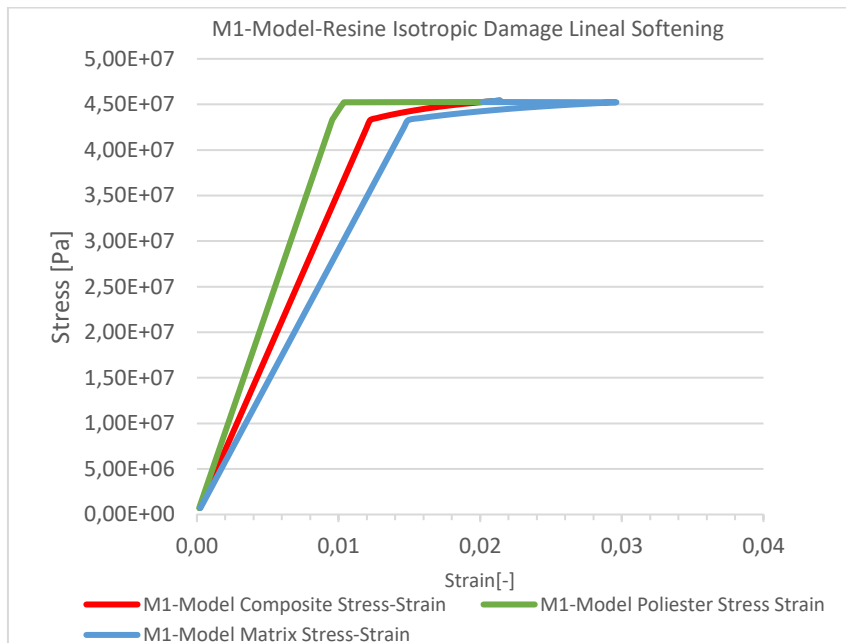


Figura 3.3 Diagrama tensión-deformación del compuesto bajo cargas en la dirección serie



## 4 Introducción a los modelos de plasticidad

La teoría de la plasticidad se desarrolló inicialmente para metales, pero en la actualidad sirve de marco de referencia para el desarrollo de ecuaciones constitutivas para diversos materiales de uso corriente en ingeniería.

Para el análisis de los campos de tensión y de deformación en un medio continuo, la teoría de la plasticidad requiere establecer una superficie de fluencia, que establece la frontera del régimen elástico, bajo un estado de tensiones combinado que permita establecer qué combinaciones de tensiones (criterio de fluencia) inducen un comportamiento inelástico, con deformaciones plásticas irreversibles. La teoría debe también especificar cómo se comporta el material una vez alcanzada esta condición de fluencia de manera que se pueda conocer cómo están relacionadas las deformaciones plásticas, p.ej., no recuperables con las componentes de la tensión, y cómo evoluciona la condición de fluencia con las deformaciones plásticas acumuladas

En Kratos [7] [8] [9] se pueden definir los modelos de plasticidad perfecta, en los que no cambia ni la posición ni la forma de la superficie de fluencia en el proceso de carga y aquellos modelos más complejos en los que se producen cambios en la superficie de fluencia. Éstos son: plasticidad isótropa y plasticidad cinemática (ver Figura 4.1):

- la plasticidad isótropa involucra una variación de la superficie que define el comportamiento elástico, p.ej., la superficie de fluencia, como un endurecimiento (*hardening*) o reblandecimiento (*softening*) de la misma
- la plasticidad cinemática, que normalmente aparece junto a la isótropa, se encarga de desplazar la superficie de fluencia en el espacio de tensiones, permitiendo reproducir fenómenos como el efecto Bauschinger de plasticidad “prematura” en el caso de reversión de cargas que puede verse en la Figura 4.2

En la Figura 4.1 se muestran los dos modelos.

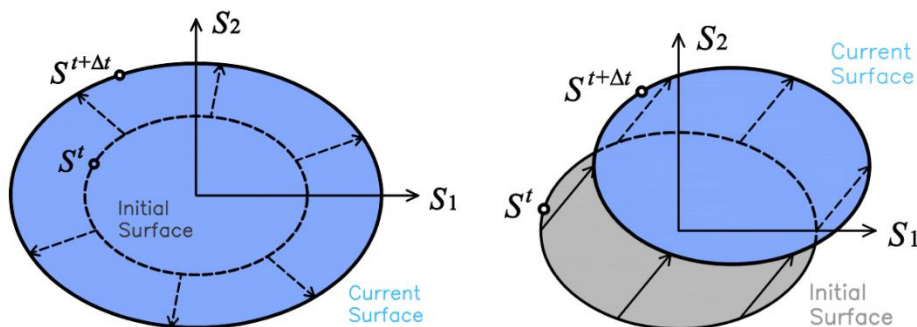


Figura 4.1 Plasticidad isótropa (izquierda) y cinemática (derecha) [18]

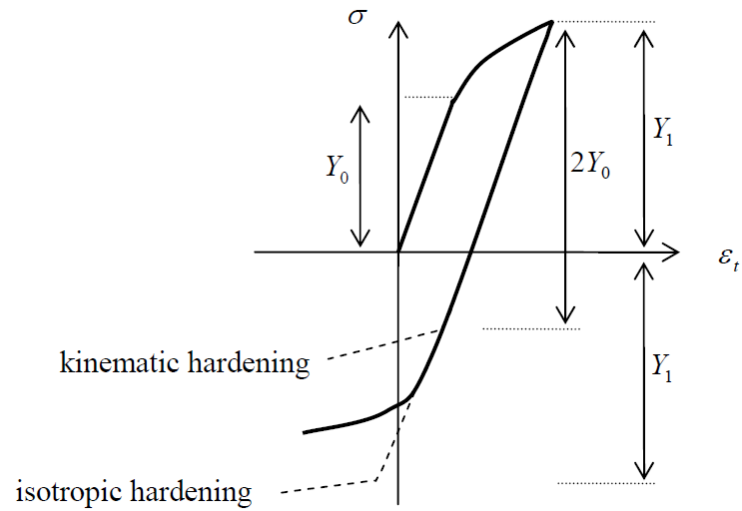


Figura 4.2 Efecto Bauschinger [19]

Dentro de cada uno de estos modelos de plasticidad hay una ley que controla la evolución de la superficie de fluencia. Para el caso concreto de la plasticidad isótropa, que interesa para modelizar el aluminio, en Kratos hay implementadas 5 leyes de *hardening* (engloba tanto *hardening* como *softening*).

- Softening lineal sin hardening (HARDENING\_CURVE = 0)
- Softening exponencial sin hardening (HARDENING\_CURVE = 1)
- Hardening inicial seguido de softening exponencial (HARDENING\_CURVE = 2)
- Plasticidad perfecta (HARDENING\_CURVE = 3)
- Modelo de plasticidad, curva de ajuste (HARDENING\_CURVE = 4)

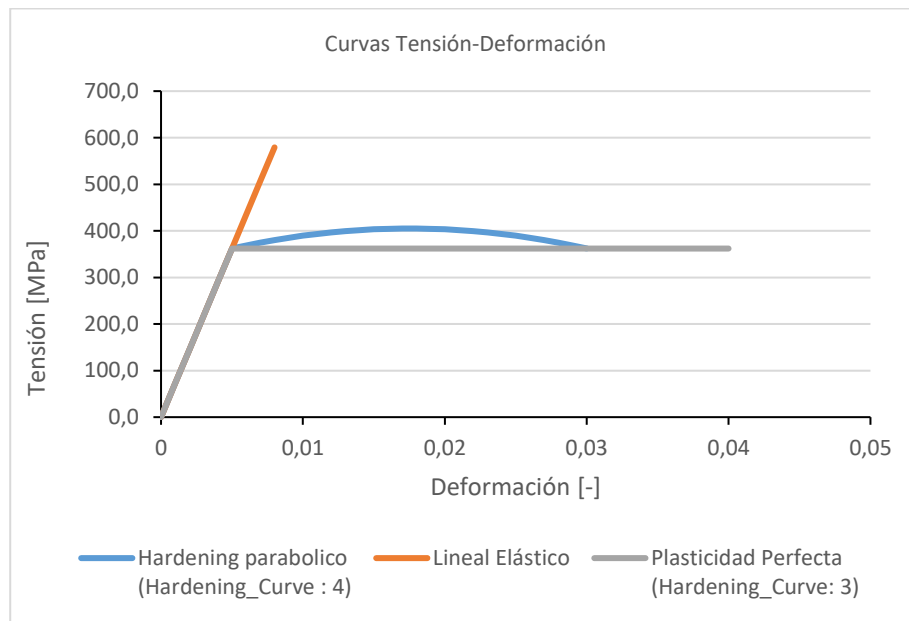


Figura 4.3 Diagramas de plasticidad implementados en Kratos

En cada uno de éstos se describe el valor de la tensión umbral según el nivel de deformación plástica o un equivalente (plastic dissipation factor, que es un medidor de la energía disipada con respecto a la energía disponible) y también la pendiente de la función de tensión (utilizado para el cálculo de parámetros del modelo).

Según el modelo que se use son necesarios una serie de parámetros a incluir en el fichero de entrada de datos. Para el caso concreto de la CURVA 4, que es la que permite un mejor ajuste a comportamientos plásticos complejos, hay que entender que está formada por 3 regiones una vez se supera el límite elástico:

1. Hardening polinómico. Esto hace necesario incluir un vector en el fichero de propiedades del material, con los coeficientes del polinomio que mejor ajuste la curva. Puede ser un polinomio de orden  $n$  y designado en el programa mediante el vector CURVE\_FITTING\_PARAMETERS.
2. Hardening lineal. Es necesario definir el inicio y el final de este tramo en términos del PLASTIC\_STRAIN\_INDICATORS, vector con dos componentes de la deformación plástica  $\varepsilon_p$  inicial y final de tramo. Recientemente se ha incluido a esta ley, un indicador nuevo llamado TANGENCY\_REGION2 que permite al usuario decidir si la relación entre esta región y la anterior es la de una recta tangente a la parte polinómica (true) o si es una línea horizontal (false) (si no se especifica, el valor por defecto es false).
3. Exponencial softening. Este tramo se ajusta de forma automática según la energía de fractura remanente que queda en el sistema después de pasar por los tramos anteriores. Así pues, tendremos un softening más o menos abrupto según energía de fractura remanente haya.



## 4.1 Introducción. Conceptos básicos

La teoría de la plasticidad fue desarrollada a partir de 1930 inicialmente para metales, aunque también puede ser aplicada a otros tipos de materiales. Como ejemplo ilustrativo de los fenómenos de la plasticidad, se estudia el caso de una barra de metal sometida a tracción pura. Este es un caso unidimensional, fácilmente interpretable, y queda reflejado en la Figura 4.4

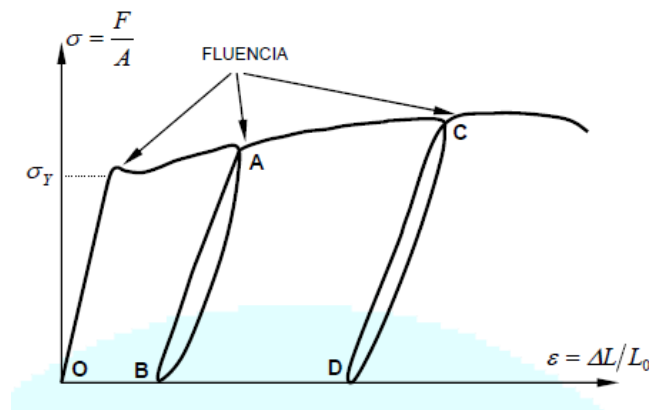


Figura 4.4 Ensayo de tracción uniaxial [20]

Una vez alcanzado el régimen elasto-plástico (es decir, después de que la tensión haya sobrepasado el valor  $\sigma_y$ , las deformaciones no son recuperables en su totalidad.

En efecto, observando un ciclo de carga y descarga como el OAB indicado en la Figura 4.4, se observa que la deformación existente en el punto A tiene una componente no recuperable (OB) y una recuperable (BA). Cuando las deformaciones alcanzan un cierto valor se produce la rotura al material.

En la Figura 4.5 podemos ver los distintos comportamientos idealizados del material.

En el caso que la deformación elástica (recuperable) fuese cero, hablaríamos de un comportamiento rígido-plástico perfecto. Y si una vez alcanzado el límite de fluencia la tensión no se mantiene constante, sino que aumenta o disminuye con la deformación, hablaremos de comportamiento rigidizable (endurecimiento-hardening) o reblandecible (reblandecimiento-softening), respectivamente.



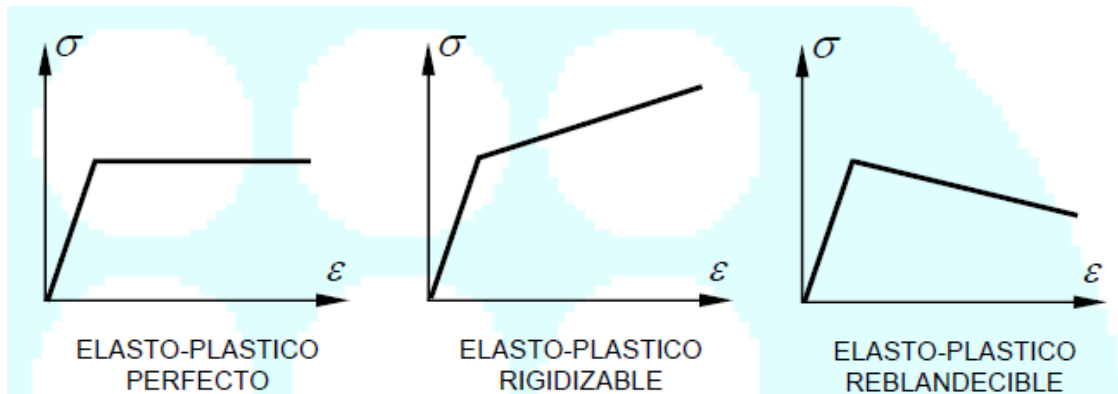


Figura 4.5 Comportamientos idealizados del material [20]

- Plasticidad perfecta: la superficie de fluencia depende únicamente de las tensiones, no cambia de tamaño durante el proceso de carga. En este caso, la ecuación se reduce a:  $F(\sigma_{ij}) = 0$ .
- Plasticidad con endurecimiento (hardening): la superficie de fluencia se expande (se “hincha”) durante el proceso de carga.
- Plasticidad con ablandamiento (softening): la superficie de fluencia se contrae durante el proceso de carga.

#### 4.1.1 Hipótesis de aditividad

El principio básico de la teoría de la plasticidad es que en todo momento puede haber deformaciones elásticas (recuperables) y plásticas (no recuperables), y que la deformación total es la suma de ambas:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (4.1)$$



### 4.1.2 Superficie de fluencia

La superficie de fluencia es una función de las tensiones (y otros parámetros en general) que separa, en el espacio de tensiones, aquellas combinaciones de tensiones que dan lugar a comportamientos de tipo elástico de comportamientos de tipo plástico.

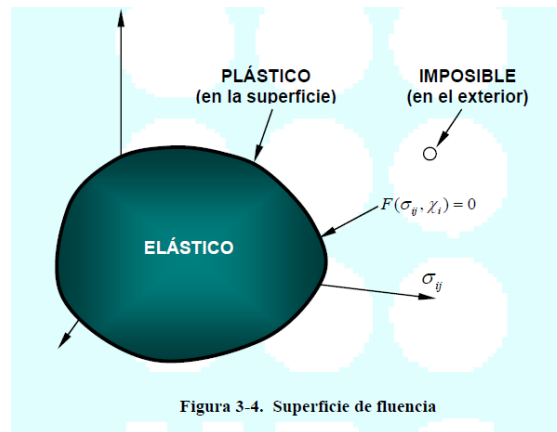


Figura 4.6 Superficie de fluencia [20]

La expresión general de la superficie de fluencia se escribe como:

$$F(\sigma_{ij}, \chi_i) = 0 \tag{4.2}$$

donde  $\chi_i$  son parámetros que controlan su tamaño.

Cuando el cuerpo se encuentra en régimen plástico (es decir, cuando se están produciendo deformaciones plásticas), el estado de tensiones siempre debe estar sobre la superficie de fluencia. Así, dado un estado tensional definido por  $\sigma_{ij}$  y unos parámetros  $\chi_i$ , podemos tener:

$$F(\sigma_{ij}, \chi_i) < 0 \text{ régimen elástico} \tag{4.3}$$

$$F(\sigma_{ij}, \chi_i) = 0 \text{ régimen plástico} \tag{4.4}$$

$$F(\sigma_{ij}, \chi_i) > 0 \text{ inadmisibles} \tag{4.5}$$

### 4.1.3 Ley de fluencia. Potencial plástico

La ley de fluencia nos da la relación entre las distintas componentes de la deformación incremental plástica. Existe una función de las tensiones (y de otros parámetros en general) tal que:

$$G(\sigma_{ij}, \zeta_i) = 0 \tag{4.6}$$



que se llama potencial plástico, tal que las deformaciones plásticas se obtienen como

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{dG}{d\sigma_{ij}} \quad (4.7)$$

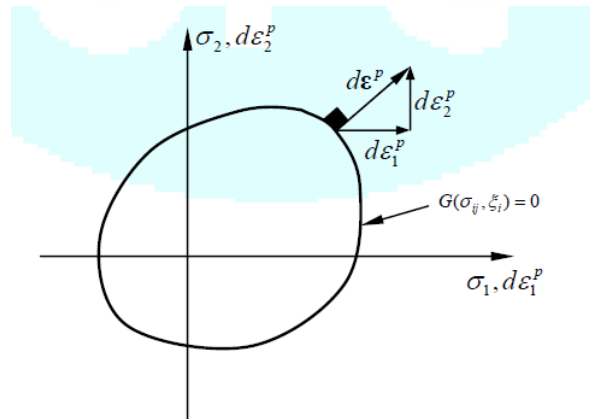


Figura 4.7 Potencial plástico y vector de deformaciones plásticas [20]

Cuando la superficie de fluencia y el potencial plástico coinciden,  $F(\sigma_{ij}) = G(\sigma_{ij})$ , diremos que se trata de plasticidad asociada, y plasticidad no asociada en caso contrario.

## 4.2 Ley de endurecimiento

La ley de endurecimiento expresa la variación del tamaño, forma, o posición de la superficie de fluencia. Obviamente, esta ley no existe en el caso de plasticidad perfecta, ya que en este caso la superficie de fluencia permanece constante. En caso contrario, si el material es reblandecible o rigidizable, hay que especificar cómo varía la superficie de fluencia y, dado que la superficie de fluencia viene definida por la expresión (4.2), la ley de endurecimiento expresará la variación de los parámetros  $\chi_i$  que aparecen en aquella ecuación. Normalmente, estos parámetros se hacen depender de la deformación plástica acumulada:

$$\chi = \chi(\varepsilon_{ij}^p) \quad (4.8)$$



### 4.3 Ecuación general de la plasticidad

Recapitulando lo visto hasta este punto, se puede decir que disponemos de las siguientes relaciones básicas:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad \text{hipótesis de aditividad}$$

$$F(\sigma_{ij}, \chi_i) = 0 \quad \text{superficie de fluencia}$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{dG}{d\sigma_{ij}} \quad \text{ley de fluencia}$$

$$\chi = \chi(\varepsilon_{ij}^p) \quad \text{ley de endurecimiento}$$

Además, una vez hemos llegado a plasticidad, es decir, cuando están ocurriendo deformaciones plásticas, el punto en el espacio de tensiones que define el estado tensional debe estar siempre encima de la superficie de fluencia. Es decir, que debe cumplirse:

$$F(\sigma_{ij}, \chi_i) = 0 \quad (4.9)$$

### 4.4 Modelos clásicos de fluencia (Modelos de Plasticidad perfecta)

Como se ha visto antes, se conocen normalmente como modelo *de fluencia*, una función (que depende de las tensiones y otros parámetros), en el espacio de tensiones, que permite conocer si el material está en régimen elástico o plástico.

En este apartado se revisa el caso de plasticidad perfecta, en el que la superficie de fluencia se mantiene constante, durante el proceso de deformación plástica.

Durante los últimos años se han formulado un gran número de criterios sobre la superficie de fluencia para representar mejor el comportamiento plástico de los sólidos ideales.

Dependiendo del tipo de material, se utilizan distintos criterios para representar mejor el comportamiento de estos materiales:

- Materiales metálicos: la resistencia a tracción y compresión son de la misma magnitud. La presión hidrostática, primer tensor de tensión invariable, tiene muy poca influencia en la determinación del estado de rendimiento plástico.  $I_1$  [18]
- Materiales friccionables: hormigón, suelos, cerámica etc., tienen menos resistencia a tracción que a compresión. La presión hidrostática  $p = \frac{I_1}{3}$  tiene más influencia en la condición de rendimiento plástico para tensiones bajas y moderadas que en altas tensiones



hidrostáticas. El sólido sufre cambios de volumen irrecuperables que muestran fenómenos de dilatación. [18]

A partir de lo anterior se hace evidente la necesidad de formular diferentes criterios de fluencia y potencial plástico para tener en cuenta los requisitos para cada tipo de materiales.

#### 4.4.1 El criterio Rankine de máxima tensión de tracción

Este criterio fue formulado por Rankine en 1876 y se basa en un solo parámetro, la máxima resistencia uniaxial de tracción  $\sigma_T^{max}$ .

Además, está influenciado por el primera invariante del tensor de tensiones  $I_1$  y por el segundo y tercer invariantes  $J_2$   $J_3$  del tensor desviador de tensiones, respectivamente.

Este criterio ayuda a establecer los límites de una manera sencilla donde el proceso de fracturación comienza en un punto de un sólido. Esta hipótesis lleva a la suposición de que las fracturas se producen cuando la tensión principal máxima alcanza el valor de la resistencia a la tensión uniaxial  $\sigma_T^{max}$

Las formas matemáticas para expresar este criterio son las siguientes:

- En función de las tensiones principales:

$$F(\sigma, \sigma_T^{max}) = \max(\sigma_i) - \sigma_T^{max} = 0 \quad (4.10)$$

- En función de los invariantes del tensor de tensiones y del tensor desviador de tensiones:

$$F(I_1, J_2, \theta, \sigma_T^{max}) = 2\sqrt{3}J_2 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + I_1 - 3\sigma_T^{max} = 0 \quad (4.11)$$

donde  $\theta$  es el ángulo de Lode:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{\frac{3}{2}}}\right) \quad (4.12)$$

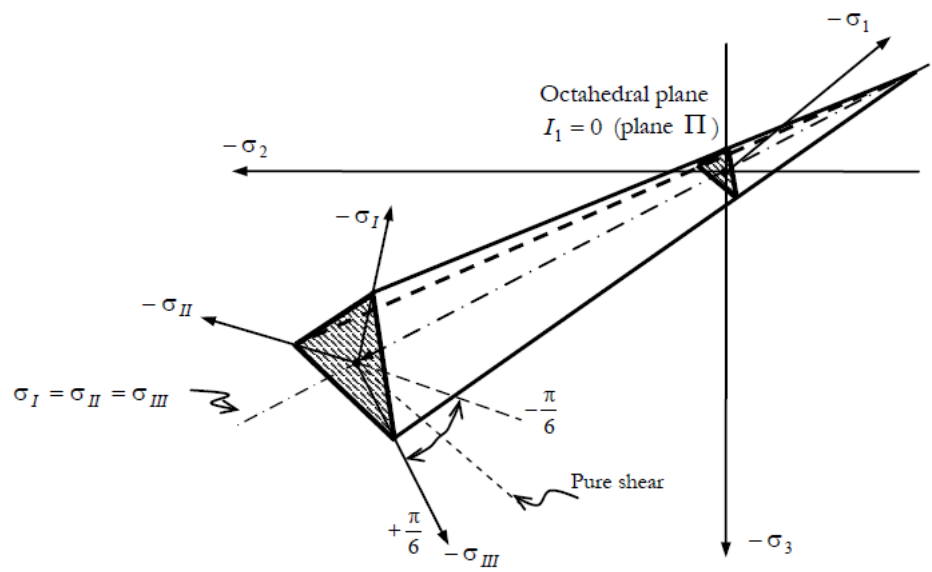


Figura 4.8 Superficie de fluencia de Rankine en el espacio de tensiones principales [18]



#### 4.4.2 El criterio Tresca de máxima tensión desviadora

Este criterio fue formulado por Tresca en 1864. De manera similar al criterio de Rankine, también depende de un solo parámetro que es la máxima resistencia a las tensiones tangenciales  $\tau_{max}$ .

El modelo de Tresca es un modelo de plasticidad perfecta y asociada ( $F = G$ ) cuya función de fluencia es:

$$F = \max \left\{ \frac{1}{2} |\sigma_i - \sigma_j| \right\} - Y = 0 \quad (4.13)$$

donde de nuevo  $Y$  es una tensión de comparación. Expresando la función de fluencia en términos de  $J_2$  y  $\theta$ :

$$F = 2\sqrt{J_2} \cos \theta - Y = 0 \quad (4.14)$$

El modelo de Tresca, de máxima tensión desviadora, es un modelo de plasticidad perfecta y asociada ( $F = G$ )

Además, considera el segundo y tercer invariantes del tensor desviador  $J_2, J_3$ , respectivamente, despreciando la influencia del primer invariante del tensor de tensión  $I_1$ .

