

Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

---

**Présentée et soutenue par :**

**Hélène GALIEGUE**

Le jeudi 2 juillet 2015

**Titre :**

Modélisation des effets des scintillations ionosphériques  
sur la propagation des ondes électromagnétiques en bande L  
aux latitudes polaires

---

ED GEET : Électromagnétisme et Systèmes Haute Fréquence

**Unité de recherche :**

UMR 5213 - Laboratoire LAPLACE - CNRS-UPS-INPT

**Directeur(s) de Thèse :**

M. Laurent FERAL - LAPLACE/UPS

M. Vincent FABBRO - Onera/DEMR/RCP

**Rapporteurs :**

Mme Danielle VANHOENACKER-JANVIER - UCL

M. Bernard UGUEN - IETR

**Autre(s) membre(s) du jury :**

M. Pierre-Louis BLELLY - IRAP

M. Nicolas FLOURY - ESA

M. Jean-Luc ISSLER - CNES (invité)



*« Il est plus difficile de désagréger un préjugé qu'un atome. »*

*Einstein*



## Remerciements

---

Durant ces trois années de thèse, pleines de rebondissements, j'ai eu l'occasion de rencontrer de nombreuses personnes et, en espérant ne pas trop en oublier, je tiens à remercier chacune et chacun.

Je tiens dans un premier temps à remercier les membres du jury, tout d'abord Danielle Vanhoenacker-Janvier et Bernard Uguen pour avoir lu et rapporté mon manuscrit avec précision et bienveillance. Merci à Pierre-Louis Blelly d'avoir présidé ce jury et d'avoir corrigé les erreurs relatives à la description du milieu ionosphérique. J'espère sincèrement que cette thèse ouvrira à de futures collaborations entre les « gens du milieu » et les « gens de la propagation ». Merci enfin à Nicolas Flourey pour sa lecture attentive et son soutien pour ce travail de thèse et les résultats qu'il apporte.

Accueillie au sein du DEMR de l'Onera Toulouse, je remercie Mr Florent Christophe pour m'avoir toujours soutenue et pour être resté vigilant à corriger mes anglicismes. Je remercie également Laurent Castanet pour m'avoir motivée à effectuer ces travaux de thèse, puisque ce fut pour moi un beau défi technique et surtout une aventure humaine très riche. Bien sûr un grand merci à mes chers directeurs, Vincent Fabbro et Laurent Féral, fervents capitaines (en marinière) du bateau-thèse, nous permettant tous trois d'arriver à bon port. Merci pour vos conseils techniques, scéniques, tactiques... Vous formez un duo d'enfer et je viendrai avec plaisir voir vos prochains spectacles.

Co-financée CNES-Onera, je tiens à remercier le CNES et en tout premier lieu Françoise Carvalho pour son indispensable soutien du début à la fin de ma thèse. Je me suis parfois sentie telle Saggini dans une nouvelle de Buzzati, bien malgré moi, et je te remercie d'avoir défendu mon parcours et mon projet de reconversion. Un grand merci également à Sébastien Rougerie pour avoir repris dignement le flambeau du suivi de thèse et avoir corrigé mon manuscrit si précisément. Merci à Jean-Luc Issler d'avoir remplacé Sébastien au pied levé pour participer au jury de ma soutenance de thèse, et Frédéric pour son

soutien tout au long de mes aventures thésiennes. Je n'oublie pas Hervé, grand tapeur de pieds et pourvoyeur de drogues videogrammiques en vost. Toujours au CNES, un grand merci à Clémence, Elsa et Sandrine pour m'avoir toujours motivée et soutenue dans mes « aventures » au travail et ailleurs ! Merci à tous les chanteurs/chanteuses du lundi midi et aux cuistots du CNES...

Je tiens à remercier les équipes de la NMA qui m'ont fourni les données GNSS hautes latitudes avec lesquelles j'ai pu travailler durant cette thèse. Merci également à Sajan Mushini qui m'a permis d'étoffer ce travail avec des données supplémentaires du réseau CHAIN. Je remercie chaleureusement Aurélie Marchaudon de l'IRAP de m'avoir fourni des mesures radar SuperDARN. Merci enfin à Roberto Prieto-Cerdeira de m'avoir éclairée sur les indices de scintillation et les techniques de traitement de données GNSS.

On retourne à l'Onera, avec toute l'équipe du DEMR, les docteurs Mehdi, Xavier de Montpellier, Francky, Julien, Laurent et Thibault, les encore doctorants du super bureau 116 Christophe, Charles-Antoine, Gaëtan, et les combattifs prétendants au titre de champion de foot inter-étages Juan, Benjamin, Julien, Jonathan, Florian, Jean-Pascal. Spéciale dédicace aux filles bien sûr, Corinne, Claudine, Nadia, Belen, Isabelle et Isabelle, Paola, Maura, un jour on fera passer la barre au-dessus des 15% d'embauchées ! Je profite d'ailleurs de cette digression féministe pour remercier l'association Femmes & Sciences pour ses encouragements. Passons aux permanents Onera, accompagnants des pauses café, oreilles attentives à mes déblatérations, Jojo & Nico, Hervé, Thomas, Titi, Benjamin... Et encore Joël, Bastiaan, François, Xavier, Wilfrid, Laurent, Reynald, Jean-Philippe, Jean-Baptiste, Michaël, José, Jean-François, Patrick... N'oublions pas les autres départements, les docteurs tout neufs Sara, Gianluca, Manuel, et les permanents Daniel Boscher, Virginie, Claire et tous les Aéronotes. Merci à Colette Degas, Claude Doriac et Jean-Paul Nigoul pour leur gentillesse et leur disponibilité quand vient l'heure d'imprimer des posters ou des manuscrits pour la veille.

Un avant-dernier paragraphe pour remercier tous ceux qui ont assisté à ma soutenance, les anciens collègues de l'Onera et du CNES, et les nouveaux collègues de l'ENAC. Merci

pour votre présence et votre soutien pour la préparation de l'oral, en particulier à Alexandre, Rémi, Christophe et Ludovic du laboratoire EMA. Et merci bien sûr à la famille...

Je passe d'ailleurs à un dernier paragraphe pour remercier tous ceux qui, sans être à l'Onera ou au CNES, ni même dans la grande famille du spatial ont toujours répondu présent et m'ont encouragée durant ces trois années. Le premier que je veux remercier est mon Gwen. On a traversé beaucoup de moments difficiles mais tellement plus de moments heureux. Merci d'avoir toujours été là, d'avoir su gérer mes sautes d'humeur et les petits gars, d'avoir toujours maintenu le cap et réfréné aussi mon hyperactivité... à ton tour maintenant de te lancer dans cette aventure. Merci également à nos deux petits binious, même s'ils ne sauront lire ces lignes que dans quelques temps. En trois ans, l'aîné a doublé son âge et le deuxième l'a sextuplé. Ceux qui veulent pourront donc calculer leur année de naissance, pour ma part je retiens les grasses matinées (si, si !), les visionnages de *C'est pas sorcier* sur la technologie des pneumatiques et les bisous bien sûr. Je remercie mes parents Daniel et Brigitte, mes frères Laurent et Yves, et ma sœur Blandine : même de loin vous avez toujours été un pilier familial indéfectible. Merci à Christian qui a fait le chemin depuis Tarbes pour assister à ma soutenance et à la famille à Anglet. Merci à toute la belle-famille du « bout de la Terre », mes neveux, mes tantes, oncles, cousins et cousines, ma Bonne-mie... Merci à vous pour votre patience quand je tentais de vous expliquer les tenants et aboutissants de mon travail, tout en pensant intérieurement que je m'étais pourtant dit que je ne ferais jamais de thèse. A tous mes anciens collègues, dignes sentinelles de l'Education Nationale, Mathilde, Mélanie, Céline, Alex, Clément, Isa, Delphine et tous les autres, merci d'avoir suivi mes folies de changement et pour vos encouragements. Merci aux amis d'enfance Clairon, Isa & Vince, Christine, Astrid, aux amis de Villeneuve Cécile, Thomas, Eugénie, Vincent, Alice, aux ingénieurs du master TSI, aux amis de la musique, de la danse, des associations... C'est en mettant tout ça sur papier que je me rends compte à quel point j'étais bien entourée, et que j'avais la pression pour ne pas rater.

Ce fut vraiment une aventure humaine passionnante mais j'avoue ne pas avoir l'énergie de la retenter... pour l'instant. Une dernière fois merci à tous et bonne lecture maintenant !



---

<b>Introduction.....</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 : Description du milieu de propagation ionosphérique aux latitudes polaires.....</b>	<b>7</b>
1.1. Ionosphère : frontière atmosphère-espace.....	9
1.1.1. Ionosphère et Terre.....	9
1.1.2. Ionosphère et Soleil : problématique hautes latitudes.....	14
1.2. Impact de l'ionosphère sur la propagation des signaux GNSS.....	19
1.2.1. Réfraction ionosphérique à grande échelle.....	19
1.2.2. Scintillation ionosphérique.....	24
1.3. Modélisation des irrégularités ionosphériques.....	28
1.3.1. Morphologie des irrégularités.....	28
1.3.2. Spectre des irrégularités ionosphériques.....	32
1.4. Conclusion.....	37
<b>Chapitre 2 : Schémas numériques 3D et 2D de la propagation transionosphérique.....</b>	<b>39</b>
2.1. Schéma numérique STIPEE 3D-PWE/2D-MPS.....	41
2.1.1. Résolution numérique de l'équation de propagation 3D.....	41
2.1.2. Spectre des écrans de phase 2D.....	47
2.1.3. Spectre des fluctuations électroniques dans le repère du LOS.....	50
2.1.4. Implémentation numérique du schéma 3D/2D.....	53
2.2. Schéma numérique STIPEE 2D-PWE/1D-MPS.....	56
2.2.1. Résolution numérique de l'équation de propagation 2D.....	56
2.2.2. Spectre des écrans de phase 1D.....	59
2.2.3. Implémentation numérique du schéma 2D/1D.....	62
2.3. Comparaisons numériques.....	63
2.3.1. Comparaison de STIPEE avec les modèles transionosphériques existants.....	63
2.3.2. Comparaison des variances de log-amplitude et de phase aux latitudes équatoriales.....	67

2.3.3. Comparaison des variances de log-amplitude et de phase aux hautes latitudes.....	72
2.3.4. Comparaison des spectres de log-amplitude et de phase aux hautes latitudes.....	76
2.4. Conclusion.....	79
<b>Chapitre 3 : Résolution analytique des équations de propagation 3D et 2D...</b>	<b>81</b>
3.1. Hypothèses de travail 3D et 2D.....	83
3.1.1. Géométrie et repères de travail.....	83
3.1.2. Résolution en régime de faibles perturbations.....	85
3.2. Variances de log-amplitude 3D et 2D.....	88
3.2.1. Expression intégrale de la variance de log-amplitude 3D.....	88
3.2.2. Hypothèses simplificatrices 3D.....	94
3.2.3. Expression asymptotique de la variance de log-amplitude 3D.....	97
3.2.4. Expression intégrale de la variance de log-amplitude 2D.....	101
3.2.5. Hypothèses simplificatrices 2D.....	105
3.2.6. Expression asymptotique de la variance de log-amplitude 2D.....	108
3.2.7. Rapport 3D/2D des variances de log-amplitude.....	111
3.3. Variances de phase 3D et 2D.....	114
3.3.1. Variances de phase 3D.....	114
3.3.2. Variances de phase 2D.....	118
3.3.3. Ratio 3D/2D des variances de phase.....	121
3.4. Spectres de log-amplitude 3D et 2D.....	123
3.4.1. Expression intégrale du spectre de log-amplitude 3D.....	123
3.4.2. Expressions asymptotiques du spectre de log-amplitude 3D.....	126
3.4.3. Expression analytique du spectre de log-amplitude 2D.....	127
3.4.4. Expressions asymptotiques du spectre de log-amplitude 2D.....	129
3.5. Spectres de phase 3D et 2D.....	132
3.5.1. Expressions intégrale et asymptotiques du spectre de phase 3D.....	132
3.5.2. Expressions analytique et asymptotiques du spectre de phase 2D.....	134
3.6. Conclusion.....	136

<b>Chapitre 4 : Etude de sensibilité des variances et spectres de log-amplitude et de phase ; application au traitement préliminaire de données hautes latitudes.....</b>	<b>139</b>
4.1. Étude paramétrique des variances de phase et d'amplitude.....	141
4.1.1. Variance de phase $\langle \varphi^2 \rangle$ .....	141
4.1.2. Cas particulier : comparaison des variances de phase aux hautes et basses latitudes.....	152
4.1.3. Variance de log-amplitude $\langle \chi^2 \rangle$ .....	153
4.1.4. Cas particulier : comparaison des variances de log-amplitude aux hautes et basses latitudes.....	163
4.1.5. Synthèse de l'étude paramétrique des variances.....	164
4.2. Étude paramétrique des spectres de phase et de log-amplitude.....	166
4.2.1. Spectre de phase $W_\varphi$ .....	166
4.2.2. Spectre de log-amplitude $W_\chi$ .....	174
4.2.3. Synthèse de l'étude des spectres de phase et de log-amplitude.....	183
4.3. Analyse des spectres fréquentiels expérimentaux.....	187
4.3.1. Données expérimentales hautes latitudes.....	187
4.3.2. Sélection des événements de scintillation.....	190
4.3.3. Étude des spectres de phase et des spectres de STEC.....	194
4.3.4. Étude des spectres d'amplitude.....	199
4.3.5. Étude d'un événement de scintillation du réseau CHAIN.....	201
4.4. Conclusion.....	205
<b>Conclusion.....</b>	<b>207</b>
<b>Annexe 1 : Calcul simplifié d'Appleton-Hartree.....</b>	<b>211</b>
<b>Annexe 2 : Expressions de <math>R_{iono}</math> en <math>L_V</math> en fonction des paramètres géométriques de la propagation.....</b>	<b>213</b>
<b>Annexe 3 : Correspondances avec les formulations Rino.....</b>	<b>218</b>
<b>Annexe 4 : Simplification du ratio des variances de log-amplitude 3D/2D....</b>	<b>225</b>
<b>Annexe 5 : Calcul des variances de phase 3D et 2D.....</b>	<b>227</b>
<b>Annexe 6 : Expressions asymptotiques des spectres de log-amplitude 3D et 2D.....</b>	<b>231</b>

<b>Annexe 7 : Expressions asymptotiques des spectres de phase 3D et 2D.....</b>	<b>237</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>241</b>
<b>Abstract.....</b>	<b>248</b>

## Liste des figures

1.1	Concentrations électroniques typiques des latitudes moyennes.....	10
1.2	Schéma du champ magnétique terrestre [ <a href="http://www.patana.ac.th/secondary/scienc/astrophysics/ntopic6/commentary.htm">http://www.patana.ac.th/secondary/scienc/astrophysics/ntopic6/commentary.htm</a> ].....	11
1.3	Cartographie des zones de convection et des vitesses de drift obtenue par imagerie radar (réseau SuperDARN), 14/02/2011, 19:32:00 UT [courtesy of Marchaudon, IRAP].....	14
1.4	Schéma de la dynamique du plasma et des zones magnétiques qui entourent la Terre .....	15
1.5	Reconstruction volumique des concentrations d'électrons $N_e$ dans l'ionosphère, du 30/10/2003 de 18:00:00 UT au 31/10/2012 à 00:00:00 UT de (a) à (d). Les zones transparentes représentent les iso-contours à $5.10^{11}$ el.m <sup>-3</sup> , les opaques sont à $10^{12}$ el.m <sup>-3</sup> [Spencer, 2007].....	16
1.6	Flux d'électrons aux latitudes polaires (erg/s/cm <sup>2</sup> ) obtenu à partir du modèle de Zhang-Paxton [Zhang & Paxton, 2008], $K_p = 5$ , le 24/12/2009 à 08:50 UT.....	17
1.7	Liaison récepteur terrestre – satellite vue dans le plan méridien.....	20
1.8	Exemple de cartographie VTEC fournie par le modèle NeQuick, 08/02/2000 [ <a href="http://t-ict4d.ictp.it/nequick2">http://t-ict4d.ictp.it/nequick2</a> ].....	22
1.9	STEC et VTEC pour le satellite GPS n°26 (valeurs non calibrées), le 14/07/2012, entre 05:00 et 10:00 UT.....	23
1.10	Extrapolation de données Eiscat (de haut en bas) : concentration électronique, températures des électrons, température des ions, vitesse des ions dans la direction du LOS ; du 16/02/1993 à 10h au 17/02/1993 à 21h [Blelly et al., 2005].....	24
1.11	(a) intensité et (b) phase du signal brut des données GPS Septentrio à Tromsoe (Norvège), 13/07/2012, 10:00:00 UT.....	25
1.12	Profondeur d'évanouissement ionosphérique en bande L sur des années de maximum et de minimum d'activité solaire [Basu et al., 1988].....	27
1.13	Géométrie de l'irrégularité ionosphérique dans le repère lié aux lignes de champ magnétique terrestre $\vec{H}_0$ ; $a = 1$ , $b = 4$ et $c = 8$ .....	29

1.14	Morphologie des irrégularités ionosphériques pour une activité magnétique modérée aux hautes latitudes, côté nuit [Livingston et al., 1982].....	30
1.15	Représentation des 3 géométries étudiées : (a) rods ou ellipsoïdes (1: 1: 3), (b) sheets ou feuillets (1: 5: 5) et (c) wings ou ailes de plasma (1: 3: 6).....	31
1.16	Cascade inertielle représentative du processus turbulent 3D [Wheelon, 2004 (1)].....	33
1.17	Distribution des valeurs de pente $q$ (a) aux latitudes équatoriales [Béniguel & Hamel, 2011] et (b) aux hautes latitudes [Mushini, 2012].....	35
2.1	Représentation du repère $(u, v, s)$ lié au LOS dans le repère géographique local ; R désigne le récepteur terrestre.....	41
2.2	Description générale des schémas numériques en géométrie 3D : propagation dans $(u, v, s)$ et écrans de phase selon $(u, v)$ .....	47
2.3	Changement de variable somme / différence.....	48
2.4	Repérage de $(x_H, y_H, z_H)$ dans $(u, v, s)$ avec (a) et sans (b) la représentation de l'irrégularité ionosphérique.....	51
2.5	Exemples de réalisation d'écran de phase 2D $\phi(u, v)$ et géométrie correspondante (a) aux hautes latitudes et (b) aux latitudes équatoriales.....	54
2.6	Description générale des schémas numériques en géométrie 2D : propagation 2D dans $(u, s)$ et écrans de phase 1D selon $(u)$ .....	59
2.7	Représentation de l'irrégularité ionosphérique 3D avec le plan de propagation 2D $(u, s)$ en rouge et le plan transverse $(u, v)$ en bleu.....	63
2.8	Configuration basses latitudes, plan de coupe 2D tel que $\alpha = 0$ .....	68
2.9	Résultats des simulations numériques pour une configuration équatoriale, plan de coupe dans la petite dimension de l'irrégularité.....	69
2.10	Rapport des variances de log-amplitude 3D et 2D en fonction de l'angle de coupe $\alpha$ pour une configuration basses latitudes.....	70
2.11	Rapport des variances de phase 3D et 2D en fonction de l'angle de coupe $\alpha$ pour une configuration basses latitudes.....	71
2.12	Représentation d'une liaison Terre-satellite aux hautes latitudes.....	72
2.13	Configuration hautes latitudes, plan de coupe 2D tel que $\alpha = 0$ .....	74

2.14	Rapport des variances de log-amplitude 3D et 2D en fonction de l'angle de coupe $\alpha$ et de l'anisotropie $A_z$ , pour une configuration hautes latitudes.....	75
2.15	Rapport des variances de phase 3D et 2D en fonction de l'angle de coupe $\alpha$ et de l'anisotropie $A_z$ pour une configuration hautes latitudes.....	76
2.16	Spectres fréquentiels de (a) log-amplitude et (b) phase dans une configuration hautes latitudes.....	78
3.1	Schéma de la liaison transionosphérique étudiée.....	83
3.2	Configurations 3D $(u, v, s)$ et plan de réduction dimensionnelle 2D $(u, s)$ en rouge.....	84
3.3	Représentation du vecteur $\vec{r}$ dans les repères (a) 3D $(u, v, s)$ et (b) 2D $(u, s)$ , centrés sur le récepteur R.....	86
3.4	Coupe de l'irrégularité dans le plan $(u, v)$ en pointillés rouges et définition du repère $(u', v')$ lié aux axes principaux de l'ellipse.....	92
3.5	Comparaison du spectre de concentration électronique (en rouge) et de la fonction de filtrage spatial (en bleu) (échelle logarithmique).....	95
3.6	Résultats numériques et analytiques de l'indice $S_4$ pour une configuration hautes latitudes.....	100
3.7	Résultats numériques et analytiques de l'indice $S_4$ pour une configuration 2D hautes latitudes.....	110
3.8	Résultats numériques et analytiques de $\sigma_\phi$ pour une configuration hautes latitudes.....	117
3.9	Résultats numériques et analytiques de l'indice $\sigma_\phi$ pour une configuration 2D hautes latitudes en fonction du ratio d'anisotropie $A_z$ .....	120
3.10	Spectres de log-amplitude 3D analytiques et numérique.....	127
3.11	Spectres de log-amplitude 2D analytiques et numérique.....	130
3.12	Spectres de phase 3D analytiques et numérique.....	133
3.13	Spectres de phase 2D analytiques et numérique.....	135
4.1	Spectre des fluctuations de densité électronique en fonction de l'échelle externe des irrégularités $L_0$ .....	145
4.2	Variations de $f(p)$ en fonction de l'indice spectral $p$ .....	146
4.3	Irrégularité ellipsoïdale 1: 1: $A_z$ et angle d'arrivée $\gamma$ .....	147

4.4	Indice de phase $\sigma_\phi$ (rad) en fonction de l'angle d'arrivée $\gamma$ et du ratio d'anisotropie $A_z$ , pour une forme d'irrégularité ellipsoïdale 1: 1: $A_z$ .....	148
4.5	Feuillet plasmique 1: $A_z$ : $A_z$ dans le repère $(u, v, s)$ .....	149
4.6	Indice de phase $\sigma_\phi$ (rad) en fonction des angles d'arrivée $\gamma$ et $\psi$ , et du ratio d'anisotropie $A_z$ pour une forme d'irrégularité en feuillet 1: $A_z$ : $A_z$ .....	149
4.7	Variations de $\sigma_\phi$ (rad) en fonction des angles d'arrivée $\gamma$ et $\psi$ , et du ratio d'anisotropie $A_z$ pour différentes valeurs du ratio transverse (a) $A_y = 1.8$ , (b) $A_y = 2.4$ et (c) $A_y = 3$ , forme d'irrégularité en aile 1: $A_y$ : $A_z$ .....	152
4.8	Influence de l'indice spectral $p$ sur l'indice de scintillation $S_4$ .....	156
4.9	Indice de scintillation $S_4$ en fonction de $p - 1$ ; valeurs issues du réseau CHAIN, événements de scintillation de 2009 à 2011 [Mushini, 2012].....	157
4.10	Indice $S_4$ en fonction de l'angle d'arrivée $\gamma$ et du ratio d'anisotropie $A_z$ pour une forme d'irrégularité ellipsoïdale 1: 1: $A_z$ .....	158
4.11	Indice $S_4$ en fonction des angles d'arrivée sur l'irrégularité ionosphérique et du ratio d'anisotropie $A_z$ pour une forme d'irrégularité en feuillet 1: $A_z$ : $A_z$ .....	160
4.12	Variations de $S_4$ , en $\text{dB}^2$ , en fonction des angles d'arrivée gamma et delta et pour différentes valeurs des ratio d'anisotropie $A_y$ et $A_z$ , (a) $A_y = 1.8$ , (b) $A_y = 2.4$ et (c) $A_y = 3$ , pour une forme d'irrégularité en aile 1: $A_y$ : $A_z$ .....	162
4.13	Influence de l'indice spectral $p$ sur l'asymptote hautes fréquences du spectre de phase.....	169
4.14	Influence du ratio d'anisotropie $A_z$ et de l'angle d'arrivée $\gamma$ ((a) $\gamma = 0$ , (b) $\gamma = 5^\circ$ et (c) $\gamma = 15^\circ$ ) sur l'asymptote hautes fréquences du spectre de phase, forme d'irrégularité ellipsoïdale 1: 1: $A_z$ .....	170
4.15	Influence du ratio d'anisotropie $A_z$ et des angles d'arrivée $\gamma$ et $\psi$ sur l'asymptote hautes fréquences du spectre de phase, pour une forme d'irrégularité en feuillet 1: $A_z$ : $A_z$ .....	171
4.16	Influence des ratios d'anisotropie $A_y$ et $A_z$ et des angles d'arrivée $\gamma$ et $\psi$ sur l'asymptote hautes fréquences du spectre de phase, ailes de plasma 1: $A_y$ : $A_z$ . .....	172

4.17	Influence des composantes de la vitesse de drift $V_u$ et $V_v$ sur le spectre de phase (trait plein) et son asymptote HF (tirets), forme d'irrégularité ellipsoïdale 1: 1: $A_z$ .....	173
4.18	Influence de la fréquence $f$ du signal sur le spectre de log-amplitude (trait plein) et les asymptotes HF (tirets) et BF (tirets-pointillés).....	176
4.19	Influence de l'altitude $H$ de la couche ionosphérique sur les asymptotes HF et BF du spectre de log-amplitude .....	177
4.20	Influence de l'indice spectral $p$ sur les asymptotes HF et BF du spectre de log-amplitude.....	178
4.21	Influence du ratio d'anisotropie $A_z$ et de l'angle d'arrivée $\gamma$ sur le spectre de log-amplitude (trait plein) et les asymptotes BF (tirets-pointillés) et HF (tirets), pour une forme d'irrégularité ellipsoïdale 1: 1: $A_z$ .....	180
4.22	Influence du ratio d'anisotropie $A_z$ et des angles d'arrivée $\gamma$ et $\psi$ sur le spectre de log-amplitude (trait plein) et les asymptotes BF (tirets-pointillés) et HF (tirets), pour une forme d'irrégularité en feuillet 1: $A_z$ : $A_z$ ...	181
4.23	Influence des ratios d'anisotropie $A_z$ et $A_y$ , et de l'angle d'arrivée $\gamma$ sur le spectre de log-amplitude (trait plein) et les asymptotes BF (tirets-pointillés) et HF (tirets), pour une forme d'irrégularité en aile 1: $A_y$ : $A_z$ .....	182
4.24	Influence des composantes de la vitesse de drift $V_u$ et $V_v$ sur les asymptotes HF et BF du spectre de log-amplitude.....	183
4.25	Carte de couverture du réseau SuperDARN aux latitudes polaires (pôle Nord) ( <a href="http://vt.superdarn.org/">http://vt.superdarn.org/</a> ).....	186
4.26	Localisation des scintillateurs en Norvège.....	188
4.27	Comparaison des indices de scintillation fournis par les ISMR et calculés à partir des données brutes, station Tromsø, le 15/07/2012, (a et a') PRN 17 à 23h, (b et b') PRN 4 à 00h UT.....	191
4.28	Histogramme des indices $S_4$ et $\sigma_\phi$ pour les stations Tromsø (en haut) et Vega (en bas), de février 2012 à février 2013.....	192
4.29	Correspondance entre la disponibilité d'un signal EGNOS et l'indice AATR, récepteur MAS 1 aux Canaries, octobre à décembre 2000 [Juan et al., 2013].	194

4.30	Échantillons de données brutes de phase et spectres fréquentiels correspondants, le 10/09/2012 (a) pour la station Tromsoe 00:08 UT, PRN 19 et (b) pour la station Vega 00:31 UT, PRN 15.....	195
4.31	Exemple de spectre de <i>STEC</i> , le 10/09/2012 pour la station Tromsoe 00:08 UT, PRN 19.....	198
4.32	(a) Intensité du signal reçu et (b) de log-amplitude correspondant pour 2 intervalles de temps, station Tromsoe, PRN 19, 15/07/2012 à 19:00 UT.....	200
4.33	Puissance mesurée en fonction du temps (a) dans [Mushini, 2012] et (b) dans cette thèse.....	202
4.34	Comparaison des spectres fréquentiels de log-puissance de Mushini (colonne de gauche) et issus du traitement de la thèse (colonne de droite) pour les 4 événements de scintillation, i.e. minutes (a) 22, (b) 28, (c) 29 et (d) 37.....	203

## Liste des tableaux

---

2.1	Paramètres d'entrée des générations d'écrans de phase 2D aux hautes et basses latitudes.....	53
2.2	Comparatif entre 3 modèles PWE/MPS existants et le modèle STIPEE.....	66
2.3	Valeurs des paramètres d'entrée en configuration équatoriale.....	69
2.4	Valeurs des paramètres d'entrée en configuration hautes latitudes.....	74
2.5	Valeurs des paramètres d'entrée en configuration hautes latitudes et vitesses de drift dans le plan transverse.....	77
4.1	Paramètres d'entrée influant sur les variances de log-amplitude et de phase.....	141
4.2	Synthèse de l'étude de sensibilité des variances de log-amplitude et de phase 3D.....	165
4.3	Synthèse de l'étude de sensibilité des spectres de log-amplitude et de phase 3D.....	184
4.4	Résultats de l'analyse de l'événement de scintillation données Septentrio, Tromsø, 15/07/2012, PRN 19, 19h16 et 19h17.....	201
4.5	Comparaison des résultats de Mushini [2012] et de Galiègue pour 4 événements de scintillation mesurés sur Novatel.....	204



AATR	Along-Arc TEC Rate
AE	Auroral Electrojet index
ASCII	American Standard Code for Information Interchange
CHAIN	Canadian High Arctic Ionospheric Network
CNES	Centre National d'Études Spatiales
DCB	Differential Code Biases
EISCAT	European Incoherent SCATter
ESA	European Space Agency
ESR	EISCAT Svalbard Radar
EUREF	European Reference Frame
GISM	Global Ionospheric Scintillation Model
GNSS	Global Navigation Satellite Systems
GPS	Global Positioning System
IGRF	International Geomagnetic Reference Field
IGS	International GNSS Service
IMF	Interplanetary Magnetic Field
IPGP	Institut de Physique du Globe de Paris
IPP	Ionospheric Penetration Point
IRAP	Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie
IRI	International Reference Ionosphere
ITU	International Telecommunication Union
LOS	Line-Of-Sight
MLT	Magnetic Local Time
MPS	Multiple Phase screen
MUF	Maximum Usable Frequency
NMA	Norwegian Mapping Authority
NSC	Norwegian Space Center
NWRA	NorthWest Research Associates
PLL	Phase Lock Loop
PPP	Precise Point Positioning

