

# XÁC ĐỊNH TỰ ĐỘNG CƠ CẤU PHÁ HỦY SÀN BÊTÔNG CỐT THÉP BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐƯỜNG XOAY BẤT LIÊN TỤC

NGUYỄN VĂN HIẾU

Trường Đại học Kiến Trúc Thành phố Hồ Chí Minh - hieu.nguyenvan@uah.edu.vn

NGUYỄN HUY GIA

Trường Đại học Công Nghệ Sài Gòn - hgnguyen77@gmail.com

ĐÀO ĐÌNH NHÂN

Trường Đại học Kiến Trúc Thành phố Hồ Chí Minh - nhan.daodinh@uah.edu.vn

(Ngày nhận: 9/9/2016; Ngày nhận lại: 11/11/16; Ngày duyệt đăng: 14/11/2016)

## TÓM TẮT

Bài báo này giới thiệu một cách tiếp cận tính toán tự động cơ cấu phá hủy cũng như giá trị tối ưu cận trên của tải trọng tới hạn cho các loại kết cấu tấm chịu uốn. Phương pháp được sử dụng là phương pháp đường xoay bất liên tục dựa trên các cơ cấu chảy dẻo từ các điều kiện tối ưu để dự đoán tải trọng tới hạn. Kết cấu tấm được rời rạc thành các phần tử tam giác cứng dẻo tuyệt đối chỉ cho phép chảy dẻo và xoay quanh ba cạnh biên. Các ví dụ số minh họa cho phương pháp được đánh giá và so sánh với các lời giải chính xác hay thực nghiệm đã có trước đây.

**Từ khóa:** Tải trọng tới hạn; Cơ cấu phá hủy; Phương pháp đường xoay bất liên tục.

## Automated determining the collapsed mechanism of reinforced concrete slabs by yield-line method

### ABSTRACT

This paper present an automatic computer program to find the yield-line solution of any given trial finite element geometry and the least load required to activate the mechanism of the plate bending. The yield-line method is used with the non-linear optimization techniques to predict the ultimate load corresponding to a critical yield-line mechanism. In this method the plate is subdivided into triangular mesh and the yield-lines are restricted to occur only on the element boundaries. Numerical examples are demonstrated by comparing the present results with analytical or experimental solutions available in the literature.

**Keywords:** Ultimate load; Collapse mechanism; Yield-line method.

## 1. Giới thiệu

Lời giải chính xác trong các bài toán tấm khi kết cấu đạt tới trạng thái tới hạn rất phức tạp và chỉ có thể giải quyết được một số bài toán đơn giản bằng thủ công. Đây là một bài toán phân tích giới hạn của kết cấu đòi hỏi nhiều phép tính lặp chính xác. Ngoài ra, việc nghiên cứu các kết cấu bằng thực nghiệm rất khó khăn và tốn kém. Trong nhiều trường hợp việc tìm lời giải chính xác không thể tiến hành được, đặc biệt là đối với các kết cấu phức tạp như tấm/vỏ. Do đó, việc nghiên cứu kết cấu qua mô hình không chỉ đem lại hiệu quả kinh tế mà còn có ý nghĩa khoa học rất lớn.

Các kết cấu tấm được sử dụng rất nhiều

trong các ngành xây dựng, cơ khí, đóng tàu, hàng không,... Độ tin cậy và tuổi thọ của kết cấu tấm phụ thuộc chặt chẽ vào tính chất và cường độ của ngoại lực, vào vật liệu và sự chính xác của sơ đồ tính. Nếu sơ đồ tính càng chính xác thì việc tính toán càng phức tạp. Trong thiết kế kết cấu tấm, mục đích chính yếu của người kỹ sư là phải đảm bảo cho kết cấu có một hệ số an toàn thích hợp để kết cấu làm việc bình thường và không bị phá hoại dưới tải trọng thiết kế. Vì vậy, việc dự đoán tải trọng giới hạn mà kết cấu có khả năng chịu được cũng như cơ cấu phá hủy của kết cấu ở trạng thái tới hạn là cực kỳ quan trọng và cần thiết. Nó giúp cho người kỹ sư dự đoán được

ứng xử của kết cấu, dự báo sự hình thành và phát triển vết nứt trong kết cấu cũng như đánh giá tuổi thọ của công trình. Sự gia tăng tải trọng ngoài vùng giới hạn đàn hồi của tấm dẫn đến sự hình thành các đường chảy dẻo (yield-line) và khi chúng phát triển lan tỏa hình thành cơ cấu chảy dẻo (yield-line mechanism) thì kết cấu tấm sẽ sụp đổ. Tải trọng tại thời điểm tấm bị sụp đổ được gọi là tải trọng tới hạn (critical collapsed load). Việc xác định chính xác tải trọng tới hạn này đóng vai trò rất quan trọng trong việc phân tích giới hạn của tấm.