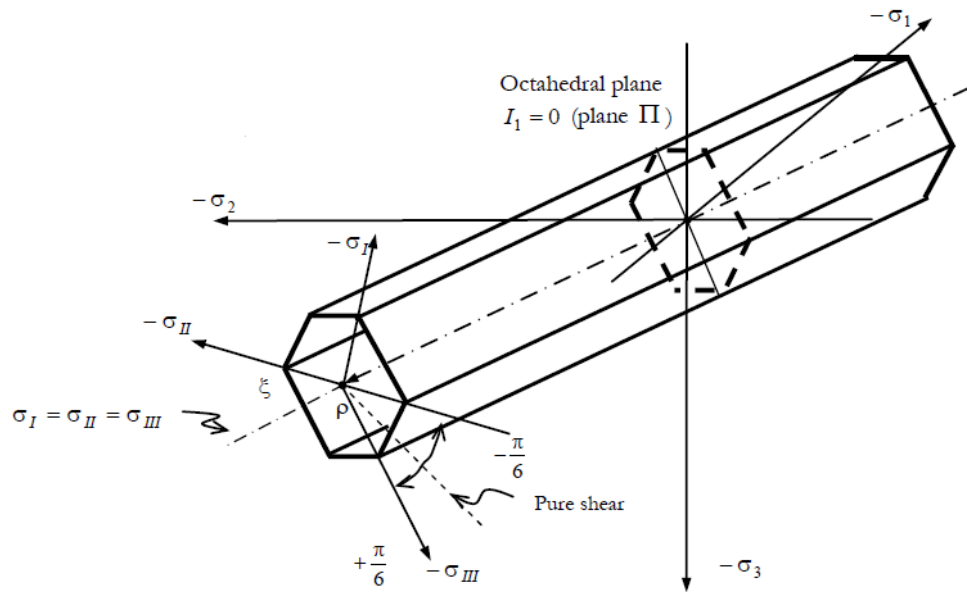


Figura 4.9 Superficie de fluencia de Tresca en el espacio de tensiones principales [18] [20]



### 4.4.3 Modelo de Von Mises

Este modelo fue formulado por Von Mises en 1913, y al igual que los dos primeros, depende sólo de un parámetro, la tensión máxima desviadora octaédrica  $\tau_{oct}^{max}$ .

En plasticidad de metales, se suele tomar la superficie de fluencia independiente de la presión media  $p$  y por tanto esta desaparece de la ecuación. El modelo de Von Mises es un modelo de plasticidad asociada ( $F = G$ ) que además es independiente del tercer invariante (ángulo de Lode,  $\theta$ ). Además, sólo considera el segundo invariante del tensor desviador de tensiones.

Las diferentes formas matemáticas para expresar este criterio son las siguientes:

- En función de las tensiones principales:

$$F(\sigma, \tau_{oct}^{max}) = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] - (\tau_{oct}^{max})^2 = 0 \quad (4.15)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (4.16)$$

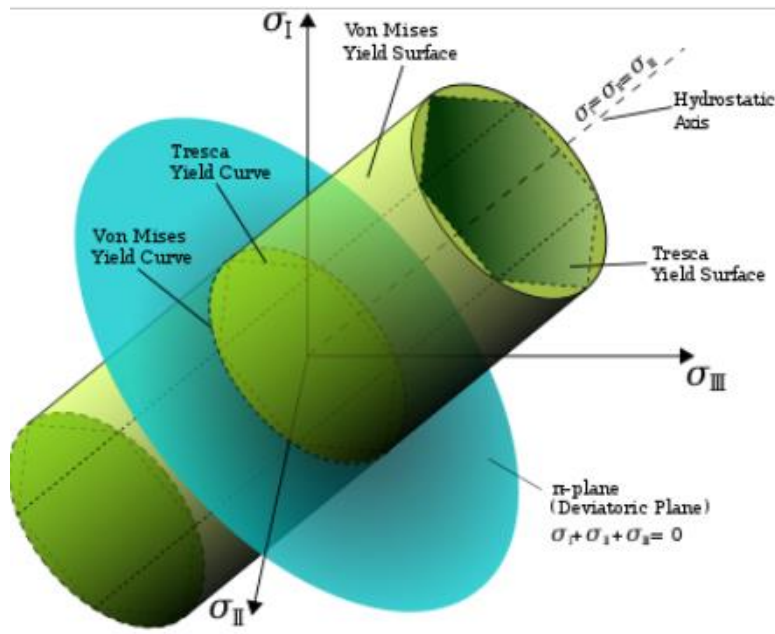


Figura 4.10 Superficie de fluencia de Von Mises en el espacio de tensiones principales [21]





- En función de los invariantes del tensor de tensiones y de los invariantes del tensor desviador de tensiones

$$F(J_2, \tau_{oct}^{max}) = J_2 - (\tau_{oct}^{max})^2 = 0 \quad (4.17)$$

$$\tau_{oct}^{max} = \frac{Y}{\sqrt{3}} \quad (4.18)$$

$$F = J^2 - \frac{Y^2}{3} = 0 \quad (4.19)$$

donde  $Y$  es una tensión de comparación

En la Figura 4.10 se muestran las superficies de fluencia de von Mises y de Tresca en el plano de las tensiones principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ .

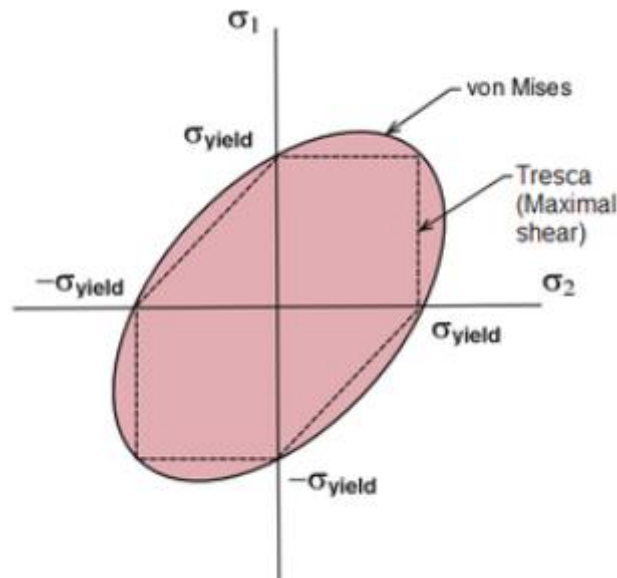


Figura 4.11 Superficies de fluencia de von Mises y Tresca en el plano de las tensiones principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . [21]



#### 4.4.4 El criterio Mohr-Coulomb de tensión desviadora octaédrica

Un modelo clásico para suelos es el criterio de rotura de Mohr-Coulomb. Este criterio fue formulado por primera vez por Coulomb en 1773 y más tarde desarrollado más a fondo por Mohr en 1882. Su forma más simple, en función de las tensiones normales  $\sigma$  y tangenciales  $\tau$  sobre el plano de rotura es:

$$\tau = c + \sigma \tan \varphi \quad (4.20)$$

Donde  $c$  es la cohesión y  $\varphi$  el ángulo de fricción.

En términos de las tensiones principales esta ecuación toma la forma de:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \varphi + c \cos \varphi \quad (4.21)$$

Este modelo es del tipo de plasticidad asociada ( $F = G$ )

Incluye el primer invariante del tensor de tensiones  $I_1$ , y el segundo y tercer invariante  $J_2, J_3$  del tensor desviador de tensiones, respectivamente.

Las diferentes formas matemáticas para expresar este criterio son las siguientes:

- En función de las principales tensiones:

$$F(\sigma, \phi, c) = \left[ \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right] - \left[ \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right] \sin(\phi) - c \cos(\phi) = 0 \quad (4.22)$$

donde  $\sigma_1, \sigma_3$  representan las tensiones principales mayores y menores, respectivamente. Por consiguiente, puede deducirse que el criterio Mohr-Coulomb descuida el efecto de la tensión principal intermedia  $\sigma_2$ , que constituye su gran limitación.

- En función de las invariantes del tensor de tensión y del tensor desviador:

$$F(I_1, J_2, \theta, c, \phi) = \frac{I_1}{3} \sin(\phi) + \sqrt{J_2} \left( \cos(\theta) - \frac{\sin(\theta) \sin(\phi)}{\sqrt{3}} \right) - \sqrt{6} \cos(\phi) c = 0 \quad (4.23)$$

Estas funciones describen en el espacio de tensión principal una pirámide hexagonal deformada, cuyo eje coincide con el eje de presión isostático.  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

De las funciones que describen el criterio de rendimiento Mohr-Coulomb, se desprende claramente que su principal característica es su capacidad para distinguir el comportamiento de tracción del comportamiento de compresión. Por lo tanto, de acuerdo con este criterio, la relación de fuerza de tensión y compresión satisface la siguiente expresión:

$$R_{Mohr} = \frac{\sigma_c}{\sigma_c} = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad (4.24)$$

Esta definición tiene una limitación importante para la adaptación del criterio a un material determinado, ya que esta relación no se da normalmente en materiales reales. [18]

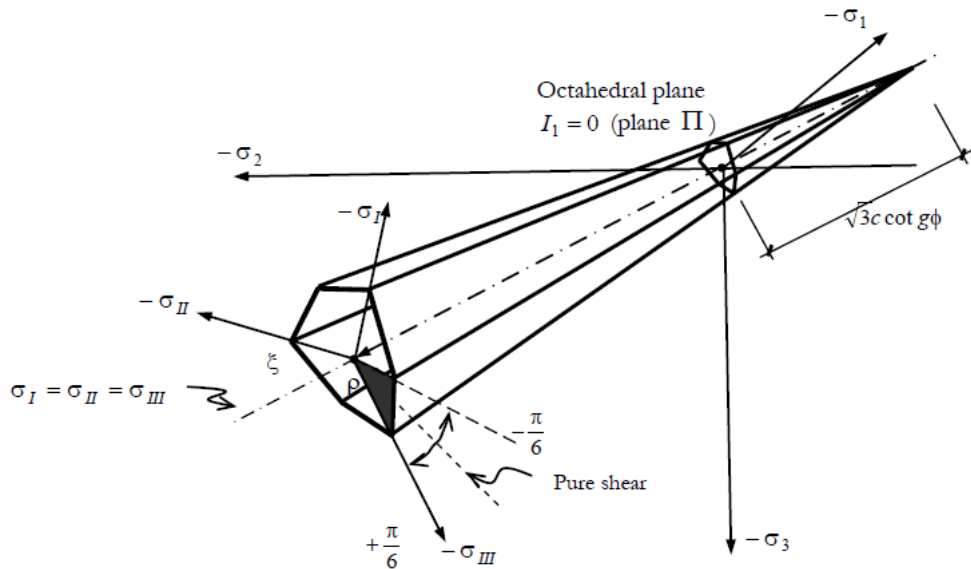


Figura 4.12 Superficie de fluencia de Mohr-Coulomb en el espacio de tensiones principales [18] [20]

#### 4.4.5 El criterio de Drucker-Prager

Este criterio formulado por Drucker y Prager en 1952 se considera como una aproximación suavizada al criterio Mohr-Coulomb.

En materiales no metálicos, como p.ej., el hormigón, los suelos, etc., la fluencia depende de la presión media  $p$

Lo que no está previsto en los modelos anteriores de Tresca y de Von Mises. Un modelo simple para estos materiales es el de Drucker-Prager, formulado en el marco de la plasticidad asociada ( $F = G$ ). La función de fluencia es:

$$F = 3 \alpha p + J - \kappa = 0 \tag{4.25}$$

donde  $\alpha$  es un parámetro relacionado con la fricción y  $\kappa$  el valor de  $J$  para  $p = 0$  (relacionado con la cohesión). Este modelo es independiente del tercer invariante ( $\theta$ , *ángulo de Lode*). Las secciones de la superficie de fluencia, en el plano octaédrico, son círculos (igual que en el modelo de Von Mises)

Sin embargo, la formulación matemática surge de una generalización del criterio Von Mises para incluir la influencia de la presión, a través del primer invariante del tensor de tensiones  $I_1$  y el ángulo de fricción interno  $\phi$

Las diversas formas de expresar matemáticamente este criterio son las siguientes:

- En función de las invariantes del tensor de tensión y su tensor desviador:





## 4.5 Modelos de plasticidad con endurecimiento (hardening)

En este apartado se discute brevemente el caso de plasticidad endurecible, en el que la superficie de fluencia no se mantiene constante, sino que puede cambiar el tamaño, la forma y/o la posición de la misma durante el proceso de deformación plástica.

### 4.5.1 Rigidización isótropa

El tamaño de la superficie de fluencia aumenta, pero la superficie no cambia su posición. Para ilustrar ese caso, consideremos el modelo de von Mises visto en el apartado anterior, modificando la expresión de la función de fluencia de la siguiente manera

$$F \equiv J - \kappa = 0 \quad (4.29)$$

Donde  $J = \sqrt{J_2}$  y  $\kappa$  es una variable que puede depender de la deformación plástica (“*strain-hardening*”) o del trabajo plástico (“*work-hardening*”):

### 4.5.2 Rigidización cinemática

En vez de expandir la superficie de fluencia, a veces es más realista moverla y dejarla del mismo tamaño: en este caso hablaremos de rigidización cinemática.

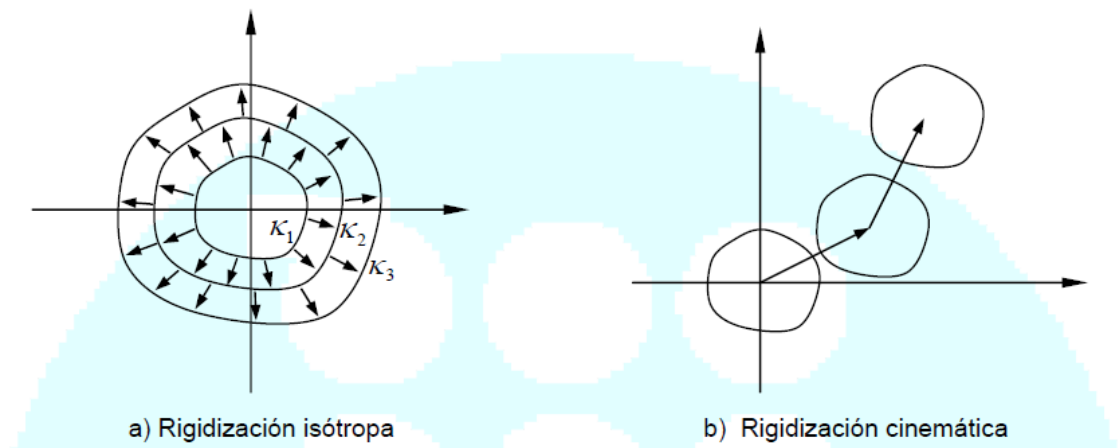


Figura 4.14 Rigidización isótropa y rigidización cinemática [20]





## 5 Introducción a los modelos de daño

La mecánica de daño continuo es una rama de la mecánica continua que describe la pérdida progresiva de la integridad del material debido a la propagación y coalescencia de microfisuras, microporos y defectos similares. Estos cambios en la microestructura conducen a una degradación del material irreversible, caracterizada por una pérdida de rigidez que se puede observar a escala macroscópica.

La teoría del daño continuo fue introducida por primera vez por Kachanov en 1958 tratando con problemas de rendimiento, pero fue aceptada después como una alternativa válida para la simulación de comportamiento de diferentes materiales.

Otras contribuciones importantes a nuestro conocimiento sobre la mecánica de daños incluyen: Simo & Ju [22], Oliver et al [23], [24] etc.

Durante los últimos años los modelos constitutivos conocidos como modelos del daño continuos han sido ampliamente aceptados para la simulación del complejo comportamiento constitutivo de muchos materiales utilizados en la ingeniería. Estos modelos se caracterizan por su simplicidad en su implementación, versatilidad y coherencia, ya que se basan en la mecánica del daño continuo.

### 5.1 Teoría del daño

#### 5.1.1 Teoría del daño Uniaxial

Con el fin de introducir los conceptos básicos de los modelos de daño, es aconsejable comenzar con el caso de tensión uniaxial. En este caso, el material se asume como un haz de fibras paralelas a la dirección de carga (como se muestra en Figura 5.1). Inicialmente, todas las fibras se comportan elásticamente y la carga es resistida por la sección total del material. Una vez que aumenta la tensión, algunas de las fibras comienzan a romperse y la sección transversal se reduce directamente.

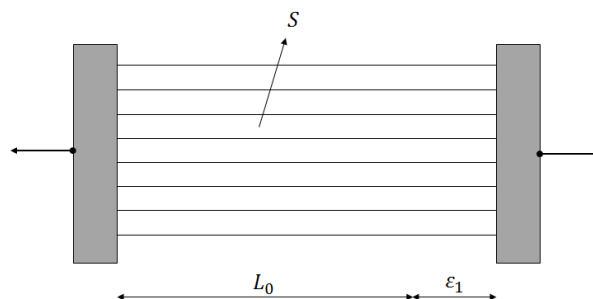


Figura 5.1 Idealización del material con carga uniaxial [25]



Con el fin de simplificar el ejemplo, se supone que cada fibra es perfectamente frágil. Esto significa que una vez que se alcanza el nivel de tensión máximo, cae a cero simulando el fallo repentino de esa fibra  $S$

Sin embargo, dado que el nivel máximo de tensión puede diferir de una fibra a otra, el área efectiva (el área correspondiente a las fibras que resisten) disminuirá de  $\bar{S} = S$  a  $\bar{S} = 0$ . Obviamente, si la tensión se reduce, se mantiene el área no dañada restante.

Es importante distinguir entre la *tensión nominal*,  $\sigma$  definida como la fuerza por unidad de área inicial, y la *tensión efectiva*  $\bar{\sigma}$  definida como la fuerza por unidad de área efectiva. La tensión efectiva es la tensión "real" que actúa en la microestructura del material. Debe cumplirse que:

$$\sigma S = \bar{\sigma} \bar{S} \quad (5.1)$$

$$\sigma = \frac{\bar{S}}{S} \bar{\sigma} \quad (5.2)$$

Se puede ver que la relación  $\frac{\bar{S}}{S}$  describe la integridad o degradación del material. De este modo, podemos definir el parámetro daño  $d$  como:

$$d = 1 - \frac{\bar{S}}{S} = \frac{S - \bar{S}}{S} = \frac{S_d}{S} \quad (5.3)$$

Donde  $S_d$  es la sección dañada de la zona. El proceso esquemático de degradación se muestra en la Fig. 12.

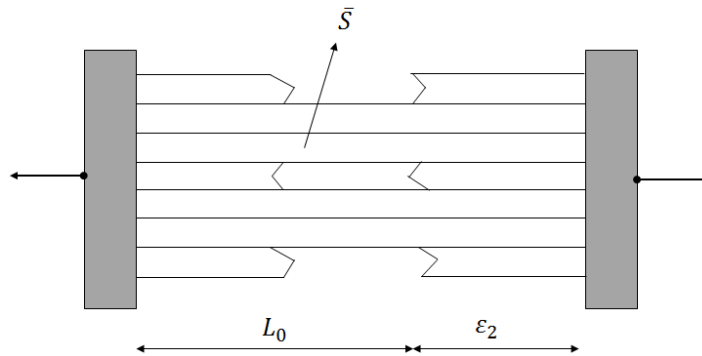


Figura 5.2: Idealización del material dañado [25]

El proceso mostrado en las Figura 5.1 y Figura 5.2 se puede representar como una curva de tensión-deformación como se describe en la Figura 5.3.



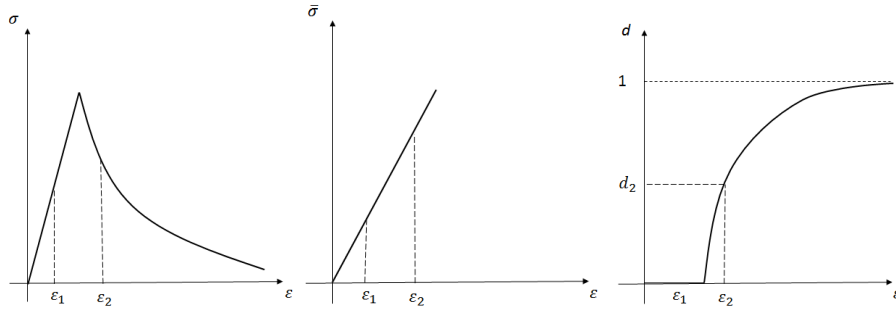


Figura 5.3 Curvas Tensión- deformación; Tensión efectiva-deformación; Daño-deformación. [25]

Como se puede ver en la Figura 5.3, una vez que el daño es diferente de cero, la tensión máxima  $\sigma$  se reduce representando el llamado *ablandamiento*. Debido a la propagación de microdefectos y su coalescencia, la variable de daño crece y en las últimas etapas del proceso de degradación se acerca asintóticamente al valor límite, correspondiente a un material dañado completo  $d = 1$  con la tensión reducida a cero.

Como se ha dicho anteriormente, se supone que cada fibra se comporta como un material elástico hasta que se alcanza la máxima tensión. En consecuencia, la *tensión efectiva*  $\bar{\sigma}$  está relacionada con la deformación del material  $\varepsilon$  mediante:

$$\bar{\sigma} = D\varepsilon \quad (5.4)$$

donde D es el módulo elástico del material no dañado. Si combinamos las ecuaciones anteriores es fácil obtener la ley constitutiva para la tensión nominal  $\sigma$ , que toma la forma:

$$\sigma = (1 - d)D\varepsilon \quad (5.5)$$

Para completar el modelo 1D descrito, es necesario definir la evolución del daño de acuerdo con el nivel de deformaciones:

$$d = g(\varepsilon) \quad 0 \leq d \leq 1 \quad (5.6)$$

La función  $g$  define la forma del diagrama de tensión-deformación y se puede identificar a partir de una prueba unitaria. En este contexto, podemos introducir otra función  $\psi$  que identifique si el material está en régimen elástico o plástico (regla de flujo). Esta función se puede definir en este caso como  $\psi(\varepsilon, \varepsilon_{max}) = \varepsilon - \varepsilon_{max}$  donde  $\varepsilon_{max}$  es la deformación correspondiente a la tensión máxima mostrada en la deformación. Esta función también define el dominio elástico que es:  $\Omega_{elastic} = \{\varepsilon \mid \psi(\varepsilon, \varepsilon_{max}) < 0\}$

El comportamiento del material y sus variables permanece en régimen elástico hasta el nivel máximo de tensión mostrado en la Figura 5.3. Esta evolución de la tensión efectiva es válida para una carga monótona que aumenta. Si el material se deforma hasta un cierto nivel de deformación, lo que induce su daño correspondiente, y la tensión se reduce, el área dañada permanece constante y el material responde como un material elástico con un módulo reducido de Young  $D_2 = (1 - g(\varepsilon_2))D$ . Esto significa que el nuevo módulo elástico depende de la



tensión máxima alcanzada y no de la deformación actual  $\varepsilon$ . Este efecto se muestra en la Figura 5.4

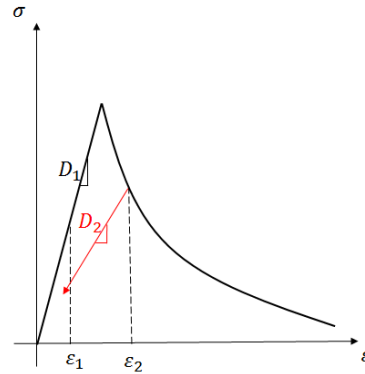


Figura 5.4 Modelo de daño uniaxial a través de una carga no-monótona [25]

La ley constitutiva se puede reescribir como  $\sigma = \varepsilon D_{sec}$  donde  $D_{sec}$  es el módulo de elasticidad secante o dañado

En este punto, los componentes principales de un modelo de daño se pueden resumir como:

- La ley de tensión-deformación unitaria en formato secante  $\sigma = D_{sec}\varepsilon$  donde  $D_{sec} = (1 - d)D$ .
- La ley que describe la evolución del daño correspondiente a un cierto nivel de deformación  $\varepsilon$ .
- El criterio de daño o la regla de flujo  $\psi$  que especifica el dominio elástico.

### 5.1.2 Teoría del daño isótropo

Una vez descrita la simplificación 1D, es el momento de extender la teoría del daño a los estados multiaxiales generales mediante un modelo de daño isótropo con una variable escalar única.

Los modelos de daño isótropos se basan en la suposición simplificada de que la degradación de la rigidez es isótropa, es decir, los módulos de rigidez correspondientes a diferentes direcciones disminuyen proporcional e independientemente de la dirección de carga. En consecuencia, el tensor constitutivo dañado se expresa como

$$D_{sec} = (1 - d)D \quad (5.7)$$

donde  $D$  es la matriz de rigidez elástica del material no dañado y es el parámetro de daño.

