УДК 517.548.2
ББК 22.161.5

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЛАВРЕНТЬЕВА — ЗОРИЧА О ГЛОБАЛЬНОМ ГОМЕОМОРФИЗМЕ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Е.А. Севостьянов, Р.Р. Салимов

Для некоторого класса отображений, более общих, чем локально квазиконформные, получен аналог хорошо известной теоремы Лаврентьева — Зорича о глобальном гомеоморфизме. В частности, показано, что локальные гомеоморфизмы класса Соболева $W^{1,n}_{loc}$, $n \geq 3$, внешняя дилатация $K_O(x, f)$ которых локально суммируема в $\mathbb{R}^n$ в степени $n-1$, инъективны в $\mathbb{R}^n$, как только $K_O^{n-1}(x, f) \leq Q(x)$ почти всюду при некоторой измеримой функции $Q(x)$, имеющей конечное среднее колебание (FMO) в окрестности бесконечно удаленной точки, либо удовлетворяющей условию расходимости интеграла специального вида. Упомянутый выше результат верен также и для некоторого более широкого класса отображений, удовлетворяющих определенным геометрическим условиям.

Ключевые слова: *квазиконформные отображения и их обобщения, модули семейств кривых, емкость.*

Введение

Основные утверждения настоящей статьи анонсированы в работе [5] без приведения какой-либо аргументации. Доказательство основного результата в данном тексте приведено схематично, поскольку здесь мы в значительной мере опираемся на замечание из работы [2, с. 532, 2-й абзац].

В 1938 г. М.А. Лаврентьевым было сделано предположение о том, что локально квазиконформные отображения пространства $\mathbb{R}^3$ являются гомеоморфизмами. Хорошо известным математиком В.А. Зоричем было получено следующее решение проблемы М.А. Лаврентьева (см. [1]).

Если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, локально гомеоморфное квазирегулярное отображение $\mathbb{R}^n$, то f является гомеоморфизмом, причем на все пространство $\mathbb{R}^n$.

Основная цель настоящей заметки заключается в распространении гипотезы М.А. Лаврентьева о глобальном гомеоморфизме, доказанной В.А. Зоричем в его работе [1], на более широкий случай. Мы покажем, что отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, удовлетворяющие относительно общим геометрическим соотношениям в окрестности бесконечно удаленной точки, являющиеся локальными гомеоморфизмами пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, инъективны. Необходимо заметить, что В.А. Зоричем был получен и более общий вариант его теоремы (см., напр.: [2]). Упомянем также недавнюю работу

М. Кристи [12] по этому поводу.

Перейдем теперь к определению упомянутых выше классов отображений. Как известно, в основу геометрического определения квазиконформных отображений, заданных в области D из $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, положено условие

$$M(f(\Gamma)) \leq K\, M(\Gamma) \tag{1}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D, где M — конформный модуль семейства кривых (внешняя мера, определенная на семействах кривых в $\mathbb{R}^n$), а $K \geq 1$ — некоторая постоянная. Другими словами, модуль любого семейства кривых искажается не более, чем в K раз. Пусть теперь в основе определения отображения f лежит неравенство вида

$$M(f(\Gamma)) \leq \int\limits_D Q(x) \cdot \rho^n(x) dm(x)\,, \tag{2}$$

где m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, ρ — произвольная неотрицательная борелевская функция, такая что произвольная кривая γ семейства Γ имеет длину, не меньшую 1 в метрике ρ, то есть криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_\gamma \rho(x)|dx|$ по каждой кривой $\gamma \in \Gamma$ удовлетворяет условию: $\int\limits_\gamma \rho(x)|dx| \geq 1$, а $Q : D \to [1, \infty]$ — некоторая (заданная) вещественнозначная функция (см., напр.: [16]). Изучению отображений, удовлетворяющих соотношению (2), посвящено значительное количество работ (см., напр.: [3; 5–8; 11; 12; 16; 17]). Отметим, что В.М. Миклюков исследовал некоторые классы отображений, удовлетворяющих аналогичным оценкам в терминах емкостей на поверхностях (см., напр.: [4]). При этом неравенство вида (2) анонсировано без приведения доказательства в работе [8] для так называемых отображений, квазиконформных в среднем. В частном случае, когда в соотношении (2) имеет место условие $Q(x) \leq K$ п.в., мы снова приходим к неравенству (1). В общем случае, когда это не обязательно так, неравенство (2) означает, что искажение модуля исходного семейства Γ происходит с некоторым весом $Q(x)$, $M\left(f(\Gamma)\right) \leq M_{Q(x)}(\Gamma)$ (см. работы А. Казаку Каберия [10] и М. Кристи [12]).

