

Житомирський державний університет
імені Івана Франка

Прус А.В.

МОДУЛЬ У РІВНЯННЯХ ТА НЕРІВНОСТЯХ

Навчально-методичний посібник

Видавництво ЖДУ імені Івана Франка
Житомир
2010

*Рекомендовано кафедрою математики
протокол №5 від 15.01.10*

Прус А.В.

Модуль у рівняннях та нерівностях: Навчально-методичний посібник. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. – 32 с.

Навчально-методичний посібник з алгебри містить відомості про модуль та його властивості, способи розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем із модулями. До кожного виду рівнянь, нерівностей з модулями наведені приклади із детальним їх розв'язанням, а також завдання для самостійного опрацювання із відповідями.

Для викладачів і студентів фізико-математичних факультетів, вчителів математики та учнів основної та старшої школи.

ЗМІСТ

1. Означення та властивості модуля.....	2
2. Рівняння з модулем.....	4
2.1. Найпростіші рівняння.....	4
2.2. Рівняння виду $ f(x) = g(x)$, де $f(x), g(x)$ деякі функції.....	5
2.3. Рівняння, що містять два та більше модулів	7
2.4. Рівняння виду $ f(x) = g(x) $	12
2.5. Рівняння виду модуль в модулі.....	12
3. Нерівності з модулем.....	14
3.1. Найпростіші нерівності.....	14
3.2. Нерівності з одним модулем, зовні якого є змінна.....	15
3.3. Нерівності з двома та більше модулями.....	18
3.4. Нерівності виду $ f(x) > g(x) $ ($ f(x) \geq g(x) $) — або $ f(x) < g(x) $ ($ f(x) \leq g(x) $).....	22
3.5. Нерівності виду модуль в модулі.....	23
4. Системи рівнянь та нерівностей з модулями.....	27
5. Завдання для самостійної роботи за всіма розділами.....	29

МОДУЛЬ У РІВНЯННЯХ ТА НЕРІВНОСТЯХ

1. ОЗНАЧЕННЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ МОДУЛЯ

Модулем додатного числа і нуля називають саме це число, а модулем від'ємного числа – число, йому протилежне, тобто, якщо a – дійсне число, то

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0 \\ -a, & \text{якщо } a < 0 \end{cases}.$$
 Модуль числа інакше називають абсолютною

величиною числа. Модуль числа a позначають символом $|a|$. Отже, за означенням модуля, $|-5| = 5, |10| = 10, |0| = 0$.

Для розв'язування рівнянь та нерівностей, які містять модуль, необхідно вміти виконувати операцію розкриття модуля за означенням. Наприклад, запишіть вираз без знака модуля тобто, розкрийте модуль у таких вправах:

№1. $|x - 2|$. **№2.** $3|x + 2|$. **№3.** $|x^2 - x|$. **№4.** $|x + 2| - x$.

Розв'язання. **№1.** $|x - 2|$; тут під $|a|$ мають на увазі $|x - 2|$, тоді за означенням

$$\text{модуля: } |x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{якщо } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2) & \text{якщо } x - 2 < 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad |x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{якщо } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{якщо } x < 2 \end{cases}$$

№2. $3|x + 2|$; тут під $|a|$ мають на увазі $|x + 2|$, тоді за означенням модуля:

$$3|x + 2| = \begin{cases} 3(x + 2), & \text{якщо } x + 2 \geq 0 \\ 3(-1)(x + 2), & \text{якщо } x + 2 < 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad 3|x + 2| = \begin{cases} 3x + 6, & \text{якщо } x \geq -2 \\ -3x - 6, & \text{якщо } x < -2 \end{cases}$$

№3. $|x^2 - x|$; під $|a|$ мають на увазі $|x^2 - x|$, тоді за означенням модуля буде:

$$|x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x, & \text{якщо } x^2 - x \geq 0 \\ -(x^2 - x), & \text{якщо } x^2 - x < 0 \end{cases} \quad \text{або}$$

$$|x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x, & \text{якщо } x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty) \\ -(x^2 - x) & \text{якщо } x \in (0; 1) \end{cases}$$