Inicialmente,  $d$  se establece en cero, representando el material virgen sin daños, y la respuesta es lineal-elástica. A medida que el material sufre la deformación, la iniciación y propagación de microdefectos disminuye la rigidez, que se representa en el crecimiento del parámetro de daño  $d$ .

Para  $d = 1$ , la rigidez desaparece por completo. En el contexto actual, la matriz representa la rigidez secante  $D_{sec}$  que relaciona la deformación total con la tensión total  $\sigma$ , según:



$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_{sec} \boldsymbol{\varepsilon} = (1 - d) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.8)$$

Además, la Ec. anterior puede escribirse como:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (5.9)$$

Que es la generalización multidimensional de la Ec. uniaxial, y donde el  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  es el *tensor de tensión efectivo* definido como:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.10)$$

Al igual que el caso uniaxial, introducimos una función de carga que especifica el dominio elástico y los estados en los que crece el daño. En la teoría del daño, es natural trabajar en el espacio de deformación unitaria (también se puede utilizar el espacio de tensión) y por lo tanto la función de carga depende de la tensión y de un parámetro adicional, describiendo la evolución del daño  $\kappa$ . Físicamente  $\kappa$  es una medida escalar del nivel de deformación unitaria más grande jamás alcanzado. La función de carga suele tener la forma:

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \kappa) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \kappa \quad (5.11)$$

dónde  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon})$  es la deformación equivalente, es decir, la medida escalar del nivel de deformación unitaria. El daño sólo puede crecer si el estado actual alcanza el límite del dominio elástico ( $\psi = 0$ ). Esto se expresa mediante las siguientes condiciones de carga/descarga:

$$\psi \leq 0 \quad \dot{\kappa} \geq 0 \quad \kappa \dot{\psi} = 0 \quad (5.12)$$

La ventaja importante de esta formulación explícita es que la tensión correspondiente a la tensión dada se puede evaluar directamente, sin necesidad de resolver el sistema no lineal de ecuaciones. Para la deformación unitaria dada, la tensión correspondiente se calcula simplemente evaluando la deformación unitaria equivalente actual, actualizando el valor de deformación unitaria equivalente máximo alcanzado anteriormente y el parámetro de daño  $\kappa$  y reduciéndose la tensión efectiva de acuerdo con  $\boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \bar{\boldsymbol{\sigma}}$ .



## 5.2 Leyes de Evolución del daño

Como se indica para el caso uniaxial, uno de los componentes básicos de un modelo de daño es la ley que rige la evolución de la variable de daño. Hay varias leyes que rigen los daños y que pueden ser utilizadas eficazmente para modelar el crecimiento de daños en los geo-materiales. En los siguientes párrafos se presentan algunos de los modelos más utilizados.

### 5.2.1 Ablandamiento exponencial

La función escalar  $g$  que define la evolución del umbral de daño debe ser monótona y con un valor que va de 0 a 1. Esta función escalar se puede describir como [23]:

$$g(f(\sigma)) = 1 - \frac{f^0(\sigma_0)}{f(\sigma)} e^{A\left(1 - \frac{f(\sigma)}{f^0(\sigma_0)}\right)} \quad (5.13)$$

donde  $A$  es un parámetro que depende de la energía de fractura del material. El valor de  $f^0(\sigma_0)$  se obtiene del cumplimiento del criterio de daño para el primer umbral de degradación.

### 5.2.2 Ablandamiento Lineal

Para el ablandamiento lineal una nueva definición de la función escalar  $g$  se da para el umbral de daño. Al igual que en la sección anterior, esta función debe aumentar monótonamente entre 0 y 1. Esto es:

$$g(f(\sigma_0)) = \frac{1 - \frac{f^0(\sigma_0)}{f(\sigma_0)}}{1 + A} \quad (5.14)$$

donde  $A$  es un parámetro que depende de la energía de fractura del material. El valor inicial de  $f^0(\sigma_0)$  se obtiene del criterio de daño.

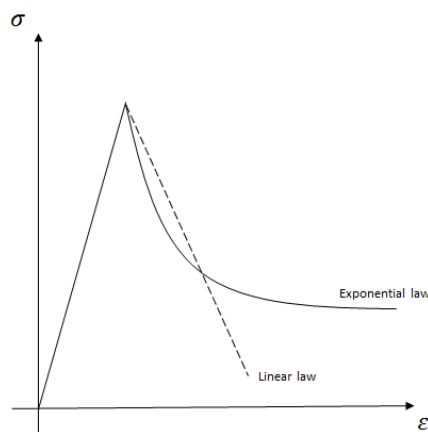


Figura 5.5 Leyes de ablandamiento exponencial y lineal [25]



### 5.3 No linealidad asociada al daño

Como se ve en la formulación elástica lineal, la relación tensión-deformación elástica se utilizó para derivar las ecuaciones de equilibrio del Principio de Trabajos Virtuales. No obstante, en la sección anterior se explicó que para tener en cuenta la pérdida de rigidez debida a la progresión del daño, se tuvo que utilizar una relación de tensión-deformación diferente:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_{sec}\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{1} - d)\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.15)$$

si sustituimos la nueva ley de tensión-deformación en la expresión general del PTV se obtiene que:

$$\int \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T (\mathbf{1} - d) \mathbf{D} \mathbf{B} t dA \mathbf{a}^{(e)} - \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^0 t dA + \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^0 t dA - \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{b} t dA - \oint_{l^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{t} t d\mathbf{a} = \mathbf{q}^{(e)} \quad (5.16)$$

donde  $d$  es el parámetro de daño.

La expresión anterior se puede reescribir como:

$$\mathbf{K}^{(e)}(d) \mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)} \quad (5.17)$$

dónde

$$\mathbf{K}^{(e)}(d) = \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T (\mathbf{1} - d) \mathbf{D} \mathbf{B} t dA \quad (5.18)$$

es la matriz de rigidez secante o dañada del elemento. Como se indicó anteriormente, al ensamblar las contribuciones de los diferentes elementos de la malla se puede obtener la ecuación de matriz global:

$$\mathbf{K}(d) \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (5.19)$$

dónde  $\mathbf{K}(d)$  es la matriz secante global. Además, es obvio que el parámetro  $d$  de daño depende directamente de los desplazamientos, es decir,  $d = f(a)$ . Aplicando la consideración anterior, la expresión (5.19) resulta:

$$\mathbf{K}(a) \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (5.20)$$

que es, de hecho, un sistema no lineal de ecuaciones. De este modo, la inclusión de la mecánica de daño en la teoría clásica de la elasticidad introduce una no-linealidad que debe tenerse en cuenta a la hora de resolver este tipo de problemas. En la siguiente sección, se presentan algunos procedimientos de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales.





## 6 Sistemas de Ecuaciones No-Lineales

En problemas no lineales no se garantiza la existencia y singularidad de la solución. Tampoco es posible estimar el costo computacional de encontrar una o más soluciones. Esto significa que, en muchos casos, la solución correcta depende de la ruta de acceso, por lo que depende de la ruta seguida para alcanzar un estado de equilibrio determinado. En este sentido, en muchos casos es aconsejable seguir la física del problema y considerar la solución, no sólo como la respuesta a una acción dada, sino como una secuencia histórica completa de los sucesivos estados de equilibrio que van del estado de referencia a otro [25].

Así mismo, es interesante seguir la historia completa de un proceso no lineal porque da más información sobre el comportamiento mecánico del sistema (razón de ingeniería); y también ayuda a trazar la trayectoria de equilibrio cerca de puntos críticos y facilita la convergencia (razón matemática).

De este modo, el método para resolver problemas mecánicos sólidos no lineales consiste en seguir la ruta de equilibrio mediante el uso de estrategias de incremento o continuidad. Suponiendo que la acción y la respuesta se conozcan en un estado de equilibrio determinado, se busca un nuevo estado de equilibrio, situado en la misma rama de la ruta de equilibrio y a una cierta distancia del anterior [25].

En esta sección se presenta un breve resumen de algunas técnicas de solución de sistemas no lineales de ecuaciones.

### 6.1 Método de Newton

Sea el sistema, no-lineal, de ecuaciones, de  $n$  funciones reales  $f_i$  de las  $n$  variables reales  $x_i$

$$f_i(x_i) = 0; i = 1, \dots, n \quad (6.1)$$

El sistema iterativo de solución es:

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \frac{f_i(\bar{x}^k)}{\frac{\partial f_i(\bar{x}^k)}{\partial x_i}}; i = 1, \dots, n; k = 0, 1, 2 \quad (6.2)$$

Las condiciones de estabilidad y convergencia son difíciles de obtener, el valor inicial  $\bar{x}^0$  debe estar "suficientemente" cerca de la solución.

En la Figura 6.1 se muestra una interpretación unidimensional del sistema iterativo de la tangente.

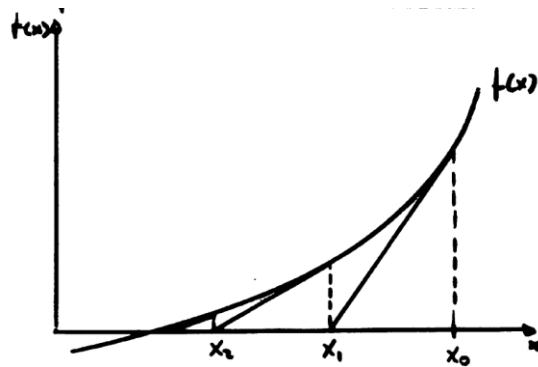


Figura 6.1 Método de Newton. Interpretación unidimensional [26]

Este método utiliza el valor de la derivada de la función en cada iteración.

Si en el intervalo, se anula la derivada, se puede tener un problema de convergencia, tal como se muestra en el ejemplo de la Figura 6.2

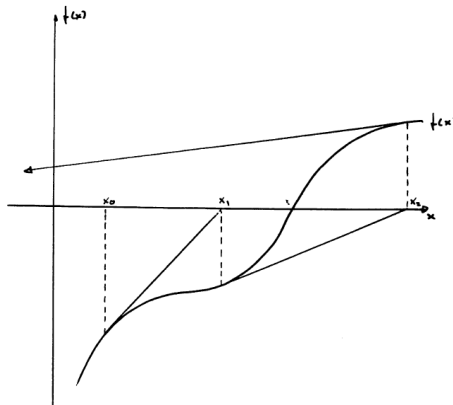


Figura 6.2 Ejemplo de divergencia del método de Newton [26]

## 6.2 Método de la secante

Este método deriva del método de Newton

$$\frac{\partial f_i(\bar{x}^k)}{\partial x_i} = C_i = cte, i = 1, \dots, n \quad (6.3)$$

El sistema iterativo es

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \frac{f_i(\bar{x}^k)}{C_i}, i = 1, \dots, n \quad (6.4)$$

En la Figura 6.3 se muestra una interpretación unidimensional del proceso iterativo mediante de la secante



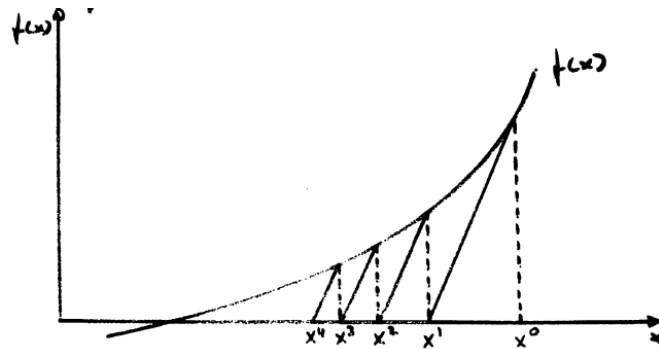


Figura 6.3 Método de la secante. Interpretación unidimensional [26]

No es necesario derivar las funciones  $f_i(x_i)$ , se evalúa en la primera iteración. Tiene menor velocidad de convergencia que el método de Newton.

### 6.3 Método de Newton-Raphson

Este método deriva del método de Newton, definamos primero

$$f_{x_i}(\bar{x}^k) = \frac{\partial f_i(\bar{x}^k)}{\partial x_i} \tag{6.5}$$

Desarrollando en series de Taylor la función  $f_i(\bar{\alpha}) = 0$ , obviamente en  $\bar{x}^k$ , se obtiene:

$$0 = f_i(\bar{\alpha}) = f_i(\bar{x}^k) + (\alpha_1 - x_1) f_{x_1}(\bar{x}^k) + (\alpha_1 - x_2) f_{x_2}(\bar{x}^k) + \dots \tag{6.6}$$

En la que despreciamos los términos de orden superior al 1º, suponiendo que  $\bar{x}^{k+1} \cong \bar{\alpha}$  y llamando  $\Delta_i^k = x_i^{k+1} - x_i^k$

$$\sum_{j=1}^n \Delta_j^k \frac{\partial f_i(\bar{x}^k)}{\partial x_j} = -f_i(\bar{x}^k), i = 1, \dots, n \tag{6.7}$$

Sistema lineal en  $\bar{\Delta}^k$  y una nueva aproximación a  $\bar{\alpha}$  es  $\bar{x}^{k+1} = \bar{x}^k + \bar{\Delta}^k$

La condición suficiente de estabilidad es:

$$|J| = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \neq 0, \forall \bar{x}^k \tag{6.8}$$

La condición suficiente de convergencia es (1.8) + el valor inicial  $\bar{x}^0$  debe estar "suficientemente" cerca de  $\bar{\alpha}$  [26].

A pesar de la rápida convergencia de este método, se pueden observar algunos inconvenientes tales como [25]:

- Siempre necesita un operador jacobiano tangente, que no es fácil de obtener en todos los casos.
- Sólo se obtiene convergencia cuadrática cuando el algoritmo se halla cerca de la solución



- Si el algoritmo encuentre un mínimo local, en el intervalo, el método puede divergir, valor inicial no lo “suficientemente” cerca.

## 6.4 Aplicación al MEF

En el método de elementos finitos, los sistemas resultantes de la discretización de problemas no lineales suelen escribirse como:

$$K(\mathbf{a})\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (6.9)$$

y por generalización de las principales aplicaciones a la mecánica computacional, se denominan [26]:

- $K$  matriz de rigidez (matriz de coeficientes)
- $\mathbf{a}$  vector de desplazamientos (de incógnitas)
- $\mathbf{f}$  vector de fuerzas (términos independientes)

En realidad, la mayor parte de los problemas no-lineales pueden escribirse de esta forma.

Suele denominarse, igualmente residuo a:

$$\psi(\mathbf{a}) = K(\mathbf{a})\mathbf{a} - \mathbf{f} \quad (6.10)$$

Más información de estos algoritmos y su aplicación en el MEF puede verse en [18] [25] [26].



## 7 Ejemplos de simulación. Kratos & GiD

En este apartado se explican los ejemplos de simulación realizados durante la familiarización con las herramientas de cálculo numérico. Los modelos de Estructuras. Lineales (vigas) y sólidos 2D y 3D.

Tal como se ha indicado en la introducción al MEF, la resolución de un problema por el Método de Elementos Finitos se puede dividir en 3 partes:

- Preproceso. En la que se define la geometría del problema, las condiciones de contorno, los estados de carga y la malla de los elementos.
- Proceso en sí mismo con los cálculos necesarios para la definición y resolución del sistema de ecuaciones
- Postproceso. En el que se analizan los resultados obtenidos y se visualizan de forma generalmente gráfica.

En este trabajo se ha utilizado para las etapas de Pre y Post proceso la solución GiD [10]. Para la etapa de Proceso, la solución Kratos [7] [8] [9].

En los próximos apartados se describen brevemente ambas soluciones.

### 7.1 ¿Qué es GiD?

GiD es un pre y post procesador universal, adaptable y fácil de usar para simulaciones numéricas en ciencia e ingeniería. Ha sido diseñado para cubrir todas las necesidades comunes en el campo de las simulaciones numéricas desde el pre hasta el post procesamiento:

- Modelado geométrico (CAD)
- Generación de mallas
- Definición de datos de análisis
- Transferencia de datos al software de análisis
- Operaciones de post procesamiento
- Visualización de resultados

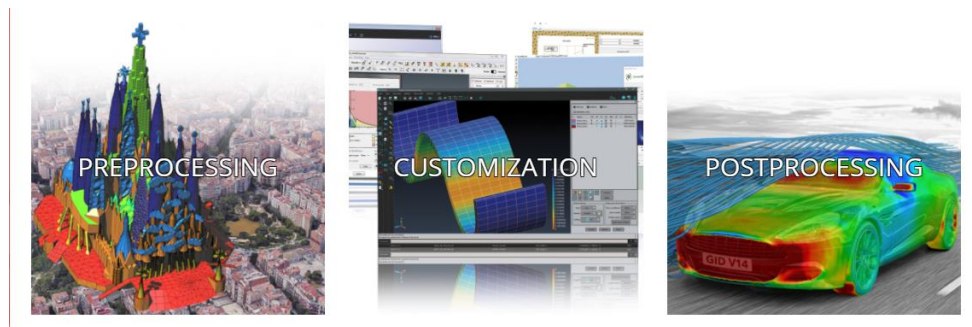


Figura 7.1 GiD. Preproceso, Customización y postproceso [10]

## 7.2 ¿Qué es Kratos?

Kratos está diseñado como un marco de código abierto para la implementación de métodos numéricos para la solución de problemas de ingeniería. Está escrito en C++ y está diseñado para permitir el desarrollo colaborativo de grandes equipos de investigadores que se centran tanto en la modularidad como en el rendimiento. Kratos presenta un enfoque de "núcleo" y "aplicaciones" en el que las "herramientas estándar" (bases de datos, álgebra lineal, estructuras de búsqueda, etc.) forman parte del núcleo y están disponibles como bloques de construcción en el desarrollo de "aplicaciones que se centran en la solución de los problemas de interés. Su objetivo final es simplificar el desarrollo de nuevos métodos numéricos.

Para más información ver en [27].

### 7.2.1 Licencia

Kratos es software libre bajo licencia BSD-4 y puede ser usado incluso en software comercial. Muchas de sus aplicaciones principales son también software libre con licencia BSD-4. La aplicaciones derivadas pueden su propia licencia propietaria.

### 7.2.2 Principales características

Kratos es multiplataforma y está disponible para distintos sistemas operativos: Windows, Linux (varias distribuciones) y para macOS.

Kratos es OpenMP y MPI, es escalable hasta miles de cores.

Kratos proporciona un software "core" que define el "framework" común y varias aplicaciones que funcionan como "plug-in" y pueden extenderse a diversos campos

### 7.2.3 Principales aplicaciones

- Método de Elementos Discretos (MED) para simulación de partículas de materiales cohesivos y no-cohesivos esféricos y no esféricos.



- Método de Elementos Finitos (MEF) para problemas de Dinámica de Fluidos. Proporciona modelos 2D y 3D para la resolución de problemas de fluidos incompresibles.
- MEF para la solución de diferentes problemas de interacción de Fluidos y Estructuras (FSI).
- MEF para la simulación de problemas de Mecánica Estructuras. Proporciona solución para sólidos, laminas y estructuras de vigas con modelos elásticos y no elásticos, con carga estática y dinámica

## 7.3 Ejemplos de validación

La simulaciones que se describen a continuación se han realizado con Kratos [7] [8] [9]. Se ha utilizado en el aprendizaje inicial la implementación de MEF mediante MATLAB, MAT-FEM que se describe en [5]. La descripción del MEF en 2D con referencias al código es un magnifica forma de introducirse de forma práctica en el MEF.

Para todas la simulaciones de este apartado se ha utilizado com o ecuación constitutiva la de un material elástico-lineal.

### 1.1.1 Test0. Viga en voladizo. Análisis mediante MAT-FEM

#### 7.3.1.1 Descripción del problema

En la Figura 7.2 se muestra una viga en voladizo que se ha analizado como un sólido en 2D

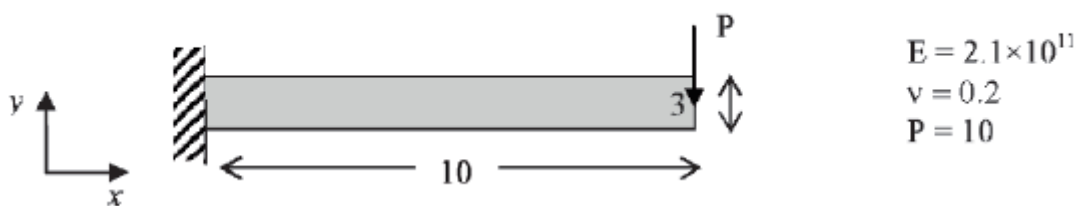


Figura 7.2 Test0.Viga en voladizo. [28]

$P = 10, E = 2.1e11Pa, G = 1.26e11Pa, L = 10, I = 0.225 m^4, Ar = 0.25 m^2$

#### 7.3.1.2 Resultados analíticos

La flecha  $v$  en el extremo del voladizo viene dada por:

$$v = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{GA_r}$$



Sustituyendo en la ecuación se obtiene:

$$\nu = 7.05e-8 + 0.32 e-8 = -7.37e-8 \text{ m}$$

Resultados de la simulación. Solido 2D

En esta simulación se ha utilizado un modelo: solido 2D y pequeñas deformaciones. La geometría se ha discretizado en una malla de 120 elementos rectangulares (20x6). En las siguientes figuras se muestran los resultados obtenidos mediante la simulación con MAT-FEM y GiD. También se ha realizado la simulación con Kratos. Se han obtenidos los mismos resultados.

Los resultados de las tensiones coinciden con los publicados en [5] y el desplazamiento máximo en el extremo del voladizo es una buena aproximación a los resultados analíticos esperados.

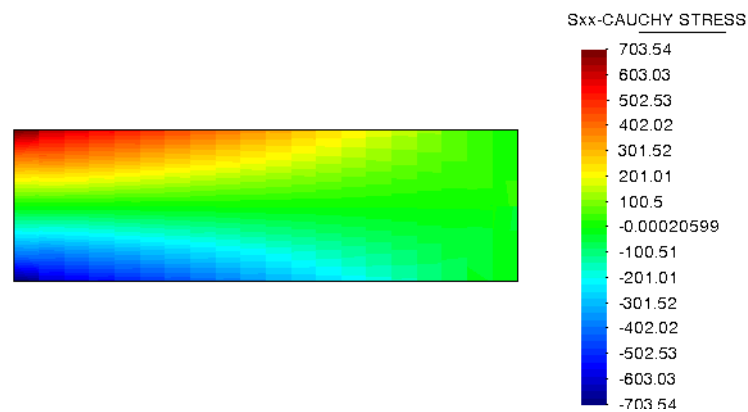


Figura 7.3 Test0.Resultados. Tensión de Cauchy Sxx [Pa].

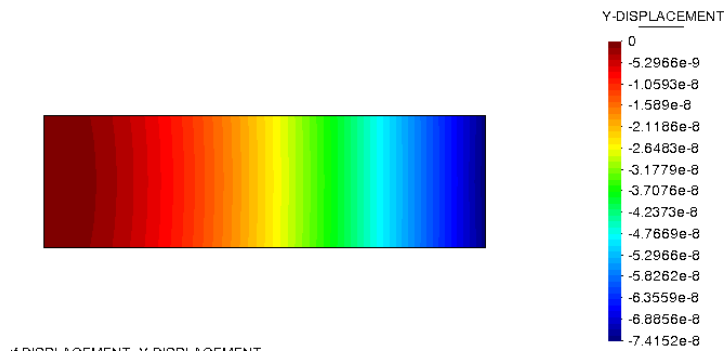


Figura 7.4 Test0.Resultados. Desplazamientos verticales [m].



### 7.3.1.3 Resultados de la simulación. Viga 1D

Se muestra en las siguientes figuras los resultados de la simulación de problema, como una viga 1D. La simulación se ha realizado con Kratos. La geometría se ha discretizado en una malla de 20 elementos. El momento flector máximo en el empotramiento es de 100 Nm y el desplazamiento vertical máximo, en el extremo del voladizo, es:  $v = -7.054e-8$  m.



Scalar Line Diagram of MOMENT, Z-MOMENT factor 0.01.

Figura 7.5 Test0. Resultados. Ley de momentos flectores



DISPLACEMENT, Y-DISPLACEMENT factor 1.4175e+7.