Phương pháp đường xoay bất liên tục trong phân tích giới hạn tấm dựa trên các cơ cấu chảy dẻo cho trước để dự đoán tải trọng tới hạn. Phương pháp này được đưa ra đầu tiên bởi Ingerslev (1923) và được tiếp tục phát triển bởi Johansen (1962), Wood (1961) và các nhà nghiên cứu khác như Mansfield (1957), Morley (1965) hay Johnson (1994, 1995). Phương pháp này đưa ra trước một cơ cấu tương thích chuyển vị (hoặc vận tốc) bao gồm các miền tuyệt đối cứng giao nhau tại các đường chảy dẻo mà tại đó có xuất hiện sự xoay tương đối lẫn nhau. Ứng xử của vật liệu khi đó được xem như cứng-dẻo tuyệt đối. Từ đó việc xác định giá trị tới hạn của tải trọng được tiến hành dựa vào lý thuyết cận trên của phân tích giới hạn thông qua việc cân bằng năng lượng tiêu tán nội tại các đường chảy dẻo với năng lượng tiêu tán ngoại do tải trọng gây ra sự biến dạng của tấm theo cơ cấu phá hủy cho trước. Tuy phương pháp này đơn giản và hiệu quả nhưng việc áp dụng nó trong thực tế gặp nhiều khó khăn do sự phức tạp của các cơ cấu chảy dẻo cũng như việc xác định đâu là cơ cấu gây đổ nguy hiểm nhất. Phương

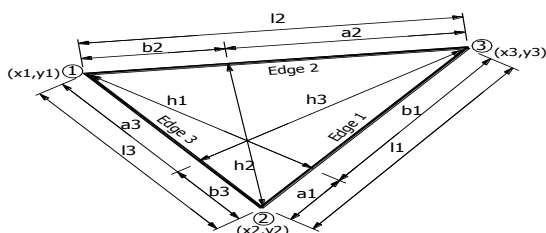
pháp này chỉ thích hợp cho việc tính toán thủ công một số bài toán đơn giản. Một số phương pháp tính mới gần đây như sử dụng phần tử xoay tự do kết hợp cận dưới của Salam Al-Sabah et al. (2013) hay phương pháp tối ưu lớp bất liên tục của Gilbert et al. (2014) rất hiệu quả trong việc xác định cơ cấu chảy dẻo của tấm nhưng số lượng nút hay phần tử rất lớn dẫn đến khối lượng tính toán khá lớn.

Vì vậy trong bài báo này nhóm tác giả sẽ giới thiệu và áp dụng cải tiến một loại phần tử đặc biệt được đề nghị bởi Munro và Da Fonseca (1978) để có thể tự động hóa việc tính toán giá trị tải trọng tới hạn cũng như xác định cơ cấu phá hủy nguy hiểm của các kết cấu tấm chịu uốn một cách tự động thông qua công cụ máy tính với một số lượng rất ít phần tử mô phỏng. Việc tính toán này bao gồm: (1) rời rạc kết cấu khảo sát thành những phần tử tam giác Munro-Da Fonseca tuyệt đối cứng chỉ cho phép chảy dẻo, (2) xoay quanh ba cạnh biên và (3) kết hợp các điều kiện tối ưu để tìm lời giải tốt nhất.

**2. Giới thiệu sơ lược về phần tử Munro-Da Fonseca**

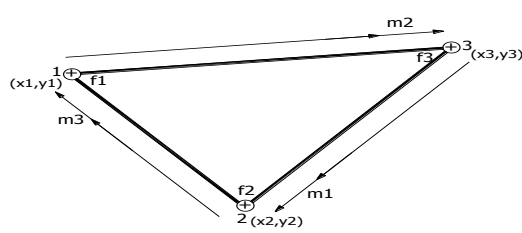
**2.1. Quan hệ đối ngẫu tĩnh học và động học**

Theo phương pháp rời rạc hóa của Munro-Da Fonseca thì kết cấu tấm được rời rạc thành các phần tử tam giác kết nối nhau tại ba cạnh và ba điểm nút. Biến dạng ngang của tấm được diễn tả thông qua vector chuyển vị ngang (**w**) của các nút. Phần tử tam giác được giả định là tấm phẳng tuyệt đối cứng chỉ cho phép chảy dẻo và xoay quanh ba cạnh biên và các góc xoay dọc theo các cạnh phải là hằng số suốt chiều dài của cạnh tấm (xem Hình 1).



$$a_1 = \frac{l_1^2 - l_2^2 + l_3^2}{2l_2}$$

(a)



$$h_1 = \frac{(y_1 - y_2)(x_3 - x_2) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_2)}{l_1}$$

(b)

**Hình 1.** (a) Chi tiết hình học phần tử Munro-Da Fonseca; (b) Các biến nội lực của phần tử

Các góc xoay quanh cạnh tâm được lưu trong vector  $\theta$ . Với các kích thước hình học như trong Hình 1, phương trình động học liên hệ giữa góc xoay  $\theta_i$  của cạnh thứ  $i$  của một phần tử tam giác với các thành phần chuyển vị của nó là

$$\begin{bmatrix} \theta_1^e \\ \theta_2^e \\ \theta_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & b_1 & a_1 \\ h_1 & l_1 h_1 & l_1 h_1 \\ a_2 & -1 & b_2 \\ l_2 h_2 & h_2 & l_2 h_2 \\ b_3 & a_3 & -1 \\ l_3 h_3 & l_3 h_3 & h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

trong đó  $\theta_i$  được ký hiệu là góc xoay quanh cạnh của một phần tử đang xét. Phương trình động học liên hệ giữa vector góc xoay cạnh của toàn hệ có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\theta = Ew \quad (2)$$

với  $E$  được định nghĩa là ma trận biến đổi động học

Để phân biệt giữa góc xoay dương (sagging) và góc xoay âm (hogging), ta sử dụng hai vector không âm  $\theta^+$ ,  $\theta^-$  sao cho điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$$\theta = \theta^+ - \theta^- \quad (3)$$