PWE	Parabolic Wave Equation
ROT	Rate Of TEC
ROTI	Rate Of TEC Index
SBF	Septentrio Binary Format
SIGMA	Satellite-beacon Ionospheric-scintillation Global Model of the upper Atmosphere
SSF	Split-Step Fourier
SSN	Sun Spot Number
STEC	Slant TEC
STIPEE	Software Tool for Ionospheric Propagation Events Evaluation
SuperDARN	Super Dual Auroral Radar Network
TEC	Total Electron Content
TECU	TEC Unit
TF	Transformée de Fourier
TRANSCAR	TRANSport au CARré
UV	Ultra-Violet
VHF	Very High Frequency
VTEC	Vertical TEC
WBMOD	Wide-Band Scintillation Model

$a$	Paramètre d'échelle anisotrope selon l'axe $x_H$
$A$	Facteur géométrique dans le repère $(u, v, s)$
$A'$	Facteur géométrique dans le repère principal de l'ellipse $(u', v', s)$
$\mathcal{A}$	Amplitude du signal reçu
$A_y$	Ratio d'anisotropie selon l'axe secondaire $y_H$ défini par $b/a$
$A_z$	Ratio d'anisotropie selon l'axe principale $z_H$ défini par $c/a$
$b$	Paramètres d'échelle anisotrope selon l'axe $y_H$
	Champ magnétique local
$B$	Facteur géométrique dans le repère $(u, v, s)$
$B'$	Facteur géométrique dans le repère principal de l'ellipse $(u', v', s)$
$B_{\Delta N_e}$	Fonction de covariance des fluctuations de densité électronique
$B_\phi$	Fonction de covariance des écrans de phase
$B_{IMF}$	Champ magnétique de l'IMF
$B_T$	Champ magnétique terrestre
$c$	Célérité de la lumière
	Paramètre d'échelle anisotrope selon l'axe $z_H$
$C$	Facteur géométrique dans le repère $(u, v, s)$
$C_s$	Constante de structure ionosphérique
$e$	Charge élémentaire
$e$	Champ électrique local
$el$	Électron
$E$	Champ électrique induit dans l'ionosphère
$\mathcal{E}$	Élévation du satellite
$f$	Fréquence (Hz)
$f_p$	Fréquence de coupure des asymptotes HF et BF des spectres de log-amplitude
$f_p$	Fréquence plasma
${}_2F_1$	Fonction hypergéométrique
$F_{\varphi/\chi}$	Fonction de filtrage en phase ou en log-amplitude

$G$	Fonction de Green
$H$	Altitude de la couche ionosphérique
$\Delta H$	Épaisseur de la couche ionosphérique
$H_0$	Excitation magnétique
$H_0^{(1)}$	Fonction de Hankel de premier type et d'ordre 0
$i$	$\sqrt{-1}$
$\Im$	Partie imaginaire
$I$	Composante en phase du signal GPS brut Terme désignant une intégrale à résoudre
$I_1$	Point de sortie du signal en bas de la couche ionosphérique
$I_2$	Point d'entrée du signal en haut de la couche ionosphérique
$J$	Courant électrique induit dans l'ionosphère
$J_0$	Fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0
$K$	Vecteur d'onde (rad/m)
$k_0$	Nombre d'onde dans le vide
$K_0$	Nombre d'onde lié à l'échelle externe $L_0$
$K_i$	Nombre d'onde lié à l'échelle interne $l_0$
$l_0$	Échelle interne
$L_0$	Échelle externe
$L_c$	Dimension transversale de l'irrégularité ionosphérique sur le plan $(u, v)$
$L_f$	Longueur de Fresnel
$L_s$	Longueur de corrélation selon le LOS
$L_{screen}$	Longueur des écrans de phase
$L_V$	Longueur parcourue par le signal entre le bas de la couche ionosphérique et le récepteur
$m_e$	Masse de l'électron
$n$	Indice de réfraction ionosphérique
$\Delta n$	Variations de l'indice de réfraction
$N_e$	Concentration électronique
$\Delta N_e$	Fluctuations de concentration électronique
$p$	Indice spectral
$\wp$	Fonction de profil vertical

$P$	Variable d'intégration
$q$	Charge des particules
	Pente des spectres mesurés
$Q$	Opérateur pseudo-différentiel
	Variable d'intégration
	Composante en quadrature de phase du signal GPS brut
$r_e$	Rayon électronique
$r$	Vecteur position
$R$	Vecteur position du récepteur
	Variable d'intégration
$R_{iono}$	Distance parcourue par le signal dans l'ionosphère
$R_T$	Rayon de la Terre
$R_\chi$	Rapport des variances de log-amplitude
$R_\phi$	Rapport des variances de phase
$\Re$	Partie réelle
$S_4$	Indice de scintillation d'amplitude
$S_{\Delta N_e}$	Spectre de fluctuations de densité électronique
$S_\phi$	Spectre des écrans de phase
$\delta s$	Distance séparant deux écrans de phase consécutifs selon l'axe $s$
$t$	Temps
$T$	Variable d'intégration
$(u, v, s)$	Repère lié au LOS (selon $s$ )
$\delta u$	Pas d'échantillonnage entre deux points consécutifs d'un écran de phase
$V$	Vitesse de drift du milieu dans le référentiel terrestre
$W_{\phi/\chi}$	Spectre de phase / de log-amplitude
$(x_H, y_H, z_H)$	Repère lié au champ magnétique terrestre (selon $z_H$ )
$\alpha$	Angle défini dans le repère du LOS $(u, v, s)$ entre la projection du vecteur champ magnétique sur le plan $(u, v)$ et l'axe $v$
$\alpha_y$	Angle défini dans le repère du LOS $(u, v, s)$ entre la projection du vecteur $y_H$ sur le plan $(u, v)$ et l'axe $v$
$\gamma$	Angle défini dans le repère du LOS $(u, v, s)$ entre la direction du champ

	magnétique terrestre et l'axe $s$
$\Gamma$	Fonction gamma
$\delta$	Distribution de Dirac
$\varepsilon$	Permittivité diélectrique
	Angle entre les axes $u$ et $u'$ des repères $(u, v, s)$ et $(u', v', s)$
$\varepsilon_r$	Permittivité relative
$\varepsilon_0$	Permittivité du vide
$\epsilon$	Expression intermédiaire au calcul du champ électrique
$\vartheta$	Angle entre la verticale locale au récepteur et le LOS
$\vartheta'$	Angle entre la verticale locale à l'IPP et le LOS
$\lambda$	Longueur d'onde du signal traversant
$\lambda_R$	Latitude de la station réceptrice
$\mu_0$	Perméabilité du vide
$\nu$	Indice spectral utilisé par Rino
	Fréquence de collision des particules neutres
$\xi$	Variable d'intégration
$\sigma_\varphi$	Indice de scintillation de phase
$\sigma_{\Delta N_e}^2$	Variance des fluctuations de densité électronique
$\Sigma$	Terme intermédiaire pour les calculs de transformée de Fourier
$\zeta$	Rapport $R_{iono}/2 L_V$
$\tau$	Intervalle de temps pendant lequel le milieu ionosphérique ne change pas de caractéristique moyenne
$\varphi$	Phase du signal reçu
$\phi$	Écran de phase transverse au LOS
$\chi$	Log-amplitude du signal reçu
$\psi$	Angle défini dans le repère du LOS $(u, v, s)$ entre la projection du vecteur $y_H$ sur le plan $(u, v)$ et l'axe $y_H$
$\Psi$	Fonction utilisée dans l'approximation de Rytov
$\omega$	Pulsation (rad/s)
$\omega_c$	Pulsation à l'intersection des asymptotes HF et BF du spectre de log-amplitude
$\omega_p$	Pulsation plasma

### **Problématique et enjeux de la modélisation de la propagation transionosphérique aux latitudes polaires**

Depuis le déploiement des satellites de positionnement GPS (Global Positioning System), les applications et les perspectives d'utilisation des signaux GNSS (Global Navigation Satellite System) connaissent un grand essor. Outre le positionnement sur route terrestre, les satellites Galileo, que l'Europe commence à déployer, ont ainsi pour objectif d'étendre leurs services de localisation et de navigation aux domaines maritimes et aériens [ESA, 2014]. Pour garantir la sécurité des utilisateurs, les spécifications en terme de précision, d'intégrité et de disponibilité des signaux sont donc extrêmement exigeantes. Or, tout au long de son trajet depuis le satellite émetteur jusqu'au récepteur terrestre, le signal radioélectrique traverse plusieurs couches de l'atmosphère qui altèrent sa qualité. C'est en particulier le cas de l'ionosphère.

Localisée entre 50 et 600 km d'altitude, cette couche de plasma turbulent, sous l'influence du vent solaire et du champ magnétique terrestre, est le siège de fluctuations turbulentes de sa densité électronique, se traduisant par des variations rapides de l'indice de réfraction ionosphérique. Ces variations génèrent des fluctuations rapides de l'amplitude et de la phase des signaux radioélectriques la traversant, jusqu'à des fréquences de 12 GHz [ITU-R, 2012]. Ce phénomène perturbateur est appelé scintillation ionosphérique. Pour les signaux GNSS en bande L (1 à 2 GHz), la scintillation peut entraîner des erreurs de positionnement, parfois même la perte de la liaison avec le satellite. Il est donc nécessaire d'évaluer quantitativement les effets de la scintillation ionosphérique. L'ionosphère étant un milieu très complexe et fluctuant, on caractérise usuellement ses effets sur la propagation des signaux en termes de variance de log-amplitude (ou indice de scintillation d'amplitude  $S_4$ ) et de phase (ou indice de scintillation de phase  $\sigma_\varphi$ ).

Deux régions sont particulièrement propices à l'apparition de scintillations ionosphériques : les latitudes équatoriales et les latitudes polaires [Aarons, 1982]. Plusieurs modèles ont été développés pour évaluer les effets de scintillation ionosphérique sur la propagation des signaux radioélectriques, notamment aux latitudes basses. Tous relèvent de la modélisation de la propagation en milieu aléatoire et reposent sur des approches analytiques ou numériques qui nécessitent une description probabiliste des fluctuations du plasma ionosphérique, ou irrégularités ionosphériques, en terme de covariance  $B_{\Delta N_e}$  (ou de densité spectrale  $S_{\Delta N_e}$ ) des fluctuations de la densité électronique  $\Delta N_e$ .

De nombreux travaux traitent de la modélisation analytique de la propagation en milieu turbulent [Tatarskii, 1961], [Singleton, 1970], [Yeh & Liu, 1982], [Wheelon, 2004 (1)], [Gherm et al., 2005]. L'approximation de Rytov, valable en faibles perturbations, i.e. pour les variances de log-amplitude inférieures à 1 dB<sup>2</sup>, est classiquement utilisée et permet de dériver analytiquement les variances de log-amplitude et de phase affectant les signaux radioélectriques ainsi que les spectres associés. Ces formulations constituent des outils importants pour l'identification des paramètres du milieu responsables des dégradations des signaux. Cependant, outre le fait que les expressions analytiques ne puissent reproduire les situations de fortes perturbations, elles se limitent également à des profils constants de la densité électronique avec l'altitude.

Pour pallier les limitations de l'approche analytique, des modèles numériques de propagation transionosphérique ont été développés. Ils sont basés sur la résolution de l'équation parabolique 3D (3D Parabolic Wave equation, 3D-PWE) couplée à un ou plusieurs écrans de phase bidimensionnels, transverses à la direction de propagation (2D Multiple Phase Screens, 2D-MPS), définissant un schéma numérique 3D-PWE/2D-MPS.

Ainsi, le WideBand ionospheric scintillation MODel (WBMOD) [Fremouw & Secan, 1984] utilise un modèle d'écran de phase unique 2D, décrit par Rino [1979 (1)]. Le logiciel SCINTMOD [Secan & Bussey, 1994] rend WBMOD applicable à la propagation

transionosphérique aux latitudes polaires. Un modèle d'écrans de phase multiple est étudié et proposé par Knepp [1983]. On peut également citer les travaux de Grimault [1998], sur la propagation d'ondes sphériques à travers des écrans de phase multiples. Si ces modèles sont majoritairement dédiés à la propagation transionosphérique aux latitudes équatoriales, Deshpande et al. [2014] ont récemment développé un modèle adapté aux latitudes polaires : Satellite-beacon Ionospheric-scintillation Global Model of the upper Atmosphere (SIGMA).

Un inconvénient majeur de ces modèles 3D-PWE/2D-MPS est le temps de calcul. Béniguel [2002] et Béniguel & Hamel [2011] ont alors développé le modèle Global Ionospheric Scintillation propagation Model (GISM). Il est également basé sur la technique PWE-MPS mais, contrairement aux modèles décrits précédemment, les écrans ne sont ici qu'à une seule dimension et définissent alors un schéma numérique 2D-PWE/1D-MPS. GISM est utilisé principalement aux latitudes équatoriales pour lesquelles les irrégularités ionosphériques sont très allongées dans le plan horizontal. Dans cette situation, les résultats numériques des indices de scintillation montrent une bonne correspondance avec les mesures expérimentales [Béniguel et al., 2009]. Les auteurs ont alors justifié qualitativement la validité de leur réduction dimensionnelle 2D-PWE/1D-MPS par la forte anisotropie des irrégularités turbulentes. **Mais quelle est quantitativement l'erreur introduite par un schéma numérique 2D sur l'estimation de la variance de la log-amplitude ? Quel est son lien, suggéré dans [Béniguel & Buonomo, 1999], avec la morphologie (notamment l'anisotropie) des irrégularités ionosphériques aux latitudes équatoriales ?**

Aux latitudes polaires, l'élévation des satellites GPS est typiquement de 50°. L'épaisseur de la couche ionosphérique traversée par le signal peut alors atteindre plusieurs centaines de km. L'utilisation d'un schéma numérique 3D-PWE/2D-MPS devient alors très coûteuse en temps de calcul. Selon les caractéristiques géométriques de la liaison et la morphologie des irrégularités ionosphériques aux hautes latitudes, **peut-on alors utiliser un schéma numérique réduit 2D-PWE/1D-MPS pour prédire les effets des scintillations ionosphériques 3D aux latitudes polaires ? Si non, quelle est l'erreur introduite par la réduction dimensionnelle sur l'estimation des indices de**

**scintillation d'amplitude ? De phase ? Sur l'estimation du spectre d'amplitude ? Du spectre de phase ?** Autant de questions auxquelles tente de répondre ce manuscrit.

### **Organisation du manuscrit**

L'objectif de cette thèse est donc de développer un modèle direct complet de la scintillation ionosphérique qui tienne compte de la morphologie des irrégularités turbulentes aux latitudes polaires.

La première étape du travail a consisté à comprendre les mécanismes de formation de ces irrégularités de densité d'électrons et à analyser en particulier leur anisotropie, fortement influencée par le champ magnétique terrestre et les champs électriques induits. L'approche probabiliste a été choisie car elle est la plus raisonnable pour appréhender la complexité et la forte variabilité du plasma. Le milieu ionosphérique ainsi que le spectre des irrégularités anisotropes sont décrits dans le premier chapitre de ce manuscrit.

La deuxième étape a consisté à implémenter le spectre des fluctuations de concentration électronique dans un modèle numérique de type écrans de phase, dans des schémas 3D-PWE/2D-MPS et 2D-PWE/1D-MPS. Les modèles numériques existants travaillent avec des écrans de phase 2D ou 1D définis dans le repère géomagnétique local, selon un plan horizontal. Dans ce manuscrit, le repère de travail original choisi pour modéliser la propagation transionosphérique est lié à la direction de propagation, les écrans de phase étant alors définis dans le plan perpendiculaire au LOS. On verra tout au long du manuscrit que la problématique de réduction dimensionnelle est plus facile à appréhender dans ce repère. Le deuxième chapitre de cette étude est donc dédié à la description du modèle transionosphérique ainsi qu'à la comparaison des résultats obtenus dans les configurations de propagation 3D et 2D aux latitudes équatoriales et polaires.

Les différences observées entre les sorties des configurations 3D et 2D s'expliquent difficilement à partir des seuls schémas numériques. L'idée a donc été de résoudre les équations électromagnétiques de la propagation à travers l'ionosphère et de dériver analytiquement les expressions des variances de log-amplitude et de phase des signaux traversants. Dans le chapitre 3, les formulations de ces variances, mais également celles des densités spectrales de puissance, ou spectres fréquentiels, de la log-amplitude et de la phase des signaux sont dérivées dans le repère du LOS. Les expressions obtenues en 3D correspondent d'ailleurs à celles déjà énoncées par Rino [1979 (1)] dans le repère géomagnétique. En parallèle, un formalisme analytique 2D original est proposé. Les dérivations ainsi menées permettent d'une part de valider les schémas numériques développés au chapitre 2 et d'autre part de quantifier l'erreur introduite par la réduction dimensionnelle 3D/2D sur les variances de log-amplitude et de phase des signaux et sur les spectres correspondants.

Comme on dispose au chapitre 3 des dérivations analytiques des variances et des spectres de log-amplitude et de phase, la dernière étape a consisté à étudier la sensibilité de ces différents termes aux paramètres d'entrée. Le chapitre 4 fait donc la synthèse de la modélisation du problème direct et propose également des perspectives d'inversion des données spectrales. Ainsi, une analyse préliminaire des données expérimentales issues de scintillateurs situés en Norvège et au Canada est également présentée.

Une conclusion vient terminer le manuscrit en reprenant les étapes principales du travail mené tout au long de cette thèse ainsi que les futurs axes de recherche.



## **Chapitre 1 : Description du milieu de propagation ionosphérique aux latitudes polaires**

---

A la frontière entre l'espace interplanétaire et l'atmosphère terrestre neutre, le plasma ionosphérique est soumis au champ magnétique de la Terre ainsi qu'au vent et aux radiations solaires. Les régions polaires, où les lignes de champ magnétiques terrestres sont verticales, subissent directement l'arrivée de particules issues du vent solaire. Les aurores polaires sont ainsi une des manifestations des réactions chimiques qui se produisent dans l'ionosphère en cas d'activité magnétique importante et d'arrivée massive de particules solaires. Les mouvements des particules chargées du plasma créent des courants et des champs électriques induits, rendant la dynamique ionosphérique extrêmement complexe à étudier [Lilensten & Blelly, 1999]. La concentration des électrons dépend de nombreux paramètres et connaît des fluctuations rapides aussi bien spatialement que temporellement. Ce phénomène de variations, notamment à l'origine de perturbations de l'amplitude et de la phase des signaux GNSS transionosphériques, est la scintillation ionosphérique.

L'objectif de ce premier chapitre est de proposer une modélisation de ce phénomène. On appelle irrégularités ionosphériques les structures spatio-temporelles de fluctuations de

la densité électronique. Si l'étude précise du milieu ionosphérique, très complexe, n'est pas l'objet de cette thèse, il est important de connaître les principaux moteurs de la dynamique ionosphérique afin de mieux comprendre les mécanismes de formation de ces irrégularités ionosphériques. C'est l'objet de la première partie de ce chapitre. L'inhomogénéité du milieu entraîne des variations de l'indice de réfraction et donc perturbe la propagation des signaux radioélectriques transionosphériques. A large échelle, cette inhomogénéité est responsable de la réfraction. A petite échelle, les fluctuations rapides de l'indice de réfraction sont à l'origine de la scintillation ionosphérique. Ces deux phénomènes perturbateurs sont abordés dans la deuxième partie. De par la forte variabilité de la densité électronique, une description statistique du phénomène de scintillation est proposée dans la troisième partie.

## **1.1. Ionosphère : frontière atmosphère-espace**

Les références principalement utilisées dans cette première partie sont issues de la littérature dédiée à la météorologie spatiale et à la description de l'ionosphère : [Giraud & Petit, 1975], [Lilensten & Blelly, 1999], [Hunsucker & Hargreaves, 2003].

### **1.1.1. Ionosphère et Terre**

Localisée entre 50 et 600 km d'altitude environ, l'ionosphère tire son nom de sa composition : les atomes et molécules neutres des couches d'atmosphère inférieures y sont ionisés par les radiations solaires de haute énergie, les rayons X et UV. Côté jour, la concentration des photoélectrons ainsi créés varie entre  $10^3$  et  $10^6$  électrons/cm<sup>3</sup>, alors que la densité de particules neutres à ces altitudes se situe entre  $10^8$  et  $10^{10}$  particules/cm<sup>3</sup>. Le taux d'ionisation reste donc relativement faible pour un plasma : 1% maximum des particules neutres est ionisé. Cette photo-ionisation n'ayant pas lieu côté nuit, la concentration des particules chargées y est plus faible. L'ionisation des particules neutres est également fonction de la pénétration du rayonnement solaire, donc de son énergie. Les couches supérieures de l'ionosphère sont alors davantage ionisées que les couches les plus basses. De même, l'ionisation des particules neutres est plus efficace aux latitudes pour lesquelles l'angle solaire zénithal, c'est-à-dire l'angle entre la verticale locale et la direction des rayons solaires, est le plus faible : les zones équatoriales présentent donc une concentration électronique plus élevée que les latitudes moyennes et hautes. Selon ce même phénomène, des variations saisonnières apparaissent également, surtout aux moyennes et hautes latitudes. La figure 1.1 présente un profil typique de la concentration des électrons dans l'ionosphère, côté jour, pour des latitudes moyennes.

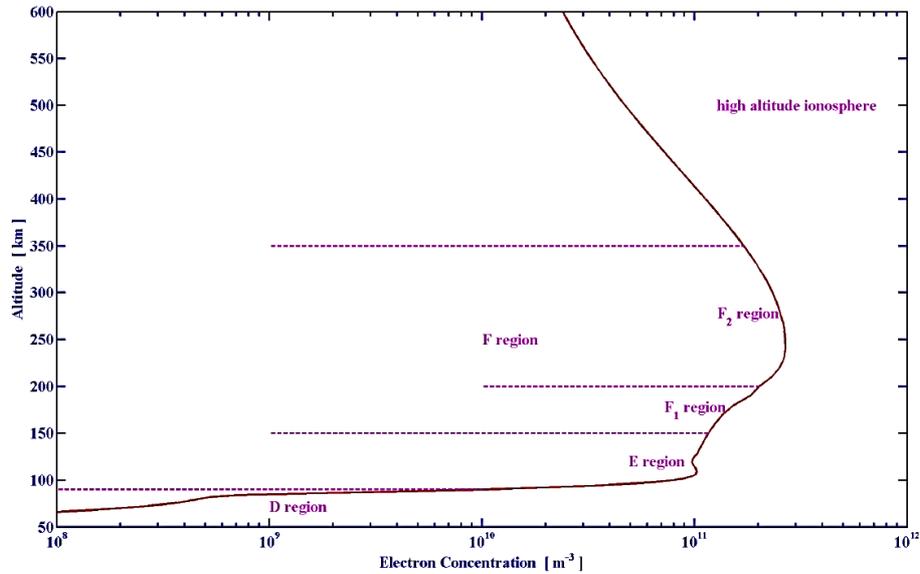


Figure 1.1 : Concentrations électroniques typiques des latitudes moyennes.

La séparation de l'ionosphère en différentes régions (D, E et F) est due à Appleton en 1947. Comme on peut le voir sur la figure 1.1, la région F est elle-même séparée en deux sous-couches F1 et F2, cette dernière étant la plus élevée en altitude. Cette stratification de l'ionosphère vient du fait que les particules neutres (atomes ou molécules) qui la constituent sont plus ou moins sensibles aux radiations. Leurs masses étant différentes, la force de gravitation, qui joue sur ces particules, étage leurs maxima d'ionisation et les concentrations d'électrons correspondantes. La couche F2, la plus haute, est aussi la plus dense en électrons, du fait de la meilleure pénétration des radiations solaires. C'est dans cette région qu'ont lieu les phénomènes perturbateurs les plus importants de la propagation transionosphérique.

Sous l'effet de vents neutres et d'interactions électriques, des déplacements de particules ont lieu, provoquant des collisions et la création d'ions et d'électrons secondaires. Alors qu'un équilibre chimique prévaut dans les couches inférieures (D, E et F1) entre production primaire et mécanismes réactionnels, et peut conduire à l'apparition d'un maximum local dans une couche de type « Chapman », la couche supérieure (F2) est dominée par un équilibre entre production primaire et diffusion de l'ion majoritaire  $O^+$  dans l'atmosphère neutre, responsable de l'apparition du pic de région F2. L'alternance jour-nuit provoque également des variations de la concentration électronique dans ces différentes couches donc des déplacements de matière.

Le champ magnétique de la Terre entraîne lui aussi les électrons et les ions dans la direction des lignes de champ schématisées sur la figure 1.2.

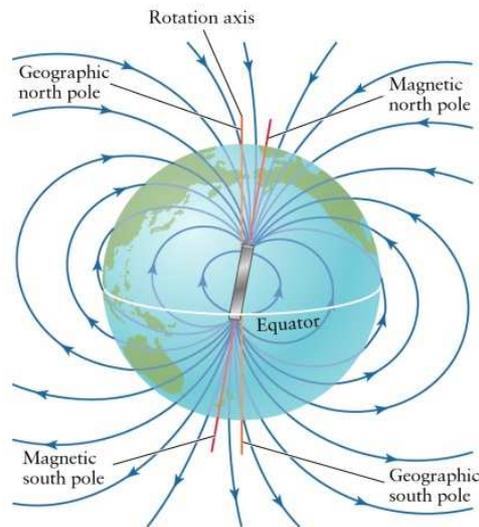


Figure 1.2 : Schéma du champ magnétique terrestre

[<http://www.patana.ac.th/secondary/science/astrophysics/ntopic6/commentary.htm>].

En première approximation, on peut considérer ce champ magnétique comme celui d'un dipôle magnétique. L'axe de ce dipôle est excentré d'environ 400 km et incliné d'environ  $11^\circ$  par rapport à l'axe de rotation de la Terre. Selon de récentes études menées par l'Institut de Physique du Globe de Paris (IPGP), ces pôles magnétiques dérivent. La vitesse de déplacement du pôle Nord magnétique est d'environ 55 km/an et tend à le diriger du Nord du Canada vers la Sibérie. Dans le référentiel lié aux lignes de champ et dans l'hypothèse que seul le champ magnétique terrestre, noté  $\vec{B}_T$  ou  $\vec{H}_0^1$ , s'applique aux particules chargées, l'équation du mouvement s'écrit :

$$m_{i,e} \frac{d\vec{V}_{i,e}}{dt} = q_{i,e} (\vec{V}_{i,e} \wedge \vec{B}_T), \quad (1.1)$$

avec  $t$  le temps,  $m$  la masse,  $\vec{V}$  la vitesse et  $q$  la charge des particules. Les indices  $i$  et  $e$  désignent respectivement les ions et les électrons. Les charges de ces deux entités étant opposées, elles tournent autour des lignes de champ magnétique en sens opposé. Leurs

<sup>1</sup>  $\vec{H}_0$  est l'excitation magnétique. Elle est communément utilisée pour caractériser le champ magnétique dans les milieux. Dans l'ionosphère, elle est reliée à  $\vec{B}_T$  par  $\vec{B}_T = \vec{H}_0 \mu_0$ , où  $\mu_0$  est la perméabilité du vide. On utilisera donc invariablement les termes  $\vec{B}_T$  ou  $\vec{H}_0$  pour désigner le champ magnétique terrestre.

fréquences de giration<sup>2</sup>, fonction de la masse, sont également différentes. Ces mouvements engendrent des collisions entre particules chargées mais aussi entre ces particules chargées et les neutres, provoquant des phénomènes supplémentaires d'ionisation et de recombinaison.

Côté jour, le chauffage des particules neutres de l'atmosphère augmente leur énergie cinétique. Elles transmettent cette énergie aux ions et aux électrons en rotation autour des lignes de champ magnétique. Du fait de leur différence de masse, ces particules vont acquérir des vitesses différentes et vont donc être séparées, créant un courant et un champ électrique induits. C'est l'effet dynamo, typique de la région D (cf. figure 1.1), qui explique d'ailleurs que cette région disparaisse côté nuit de la Terre, le chauffage de l'atmosphère neutre n'ayant alors plus lieu. Cet effet dynamo existe aussi dans les autres strates de l'ionosphère et est à l'origine d'importants gradients de concentration électronique.

L'effet des courants et champs électriques qui existent à l'intérieur de l'ionosphère s'ajoute à celui du champ magnétique terrestre : les particules chargées sont alors soumises à la force de Lorentz. On note  $\vec{E}$  le champ électrique induit dans l'ionosphère par la séparation des charges électriques de signe opposé. L'équation du mouvement de ces particules devient :

$$m_{i,e} \frac{d\vec{V}_{i,e}}{dt} = q_{i,e} (\vec{E} + \vec{V}_{i,e} \wedge \vec{B}_T) \quad (1.2)$$

La solution d'équilibre donne :

$$\vec{E} + \vec{V}_{i,e} \wedge \vec{B}_T = \vec{0}. \quad (1.3)$$

La composante constante de la vitesse est alors perpendiculaire aux champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}_T$ . On multiplie par le champ magnétique et on élimine ainsi le produit vectoriel du terme de vitesse :

$$\vec{B}_T \wedge \vec{E} + \vec{B}_T \wedge (\vec{V}_{i,e} \wedge \vec{B}_T) = \vec{0}, \quad (1.4)$$

---

<sup>2</sup> Cf. annexe 1.

$$\vec{V}_{i,e} = \vec{V} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}_T}{B_T^2}. \quad (1.5)$$

Cette vitesse  $\vec{V}$  ne dépend ni de la masse, ni de la charge des particules : c'est un mouvement d'ensemble du milieu, d'où le nom de « vitesse de déplacement » ou « vitesse de drift ». Dans les zones équatoriales, les lignes de champ magnétique sont horizontales, alignées dans la direction Nord-Sud. Le vent neutre Est-Ouest crée un champ électrique horizontal dans la même direction que lui : on parle de courant équatorial ou « equatorial electrojet ». La vitesse de déplacement se fait alors verticalement et vers le haut, créant des « bulles de plasma », ou « plasma bubbles ». Aux latitudes polaires, les lignes de champ magnétique terrestre sont verticales : la vitesse de drift des nuages de particules chargées se fait donc horizontalement. La figure 1.3 montre les valeurs de vitesses de drift obtenues par sondage ionosphérique grâce au réseau radar SuperDARN (Super Dual Auroral Radar Network)<sup>3</sup> au pôle Nord. Le midi local est orienté en haut du schéma (12 MLT ou Magnetic Local Time). L'échelle des vitesses, codée en couleurs, varie de 0 à 1200 m.s<sup>-1</sup> dans le plan horizontal<sup>4</sup>. Les isocontours représentent les valeurs du potentiel électrique : comme illustré sur la figure 1.3, les particules chargées suivent ces courbes isopotentielles.

---

<sup>3</sup> Le réseau SuperDARN est constitué d'une trentaine de radars qui sondent la haute atmosphère depuis les latitudes moyennes jusqu'aux latitudes polaires [Greenwald et al., 1995].