Figura 7.6 Test0. Resultados. Desplazamientos verticales



### 7.3.2 Test1. Viga en voladizo. Análisis mediante Kratos

#### 7.3.2.1 Descripción del problema

En la Figura 7.7 se muestra una viga en voladizo

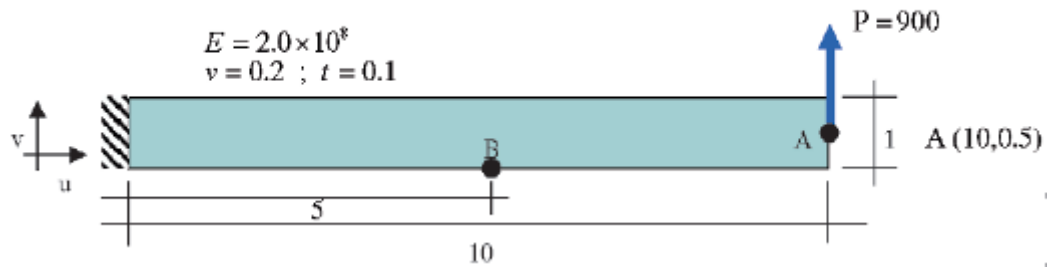


Figura 7.7 Viga en voladizo bajo carga puntual en un extremo. [28]

$$G = 1.26e11, I = 0.0083 \text{ m}^4, Ar = 0.083 \text{ m}^2$$

Con objeto de conocer las diferentes posibilidades que ofrece Kratos para el estudio de sólidos, este problema se ha analizado, mediante los siguientes modelos. Los resultados se muestran en los siguientes apartados.

- Sólido 2D
- Estructura 3D: Lámina
- Estructura 3D: Sólido 3D
- Viga 1D

#### 7.3.2.2 Resultados analíticos

La flecha  $v$  en el extremo del voladizo viene dada por:

$$v = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{GA_r}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$v = 0.181 \text{ m}$$

$$\sigma_{max} = 540.21 \text{ kPa}$$





### 7.3.2.3 Resultados de la simulación. Sólido 2D

En esta simulación se ha utilizado un modelo: sólido 2D y pequeñas deformaciones. La geometría 2D se ha discretizado en una malla de 160 elementos del tipo cuadriláteros (40x4).

En las siguientes figuras se muestran los resultados obtenidos mediante la simulación con Kratos y GiD.

Los resultados obtenidos para la tensión máxima en el empotramiento y para el desplazamiento máximo en el extremo del voladizo resultan una buena aproximación a los resultados predichos analíticamente.



Figura 7.8 Test1. Solido 2D Distribución de la tensión de Cauchy[Pa].

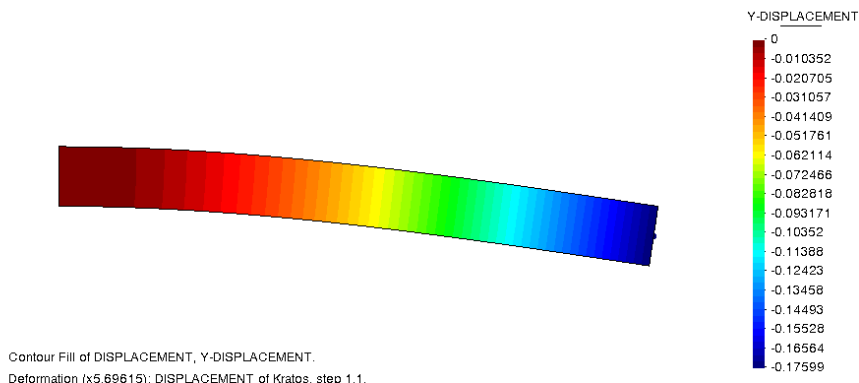


Figura 7.9 Test1. Solido 2D. Desplazamientos verticales sobre la deformada [m].



### 7.3.2.4 Resultados de la simulación. Estructura 3D

En estas simulaciones se ha utilizado un modelo: de estructura 3D, como una lámina de pequeñas deformaciones y como un sólido 3D. En la lámina la geometría 2D se ha discretizado en una malla no estructurada de 1012 elementos del tipo cuadrilátero. En el sólido 3D la geometría se ha discretizado en una malla de 320 hexaedros.

En las siguientes figuras se muestra la malla y los resultados obtenidos mediante la simulación con Kratos y GiD.

Los resultados de la tensión máxima en el empotramiento del desplazamiento máximo en el extremo del voladizo son una buena aproximación a los resultados analíticos esperados.

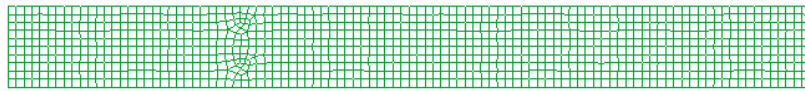


Figura 7.10 Test1. Solido3D. Lamina. Malla



Figura 7.11 Test1. Solido 3D. Tensión de Cauchy [Pa].

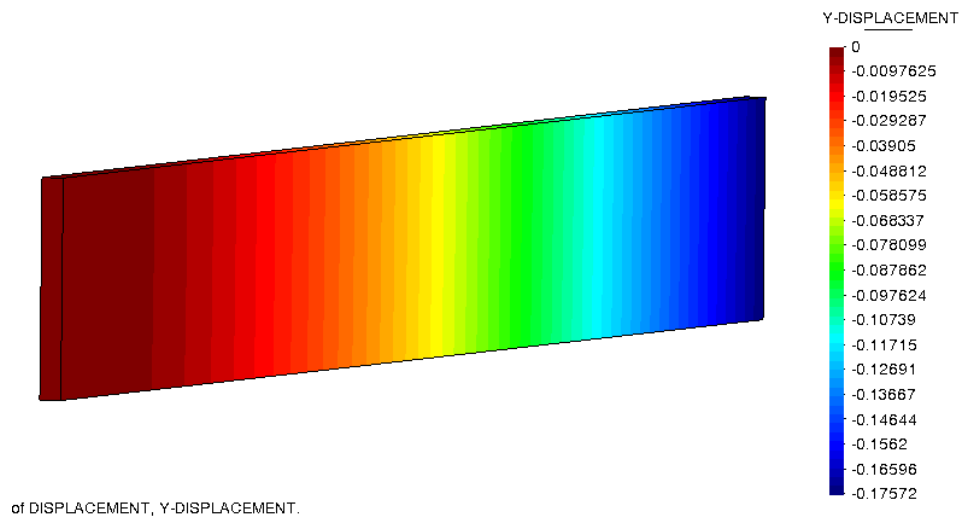


Figura 7.12 Test1.Solido 3D. Distribución de desplazamientos verticales [m].



### 7.3.3 Test2. Pórtico sencillo. Análisis mediante Kratos

#### 7.3.3.1 Descripción del problema

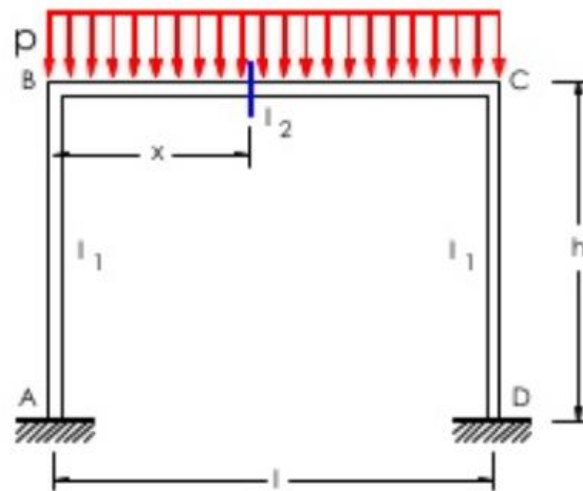


Figura 7.13 Pórtico 2D. Descripción del problema

$$p = 100N, \quad l = 10m, \quad h = \frac{l}{2}, \quad I_1 = I_2, \quad k = \frac{I_2}{I_1} \frac{h}{l} = 0.5$$

#### 7.3.3.2 Resultados analíticos

Se muestran en las siguientes tablas los datos utilizados en la simulación y los resultados analíticos.

Resultados Métodos analíticos		
$V_A = V_D$	$\frac{pl}{2}$	500 N
$H_A = H_D$	$\frac{pl^2}{4h(k+2)}$	200 N
$M_A = M_D$	$\frac{12(k+2)}{pl^2}$	333.33 Nm
$M_B = M_C$	$\frac{6(k+2)}{pl^2}$	666.66 Nm
$M_{MAX} \text{ dintel}$	$\frac{px(l-x)}{2} - \frac{pl^2}{6(k+2)}$	583.33 Nm

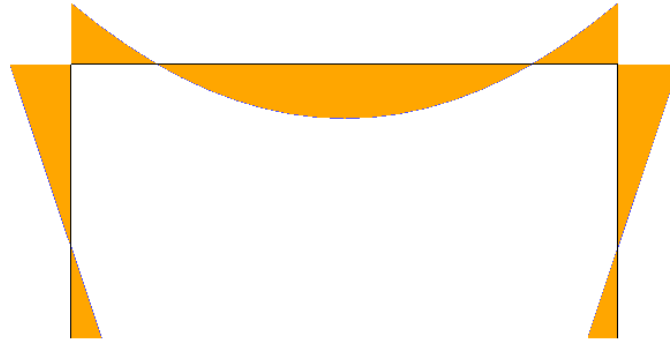
Figura 7.14 Resultados método analítico

#### 7.3.3.3 Resultados de la simulación. Viga 2D



El pórtico se ha discretizado en 40 elementos lineales.

Se muestran en las siguientes figuras los resultados de la simulación



Scalar Line Diagram of MOMENT//lin3 element gp, Z-MOMENT factor 0.001683771.

Figura 7.15 Pórtico 2D. Diagrama de flectores

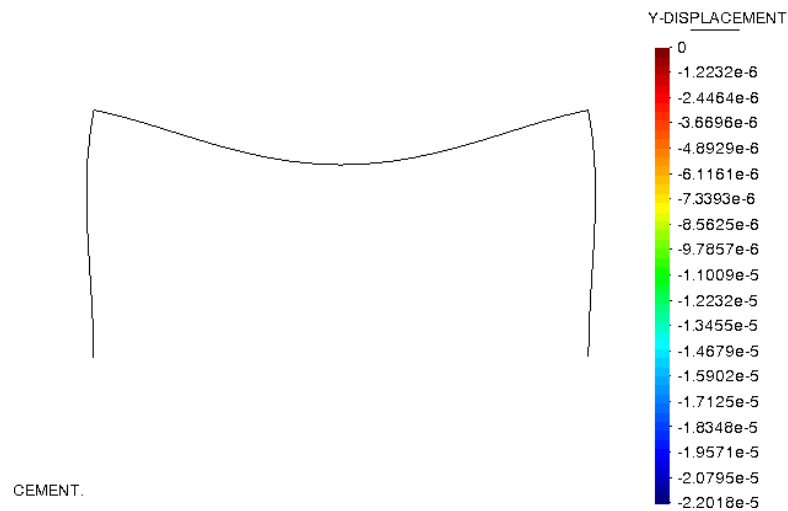


Figura 7.16 Pórtico 2D. Deformada

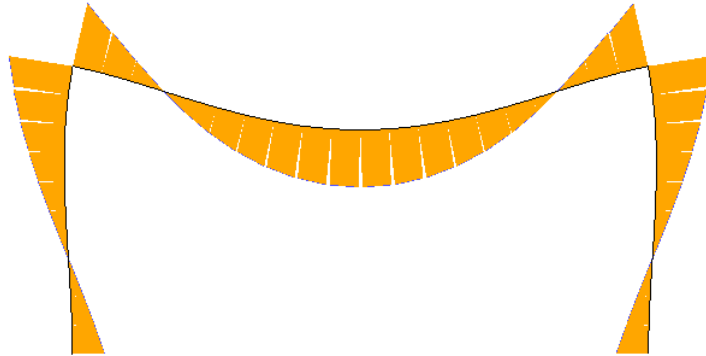


Figura 7.17 Pórtico 2D. Diagrama de flectores sobre la deformada

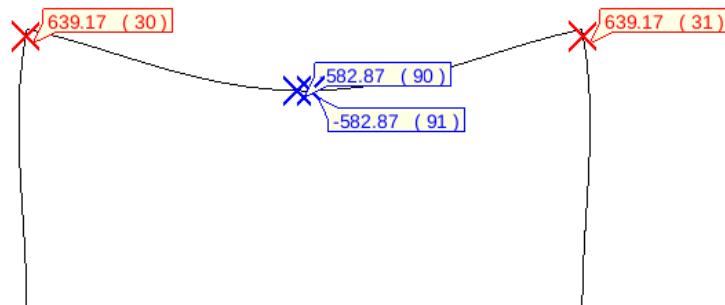
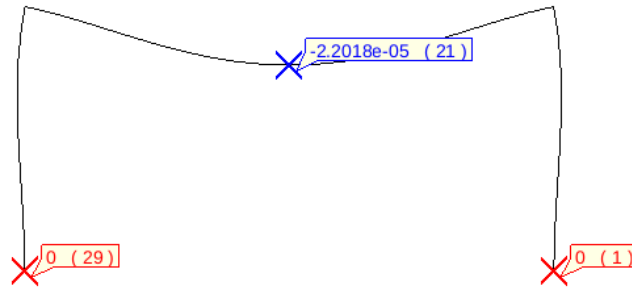


Figura 7.18 Pórtico 2D. Flector máximo y mínimo [Nm]



Show Min Max of DISPLACEMENT, Y-DISPLACEMENT.  
 Deformation (x50778.6): DISPLACEMENT of Kratos, step 1.1.

Figura 7.19 Pórtico 2D. Flechas máxima y mínima [m]

### 7.3.3.4 Resumen de Resultados. Comentarios

En la Figura 7.20 Resultados para el pórtico se muestran un resumen de resultados. Se muestran también que para conseguir una mejor aproximación a los resultados analíticos se ha discretizado la malla en 400 elementos

Resultados	Métodos Analíticos	MEF (malla 40 elementos)	MEF (malla 400 elementos)
$V_A = V_D$	500 N	500 N	500 N
$H_A = H_D$	200 N	198.7 N	199.20 N
$M_A = D$	333.33 Nm	329.52 Nm	330.34 Nm
$M_B = M_C$	666.66 Nm	639.17 Nm	665.65 Nm
$M_{MAX}$ dintel	583.33 Nm	582.87 Nm	584 Nm

Figura 7.20 Resultados para el pórtico

Como bien se dice en [5], es muy importante analizar con espíritu crítico los resultados obtenidos en el análisis por MEF.







## 8 Descripción de los materiales: GLARE

En este apartado se describen los materiales componentes de GLARE y sus propiedades mecánicas. Además, también se describen las ecuaciones constitutivas que se han manejado de cada uno de ellos: Aluminio, Fibra de vidrio, Resina Epoxi (MEF, daño, compuestos, anisotropía, etc.). También se describen las formulaciones numéricas empleadas en los cálculos de GLARE como material compuesto y las alternativas utilizadas (materiales, capas, orientaciones, etc.).

Los materiales se han identificado de la siguiente forma:

Aluminio:

- [AL1.1]. Aluminio. Ecuación constitutiva elástica lineal
- [AL1.2]. Aluminio. Plasticidad perfecta.
- [AL1.3]. Aluminio. Curva de ajuste de Kratos, explicada en capítulo 4.

Compuesto Fibra & Resina epoxi:

- [FG1.1]. Compuesto. Teoría de mezclas SPROM. Elástico lineal
- [FG1.2]. Compuesto. Teoría de mezclas SPROM. Daño isótropo. Ver detalles CL en definición del material.

### 8.1 Aleación Aluminio

#### 8.1.1 Propiedades mecánicas

Las láminas de aluminio de GLARE son una aleación de aluminio 2024. El aluminio 2024 es una aleación del aluminio, con cobre. Se usa donde se necesita alta resistencia, alta relación resistencia / peso, así como una buena resistencia a la fatiga. [29]. En la tabla Tabla 8.1, se muestran las propiedades mecánicas de esta aleación.

Material	Espesor [mm]	Resistencia a tracción [MPa]	Limite elástico [MPa]	Elongación %
Lámina 2024-T3	0.203-6.32	434-441	289	10-15

Tabla 8.1 Propiedades mecánicas aleación aluminio 2024 [1] [30]



En la Tabla 8.2, se muestran las propiedades elásticas del aluminio usado en las simulaciones.

Material	Módulo de Young [GPa]	Coefficiente de Poisson	Límite elástico [MPa]
2024-T3	72.4	0.33	200

Tabla 8.2 Propiedades mecánicas del aluminio 2024-T3 [1]

### 8.1.2 Ecuaciones constitutivas

En la siguientes figuras se muestran los diagramas tensión deformación que hemos utilizado en las simulaciones:

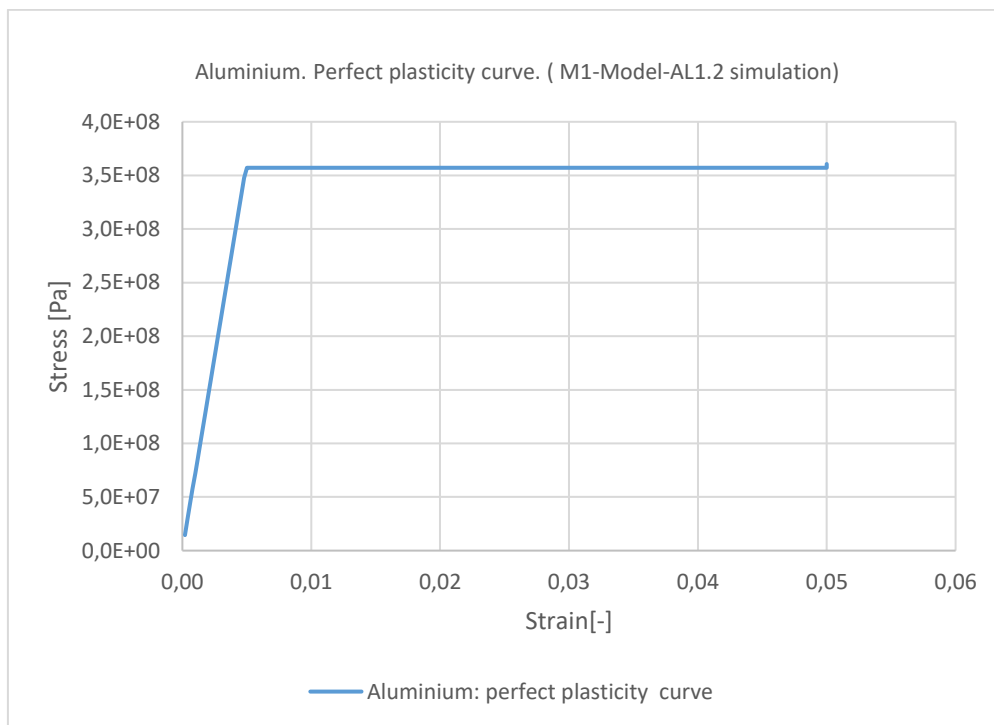


Figura 8.1 Diagrama tensión-deformación. Plasticidad perfecta [AL1.2].

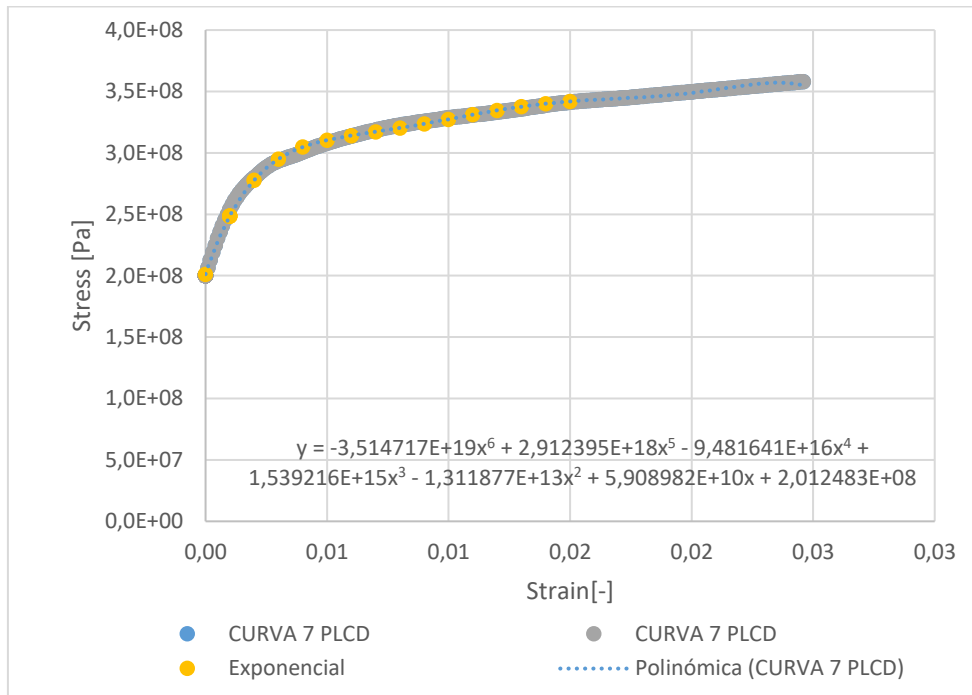


Figura 8.2 Diagramas tensión-deformación del aluminio. La interpolación polinómica es la utilizada como parámetros en la simulación [AL1.3]

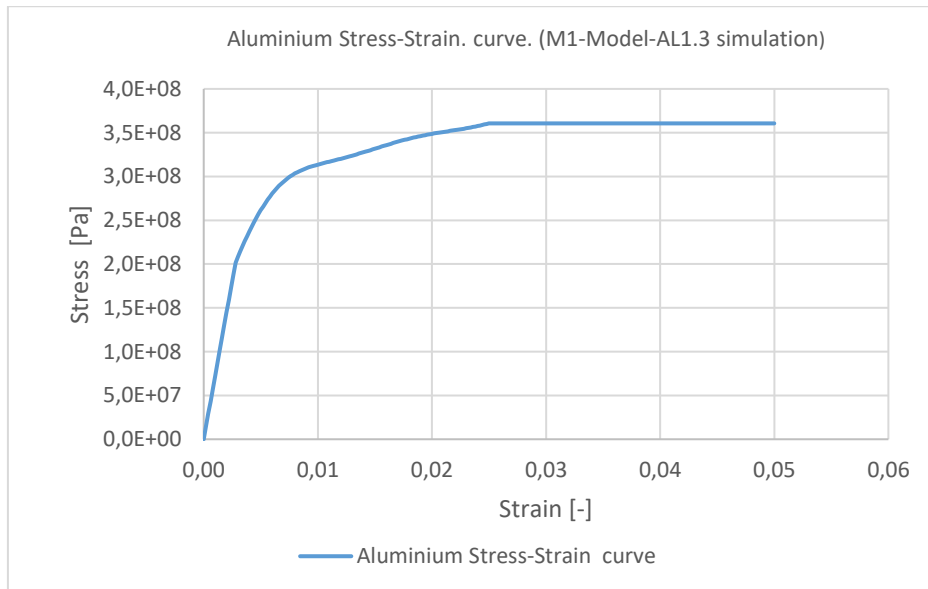


Figura 8.3 Diagrama tensión-deformación. Curva de ajuste interpolación polinómica. Obtenido en la simulación [AL1.3]



## 8.2 Resina Epoxi

En la siguiente tabla se muestran las propiedades mecánicas de la resina epoxi que hemos utilizado en las simulaciones.

Material	Módulo de Young [GPa]	Coefficiente de Poisson	Límite elástico [MPa]	Energía fractura [J/m <sup>2</sup> ]
Resina epoxi FM94	2.9	0.37	28.6	50e6

Tabla 8.3 Propiedades mecánicas resina epoxi [1]

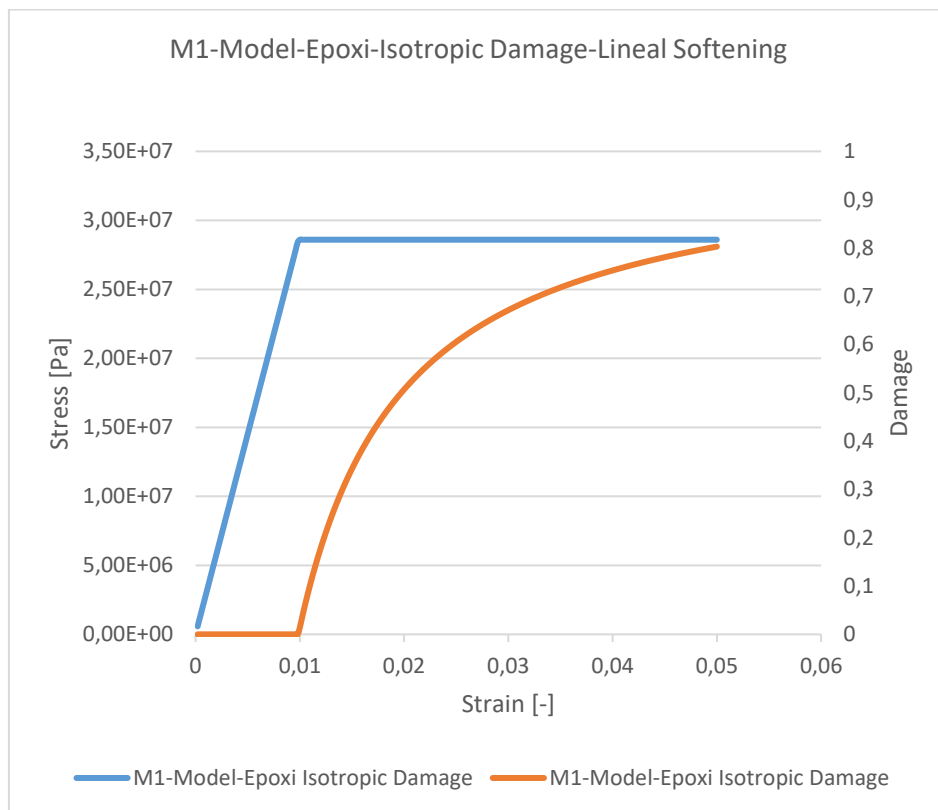


Figura 8.4 Diagrama tensión-deformación y daño-deformación. Resina Epoxi [EX1.2]



### 8.3 Fibra de vidrio

En la siguiente tabla se muestran las propiedades mecánicas de la resina epoxi que hemos utilizado en las simulaciones.