Công thức đối ngẫu với biến số là moment chảy dẻo trên cạnh ( $m$ ) và lực nút ( $f$ ) có thể được thiết lập như sau: nếu trên Hình 1b, moment trên một đơn vị dài được giả định là hằng số lần lượt là  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  dọc theo các cạnh của tam giác và lực nút tương ứng là  $f_1^e$ ,  $f_2^e$ ,  $f_3^e$  thì điều kiện cân bằng cho phần tử tam giác là:

$$\begin{bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & a_2 & b_3 \\ h_1 & l_2 h_2 & l_3 h_3 \\ b_1 & -1 & a_3 \\ l_1 h_1 & h_2 & l_3 h_3 \\ a_1 & b_2 & -1 \\ l_1 h_1 & l_2 h_2 & h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Bằng cách lấy tổng các phân phối trên toàn miền ta sẽ thu được một hệ đầy đủ các điều kiện cân bằng như sau:

$$f = E^T m \quad (5)$$

## 2.2. Quan hệ ứng xử

Với điều kiện đồng nhất, tiêu chuẩn chảy dẻo cho tất cả moment uốn của các cạnh phần tử sẽ được giới hạn bởi moment kháng chảy dẻo

dương  $m^+$  hay âm và  $m^-$  tương ứng như sau

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} m \leq \begin{bmatrix} m_*^+ \\ m_*^- \end{bmatrix} \quad (6)$$

trong đó  $\mathbf{I}$  là ma trận đơn vị;

Sử dụng quan niệm thế năng chảy dẻo thu được

$$\pi_* = N^T m - m_* \leq 0 \quad (7)$$

$$\theta = \theta^+ - \theta^- = [\mathbf{I} \quad -\mathbf{I}] \begin{bmatrix} \theta^+ \\ \theta^- \end{bmatrix} = N\theta_* \quad (8)$$

## 2.3. Công thức quy hoạch tuyến tính

Các tải áp đặt tại nút được định nghĩa bởi vector  $f_0$  và công ngoại thực hiện trên chuyển vị ảo của cơ cấu được ràng buộc là một đơn vị:  $f_0^T w = 1$ . Vì vậy các phương trình ràng buộc có thể được viết như sau

$$\begin{bmatrix} 0 & f_0^T \\ N & -E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^+ \\ \theta^- \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \theta^+ \\ \theta^- \end{bmatrix} \geq 0 \quad (9)$$

Do đó sẽ có  $n_e + 1$  ràng buộc đẳng thức, với  $n_e$  là số cạnh trong hệ lưới mà có thể chịu moment uốn. Hàm mục tiêu biểu diễn năng lượng tiêu tán trên các đường chảy dẻo là hàm cần phải cực tiểu hoá như sau

$$\text{Cực tiểu hàm số: } z = m_*^+ \theta_*^+ + m_*^- \theta_*^- \quad (10)$$

trong đó  $m_*^+$ ,  $m_*^-$  là các vector mô tả các giá trị moment dẻo xuất hiện khi có phát sinh các góc xoay dương hoặc âm tương ứng.

Bài toán có thể viết dưới dạng đối ngẫu như sau

$$\text{Cực đại hàm số } y = [1 \quad \cdot] \begin{bmatrix} \lambda \\ m \end{bmatrix} \quad (1)$$

với các điều kiện ràng buộc:

$$\begin{bmatrix} 0 & N^T \\ f_0 & -E^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ m \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} m_*^+ \\ 0 \\ m_*^- \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda \\ m \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2)$$

## 3. Công thức phi tuyến với các biến hình học là đường chảy dẻo

Do phương pháp quy hoạch tuyến tính dựa trên phần tử Munro-Da Fonseca không xác định tự động được cơ cấu chảy dẻo tối ưu thật sự nếu không biết trước cơ cấu chảy dẻo cho trước dọc theo các cạnh của hệ lưới phần tử chọn trước nên nhu cầu khảo sát tìm kiếm một phương pháp tối ưu có thể hiệu chỉnh vị trí các nút trong hệ lưới phần tử để cực tiểu

hóa tải trọng tới hạn là thật sự cần thiết. Vì thế bài toán xác định cơ cấu và tải trọng tới hạn với ẩn số tọa độ nút có thể viết dưới dạng bài toán phân tích tối ưu phi tuyến như sau:

$$\begin{aligned} &\text{Cực tiểu hàm số } L(\xi) \quad ; \xi \in \mathbb{R}^q \\ &\text{với điều kiện ràng buộc } K_i(\xi) \leq 0, \quad (13) \\ &i=1,2,\dots,n_k \end{aligned}$$

trong đó  $\xi$  là vector tọa độ các nút của hệ lưới.  $L(\xi) = z$  là hệ số tải trọng tới hạn định nghĩa ở phương trình (2) thông qua cực tiểu giá trị góc xoay  $\theta^+$ ,  $\theta^-$  và độ võng  $w$  với giá trị  $\xi$  cho trước.  $q$  là số biến vị trí nút. Điều kiện ràng buộc (13) đảm bảo không có nút nào nằm giữa cạnh, không phần tử nào mất đi và không có phần tử mới nào tạo ra trong quá trình tối ưu hóa. Chi tiết về giải thuật tối ưu hóa có thể được tìm thấy trong các tài liệu tham khảo (Jennings (1996); Gill et al. (1981); McKeown et al. (1990); Thavalingam et al. (1998)).