<sup>4</sup> La composante verticale  $V_z$  de la vitesse de déplacement du milieu, qui n'apparaît pas sur cette figure 1.3, est beaucoup plus faible que sa composante horizontale.

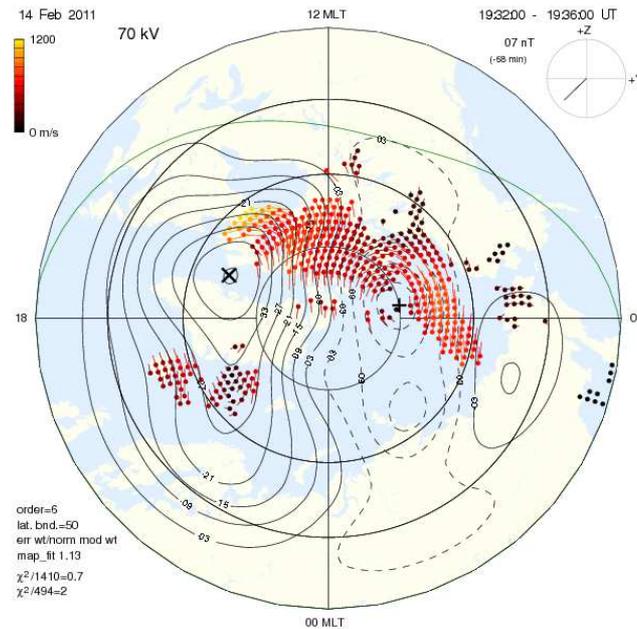


Figure 1.3 : Cartographie des zones de convection et des vitesses de drift obtenue par imagerie radar (réseau SuperDARN), 14/02/2011, 19:32:00 UT [courtesy of Marchaudon, IRAP].

De par l'intensité et la direction du champ magnétique terrestre ainsi que la saisonnalité particulière des hautes latitudes, l'étude de la dynamique ionosphérique des régions polaires est extrêmement complexe. À ces considérations géographiques s'ajoute le fait que les lignes de champ magnétique terrestre sont ouvertes au vent solaire. Cette caractéristique induit un impact important de l'activité magnétique solaire sur ces régions. Ainsi, outre le rayonnement solaire, dont nous avons étudié brièvement les effets dans cette première partie, il nous faut maintenant étudier l'activité magnétique du Soleil et l'interaction de l'ionosphère avec la magnétosphère.

### 1.1.2. Ionosphère et Soleil : problématique hautes latitudes

Aux pôles magnétiques Nord et Sud de la Terre, il existe des lignes de champ ouvertes (cf. figures 1.2 et 1.4). Ces zones étroites situées dans les hautes couches de l'ionosphère, côté jour de la Terre, font la connexion entre l'ionosphère et la magnétogaine, zone d'écoulement du vent solaire autour du champ magnétique terrestre.

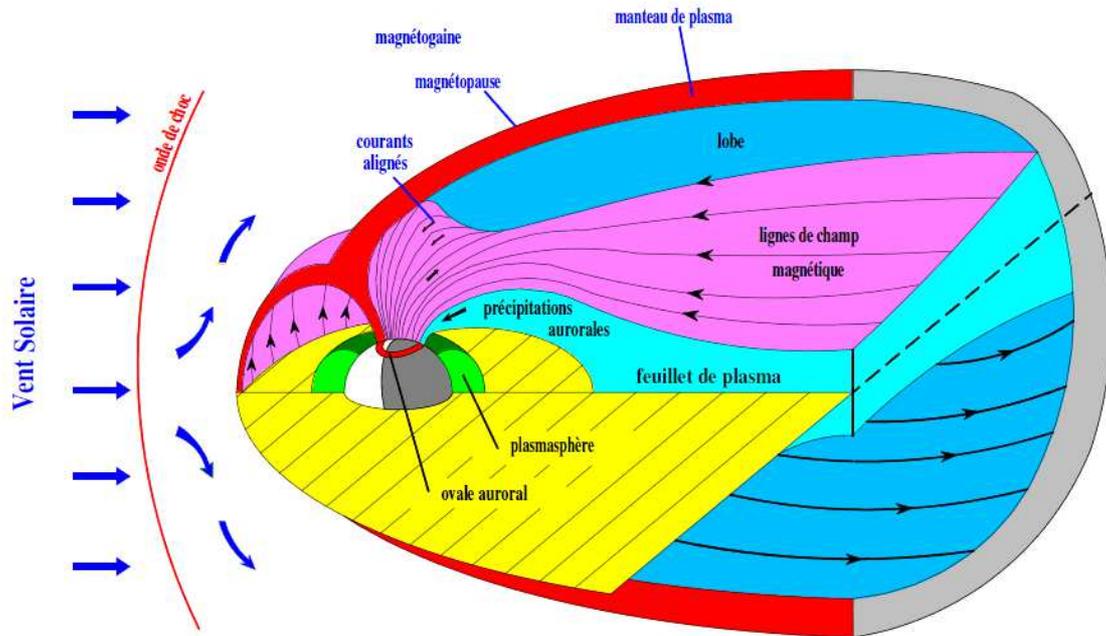


Figure 1.4 : Schéma de la dynamique du plasma et des zones magnétiques qui entourent la Terre.

La localisation de ces cornets polaires, en moyenne autour de  $\pm 78^\circ$  de latitude, peut varier de  $\pm 84^\circ$  à  $\pm 61^\circ$ , selon que l'activité géomagnétique est respectivement faible ou forte. L'arrivée constante de particules issues du vent solaire via ces cornets polaires entraîne une augmentation de la densité électronique et de la température de l'ionosphère dans ces zones. D'où l'apparition et le développement de gradients de concentration et de gradients de vitesse, dont la dynamique peut être suivie par radar<sup>5</sup>. Les réseaux EISCAT (European Incoherent Scatter Scientific Association)<sup>6</sup> et SuperDARN, par exemple, permettent d'obtenir des informations sur le contenu électronique et ionique du milieu ionosphérique avec une résolution spatiale de 45 km pour SuperDARN (quelques kilomètres pour EISCAT) et une résolution temporelle de 2 minutes pour ces deux réseaux [Pitout, 2010].

Des bulles de plasma plus concentrées en électrons, telles que des « polar patches » dans les zones polaires, ou « blobs » dans l'ovale auroral, se forment côté jour aux latitudes polaires et se déplacent via la convection polaire au-delà des pôles. Ces structures ont

<sup>5</sup> Dans la limite de résolution temporelle et spatiale du radar.

<sup>6</sup> EISCAT est un programme européen d'étude de la haute atmosphère et de l'ionosphère aux hautes latitudes grâce à plusieurs radars localisés dans les régions scandinaves.

une dimension horizontale qui s'étend de 50 à plus de 1000 km. Leur dynamique temporelle est de quelques heures et dépend fortement de l'activité géomagnétique.

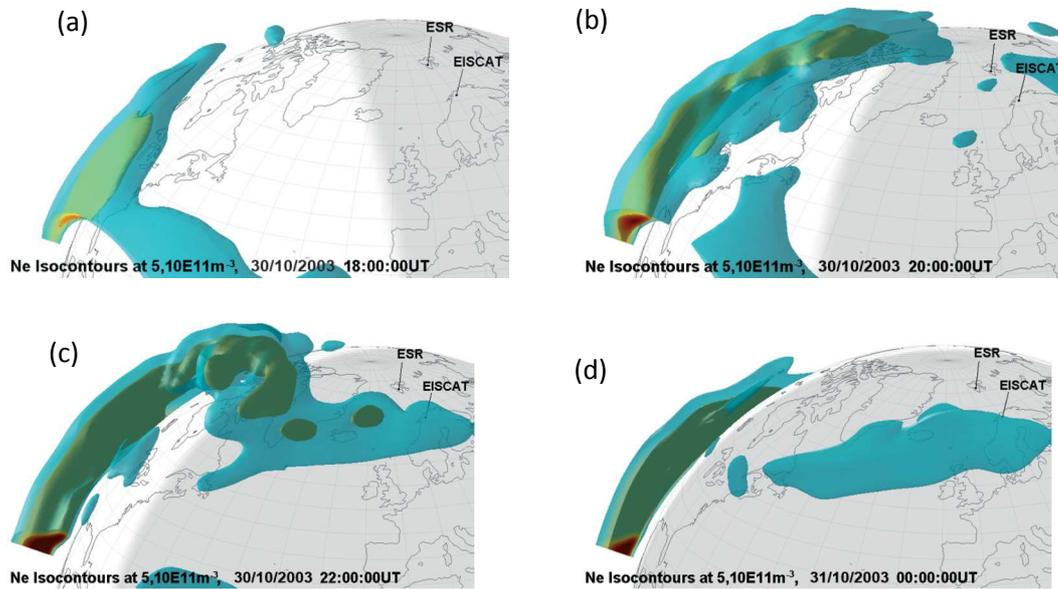


Figure 1.5 : Reconstruction volumique des concentrations d'électrons  $N_e$  dans l'ionosphère, du 30/10/2003 de 18:00:00 UT au 31/10/2003 à 00:00:00 UT de (a) à (d). Les zones transparentes représentent les iso-contours à  $5.10^{11} \text{ el.m}^{-3}$ , les opaques sont à  $10^{12} \text{ el.m}^{-3}$  [Spencer, 2007].

La figure 1.5 illustre la formation d'une zone fortement concentrée côté jour (zone plus claire de l'hémisphère) qui se déplace ensuite côté nuit de la Terre (zone sombre) en créant des patches de plasma concentrés. Cette reconstruction est basée sur un modèle hydrodynamique de l'ionosphère dont les paramètres sont mis à jour régulièrement par les données radar des stations EISCAT<sup>7</sup>.

L'ovale auroral marque la frontière entre les lignes de champ magnétique terrestre ouvertes et fermées. Il est, en première approximation, fixe par rapport au Soleil. Dans la magnétosphère se produisent des sous-orages magnétiques qui descendent dans cet ovale, poussés par le vent solaire côté nuit de la Terre, pour s'étendre en latitude et en longitude. Cette entrée de particules énergétiques est à l'origine de nombreux phénomènes : aurores polaires mais également radio-absorptions (polar cap

<sup>7</sup> Sur la figure 1.5, ESR est l'acronyme de EISCAT Svalbard Radar, situé sur l'île du même nom.

absorption) et perturbations magnétiques, dues aux importantes réactions d'ionisation dans cette zone<sup>8</sup>. Du fait de leur charge négative, les électrons issus du vent solaire sont accélérés vers la Terre. Cette accélération leur procure une énergie élevée, suffisante pour ioniser les couches plus basses de l'ionosphère. La figure 1.6 est issue d'un modèle empirique d'ovale auroral [Zhang & Paxton, 2008] et en donne une représentation<sup>9</sup>.

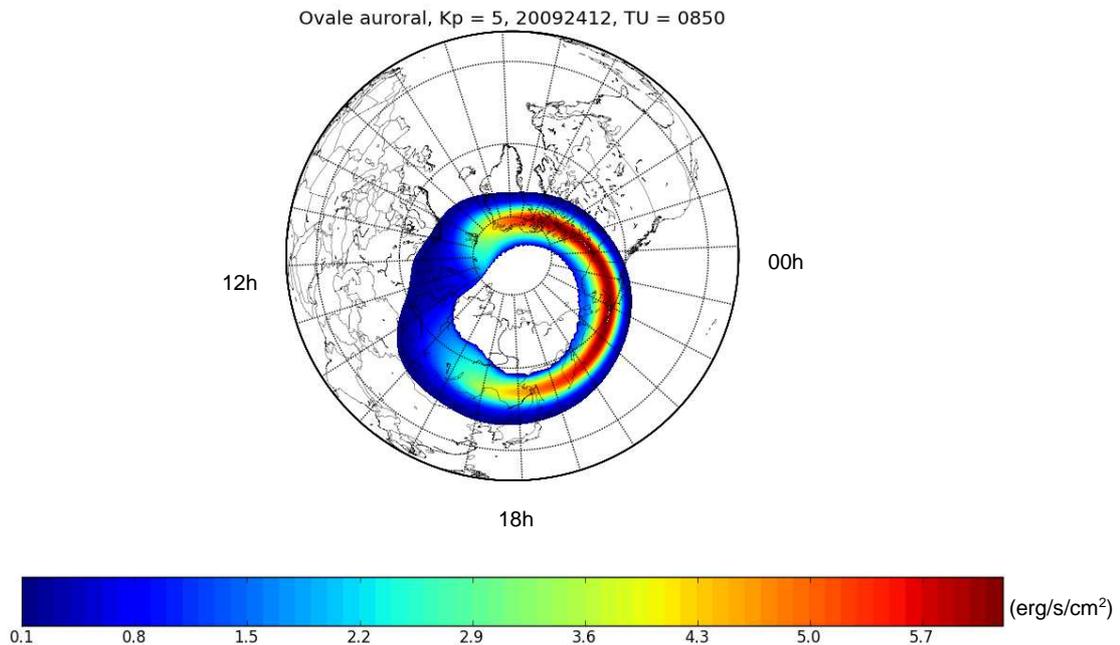


Figure 1.6 : Flux d'électrons aux latitudes polaires (erg/s/cm<sup>2</sup>)<sup>10</sup> obtenu à partir du modèle de Zhang-Paxton [Zhang & Paxton, 2008],  $K_p = 5$ , le 24/12/2009 à 08:50 UT.

Sur la figure 1.6, la valeur de l'indice géomagnétique<sup>11</sup>  $K_p = 5$  indique des conditions de sous-orage magnétique. Entre les côtés jour (à gauche sur la figure) et nuit (à droite), le flux d'électrons varie ici d'un facteur 60. Les événements les plus perturbateurs ont lieu dans cette zone de l'ionosphère, côté nuit.

<sup>8</sup> On peut citer la panne de courant générale dans tout le Canada le 13 mars 1989 suite à une éruption solaire très intense [[http://archives.radio-canada.ca/environnement/catastrophes\\_naturelles/clips/14150/](http://archives.radio-canada.ca/environnement/catastrophes_naturelles/clips/14150/)].

<sup>9</sup> Les variations de densité électronique sont présentes également au-delà de l'ovale auroral, là où les lignes de champ magnétique sont ouvertes. Le modèle étant basé sur la description mathématique du champ magnétique terrestre fournie par l'International Geomagnetic Reference Field (IGRF), les données ne sont disponibles que pour les lignes de champ fermées [IGRF, 2010].

<sup>10</sup> 1 erg = 10<sup>-7</sup> J.

<sup>11</sup> L'indice géomagnétique  $K_p$  est caractéristique de l'activité géomagnétique et varie de 0 (faible activité) à 9 (forte activité). Il est déterminé toutes les 3h pour toute la Terre. Il existe d'autres indices géomagnétiques : Auroral Electrojet index (AE) est moyenné sur des mesures de stations hautes latitudes, il est donc mieux adapté à la description de l'activité géomagnétique des régions polaires ; l'indice Dst caractérise les conditions d'orages magnétiques, plus particulièrement aux latitudes équatoriales [Perrone & De Franceschi, 1998].

Outre les rayonnements et les particules solaires de haute énergie, la Terre est également soumise au champ magnétique interplanétaire (Interplanetary Magnetic Field, IMF). L'IMF, noté  $B_{IMF}$ , est directement lié à l'activité magnétique du Soleil. Il est gelé dans le vent solaire et se déplace avec lui. Le nombre de taches solaires, ou Sunspot number (SSN), suit un cycle de 11 ans environ et sert de marqueur à cette activité magnétique solaire. Ces taches sombres apparaissent sur la photosphère solaire et sont le siège d'intenses champs magnétiques locaux, entraînant des rayonnements et des éjections de particules plus intenses. Plus le SSN est important (maximum d'activité magnétique solaire), plus la pression exercée par le vent et le champ magnétique interplanétaire sur la magnétosphère terrestre est importante. L'orientation du vecteur champ magnétique  $B_{IMF}$  évolue selon l'activité solaire et varie également spatialement. L'IMF peut alors arriver avec une composante verticale  $B_{IMFz}$  positive (entrée de l'IMF par le pôle Sud géographique) ou négative (entrée par le pôle Nord). Si la composante  $B_{IMFz}$  est négative, on parle de « Southward IMF » : le champ interplanétaire arrive alors en sens opposé au champ magnétique terrestre et peut l'annihiler en partie, causant pour la Terre la perte d'une partie de son bouclier magnétique. Le vent solaire peut ainsi pénétrer plus facilement dans les zones polaires et aurorales. Les précipitations de particules via les cornets polaires augmentent et l'ovale auroral se déplace vers les latitudes plus basses. C'est aussi à ces moments que l'on peut observer davantage d'aurores polaires, dues à l'ionisation d'atomes d'oxygène et d'azote par des particules très énergétiques du vent solaire. Les transitions électroniques de ces atomes ionisés correspondent à différentes longueurs d'onde du domaine visible et donnent leurs couleurs à ces phénomènes.

La dynamique ionosphérique, notamment aux hautes latitudes, rend ce milieu ouvert extrêmement fluctuant et très complexe à modéliser. Or, les gradients de concentration et le mouvement des particules chargées sont sources d'interactions électromagnétiques avec les signaux radioélectriques. C'est d'ailleurs lors d'expérimentations de liaisons terrestres « longue distance » par radio que l'ionosphère a été découverte. Depuis, l'étude de son impact sur les signaux électromagnétiques permet de remonter à des informations sur sa structure : celle-ci étant alors mieux caractérisée, les phénomènes perturbateurs sont mieux expliqués.

La partie suivante présente les principaux phénomènes intervenant dans la propagation transionosphérique en bande L : la réfraction, phénomène à grande échelle responsable du retard ionosphérique mais permettant aussi des liaisons radio par réflexion, et la scintillation, mettant en jeu des irrégularités de concentration électronique plus petites et impactant la performance des liaisons transionosphériques.

## 1.2. Impact de l'ionosphère sur la propagation des signaux GNSS

### 1.2.1. Réfraction ionosphérique à grande échelle

En 1901, l'expérience de transmission radio entre l'Angleterre et les Etats-Unis, menée par Marconi, montre pour la première fois l'existence d'une couche d'atmosphère réfléchissant les ondes électromagnétiques, similaire à une couche métallique conductrice. L'hypothèse de l'existence d'une couche d'atmosphère ionisée est émise et vérifiée dans les années 1920. Offrant de larges applications aux communications radio longue distance, les moyens expérimentaux d'étude de l'ionosphère se développent. L'ionosonde, radar dédié à l'étude de l'ionosphère, permet ainsi de cartographier les différentes couches conductrices en identifiant la fréquence des signaux en-deçà de laquelle ces derniers ne peuvent traverser. C'est la fréquence plasma  $f_p$ , fréquence de pulsation naturelle du plasma ionosphérique, définie pour une incidence verticale sur la couche ionosphérique par :

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{N_e e^2}{m_e \epsilon_0}}. \quad (1.6)$$

$N_e$  est la concentration des électrons en  $\text{el.m}^{-3}$ ,  $e$  la charge élémentaire en Coulombs et  $m_e$  la masse de l'électron<sup>12</sup>. En remplaçant les constantes par leur valeur, cette fréquence devient :

---

<sup>12</sup> La fréquence plasma est également définie pour les ions. Du fait de la grande différence de masse entre les ions et les électrons ( $m_i \gg m_e$ ), on néglige la fréquence plasma des ions par rapport à la fréquence plasma due aux électrons.

$$f_p \approx 9\sqrt{N_e}. \quad (1.7)$$

L'angle d'incidence du signal sur la couche ionosphérique joue sur la fréquence maximale qui peut être réfléchiée par l'ionosphère, ou maximum usable frequency (MUF) :

$$f_{MUF} = \frac{f_p}{\cos \vartheta'}. \quad (1.8)$$

$\vartheta'$  est l'angle entre la verticale locale au point d'impact du signal sur l'ionosphère  $I_1$  et la direction de propagation du signal, comme représenté sur la figure 1.7.

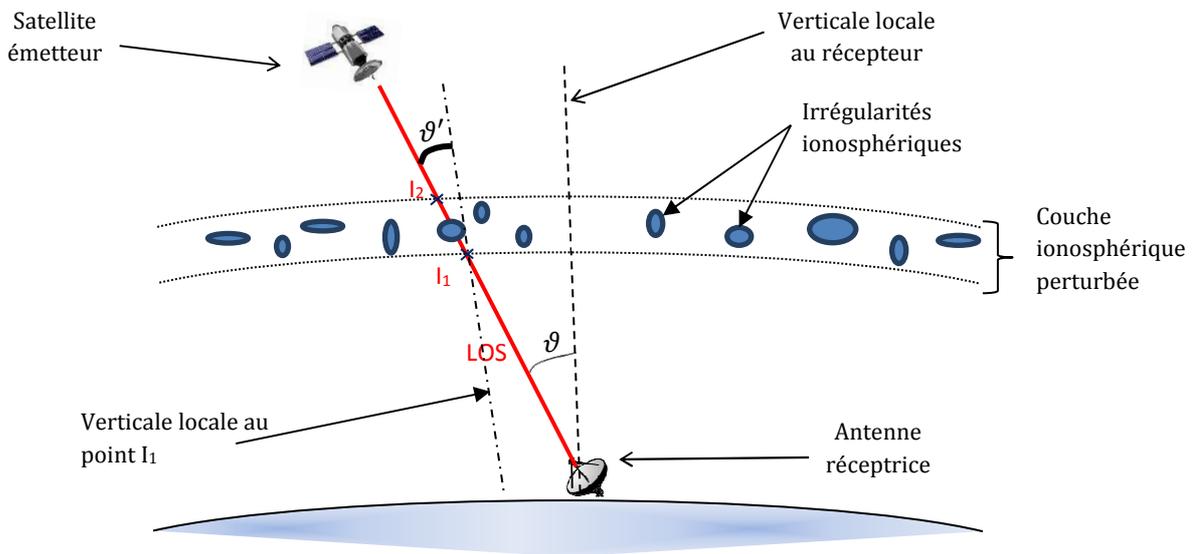


Figure 1.7 : Liaison récepteur terrestre – satellite vue dans le plan méridien.

D'après (1.6), la réflexion des ondes en deçà de la fréquence plasma est liée à la concentration électronique de l'ionosphère. À des fréquences supérieures à  $f_p$ , les ondes peuvent traverser le milieu et subissent les effets de la réfraction due à ces concentrations d'électrons, comme lors de la traversée de tout milieu transparent. En utilisant les équations de Maxwell-Boltzmann, en négligeant la fréquence des collisions et la gyrofréquence par rapport à la fréquence du signal, on arrive à l'expression de l'indice de réfraction  $n$  du milieu ionosphérique, ou équation d'Appleton-Hartree<sup>13</sup> :

<sup>13</sup> Cf. annexe 1 pour le détail des calculs.

$$n^2 = 1 - \frac{f_p^2}{f^2}. \quad (1.9)$$

$f$  est la fréquence du signal propagé. En injectant la formulation (1.6) dans (1.9), le développement limité au premier ordre de cette expression donne :

$$n \approx 1 - \frac{N_e e^2}{8\pi^2 m_e \epsilon_0 f^2}, \quad (1.10)$$

soit, numériquement,

$$n \approx 1 - \frac{40 N_e}{f^2}. \quad (1.11)$$

En bande L (entre 1 et 2 GHz), l'indice de réfraction est très proche de 1 car le milieu traversé est très peu dense (cf. figure 1.1). D'après (1.11), sa valeur est également inférieure à 1. Cela signifie que la vitesse de phase, définie par  $v_\varphi = \frac{c}{n}$ , est supérieure à la célérité de la lumière  $c$ . La vitesse de groupe,  $v_g = \frac{c^2}{v_\varphi}$ , est inférieure à  $c$ . Il en résulte une avance de phase et un retard de groupe. Ce retard du paquet d'onde peut être traduit comme une distance supplémentaire qu'aurait à parcourir le signal dans le vide (pseudo-distance) et s'écrit :

$$\Delta l \approx \frac{40}{f^2} \int_0^{+\infty} N_e ds, \quad (1.12)$$

$$\Delta l \approx \frac{40}{f^2} STEC, \quad (1.13)$$

où le STEC (Slant Total Electron Content) est l'intégrale du contenu électronique sur la distance parcourue par le signal de l'émetteur au récepteur et s'exprime en  $m^{-2}$ . Il s'exprime également en unité TEC (TECU), qui correspond à :

$$1 \text{ TECU} = 10^{16} m^{-2}. \quad (1.14)$$

Des modèles empiriques tels que NeQuick [Radicella, 2009] ou IRI (International Reference Ionosphere) [Bilitza, 2001] fournissent une modélisation de la densité électronique moyenne mensuelle en fonction de la localisation, de la date et des conditions d'éclairement solaire. Ils permettent ainsi l'estimation du TEC oblique (STEC), le long du Line-Of-Sight (LOS) d'une liaison Terre-Satellite quelconque, ou l'élaboration de cartographies verticales du TEC (VTEC) comme illustré sur la figure 1.8.

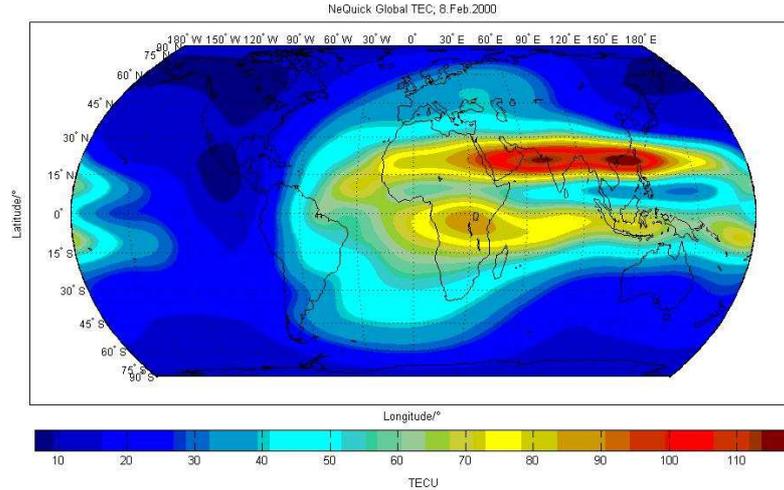


Figure 1.8 : Exemple de cartographie VTEC fournie par le modèle NeQuick, 08/02/2000  
[<http://t-ict4d.ictp.it/nequick2>].

Les récepteurs GNSS sont des appareils de mesure très utilisés aujourd'hui pour déterminer le contenu électronique de l'ionosphère : on travaille dans ce cas avec les phases obtenues sur les deux fréquences GPS L1 et L2 (respectivement 1,575 et 1,228 GHz). Le retard ionosphérique étant fonction de la fréquence d'après (1.12), la différence des mesures de pseudo-distances<sup>14</sup> des signaux donne :

$$\Delta l_2 - \Delta l_1 \approx \frac{40}{f_2^2} STEC - \frac{40}{f_1^2} STEC, \quad (1.15)$$

$$STEC \approx \frac{f_1^2 f_2^2}{40(f_1^2 - f_2^2)} \cdot 10^{-16} (\Delta l_2 - \Delta l_1). \quad (1.16)$$

<sup>14</sup> Le signal GNSS transmet le temps d'horloge du satellite émetteur. La pseudo-distance est alors calculée par le récepteur par  $\Delta l = c\Delta t$  où  $\Delta t$  est la différence entre le temps d'horloge de l'émetteur et le temps d'horloge du récepteur au moment où il reçoit le signal. Le décalage entre horloges n'étant pas connu, la distance que l'on peut en déduire est biaisée, d'où le terme de pseudo-distance (ou pseudo-range).

Le STEC est ici exprimé en TECU. Le VTEC peut en être déduit par une relation géométrique, fonction de la position du satellite par rapport au récepteur, en supposant l'homogénéité horizontale de l'ionosphère<sup>15</sup>. La figure 1.9 représente le STEC et le VTEC déterminés à partir des mesures de phase sur L1 et L2 d'un récepteur type Septentrio PolarX situé à Tromsøe (Norvège).

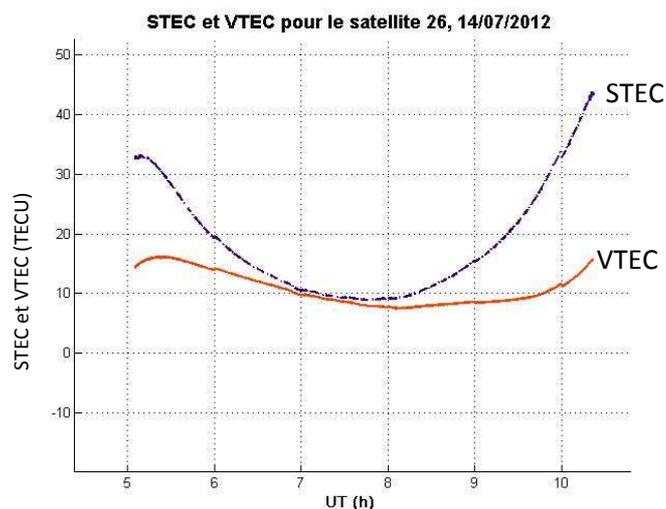


Figure 1.9 : STEC et VTEC pour le satellite GPS n°26 (valeurs non calibrées), le 14/07/2012, entre 05:00 et 10:00 UT

Comme la position du satellite varie au cours du temps, l'épaisseur d'ionosphère traversée augmente et donne au STEC sa forme en « U ». Le VTEC varie beaucoup moins que le STEC, les variations étant dues cette fois aux gradients de concentration en azimut.

Les radars sont également utilisés pour cartographier l'ionosphère et nourrir des modèles de météorologie spatiale. Citons par exemple les réseaux SuperDARN et EISCAT, déjà évoqués dans la partie 1.1. La figure 1.10 montre les différentes informations obtenues à partir de ces sondages ionosphériques radar (EISCAT) : la température, la vitesse et la concentration des particules chargées. Des modèles ont été développés à partir de ces outils radar pour décrire l'état de l'ionosphère et rejouer certains scénarii d'orages magnétiques, comme par exemple le modèle TRANSCAR [Blelly et al., 2005].

<sup>15</sup> Cf. annexe 2.