Как уже было отмечено выше, локальные гомеоморфизмы f, удовлетворяющие соотношениям вида (1), называемые в этом случае *локально квазиконформными отображениями*, инъективны при $n \geq 3$ (см., напр.: в [1]). Достаточно простой пример отображения $f(z) = e^z$ указывает, вообще говоря, на неверность последнего утверждения при $n = 2$.

В настоящей работе обозначены некоторые аналитические условия на функцию Q из более общего, нежели (1), соотношения (2), отличные от банального требования ее ограниченности, при которых локальные гомеоморфизмы f, удовлетворяющие неравенству (2) для произвольного семейства кривых Γ и любой $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, инъективны в $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 3$. Вопрос о точности условий в работе не обсуждается, однако, как показывает схематично построенный нами пример (см. теорему 2), ни одно из этих условий нельзя заменить на требование $Q \in L^p$, $p \geq 1$. Некоторые приложения нашего основного результата (теорема 1), относящиеся к гомеоморфизмам классов Соболева $W^{1,n}_{loc}$, могут быть найдены в заключительной части статьи (следствие 1).

1. Определения и предварительные сведения

Всюду далее D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Запись $f : D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f непрерывно. В дальнейшем $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ — одноточечная компактификация $\mathbb{R}^n$,

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}, \qquad \mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\},$$

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}, \qquad \mathbb{S}^{n-1} := S(0,1),$$

m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Пусть $Q : D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, тогда $q_{x_0}(r)$ — среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $|x - x_0| = r$,

$$q_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{|x-x_0|=r} Q(x)\, dS, \tag{3}$$

где dS — элемент площади поверхности S, ω_{n-1} означает площадь сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, Ω_n — объем единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{dist}(A, B)$ — евклидово расстояние между множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x) \quad |dx| \geq 1 \tag{4}$$

для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. В этом случае мы пишем: $\rho \in \mathrm{adm}\Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \mathrm{adm}\,\Gamma} \int\limits_{D} \rho^n(x) \quad dm(x).$$

Свойства модуля в некоторой мере аналогичны свойствам меры Лебега m в $\mathbb{R}^n$. Именно модуль пустого семейства кривых равен нулю, $M(\varnothing) = 0$, модуль обладает свойством монотонности относительно семейств кривых Γ_1 и Γ_2 : $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \Rightarrow M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2)$, а также свойством полуаддитивности (см. теорему 6.2 в [18]):

$$M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M(\Gamma_i). \tag{5}$$

Говорят, что семейство кривых Γ_1 *минорируется* семейством Γ_2, пишем $\Gamma_1 > \Gamma_2$, если для каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2. В этом случае $M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2)$ (см. теорему 6.4 в [18]).

Пусть $E,\, F \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ — произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E, F, D)$ семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, то есть $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$. Следующее понятие мотивировано одним из важнейших определений квазиконформности по Ф. Герингу, определившему квазиконформное отображение как гомеоморфизм f, искажающий емкость кольца в конечное число раз K, $1 \leq K < \infty$ (см. об этом раздел 13 в [13]). Пусть $r_0 = \mathrm{dist}\,(x_0, \partial D)$, $Q : D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция,

$$A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}, \tag{6}$$

$S_i = S(x_0, r_i)$. Говорят, что $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q–отображением в точке $x_0 \in D$,* если соотношение

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S_1,\, S_2,\, A\right)\right)\right)\ \leq \int\limits_{A} Q(x)\cdot \eta^n(|x-x_0|)\ dm(x) \tag{7}$$

выполнено для любого кольца $A = A(r_1, r_2, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < r_0$ и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr \geq 1\,. \tag{8}$$