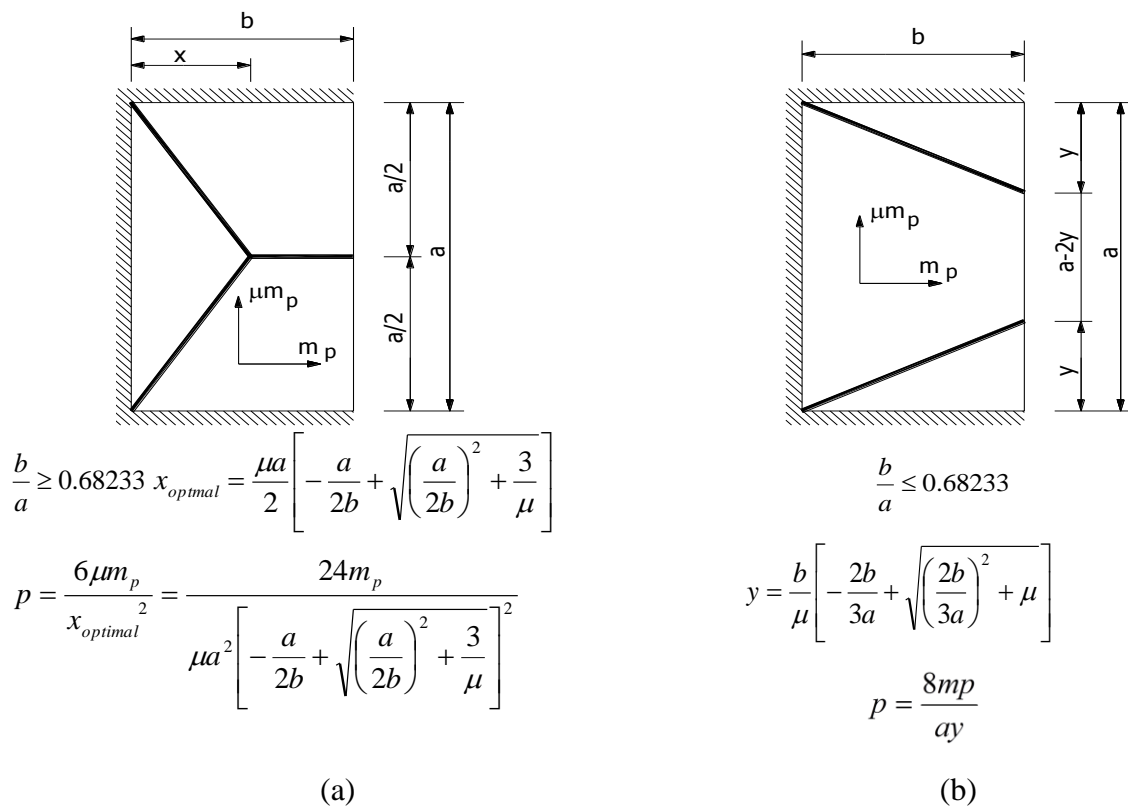
**4. Ví dụ số**

Các ví dụ số trong phần này nhằm mô tả tính đơn giản và hiệu quả của phương pháp

tính toán nêu trên trong việc tìm kiếm tự động cơ cấu gãy đổ và tải trọng giới hạn tương ứng gây ra sự sụp đổ đó. Các ví dụ được chọn để thuận lợi cho việc tính toán nhưng chúng cũng mô tả đầy đủ các điều kiện biên như cạnh ngàm, tựa đơn hay tự do và các dạng tải trọng như tải tập trung hay phân bố đều. Trong các tính toán thì giá trị moment chảy dẻo trên một đơn vị chiều dài được ký hiệu là  $m$  và giá trị tải trọng tới hạn dự đoán bằng tiến trình tối ưu hóa được đưa dưới dạng hệ số cơ cấu  $L(\xi)/m$ . Tỷ lệ moment kháng dẻo cốt thép 2 phương là  $\mu=2$  được chọn để mô tả sự trục hướng.

**4.1. Sàn bê tông cốt thép chữ nhật tựa đơn ở ba cạnh đặt thép trục hướng**

Xét một ô sàn bê tông cốt thép tựa đơn ở ba cạnh, chịu lực phân bố đều  $p$  và sàn được đặt thép trục hướng với các giá trị moment kháng dẻo của cốt thép 2 phương là  $m_p, \mu m_p$ . Hai cơ cấu chảy dẻo xác định theo phương pháp giải tích cân bằng được vẽ như trên Hình 2 phụ thuộc vào tỷ lệ hai cạnh của bản sàn.



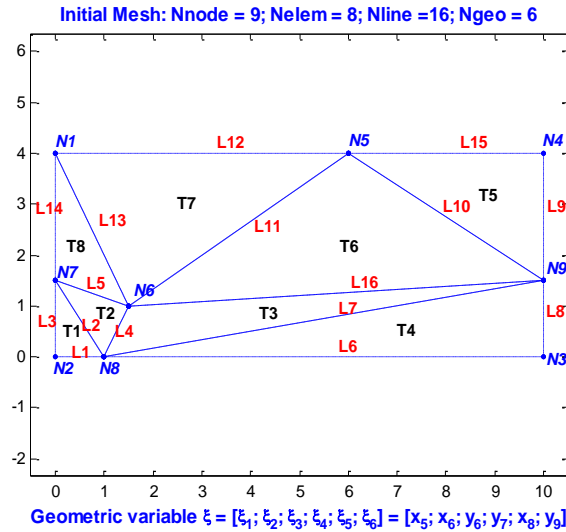
**Hình 2.** Cơ cấu gãy đổ và nghiệm giải tích với tỷ lệ hai cạnh (a) lớn hơn 0.68233 và (b) nhỏ hơn 0.68233

Để khảo sát khả năng tự động tìm cơ cấu gãy đổ và tải trọng tới hạn bằng chương trình mô phỏng số, ta sẽ xét 2 trường hợp cụ thể như sau:

Trường hợp (a):  $a=8; b=10; mp=100; \mu=2$ :

Hình 3. mô tả lưới ban đầu với các ký hiệu của cạnh, nút và phần tử được đánh nhãn

lần lượt là L, N và T. Các biến số vị trí nút  $\xi$  trong trường hợp này gồm có  $\xi_1$  là hoành độ x của nút N5;  $\xi_2$  là hoành độ x của nút N6;  $\xi_3$  là tung độ y của nút N6;  $\xi_4$  là tung độ y của nút N7;  $\xi_5$  là hoành độ x của nút N8;  $\xi_6$  là tung độ y của nút N9.