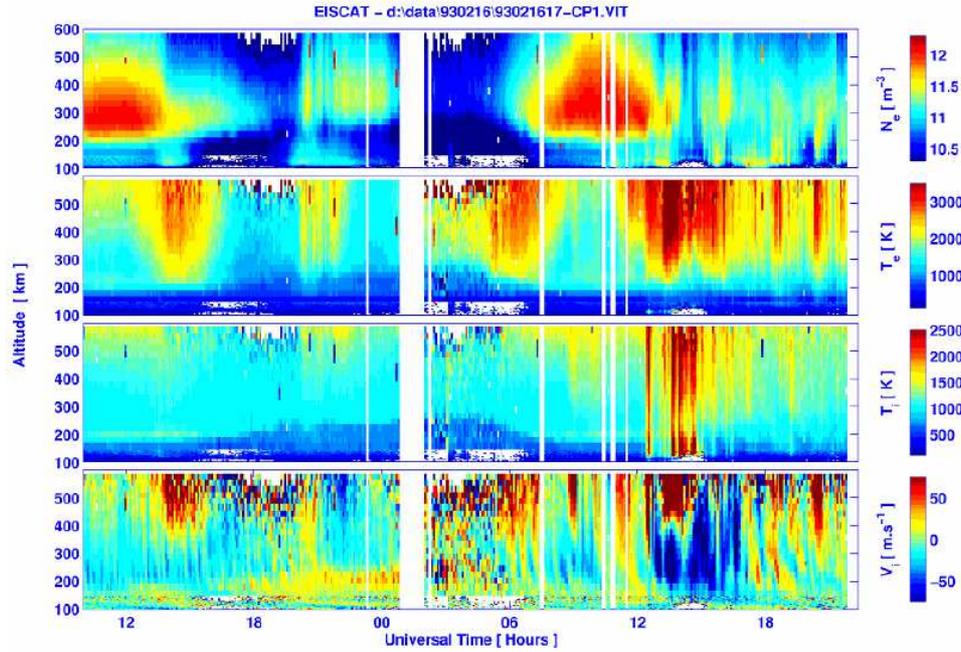


Figure 1.10 : Extrapolation de données EISCAT (de haut en bas) : concentration électronique, températures des électrons, température des ions, vitesse des ions dans la direction du LOS ; du 16/02/1993 à 10h au 17/02/1993 à 21h [Blelly et al., 2005].

Les fluctuations de densité électronique peuvent être suivies et étudiées grâce à ces réseaux radar, dans la limite de leurs domaines de résolution spatiale et temporelle (cf. section 1.1.2). Or, avec l'augmentation des fréquences des signaux utilisés en télécommande-téléométrie dans les liaisons Terre-satellite, les études ont montré qu'il existe des fluctuations rapides des concentrations d'électrons, à des fréquences de l'ordre du Hz et présentant des structures de dimension inférieure au km. Étudiées grâce au réseau de satellites GNSS, ces irrégularités provoquent des pertes de signal et jusqu'au décrochage des récepteurs. Ce phénomène de variation rapide est appelé la scintillation ionosphérique.

### 1.2.2. Scintillation ionosphérique

La scintillation ionosphérique est un phénomène turbulent d'irrégularités de densité électronique qui se traduit au niveau radioélectrique par des variations rapides (de l'ordre du Hz) de l'amplitude et de la phase des signaux.

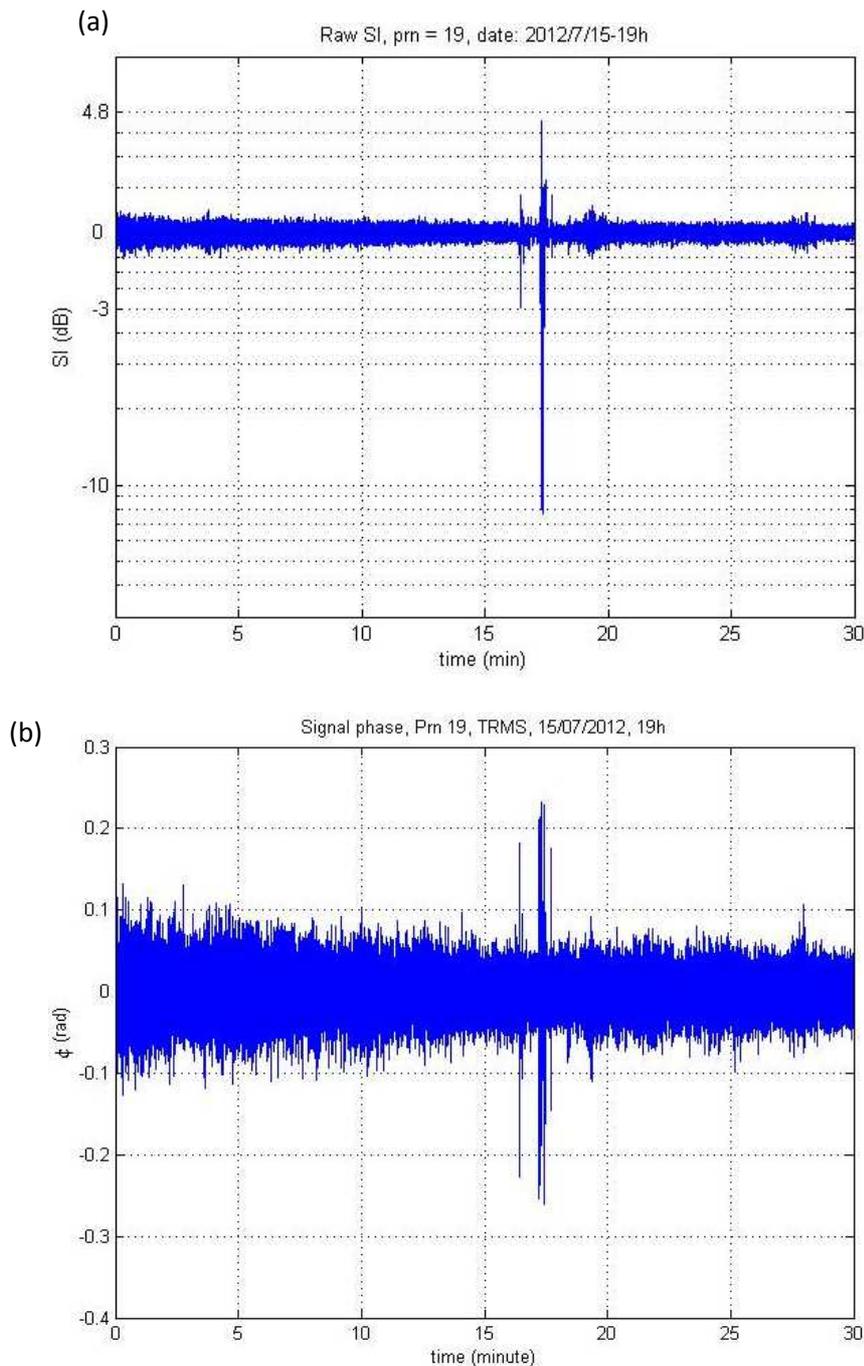


Figure 1.11 : (a) intensité et (b) phase du signal brut des données GPS Septentrio à Tromsø (Norvège), 13/07/2012, 10:00:00 UT

Les scintillations se produisent surtout côté nuit de la Terre mais dépendent fortement de l'activité géomagnétique donc de l'activité magnétique solaire. Elles sont le reflet de fluctuations rapides de la concentration électronique, dues à des recombinaisons chimiques entre les ions et électrons. On remarque, sur la figure 1.11, les fluctuations rapides de l'amplitude et de la phase du signal. L'interprétation optique proposée par

Tatarskii [1961] est que le signal traversant est diffusé différemment selon la dimension transverse des irrégularités rencontrées, comme des lentilles plus ou moins convergentes, provoquant des focalisations et défocalisations du signal, donc des variations d'amplitude. La traversée de ces structures turbulentes entraîne des variations de la vitesse de propagation du signal le long de son trajet (LOS), donc des variations de la phase du signal. Plus la dimension longitudinale de l'irrégularité traversée par le signal est grande, plus la variance de phase est importante.

Deux grandeurs sont utilisées pour quantifier ce phénomène : les indices de scintillation d'amplitude  $S_4$  et de phase  $\sigma_\varphi$ . L'indice  $S_4$  est donné par la formule suivante [Wernik & Liu, 1973] :

$$S_4 = \sqrt{\frac{\langle SI^2 \rangle - \langle SI \rangle^2}{\langle SI \rangle^2}}. \quad (1.17)$$

$SI$  est l'intensité du signal reçu (Signal Intensity). D'après [Yeh & Liu, 1982], en régime de faible perturbation, selon [Yeh & Liu, 1982],  $S_4$  est également lié à la variance de log-amplitude du signal  $\langle \chi^2 \rangle$  par :

$$S_4^2 \approx 4\langle \chi^2 \rangle. \quad (1.18)$$

L'indice de phase  $\sigma_\varphi$  est lui défini comme l'écart-type de la phase du signal. Ces deux indices d'amplitude et de phase peuvent être calculés à intervalles de temps réguliers. Plus l'activité géomagnétique est importante, plus les scintillations sont intenses donc plus ces grandeurs sont importantes. Typiquement, en bande L, des valeurs de  $S_4 < 0,3$  et  $\sigma_\varphi < 0,3 \text{ rad}$  sont des indicateurs de scintillation faible, n'entraînant pas d'effet notable sur les signaux GNSS transmis, alors que des valeurs de  $S_4$  supérieures à 0,6 (ou de  $\sigma_\varphi > 0,6 \text{ rad}$ ) indiquent une forte scintillation pouvant provoquer le décrochage des récepteurs.

Les tendances de variations des scintillations ont été quantifiées en terme de perte de puissance du signal reçu, comme le montre la figure 1.12, issue de [Basu et al., 1988] et utilisée dans la recommandation [ITU-R, 2012] de l'Union Internationale des Télécommunications (International Telecommunication Union, ITU).

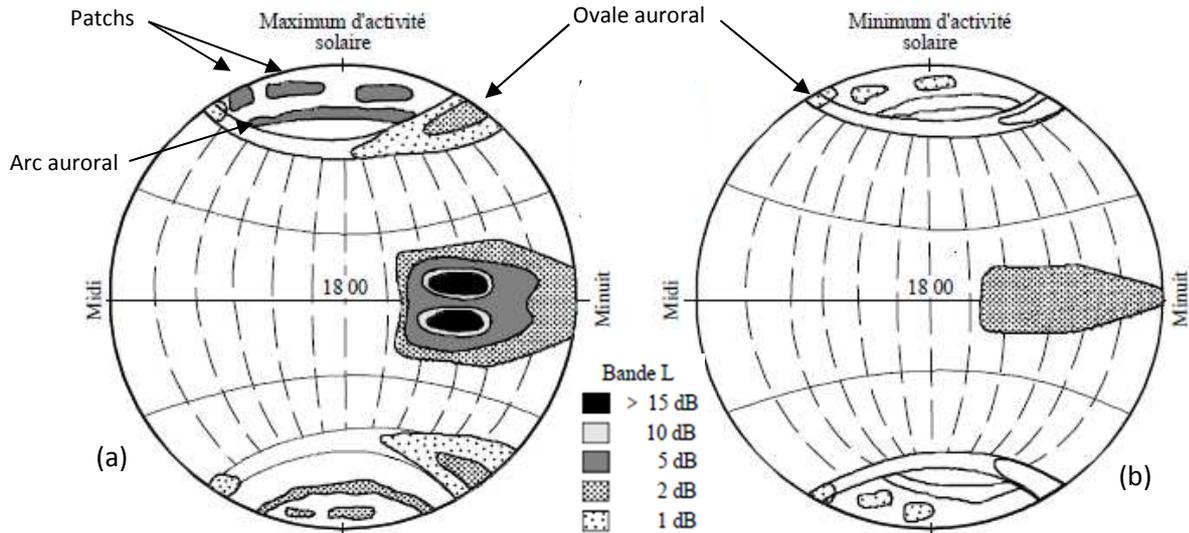


Figure 1.12 : Profondeur d'évanouissement ionosphérique en bande L sur des années (a) de maximum et (b) de minimum d'activité solaire [Basu et al., 1988].

D'après la figure 1.12, deux régions sont particulièrement soumises aux effets des scintillations ionosphériques : les latitudes équatoriales et les zones polaires. En cas de forte activité solaire, les évanouissements dus aux scintillations peuvent atteindre plus de 15 dB à l'équateur (figure 1.12 (a)). La forme caractéristique observée à l'équateur entre 18h et minuit correspond aux bulles de plasma formées par les mouvements convectifs verticaux à la tombée du jour [Lilensten & Blelly, 1999]. Aux hautes latitudes, les zones de forte atténuation sont situées au niveau de l'ovale auroral (cf. figure 1.6). Les zones dont l'affaiblissement est le plus important correspondent à des patches et à des arcs auroraux [Hunsucker & Hargreaves, 2003].

Ce sont les fluctuations rapides de la concentration électronique qui entraînent des variations de l'indice de réfraction, ou indice de phase. La dérivée de l'indice de réfraction  $n$ , défini dans l'expression (1.10), par rapport à la concentration électronique  $N_e$  nous donne<sup>16</sup>:

$$\Delta n = -\frac{e^2 \Delta N_e}{8\pi^2 m_e \epsilon_0 f^2},$$

<sup>16</sup> Sur la portion d'ionosphère traversée, la courbure du rayon, due à la réfraction, est négligeable au regard de la fluctuation d'indice due aux irrégularités ionosphériques et responsable des scintillations [Briggs & Parkin, 1963].

$$\Delta n = -\frac{r_e \lambda}{k_0} \Delta N_e, \quad (1.19)$$

avec  $r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}$  le rayon électronique,  $\Delta N_e$  la variation de densité électronique,

$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$  le nombre d'onde dans le vide et  $\lambda$  la longueur d'onde du signal.

D'après (1.19), les fluctuations d'indice de réfraction sont inversement proportionnelles au carré de la fréquence du signal traversant. Ainsi, plus la fréquence des signaux est élevée, moins les effets des scintillations ionosphériques seront marqués. On néglige leurs effets à partir de 12 GHz environ [ITU-R, 2012].

La scintillation ionosphérique est un phénomène complexe : en effet, la concentration des électrons et ses fluctuations varient spatialement, temporellement et en fonction de l'activité géomagnétique (cf. partie 1). Les irrégularités ionosphériques, sièges de ces fluctuations, sont soumises au champ magnétique terrestre et au champ électrique induit à l'intérieur du plasma ionosphérique. Une modélisation statistique a été choisie pour faciliter leur description. C'est l'objet de la partie 1.3.

### 1.3. Modélisation des irrégularités ionosphériques

#### 1.3.1. Morphologie des irrégularités

Les modèles de milieu turbulent isotrope, comme le modèle troposphérique de Kolmogorov [1941], considèrent une loi de corrélation des inhomogénéités identique selon les trois dimensions. Si de telles structures électroniques isotropes étaient plongées dans l'ionosphère, elles se déformeraient sous l'effet du champ magnétique terrestre en ellipsoïdes, allongées selon la direction des lignes de champ [Aarons, 1982], [Hunsucker & Hargreaves, 2003]. Dans le plan perpendiculaire à  $\vec{H}_0$ , le champ électrique induit provoque l'apparition d'un déplacement des charges, caractérisé par la vitesse de drift  $\vec{V}$  (cf. expression (1.5)). L'irrégularité ionosphérique va donc se trouver étirée dans

la direction du vecteur vitesse. On note  $y_H$  cette direction. Dans le repère  $(x_H, y_H, z_H)$ , le champ magnétique terrestre représenté sur la figure 1.13 est défini par :

$$\vec{H}_0 = H_0 \vec{e}_{z_H}. \quad (1.20)$$

Partant d'une irrégularité sphérique de rayon  $L$ , les dimensions de l'irrégularité anisotrope sont définies par trois paramètres d'échelle, sans dimension, notés  $a$ ,  $b$  et  $c$ , tous trois supérieurs ou égaux à 1, et tels que  $L_x = aL$ ,  $L_y = bL$  et  $L_z = cL$ . La figure 1.13 représente l'anisotropie dans le repère lié au champ magnétique terrestre.

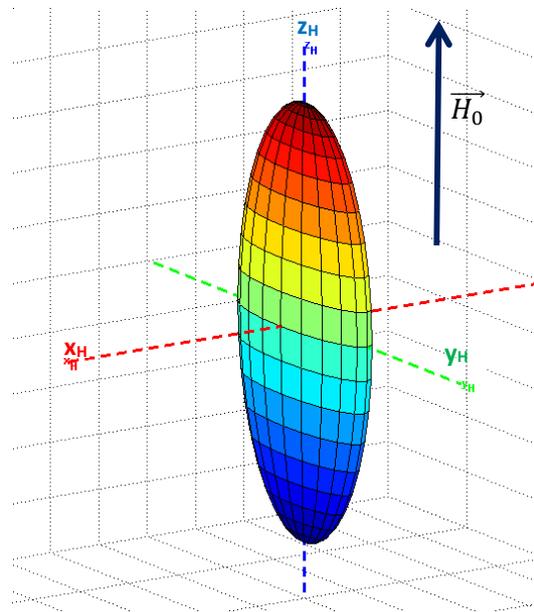


Figure 1.13 : Géométrie de l'irrégularité ionosphérique dans le repère lié aux lignes de champ magnétique terrestre  $\vec{H}_0$  ;  $a = 1$ ,  $b = 4$  et  $c = 8$ .

On définit les rapports d'anisotropie  $A_y = \frac{b}{a}$  et  $A_z = \frac{c}{a}$ . La valeur de ces paramètres d'anisotropie est fonction de la latitude et de l'heure locale ainsi que des conditions géomagnétiques.

Les formes des irrégularités ionosphériques considérées dans cette étude sont caractéristiques des hautes latitudes et sont issues des travaux de Livingston et al. [1982] (cf. figure 1.14).

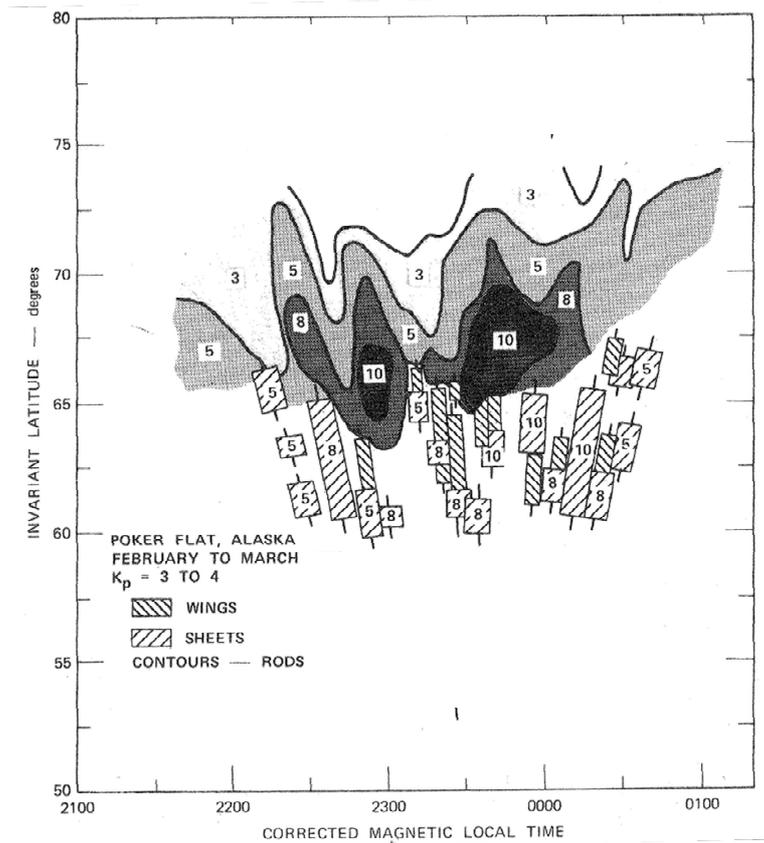


Figure 1.14 : Morphologie des irrégularités ionosphériques pour une activité magnétique modérée aux hautes latitudes, côté nuit [Livingston et al., 1982].

La figure 1.14 présente les trois formes d'irrégularités majoritairement présentes aux hautes latitudes :

- Des ellipsoïdes allongés dans la direction du champ magnétique terrestre (field-aligned rods) de rapport axiaux  $1:1:A_z$  avec  $A_z$  qui décroît avec la latitude. Sur cette figure, les iso-contours symbolisent ces géométries, le nombre affiché correspondant à la valeur de  $A_z$ . Cette morphologie est la plus fréquente aux latitudes supérieures à  $65^\circ$ . D'après [Livingston et al., 1982], les valeurs de  $A_z$  sont comprises entre 3, pour des latitudes supérieures à  $70^\circ$ , et 10, pour les latitudes entre  $65^\circ$  et  $70^\circ$ .
- Des feuillets de plasma (sheet-like irregularities) allongés dans la direction du champ magnétique et dans le plan transverse coïncidant avec la couche iso-magnétique (L-shell). Ces morphologies de type  $1:A_z:A_z$  sont représentées figure

1.14 par des rectangles hachurés larges. Elles sont présentes à des latitudes inférieures à  $65^\circ$ , c'est-à-dire à la limite de la zone aurorale, côté équateur. Les ratios varient en fonction de la latitude et de l'heure locale, de 1: 5: 5 à 1: 10: 10.

- Des « ailes » de plasma (plasma wings), présentes en moins grande proportion que les deux morphologies précédentes et dans des conditions d'activité magnétique modérée, de type 1:  $A_y$ :  $A_z$  avec  $A_y < A_z$ . Gola [1992] donne les valeurs suivantes pour les paramètres d'anisotropie :  $6 \leq A_z \leq 15$  et  $1,8 \leq A_y \leq 3$ .

Le schéma de ces irrégularités est décrit sur la figure 1.15.

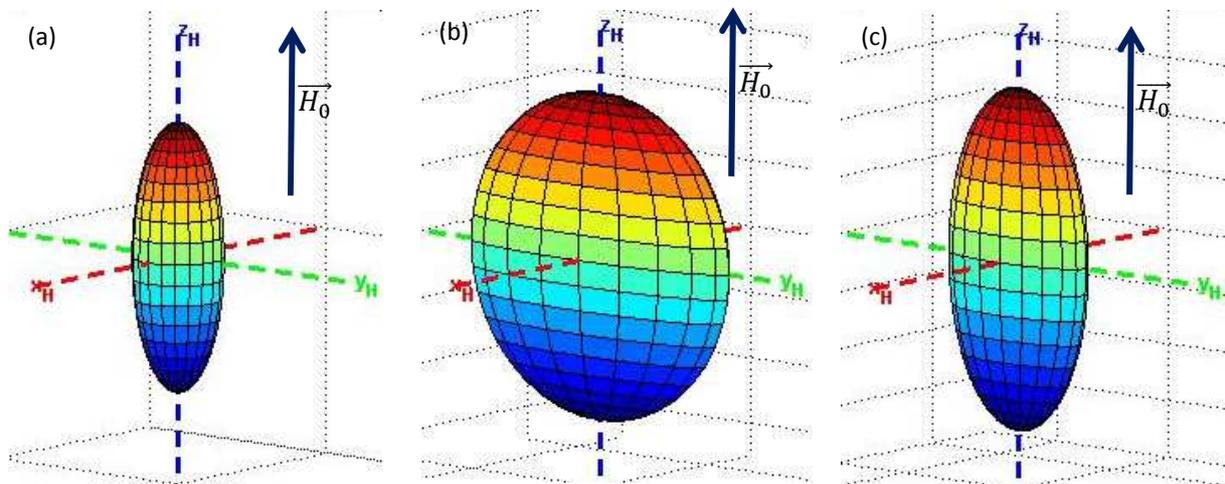


Figure 1.15 : Représentation des 3 morphologies étudiées : (a) rods ou ellipsoïdes (1: 1: 3), (b) sheets ou feuillets (1: 5: 5) et (c) wings ou ailes de plasma (1: 3: 6).

D'après [Livingston et al., 1982], les déplacements de plasma sont à l'origine de la formation des différentes formes d'irrégularités. Ainsi, les ailes plasmiques seraient des formes de transition entre les ellipsoïdes à un seul axe d'anisotropie et les feuillets plasmiques. Toujours d'après [Livingston et al., 1982], la taille caractéristique de ces irrégularités varie en fonction de leur anisotropie : ainsi, plus les irrégularités sont anisotropes, plus leur dimension maximale est faible.

Comme nous l'avons vu dans la partie 1.2.2, les scintillations sont dues à des variations rapides de l'indice de réfraction  $n$ , liées par (1.19) aux fluctuations de la concentration des électrons  $\Delta N_e$ . Ces gradients de concentration peuvent être causés par de nombreux phénomènes : entrée de particules via les cornets polaires, champ magnétique terrestre,

IMF... Une représentation déterministe de ces fluctuations d'indice, très complexe, rendrait surtout les temps de calcul très longs. Les outils statistiques sont bien adaptés à l'étude de telles variations. L'inhomogénéité du milieu est alors décrite à partir de sa fonction de covariance ou, de façon équivalente, sa densité spectrale de puissance.

### 1.3.2. Spectre des irrégularités ionosphériques

L'indice de réfraction  $n$  est défini comme une fonction stochastique du temps  $t$  et de la position  $\vec{r}$ . On peut l'écrire  $n(\vec{r}, t) = \langle n(\vec{r}, t) \rangle + \Delta n(\vec{r}, t)$ , avec  $\langle \rangle$  qui désigne la moyenne temporelle et spatiale. L'indice de réfraction moyen  $\langle n(\vec{r}, t) \rangle$  est responsable des effets large échelle. La grandeur  $\Delta n(\vec{r}, t)$  représente les variations temporelles et spatiales de l'indice de réfraction autour de sa valeur moyenne. Elle est considérée comme une variable centrée, de moyenne nulle :  $\langle \Delta n(\vec{r}, t) \rangle = 0$ . D'après (1.19),  $\Delta N_e(\vec{r}, t)$  possède les mêmes propriétés statistiques que  $\Delta n(\vec{r}, t)$ , au facteur  $\frac{r_e \lambda}{k_0}$  près.

On s'intéresse ici aux seules variations spatiales en travaillant sur un intervalle de temps suffisamment faible pour considérer le milieu ionosphérique comme localement homogène. La fonction de covariance spatiale 3D des fluctuations de concentration électronique s'écrit :

$$\langle \Delta N_e(\vec{r}) \Delta N_e(\vec{r}') \rangle = B_{\Delta N_e}^{3D}(\vec{r}, \vec{r}') = B_{\Delta N_e}^{3D}(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (1.21)$$

Elle est reliée par transformée de Fourier spatiale à la densité spectrale (ou spectre) 3D des fluctuations de densité électronique  $S_{\Delta N_e}^{3D}(\vec{K})$  :

$$B_{\Delta N_e}^{3D}(\vec{r} - \vec{r}') = \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3K S_{\Delta N_e}^{3D}(\vec{K}) e^{i\vec{K} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}, \quad (1.22)$$

où  $\vec{K}$  représente le vecteur d'onde, variable duale des dimensions de l'irrégularité ionosphérique dans le repère 3D. La convention utilisée pour la transformée de Fourier implique que :

$$S_{\Delta N_e}^{3D}(\vec{K}) = (2\pi)^{-3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3r B_{\Delta N_e}^{3D}(\vec{r}) e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r}} . \quad (1.23)$$

Dans la littérature [Schkarofsky, 1968], en régime dit « inertielle », le spectre 3D des irrégularités ionosphériques est décrit par l'équation suivante :

$$S_{\Delta N_e}^{3D}(|\vec{K}|) = C_s K^{-p} . \quad (1.24)$$

$C_s$  est un facteur de normalisation, ou constante de structure, et  $p$  est la pente du spectre du milieu, ou indice spectral. Ce spectre (1.24) décrit un phénomène de cascade inertielle des grandes échelles d'irrégularités vers les petites. La figure 1.16 en donne une schématisation.

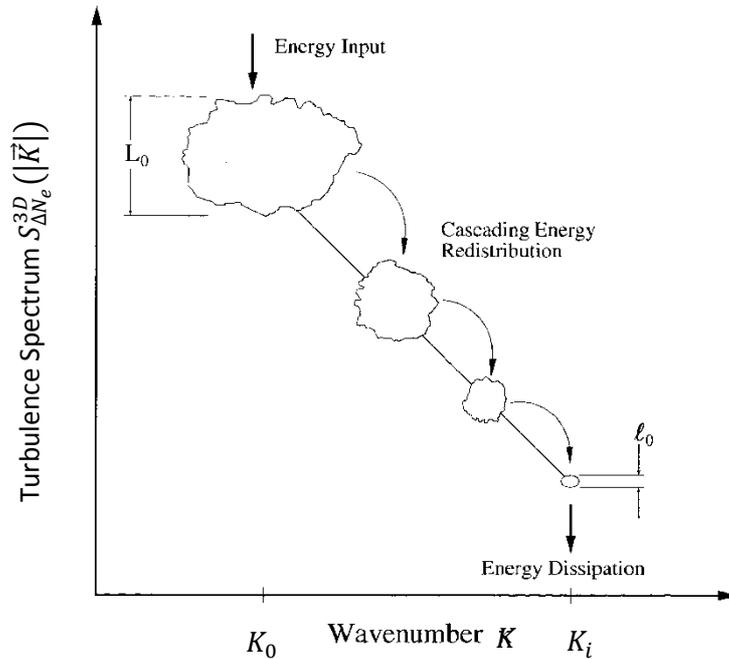


Figure 1.16 : Cascade inertielle représentative du processus turbulent 3D [Wheelon, 2004 (1)].

Pour que le spectre ne diverge pas aux faibles nombres d'onde, une taille longueur de décorrélation  $L_0$ , ou échelle externe<sup>17</sup>, est introduite [Booker, 1979], [Rino, 1979 (1)].

<sup>17</sup> La signification physique du terme  $L_0$  est difficile à appréhender. Elle correspond, dans notre étude, à la plus petite dimension de l'irrégularité ionosphérique.

Elle est typiquement de 5 à 20 km [Wheelon, 2004 (1)], [Fremouw & Bates, 1971], [Wernik et al., 2007]. Elle est reliée au nombre d'onde  $K_0$  par :

$$K_0 = \frac{2\pi}{L_0}. \quad (1.25)$$

En prenant en compte l'entrée de spectre en  $K_0$ , l'équation (1.24) devient :

$$S_{\Delta N_e}^{3D}(|\vec{K}|) = C_s (K^2 + K_0^2)^{-p/2} \quad (1.26)$$

L'échelle interne  $l_0$  correspond à la plus petite dimension des tourbillons. Elle est typiquement de quelques mètres dans la littérature [Wheelon, 2004 (1)]. Elle est reliée à  $K_i$  (cf. figure 1.16) par :

$$K_i = \frac{2\pi}{l_0}, \quad (1.27)$$

Les énergies mises en jeu pour les valeurs de  $K > K_i$  étant faibles,  $K_i$  n'intervient pas dans l'écriture du spectre (1.26).

On considère ici un régime de faibles perturbations, c'est-à-dire que la variance de la log-amplitude du signal est inférieure à 1 [Wheelon, 2004 (2)]. Dans ces conditions, la pente de la densité spectrale de puissance mesurée sur les signaux GNSS, notée  $q$ , est reliée simplement à l'indice spectral  $p$ , défini dans (1.24), par  $q = p - 1$ . Aux hautes latitudes, les valeurs obtenues pour  $q$  sont plus faibles qu'à l'équateur. On trouve des valeurs de pentes  $q$  comprises entre 1,2 et 4,2 pour des mesures à l'équateur [Béniguel et al., 2011] (cf. figure 1.17 (a)). Aux latitudes polaires, la distribution des pentes spectrales varie entre 0,75 et 3,75 [Mushini, 2012], [Fremouw et al., 1985], comme l'illustre la figure 1.17 (b). Les valeurs de  $p$  correspondantes sont 2,2 à 5,2 à l'équateur et 1,75 à 4,75 aux hautes latitudes.