Material	Módulo de Young [GPa]	Coefficiente de Poisson	Límite elástico [MPa]	Energía de fractura [J/m <sup>2</sup> ]
Fibra de vidrio S2	80.18	0.23	3800.0	100e6

Tabla 8.4 Propiedades mecánicas fibra de vidrio [1]

### 8.4 Compuesto (Fibra de Vidrio + Resina Epoxi)

Se muestran en las siguientes figuras los diagramas tensión-deformación correspondientes a las ecuaciones constitutivas del compuesto fibra de vidrio-resina epoxi utilizados en las simulaciones.

Se han analizado las siguientes:

- Modelo elástico-lineal para los dos componentes del compuesto, que llamaremos [FG1.1]
- Modelo de daño isótropo para los dos componentes, que llamaremos [FG1.2]

Cuando el compuesto se carga en su dirección en paralelo, el comportamiento es el que se muestra en la Figura 8.5<sup>2</sup>. La deformación de la fibra y de la matriz es la misma en cada uno de los pasos de carga. La tensión resultante en el compuesto es una media ponderada de las dos (la participación de cada uno es: 40% resina epoxi y 60% fibra de vidrio).

En la Figura 8.6 se muestra el comportamiento de este mismo material cuando se carga en su dirección serie. El tensión resultante en el compuesto es también una media ponderada de las dos. La tensión en la fibra viene condicionada por la tensión en la matriz (condición de iso-tensión).

---

<sup>2</sup> En el diagrama tensión-deformación del compuesto, no se aprecia el cambio en la pendiente cuando se inicia el daño en la resina-epoxi porque las tensiones en la resina son de un orden de magnitud inferior a las de la fibra. Se están visualizando en escalas distintas.

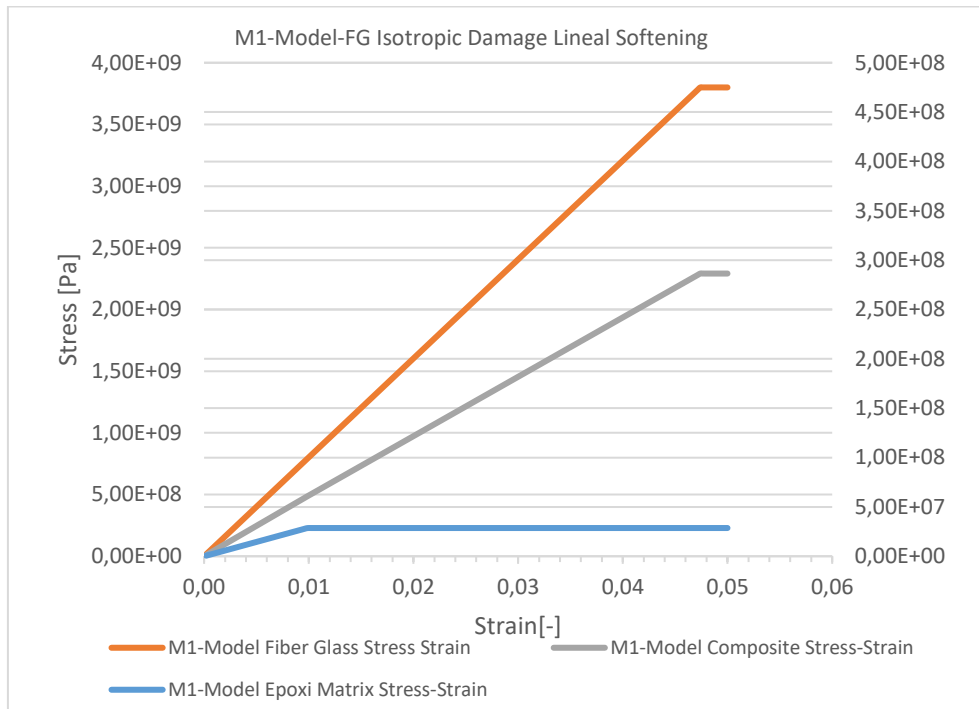


Figura 8.5 Diagrama tensión-deformación: compuesto, fibra de vidrio y resina epoxi en la dirección paralela [FG1.2]

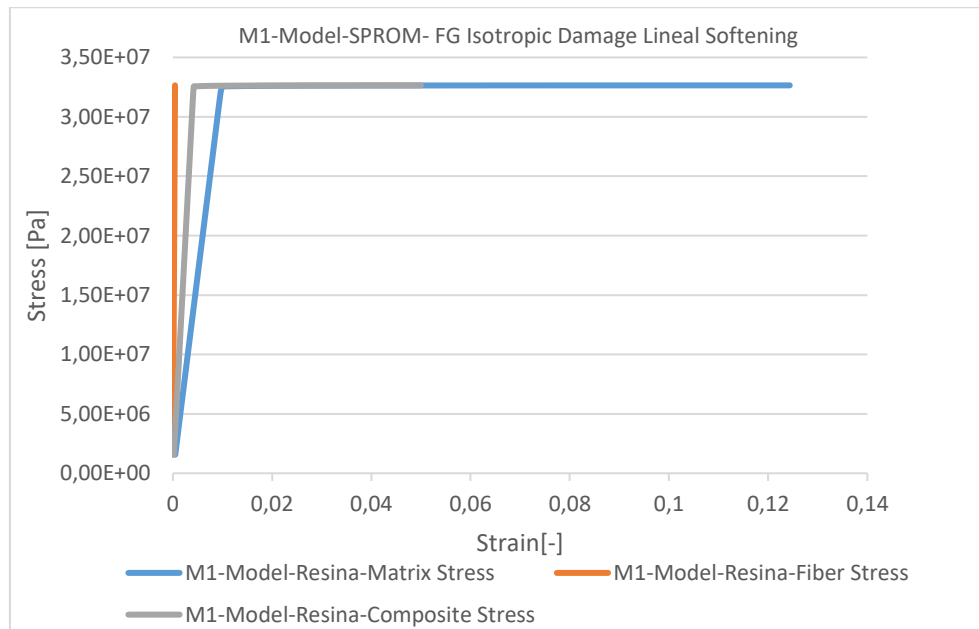


Figura 8.6 Diagrama tensión-deformación: compuesto, fibra de vidrio y resina epoxi en la dirección serie [FG1.2]



## 8.5 GLARE

GLARE es un laminado formado por una aleación de aluminio y láminas de fibra de vidrio. Su nombre es un acrónimo que deriva de las iniciales del inglés de su descripción: "GLASS REinforced aluminium"- GLARE.

Los laminados de fibra y metal han sido desarrollados como materiales compuestos para mejorar las propiedades mecánicas de sus componentes.

En la Figura 8.7 se muestra un laminado típico de GLARE formado por laminas alternativas de una aleación de aluminio y de un compuesto de fibra de vidrio y resina epoxi. Las diferentes orientaciones de la fibra se utilizan para mejorar la eficiencia de la transferencia de carga. [4]

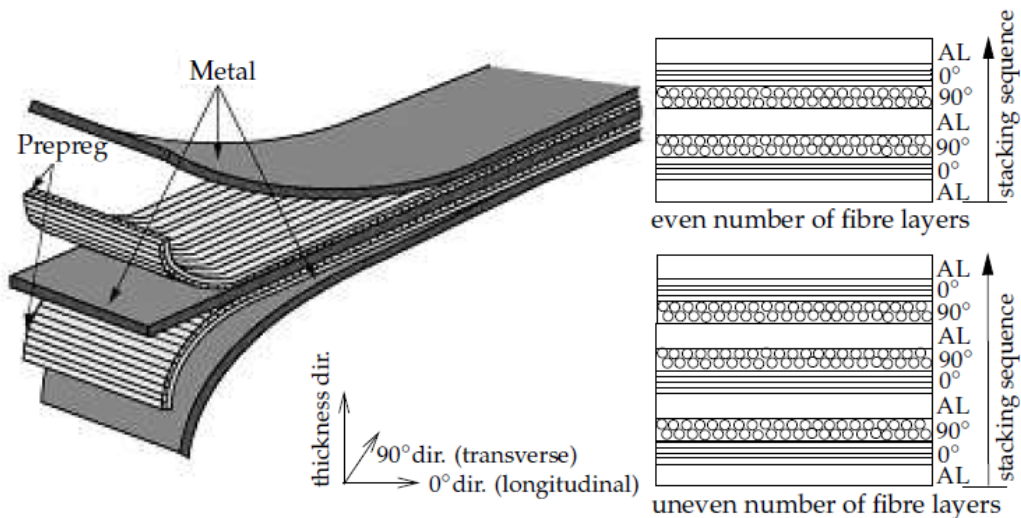


Figura 8.7 Laminado típico de GLARE y diagrama de capas para el caso de un número par e impar de capas de compuesto (fibra-resina epoxi) [1]

Actualmente, hay seis tipos distintos de GLARE estándar que están disponibles comercialmente. En la Tabla 8.5 se muestra las características de cada uno de ellos.

La dirección del laminado de aluminio en la dirección de 0° se define como longitudinal (L) y la dirección perpendicular se define como longitudinal transversal (LT).



Clase	Sub Clase	Aluminio		Compuesto	
		Aleación	Espesor capa [mm]	Orientación fibras	Espesor capa [mm]
Glare 1	-	7475/T671	0.3 - 0.4	Unidireccional 0°	0.254
Glare 2	2A	2024/T3	0.2 - 0.5	0°/0°	0.254
	2B	2024/T3		90°/90°	
Glare 3	-	2024/T3	0.2 - 0.5	0°/90°	0.254
Glare 4	4A	2024/T3	0.2 - 0.5	0°/90°/0°	0.381
	4B			90°/0°/90°	
Glare 5	-	2024/T3	0.2 - 0.5	0°/90°/90°/0°	0.508
Glare 6	6A	2024/T3	0.2 - 0.5	+45°/-45°	0.508
	6B			-45°/45°	0.508

Tabla 8.5 Clases estándar de GLARE [3]

Se describe a continuación el sistema de codificación para identificar a GLARE. Por ejemplo, si un laminado se define como GLARE 4A-3/2-0.3 significa que:

- GLARE: se trata de un laminado de fibra metálica a base de vidrio.
- 4B: de la tabla; la aleación de aluminio 2024-T3 como capa metálica, la orientación de las fibras de vidrio del compuesto es [90°/0°/90°], espesor total de una capa del compuesto 0.381 mm
- 3/2: tres capas de aluminio y dos capas del compuesto (fibra de vidrio-resina)
- el espesor de cada capa de aluminio es de 0.3 mm.

El que se muestra en la Figura 8.7 es GLARE 3- 3/2-0.3.





Nótese que, en las capas de compuesto descritas en la tabla, el espesor es el total de la lámina, p.ej. el GLARE3-3/2-0.3 tendría el layout/espesor que se muestra en la siguiente tabla:

Material		Orientación	Espesor [mm]
aluminio	AL	-	0.3
fibra-resina	FG	0°	0.127
fibra-resina	FG	90°	0.127
Aluminio	AL	-	0.3
fibra-resina	FG	90°	0.127
fibra-resina	FG	0°	0.127
fibra-resina	AL	-	0.3
TOTAL			1.408 mm

Tabla 8.6 Layout de GLARE 3-3/2-0.3

En el siguiente apartado se describe en detalle las simulaciones realizadas con GLARE.





## 9 Ejemplos de Aplicación. Simulaciones Numéricas

El objeto de este trabajo es la modelización numérica de GLARE. No podemos verificar los resultados frente a un modelo analítico. Las simulaciones numéricas se van a validar frente a los resultados experimentales disponibles.

En este apartado se describe en primer lugar la geometría del espécimen utilizado por Hagenbeek en [1] para la realización de un ensayo de tracción de GLARE. El mismo espécimen es el que se ha utilizado para las simulaciones numéricas.

A continuación, se relacionan los resultados experimentales y las simulaciones de [1] [2] [3] con las que vamos a comparar nuestros resultados.

Después se describen los modelos utilizados, son dos modelos distintos, pero equivalentes y finalmente se muestran los resultados obtenidos en las simulaciones.

### 9.1 Geometría del espécimen

#### 9.1.1 Malla

En la Figura 9.1 se muestra una cuarta parte de la geometría de la probeta utilizada en los ensayos de tracción. En las simulaciones se ha utilizado esta cuarta parte, aprovechando las simetrías del modelo. Este mismo modelo, utilizado por Hagenbeek en [1], es el empleado en las simulaciones a modo de validación

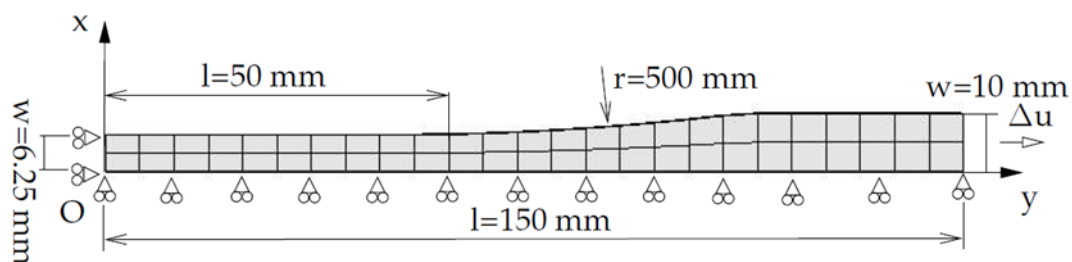


Figura 9.1 Geometría del espécimen utilizado para las simulaciones. Se utilizan para la simulación las simetrías del espécimen. [2]

En las Figura 9.2 y Figura 9.3 se muestra la malla utilizada en las simulaciones numéricas. Se trata de una malla estructurada de  $60 \times 10$ . Se ha hecho una malla más fina en la zona con mayor gradiente de tensiones-deformaciones.



Figura 9.2 Malla de hexaedros utilizada en las simulaciones numéricas que se ha obtenido con GiD

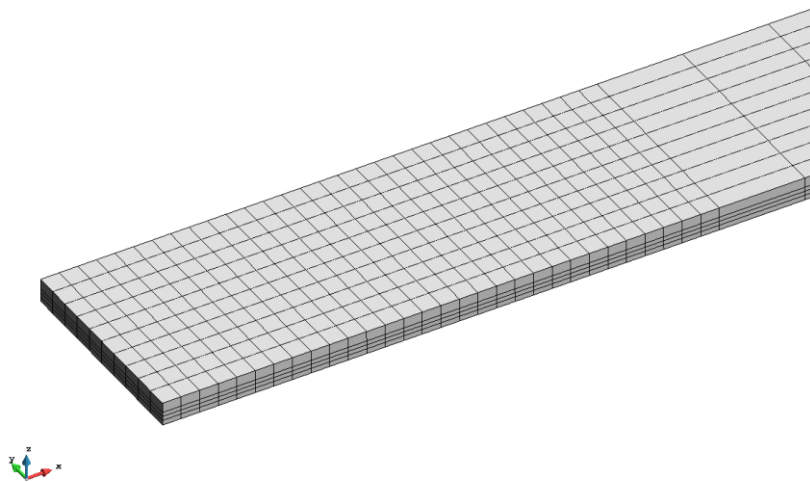


Figura 9.3 Detalle de la malla de tetraedros. Vista en el espesor de la probeta. Se ve la zona con una malla más densa en la zona con gradiente más alto de tensiones.

### 9.1.2 Modelos

Las simulaciones numéricas se han realizado mediante los dos modelos que se describen a continuación:

- Hagenbeek [H1]. Definición de GLARE como varias capas de aluminio y compuesto. Cada capa con su ecuación constitutiva. En el modelo sólo es necesario describir la mitad del material, se aprovecha la simetría. Ver Figura 9.4. La malla está formada por 4 capas de 830 hexaedros cada una, con un total de 3320 hexaedros
- Hagenbeek [H4]. Definición de GLARE como una única capa de material. El material se describe mediante la teoría clásica de mezclas en paralelo, cada material se describe con su ecuación constitutiva, se describen aquí las 7 capas de material de GLARE3 (en la descripción del material se tienen que describir las 7 capas no se puede hacer uso de la simetría del material). Ver Figura 9.5. La malla está formada por 1 capa de 830 hexaedros.

Nota: en ambos modelos se define el material compuesto mediante la teoría de mezclas SPROM, cada material se describe con su ecuación constitutiva.

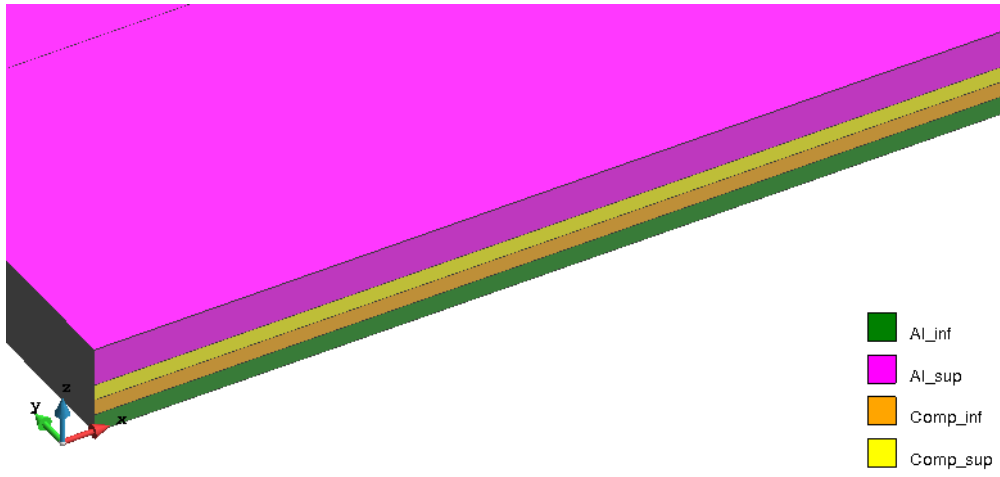


Figura 9.4 Modelo [H1]

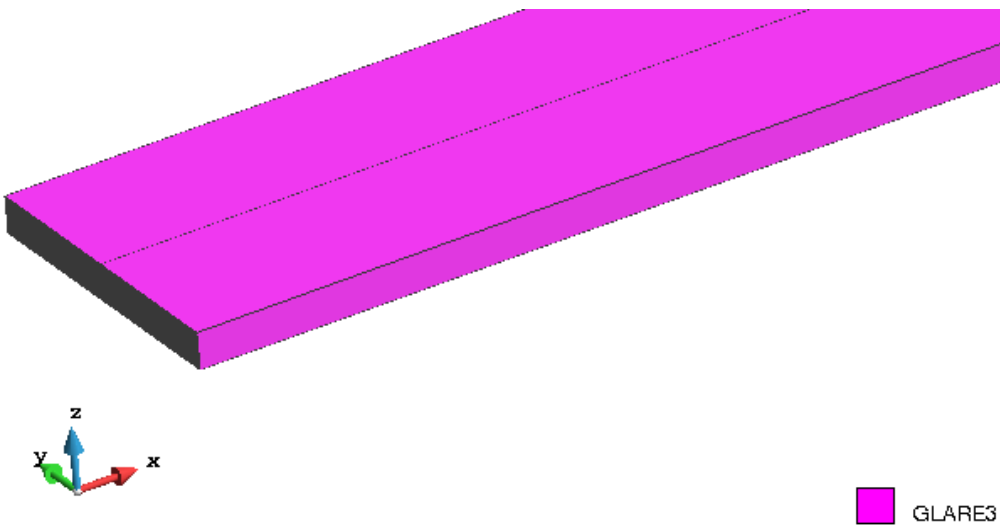


Figura 9.5 Modelo [H4]



### 9.1.3 Condiciones de contorno

En la Figura 9.6 se pueden ver las condiciones de contorno impuestas en el espécimen.

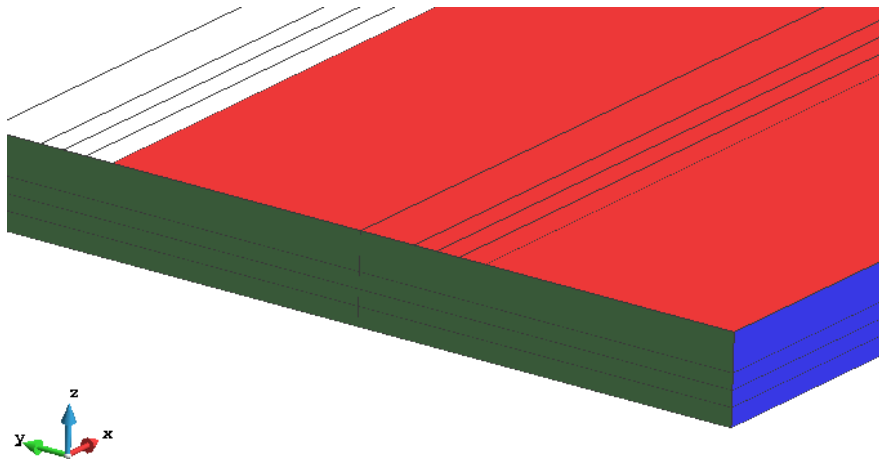


Figura 9.6 Condiciones de contorno

En el plano en color verde se impiden los desplazamiento en la dirección X (simetría YZ). En el plano en color azul, se impiden los desplazamientos en la dirección Y (simetría plano XZ). En el plano en color rojo se impiden los desplazamientos en dirección Z. (simetría plano XY).



En la Figura 9.7 se muestran las condiciones de carga. El plano de color púrpura se impone un desplazamiento incremental según la relación ( $1 \text{ e-}5 \text{ m/s} = 10 \text{ } \mu\text{m/s}$ )

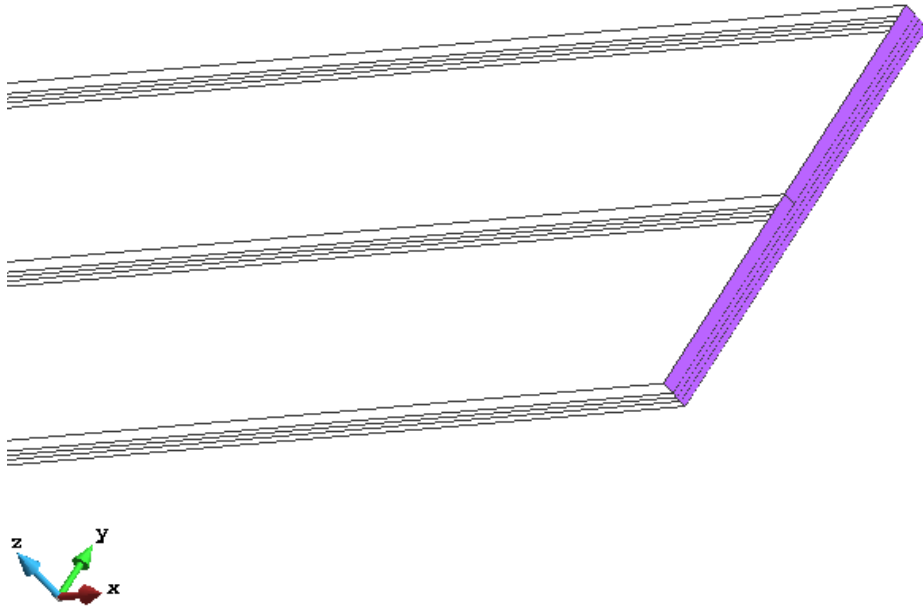


Figura 9.7 Condiciones de carga

## 9.2 Resultados experimentales

En la Figura 9.9 y la Figura 9.9 se muestran los resultados experimentales con GLARE 3, realizados por Hagenbeek [1], con la carga en las direcciones longitudinal (L) y longitudinal transversal (LT).

Los resultados de las simulaciones se comparan con los resultados experimentales a temperatura ambiente (RT- "Room Temperature")

En el apartado 8.5 se explica el significado de las direcciones del laminado longitudinal (L) longitudinal transversa (LT) que se muestran en la figuras.

Estos resultados, son los que vamos a utilizar para la validación de los resultados de las simulaciones.