Не лишним будет заметить, что условие (8) заменяет более общее требование допустимости (4) для специального семейства кривых $\Gamma\left(S_1,\, S_2,\, A\right)$. Заметим также, что если f является K-квазиконформным, то f удовлетворяет соотношению (7) при $Q(x) \equiv K \in [1, \infty)$. Исходя из сказанного выше, для нас в первую очередь представляет интерес случай неограниченных Q, ибо ситуация ограниченности последних полностью исследована в работе [1]. Пусть $x_0 \in D$. По аналогии, будем говорить, что $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q–отображением в точке* $x_0 \in D$, если соотношение (7) выполнено для каждой неотрицательной измеримой функции η, удовлетворяющей соотношению (8). При этом, здесь предполагается, что само отображение f будет определено лишь в проколотой окрестности точки x_0.

Для отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, имеющего в D частные производные почти всюду, пусть $f'(x)$ — якобиева матрица отображения f в точке x, $\|f'(x)\| = \max\limits_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}$. *Внешняя дилатация* отображения f в точке x определяется как величина

$$K_O(x,f) \quad = \quad = \begin{cases} \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x,f)|}, & J(x,f)\neq 0,\\ 1, & f'(x)=0,\\ \infty, & \text{в других случаях}\end{cases}\quad .$$

2. Вспомогательные результаты

Предложение 1. *Предположим, что область D содержит начало координат, $f : D \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, — кольцевое Q-отображение в нуле. Пусть, кроме того, найдутся $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(0, \partial D)$, и борелевская функция $\psi(t) : (0, \infty) \to (0, \infty)$, удовлетворяющая условию*

$$0 < I(\varepsilon_1, \varepsilon_2) := \int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \psi(t)dt < \infty \tag{9}$$

для произвольных $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_0)$, такие что при $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot \psi^n(|x|)\ dm(x)\ =\ o\left(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)\right)\,. \tag{10}$$

Обозначим через Γ семейство всех открытых кривых $\gamma(t) : (0,1) \to \mathbb{R}^n$, таких что $\gamma(t_k) \to 0$ при некоторой последовательности $t_k \to 0$ и $\gamma(t) \not\equiv 0$. Тогда $M(f(\Gamma)) = 0$.

Доказательство. Заметим, что

$$\Gamma > \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\,, \tag{11}$$

где Γ_i — семейство кривых $\alpha_i(t):(0,1)\to\mathbb{R}^n$ таких, что $\alpha_i(1)\in S(0,r_i)$, где r_i — некоторая последовательность, удовлетворяющая условиям $r_i<\varepsilon_0$, $r_i\to 0$ при $i\to\infty$, и $\alpha_i(t_k)\to 0$ для той же последовательности $t_k\to 0$. Зафиксируем $i\geq 1$, и $\varepsilon\in(0,r_i)$. Ввиду соотношения (9) имеем $I(\varepsilon,r_i)>0$ при всех $\varepsilon\in(0,r_i)$, где величина $I(\varepsilon,r_i)$ также определяется из (9). Заметим, что функция

$$\eta(t)=\begin{cases}\psi(t)/I(\varepsilon,r_i), & t\in(\varepsilon,r_i),\\ 0, & t\in\mathbb{R}\setminus(\varepsilon,r_i)\end{cases}$$

удовлетворяет условию нормировки вида (8) в кольце $A(\varepsilon,r_i,0)=\{x\in\mathbb{R}^n:\varepsilon<|x|<r_i\}$ и, следовательно, в силу соотношения (7)

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S(0,\varepsilon),\,S(0,r_i),\,A(\varepsilon,r_i,0)\right)\right)\right)\ \leq \int\limits_{A(\varepsilon,r_i,0)} Q(x)\cdot\eta^n(|x|)\,dm(x)\ \leq\mathfrak{F}_i(\varepsilon), \tag{12}$$

где $\mathfrak{F}_i(\varepsilon)=\frac{1}{I(\varepsilon,r_i)^n}\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\,\psi^n(|x|)\,dm(x)$. Учитывая (10), имеем $\mathfrak{F}_i(\varepsilon)\ \to\ 0$. Заметим, что при любом $\varepsilon\in(0,r_i)$

$$\Gamma_i>\Gamma\left(S(0,\varepsilon),\,S(0,r_i),\,A(\varepsilon,r_i,0)\right)\,. \tag{13}$$