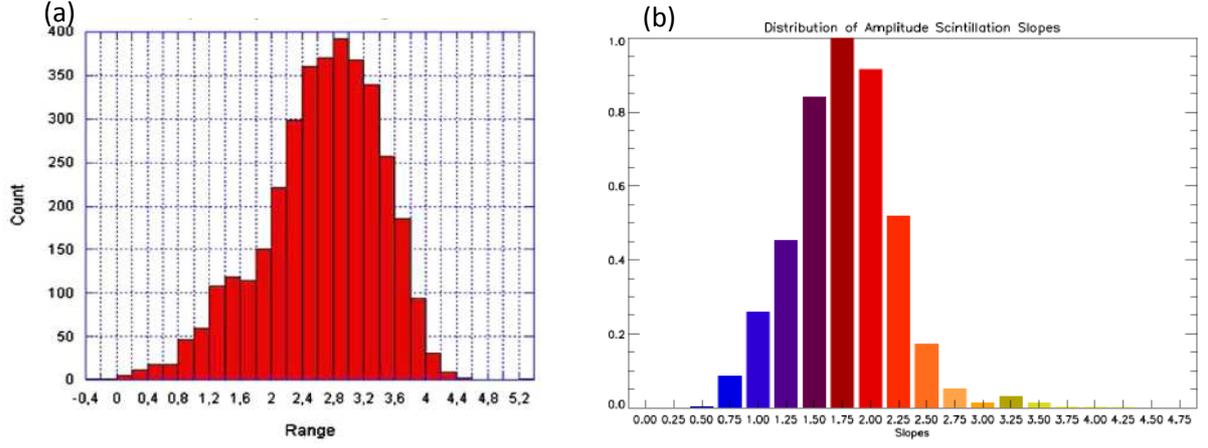


Figure 1.17 : Distribution des valeurs de pente  $q$  (a) aux latitudes équatoriales [Béniguel & Hamel, 2011] et (b) aux hautes latitudes [Mushini, 2012].

Dans le repère lié au champ magnétique  $(x_H, y_H, z_H)$ , le spectre (1.26) s'écrit :

$$S_{\Delta N_e}^{3D}(K_{x_H}, K_{y_H}, K_{z_H}) = C_s (K_{x_H}^2 + K_{y_H}^2 + K_{z_H}^2 + K_0^2)^{-p/2}. \quad (1.28)$$

Cette écriture est valable si on a affaire à des irrégularités ionosphériques isotropes. Or, d'après la section 1.3.1, ces irrégularités sont clairement anisotropes. Dans ce cas, d'après [Wheelon, 2004 (1)], le spectre (1.28) devient<sup>18</sup>:

$$S_{\Delta N_e}^{3D}(K_{x_H}, K_{y_H}, K_{z_H}) = a b c C_s (a^2 K_{x_H}^2 + b^2 K_{y_H}^2 + c^2 K_{z_H}^2 + K_0^2)^{-p/2}, \quad (1.29)$$

$$S_{\Delta N_e}^{3D}(K_{x_H}, K_{y_H}, K_{z_H}) = a^{3-p} A_y A_z C_s (K_{x_H}^2 + A_y^2 K_{y_H}^2 + A_z^2 K_{z_H}^2 + \frac{K_0^2}{a^2})^{-p/2}, \quad (1.30)$$

avec  $A_y = \frac{b}{a}$  et  $A_z = \frac{c}{a}$ . En calculant la covariance du spectre des fluctuations de densité électronique  $\sigma_{\Delta N_e}^2$ , on trouve l'expression du facteur de normalisation  $C_s$  :

$$\sigma_{\Delta N_e}^2 = \iiint_{-\infty}^{+\infty} dK_{x_H} dK_{y_H} dK_{z_H} S_{\Delta N_e}^{3D}(K_{x_H}, K_{y_H}, K_{z_H}). \quad (1.31)$$

<sup>18</sup> Cette expression est une extension de la formulation proposée dans [Wheelon, 2004 (1)] dans laquelle il ne tient compte que d'un seul axe d'anisotropie ( $a = b$ ).

On injecte l'expression du spectre (1.30) et on intègre sur chacune des composantes :

$$\sigma_{\Delta N_e}^2 = a^{3-p} A_y A_z C_s \iiint_{-\infty}^{+\infty} dK_{x_H} dK_{y_H} dK_{z_H} \left( K_{x_H}^2 + A_y^2 K_{y_H}^2 + A_z^2 K_{z_H}^2 + \frac{K_0^2}{a^2} \right)^{-p/2}, \quad (1.32)$$

$$\sigma_{\Delta N_e}^2 = a^{3-p} A_y A_z C_s \iint_{-\infty}^{+\infty} dK_{y_H} dK_{z_H} 2 \int_0^{+\infty} dK_{x_H} (K_{x_H}^2 + D^2)^{-p/2}, \quad (1.33)$$

où 
$$D^2 = A_y^2 K_{y_H}^2 + A_z^2 K_{z_H}^2 + \frac{K_0^2}{a^2}. \quad (1.34)$$

Sachant que  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^\mu} = a^{1-2\mu} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\mu-\frac{1}{2})}{2\Gamma(\mu)}$ , pour  $\mu > \frac{1}{2}$ , i.e. pour  $p > 1$ , on obtient :

$$\sigma_{\Delta N_e}^2 = a^{3-p} A_y^{2-p} A_z C_s \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{p-1}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2})} \int_{-\infty}^{+\infty} dK_{z_H} 2 \int_0^{+\infty} dK_{y_H} (K_{y_H}^2 + D'^2)^{\frac{1-p}{2}}, \quad (1.35)$$

où 
$$D'^2 = \frac{A_z^2}{A_y^2} K_{z_H}^2 + \frac{K_0^2}{a^2 A_y^2}. \quad (1.36)$$

Avec la même résolution en  $K_{y_H}$ , pour  $p > 2$ , on arrive à :

$$\sigma_{\Delta N_e}^2 = a^{3-p} A_y^{2-p} A_z C_s \frac{\pi \Gamma(\frac{p-2}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2})} \int_{-\infty}^{+\infty} dK_{z_H} \left( \frac{A_z^2}{A_y^2} K_{z_H}^2 + \frac{K_0^2}{a^2 A_y^2} \right)^{\frac{2-p}{2}}. \quad (1.37)$$

On réitère la même résolution pour l'intégrale en  $K_{z_H}$ . Le facteur de normalisation s'écrit finalement :

$$C_s = \sigma_{\Delta N_e}^2 \frac{K_0^{p-3} \Gamma(\frac{p}{2})}{\pi^{3/2} \Gamma(\frac{p-3}{2})}. \quad (1.38)$$

Ce résultat n'est valable qu'à la condition que  $p > 3$ . Le facteur de normalisation  $C_s$  est aussi appelé constante de structure ionosphérique. Il dépend de l'indice spectral, de la

dimension des irrégularités et de la variance des fluctuations de densité électronique. Ces dernières sont typiquement de l'ordre de 10 à 70% de la concentration électronique de base dans la couche F2 [Wernik & Liu, 1973]. Sachant que la densité électronique varie de  $10^9 \text{ el.m}^{-3}$  à  $10^{12} \text{ el.m}^{-3}$  [Lilensten & Blelly, 1999], on retrouve, pour la variance des fluctuations électroniques  $\sigma_{\Delta N_e}^2$ , des valeurs de  $10^{18} \text{ el}^2.\text{m}^{-6}$  à  $10^{24} \text{ el}^2.\text{m}^{-6}$  [Caouren, 2001].

Dans la littérature, on trouve la formulation de la constante de structure, ou force de la turbulence ionosphérique, définie par Rino [1979 (1)] :

$$C_{sRino} = 8\pi^{3/2} \langle \Delta N_e^2 \rangle \frac{q_0^{2\nu-2} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu - 1)}. \quad (1.39)$$

Les correspondances entre les expressions (1.38) et (1.39) sont  $q_0 = K_0$  et  $p = 2\nu + 1$ . On obtient finalement :

$$C_{sRino} = 8\pi^3 C_s. \quad (1.40)$$

Les expressions (1.38) et (1.39) sont donc identiques, au facteur  $8\pi^3$  près. Ce facteur vient de la différence dans les définitions de la transformée de Fourier<sup>19</sup>. L'expression du spectre des fluctuations de densité électronique  $S_{\Delta N_e}^{3D}$  en (1.30) est finalement validée par les formulations existant dans la littérature [Rino, 1979 (1)], [Shkarofsky, 1968].

#### 1.4. Conclusion

Ce premier chapitre nous a permis d'aborder la dynamique ionosphérique à l'origine de perturbations problématiques pour la transmission de signaux radioélectriques. En effet, l'intégrité, la disponibilité et la précision du signal GPS sont fortement dégradées, par les scintillations ionosphériques, qui peuvent même conduire dans certains cas, à la rupture de la liaison Terre-satellite. Il est alors important, pour la communauté

---

<sup>19</sup> Selon la définition de la transformée de Fourier de Rino, (1.23) s'écrit  $S_{\Delta N_e}^{3D}(\vec{K}) = \iiint d^3r B_{\Delta N_e}^{3D}(\vec{r}) e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r}}$ .

utilisatrice de ces signaux GNSS, de modéliser ce phénomène. Le choix d'une représentation statistique des fluctuations de densité électronique, conformément à la littérature [McClure & Hanson, 1973], et d'une géométrie à trois axes d'anisotropie des irrégularités ionosphériques a conduit à l'établissement de l'expression du spectre des fluctuations de concentration électronique en 3D  $S_{\Delta N_e}^{3D}$  (1.30).

D'autres modèles de spectres existent dans la littérature pour modéliser la turbulence ionosphérique. On peut citer par exemple les spectres bi-pente, caractérisés par une rupture de pente, donc, comme leur nom l'indique, deux valeurs de  $p$ . Cependant, la grande variabilité temporelle du milieu, notamment en cas de fortes perturbations, peut expliquer que les spectres mesurés présentent parfois un profil bi-pente. En effet, si le signal est mesuré sur un intervalle de temps relativement important, il est possible que les caractéristiques du milieu changent sur cet intervalle et donnent deux pentes spectrales différentes. Deshpande [2014] utilise un spectre des irrégularités ionosphériques hybride, introduit par Costa & Kelley [1977]. Celui-ci combine une distribution Gaussienne le long du champ magnétique ( $K_{z_H}$ ) et une loi de puissance dans le plan perpendiculaire ( $K_{x_H}$  et  $K_{y_H}$ ). Cependant, cette écriture ne permet de considérer qu'un seul axe d'anisotropie selon la direction du champ magnétique terrestre. Au vu de ces considérations et afin de conserver les 3 axes d'anisotropie, nous nous limitons donc à l'étude des spectres mono-pente dans la suite de ce travail.

Le spectre établi en (1.30) et validé par les expressions existant dans la littérature décrit statistiquement le comportement de l'ionosphère. Les outils numériques permettent de générer facilement des réalisations aléatoires des fluctuations électroniques. L'idée est donc d'implémenter le spectre des fluctuations électroniques (1.30) dans un modèle de propagation transionosphérique numérique : c'est l'objet du chapitre 2.

## **Chapitre 2 : Schémas numériques 3D et 2D de la propagation transionosphérique**

---

Plusieurs modèles de propagation transionosphérique sont utilisés par la communauté GNSS pour prédire les affaiblissements des signaux dus à la scintillation ionosphérique, notamment les schémas numériques de type écran de phase (MPS). Ainsi, WBMOD est basé sur une configuration 3D et ne contient qu'un unique écran de phase 2D [Fremouw & Secan, 1984]. Le modèle SIGMA [Deshpande et al., 2014] dédié aux latitudes polaires utilise également une propagation en 3D, mais en considérant plusieurs écrans de phase 2D. Le modèle GISM [Béniguel & Hamel, 2011] référencé à l'ITU est quant à lui basé sur une représentation de la propagation réduite à 2 dimensions, avec des écrans de phase multiples 1D. Tous ces modèles transionosphériques travaillent dans le repère géomagnétique et les écrans de phase  $y$  sont définis dans le plan perpendiculaire à la verticale locale. Dans ce manuscrit, le repère de travail est lié au LOS, les écrans de phase étant alors perpendiculaires à la direction de propagation. Plusieurs raisons justifient ce choix :

- Définir les écrans de phase comme étant horizontaux est surtout lié au fait que le champ magnétique terrestre forme des couches magnétiques horizontales aux

latitudes basses, régions auxquelles la majorité des modèles existants est dédiée. Or, aux latitudes polaires, la direction du champ magnétique est verticale. En travaillant dans le repère du LOS, on s'affranchit donc de la direction du champ magnétique terrestre pour définir les écrans de phase et on peut traiter tout type de liaison Terre-satellite ou satellite-satellite (radio-occultation).

- Dans les modèles à un écran de phase mince horizontal (comme pour WBMOD), en cas de faible élévation, situation souvent rencontrée aux latitudes polaires, la dimension de cet écran de phase peut atteindre plusieurs centaines de kilomètres, ce qui rend les calculs numériques très longs.
- L'un des objectifs de cette thèse est de caractériser l'effet de la perte d'une des dimensions de la propagation. Travailler dans le repère lié au LOS permet d'appréhender plus facilement cette réduction dimensionnelle. En effet, le LOS étant déjà une des directions du repère de travail, les expressions des spectres définies en 3D peuvent être facilement réduites à 2 coordonnées sans souci de projection, comme c'est le cas en travaillant dans le repère géomagnétique. De plus, la compréhension qualitative des effets de la réduction dimensionnelle est grandement facilitée dans le repère du LOS comme nous le verrons dans ce chapitre et le suivant.

L'outil numérique PWE/MPS défini dans le repère du LOS est dénommé STIPEE : Software Tool for Ionospheric Propagation Events Evaluation. Dans ce chapitre, le principe de ce modèle est développé et il est comparé aux modèles existants qui emploient la technique MPS. La première partie est dédiée à l'implémentation numérique 3D-PWE/2D-MPS, avec la résolution de l'équation parabolique et le calcul du spectre des écrans de phase dans le repère du LOS. La deuxième partie, consacrée au schéma 2D-PWE/1D-MPS, reprend les mêmes étapes que la configuration 3D/2D. La comparaison des deux schémas numériques 3D/2D et 2D/1D et l'impact de la réduction dimensionnelle sur les indices de scintillation sont décrits dans la dernière partie. Deux situations géographiques particulières y sont traitées : les latitudes équatoriales, décrites dans la littérature [Rogers et al., 2009], [Béniguel & Hamel, 2011], et les latitudes polaires, permettant ainsi de faire le lien avec les modèles écrans de phase existants.

## 2.1. Schéma numérique STIPEE 3D-PWE/2D-MPS

### 2.1.1. Résolution numérique de l'équation de propagation 3D

On considère une onde électromagnétique, représentée par le champ électrique  $\vec{e}(\vec{r}, t)$  et le champ magnétique  $\vec{b}(\vec{r}, t)$ , se propageant dans la couche ionosphérique selon l'axe  $s$  (direction du LOS), du satellite au récepteur. On travaille donc dans le repère  $(u, v, s)$ , défini sur la figure 2.1.

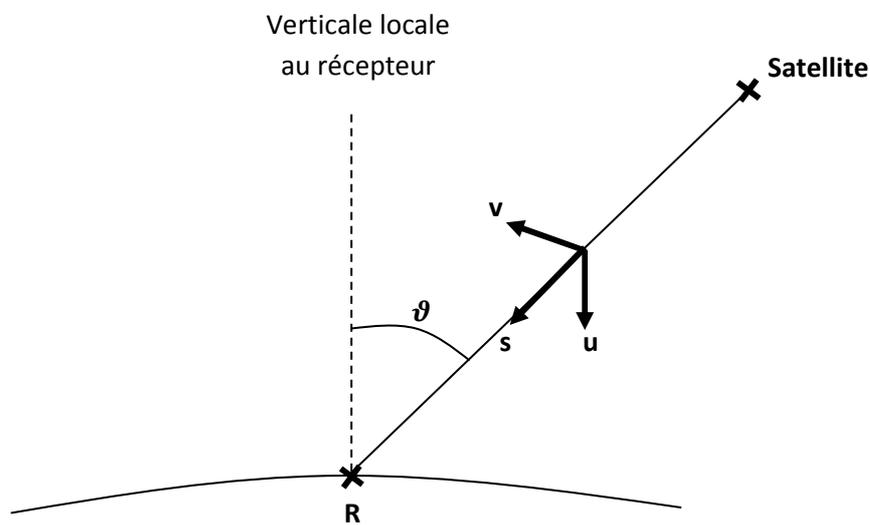


Figure 2.1 : Représentation du repère  $(u, v, s)$  lié au LOS dans le repère géographique local ; R désigne le récepteur terrestre et  $\vartheta$  l'angle entre la verticale locale et le LOS.

On note  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  la densité de courants dans le milieu ionosphérique. Elle est définie par :

$$\vec{J} = -N_e e \vec{V}, \quad (2.1)$$

où  $N_e$  est la concentration électronique et  $e$  la charge élémentaire. En notant  $m$  la masse de l'électron, la vitesse de déplacement des électrons  $\vec{V}$ , induite par la présence du champ électrique  $\vec{e}$ , s'écrit :

$$\vec{V} = -\frac{e}{m} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}. \quad (2.2)$$

Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{e} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}, \quad (2.3) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{b} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{e}) = 0, \quad (2.5)^1 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0. \quad (2.6)$$

Le rotationnel de l'équation (2.3) donne :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{e}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{b}), \quad (2.7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{e}) - \nabla^2 \vec{e} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{e}. \quad (2.8)$$

D'après (2.5),  $\vec{e} \cdot \vec{\nabla} \varepsilon + \varepsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{e} = 0$ , d'où  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{e}) = -\vec{\nabla} \cdot [\vec{e} \cdot \vec{\nabla} (\ln \varepsilon)]$ , on obtient finalement l'équation de propagation :

$$\nabla^2 \vec{e}(\vec{r}, t) - \mu_0 \varepsilon_0 \left( 1 + \frac{N_e e^2}{\varepsilon_0 m} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{e}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \cdot [\vec{e} \cdot \vec{\nabla} (\ln \varepsilon)]. \quad (2.9)$$

Le terme de droite de l'équation (2.9) décrit les effets de dépolarisation du milieu de propagation. On les considère négligeables dans la suite des calculs et on obtient :

$$\nabla^2 \vec{e}(\vec{r}, t) - \mu_0 \varepsilon_0 \left( 1 + \frac{N_e e^2}{\varepsilon_0 m} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{e}(\vec{r}, t) = \vec{0}. \quad (2.10)$$

Le champ électrique  $\vec{e}$ , de pulsation  $\omega$  peut s'écrire, en régime harmonique :

$$\vec{e}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t}. \quad (2.11)$$

<sup>1</sup> Le plasma étant considéré comme globalement neutre, la densité volumique de charges est nulle.

L'expression (2.10) devient :

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \left( 1 - \frac{N_e e^2}{\varepsilon_0 m \omega^2} \right) \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}, \quad (2.12)$$

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + k_0^2 \varepsilon_r(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}, \quad (2.13)$$

$$\text{avec } k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}, \quad \mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}. \quad \text{et } \varepsilon_r(\vec{r}) = 1 - \frac{N_e(\vec{r}) e^2}{\varepsilon_0 m \omega^2}. \quad (2.14)$$

Chaque composante du champ électrique  $\vec{E}$  satisfaisant à l'équation (2.13). On peut donc l'écrire sous sa forme scalaire :

$$\nabla^2 E(\vec{r}) + k_0^2 \varepsilon_r(\vec{r}) E(\vec{r}) = 0. \quad (2.15)$$

On travaille dans le repère 3D  $(u, v, s)$  lié au LOS selon  $s$ . L'équation (2.15) devient :

$$\frac{\partial^2 E(u, v, s)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 E(u, v, s)}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 E(u, v, s)}{\partial s^2} + k_0^2 \varepsilon_r(u, v, s) E(u, v, s) = 0. \quad (2.16)$$

Par définition, la permittivité relative  $\varepsilon_r$  est reliée à l'indice de réfraction du milieu  $n$  par la formule<sup>2</sup>:

$$\varepsilon_r = n^2(\vec{r}) = [\langle n(\vec{r}) \rangle + \Delta n(\vec{r})]^2. \quad (2.17)$$

La valeur moyenne de l'indice ionosphérique  $\langle n \rangle$  est prise égale à 1 et les fluctuations d'indice  $\Delta n$  sont considérées comme très inférieures à 1. Un développement au premier ordre de (2.17) permet d'obtenir :

$$\varepsilon_r = 1 + 2\Delta n(\vec{r}). \quad (2.18)$$

L'équation (2.16) devient :

$$\frac{\partial^2 E(u, v, s)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 E(u, v, s)}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 E(u, v, s)}{\partial s^2} + k_0^2 [1 + 2\Delta n(u, v, s)] E(u, v, s) = 0. \quad (2.19)$$

<sup>2</sup> Cf. 1.3.2.

On cherche la solution de l'équation (2.19) qui soit propagative, dans le sens des  $s$  croissants. On définit l'opérateur pseudo-différentiel  $Q$  par :

$$Q = \sqrt{1 + \frac{1}{k_0^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) + 2\Delta n(\vec{r})}, \quad (2.20)$$

Sachant que  $\sqrt{1 + \xi + \delta} \approx \sqrt{1 + \xi} + \sqrt{1 + \delta} - 1$ , (2.20) devient :

$$Q \approx \sqrt{1 + \frac{1}{k_0^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) + \Delta n}. \quad (2.21)$$

Dans ces conditions, (2.19) se réécrit <sup>3</sup>:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial s} - ik_0 Q \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} + ik_0 Q \right\} E = 0. \quad (2.22)$$

Le premier terme correspond à une propagation de l'onde vers l'avant (dans le sens des  $s$  croissants), le second vers l'arrière. D'après le schéma de la figure 2.1, comme on travaille avec un signal se propageant du satellite au récepteur, on considère alors le terme de propagation vers l'avant. L'expression (2.22) donne :

$$\frac{\partial E}{\partial s} = ik_0 \left[ \sqrt{1 + \frac{1}{k_0^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) + \Delta n} \right] E \quad (2.23)$$

L'équation (2.23) définit l'Equation Parabolique ou Parabolic Wave Equation (PWE) que l'on résout dans le domaine de Fourier. Pour cela, on considère dans un premier temps

<sup>3</sup> L'équation (2.22) n'est valable en toute rigueur que si  $\left\{ ik_0 Q \frac{\partial}{\partial s} \right\} E = \left\{ \frac{\partial}{\partial s} (ik_0 Q) \right\} E$ . Les opérateurs  $\frac{\partial}{\partial s}$  et  $Q$  commutent uniquement si la permittivité relative  $\varepsilon_r(u, v, s)$  donc les fluctuations d'indice de réfraction  $\Delta n(u, v, s)$  sont indépendantes de  $s$ . D'une part, les variations de l'indice de réfraction atmosphérique sont lentes. D'autre part, le schéma de résolution que l'on va mettre en œuvre est itératif, avec un pas longitudinal  $\delta s$  paramétrable, de sorte que l'erreur reste faible et l'approximation satisfaisante.

l'hypothèse selon laquelle les fluctuations de l'indice de réfraction ne dépendent pas de  $s$  :  $\Delta n = \Delta n(u, v)$ . Les solutions de l'équation différentielle (2.23) sont de la forme :

$$E(u, v, s + \delta s) = e^{ik_0 \delta s \left[ \sqrt{1 + \frac{1}{k_0^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) + \Delta n(u, v)} \right]} E(u, v, s), \quad (2.24)$$

$$E(u, v, s + \delta s) = e^{ik_0 \delta s \Delta n(u, v)} \left\{ e^{ik_0 \delta s \sqrt{1 + \frac{1}{k_0^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right)}} E(u, v, s) \right\}. \quad (2.25)$$

On pose 
$$\epsilon(u, v, s + \delta s) = e^{ik_0 \delta s \sqrt{1 + \frac{1}{k_0^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right)}} E(u, v, s). \quad (2.26)$$

On remarque que  $\epsilon(u, v, s) = E(u, v, s)$ . De plus,  $\epsilon$  est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial s} - ik_0 \sqrt{1 + \frac{1}{k_0^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right)} \epsilon = 0. \quad (2.27)$$

La transformée de Fourier  $\Sigma(K_u, K_v, s)$  en  $u$  et  $v$  du terme  $\epsilon$  est définie par :

$$\Sigma(K_u, K_v, s) = TF[\epsilon(u, v, s)] = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} du dv \epsilon(u, v, s) e^{-i(u K_u + v K_v)}. \quad (2.28)$$

La transformée de Fourier inverse est :

$$\epsilon(u, v, s) = TF^{-1}[\Sigma(K_u, K_v, s)] = \iint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_v \Sigma(K_u, K_v, s) e^{i(u K_u + v K_v)}. \quad (2.29)$$

La transformée de Fourier de l'expression (2.27) donne :

$$\frac{\partial \Sigma(K_u, K_v, s)}{\partial s} - i \sqrt{k_0^2 - K_u^2 - K_v^2} \Sigma(K_u, K_v, s) = 0. \quad (2.30)$$

Les solutions de cette équation différentielle (2.30) sont de la forme :

$$\Sigma(K_u, K_v, s + \delta s) = e^{i\delta s \sqrt{k_0^2 - K_u^2 - K_v^2}} \Sigma(K_u, K_v, s). \quad (2.31)$$

En combinant les expressions précédentes, on arrive finalement à :

$$E(u, v, s + \delta s) = e^{ik_0 \delta s \Delta n(u, v)} \text{TF}^{-1} \left\{ e^{i \sqrt{k_0^2 - K_u^2 - K_v^2} \delta s} \text{TF}[E(u, v, s)] \right\}. \quad (2.32)$$

On réintroduit la dépendance en  $s$  des fluctuations d'indice de réfraction en définissant le terme de phase  $\phi$  par :

$$\phi(u, v) = \delta s \Delta n(u, v) = \int_s^{s+\delta s} \Delta n(u, v, \xi) d\xi. \quad (2.33)$$

L'expression finale du champ électrique  $E$  est :

$$E(u, v, s + \delta s) = e^{ik_0 \phi(u, v)} \text{TF}^{-1} \left\{ e^{i \sqrt{k_0^2 - K_u^2 - K_v^2} \delta s} \text{TF}[E(u, v, s)] \right\}. \quad (2.34)$$

La solution (2.34) permet de déterminer pas-à-pas la valeur du champ électrique  $E$  se propageant à travers le milieu perturbé. C'est la méthode Split-Step Fourier (SSF). Le champ traverse tout d'abord une épaisseur de vide  $\delta s$  puis arrive sur un écran de phase défini par  $\phi(u, v)$  (2.33). La traversée du milieu perturbé est modélisée par une succession d'écrans de phase multiples, eux-mêmes caractérisés par des fluctuations d'indice de réfraction  $\Delta n(u, v, s)$ .

L'expression (2.34) est valable pour une propagation 3D. La propagation se fait selon l'axe  $s$  et les écrans sont définis sur le plan transverse 2D  $(u, v)$ . Le schéma itératif est modélisé sur la figure 2.2.

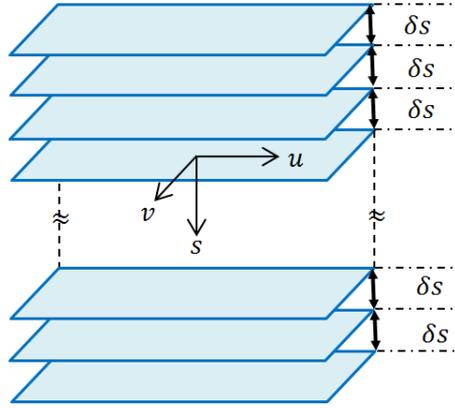


Figure 2.2. : Description générale des schémas numériques en géométrie 3D : propagation dans  $(u, v, s)$  et écrans de phase selon  $(u, v)$

D'après la figure 2.2, les écrans de phase sont séparés d'un pas  $\delta s$ . Entre deux écrans successifs, la propagation se fait en espace libre. Le schéma numérique 3D-PWE/2D-MPS correspond à une configuration de travail 3D.

Les écrans de phase, définis en (2.33) pour la 3D, sont caractéristiques du milieu ionosphérique et en particulier des fluctuations de concentration électronique, les fluctuations d'indice de réfraction  $\Delta n$  étant liées aux fluctuations de densité électronique  $\Delta N_e$  via (1.19). L'étape suivante va donc consister à implémenter numériquement la résolution SSF, en dérivant de spectre des écrans de phase  $S_\phi$ .

### 2.1.2. Spectre des écrans de phase 2D

D'après la partie 1.3.2, les fluctuations d'indice sont telles que  $\langle \Delta n(\vec{r}) \rangle = 0$ . En géométrie 3D, le spectre des écrans de phase  $\phi(u, v)$ , relié à  $\Delta n$  au travers de l'expression (2.33), est donc une variable aléatoire centrée dont la fonction de covariance spatiale  $B_\phi^{2D}$  est définie par :

$$B_\phi^{2D}(u, v) = \langle \phi(u', v') \phi(u + u', v + v') \rangle, \quad (2.35)$$

$$B_\phi^{2D}(u, v) = \int_s^{s+\delta s} d\xi_1 \int_s^{s+\delta s} d\xi_2 \langle \Delta n(u', v', \xi_1) \Delta n(u + u', v + v', \xi_2) \rangle. \quad (2.36)$$

D'après l'expression des fluctuations d'indice  $\Delta n$  (1.19) et la fonction de covariance  $B_{\Delta N_e}^{3D}$  (1.21), on obtient :

$$B_{\phi}^{2D}(u, v) = \left(\frac{r_e \lambda}{k_0}\right)^2 \int_0^{\delta s} d\xi_1 \int_0^{\delta s} d\xi_2 B_{\Delta N_e}^{3D}(u, v, \xi_2 - \xi_1). \quad (2.37)$$

On résout cette intégrale en posant le changement de variables suivant :

$$X = \xi_2 - \xi_1 \quad \text{et} \quad 2Y = \xi_2 + \xi_1. \quad (2.38)$$

La figure 2.3 donne une représentation graphique du changement de variable opéré.