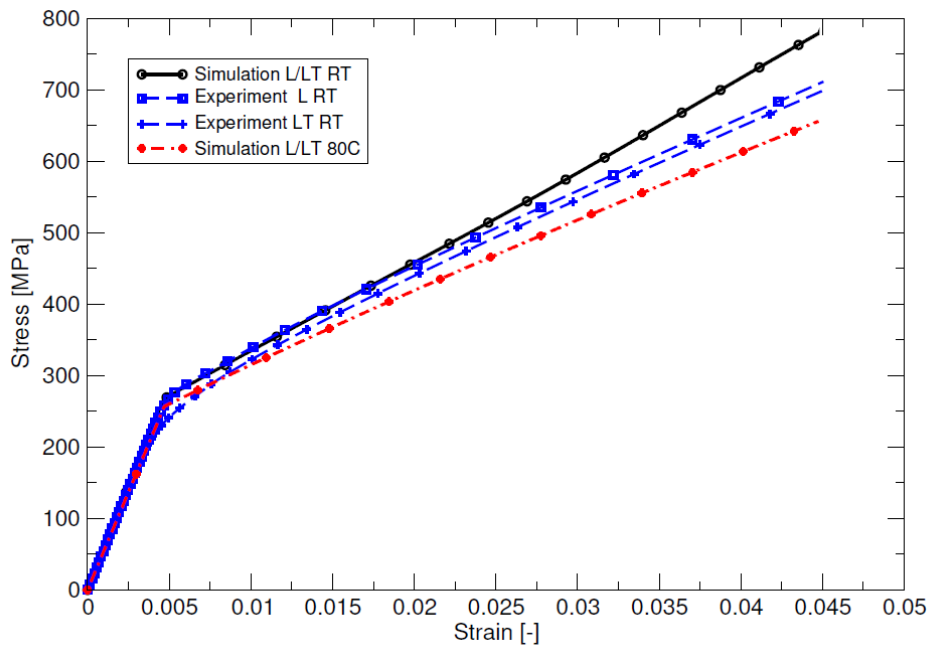


Figura 9.8 Resultados experimentales y de las simulación de Hagenbeek para GLARE 3 3/2 0.3 [1]

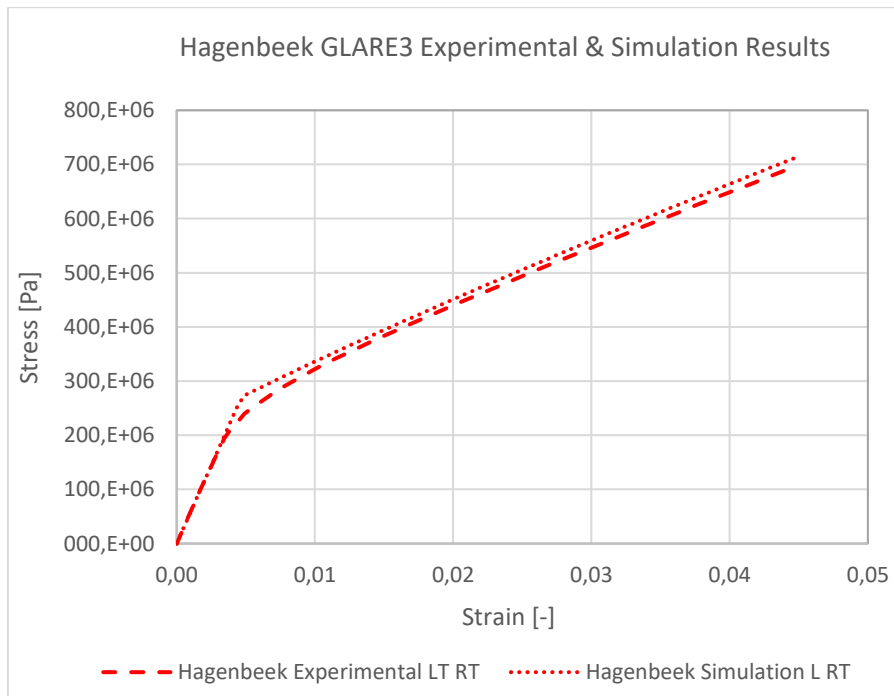


Figura 9.9 Resultados experimentales de Hagenbeek [1]





### 9.3 Formulaciones analizadas. Ecuaciones constitutivas

En este apartado se describen las simulaciones numéricas realizadas con los modelos [H1] y [H4] que se han descrito en el apartado anterior.

### 9.4 Resultados de las simulaciones

Las curvas tensión-deformación que se muestran en el próximo apartado, se han calculado a partir de las reacciones en los nodos de la sección que tiene el desplazamiento impedido y del desplazamiento horizontal en un nodo que se muestran en Figura 9.10. La tensión es un valor medio.

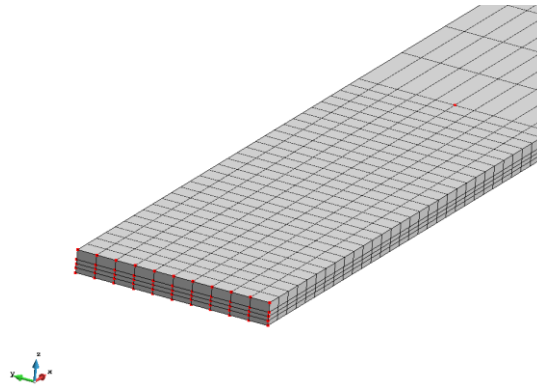


Figura 9.10 Nodos en la malla en los que se calculan las reacciones y el desplazamiento

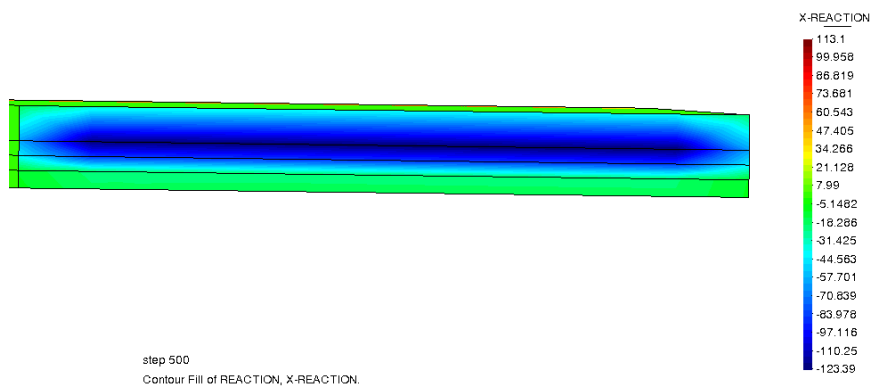


Figura 9.11 Distribución de reacciones en [N]. Nodos desplazamiento impedido



### 9.4.1 Espécimen GLARE H1

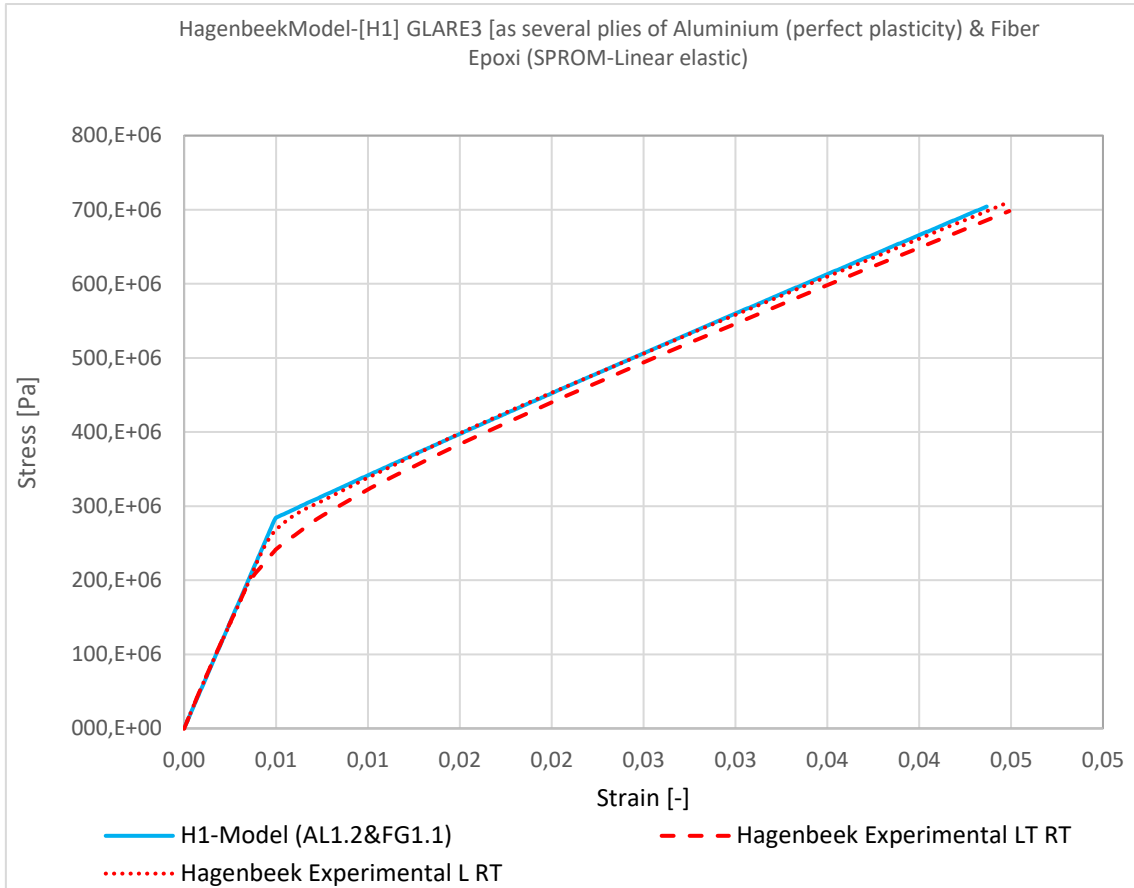


Figura 9.12 H1 Model. GLARE3.Aluminio, plasticidad perfecta [AL1.2]. Compuesto fibra-resina epoxi, lineal-elástico [FG1.1]

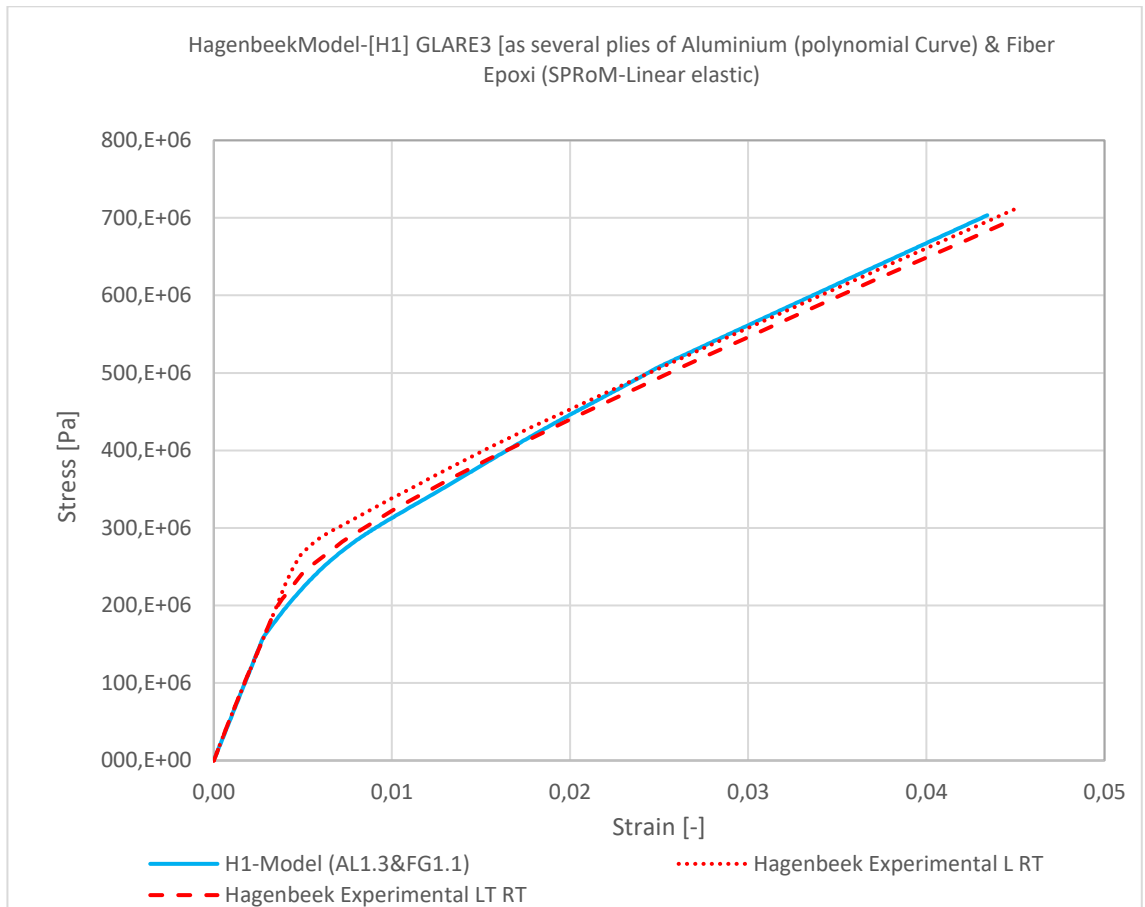


Figura 9.13 H1 Model. GLARE3. Aluminio, curva polinómica [AL1.3]. Compuesto fibra-resina epoxi, lineal-elástico [FG1.1]

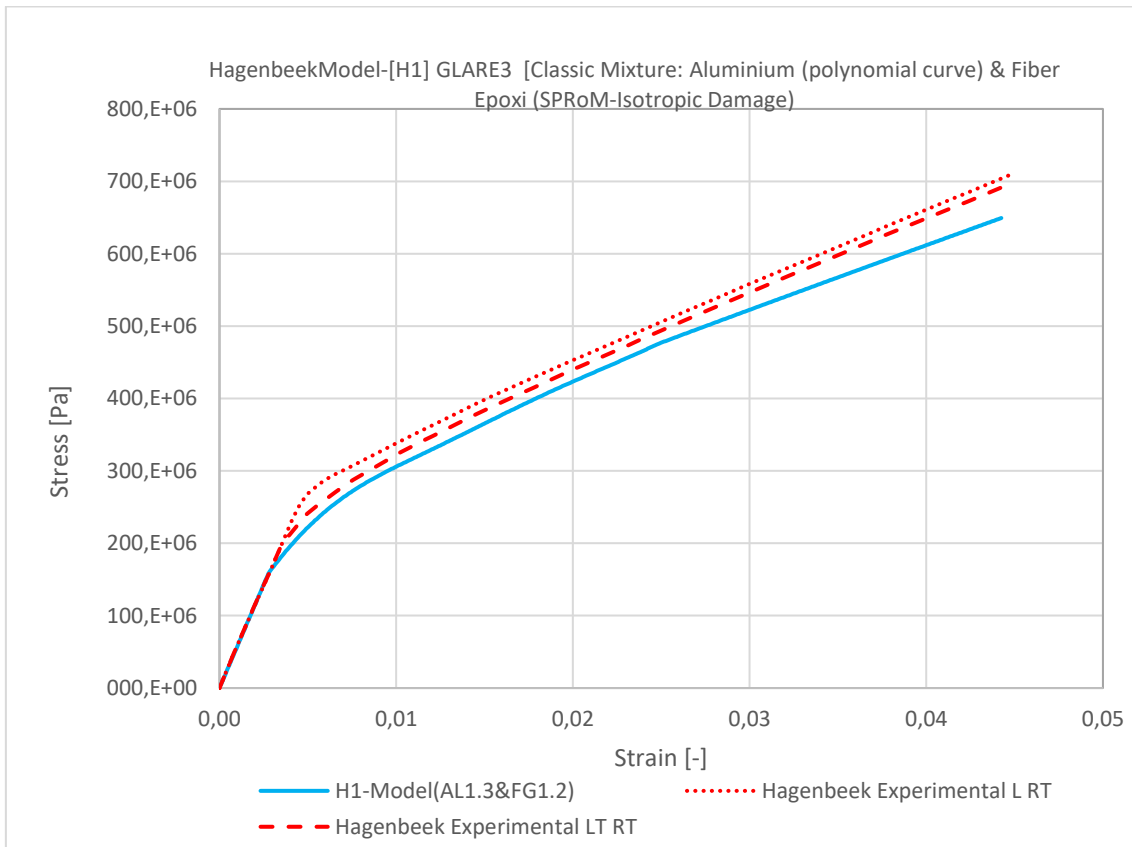


Figura 9.14 H1 Model. GLARE3. Aluminium curva polinómica [AL1.3]. Compuesto fibra-resina epoxi, daño isotrópico [FG1.2]



En la Figura 9.15 se comparan todos los resultados de las simulaciones para distintas ecuaciones constitutivas entre sí.

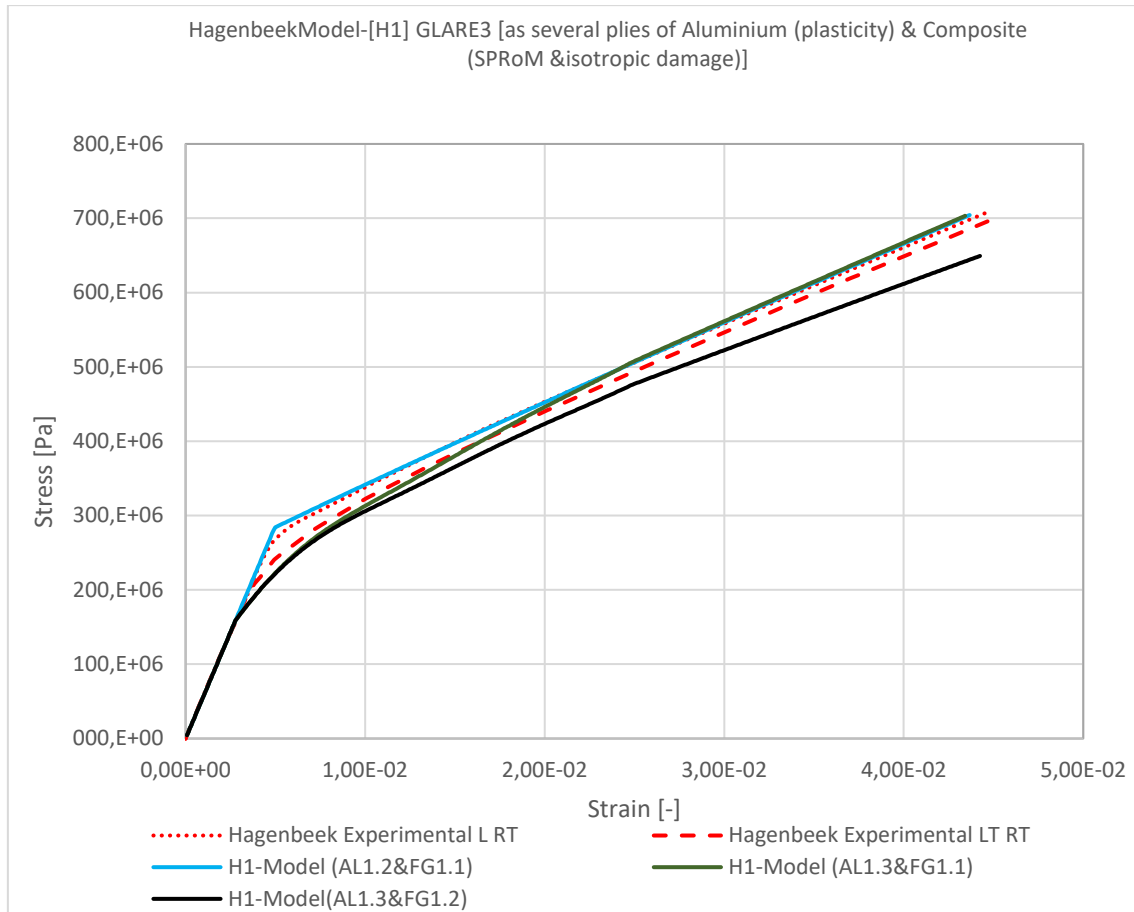


Figura 9.15 H1 Model. GLARE3.Aluminio [AL1.2] y Compuesto [FG1.1] vs GLARE3 Aluminio [AL1.3] y Compuesto [FG1.1] vs Aluminio [AL1.3] y Compuesto [FG1.2]

Hay un buen ajuste vs los resultados experimentales para deformaciones inferiores al 2%. Pero por encima del 2%, las simulaciones se separan, por exceso o por defecto, de los resultados experimentales.



### 9.4.2 Espécimen GLARE H4

Los resultados del espécimen H4 son los mismos que para el espécimen H1, por lo que no aportan información adicional.

Se incluye sólo la Figura 9.16 con el resumen de los resultados de las simulaciones realizadas.

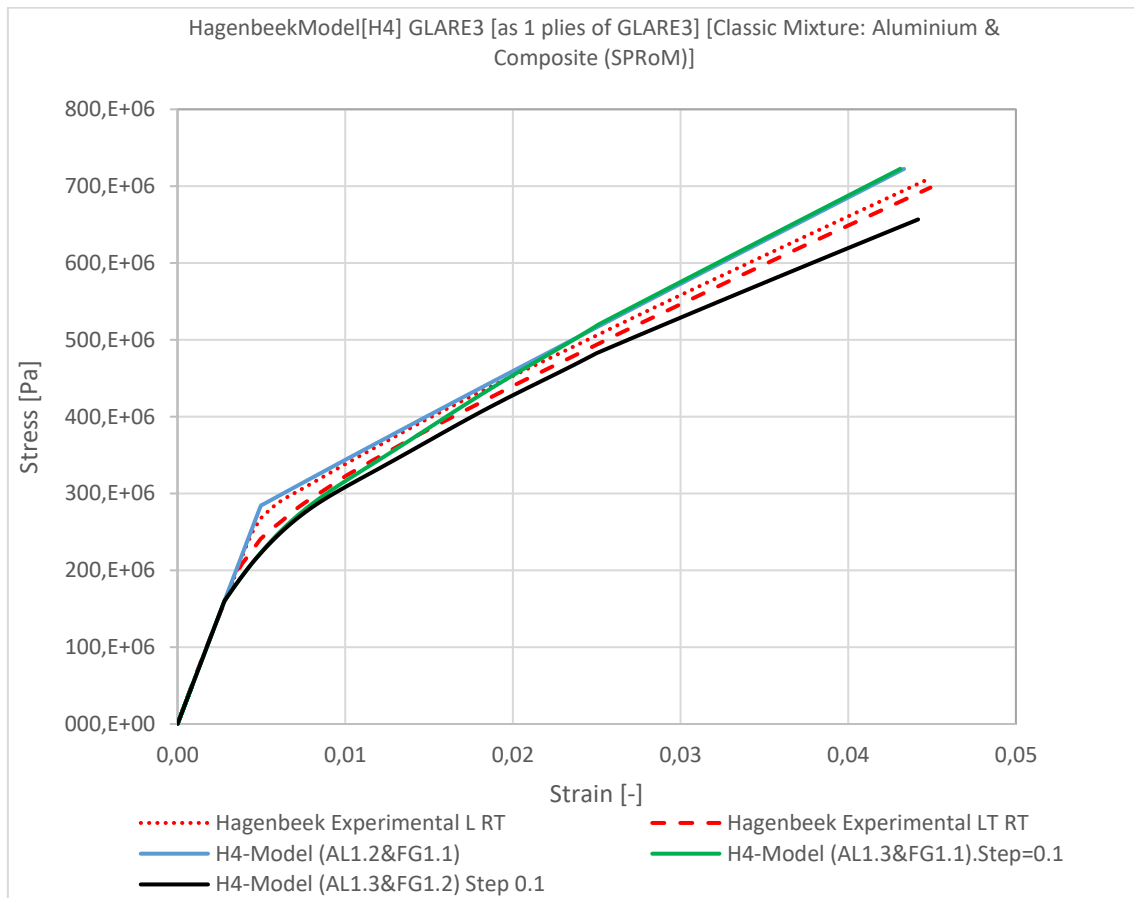


Figura 9.16 H4 Model. GLARE3.Aluminio [AL1.2] y Compuesto [FG1.1] vs GLARE3 Aluminio [AL1.3] y Compuesto [FG1.1] vs Aluminio [AL1.3] y Compuesto [FG1.2]

En el Anexo B, se muestran algunos resultados de las simulaciones generados mediante GiD [10].



## 9.5 Resumen

Las simulaciones se han realizado con las geometrías y con los materiales que se describen a continuación. Los ficheros están disponibles en soporte electrónico.

### 9.5.1 Simulaciones

Hay 2 familias de simulaciones. Una para cada una de las geometrías: [H1] y [H4]. Para cada simulación hay definido una única descripción de los parámetros de simulación (parámetros del proyecto). Para cada simulación, antes de ejecutarla, se edita el fichero y se cambia en el proyecto el nombre del fichero de descripción de los materiales. Los resultados de la simulación son:

- "Materiales".bin: Resultados de la simulación para el postproceso. (No están en los zip, ficheros muy pesado)
- "Materiales".rea: Resultados con las reacciones y desplazamientos, tensiones y deformaciones en nudos característicos de las geometrías. (Se utiliza un simulador distinto para cada geometría, los nudos característicos son los mismos, pero tienen distinta identificación)
- "Materiales".xlxs: Excel con tablas de resultados y diagramas tensión-deformación comparados con los resultados de Hagenbeek. (1 excel x material x geometría)
- "modelo".xlxs: Excel con los resultados obtenidos para un modelo con las simulaciones de materiales realizadas. (1 excel x modelo).