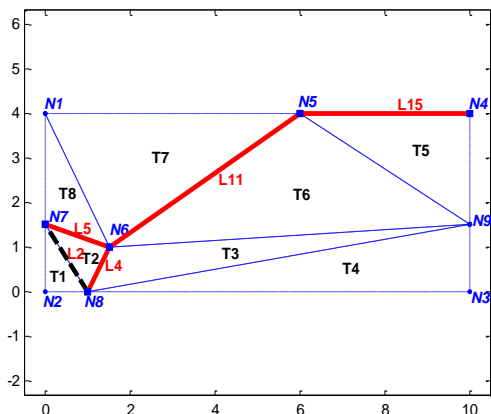


Hình 3. Lưới khởi tạo

Hình 4. mô tả kết quả lưới có hai phần tử T1 và T2 có xu hướng triệt tiêu và do đó các đường L2, L4 và L5 sẽ có xu hướng trùng nhau thành đường thẳng. Tổng góc xoay  $\theta_4$  và  $\theta_5$  hầu như xấp xỉ bằng góc xoay  $\theta_{11}$ . Điều này

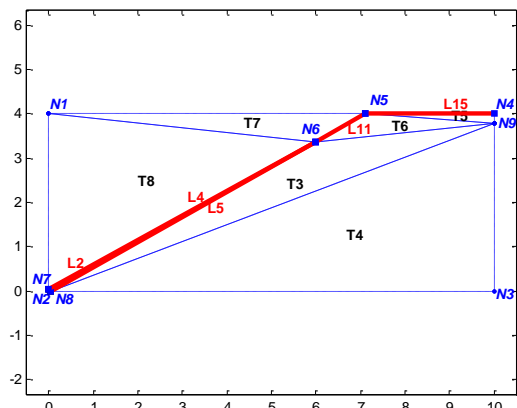
đã giúp cho quá trình tối ưu tự động dự đoán được sẽ có một đường chảy dẻo chảy thẳng vào góc của ô bản sàn đang khảo sát. Kết quả phân tích số với tối ưu hóa tự động được so sánh với lời giải chính xác ở Bảng 1.

First Iteration:  $\xi = [x_5; x_6; y_6; y_7; x_8; y_9] = [6; 1.5; 1; 1.5; 1; 1.5]; L(\xi) = 29.2063$



(a) Lưới khởi tạo

Optimum:  $\xi = [x_5; x_6; y_6; y_7; x_8; y_9] = [7.1123; 5.9968; 3.3726; 0.0328; 0.046671; 3.7912]; L(\xi) = 23.7552$



(b) Lưới tối ưu

Hình 4. Tiến trình tối ưu hóa tìm đường gãy đổ

**Bảng 1**

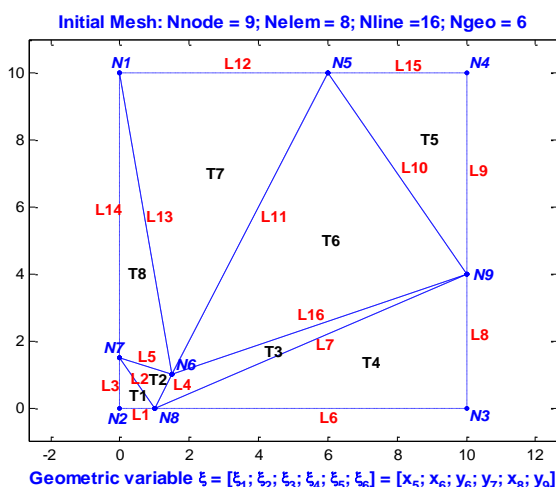
Tọa độ lưới tối ưu và giá trị tải tới hạn sàn tựa đơn với tỷ lệ cạnh lớn hơn 0.68233

Lời giải	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$	$\xi_5$	$\xi_6$	L ( $\xi$ )
Phân tích số	7.1123	-	-	0.0328	0.0467	-	23.7552
Giải tích	7.1073	-	-	0	0	-	23.7561

Trường hợp (b):  $a=20; b=10; mp=100; \mu=2$ :

Hình 5. mô tả lưới khởi tạo ban đầu với các biến số vị trí nút  $\xi$  trong trường hợp này như sau  $\xi_1$  là hoành độ x của nút N5;  $\xi_2$  là

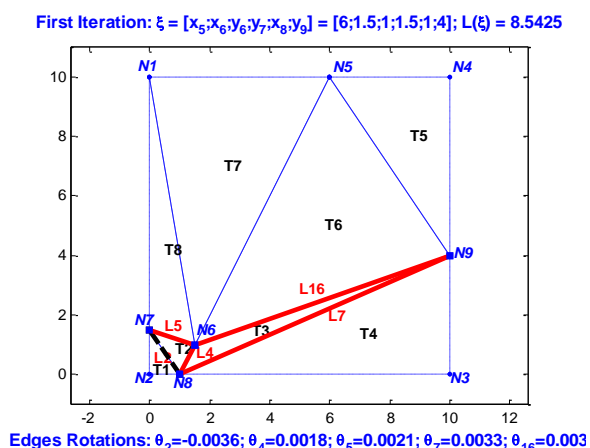
hoành độ x của nút N6;  $\xi_3$  là tung độ y của nút N6;  $\xi_4$  là tung độ y của nút N7;  $\xi_5$  là hoành độ x của nút N8;  $\xi_6$  là tung độ y của nút N9.