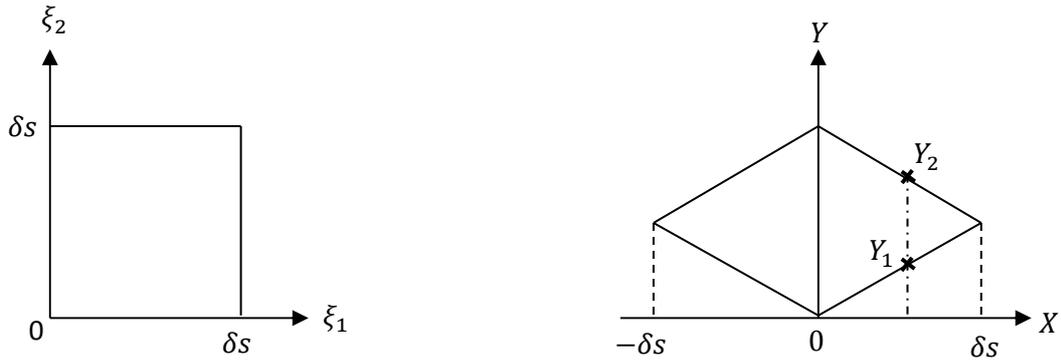


Figure 2.3 : Changement de variable somme / différence.

Pour une valeur de  $X$  fixée,  $Y$  varie de  $Y_1 = |X|/2$  à  $Y_2 = \delta s - |X|/2$ . L'intégrale (2.37) devient :

$$B_{\phi}^{2D}(u, v) = \left(\frac{r_e \lambda}{k_0}\right)^2 \int_{-\delta s}^{\delta s} dX \int_{|X|/2}^{\delta s - |X|/2} dY B_{\Delta N_e}^{3D}(u, v, X),$$

$$B_{\phi}^{2D}(u, v) = \left(\frac{r_e \lambda}{k_0}\right)^2 \delta s \int_{-\delta s}^{\delta s} dX \left(1 - \frac{|X|}{\delta s}\right) B_{\Delta N_e}^{3D}(u, v, X). \quad (2.39)$$

L'équation (2.39) peut être résolue numériquement en remplaçant la fonction de covariance des fluctuations électroniques  $B_{\Delta N_e}^{3D}$  par son expression (1.22) en fonction du spectre de ces fluctuations,  $S_{\Delta N_e}^{3D}(K_u, K_v, K_s)$ . Le calcul peut cependant être simplifié en considérant que  $\delta s$ , distance entre deux écrans de phase successifs, est grande devant la longueur de corrélation des fluctuations de densité électronique dans la direction du LOS. Ce point est important à souligner car, aux hautes latitudes, comme le champ magnétique est vertical, les irrégularités sont étirées verticalement. Selon la latitude de la station et l'élévation du satellite, la longueur de corrélation dans la direction du LOS notée  $L_s$  peut atteindre plusieurs dizaines de km. Sachant que l'épaisseur d'ionosphère traversée est de l'ordre de la centaine de km, le nombre d'écrans de phase traversé est alors réduit et peut poser problème lors de la reproduction de situations de fortes perturbations.

Dans le cas où  $L_s \ll \delta s$ , on peut étendre les bornes de l'intégrale (2.39) à l'infini. On obtient finalement :

$$B_{\phi}^{2D}(u, v) = \left(\frac{r_e \lambda}{k_0}\right)^2 \delta s \int_{-\infty}^{+\infty} ds B_{\Delta N_e}^{3D}(u, v, s). \quad (2.40)$$

La transformée de Fourier 2D de la fonction de covariance (2.40) est définie par :

$$S_{\phi}^{2D}(K_u, K_v) = (2\pi)^{-2} \iint_{-\infty}^{+\infty} du dv B_{\phi}^{2D}(u, v) e^{-i(K_u u + K_v v)}. \quad (2.41)$$

En injectant l'expression (2.40) dans (2.41), on obtient :

$$S_{\phi}^{2D}(K_u, K_v) = (2\pi)^{-2} \left(\frac{r_e \lambda}{k_0}\right)^2 \delta s \iiint_{-\infty}^{+\infty} du dv ds B_{\Delta N_e}^{3D}(u, v, s) e^{-i(K_u u + K_v v)}. \quad (2.42)$$

D'après la relation (1.23) entre  $B_{\Delta N_e}^{3D}$  et le spectre des fluctuations de densité électronique  $S_{\Delta N_e}^{3D}$ , l'expression (2.42) devient :

$$S_{\phi}^{2D}(K_u, K_v) = 2\pi \left(\frac{r_e \lambda}{k_0}\right)^2 \delta_s S_{\Delta N_e}^{3D}(K_u, K_v, K_s = 0) \quad (2.43)$$

Dans le chapitre 1, le spectre des fluctuations de densité électronique (1.30) est exprimé dans le repère  $(x_H, y_H, z_H)$  lié au champ magnétique terrestre. Conformément à (2.43), la définition du spectre  $S_{\phi}^{2D}$  des écrans de phase transverses nécessite la dérivation du spectre des fluctuations électroniques  $S_{\Delta N_e}^{3D}$  dans le repère  $(u, v, s)$  lié au LOS. Elle est conduite dans la section suivante.

### 2.1.3. Spectre des fluctuations électroniques dans le repère du LOS

Pour travailler dans le repère du LOS, on va donc établir la matrice de passage  $P$  pour passer du repère  $(x_H, y_H, z_H)$  au repère  $(u, v, s)$ .

On définit le repère lié au champ magnétique terrestre  $(x_H, y_H, z_H)$  dans le système d'axes  $(u, v, s)$  en introduisant les angles  $\alpha$ ,  $\alpha_y$ ,  $\psi$  et  $\gamma$ .  $\gamma$  est l'angle formé entre le vecteur champ magnétique  $\vec{H}_0$  (i.e.  $z_H$ ) et l'axe  $s$ ,  $\alpha$  est l'angle entre l'axe  $v$  et la projection du champ magnétique  $\vec{H}_0$  sur le plan  $(u, v)$ . L'axe secondaire  $y_H$  est repéré par les angles  $\psi$ , entre son projeté orthogonal sur  $(u, v)$  et le plan  $(u, v)$  lui-même, et  $\alpha_y$ , entre ce projeté orthogonal et l'axe  $v$ . La figure 2.4 donne une représentation de l'irrégularité ionosphérique dans le repère du LOS<sup>4</sup>.

<sup>4</sup> Briggs & Parkin [1963] définissent également un repère de travail lié au LOS mais, dans leur représentation, la direction du champ magnétique  $z_H$  appartient au plan  $(v, s)$ , i.e.  $\alpha = 0$ .

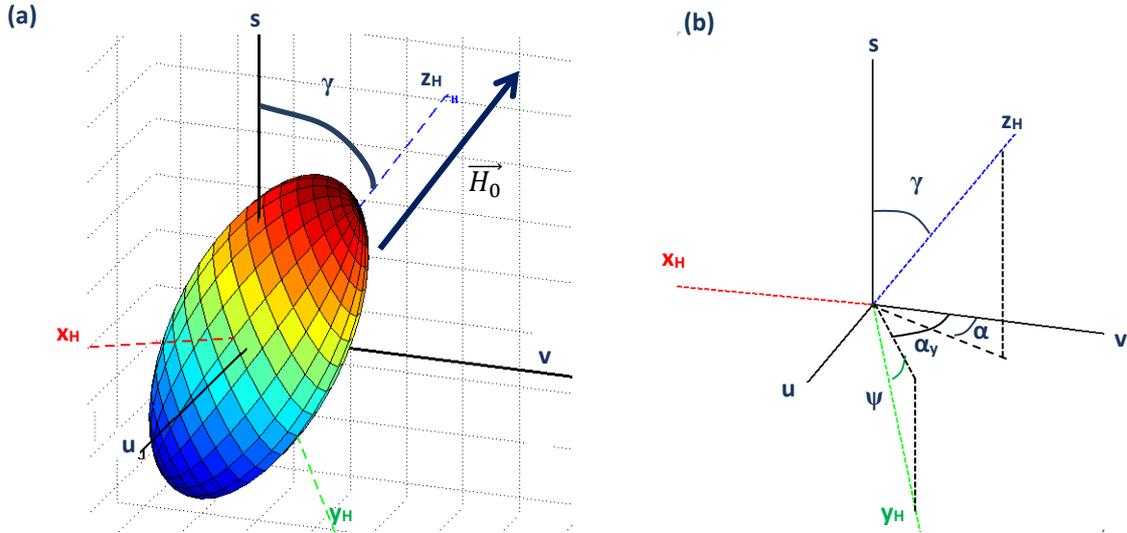


Figure 2.4 : Repérage de  $(x_H, y_H, z_H)$  dans  $(u, v, s)$  avec (a) et sans (b) la représentation de l'irrégularité ionosphérique.

Une fois définis les angles  $\gamma$ ,  $\psi$  et  $\alpha$ , la matrice de passage du repère  $(x_H, y_H, z_H)$  au repère  $(u, v, s)$  peut être établie. On peut exprimer  $\alpha_y$  en fonction de ces trois angles. Pour cela, on définit les coordonnées des vecteurs  $y_H$  et  $z_H$  dans  $(u, v, s)$ .

$$y_H = \begin{pmatrix} \cos \psi \sin \alpha_y \\ \cos \psi \cos \alpha_y \\ -\sin \psi \end{pmatrix}, \quad z_H = \begin{pmatrix} \sin \gamma \sin \alpha \\ \sin \gamma \cos \alpha \\ \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Le produit scalaire de ces deux vecteurs étant nul, on arrive à :

$$\alpha_y = \alpha + \text{acos} \left( \frac{\tan \psi}{\tan \gamma} \right). \quad (2.45)$$

La condition suivante doit être satisfaite entre  $\gamma$  et  $\psi$  :

$$\left| \frac{\tan \psi}{\tan \gamma} \right| \leq 1 \quad \text{d'où} \quad |\psi| \leq |\gamma|. \quad (2.46)$$

Les coordonnées du vecteur  $x_H$  sont déterminées par le produit vectoriel  $x_H = y_H \wedge z_H$  :

$$x_H = \begin{pmatrix} \sin \gamma \cos \alpha \sin \psi + \cos \alpha_y \sin \psi \cos \gamma \\ -\cos \gamma \sin \alpha_y \cos \psi - \sin \psi \sin \gamma \sin \alpha \\ \sin \gamma \cos \psi \sin(\alpha_y - \alpha) \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

La matrice de passage  $P$  s'écrit finalement :

$$\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \\ s \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} \sin \gamma \cos \alpha \sin \psi & -\cos \gamma \sin \alpha_y \cos \psi & \sin \gamma \cos \psi \sin(\alpha_y - \alpha) \\ + \cos \alpha_y \sin \psi \cos \gamma & -\sin \psi \sin \gamma \sin \alpha & \\ \hline \cos \psi \sin \alpha_y & \cos \psi \cos \alpha_y & -\sin \psi \\ \hline \sin \gamma \sin \alpha & \sin \gamma \cos \alpha & \cos \gamma \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

En utilisant l'expression de la matrice de passage  $P$ , on obtient l'expression suivante :

$$S_{\Delta N_e}^{3D}(K_u, K_v, K_s) = a^{3-p} A_y A_z C_s \left( AK_u^2 + BK_v^2 + 2CK_u K_v + f(K_s) + \frac{K_0^2}{a} \right)^{-p/2}, \quad (2.49)$$

avec<sup>5</sup>

$$A = (\cos \psi \cos \alpha_y \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha \sin \psi)^2 + A_y^2 \sin^2 \alpha_y \cos^2 \psi + A_z^2 \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha$$

$$B = (\cos \psi \sin \alpha_y \cos \gamma + \sin \gamma \sin \alpha \sin \psi)^2 + A_y^2 \cos^2 \alpha_y \cos^2 \psi + A_z^2 \sin^2 \gamma \cos^2 \alpha \quad (2.50)$$

$$C = -(\cos \psi \cos \alpha_y \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha \sin \psi)(\cos \psi \sin \alpha_y \cos \gamma + \sin \gamma \sin \alpha \sin \psi) + A_y^2 \sin \alpha_y \cos^2 \psi \cos \alpha_y + A_z^2 \sin \alpha \sin^2 \gamma \cos \alpha$$

<sup>5</sup> Seuls les termes  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont exprimés ici. On ne développe pas l'expression de  $f(K_s)$  car d'après (2.43)  $K_s = 0$ , impliquant  $f(K_s) = 0$ .

En injectant l'expression du spectre 3D (2.49) dans la formulation du spectre des écrans de phase (2.43), on arrive à :

$$S_{\phi}^{2D}(K_u, K_v) = 2\pi \left(\frac{r_e \lambda}{k_0}\right)^2 \delta s a^{3-p} A_y A_z C_s \left( AK_u^2 + BK_v^2 + 2C K_u K_v + \frac{K_0^2}{a^2} \right)^{-p/2} . \quad (2.51)$$

Ces écrans peuvent être implémentés numériquement : les critères à respecter ainsi que des exemples de réalisation sont présentés dans la partie suivante.

#### 2.1.4. Implémentation numérique du schéma 3D-PWE/2D-MPS

Les écrans de phase, définis par leur spectre (2.51), sont générés aléatoirement en filtrant un bruit blanc gaussien par  $\sqrt{S_{\phi}^{2D}}$  [Macaskill & Ewart, 1984]. La figure 2.5 représente deux exemples de réalisation d'écran de phase 2D aux hautes et aux basses latitudes avec les paramètres d'entrée décrits dans le tableau 2.1.

Paramètres d'entrée	Géométrie de l'irrégularité			Angles de propagation				Couche ionosphérique	
	$A_z$	$A_y$	$L_0$ (km)	$\alpha$	$\psi$	$\gamma$	$\vartheta$	$\sigma_{\Delta N_e}^2$ (e <sup>-2</sup> /m <sup>6</sup> )	$p$
hautes latitudes	3	1	2	0	0	15	15	$10^{21}$	4
basses latitudes	10		1			90	0		

Tableau 2.1 : Paramètres d'entrée des générations d'écrans de phase 2D aux hautes et basses latitudes.

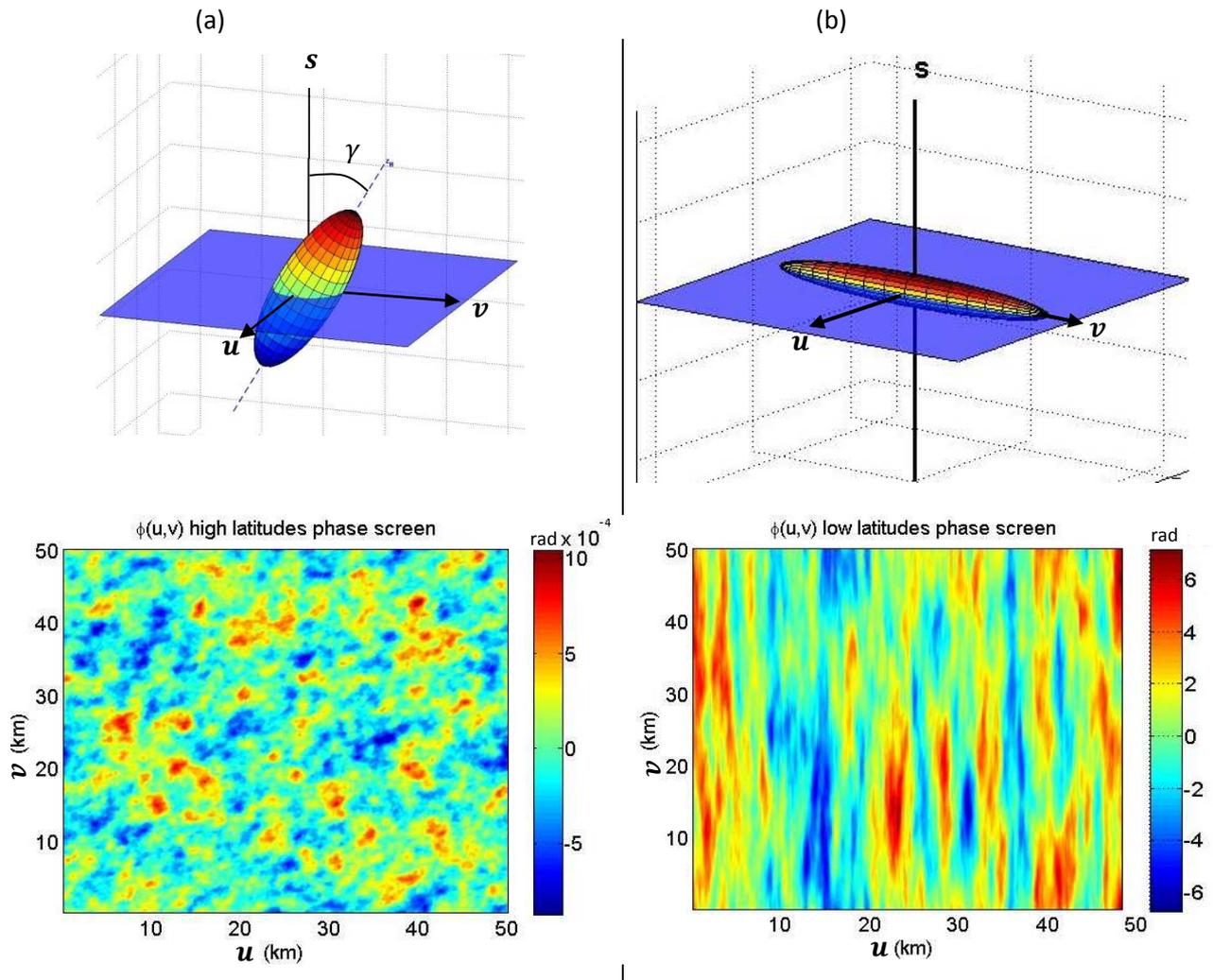


Figure 2.5 : Exemples de réalisation d'écran de phase 2D  $\phi(u, v)$  et géométrie correspondante (a) aux hautes latitudes et (b) aux latitudes équatoriales.

On remarque, sur la figure 2.5 (b), les striations dues à l'anisotropie de l'irrégularité sur le plan  $(u, v)$ . A l'inverse, la coupe de l'irrégularité ionosphérique sur le plan  $(u, v)$  aux latitudes polaires (figure 2.5 (a)) est pratiquement isotrope.

Plusieurs critères doivent être respectés pour garantir la qualité des résultats numériques. La distance entre les écrans de phase et la dimension des écrans eux-mêmes dépendent des longueurs de corrélation donc de la coupe des irrégularités dans le plan  $(u, v)$ . Les critères utilisés dans le modèle numérique MPS sont majoritairement issus des travaux de Knepp [1983]. Les paramètres choisis pour les calculs numériques sont les suivants :

- **Taille des écrans  $L_{screen}$**  : elle doit être supérieure à la coupe de l'irrégularité dans le plan transverse  $(u, v)$ , notée  $L_c$ .  $L_0$  étant la plus petite dimension de l'irrégularité ionosphérique,  $L_c$  varie, selon les angles d'arrivée et les ratios d'anisotropie, de  $L_0$  (cas surtout rencontré en configuration hautes latitudes) à  $A_z L_0$  (situation aux latitudes équatoriales). La longueur des côtés est définie par  $L_{screen} = 5 L_c$ .
- **Distance entre deux écrans consécutifs  $\delta s$**  : la résolution SSF décrite précédemment impose que les réalisations numériques de deux écrans successifs soient décorréliées. La distance entre écrans correspond donc au maximum entre la longueur de Fresnel et la longueur de corrélation selon le LOS,  $L_s$ . La longueur de Fresnel est définie par  $L_{Fresnel} = 2\sqrt{\lambda L_V}$ ,  $L_V$  étant la distance parcourue par le signal dans le vide depuis le bas de la couche ionosphérique jusqu'au récepteur terrestre (cf. figure 1.7). Dans notre cas,  $L_{Fresnel} \approx 300$  m.  $L_s$  est la projection de l'irrégularité sur l'axe  $s$ , elle varie typiquement de  $L_0$  (aux latitudes équatoriales) à  $A_z L_0$  (aux latitudes polaires). La distance entre deux écrans successifs est définie par  $\delta s = 2 \max(L_s, L_{Fresnel})$ .
- **Distance entre deux points successifs d'un écran  $\delta u$**  : d'après le critère de Nyquist, la différence de phase de deux points successifs doit être inférieure à  $\pi$ , ce qui donne  $\delta u < \pi L_0 / (\sqrt{2} \sigma_\varphi)$ , où  $\sigma_\varphi$  est l'écart-type de la phase.  $N_u$  est le nombre de points sur un écran, la condition précédente devient :  $L_{screen} / N_u < \pi L_0 / (\sqrt{2} \sigma_\varphi)$ , soit  $N_u > 10\sqrt{2} \sigma_\varphi / \pi$ . On fixe le nombre de points  $N_v = N_u = 512$ . La distance  $\delta u$  répond alors largement au critère de Nyquist, même pour les fortes valeurs de  $\sigma_\varphi$ , i.e. supérieures à 1 rad.

Les trois paramètres  $L_{screen}$ ,  $\delta s$  et  $\delta u$  sont liés par le critère de Nyquist dans l'espace des  $K$ , énoncé par Knepp [1983] :

$$\delta s < \frac{2L_{screen}\delta u}{\lambda}. \quad (2.52)$$

À partir des valeurs des critères numériques énoncés plus haut, l'inégalité (2.52) est toujours respectée.

Le schéma numérique décrit dans cette première partie traite d'une configuration de propagation en 3 dimensions, impliquant des écrans de phase 2D. Le temps de calcul dépend du nombre d'écrans mis en jeu et de leur dimension, il dépend donc de la dimension de l'irrégularité ionosphérique considérée et des angles d'arrivée du signal. Afin de diminuer ce temps de calcul, certains modèles travaillent dans un schéma écrans de phase 1D, c'est-à-dire que la propagation est décrite dans un espace à deux dimensions. Le chapitre suivant traite des expressions du spectre du milieu 2D et du spectre des écrans de phase 1D mis en jeu, ainsi que de leur implémentation dans le code STIPEE.

## 2.2. Schéma numérique STIPEE 2D-PWE/1D-MPS

### 2.2.1. Résolution numérique de l'équation de propagation 2D

En configuration 2D, le plan de propagation contient la direction de propagation (LOS) et un deuxième axe  $u$  perpendiculaire à  $s$ . Les écrans de phase 1D sont donc définis le long de l'axe  $u$  (cf. figure 2.1). Le raisonnement de calcul établi dans la première partie en 3D peut être appliqué en 2D et on arrive à l'équation de propagation (2.53) dans laquelle le vecteur position de l'irrégularité  $\vec{r}$  est défini cette fois dans le repère  $(u, s)$ . L'équation 3D (2.19) devient :

$$\frac{\partial^2 E(u, v, s)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 E(u, v, s)}{\partial s^2} + k_0^2 [1 + 2\Delta n(u, s)] E(u, s) = 0. \quad (2.53)$$

On redéfinit l'opérateur pseudo-différentiel  $Q$  par :

$$Q = \sqrt{1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2\Delta n(\vec{r})},$$

soit<sup>6</sup>

$$Q \approx \sqrt{1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \Delta n}. \quad (2.54)$$

En considérant une solution propagative (dans le sens des  $s$  croissants, cf. (2.22)), on arrive à l'équation de propagation PWE 2D :

$$\frac{\partial E}{\partial s} = ik_0 \left[ \sqrt{1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \Delta n} \right] E. \quad (2.55)$$

Comme pour la configuration 3D, on considère dans un premier temps l'hypothèse selon laquelle  $\Delta n$  ne dépend pas de  $s$  :  $\Delta n = \Delta n(u)$ . Les solutions de l'équation différentielle (2.55) sont de la forme :

$$E(u, s + \delta s) = e^{ik_0 \delta s \Delta n(u)} \left\{ e^{ik_0 \delta s \sqrt{1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial u^2}}} E(u, s) \right\}. \quad (2.56)$$

On pose

$$\epsilon(u, s + \delta s) = e^{ik_0 \delta s \sqrt{1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial u^2}}} E(u, s). \quad (2.57)$$

$\epsilon$  est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial s} - ik_0 \sqrt{1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial u^2}} \epsilon = 0. \quad (2.58)$$

On définit la transformée de Fourier 1D  $\Sigma(K_u, s)$  en  $u$  du terme  $\epsilon$  par :

$$\Sigma(K_u, s) = TF[\epsilon(u, s)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \epsilon(u, s) e^{-iu K_u}. \quad (2.59)$$

<sup>6</sup> On utilise le même développement qu'en 3D pour l'établissement de l'expression (2.21).

La transformée de Fourier inverse 1D est alors définie par :

$$\epsilon(u, s) = TF^{-1}[\Sigma(K_u, s)] = \int_{-\infty}^{+\infty} dK_u \Sigma(K_u, s) e^{iu K_u}. \quad (2.60)$$

La transformée de Fourier 1D de l'expression (2.58) donne :

$$\frac{\partial \Sigma(K_u, s)}{\partial s} - i \sqrt{k_0^2 - K_u^2} \Sigma(K_u, s) = 0. \quad (2.61)$$

Les solutions de l'équation différentielle (2.61) sont de la forme :

$$\Sigma(K_u, s + \delta s) = e^{i\delta s \sqrt{k_0^2 - K_u^2}} \Sigma(K_u, s). \quad (2.62)$$

En combinant les expressions précédentes, on arrive à :

$$E(u, s + \delta s) = e^{ik_0 \delta s \Delta n(u)} TF^{-1} \left\{ e^{i \sqrt{k_0^2 - K_u^2} \delta s} TF[E(u, s)] \right\}. \quad (2.63)$$

On réintroduit la dépendance en  $s$  des fluctuations d'indice de réfraction en définissant le terme de phase  $\phi$  1D par :

$$\phi(u) = \delta s \Delta n(u) = \int_s^{s+\delta s} \Delta n(u, \xi) d\xi. \quad (2.64)$$

L'expression finale du champ électrique  $E$  en configuration 2D est :

$$E(u, s + \delta s) = e^{ik_0 \phi(u)} TF^{-1} \left\{ e^{i \sqrt{k_0^2 - K_u^2} \delta s} TF[E(u, s)] \right\}. \quad (2.65)$$

On retrouve bien un schéma de type SSF avec l'onde électromagnétique définie dans le repère  $(u, s)$  et des écrans de phase transverses 1D selon l'axe  $u$ . La figure 2.6 représente le schéma numérique 2D/1D.

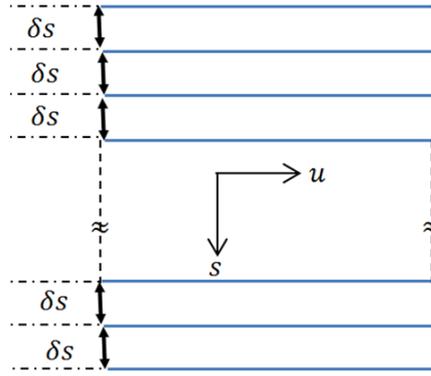


Figure 2.6 : Description générale des schémas numériques en géométrie 2D : propagation 2D dans  $(u, s)$  et écrans de phase 1D selon  $(u)$ .

On va maintenant définir les écrans de phase 1D qui correspondent à la configuration numérique 2D-PWE/1D-MPS.

### 2.2.2. Spectre des écrans de phase 1D

Dans une configuration 2D-PWE/1D-MPS, les écrans de phase  $\phi$  ne sont plus qu'à une dimension, selon l'axe  $u$ . Comme dans la résolution 3D, on les décrit par leur spectre  $S_{\phi}^{1D}(K_u)$  en passant par la fonction de covariance  $B_{\phi}^{1D}(u)$  :

$$B_{\phi}^{1D}(u) = \langle \phi(u')\phi(u + u') \rangle. \quad (2.66)$$

D'après l'équation (2.64) on peut écrire :

$$B_{\phi}^{1D}(u) = \int_s^{s+\delta s} d\xi_1 \int_s^{s+\delta s} d\xi_2 \langle \Delta n(u', \xi_1)\Delta n(u + u', \xi_2) \rangle, \quad (2.67)$$

soit

$$B_{\phi}^{1D}(u) = \left(\frac{r_e \lambda}{k_0}\right)^2 \int_0^{\delta s} d\xi_1 \int_0^{\delta s} d\xi_2 B_{\Delta N_e}^{2D}(u, \xi_2 - \xi_1). \quad (2.68)$$

On résout l'intégrale en  $\xi$  de la même façon qu'au paragraphe 2.1.2. en considérant le cas où la longueur de corrélation selon le LOS,  $L_s$ , est très inférieure à la distance entre deux écrans successifs,  $\delta s$ . On obtient finalement :

$$B_{\phi}^{1D}(u) = \left(\frac{r_e \lambda}{k_0}\right)^2 \delta s \int_{-\infty}^{+\infty} ds B_{\Delta N_e}^{2D}(u, s). \quad (2.69)$$

La transformée de Fourier 1D de la fonction de covariance  $B_{\phi}^{1D}(u)$  est définie par :

$$S_{\phi}^{1D}(K_u) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} du B_{\phi}^{1D}(u) e^{-iK_u u}. \quad (2.70)$$

En injectant l'expression (2.69) dans (2.70), on obtient :

$$S_{\phi}^{1D}(K_u, K_v) = (2\pi)^{-1} \left(\frac{r_e \lambda}{k_0}\right)^2 \delta s \iint_{-\infty}^{+\infty} du ds B_{\Delta N_e}^{2D}(u, s) e^{-iK_u u}. \quad (2.71)$$

Par identification avec l'expression 3D (1.23), la fonction de covariance 2D  $B_{\Delta N_e}^{2D}$  est liée au spectre des fluctuations de densité électronique 2D  $S_{\Delta N_e}^{2D}$  et l'expression du spectre des écrans de phase 1D (2.71) devient :

$$S_{\phi}^{1D}(K_u) = 2\pi \left(\frac{r_e \lambda}{k_0}\right)^2 \delta s S_{\Delta N_e}^{2D}(K_u, K_s = 0). \quad (2.72)$$

Le spectre des fluctuations électroniques 2D est défini à partir du spectre des fluctuations de densité électronique 3D par :

$$S_{\Delta N_e}^{2D}(K_u, K_s) = \int_{-\infty}^{+\infty} dK_v S_{\Delta N_e}^{3D}(K_u, K_v, K_s). \quad (2.73)$$

Cette hypothèse constitue la base de la réduction dimensionnelle : travailler en 2D plutôt qu'en 3D implique de négliger une des dimensions du milieu et cela entraîne des

différences entre les résultats 3D et 2D dépendantes du plan de coupe choisi (cf. partie 2.3).