### 9.5.2 Resultados

- Los diagramas tensión deformación obtenidos con las distintas ecuaciones constitutivas están muy próximos a los resultados experimentales disponibles. Las simulaciones realizadas con [AL1.2] son muy coincidentes con la simulación de [Hagenbeek 2005] L RT. Las simulaciones realizadas con [AL1.3] está más cerca de los resultados experimentales en la zona de deformaciones en las que se inicia la fluencia  $\varepsilon < 2\%$  (un poco por debajo) y se acerca a la simulación con [AL1.1] para deformaciones mayores.
- Los diagramas tensión-deformación obtenidos con la geometría [H4] son parecidos pero distintos de los obtenidos con la geometría [H1]. Las diferencias en términos de tensión van creciendo a medida que avanza la simulación y llegan al 2% para deformaciones del 4%. (ver tabla comparativa en simulación [H1]-[AL1.2]-[FG1.1])







## 10 Conclusiones y trabajos futuros

En este apartado hacemos recopilación de todas las conclusiones del estudio. Al final del apartado se recogen una serie de trabajos que se proponen hacer como continuación del trabajo realizado, así como una lista de mejoras en la implementación de las formulaciones de la teoría de mezclas.

La principal aportación de este trabajo es la utilización de la teoría de mezclas serie-paralelo SPROM en la formulación del comportamiento del compuesto de GLARE.

### 10.1 Conclusiones

- La formulación “ParallelRuleOfMixtures” (Teoría de mezclas en paralelo) simplifica las tareas de diseño con GLARE. Permite definir el material como un todo sin tener que definir geoméricamente cada una de las capas del laminado individualmente.
- En las simulaciones realizadas para las geometrías [H1] y [H4] ha dado buenos resultados. No se han observado diferencias significativas en los resultados.
- En las simulaciones con la geometría hay un buen ajuste en los tramos iniciales, con deformaciones por debajo del 2%, pero se produce una divergencia de los resultados esperados para deformaciones mayores.
- La formulación “SerialParallelRuleOfMixtures” (Teoría de mezclas serie-paralelo) modela muy bien el comportamiento del compuesto (Fibra de vidrio & Resina epoxi). Los resultados obtenidos se ajustan a las simulaciones de Hagenbeek. Modelo bien calibrado. En la simulación con [A1.2][FG1.1] se aproxima muy bien a la simulación de [3] en todo el tramo de deformaciones. En la simulación [[A1.3][FG1.1] mejora los resultados, aproxima mejor que la simulación de [Hagenbeek 2005] con los resultados experimentales en el tramo de deformaciones inferiores al 2% y mantiene el mismo nivel de aproximación en el tramo de deformaciones mayores del 2%.

### 10.2 Trabajos futuros

La evolución natural de este trabajo pasa por analizar el comportamiento de los materiales en la zona de deformaciones mayores al 2% y conseguir una mejor aproximación con los resultados experimentales.

El estudio se ha centrado en el análisis frente a esfuerzos de tracción y carga estática, una evolución, natural también, pasa por analizar el comportamiento frente a carga estática a flexión y frente a carga cíclica a fatiga [31] [32].

Las mejoras en la implementación de la solución numérica pueden pasar por generalizar la identificación de los componentes en la formulación serie-paralelo, a identificadores genéricos.



Actualmente se pueden identificar los dos componentes típicos de estos compuestos: fibra-matriz y generalizar esta identificación también a la formulación de mezclas en paralelo.



## 11 Referencias

- [1] M. HAGENBEEK, «Characterisation of Fibre Metal Laminates,» Tesis Doctoral. Technische Universiteit Delft, Delf, 2005.
- [2] M. Hagenbeek, S. Sinke y C. van Hengel, «ANALYTICAL MODELLING OF STRESS-STRAIN CURVES FOR FIBRE METAL LAMINATES,» July 2003.
- [3] M. HAGENBEEK, C. VAN HENGEL, O. J. V. BOSKER y C. A. J. R., «Static Properties of Fibre Metal Laminates,» *Applied Composite Materials*, 2003.
- [4] P. Soltani, M. Keikhosravy, R. Oskoueï y S. C., «Studying the Tensile Behaviour of GLARE Laminates:A Finite Element Modelling Approach,» *Springer Science+Business Media B.V.*, 2010.
- [5] E. Oñate, *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos*, Barcelona: CIMNE, 2016.
- [6] X. Martínez, S. Oller y F. Rastellini, «Análisis no-lineal de materiales compuestos mediante la teoría de mezclas serie paralelo,» *Research Gate*, 2014.
- [7] V. Mataix Ferrándiz, P. Bucher, R. Rossi, J. Cotela, J. M. Carbonell, R. Zorrilla y R. Tosi, «KratosMultiphysics (Version 8.1),» (2020, November 27).
- [8] P. Dadvand, R. Rossi y E. Oñate, «An Object-oriented Environment for Developing Finite Element Codes for Multi-disciplinary Applications.,» *Arch Computat Methods Eng* 17, 253–297 (2010)., 2010.
- [9] P. Dadvand, R. Rossi, M. Gil, X. Martorell, J. Cotela, E. Juanpere, S. Idelsohn y E. Oñate, «Migration of a generic multi-physics framework to HPC environments.,» *Computers & Fluids*. 80. 301–309., 2012.
- [10] CIMNE, «GiD The personal pre & post processor,» [En línea]. Available: <https://www.gidhome.com/>. [Último acceso: 2020].
- [11] S. Timoshenko y J. Goodier, *Theory of elasticity.*, New York, 1951.
- [12] F. RASTELLINI, *Modelización numérica de la no-linealidad constitutiva de laminados compuestos.*, Barcelona: Departament de Resistència de Materials i Estructures a l'Enginyeria (RMEE) - UPC, 2006.
- [13] E. CAR, *Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*, Barcelona: Departament de Resistència de Materials i Estructures a l'Enginyeria (RMEE) - UPC, 2000.



- [14] S. Jiménez Reyes, «Analysis of Post-Tensioned Structures,» Tesis Final Master UPC, Barcelona, 2018.
- [15] Wiki, «Rule of Mixtures,» [En línea]. Available: [https://en.wikipedia.org/wiki/Rule\\_of\\_mixtures](https://en.wikipedia.org/wiki/Rule_of_mixtures). [Último acceso: 2020].
- [16] C. Trusdell y R. Toupin, *The Classical Field Theories*, Berlin, Germany: Springer Verlag, 1960.
- [17] E. Car, S. Oller y E. Oñate, *Tratamiento numérico de los Materiales Compuestos*, Barcelona: Monografía CIMNE nº 57, Julio 2000.
- [18] S. Oller, *Dinámica no-lineal*, Barcelona: CIMNE, 2002.
- [19] P. Kelly, «Chapter 8. Plasticity,» de *Solid Mechanics.Part II. Engineering Solid Mechanics*, 2020.
- [20] P. Prat, *Ecuaciones Constitutivas Elasticidad y Plasticidad*, Barcelona: UPC, 2006.
- [21] WIKI, «von Mises yield criterion,» [En línea]. Available: [https://en.wikipedia.org/wiki/Von\\_Mises\\_yield\\_criterion](https://en.wikipedia.org/wiki/Von_Mises_yield_criterion). [Último acceso: 2020].
- [22] J. Simo y J. Ju, «Strain\_and\_stress-based\_continuum\_damage\_models,» 1987.
- [23] X. Oliver, M. Cervera, J. Lubliner y S. Oller, «Isotropic Damage Model,» 1990.
- [24] E. Chaves, *Mecánica del Medio Continuo. Modelos Constitutivos*, Barcelona: CIMNE, 2014.
- [25] A. Cornejo Velázquez, «Numerical Simulation of Multi-Fracture in Materials Using a Coupled FEM-DEM,» Tesis Final Master UPC, Barcelona, 2017.
- [26] M. Casteleiro, «Solución Numérica de Problemas No Lineales,» de *Apuntes C.Numerico. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos*, Barcelona, 1983.
- [27] Kratos, «KratosMultiphysics,» [En línea]. Available: <https://github.com/KratosMultiphysics/Kratos/wiki>.
- [28] E. Oñate, *Cálculo de estructuras con materiales compuestos por el método de elementos finitos*, Barcelona: CIMNE, 2002.
- [29] WIKI, «2024 Aluminium alloy,» [En línea]. Available: [https://en.wikipedia.org/wiki/2024\\_aluminium\\_alloy](https://en.wikipedia.org/wiki/2024_aluminium_alloy). [Último acceso: 12 2020].
- [30] ALCOA MILL PRODUCTS, INC., «ALLOY 2024 SHEET AND PLATE,» [www.millproducts-alcoa.com](http://www.millproducts-alcoa.com), BETTENDORF, IOWA.
- [31] L. G. Barbu, S. Oller, X. Martínez y A. Barbat, «High cycle fatigue simulation: A new stepwise load-advancing strategy».



- [32] L. G. Barbu, S. Oller, X. Martínez y A. H. Barbat, «High-cycle fatigue constitutive model and a load-advance strategy for the analysis of unidirectional fiber reinforced composites subjected to longitudinal loads».
- [33] S. Ebrahim Moussavi-Torshizia, S. Dariushic, M. Sadighi y P. Safarpoura, «A study on tensile properties of a novel fiber/metal laminates,» *Materials Science and Engineering A*, 2009.
- [34] G. Wu y J.-M. Yang, «Analytical modelling and numerical simulation of the nonlinear deformation of hybrid fibre–metal laminates,» *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng*, 2004.
- [35] H. Laribou, «Prediction of Tensile Stress-Strain Behavior of Natural Fibers Metal Laminates,» *Scholars Academic and Scientific Publisher*, 2018.
- [36] X. Martínez, «Micro-Mechanical Simulation of Composite Materials using Serial/Paralell Mixing theory,» Tesis Doctoral UPC, Barcelona, 2008.
- [37] X. Oliver Olivella, *Mecánica de medios continuos para ingenieros*, Barcelona: Ediciones UPC, 2000.
- [38] E. Chaves, *Mecánica del Medio Continuo. Conceptos Básicos*, Barcelona: CIMNE, 2012.





## 12 Anexo A. Descripción Materiales Kratos

### 12.1 Aluminio

#### 12.1.1 Aluminio [AL1.2]

```
{
  "properties": [{
    "model_part_name": "Structure.Parts_Parts_Autol",
    "properties_id": 1,
    "Material": {
      "constitutive_law": {
        "name": "SmallStrainIsotropicPlasticity3DVonMisesVonMises",
        "yield_surface": "VonMises",
        "plastic_potential": "VonMises"
      },
      "Variables": {
        "DENSITY": 2780.0,
        "YOUNG_MODULUS": 72.4e09,
        "POISSON_RATIO": 0.33,
        "YIELD_STRESS_TENSION": 357.0e6,
        "YIELD_STRESS_COMPRESSION": 296.0e6,
        "FRACTURE_ENERGY": 1.0e15,
        "HARDENING_CURVE": 3
      },
      "Tables": {}
    }
  ]
}
```

#### 12.1.2 Aluminio [AL1.3]

```
{
  "properties": [{
    "model_part_name": "Structure.Parts_Parts_Autol",
    "properties_id": 1,
    "Material": {
      "constitutive_law": {
        "name": "SmallStrainIsotropicPlasticity3DVonMisesVonMises",
        "yield_surface": "VonMises",
        "plastic_potential": "VonMises"
      },
      "Variables": {
        "DENSITY": 2780.0,
        "YOUNG_MODULUS": 72.4e9,
        "POISSON_RATIO": 0.33,
        "YIELD_STRESS_TENSION": 201.0e6,
        "YIELD_STRESS_COMPRESSION": 201.0e6,
        "FRACTURE_ENERGY": 1.0e15,
        "HARDENING_CURVE": 4,
        "CURVE_FITTING_PARAMETERS": [2.01E+08, 5.91E+010, -1.31E+013, 1.54E+15, -
9.48E+16, 2.91E+18, -3.51E+19],
        "TANGENCY_REGION2": false,
        "PLASTIC_STRAIN_INDICATORS": [0.020, 0.040]
      },
      "Tables": {}
    }
  ]
}
```



## 12.2 Compuesto

### 12.2.1 Epoxi [EX1.2]

```
{
  "properties": [{
    "model_part_name": "Structure.Parts_Parts_Auto1",
    "properties_id": 121,
    "Material": {
      "constitutive_law": {
        "name": "SmallStrainIsotropicDamage3DVonMisesVonMises"
      },
      "Variables": {
        "DENSITY": 2000.0,
        "YOUNG_MODULUS": 2900E6,
        "POISSON_RATIO": 0.37,
        "YIELD_STRESS": 28.6E6,
        "FRACTURE_ENERGY": 50E6,
        "SOFTENING_TYPE": 0
      },
      "Tables": {}
    }
  ]
}
```

### 12.2.2 Fibra de vidrio & Epoxi [FG1.2]

```
{
  "properties": [{
    "model_part_name": "Structure.Parts_Parts_Auto1",
    "properties_id": 12,
    "Material": {
      "constitutive_law": {
        "name": "SerialParallelRuleOfMixturesLaw",
        "combination_factors": [0.4, 0.6],
        "parallel_behaviour_directions": [1, 0, 0, 0, 0, 0]
      },
      "Variables": {},
      "Tables": {}
    },
    "sub_properties": [{
      "properties_id": 121,
      "Material": {
        "constitutive_law": {
          "name": "SmallStrainIsotropicDamage3DVonMisesVonMises"
        },
        "Variables": {
          "DENSITY": 2000.0,
          "YOUNG_MODULUS": 2900E6,
          "POISSON_RATIO": 0.37,
          "FRACTURE_ENERGY": 50E6,
          "YIELD_STRESS": 28.6E6,
          "SOFTENING_TYPE": 0,
          "SERIAL_PARALLEL_EQUILIBRIUM_TOLERANCE": 1e-3
        },
        "Tables": {}
      }
    ]
  }, {
    "properties_id": 122,
    "Material": {
      "constitutive_law": {
```





```
        "name": "SmallStrainIsotropicDamage3DVonMisesMohrCoulomb"  
    },  
    "Variables": {  
        "DENSITY": 2000.0,  
        "YOUNG_MODULUS": 80180E6,  
        "POISSON_RATIO": 0.23,  
        "FRACTURE_ENERGY": 100E6,  
        "YIELD_STRESS": 3800E6,  
        "SOFTENING_TYPE": 0,  
        "TANGENT_OPERATOR_ESTIMATION": 3  
    },  
    "Tables": {}  
  }  
}]]  
}
```



## 12.3 GLARE

Se muestra a continuación las descripciones de material para GLARE para las formulaciones [H1] y [H4]

### 12.3.1 GLARE3 [H1]

```
{
  "properties": [{
    "model_part_name": "Structure.Parts_Al_sup",
    "properties_id": 1,
    "Material": {
      "constitutive_law": {
        "name": "SmallStrainIsotropicPlasticity3DVonMisesVonMises"
      },
      "Variables": {
        "DENSITY": 2780.0,
        "YOUNG_MODULUS": 72400E6,
        "POISSON_RATIO": 0.33,
        "FRACTURE_ENERGY": 1.0E15,
        "YIELD_STRESS_TENSION": 200.0E6,
        "YIELD_STRESS_COMPRESSION": 200E6,
        "HARDENING_CURVE": 4,
        "CURVE_FITTING_PARAMETERS": [2.00E08, 5.91E+10, -1.31E13, 1.54E15, -
9.48E16, 2.91E18, -3.51E+19],
        "PLASTIC_STRAIN_INDICATORS": [0.02, 0.04]
      },
      "Tables": {}
    }
  }, {
    "model_part_name": "Structure.Parts_Al_inf",
    "properties_id": 2,
    "Material": {
      "constitutive_law": {
        "name": "SmallStrainIsotropicPlasticity3DVonMisesVonMises"
      },
      "Variables": {
        "DENSITY": 2780.0,
        "YOUNG_MODULUS": 72400E6,
        "YIELD_STRESS": 200E6,
        "POISSON_RATIO": 0.33,
        "FRACTURE_ENERGY": 1.0E15,
        "YIELD_STRESS_TENSION": 200.0E6,
        "YIELD_STRESS_COMPRESSION": 200E6,
        "HARDENING_CURVE": 4,
        "CURVE_FITTING_PARAMETERS": [2.00E08, 5.91E+10, -1.31E13, 1.54E15, -
9.48E16, 2.91E18, -3.51E+19],
        "PLASTIC_STRAIN_INDICATORS": [0.02, 0.04]
      },
      "Tables": {}
    }
  }, {
    "model_part_name": "Structure.Parts_Comp_sup",
    "properties_id": 3,
    "Material": {
      "constitutive_law": {
        "name": "SerialParallelRuleOfMixturesLaw",
        "combination_factors": [0.4, 0.6],
        "parallel_behaviour_directions": [1, 0, 0, 0, 0, 0]
      },
      "Variables": {},
      "Tables": {}
    }
  }
}
```



```
},
"sub_properties": [{
  "properties_id": 31,
  "Material": {
    "constitutive_law": {
      "name": "SmallStrainIsotropicDamage3DVonMisesVonMises"
    },
    "Variables": {
      "DENSITY": 2000.0,
      "YOUNG_MODULUS": 2900E6,
      "POISSON_RATIO": 0.37,
      "FRACTURE_ENERGY": 50E6,
      "YIELD_STRESS": 28.6E6,
      "SOFTENING_TYPE": 0,
      "SERIAL_PARALLEL_EQUILIBRIUM_TOLERANCE": 1e-3
    },
    "Tables": {}
  }
}], {
  "properties_id": 32,
  "Material": {
    "constitutive_law": {
      "name": "SmallStrainIsotropicDamage3DVonMisesMohrCoulomb"
    },
    "Variables": {
      "DENSITY": 2000.0,
      "YOUNG_MODULUS": 80180E6,
      "POISSON_RATIO": 0.23,
      "FRACTURE_ENERGY": 100E6,
      "YIELD_STRESS": 3800E6,
      "SOFTENING_TYPE": 0,
      "TANGENT_OPERATOR_ESTIMATION": 3
    },
    "Tables": {}
  }
}]
}, {
  "model_part_name": "Structure.Parts_Comp_inf",
  "properties_id": 4,
  "Material": {
    "constitutive_law": {
      "name": "SerialParallelRuleOfMixturesLaw",
      "combination_factors": [0.4, 0.6],
      "parallel_behaviour_directions": [0, 1, 0, 0, 0, 0]
    },
    "Variables": {},
    "Tables": {}
  },
  "sub_properties": [{
    "properties_id": 41,
    "Material": {
      "constitutive_law": {
        "name": "SmallStrainIsotropicDamage3DVonMisesVonMises"
      },
      "Variables": {
        "DENSITY": 2000.0,
        "YOUNG_MODULUS": 2900E6,
        "POISSON_RATIO": 0.37,
        "FRACTURE_ENERGY": 50E6,
        "YIELD_STRESS": 28.6E6,
        "SOFTENING_TYPE": 0,
        "SERIAL_PARALLEL_EQUILIBRIUM_TOLERANCE": 1e-3
      },
      "Tables": {}
    }
  ]
}
```



```
}, {  
  "properties_id": 42,  
  "Material": {  
    "constitutive_law": {  
      "name": "SmallStrainIsotropicDamage3DVonMisesMohrCoulomb"  
    },  
    "Variables": {  
      "DENSITY": 2000.0,  
      "YOUNG_MODULUS": 80180E6,  
      "POISSON_RATIO": 0.23,  
      "FRACTURE_ENERGY": 100E6,  
      "YIELD_STRESS": 3800E6,  
      "SOFTENING_TYPE": 0,  
      "TANGENT_OPERATOR_ESTIMATION": 3  
    },  
    "Tables": {}  
  }  
}  
}}  
}
```



### 12.3.2 GLARE3 [H4]

```
{
  "properties": [{
    "model_part_name": "Structure.Parts_Parts_Auto1",
    "properties_id": 1,
    "Material": {
      "constitutive_law": {
        "name": "ParallelRuleOfMixturesLaw3D",
        "combination_factors": [0.2131, 0.0902, 0.0902, 0.2131, 0.0902, 0.0902,
0.2131]
      },
      "Variables": {
        "DENSITY": 2000,
        "LAYER_EULER_ANGLES": [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0]
      },
      "Tables": {}
    },
    "sub_properties": [{
      "properties_id": 11,
      "Material": {
        "constitutive_law": {
          "alias": "Aluminium",
          "name": "SmallStrainIsotropicPlasticity3DVonMisesVonMises",
          "yield_surface": "VonMises",
          "plastic_potential": "VonMises"
        },
        "Variables": {
          "DENSITY": 2780.0,
          "YOUNG_MODULUS": 72.4e9,
          "POISSON_RATIO": 0.33,
          "YIELD_STRESS_TENSION": 200.0e6,
          "YIELD_STRESS_COMPRESSION": 200.0e6,
          "FRACTURE_ENERGY": 1.0e15,
          "HARDENING_CURVE": 4,
          "CURVE_FITTING_PARAMETERS": [2.01E+08, 5.91E+010, -1.31E+013,
1.54E+15, -9.48E+16, 2.91E+18, -3.51E+19],
          "TANGENCY_REGION2": false,
          "PLASTIC_STRAIN_INDICATORS": [0.02, 0.04]
        },
        "Tables": {}
      },
    ]
  }, {
    "properties_id": 12,
    "Material": {
      "constitutive_law": {
        "name": "SerialParallelRuleOfMixturesLaw",
        "combination_factors": [0.4, 0.6],
        "parallel_behaviour_directions": [1, 0, 0, 0, 0, 0]
      },
      "Variables": {},
      "Tables": {}
    },
    "sub_properties": [{
      "properties_id": 121,
      "Material": {
        "constitutive_law": {
          "name": "SmallStrainIsotropicDamage3DVonMisesVonMises"
        },
        "Variables": {
          "DENSITY": 2000.0,
          "YOUNG_MODULUS": 2900E6,
          "POISSON_RATIO": 0.37,
          "FRACTURE_ENERGY": 50E6,

```



```
        "YIELD_STRESS": 28.6E6,
        "SOFTENING_TYPE": 0,
        "SERIAL_PARALLEL_EQUILIBRIUM_TOLERANCE": 1e-3
    },
    "Tables": {}
}, {
    "properties_id": 122,
    "Material": {
        "constitutive_law": {
            "name": "SmallStrainIsotropicDamage3DVonMisesMohrCoulomb"
        },
        "Variables": {
            "DENSITY": 2000.0,
            "YOUNG_MODULUS": 80180E6,
            "POISSON_RATIO": 0.23,
            "FRACTURE_ENERGY": 100E6,
            "YIELD_STRESS": 3800E6,
            "SOFTENING_TYPE": 0,
            "TANGENT_OPERATOR_ESTIMATION": 3
        },
        "Tables": {}
    }
}], {
    "properties_id": 13,
    "Material": {
        "constitutive_law": {
            "name": "SerialParallelRuleOfMixturesLaw",
            "combination_factors": [0.4, 0.6],
            "parallel_behaviour_directions": [0, 1, 0, 0, 0, 0]
        },
        "Variables": {},
        "Tables": {}
    },
    "sub_properties": [{
        "properties_id": 131,
        "Material": {
            "constitutive_law": {
                "name": "SmallStrainIsotropicDamage3DVonMisesVonMises"
            },
            "Variables": {
                "DENSITY": 2000.0,
                "YOUNG_MODULUS": 2900E6,
                "POISSON_RATIO": 0.37,
                "FRACTURE_ENERGY": 50E6,
                "YIELD_STRESS": 28.6E6,
                "SOFTENING_TYPE": 0,
                "SERIAL_PARALLEL_EQUILIBRIUM_TOLERANCE": 1e-3
            },
            "Tables": {}
        }
    }
}], {
    "properties_id": 132,
    "Material": {
        "constitutive_law": {
            "name": "SmallStrainIsotropicDamage3DVonMisesMohrCoulomb"
        },
        "Variables": {
            "DENSITY": 2000.0,
            "YOUNG_MODULUS": 80180E6,
            "POISSON_RATIO": 0.23,
            "FRACTURE_ENERGY": 100E6,
            "YIELD_STRESS": 3800E6,
            "SOFTENING_TYPE": 0,
        }
    }
}
```



```
        "TANGENT_OPERATOR_ESTIMATION": 3
      },
      "Tables": {}
    }
  ]
}, {
  "properties_id": 14,
  "Material": {
    "constitutive_law": {
      "alias": "Aluminium",
      "name": "SmallStrainIsotropicPlasticity3DVonMisesVonMises",
      "yield_surface": "VonMises",
      "plastic_potential": "VonMises"
    },
    "Variables": {
      "DENSITY": 2780.0,
      "YOUNG_MODULUS": 72.4e9,
      "POISSON_RATIO": 0.33,
      "YIELD_STRESS_TENSION": 201.0e6,
      "YIELD_STRESS_COMPRESSION": 201.0e6,
      "FRACTURE_ENERGY": 1.0e8,
      "HARDENING_CURVE": 4,
      "CURVE_FITTING_PARAMETERS": [2.01E+08, 5.91E+010, -1.31E+013,
1.54E+15, -9.48E+16, 2.91E+18, -3.51E+19],
      "TANGENCY_REGION2": false,
      "PLASTIC_STRAIN_INDICATORS": [0.02, 0.04]
    },
    "Tables": {}
  }
}, {
  "properties_id": 15,
  "Material": {
    "constitutive_law": {
      "name": "SerialParallelRuleOfMixturesLaw",
      "combination_factors": [0.4, 0.6],
      "parallel_behaviour_directions": [0, 1, 0, 0, 0, 0]
    },
    "Variables": {},
    "Tables": {}
  },
  "sub_properties": [{
    "properties_id": 151,
    "Material": {
      "constitutive_law": {
        "name": "SmallStrainIsotropicDamage3DVonMisesVonMises"
      },
      "Variables": {
        "DENSITY": 2000.0,
        "YOUNG_MODULUS": 2900E6,
        "POISSON_RATIO": 0.37,
        "FRACTURE_ENERGY": 50E6,
        "YIELD_STRESS": 28.6E6,
        "SOFTENING_TYPE": 0,
        "SERIAL_PARALLEL_EQUILIBRIUM_TOLERANCE": 1e-3
      },
      "Tables": {}
    }
  ]
}, {
  "properties_id": 152,
  "Material": {
    "constitutive_law": {
      "name": "SmallStrainIsotropicDamage3DVonMisesMohrCoulomb"
    },
    "Variables": {
      "DENSITY": 2000.0,