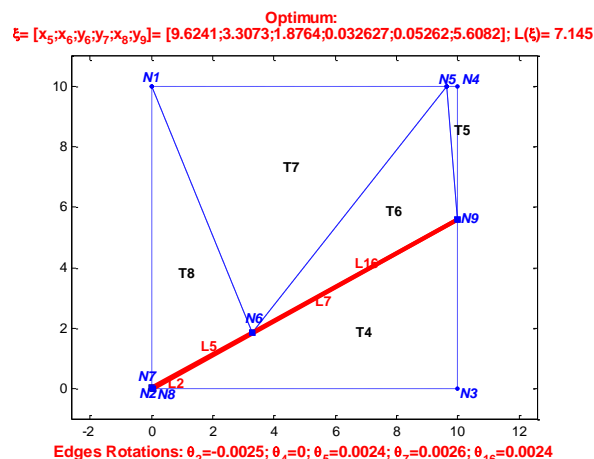
**Hình 5.** Lưới khởi tạo

Hình 6. mô tả lưới và các đường chảy dẻo xuất hiện trong tiến trình tối ưu của thời điểm khởi tạo ban đầu và thời điểm kết thúc tìm ra

ơ cấu gãy đổ và giá trị tải trọng tới hạn tương ứng cho ô sàn của trường hợp (b).



(a) Lưới khởi tạo



(b) Lưới tối ưu

**Hình 6.** Tiến trình tối ưu hóa tìm đường gãy đổ

Tương tự trường hợp (a), kết quả tối ưu hình trên hình 4.8.b cũng cho thấy phần tử T1, T2 và T3 có xu hướng triệt tiêu và các đường L2, L4, L5, L7 và L16 sẽ trở thành đường thẳng. Các giá trị góc xoay  $\theta_5, \theta_7$  và  $\theta_{16}$  hầu như bằng nhau và quá trình tối ưu cho kết quả

có đường chảy dẻo chảy thẳng vào góc của ô bản sàn đang khảo sát.

Kết quả phân tích số với tối ưu hóa tự động cũng được so sánh với lời giải chính xác cho ở Bảng 2 bên dưới đây

**Bảng 2**

Tọa độ lưới tối ưu và giá trị tải tới hạn sàn tựa đơn với tỷ lệ cạnh nhỏ hơn 0.68233

Lời giải	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$	$\xi_5$	$\xi_6$	L ( $\xi$ )
Phân tích số		-	-	0.0326	0.0526	5.6082	7.1450
Giải tích	-	-	-	0	0	5.5982	7.1452

**4.2. Sàn bê tông cốt thép chữ nhật ngàm bốn cạnh đặt thép trực hướng**

Xét một ô sàn bê tông cốt thép tựa ngàm ở bốn cạnh, chịu lực phân bố đều  $p$  và sàn được đặt thép trực hướng với các giá trị moment

kháng dẻo của cốt thép 2 phương là  $m_p, \mu m_p$ . Cơ cấu chảy dẻo với các giá trị tham biến xác định theo phương pháp giải tích cân bằng được vẽ trên Hình 7.

Giá trị tới hạn của biến định vị x:

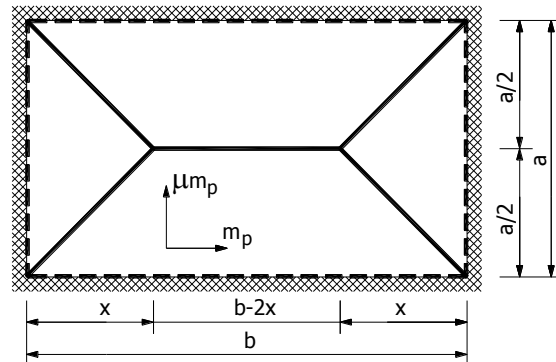
$$x = \frac{\mu a}{2} \left[ -\frac{a}{b} + \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{3}{\mu}} \right]$$

Giá trị tải trọng tới hạn tương ứng:

$$p = \frac{6m_p(1+i)}{x^2}$$

$$p = \frac{24m_p(1+i)}{\mu a^2 \left[ -\frac{a}{b} + \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{3}{\mu}} \right]^2}$$

(a)

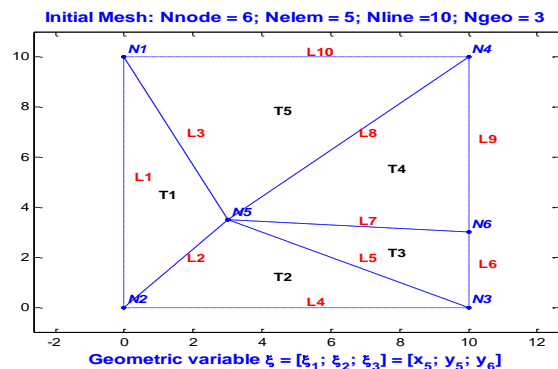


(b)

**Hình 7.** Tấm chữ nhật ngàm chịu tải phân bố đều: (a) nghiệm giải tích; (b) cơ cấu gãy đổ

Để mô phỏng số bài toán nêu trên, ta giả sử chọn  $a=10; b=20; m_p=100; \mu=2; i=1$ .