À partir de l'expression du spectre des écrans de phase 2D (2.51) et des équations (2.72) et (2.73), le spectre des écrans de phase 1D s'écrit :

$$S_{\phi}^{1D}(K_u) = \int_{-\infty}^{+\infty} dK_v S_{\phi}^{2D}(K_u, K_v). \quad (2.74)$$

On retrouve le fait que la réduction des écrans de phase à 1D est l'intégrale des spectres 2D sur une des dimensions de l'écran 2D. D'après l'expression de  $S_{\phi}^{2D}$  (2.51) :

$$S_{\phi}^{1D}(K_u) = 2\pi \left(\frac{r_e \lambda}{k_0}\right)^2 \delta s a^{3-p} A_y A_z C_s \times \int_{-\infty}^{+\infty} dK_v \left( AK_u^2 + BK_v^2 + 2C K_u K_v + \frac{K_0^2}{a^2} \right)^{-p/2}. \quad (2.75)$$

Dans (2.75), l'intégrale  $I$  à résoudre est de la forme :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dK_v (BK_v^2 + QK_v + R)^{-p/2}, \quad (2.76)$$

avec  $Q = 2C K_u$  et  $R = AK_u^2 + \frac{K_0^2}{a^2}$ .

Le calcul intégral donne :

$$I = B^{-p/2} T^{1-p} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}, \quad (2.77)$$

avec  $T^2 = \frac{R}{B} - \frac{Q^2}{4B^2}$ .

On obtient finalement :

$$S_{\phi}^{1D}(K_u) = 2\pi \left(\frac{r_e \lambda}{k_0}\right)^2 \delta s \alpha^{3-p} A_y A_z C_s \sqrt{\frac{\pi}{B}} \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \left[ \left(A - \frac{C^2}{B}\right) K_u^2 + \frac{K_0^2}{a^2} \right]^{\frac{1-p}{2}} \quad (2.78)$$

Comme pour le schéma numérique 3D, l'expression spectrale (2.78) est implémentée dans le schéma numérique écrans de phase 2D/1D.

### 2.2.3. Implémentation numérique du schéma 2D/1D

Les écrans de phase 1D sont générés à partir d'un bruit blanc gaussien pondéré par le spectre (2.78). Les paramètres utilisés pour les calculs numériques et répondant aux critères de Knepp [1983] sont les suivants :

- **Taille des écrans  $L_{screen}$**  : elle doit être supérieure à la coupe de l'irrégularité selon l'axe  $u$ , notée  $L_c$ . Comme en configuration 3D,  $L_c$  varie de  $L_0$  à  $A_z L_0$ . La longueur des côtés est définie par  $L_{screen} = 5 L_c$ .
- **Distance entre deux écrans consécutifs  $\delta s$**  : la distance entre deux écrans successifs est définie par  $\delta s = 2 \max(L_s, L_{Fresnel})$ , avec  $L_s$  qui varie typiquement de  $L_0$  à  $A_z L_0$ .
- **Distance entre deux points successifs d'un écran  $\delta u$**  : d'après le critère de Nyquist,  $\delta u < \pi L_0 / (\sqrt{2} \sigma_\phi)$ . On fixe  $N_u = 512$  le nombre de points de l'écran 1D. Ainsi,  $N_u > 10\sqrt{2} \sigma_\phi / \pi$ , même pour les fortes valeurs de  $\sigma_\phi$ , qui peut atteindre quelques radians.

La figure 2.7 représente l'irrégularité ionosphérique dans le repère du LOS avec le plan de coupe  $(u, s)$ .

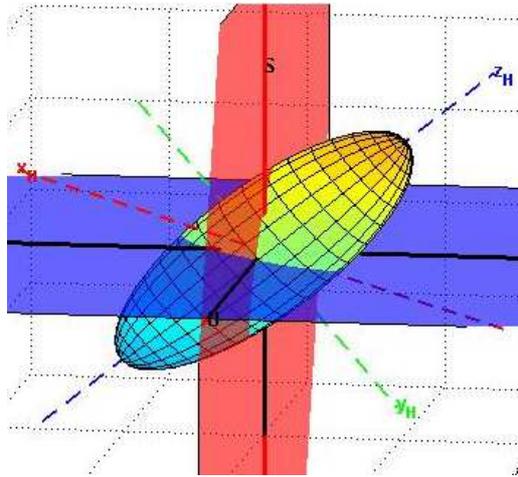


Figure 2.7 : Représentation de l'irrégularité ionosphérique 3D avec le plan de propagation 2D  $(u, s)$  en rouge et le plan transverse  $(u, v)$  en bleu.

Le choix du plan de coupe 2D joue un rôle important dans les résultats numériques 2D. En effet, selon la valeur des angles d'arrivée  $\gamma$  et  $\alpha$ , l'irrégularité ionosphérique peut être coupée selon la grande ou la petite dimension. On comprend que la définition de l'orientation des axes  $u$  et  $v$  est importante pour quantifier la réduction dimensionnelle. C'est l'objet de la partie suivante.

## 2.3. Comparaisons numériques

### 2.3.1. Comparaison de STIPEE avec les modèles transionosphériques existants

Le modèle STIPEE est basé sur la technique PWE-MPS, que l'on peut mener aussi bien en configuration 3D (3D-PWE/2D-MPS) qu'en 2D (2D-PWE/1D-MPS). Les paramètres d'entrée du modèle sont :

- Caractéristiques du milieu : ratios d'anisotropie  $A_y, A_z$ , échelle externe  $L_0$ , indice spectral  $p$ , variance de densité électronique  $\sigma_{\Delta N_e}^2$ , épaisseur  $\Delta H$  et altitude  $H$  de la couche ionosphérique
- Caractéristiques de la liaison : angles d'arrivée  $\gamma, \psi, \vartheta$  et  $\alpha$ , fréquence du signal traversant

Selon la valeur de ces paramètres d'entrée et conformément aux critères numériques, les écrans de phase sont générés. Comme illustré sur les figures 2.2 et 2.6, le signal est propagé via une succession d'écrans de phase, sur une distance correspondant à l'épaisseur de la couche ionosphérique effectivement traversée. Les écrans étant générés aléatoirement, plusieurs réalisations sont nécessaires pour obtenir un résultat moyen réaliste (méthode de Monte-Carlo). Ce modèle permet de traiter les situations de scintillation quelle que soit la latitude de la station réceptrice et quelle que soit l'intensité de la turbulence ionosphérique. Il donne en sortie les variances de log-amplitude et de phase ainsi que les spectres fréquentiels correspondants.

De nombreux modèles de propagation transionosphérique, analytiques ou numériques, existent dans la littérature. On peut citer deux études générales qui donnent une liste des principaux modèles utilisés par les scientifiques du space weather et de la communauté GNSS :

- Guide to reference and standard ionosphere models [American National Standards, 2011] : ce rapport décrit plus de 40 modèles d'ionosphère, les sorties qu'ils proposent (concentration et température électronique, indices de scintillation), la zone géographique et la gamme d'altitudes couvertes (équateur, pôles), les domaines d'application (météorologie, propagation...), mais également les incertitudes et limitations. Cet état des lieux ne fait cependant référence qu'aux seuls modèles américains.
- State-of-the-art review, projet Cigala [Aquino et al., 2010] : cette étude est dédiée plus particulièrement à la comparaison des modèles de propagation transionosphérique. Elle se concentre sur la prédiction des effets des scintillations ionosphériques sur les signaux GNSS, plus précisément dans les régions d'Amérique Latine. Deux grands types de modèles y sont décrits : les modèles de scintillation (analytiques, numériques, empiriques ou semi-empiriques...) et les modèles de tracking, traitant plus précisément de l'effet des

scintillations sur l'efficacité des boucles à verrouillage de phase (Phase Lock-Loop PLL).

On s'intéresse ici aux modèles basés sur la technique des écrans de phase. GISM et WBMOD, modèles globaux principalement utilisés dans la communauté GNSS, ainsi que SIGMA, modèle dédié particulièrement aux latitudes polaires, sont décrits ici.

**GISM**, cité en introduction de ce chapitre, est basé sur une implémentation numérique de type 2D-PWE/1D-MPS [Béniguel, 1999]. Il fournit les indices de scintillation d'amplitude et de phase pour une liaison donnée, ainsi que les spectres de la log-amplitude et de la phase correspondant. Le contenu électronique est renseigné par l'utilisation de NeQuick (cf. partie 1.2.1). La variance de densité électronique est déterminée à partir du TEC en considérant une variation de 10% autour de la moyenne fournie par NeQuick. Ce modèle a été accepté par ITU [ITU-R, 2012]. Les valeurs d'entrée telles que l'indice spectral  $p$  et l'échelle externe  $L_0$  sont renseignés en dur, à partir de statistiques tirées de mesures expérimentales (cf. figure 1.17 (a)). Le domaine d'utilisation de ce modèle reste limité aux latitudes équatoriales et moyennes [Béniguel et al., 2009].

**WBMOD**, développé par la NorthWest Research Associates (NWRA), utilise la technique PWE mais cette fois à travers un écran de phase unique. La description du modèle et ses implémentations pour l'adaptation aux particularités des différentes régions de l'ionosphère (latitudes moyennes et hautes) sont disponibles dans plusieurs rapports [Secan & Fremouw, 1983], [Robins & al., 1986], [Secan & Bussey, 1994]. WBMOD fournit, pour une liaison donnée, les indices de scintillation d'amplitude et de phase correspondant à un certain pourcentage de temps ou le pourcentage de temps pendant lequel un certain niveau de scintillation est dépassé. Il donne également le paramètre  $C_k L$ , force de la turbulence intégrée sur la distance  $L$  parcourue par le signal à travers la couche ionosphérique [Secan & Fremouw, 1983]. Ce modèle semi-empirique propose également des valeurs des paramètres du milieu (anisotropie, vitesse de drift, indice spectral) régressées à partir des mesures de scintillation de plusieurs missions spatiales

[Fremouw & Secan, 1984]. Les expressions des variances de log-amplitude et de phase sont issues des travaux de Rino [1977], [1979 (1)].

**SIGMA** [Deshpande et al., 2014] est basé sur le constat qu'un écran de phase unique, tel que proposé par WBMOD, n'est pas adapté à la description des configurations hautes latitudes, du fait que le champ magnétique  $y$  est vertical. Ce modèle utilise un schéma numérique 3D-PWE/2D-MPS. Les irrégularités ionosphériques sont décrites par un spectre des fluctuations électroniques hybride qui ne présente qu'un seul axe d'anisotropie, selon la direction du LOS. Les paramètres d'entrée sont caractéristiques du milieu (anisotropie, échelle externe, indice spectral) et de la liaison (fréquence du signal, angles d'arrivée).

Les principales caractéristiques des trois modèles, ainsi que du modèle STIPEE construit pendant cette thèse, sont résumés dans le tableau 2.2.

	WBMOD	GISM	SIGMA	STIPEE
<b>Configuration 3D/2D</b>	✓	✗	✓	✓
<b>Configuration 2D/1D</b>	✗	✓	✗	✓
<b>Nombre d'axes d'anisotropie</b>	3 axes	1 axe	2 axes	3 axes
<b>Adapté basses latitudes</b>	✓	✓	✗	✓
<b>Adapté hautes latitudes</b>	✓	✗	✓	✓
<b>Situations de fortes perturbations</b>	✗	✓	✓	✓

Tableau 2.2 : Comparatif entre 3 modèles PWE/MPS existants et le modèle STIPEE.

L'objet du travail de thèse étant de s'intéresser aux phénomènes hautes latitudes, les modèles STIPEE et SIGMA se démarquent des autres modèles actuels, plutôt dédiés aux latitudes équatoriales, comme illustré sur le tableau 2.2. Par rapport à SIGMA, STIPEE propose une représentation plus complète de l'irrégularité ionosphérique avec deux

axes d'anisotropie, le premier selon la direction du champ magnétique et le second dans une direction transverse. Le dernier intérêt de ce travail avec STIPEE est que, contrairement aux autres modèles, il va permettre une comparaison entre les approches 3D et 2D. C'est l'objet de la section suivante dans laquelle deux situations particulières sont présentées : tout d'abord un exemple typique des liaisons équatoriales largement décrite dans la littérature, ensuite une situation caractéristique des liaisons hautes latitudes.

### **2.3.2. Comparaison des variances de log-amplitude et de phase aux latitudes équatoriales**

#### ***Rapport des variances de log-amplitude***

Dans la littérature, plusieurs modèles numériques utilisent une configuration 2D pour des raisons principales de rapidité de calcul<sup>7</sup>. Cependant, l'utilisation d'un modèle 2D pour simuler la propagation dans un milieu 3D n'est souvent justifiée qu'empiriquement. Dans [Rino, 1979 (1)], on peut lire :

*“In a highly anisotropic medium ( $a \gg 1$  and  $b = 1$ ) with propagation angles well removed from the direction of the principal axis, [...]. It can be shown (...) that this limit gives the correct form of  $S_4$  when a strictly two-dimensional irregularity model is used.”*

Dans les écritures de Rino,  $a$  correspond à  $A_z$  et  $b$  à  $A_y$ . Ainsi, en choisissant correctement la direction de l'écran de phase 1D, Rino indique que les résultats obtenus par des calculs numériques en 3D et en 2D sont équivalents pour un milieu très anisotrope. Rogers [2009] travaille aux latitudes équatoriales avec un modèle de propagation 2D en posant les hypothèses suivantes pour la direction de l'écran de phase 1D :

---

<sup>7</sup> Il existe un facteur 1000 entre des simulations 2D et 3D menées avec STIPEE.

*“The phase screen is aligned in the direction of minimum ionospheric spatial coherence (i.e., aligned east-west across the geomagnetic field lines, assuming the irregularities are field-aligned).”*

Avec STIPEE, nous allons rejouer ces situations et comparer les sorties numériques dans les deux géométries 3D et 2D en choisissant une localisation équatoriale et en faisant varier le ratio d’anisotropie le long de l’axe principal, c’est-à-dire dans la direction du champ magnétique terrestre, ici horizontal (cf. figure 1.2). La liaison Terre-Satellite est telle que l’émetteur satellite est situé à la verticale du récepteur terrestre. On a donc  $\gamma = 90^\circ$  et  $\vartheta = 0$  (cf. figures 1.7 et 2.4). Pour que l’écran de phase 1D soit perpendiculaire à la plus grande dimension de l’irrégularité (condition établie par Rogers [2009] et Rino [1979 (1)]), on choisit sa direction selon l’axe  $u$ , c’est-à-dire telle que  $\alpha = 0$ . La figure 2.8 schématise la situation expérimentale où le plan rouge représente le plan de coupe 2D de l’irrégularité.

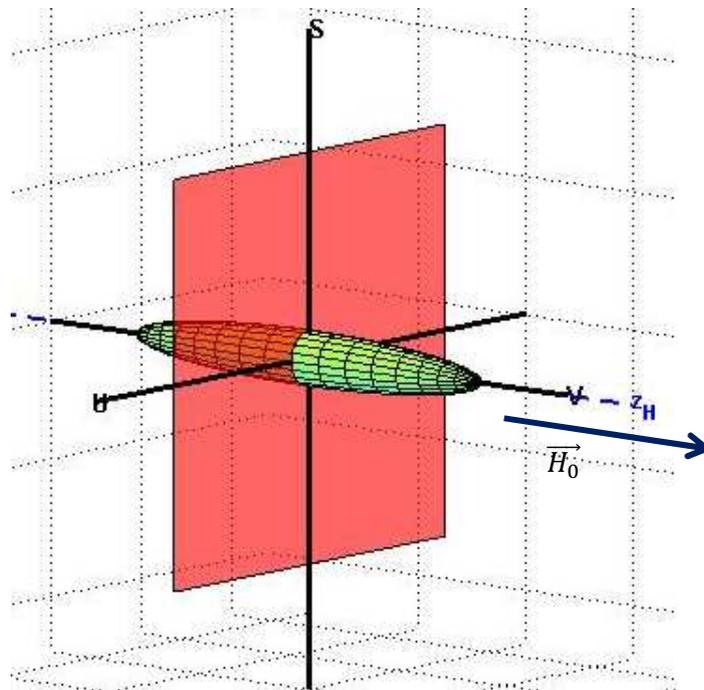


Figure 2.8 : Configuration basses latitudes, plan de coupe 2D tel que  $\alpha = 0$ .

Le tableau 2.3 reprend les valeurs des paramètres entrés pour la simulation numérique.

Géométrie de l'irrégularité			Couche ionosphérique				Angles de propagation (°)			
$A_z$	$A_y$	$L_0$ (km)	$\sigma_{\Delta N_e}^2$ (el <sup>2</sup> /m <sup>6</sup> )	$p$	$H$ (km)	$\Delta H$ (km)	$\alpha$	$\psi$	$\gamma$	$\vartheta$
1 à 15	1	2	$10^{20}$	4	350	50	0	0	90	0

Tableau 2.3 : Valeurs des paramètres d'entrée en configuration équatoriale.

La figure 2.9 donne les résultats des indices de scintillation d'amplitude  $S_4$  pour les simulations numériques menées avec ces paramètres dans les deux géométries 3D et 2D<sup>8</sup>.

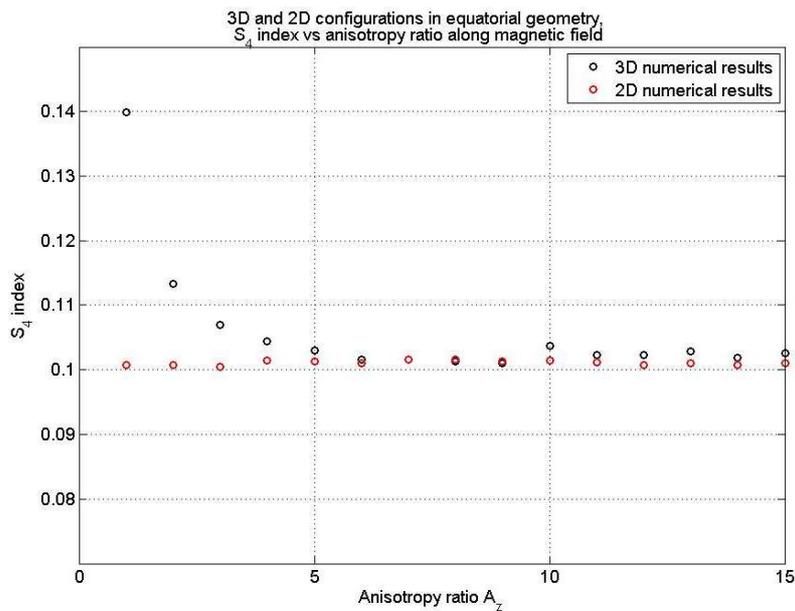


Figure 2.9 : Résultats des simulations numériques pour une configuration équatoriale, plan de coupe dans la petite dimension de l'irrégularité.

D'après la figure 2.9, on voit clairement que, pour une forte anisotropie et moyennant le choix d'un plan de coupe 2D dans la petite dimension de l'irrégularité, les deux configurations donnent le même résultat. Cependant, dans une configuration isotrope

<sup>8</sup> D'après (1.18), la variance de log-amplitude  $\langle \chi^2 \rangle$  est simplement reliée à l'indice de scintillation  $S_4$  par  $S_4^2 = 4\langle \chi^2 \rangle$ .

(i.e. pour  $A_z = 1$ ), le modèle numérique 2D sous-estime la valeur de  $S_4$ . Cette différence est également constatée par Béniguel [1999], dans une étude du modèle GISM et de l'influence de l'anisotropie sur les résultats, et par Briggs & Parkin [1963]<sup>9</sup>.

On reprend maintenant la configuration basses latitudes en considérant une anisotropie forte ( $A_z = 10$ ) et dans laquelle on fait varier l'angle  $\alpha$ , c'est-à-dire que l'on fait tourner le plan de coupe ( $u, s$ ) autour de l'axe  $s$  (cf. figure 2.8). Les autres paramètres d'entrée sont issus du tableau 2.3. Le rapport des variances de log-amplitude 3D/2D est représenté figure 2.10.

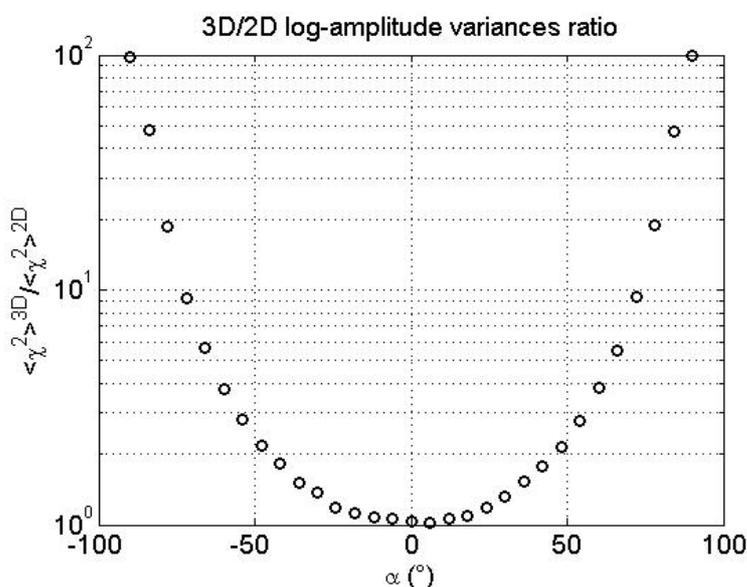


Figure 2.10 : Rapport des variances de log-amplitude 3D et 2D en fonction de l'angle de coupe  $\alpha$  pour une configuration basses latitudes.

On constate, sur la figure 2.10, que le rapport des variances de log-amplitude 3D/2D dépend fortement de la valeur de l'angle  $\alpha$ . On retrouve bien un rapport de 1 pour  $\alpha = 0$ , mais, pour  $\alpha = 90^\circ$ , on observe un rapport de 100, ce qui correspond à un facteur 10 pour l'indice de scintillation  $S_4$ . Les valeurs de variance de log-amplitude obtenues avec le modèle 2D sont donc très sous-estimées par rapport aux résultats 3D. Ces résultats mettent en évidence l'impact du choix du plan de coupe sur la valeur de  $S_4$  estimée dans une géométrie 2D. Il apparaît ici qu'une coupe de l'irrégularité dans sa plus petite

<sup>9</sup> Cette limite de la modélisation 2D en configuration isotrope a été quantifiée dans la troposphère par Fabbro & Féral [2012].

dimension et une forte anisotropie du milieu sont deux conditions à l'utilisation d'un modèle 2D pour reproduire un événement de scintillation réel 3D. On rejoint donc les justifications de Rino [1979 (1)] et Rogers [2009].

### ***Rapport des variances de phase***

Si les articles cités dans le paragraphe précédent 2.2.1 décrivent l'utilisation d'un modèle 2D comme une bonne approximation aux résultats de l'indice  $S_4$ , ils ne traitent pas de l'impact de la réduction dimensionnelle sur l'indice de phase  $\sigma_\phi$ . On trouve dans [Rino, 1979 (1)] que le comportement de  $\sigma_\phi$  ne peut pas être relié de manière simple au comportement de l'indice d'amplitude  $S_4$ .

La figure 2.11 représente le rapport des variances de phase 3D/2D, pour la géométrie basses latitudes décrite dans le tableau 2.3, en fonction de l'angle  $\alpha$ .

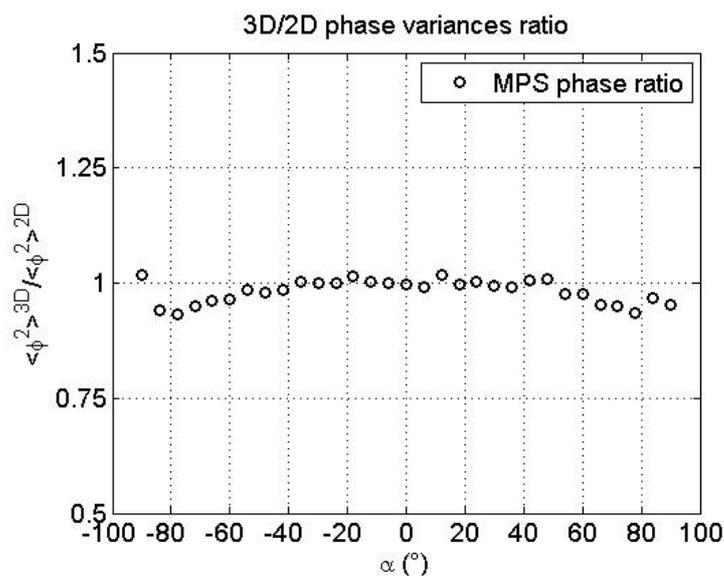


Figure 2.11 : Rapport des variances de phase 3D et 2D en fonction de l'angle de coupe  $\alpha$  pour une configuration basses latitudes.

Sur la figure 2.11, on observe que le rapport des variances de phase ne dépend pas de l'angle de coupe et reste constant, égal à 1. La réduction dimensionnelle ne semble donc pas influencer sur la variance de phase du signal.

Cette première étude était basée sur une comparaison des sorties du code STIPEE 3D et 2D avec les résultats principaux de la littérature. Ceux-ci ne décrivent que des phénomènes localisés dans les régions équatoriales. Or ce travail de thèse est axé sur les événements aux hautes latitudes. Nous allons donc maintenant traiter une situation plus typique des zones polaires et étudier l'impact de la réduction dimensionnelle sur les résultats numériques.

### 2.3.3. Comparaisons des variances de log-amplitude et de phase aux hautes latitudes

#### *Rapport des variances de log-amplitude*

Aux latitudes polaires, on considère cette fois le champ magnétique comme vertical (cf. figure 1.2). Pour mener les calculs à ces latitudes, on va définir les paramètres d'entrée : angles de propagation et géométrie de l'irrégularité.

D'un point de vue expérimental, les satellites GPS ont une inclinaison de  $55^\circ$  par rapport au plan de l'équateur et les stations de mesure hautes latitudes sont localisées typiquement entre  $65$  et  $75^\circ$  de latitude Nord. La figure 2.12 illustre cette situation.

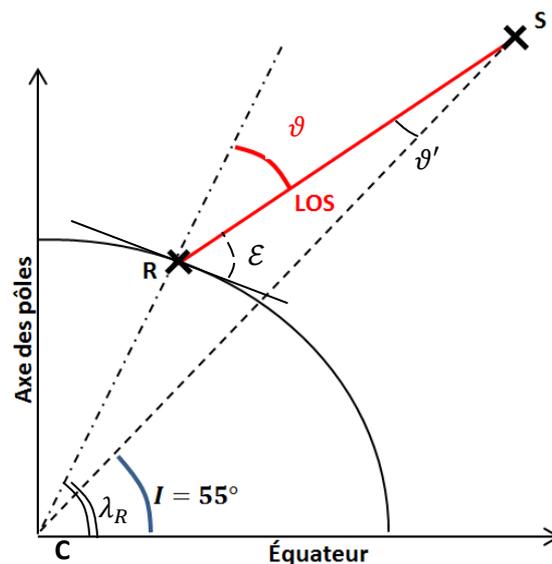


Figure 2.12 : Représentation d'une liaison Terre-satellite aux hautes latitudes.

$I$  est l'inclinaison du satellite,  $\lambda_R$  la latitude de la station réceptrice R. On définit par  $h_{sat}$  l'altitude du satellite GPS et  $R_T$  le rayon de la Terre. L'élévation maximale  $\mathcal{E}$  des satellites GPS est fonction de la latitude de la station et n'atteint donc jamais  $90^\circ$ . Dans le triangle RSC, on peut établir l'expression de l'angle  $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \mathcal{E}$  en fonction de la latitude de la station :

$$\frac{\sin(\pi - \vartheta)}{CS} = \frac{\sin(\lambda_R - I)}{RS},$$

$$\vartheta = \sin^{-1} \frac{(R_T + h_{sat}) \sin(\lambda_R - I)}{RS},$$

$$\vartheta = \sin^{-1} \frac{(R_T + h_{sat}) \sin(\lambda_R - I)}{\sqrt{(R_T + h_{sat})^2 + R_T^2 - 2R_T(R_T + h_{sat}) \cos(\lambda_R - I)}}. \quad (2.79)$$

L'angle  $\vartheta$  minimal entre la verticale au récepteur et le satellite varie entre  $13^\circ$  et  $26^\circ$  selon la latitude de la station (de  $65^\circ$  à  $75^\circ$ ). On cherche maintenant à déterminer la valeur de l'angle  $\gamma$  entre le champ magnétique au point de pénétration dans l'ionosphère et la direction du LOS en ce même point. En considérant que le champ magnétique est vertical aux hautes latitudes et d'après la figure 1.7, on a  $\vartheta' = \gamma$ , et d'après les calculs de l'annexe 2 :

$$\gamma = \sin^{-1} \frac{R_t \sin \vartheta}{R_t + H}, \quad (2.80)$$

où  $H$  est l'altitude de la couche ionosphérique que l'on prend égale à 350 km. D'après les valeurs possibles de l'angle  $\vartheta$  et l'expression (2.80), on obtient  $\gamma_{min} \in [12^\circ - 25^\circ]$ . On considère dans la suite des calculs une valeur de  $\gamma = 15^\circ$ .

La forme des irrégularités aux hautes latitudes est décrite dans [Livingston et al., 1982] (cf. figure 1.14) et on va ici considérer la géométrie la plus fréquente aux hautes latitudes, à savoir les ellipsoïdes allongés dans la direction du champ magnétique (cf. figure 1.15 (a)), avec les ratios d'anisotropie  $1:1:A_z = 1:1:3$  à  $1:1:10$  [Livingston et al., 1982], [Wernik et al., 2007]. La figure 2.13 donne une illustration de l'irrégularité, dont les paramètres géométriques sont détaillés dans le tableau 2.4.

Géométrie de l'irrégularité			Couche ionosphérique				Angles de propagation (°)			
$A_z$	$A_y$	$L_0$ (km)	$\sigma_{\Delta N_e}^2$ (e <sup>-2</sup> /m <sup>6</sup> )	$p$	$H$ (km)	$\Delta H$ (km)	$\alpha$	$\psi$	$\gamma$	$\vartheta$
3 à 10	1	5	10 <sup>21</sup>	4	350	50	0 à 90	0	15	16

Tableau 2.4 : Valeurs des paramètres d'entrée en configuration hautes latitudes.

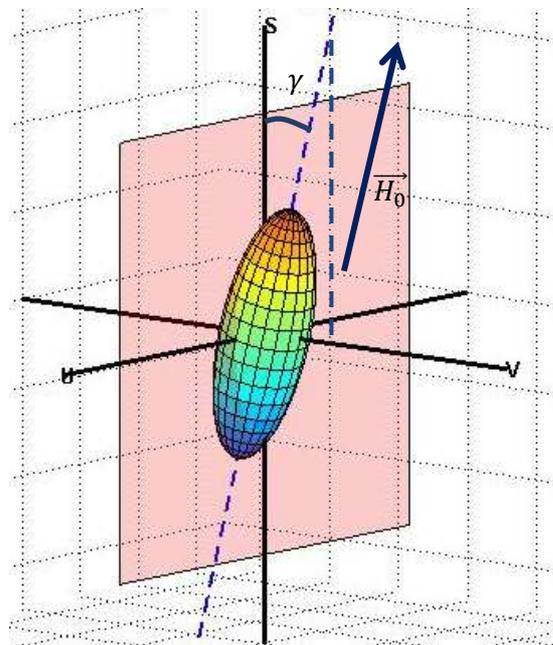


Figure 2.13 : Configuration hautes latitudes, plan de coupe 2D tel que  $\alpha = 0$ .