```



```
        "YOUNG_MODULUS": 80180E6,
        "POISSON_RATIO": 0.23,
        "FRACTURE_ENERGY": 100E6,
        "YIELD_STRESS": 3800E6,
        "SOFTENING_TYPE": 0,
        "TANGENT_OPERATOR_ESTIMATION": 3
    },
    "Tables": {}
}
}}
}, {
"properties_id": 16,
"Material": {
    "constitutive_law": {
        "name": "SerialParallelRuleOfMixturesLaw",
        "combination_factors": [0.4, 0.6],
        "parallel_behaviour_directions": [1, 0, 0, 0, 0, 0]
    },
    "Variables": {},
    "Tables": {}
},
"sub_properties": [{
    "properties_id": 161,
    "Material": {
        "constitutive_law": {
            "name": "SmallStrainIsotropicDamage3DVonMisesVonMises"
        },
        "Variables": {
            "DENSITY": 2000.0,
            "YOUNG_MODULUS": 2900E6,
            "POISSON_RATIO": 0.37,
            "FRACTURE_ENERGY": 50E6,
            "YIELD_STRESS": 28.6E6,
            "SOFTENING_TYPE": 0,
            "SERIAL_PARALLEL_EQUILIBRIUM_TOLERANCE": 1e-3
        },
        "Tables": {}
    }
}, {
"properties_id": 162,
"Material": {
    "constitutive_law": {
        "name": "SmallStrainIsotropicDamage3DVonMisesMohrCoulomb"
    },
    "Variables": {
        "DENSITY": 2000.0,
        "YOUNG_MODULUS": 80180E6,
        "POISSON_RATIO": 0.23,
        "FRACTURE_ENERGY": 100E6,
        "YIELD_STRESS": 3800E6,
        "SOFTENING_TYPE": 0,
        "TANGENT_OPERATOR_ESTIMATION": 3
    },
    "Tables": {}
}
}}
}, {
"properties_id": 17,
"Material": {
    "constitutive_law": {
        "alias": "Aluminium",
        "name": "SmallStrainIsotropicPlasticity3DVonMisesVonMises",
        "yield_surface": "VonMises",
        "plastic_potential": "VonMises"
    },
    "Variables": {},
    "Tables": {}
}
```





```
    "Variables": {
      "DENSITY": 2780.0,
      "YOUNG_MODULUS": 72.4e9,
      "POISSON_RATIO": 0.33,
      "YIELD_STRESS_TENSION": 201.0e6,
      "YIELD_STRESS_COMPRESSION": 201.0e6,
      "FRACTURE_ENERGY": 1.0e8,
      "HARDENING_CURVE": 4,
      "CURVE_FITTING_PARAMETERS": [2.01E+08, 5.91E+010, -1.31E+013,
1.54E+15, -9.48E+16, 2.91E+18, -3.51E+19],
      "TANGENCY_REGION2": false,
      "PLASTIC_STRAIN_INDICATORS": [0.02, 0.04]
    },
    "Tables": {}
  }
}
}}
```



## 13 Anexo B. Resultados simulaciones

Todos estos resultados están disponibles en soporte electrónico y pueden verse mucho mejor con GiD.

### 13.1 Inicio y progreso del daño en el compuesto

En las siguientes figuras se ve el progreso del daño.

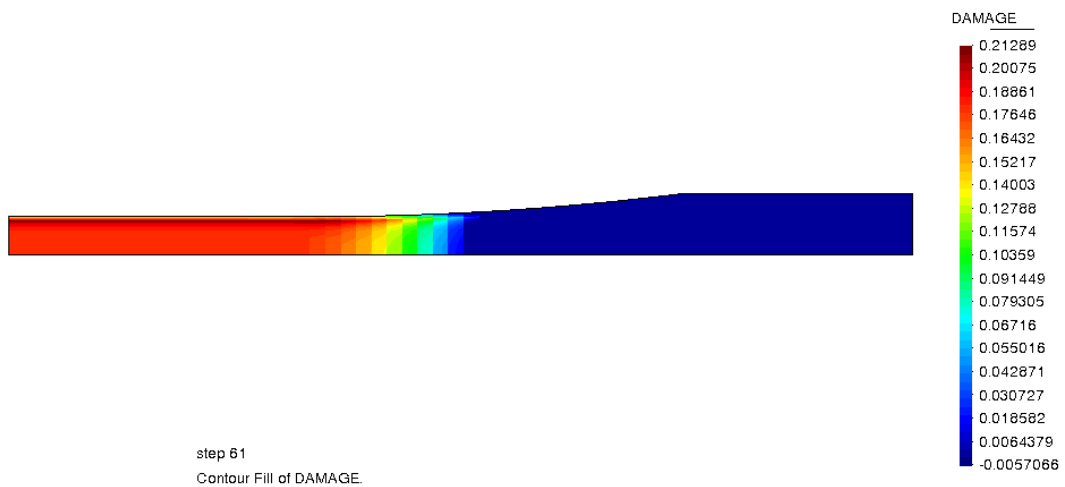


Figura 13.1 Daño [-]. Compuesto inferior (paso 61)

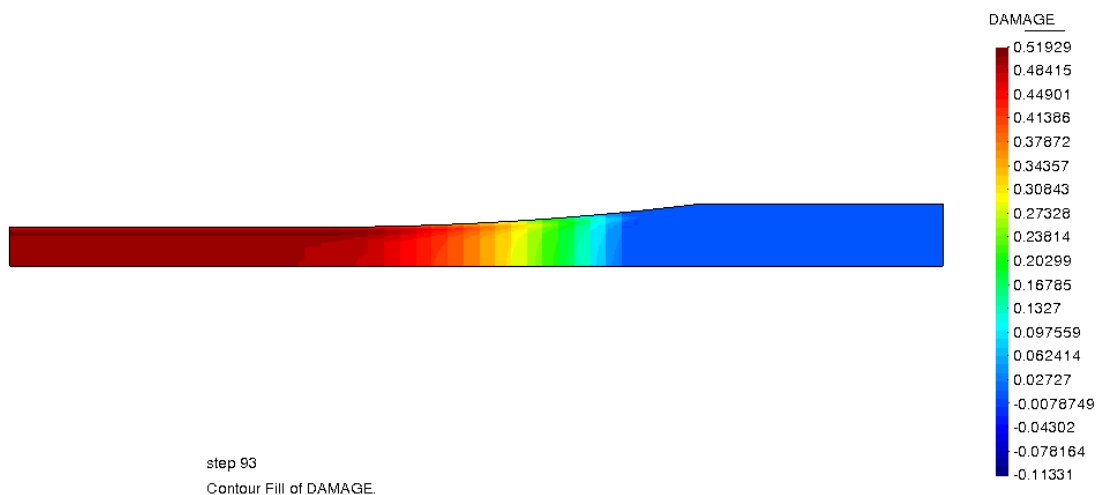


Figura 13.2 Daño [-]. Compuesto inferior (paso 93)



### 13.2 Resultados daño, tensiones, deformaciones

El daño empieza en la matriz, en la zona exterior del espécimen, cerca del borde, donde los desplazamientos en X están impedidos. Se va propagando al resto de la probeta progresivamente a medida que aumentan los desplazamientos.

Nótese que en el compuesto superior la fibra está en la dirección paralelo y en el compuesto inferior la fibra está en la dirección serie.

Se muestra en las siguientes figuras el daño, la tensión en: la matriz, la fibra y en el compuesto; en las capas superior e inferior del compuesto.

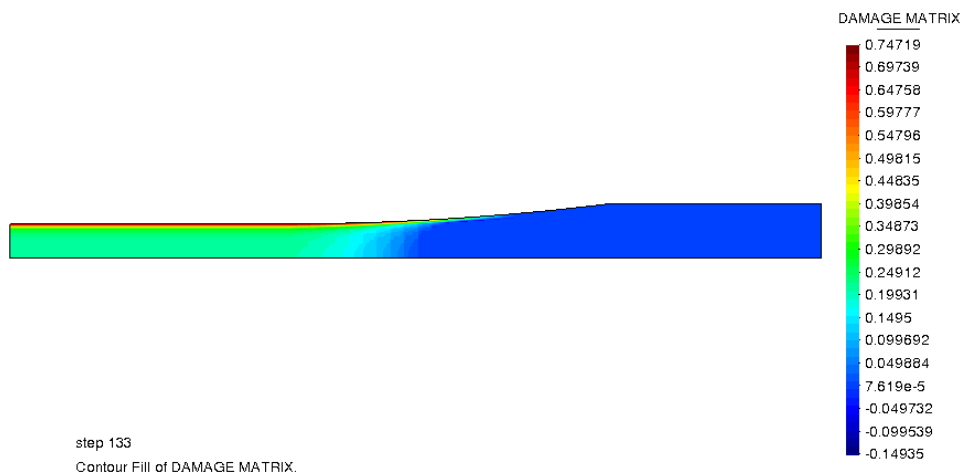


Figura 13.3 Daño en la matriz [-]. Compuesto superior

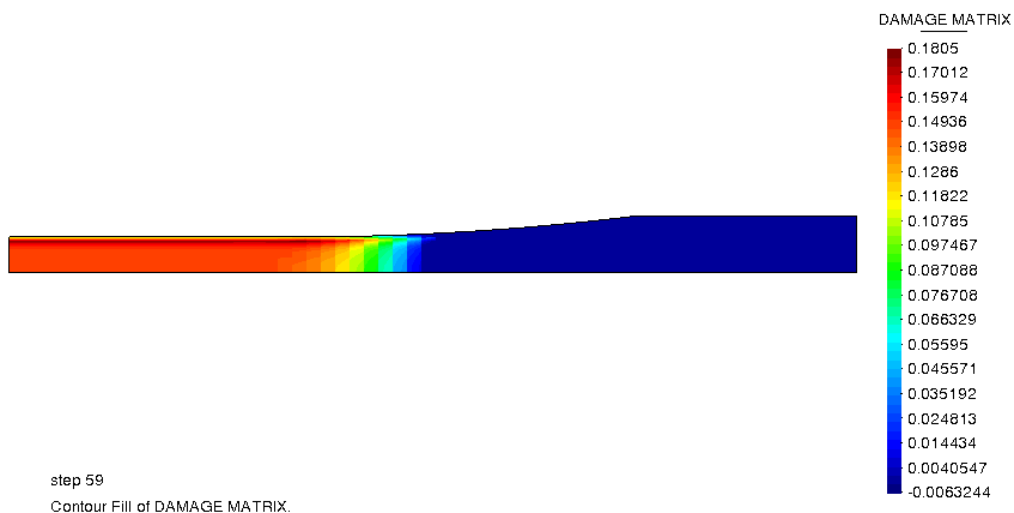


Figura 13.4 Daño en la matriz [-]. Compuesto inferior

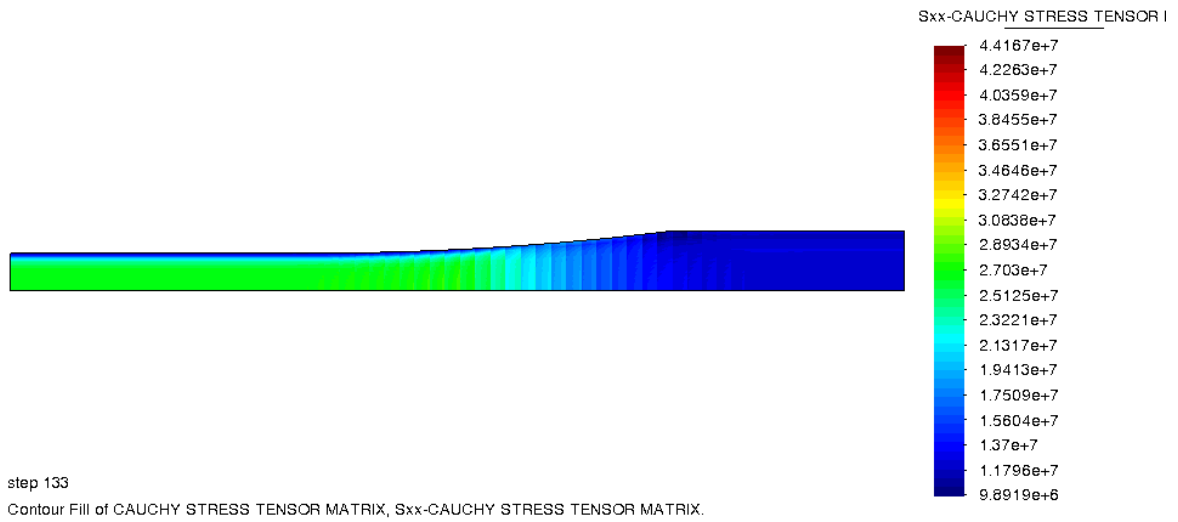


Figura 13.5 Tensiones en la matriz [Pa]. Compuesto superior



Figura 13.6 Tensión en la fibra [Pa]. Compuesto superior

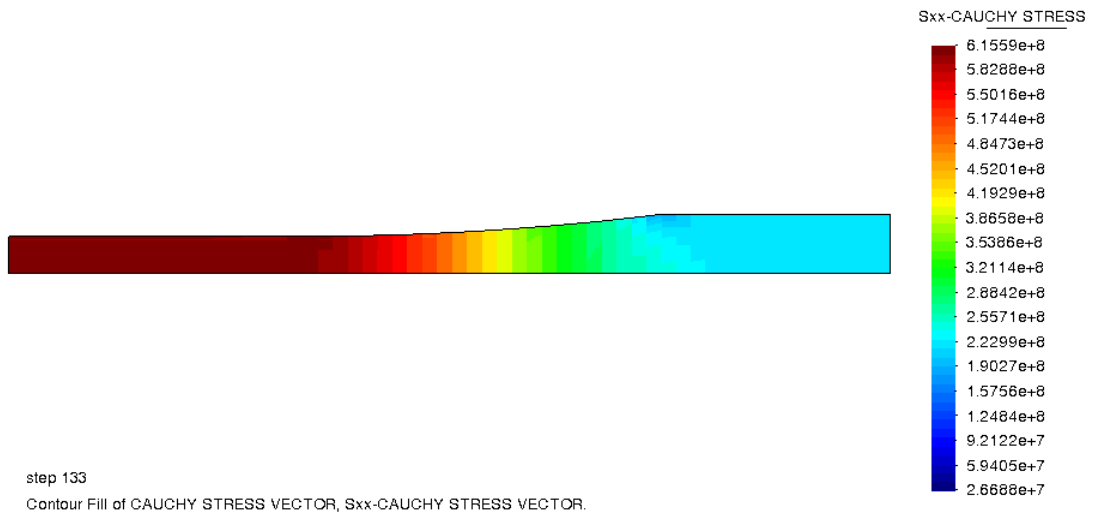


Figura 13.7 Tensión en el compuesto [Pa]. Compuesto superior

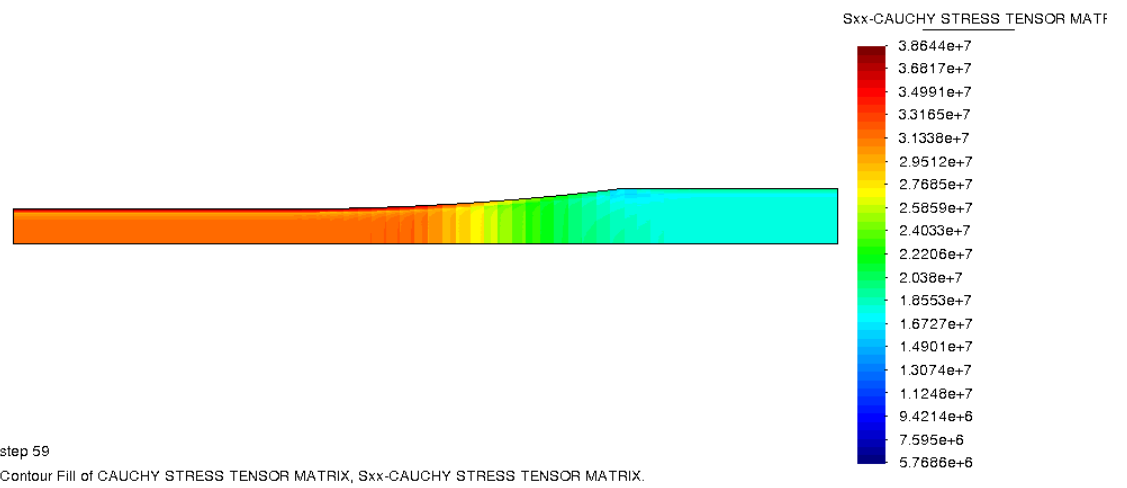


Figura 13.8 Tensiones en la matriz [Pa]. Compuesto inferior

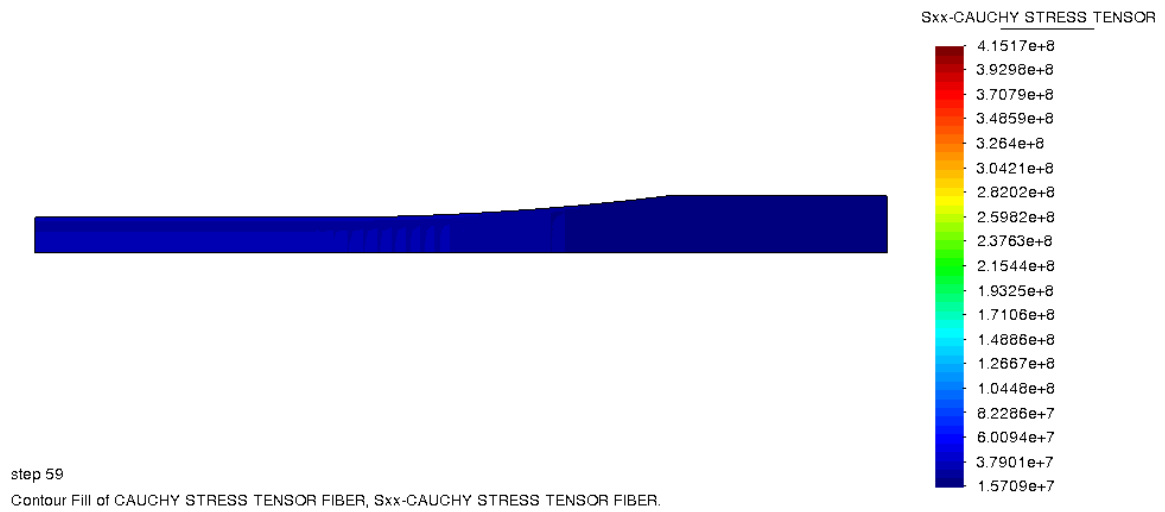


Figura 13.9 Tensiones en la fibra [Pa]. Compuesto inferior



Figura 13.10 Tensiones en el compuesto [Pa]. Compuesto inferior

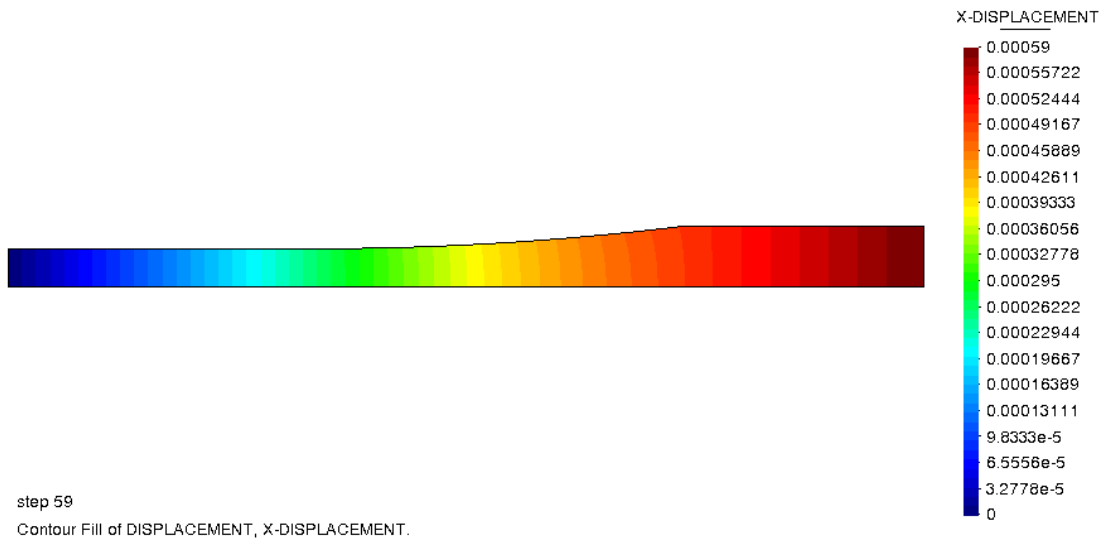


Figura 13.11 Desplazamientos[m]. Compuesto superior



Figura 13.12 Desplazamientos[m]. Compuesto inferior



En la siguiente figura se muestran los desplazamientos en dirección perpendicular a la dirección de carga. En el eje de simetría son nulos.

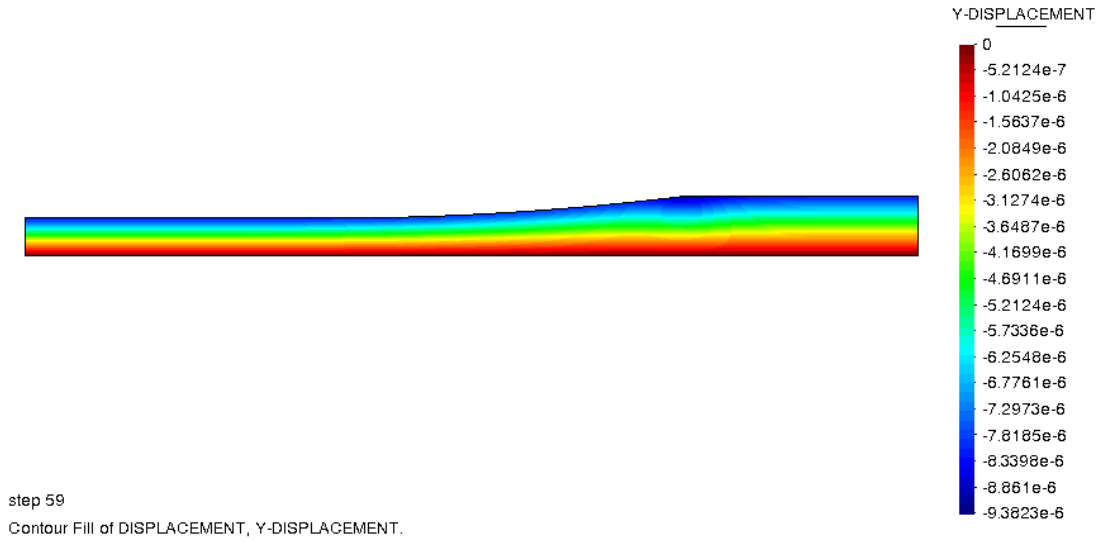


Figura 13.13 Desplazamientos en la dirección ortogonal a la carga [m]. Compuesto inferior