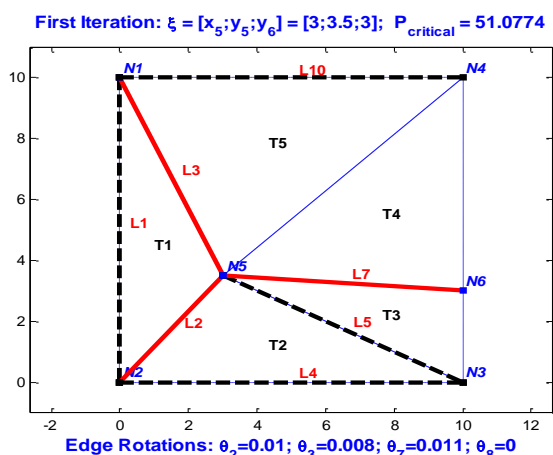
Do tính đối xứng nên chỉ một nửa tấm sàn được mô hình và phân tích. Hình 7 mô tả lưới ban đầu với các ký hiệu của cạnh, nút và phần tử được đánh nhãn lần lượt là L, N và T. Các biến số vị trí nút  $\xi$  trong trường hợp này như sau:  $\xi_1$  là hoành độ x của nút N5;  $\xi_2$  là tung độ y của nút N5;  $\xi_3$  là hoành độ x của nút N6.



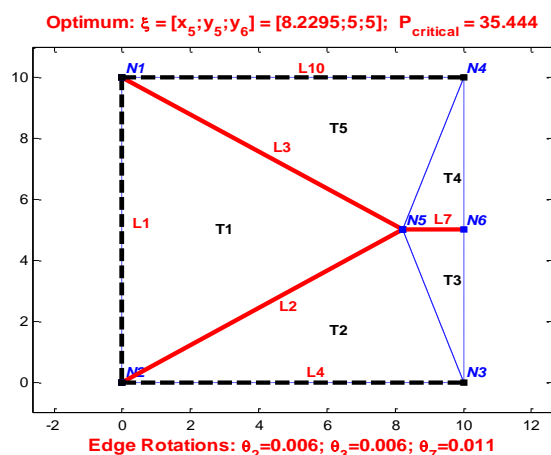
**Hình 8.** Lưới khởi tạo

Hình 9. mô tả lưới và các đường chảy dẻo xuất hiện trong tiến trình tối ưu của thời điểm khởi tạo ban đầu và thời điểm kết

thúc tìm ra cơ cấu gãy đổ và giá trị tải trọng tối hạn tương ứng cho ô sàn là  $L(\xi) = 35.4440$ .



(a) Lưới khởi tạo



(b) Lưới tối ưu

**Hình 9.** Tiến trình tối ưu hóa tìm đường gãy đổ

Cơ cấu gãy đổ cùng với giá trị tải trọng gây sụp đổ  $L(\xi) = 35.4440$  này được so sánh với lời giải chính xác cho ở Hình 2a. Cho ở Bảng 3 sau đây:

**Bảng 3**

Tọa độ lưới tối ưu và giá trị tải trọng tối hạn của sàn chữ nhật ngàm bốn cạnh

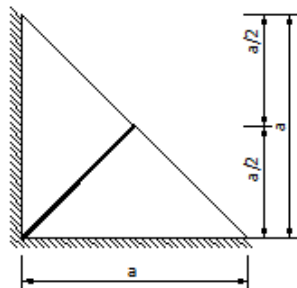
Lời giải	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$L(\xi)$
Phân tích số	8.2295	5.0000	5.0000	35.4440
Giải tích	8.2295	5.0000	5.0000	35.4440

**4.3. Sàn bê tông cốt thép tam giác tựa đơn trên hai cạnh**

Xét 1 ô sàn bê tông cốt thép hình tam giác tựa đơn ở 2 cạnh, đặt thép đẳng hướng chịu tải tập trung tại trung điểm cạnh tự do như Hình 10.

Lời giải chính xác cho hệ số tải trọng tối hạn

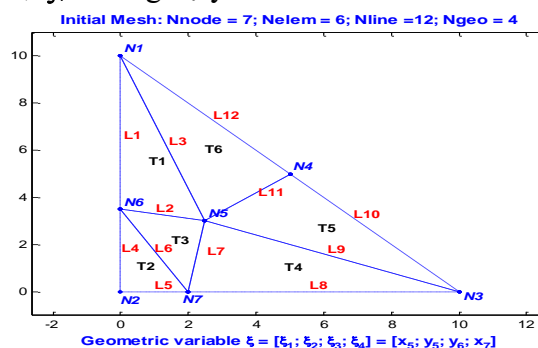
$$\alpha_c = \frac{2m_p}{P_o}$$



**Hình 10.** Tấm tam giác chịu tải tập trung

Mô phỏng số ô sàn ở hình 4.9. với các thông số giả sử như sau:  $a=10$ ;  $m_p=100$ ;  $P_o=10$ .

Hình 11. mô tả lưới khởi tạo ban đầu với các biến số vị trí nút  $\xi$  trong trường hợp này như sau  $\xi_1$  là hoành độ x của nút N5;  $\xi_2$  là hoành độ x của nút N6;  $\xi_3$  là tung độ y của nút N6;  $\xi_4$  là tung độ y của nút N7.