№4. $|x + 2| - x$; під $|a|$ мають на увазі $|x + 2|$, вираз $(-x)$ від модуля не залежить; використовуємо означення модуля:

$$|x + 2| - x = \begin{cases} x + 2 - x, & \text{якщо } x + 2 \geq 0 \\ -(x + 2) - x, & \text{якщо } x + 2 < 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad |x + 2| - x = \begin{cases} 2, & \text{якщо } x \geq -2 \\ -2x - 2, & \text{якщо } x < -2 \end{cases}$$

Завдання для самостійної роботи

Запишіть вираз без знака абсолютної величини

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| 1) $ x + 2 + x$; | 7) $3 x - 2$; |
| 2) $-3 x - 4 - x$; | 8) $ x - x $; |
| 3) $ 6 - x $; | 9) $ 2^3 - 3^2 $; |
| 4) $ 6 - 2x $; | 10) $ 3 - \sqrt{10} $; |
| 5) $ 3x - 2 + x + 2$; | 11) $ \pi^2 - 10 $; |
| 6) $-2 4 - x + 4 - x$; | |

Властивості модуля

1. $|a| \geq 0$ для $a \in R$ (слідuje із означення модуля).
2. Модулі протилежних чисел рівні: $|a| = |-a|$.
3. Модуль добутку дорівнює добутку модулів: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
4. Модуль частки дорівнює частці модулів: $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.
5. $|a + b| \leq |a| + |b|$.
6. $|a - b| \geq |a| - |b|$.
7. $|a^2| = a^2$.

Геометричний зміст модуля числа є очевидним: довільне дійсне число являється координатою деякої точки на координатній прямій; тому щоб знайти модуль числа, треба виміряти в одиничних відрізках відстань від початку відліку до точки, що відповідає цьому числу. Модуль числа позначається так, як і довжина відрізка, т.т. модуль числа є ніщо інше, як довжина відповідного відрізка.

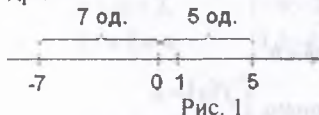


Рис. 1

$|5| = 5$, $|a|$ — це відстань на числовій прямій від точки a до 0 (рис. 1);
 $|-7| = 7$
 $|a - b|$ — це відстань між точками a і b

числової прямої. Знаючи, що модуль позначає відстань, легко навчитись розв'язувати найпростіші рівняння та нерівності з модулем.

1. Оскільки множина точок числової прямої, для яких $|x| = d$ ($d > 0$), складається із двох точок $x_1 = d$ та $x_2 = -d$ (рис. 2), то рівняння $|x| = d$ ($d > 0$) має два розв'язки $x_1 = d$, $x_2 = -d$.

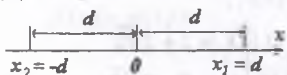
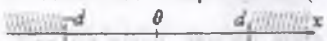


Рис. 2

Наприклад: $|x| = 2$; $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$; $|x| = 3$; $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

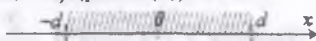
2. Множину розв'язків нерівності

$|x| < d$ ($d > 0$) можна трактувати як множину точок числової прямої, що розміщені від початку відліку на відстань меншу, ніж на d тобто, що лежать між точками $M(d)$ і $M(-d)$. Отже, множина розв'язків нерівності $|x| < d$ ($d > 0$) є проміжок $-d < x < d$ (рис. 3(a)), а множиною розв'язків нерівності $|x| > d$ ($d > 0$) є об'єднання двох проміжків $(-\infty; -d) \cup (d; +\infty)$ (рис. 3(б)).



$|x| > d \Leftrightarrow x \in (-\infty; -d) \cup (d; +\infty)$

Рис. 3(a)



$|x| < d \Leftrightarrow -d < x < d$

Рис. 3(б)

Наприклад: $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, тобто $x \in (-1; 1)$;

$$|x| > 4\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -4\frac{1}{2}\right) \cup \left(4\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

Зазначимо, що геометричною інтерпретацією модуля, як правило, користуються у найпростіших випадках розв'язування рівнянь та нерівностей з модулем.

Завдання для самостійної роботи.