Таким образом, при каждом фиксированном $i=1,2,\ldots$, из (12) и (13) получаем, что

$$M(f(\Gamma_i))\leq\mathfrak{F}_i(\varepsilon)\to 0 \tag{14}$$

при $\varepsilon\to 0$ и каждом фиксированном $i\in\mathbb{N}$. Однако левая часть неравенства (14) не зависит от ε и поэтому $M(f(\Gamma_i))=0$. Наконец, из (11) и свойства полуаддитивности модуля, см. (5), следует, что $M(f(\Gamma))=0$. $\Box$

Как и в работе [3], введем следующее определение, обобщающее понятие функций ограниченного среднего колебания по Джону — Ниренбергу (см. [14]). Будем говорить, что функция $\varphi:D\to\mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0\in D$, и писать $\varphi\in$ *FMO* в x_0, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \ \frac{1}{\Omega_n\cdot\varepsilon^n}\int\limits_{B(x_0,\varepsilon)}|\varphi(x)-\overline{\varphi}_\varepsilon|\ dm(x)\ <\ \infty\,, \tag{15}$$

где $\overline{\varphi}_\varepsilon=\frac{1}{\Omega_n\cdot\varepsilon^n}\int\limits_{B(x_0,\varepsilon)}\varphi(x)\ dm(x)$.

Предложение 2. *Пусть $Q:D\to[0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $D\subset\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, $x_0\in D$, такие, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

1) $Q\in FMO(x_0)$;

2)* $Q(x)\leq C\cdot\left(\log\frac{1}{|x-x_0|}\right)^{n-1}$;

2) $q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ *при* $r \to 0$;

3) при некотором $\delta(x_0) > 0$, $\delta(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ *и произвольных* $\varepsilon \in (0, \delta(x_0))$

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\delta(x_0)} \frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} < \infty \tag{16}$$

и

$$\int\limits_{0}^{\delta(x_0)} \frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty\,. \tag{17}$$

Тогда можно указать $\varepsilon_0 \in (0,1)$ *и функцию* $\psi(t) > 0$ *такие, что в точке* x_0 *выполнены условия (10) и (9) предложения 1.*

Разумеется, 2*) является просто частным случаем 2). Отметим, что если f является K-квазирегулярным отображением, то есть $Q(x) \equiv K$ в (7) для некоторой постоянной $K > 0$, каждое из условий 1)–3) предложения 2 автоматически выполнено. Отметим также, что соотношение (16) выражает собой интегральное условие расходимости, которое использовалось и ранее большим числом авторов (см., напр.: [15], [9] и [2]).

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$. Заключение предложения 2 в случае $Q \in FMO$ следует из следствия 6.3 гл. VI [16], которое утверждает, что условие $Q \in FMO(0)$ при некотором $\varepsilon_0 > 0$ влечет соотношение

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x|)\ dm(x) \;=\; O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\,, \tag{18}$$

где $0 < \psi(t) := \frac{1}{t\,\log\frac{1}{t}}$. Заметим также, что в обозначениях предложения 1 $I(\varepsilon,\varepsilon_0) :=$ $:= \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)dt = \log\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}$. Таким образом, соотношение (18) с учетом последнего завершает рассмотрение случая 1). Пусть теперь $q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ при $r \to 0$. Фиксируем $\varepsilon_0 < \min\{\ \operatorname{dist}\,(0,\,\partial D)\,,\ 1\}$. Полагаем $\psi(t) = \frac{1}{t\,\log\frac{1}{t}}$. Заметим, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)dm(x)}{\left(|x|\log\frac{1}{|x|}\right)^n} = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\left(\int\limits_{|x|=r}\frac{Q(x)dm(x)}{\left(|x|\log\frac{1}{|x|}\right)^n}\,dS\right)\,dr \le C\cdot\omega_{n-1}\cdot I(\varepsilon,\varepsilon_0)\,,$$