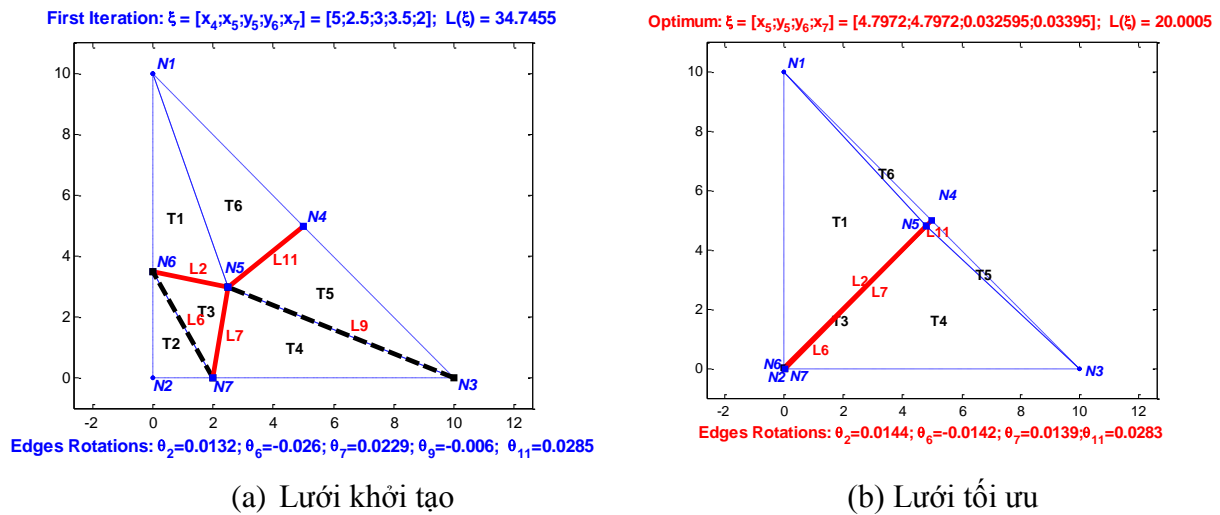


**Hình 11.** Lưới khởi tạo



Tiến trình tối ưu trên Hình 12b cho thấy kết quả phần tử T2 và T3 có xu hướng triệt tiêu và các đường L2, L6, L7 và L11 có xu hướng thành thẳng hàng. Các giá trị góc xoay  $\theta_5$ ,  $\theta_7$  và  $\theta_{16}$  cũng xấp xỉ như nhau. Điều này đã giúp cho

quá trình tối ưu tự động dự đoán được đường chảy dẻo chảy thẳng vào góc của ô bản sàn đang khảo sát. Giá trị hệ số tải trọng tới hạn tìm được là  $L(\xi) = 20.0005$  so sánh với giá trị giải tích là 20.0000 đạt độ chính xác khá cao.



Hình 12. Tiến trình tối ưu hóa tìm đường gãy dẻo

## 5. Kết luận

Bài báo này đã minh họa và đưa ra một chương trình tính toán tự động cơ cấu phá hủy cũng như giá trị tối ưu cận trên của tải trọng tới hạn cho các loại kết cấu tấm chịu uốn có các điều kiện biên khác nhau và tải trọng tác dụng bất kỳ dựa trên việc tối ưu hóa hệ lưới dùng phần tử Munro-Da Fonseca trong phân tích chảy dẻo. Các kết quả nghiên cứu số cũng đã được so sánh và kiểm chứng qua các lời giải giải tích cho

thấy tính hiệu quả và độ chính xác tin cậy cao của phương pháp. Tuy nhiên kỹ thuật tối ưu đề cập trong bài báo này còn một số hạn chế nhất định trong việc đạt được sự hội tụ ổn định bởi sự hiện diện của sự bất liên tục về độ dốc trong hàm tối ưu. Điều này sẽ được tiếp tục nghiên cứu và cải thiện trong thời gian sau này để có thể khảo sát thêm nhiều tham số ảnh hưởng đến tải trọng tới hạn như bề dày tấm, các cách đặt lưới cốt thép theo phương bất kỳ ■

## Tài liệu tham khảo

- Ingerslev A (1923). The strength of rectangular slabs. *The Structural Engineer*, 1, 3-14.
- Johansen KW (1962). Yield line theory. *London: Cement and Concrete Association*.
- Wood RH (1961). Plastic and elastic design of slabs and plates. *London: Thames & Hudson*.
- Jones LL (1962). Ultimate load analysis of reinforced and prestressed concrete structures. *London: Chatto and Windus*.
- Mansfield EH (1957). Studies in collapse analysis of rigid plastic plates with a square yield diagram. *Proceeding Royal Society*, 241, 311-338.
- Morley CT (1965). Equilibrium methods for exact upper bounds of rigid plastic plates. In: Recent developments in yield line theory. *London: Cement and Concrete Association, MCR Special Publication*.

- 
- Johnson D (1994). Mechanism determination by automated yield line analysis. *The Structural Engineer*, 72 (19/4), 323-327.
- Johnson D (1995). Yield-line analysis by sequential linear programming. *International Journal Solids Structures*, 32, 1395-1404.
- Salam Al-Sabah, Abd; Falter, Holger (2013). Finite element lower bound "yield line" analysis of isotropic slabs using rotation-free elements. *Engineering Structures*, 53, 38-51.
- Gilbert, M., He, L., Smith, C.C. & Le, C. (2014). Automatic Yield-Line Analysis of Slabs Using Discontinuity Layout Optimization. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 470 (2168).
- Munro J, Da Fonseca AMA (1978). Yield line method by finite elements and linear programming. *The Structural Engineer*, 56 (2), 37-44.
- Jennings A (1996). On the identification of yield-line collapse mechanisms. *Engineering Structures*, 18(4), 332-337.
- Gill PE, Murray W, Wright MH (1981). Practical optimisation. *New York: Academic Press*.
- McKeown JJ, Meegan D, Sprevak D (1990). An introduction to unconstrained optimisation. *Bristol: Adam Hilger*.
- Thavalingam, A., Jennings, A., McKeown, J.J., and Sloan.D (1998). A computerised method for rigid-plastic yield-line analysis of slabs. *Computers & Structures*, 68(6), 601-612.