- Покажіть на числовій прямій множину розв'язків рівняння або нерівності: $|x| = 12$; $|-x| = 2$; $|x| < 5$; $|x| \geq 5$; $|x| \leq 1,3$.
- При яких значеннях є правильною рівність: $x = |x|$; $|-x| = -x$; $-x = |x|$?
- Придумайте рівняння чи нерівність, щоб у них були такі розв'язки: $x = \pm 3$; $x_1 = -2, x_2 = 4$; $0 \leq x \leq 4$; $x \leq 2$ та $x \geq 6$; $(-1; 5)$; $[2; 8]$.

2. РІВНЯННЯ З МОДУЛЕМ

2.1. Найпростіші рівняння

До них віднесемо рівняння виду $|f(x)| = b$, де $f(x)$ – деяка функція, $b \in \mathbb{R}$.

Якщо $b < 0$, то рівняння $|f(x)| = b$ розв'язків не має.

Якщо $b = 0$, то $|f(x)| = b$ рівносильне рівнянню $f(x) = b$.

Якщо $b > 0$, то $|f(x)| = b$ рівносильне сукупності рівнянь $\begin{cases} f(x) = b, \\ f(x) = -b \end{cases}$.

Наведемо приклади таких рівнянь та їх розв'язань.

$$\text{№1. } |x - 4| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 3 \\ x - 4 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 1 \end{cases}. \text{ Відповідь: } \{1; 7\}$$

$$\text{№2. } |2x - 3| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 5 \\ 2x - 3 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 8 \\ 2x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \end{cases}. \text{ Відповідь: } \{-1; 4\}$$

$$\text{№3. } |x^2 - 4x| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x = 4 \\ x^2 - 4x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 4 = 0 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + 2\sqrt{2} \\ x_2 = 2 - 2\sqrt{2} \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Відповідь: $\{2; 2 - 2\sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2}\}$

$$\text{№4. } \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} = 1 \\ \frac{x+1}{x-1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1-x+1}{x-1} = 0 \\ \frac{x+1+x-1}{x-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x-1} = 0 \\ \frac{2x}{x-1} = 0 \end{cases}$$

Перше рівняння в сукупності $\frac{2}{x-1} = 0$ розв'язків не має, оскільки дріб рівний 0, якщо чисельник рівний нулю, а знаменник йому не дорівнює. У

нашому випадку $2 \neq 0$, отже $x \in \emptyset$. Розв'яжемо друге рівняння:

$$\frac{2x}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x \neq 1 \end{cases} \text{Відповідь } x=0.$$

$$\text{№5. } |x^2 + 3x - 2| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 = 0 \\ x^2 + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+4) = 0 \\ x(x+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -4 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

Відповідь: $\{-4; -3; 0; 1\}$.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати рівняння:

- | | | | |
|-----------------------|-----------------|------------------|---|
| 1) $ x-1 =3,$ | $\{4; -2\}$ | 7) $ 3x-2 =6,$ | $\left\{-\frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right\}$ |
| 2) $ x-7 =2,$ | $\{5; 9\}$ | 8) $ 5x+2 =-2,$ | $x \in \emptyset$ |
| 3) $ \sqrt{2x}-5 =3,$ | $\{2; 32\}$ | 9) $ 5x^2-3 =2,$ | $\left\{-1; -\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}; 1\right\}$ |
| 4) $ x+2 =3,$ | $\{1; -5\}$ | 10) $ 9-x^2 =5,$ | $\{-2; -\sqrt{14}; 2; \sqrt{14}\}$ |
| 5) $ x+4 =2,$ | $\{-6; -2\}$ | | |
| 6) $ 2x+1 =4,$ | $\{1,5; -2,5\}$ | | |

2.2. Рівняння виду $|f(x)| = g(x)$, де $f(x), g(x)$ деякі функції.

Наведемо два способи заміни даного рівняння сукупністю систем або однією системою.

1-й спосіб.

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x) \\ f(x) < 0, \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$$

2-й спосіб.

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

Наведемо приклади рівнянь та їх розв'язань.

$$\text{№1. } |x^2 - 2x| = 3 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x \geq 0, \\ x^2 - 2x = 3 - 2x, \\ x^2 - 2x = -3 + 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1,5, \\ x^2 = 3, \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \leq 1,5, \\ x^2 = 3, \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1,5, \\ x = \pm\sqrt{3}, \\ x = 1, \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3}, \\ x = 1 \end{cases} \text{Відповідь: } \{-\sqrt{3}; 1\}.$$