где, как прежде, $I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt$ и $C > 0$ — некоторая постоянная. Таким образом, случай 2) рассмотрен. Осталось рассмотреть случай 3). При каждом фиксированном $\varepsilon_0 < \delta(x_0)$ и произвольном $\varepsilon < \varepsilon_0$ рассмотрим функцию $I(\varepsilon,\varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)dt$, где

$$\psi(t) \quad = \quad \left\{\begin{array}{rl} 1/[tq_0^{\frac{1}{n-1}}(t)]\,, & t \in (\varepsilon,\varepsilon_0)\,, \\ 0\,, & t \notin (\varepsilon,\varepsilon_0)\,, \end{array}\right. \tag{19}$$

где $q_0(r) = q_{x_0}(r)$, $x_0 := 0$. Заметим, что $I(\varepsilon, \varepsilon_0) < \infty$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ в силу предположения (16). Тогда ввиду (17) можно считать, что $I(\varepsilon, \varepsilon_0) > 0 \ \ \forall\, (\varepsilon, \varepsilon_0)$. В таком случае функция $\psi(t)$, определенная соотношением (19), удовлетворяет соотношению (9) предложения 1. Кроме того, ψ удовлетворяет также соотношению (10), поскольку несложный подсчет показывает, что $\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x|)\ dm(x) = \omega_{n-1}\cdot I(\varepsilon, \varepsilon_0)$, причем $I(\varepsilon, \varepsilon_0) = o\left(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)\right)$ ввиду (17). Предложение 2 полностью доказано. □

Замечание. Отметим, что для локальных гомеоморфизмов, удовлетворяющих условиям типа (7), интеграл вида $\int\limits_{\varepsilon}^{\delta(x_0)} \frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}$ всегда конечен для произвольных сколь угодно малых ε. Подробности могут быть найдены, например, в работе [7], см. замечание 3.

3. Основной результат

Будем говорить, что отображение $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ есть *кольцевое Q-отображение в точке* $x_0 = \infty$, если отображение $\widetilde{f} = f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$ является кольцевым $\widetilde{Q}$-отображением в точке $x_0 = 0$ при $\widetilde{Q} = Q\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$. При этом, используя замену переменных $y := \frac{x}{|x|^2}$ в интеграле в правой части неравенства (7), можно переформулировать данное определение следующим образом. Отображение $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ будем называть *кольцевым Q-отображением в точке* $x_0 = \infty$, если соотношение

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S(0,R_1), S(0,R_2), A(R_1,R_2,0)\right)\right)\right) \le \int\limits_{A(R_1,R_2,0)} Q(y)\cdot\eta^n(|y|)dm(y) \qquad (20)$$

выполнено для произвольных $0 < R_1 < R_2 < \infty$ и произвольной неотрицательной измеримой функции $\eta : (R_1, R_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{R_1}^{R_2} \eta(r)dr \ge 1\,, \qquad (21)$$

где множество $A(R_1, R_2, 0) = A(R_1, R_2, x_0)$ при $x_0 = 0$ задается соотношением (6). Будем говорить, что функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в точке ∞, если функция $\varphi^*(x) = \varphi\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$ имеет конечное среднее колебание в точке 0. Заметим, что отображение $\psi(x) = \frac{x}{|x|^2}$ подобно отображает сферу $S(0, r)$ на сферу $S\left(0, 1/r\right)$, откуда следует, что $|J(x, \psi)| = (1/|x|)^{2n}$. Согласно сказанному, прибегая к замене переменной в интеграле в правой части соотношения (15), мы снова можем переформулировать определение конечного среднего колебания в точке ∞ в следующем виде. Будем говорить, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в точке ∞, пишем $\varphi \in FMO(\infty)$, если при $R \to \infty$

$$\int\limits_{|x|\,>\,R} |\varphi(x) - \varphi_R| \quad \frac{dm(x)}{|x|^{2n}} \quad = \quad O\left(\frac{1}{R^n}\right)\,, \qquad (22)$$

где $\varphi_R = \frac{R^n}{\Omega_n} \cdot \int\limits_{|x|>R} \varphi(x) \quad \frac{dm(x)}{|x|^{2n}}$. Аналогично для бесконечности можно переформулировать условия вида 2), 2*) и 3) предложения 2 предыдущего раздела, соответственно:

$$\frac{1}{\omega_{n-1} \cdot R^{n-1}} \int\limits_{S(0,\,R)} Q(x) \quad dS \quad = \quad O\left([\log R]^{n-1}\right); \tag{23}$$

$$Q(x) \quad = \quad O\left([\log |x|]^{n-1}\right) \quad \text{при} \quad x \to \infty; \tag{24}$$

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{dt}{t q_0^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty \tag{25}$$

для некоторого $\delta_0 > 0$.

Один полезный результат, используемый нами ниже, заключает в себе следующее.

Предложение 3. *Произвольное гомеоморфное отображение $f : D \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условию вида (7) в точке $x_0 = 0 \in D$, имеет конечный или бесконечный предел в этой точке, как только функция $Q(x)$ удовлетворяет требованию (10) предложения 1 при некоторой функции $\psi(t)$ с условием (9), см. лемму 4.1 и следствие 5.2 в [3]. При этом продолженное по непрерывности отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является гомеоморфизмом в D.*

Основной результат настоящей статьи заключает в себе следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что локальный гомеоморфизм $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, является кольцевым Q-отображением на бесконечности, то есть отображение f удовлетворяет условию вида (20) для произвольных $0 < R_1 < R_2 < \infty$ и любой неотрицательной измеримой по Лебегу функции η, для которой выполнено соотношение вида (21). Предположим, что функция $Q(x)$ либо имеет конечное среднее колебание на бесконечности, см. (22), либо удовлетворяет хотя бы одному из соотношений вида (23)–(25). Тогда f является гомеоморфизмом в $\mathbb{R}^n$, причем $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Ограничимся здесь схемой доказательства, опуская подробности. Известным математиком В.А. Зоричем, установившим справедливость данного утверждения для случая ограниченных Q, было замечено (см. 2-й абзац на с. 532 в [2]), что доказательство гомеоморфности отображения f использует лишь тот факт, что модуль семейства кривых Γ, уходящих на бесконечность, при рассматриваемом отображении f переходит в семейство Γ', такое что $M(\Gamma') = 0$. Воспользуемся теперь этим замечанием.

Из предложений 1 и 2 следует, что отображение $\widetilde{f} = f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$ переводит семейство Γ_0, состоящее из всех кривых, лежащих в $\mathbb{R}^n$ и стремящихся по некоторой последовательности к точке $x_0 = 0$ в семейство кривых, модуль которого равен нулю. Обозначая $\varphi(x) = \frac{x}{|x|^2}$ и через Γ_∞ семейство всех неограниченных кривых в $\mathbb{R}^n$, мы имеем, что $\Gamma_\infty = \varphi(\Gamma_0)$, и, значит,

$$M\left(f(\Gamma_\infty)\right) = M\left((f \circ \varphi)\,\Gamma_0\right) = M\left(\widetilde{f}(\Gamma_0)\right) = 0\,.$$

Таким образом, гомеоморфность отображения f следует из сделанного выше замечания, на основе рассуждений из работы [1].

Поскольку f — гомеоморфизм в $\mathbb{R}^n$, можно применить предложение 3 относительно инверсии $\widetilde{f} = f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$ в нуле, $\widetilde{f} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$. Тогда f — гомеоморфизм в $\overline{\mathbb{R}^n}$, при этом множество $f\left(\overline{\mathbb{R}^n}\right)$ одновременно открыто и замкнуто в $\overline{\mathbb{R}^n}$ (как гомеоморфный образ компактного и открытого множества в $\overline{\mathbb{R}^n}$), то есть $f\left(\overline{\mathbb{R}^n}\right) = \overline{\mathbb{R}^n}$ и, значит, $f\left(\mathbb{R}^n\right) = \mathbb{R}^n$. $\Box$

4. О методе построения локального гомеоморфизма, для которого нарушена теорема типа Лаврентьева — Зорича

Прежде всего хотелось бы отметить, что для локальных гомеоморфизмов, удовлетворяющих соотношению (1), условия вида (22)–(25) автоматически выполняются, поскольку указанный случай соответствует неравенству (7) при $Q(x) \equiv K$.

Следующий пример показывает, что условия на функцию $Q(x)$, сформулированные в предыдущем разделе, являются точными в некотором смысле. Именно условия на $Q(x)$ нельзя заменить более простым условием $Q\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \in L^p$ ни для какого (сколь угодно большого) $p > 1$.

Теорема 2. *Для каждого $p > 1$ найдется локальный гомеоморфизм $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, удовлетворяющий соотношению вида (20) с некоторым $Q(x)$, таким что $Q'(x) = Q\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \in L^p(\mathbb{B}^n)$, при этом f не является инъективным отображением в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Зададим гомеоморфизм $g : \overline{\mathbb{R}^n} \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ следующим образом:

$$g(x) = \frac{1 + |x|^\alpha}{|x|} \cdot x \,,$$

где $\alpha \in (0, n/p)$ (см. предложение 6.3 гл. VI в [16]). Это отображение является гомеоморфизмом, отображающим $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus \{0\}$ на множество $\{y \in \overline{\mathbb{R}^n} : |y| > 1\}$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$, при этом, можно показать, что g удовлетворяет соотношению вида (7) в нуле с

$$Q_g(x) \quad = \quad \left(\frac{1 + |x|^\alpha}{\alpha |x|^\alpha}\right)^{n-1} \,,$$

(см. [там же]). Заметим, что при $|x| < 1$ для некоторой постоянной $C > 0$ выполнено $Q_g(x) < \frac{C}{|x|^{\alpha(n-1)}}$ и, следовательно, $Q_g(x) \in L^p\left(\mathbb{B}^n\right)$, поскольку $\alpha p < n$. Полагаем

$$h(x) \quad = \quad \frac{g\left(\frac{x}{|x|^2}\right)}{\left|g\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\right|^2} \,.$$

Заметим, что h — гомеоморфизм пространства $\mathbb{R}^n$ на единичный шар $\mathbb{B}^n$, удовлетворяющий соотношению вида (20) с некоторой функцией $Q_h(x)$, причем по построению соответствующая функция $Q_h\left(\frac{x}{|x|^2}\right) = Q_g(x)$ суммируема в степени p в $\mathbb{B}^n$. Ясно, что единичный шар можно отобразить на некоторую область посредством локального q-квазиконформного отображения $s(x)$, которое преднамеренно можно выбрать не инъективным. Полагаем $f(x) = s \circ h(x)$. Построенное таким образом отображение, очевидно, не является инъективным в $\mathbb{R}^n$, однако удовлетворяет соотношению вида (20) на бесконечности с некоторой функцией $Q_f(x)$, в то время как соответствующая функция $Q_f\left(\frac{x}{|x|^2}\right) = q \cdot Q_g(x)$ суммируема со степенью p в $\mathbb{B}^n$. $\Box$

Напомним, что $y_0 \in D$ — *точка ветвления* отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, если ни в одной окрестности U точки y_0 сужение отображения $f|_U$ не является гомеоморфизмом. Совокупность всех точек ветвления f принято обозначать B_f.

Предложение 4. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение класса $W^{1,n}_{loc}(D \setminus \{x_0\})$, для которого $K_O^{n-1}(x,f) \in L^1_{loc}(D \setminus \{x_0\})$ и $m(B_f) = 0$. Тогда f удовлетворяет соотношению (7) в точке x_0 при каждой неотрицательной измеримой функции η, удовлетворяющей (8), и вполне конкретном значении $Q := K_O^{n-1}(x,f)$ (см. теорему 1 в [6]).*

На основании предложения 4 и теоремы 1 получаем следствие.

Следствие 1. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, — локальный гомеоморфизм класса $W^{1,n}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, для которого $K_O(x,f) \in L^{n-1}_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что функция $Q = K_O^{n-1}(x,f)$ имеет конечное среднее колебание на бесконечности, см. (22), либо удовлетворяет хотя бы одному из соотношений (23)–(25). Тогда f является гомеоморфизмом в $\mathbb{R}^n$, причем $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.*

Замечание. Элементарный пример отображения $f(z) = e^z$, действующего из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ и являющегося локально квазиконформным $Q(z) \equiv 1$, показывает, что при $n = 2$ теорема 1 и следствие 1 не имеют места.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зорич, В. А. Теорема М. А. Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства / В. А. Зорич // Мат. сб. — 1967. — Т. 116, № 3. — С. 415–433.
2. Зорич, В. А. О допустимом порядке роста характеристики квазиконформности в теореме М. А. Лаврентьева / В. А. Зорич // ДАН СССР. — 1968. — Т. 181, № 3. — С. 530–533.
3. Игнатьев, А. Конечное среднее колебание в теории отображений / А. Игнатьев, В. Рязанов // Укр. мат. вестн. — 2005. — Т. 2, № 3. — С. 395–417.
4. Миклюков, В. М. Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения / В. М. Миклюков. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2005. — 273 с.
5. Салимов, Р. Р. О теореме Лаврентьева — Зорича для отображений, более общих, чем квазиконформные / Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов // Докл. АН Украины. — 2010. — № 7. — С. 22–27.
6. Севостьянов, Е. А. Обобщение одной леммы Е. А. Полецкого на классы пространственных отображений / Е. А. Севостьянов // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 7. — С. 969–975.
7. Севостьянов, Е. А. О точках ветвления отображений с неограниченной характеристикой / Е. А. Севостьянов // Сиб. мат. журн. — 2010. — Т. 51, № 5. — С. 1129–1146.
8. Стругов, Ю. Ф. Компактность классов отображений, квазиконформных в среднем / Ю. Ф. Стругов // ДАН СССР. — 1978. — Т. 243, № 4. — С. 859–861.
9. Шабат, Б. В. К теории квазиконформных отображений в пространстве / Б. В. Шабат // ДАН СССР. — 1960. — Т. 132, № 5. — С. 1045–1048.

10. Andreian Cazacu, C. On the length-area dilatation / C. Andreian Cazacu // Complex Var. Theory Appl. — 2005. — V. 50, № 7–11. — P. 765–776.
11. Bishop, C. J. On conformal dilatation in space / C. J. Bishop, V. Ya. Gutlyanskii, O. Martio, M. Vuorinen // Intern. Journ. Math. and Math. Scie. — 2003. — V. 22. — P. 1397–1420.
12. Cristea, M. Mappings of finite distortion: Zoric's theorem, and equicontinuity results / M. Cristea // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. — 2007. — V. 52, № 5. — P. 539–554.
13. Gehring, F.W. Rings and quasiconformal mappings in space / F.W. Gehring // Trans. Amer. Math. Soc. — 1962. — V. 103. — P. 353–393.
14. John, F. On functions of bounded mean oscillation / F. John, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math. — 1961. — V. 14. — P. 415–426.
15. Lehto, O. Homeomorphisms with a prescribed dilatation / O. Lehto // Lecture Notes in Math., Springer–Verlag. — 1968. — V. 118. — P. 58–73.
16. Martio, O. Moduli in Modern Mapping Theory / O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. — N. Y. : Springer Science + Business Media, LLC, 2009. — 367 p.
17. Ukhlov, A. D. Sobolev spaces and mappings with bounded $(P;Q)$-distortion on Carnot groups / A. D. Ukhlov and S. K. Vodop'yanov // Bull. Sci. Mat. — 2009. — V. 52, № 4. — P. 349–370.
18. Väisälä, J. Lectures on n–Dimensional Quasiconformal Mappings / J. Väisälä // Lecture Notes in Math., Springer–Verlag. — 1971. — V. 229. — P. 1–144.

THE ANALOGUE OF THE LAVRENT'EV — ZORICH GLOBAL HOMEOMORPHISM THEOREM FOR THE MAPPINGS WITH NON-BOUNDED CHARACTERISTICS

E.A. Sevost'yanov, R.R. Salimov

It is obtained the analogue of the well-known Lavrent'ev — Zorich global homeomorphism theorem for some sufficiently wide class of mappings which are more general than locally quasiconformal. In fact, it is shown that the local homeomorphisms of the Sobolev class $W_{loc}^{1,n}$, $n \geq 3$, whose outher dilatation $K_O(x, f)$ is locally integrable in $\mathbb{R}^n$ in the degree $n-1$, are injective in $\mathbb{R}^n$ provided that the inequality $K_O^{n-1}(x, f) \leq Q(x)$ take a place at some function $Q(x)$, having a finite mean oscillation (FMO) in the neighborhood of the infinity, or satisfying some integral divergence condition. Moreover, the result mentioned above take a place for more general class of mappings satisfying some general geometrical conditions.

Key words: *quasiconformal mappings and it's generalizations, moduli of families of curves, capacity.*