Le rapport des variances de log-amplitude 3D et 2D est représenté sur la figure 2.14, en fonction de l'angle de coupe et de l'anisotropie.

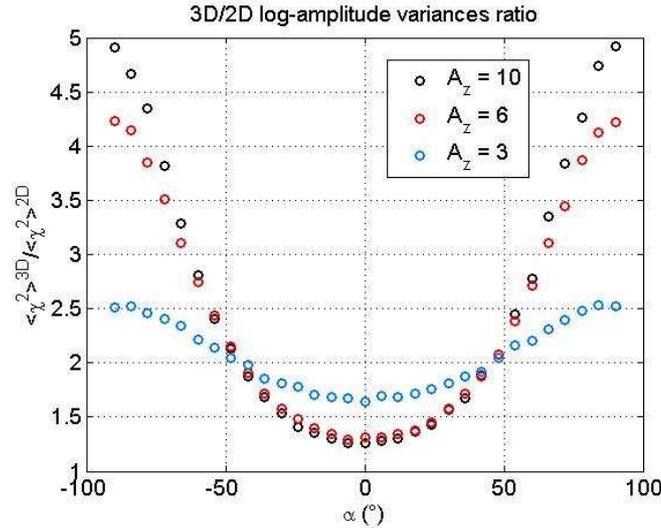


Figure 2.14 : Rapport des variances de log-amplitude 3D et 2D en fonction de l'angle de coupe  $\alpha$  et de l'anisotropie  $A_z$ , pour une configuration hautes latitudes

On voit maintenant, sur la figure 2.14, que le rapport est toujours différent de 1, y compris lorsque le plan 2D coupe l'irrégularité dans sa plus petite dimension, i.e. pour  $\alpha = 0$ . Les variances de log-amplitude 3D et 2D ne convergent donc pas, même pour les plus fortes valeurs d'anisotropie. L'utilisation d'un modèle 2D atteint alors sa limite dans la modélisation d'une situation hautes latitudes.

### ***Rapport des variances de phase***

On reprend la configuration décrite dans le tableau 2.4 et on s'intéresse cette fois au rapport des variances de phase 3D/2D. La figure 2.15 donne une représentation du rapport des variances de phase 3D/2D en fonction de l'anisotropie et de l'angle de coupe  $\alpha$ .

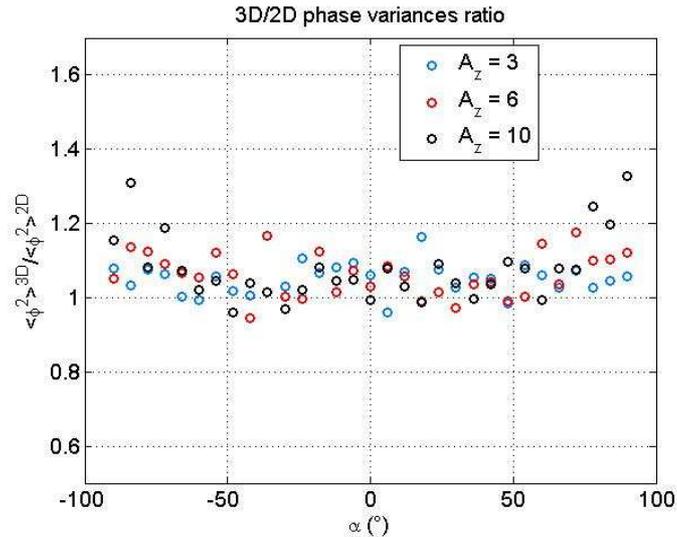


Figure 2.15 : Rapport des variances de phase 3D et 2D en fonction de l'angle de coupe  $\alpha$  et de l'anisotropie  $A_z$  pour une configuration hautes latitudes.

Comme pour la situation basses latitudes (cf. figure 2.11), l'orientation du plan de coupe 2D sur le rapport des variances de phase ne semble pas impacter la variance de phase. La variabilité des mesures est due à l'approche Monte-Carlo utilisée dans le schéma numérique 2D.

Le code numérique STIPEE nous permet d'obtenir les séries temporelles de l'amplitude et de la phase du signal traversant. En plus de l'étude de l'impact des deux configurations sur les indices de scintillation ionosphérique, nous allons également pouvoir comparer les résultats des approches 2D et 3D sur les spectres fréquentiels de log-amplitude et de phase.

#### 2.3.4. Comparaisons des spectres fréquentiels aux hautes latitudes

Le code STIPEE donne l'amplitude et la phase du signal sur une grille spatiale 2D (pour une configuration 3D) ou 1D (pour une configuration 2D). On peut obtenir les mêmes résultats sur une grille temporelle en divisant la grille spatiale par la vitesse de drift du milieu, c'est-à-dire la vitesse de déplacement des irrégularités par rapport au repère lié

au LOS, notée  $V_{drift}$ . L'hypothèse d'ergodicité sous-jacente, ou hypothèse de Taylor, est que le milieu ne change pas de caractéristique moyenne sur toute la taille de l'écran de phase  $L_{screen}$ , donc également pendant la durée  $\tau$  telle que :

$$\tau = \frac{L_{screen}}{V_{drift}}. \quad (2.81)$$

Pour déterminer cette vitesse de déplacement relative  $V_{drift}$ , il faut à la fois tenir compte de la vitesse de déplacement du milieu mais également de la vitesse du satellite par rapport à la Terre. Grâce à des mesures radar, on peut estimer la vitesse de drift du milieu ionosphérique par rapport à la Terre (cf. figure 1.3). Les valeurs typiques aux hautes latitudes peuvent atteindre 1000 m/s. La vitesse du point d'entrée du signal GPS dans la couche ionosphérique, noté  $I_2$  (cf. figure 1.7), par rapport au référentiel terrestre, est fonction des coordonnées du satellite et est de l'ordre de 80 m/s pour les satellites GPS [Forte & Radicella, 2002]. En première approximation, on va négliger la vitesse de  $I_2$  devant celle du milieu. L'ordre de grandeur de la taille des écrans de phase est d'une dizaine de km (cf. partie 2.1.2). La durée  $\tau$  pendant laquelle on suppose l'invariance du milieu est de l'ordre de la dizaine de secondes. Cette hypothèse est vraisemblable par rapport aux durées caractéristiques des événements de scintillation, typiquement de l'ordre de la dizaine de secondes à la minute.

La figure 2.16 représente les spectres de log-amplitude et de phase obtenus avec une simulation type hautes latitudes dont les paramètres sont détaillés dans le tableau 2.5.

Géométrie de l'irrégularité			Couche ionosphérique				Angles de propagation (°)				Vitesses de drift (m/s)	
$A_z$	$A_y$	$L_0$ (km)	$\sigma_{\Delta N_e}^2$ (el <sup>2</sup> /m <sup>6</sup> )	$p$	$H$ (km)	$\Delta H$ (km)	$\alpha$	$\psi$	$\gamma$	$\vartheta$	$V_u$	$V_v$
3	1	5	10 <sup>20</sup>	4	350	50	0	0	15	16	1000	1000

Tableau 2.5 : Valeurs des paramètres d'entrée en configuration hautes latitudes et vitesses de drift dans le plan transverse.

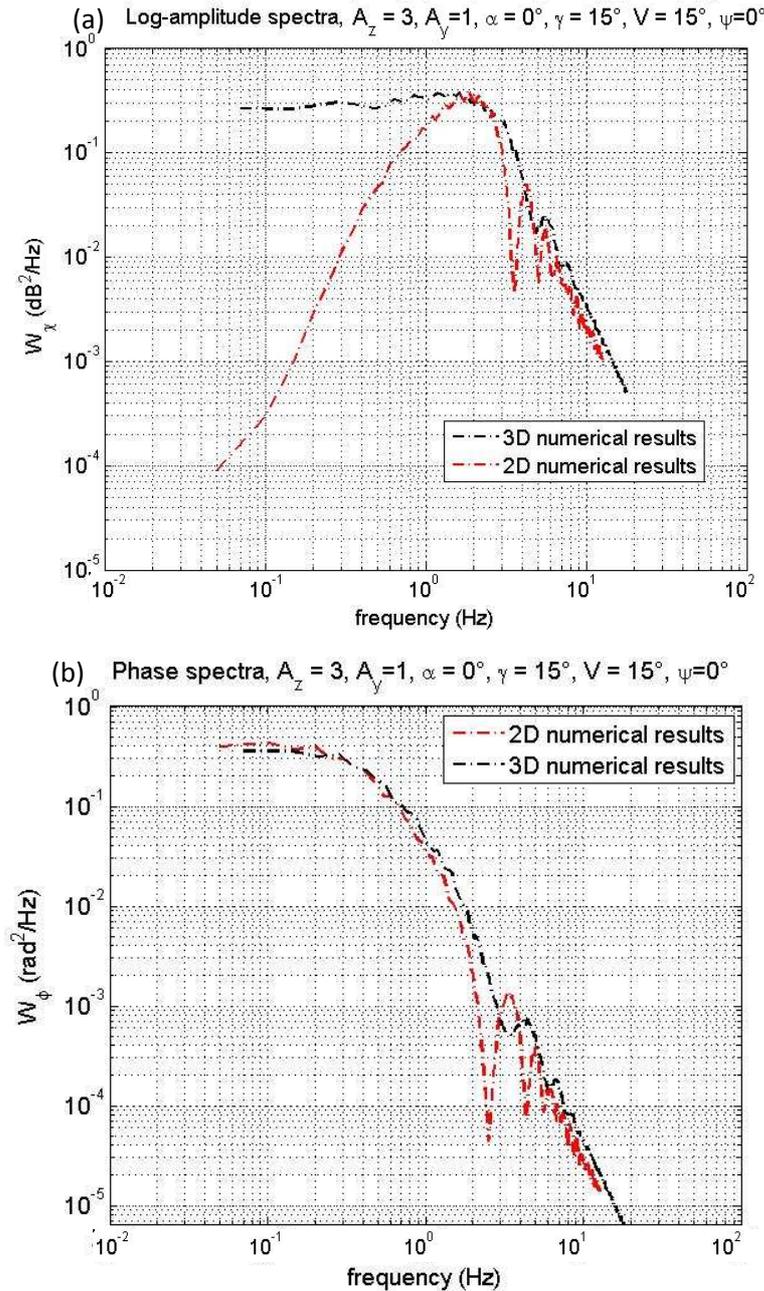


Figure 2.16 : Spectres fréquentiels de (a) log-amplitude et (b) phase dans une configuration hautes latitudes

Concernant les spectres fréquentiels de phase 3D et 2D (figure 2.16 (b)), l'allure et les ordres de grandeur sont sensiblement les mêmes. On remarque tout de même une différence dans la figure d'interférence au-delà de 1 Hz. La variance de phase  $\langle \varphi^2 \rangle$  est proportionnelle à l'intégrale du spectre fréquentiel de phase sur l'ensemble des fréquences. Les spectres 2D et 3D étant pratiquement superposables, on retrouve donc

bien les résultats illustrés figure 2.15, à savoir que les indices de phase 3D et 2D sont similaires dans cette géométrie hautes latitudes.

En revanche, les spectres de log-amplitude 3D et 2D (figure 2.16 (a)) montrent un comportement très différent aux basses fréquences. Comme la variance de phase, la variance de log-amplitude  $\langle \chi^2 \rangle$  correspondant à l'intégrale du spectre de log-amplitude du signal. Ainsi, la sous-estimation de la variance de log-amplitude 2D par rapport aux résultats 3D, illustrée figure 2.14 pour  $\alpha = 0$ , s'explique par la mauvaise modélisation du comportement asymptotique aux fréquences les plus basses.

## 2.4. Conclusion

En conclusion de ce chapitre sur les schémas numériques, on rappelle que la technique des écrans de phase PWE/MPS est largement utilisée pour modéliser la propagation transionosphérique. Les avantages de la simulation numérique sont :

- le traitement des situations de fortes perturbations,
- la possibilité de prise en compte de caractéristiques ionosphériques variables le long du LOS (ratios d'anisotropie  $A_y$  et  $A_z$ , échelle externe  $L_0$ , variance des fluctuations de densité électronique  $\sigma_{\Delta N_e}^2 \dots$ ),
- la génération de champs amplitude-phase corrélés.

Afin de gagner en temps de calcul, plusieurs modèles utilisent une configuration 2D-PWE/1D-MPS. Pour des liaisons Terre-Satellite à l'équateur, sous l'hypothèse d'une forte anisotropie le long du champ magnétique terrestre et avec un plan de coupe 2D selon la plus petite dimension de l'irrégularité ionosphérique, les calculs numériques 3D et 2D donnent en effet des résultats comparables, en terme d'indices de scintillation d'amplitude et de phase, comme le montrent les résultats des figures 2.11 et 2.12. Cependant, aux hautes latitudes, les ratios d'anisotropie de même que les angles d'arrivée sur les irrégularités ionosphériques sont très différentes des situations équatoriales. Les résultats présentés pour les rapports 3D/2D des variances de log-amplitude (figure 2.14) et les spectres de log-amplitude (figure 2.16 (a)) montrent qu'un modèle 2D ne peut pas reproduire correctement un événement de scintillation 3D.

S'il donne un premier aperçu des limitations d'un modèle 2D, ce travail de comparaison des résultats numériques ne permet cependant pas de les expliquer et surtout quantifier les erreurs commises entre les configurations 3D et 2D. Seules les dérivations analytiques des expressions des indices de scintillation, en amplitude et en phase, et des spectres fréquentiels correspondant peuvent permettre de comprendre d'où viennent les différences entre les résultats numériques 3D et 2D. L'objectif du chapitre 3 est donc de quantifier l'erreur entre les schémas 3D et 2D en dérivant analytiquement les indices de scintillation et les spectres fréquentiels, dans l'hypothèse de faibles perturbations, c'est-à-dire pour des variances de phase et d'amplitude inférieures à 1 [Wheelon, 2004 (2)].

## Chapitre 3 : Résolution analytique des équations de propagation

### 3D et 2D

---

La première étape de validation du modèle numérique de propagation transionosphérique conçu au chapitre 2 est l'étape analytique. Elle consiste à comparer les sorties numériques des codes de propagation 3D-PWE/2D-MPS et 2D-PWE/1D-MPS avec les résultats obtenus par la résolution théorique des équations de propagation des ondes électromagnétiques à partir du modèle d'ionosphère choisi. Ce chapitre 3 est donc entièrement dédié à la formulation analytique des variances de log-amplitude et de phase, ainsi qu'à l'établissement des expressions des spectres de log-amplitude et de phase. Si ces expressions ont déjà été établies en 3D [Yeh & Liu, 1982], [Rino, 1979 (1)] dans le repère géomagnétique, les dérivations n'ont jamais été conduites dans le repère  $(u, v, s)$  lié au Line-Of-Sight. D'une part, les dérivations dans  $(u, v, s)$  facilitent grandement l'interprétation qualitative des résultats de variance de log-amplitude et de phase en fonction de la morphologie des irrégularités ionosphériques. D'autre part, la modélisation des effets de scintillation n'a jamais été effectuée en 2D. Or, comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, il existe des modèles de propagation transionosphériques, utilisés par la communauté scientifique, qui sont basés sur un schéma numérique

bidimensionnel 2D-PWE/1D-MPS. La réduction dimensionnelle 3D/2D, si elle est correctement justifiée et menée, permet en effet de diminuer très significativement les temps de calcul par rapport à des configurations 3D tout en garantissant des résultats équivalents à un schéma 3D. Au chapitre 2, ces résultats ont été vérifiés qualitativement aux latitudes équatoriales, alors qu'aux hautes latitudes les résultats numériques 3D et 2D semblent différents. Toutefois, à ce stade, l'analyse n'est ni quantitative ni générale car elle n'est dérivée que de la simulation numérique de quelques configurations particulières de liaisons GNSS transionosphériques. Aussi, comme la résolution théorique des équations 2D n'a pas encore été menée dans la littérature, la justification théorique de la réduction dimensionnelle et surtout ses limitations n'ont pas encore été démontrées. L'objet de ce chapitre est donc de proposer la résolution des équations de propagation dans l'hypothèse de Rytov de faibles perturbations [Rytov et al., 1989], aussi bien en 3D qu'en 2D dans le repère du LOS et de quantifier analytiquement l'erreur entre les approches numériques 3D et 2D sur les indices de scintillation et les densités spectrales de puissance correspondantes.

Les hypothèses de travail et les schémas des différents systèmes de coordonnées sont rappelés dans la première partie. La deuxième partie est dédiée aux dérivations 3D et 2D de la variance de log-amplitude et à leur comparaison. Les formulations relatives aux variances de phase 3D et 2D sont traitées dans la troisième partie. Enfin, l'étude des spectres fréquentiels de log-amplitude et de phase, dérivés dans les deux géométries de propagation 3D et 2D, est menée dans la quatrième partie.

### 3.1. Hypothèses de travail 3D et 2D

#### 3.1.1. Géométrie et repères de travail

D'un point de vue milieu, les irrégularités présentent trois axes d'anisotropie : l'axe principal selon la direction des lignes de champ magnétique terrestre, les deux autres dans le plan transverse (cf. figure 1.13). La couche ionosphérique perturbée se limite à la couche F2 considérée comme homogène sur toute son épaisseur. Le récepteur est repéré par le vecteur  $\vec{R}$  dans le repère  $(u, v, s)$  lié au LOS. L'émetteur est le satellite GPS (cf. figure 3.1). Sa distance au récepteur est considérée suffisamment grande devant l'altitude et l'épaisseur de la couche ionosphérique pour travailler dans l'hypothèse d'un front d'onde incident plan.

Conformément au chapitre 1, l'altitude du point le plus bas de la couche ionosphérique est notée  $H$  et son épaisseur  $\Delta H$ . Le long du LOS, le trajet du signal dans l'ionosphère est noté  $R_{iono}$ . La distance parcourue par le signal entre le bas de la couche ionosphérique et le récepteur est notée  $L_V$  (Longueur dans le Vide)<sup>1</sup>. La figure 3.1 reprend les distances mises en jeu dans la liaison Satellite-Terre.

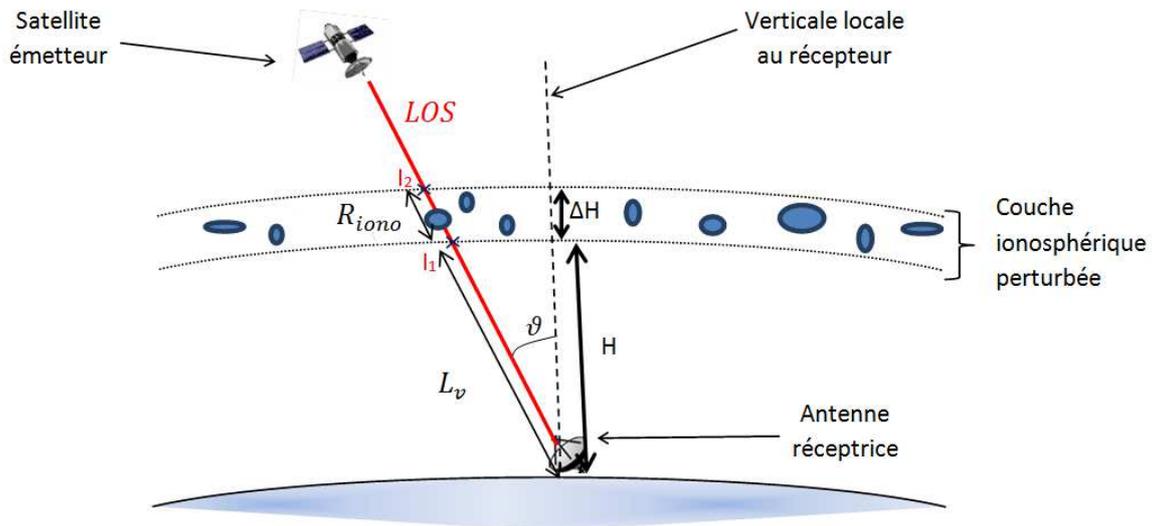


Figure 3.1 : Schéma de la liaison transionosphérique étudiée.

<sup>1</sup>  $R_{iono}$  et  $L_V$  s'expriment en fonction des positions de la station de mesure et du satellite émetteur. Les calculs de ces distances en fonction de  $H$ ,  $\Delta H$  et  $\vartheta$  sont détaillés en annexe 2.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, la technique PWE/MPS présente l'avantage de pouvoir comparer facilement deux configurations de propagation : 3D et 2D. Pour mener à bien ce travail de comparaison, les repères de travail dans les deux configurations sont liés au LOS (axe  $s$ ) : le repère  $(u, v, s)$  en 3D et le repère  $(u, s)$  en 2D. La figure 3.2 schématise les deux repères de travail.

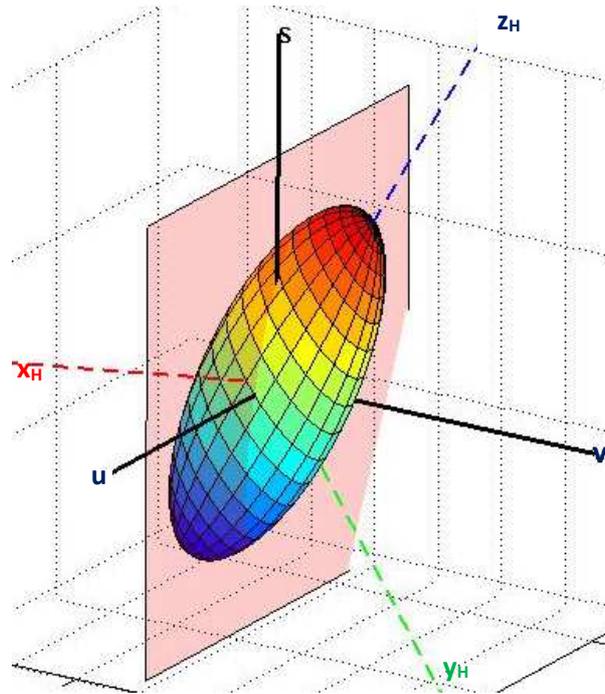


Figure 3.2 : Configurations 3D  $(u, v, s)$  et plan de réduction dimensionnelle 2D  $(u, s)$  en rouge.

Les expressions analytiques 3D et 2D sont dérivées dans les repères  $(u, v, s)$  et  $(u, s)$ , respectivement. Les résultats donnés par ces formulations sont confrontés aux sorties du codes numériques 3D-PWE/2D-MPS et 2D-PWE/1D-MPS, i.e. aux indices de scintillation de log-amplitude et de phase et aux densités spectrales de puissance correspondantes, dérivés des simulations numériques.

Les équations de propagation, dérivées des équations de Maxwell dans le chapitre 2, sont maintenant résolues, aussi bien en 3D qu'en 2D, dans l'hypothèse de faibles perturbations.

### 3.1.2. Résolution de l'équation de propagation en régime de faibles perturbations

On rappelle l'équation scalaire du champ électrique à résoudre, établie en 2.1.1 :

$$\nabla^2 E(\vec{r}) + k_0^2 [1 + 2 \Delta n(\vec{r})] E(\vec{r}) = 0. \quad (3.1)$$

L'expression (3.1) est valable aussi bien en 3D qu'en 2D dès lors que  $\vec{r} \equiv (u, v, s)$  ou  $\vec{r} \equiv (u, s)$  respectivement dans le repère lié au LOS. Dans l'hypothèse de faibles perturbations ( $\langle \chi^2 \rangle < 1$ ) [Wheelon, 2004 (2)], [Tatarskii, 1971], une des techniques les plus utilisées pour résoudre cette équation repose sur l'approximation de Rytov [Rytov et al., 1989]. Il s'agit de décomposer l'une des composantes scalaires  $E$  du champ électrique  $\vec{E}$  conformément à :

$$E(\vec{r}) = E_0(\vec{r}) e^{\Psi(\vec{r})}. \quad (3.2)$$

$E_0(\vec{r})$  désigne le champ électrique au point  $\vec{r}$  en l'absence de milieu turbulent. La fonction  $\Psi(\vec{r})$  s'exprime comme :

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{+\infty} \Psi_i(\vec{r}). \quad (3.3)$$

Les termes  $\Psi_i(\vec{r})$  sont proportionnels à la  $i$ -ème puissance de  $\Delta n(\vec{r})$ . Dans notre hypothèse de faibles perturbations, seul le premier terme  $\Psi_1(\vec{r})$  est conservé. On obtient donc, pour le champ électrique (3.2) :

$$E(\vec{r}) = E_0(\vec{r}) e^{\Psi_1(\vec{r})}. \quad (3.4)$$

Travailler en faible perturbation (weak scattering ou single-scattering) signifie, d'un point de vue physique, que l'on considère que le signal ne rencontre qu'un seul élément diffractant sur le trajet émetteur-récepteur<sup>2</sup>, repéré par sa position  $\vec{r}$  dans le repère de travail 3D ou 2D. En configuration 3D, le vecteur  $\vec{r}$  est défini dans le système de

---

<sup>2</sup> Des travaux ont été menés en prenant en compte l'ordre supérieur  $\Psi_2$  [Gherm et al., 2005], [Rino, 1979 (2)]. Le lecteur pourra s'y référer.

coordonnées  $(u, v, s)$ . Comme explicité dans la l'étude numérique du rapport 3D/2D au chapitre 2, le repère de travail 2D doit contenir la direction de propagation  $s$  et un second axe perpendiculaire, appartenant donc au plan  $(u, v)$ . On choisit, tout comme au chapitre 2, le repère 2D  $(u, s)$ . La figure 3.3 donne une représentation du vecteur  $\vec{r}$  dans les deux configurations de travail 3D et 2D.

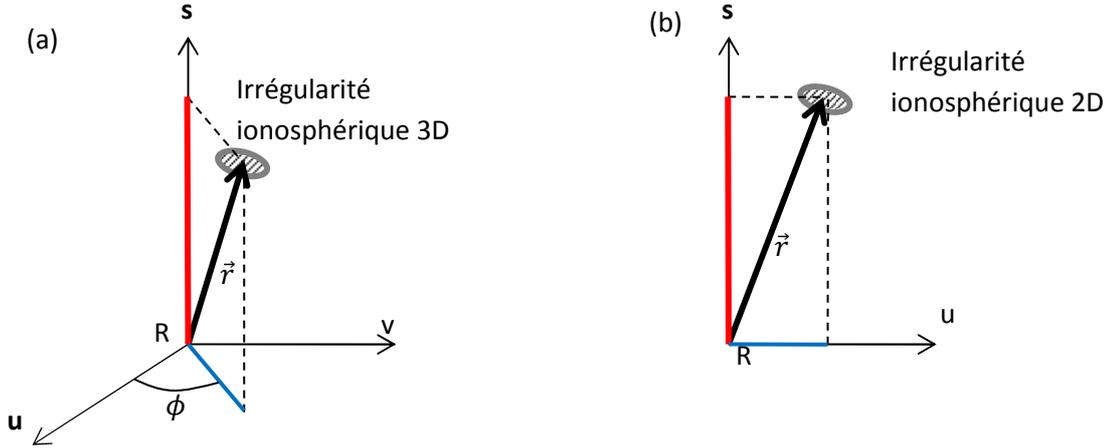


Figure 3.3 : représentation du vecteur  $\vec{r}$  dans les repères (a) 3D  $(u, v, s)$  et (b) 2D  $(u, s)$ , centrés sur le récepteur R

Conformément au chapitre 1, pour compléter la description géométrique du modèle transionosphérique développé dans cette thèse, on considère un profil simplifié d'ionosphère, limité à la couche F2. La couche ionosphérique est localisée à une altitude  $H$  constante et le profil de concentration électronique est considéré constant sur son épaisseur  $\Delta H$ . La constante de structure  $C_s$  définie en (1.38) ne dépend donc pas de l'altitude. Le spectre des fluctuations de densité électronique (2.49) doit alors être pondéré par une fonction de profil, notée  $p(s)$  et définie par :

$$p(s) = \begin{cases} 1 & \text{dans la couche ionosphérique} \\ 0 & \text{en dehors} \end{cases} . \quad (3.5)$$

En configuration 3D, en injectant l'expression du champ (3.4) dans l'équation (3.1), on arrive à l'expression de  $\Psi_1(\vec{R})$  au niveau du récepteur, repéré par le vecteur  $\vec{R}$  [Wheelon, 2004 (2)] :

$$\Psi_1(\vec{R}) = -2k_0^2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3r G^{3D}(\vec{R}, \vec{r}) \Delta n(\vec{r}) \frac{E_0(\vec{r})}{E_0(\vec{R})}. \quad (3.6)$$

$G^{3D}$  est la fonction de Green en 3D et les vecteurs  $\vec{R}$  et  $\vec{r}$  sont définis dans  $(u, v, s)$  (cf. figure 3.3 (a)) :

$$G^{3D}(\vec{R}, \vec{r}) = \frac{e^{ik_0|\vec{R}-\vec{r}|}}{4\pi|\vec{R}-\vec{r}|}. \quad (3.7)$$

En 2D, l'expression (3.6) devient :

$$\Psi_1(\vec{R}) = -2k_0^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2r G^{2D}(\vec{R}, \vec{r}) \Delta n(\vec{r}) \frac{E_0(\vec{r})}{E_0(\vec{R})}, \quad (3.8)$$

avec 
$$G^{2D}(\vec{R}, \vec{r}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}[k_0|\vec{R}-\vec{r}|], \quad (3.9)$$

où  $H_0^{(1)}$  est la fonction de Hankel de premier type et d'ordre 0. Dans les expressions (3.8) et (3.9), les vecteurs  $\vec{R}$  et  $\vec{r}$  sont cette fois définis dans le repère à 2 dimensions  $(u, s)$  (cf. figure 3.3 (b)).

Dans les deux configurations 3D et 2D, le champ électrique reçu au niveau du récepteur s'écrit, en terme d'amplitude  $\mathcal{A}$  et de phase  $\varphi$ , selon :

$$E(\vec{R}) = \mathcal{A}(\vec{R}) e^{i\varphi(\vec{R})}. \quad (3.10)$$

D'après l'expression du champ électrique dans l'approximation de Rytov (3.4), la phase  $\varphi$  est la partie imaginaire du champ  $\Psi_1(\vec{R})$  :

$$\varphi(\vec{R}) = \Im[\Psi_1(\vec{R})]. \quad (3.11)$$

L'amplitude est définie comme la partie réelle :

$$\mathcal{A}(\vec{R}) = |E_0(\vec{R})| e^{\Re[\Psi_1(\vec{R})]}. \quad (3.12)$$

Pour faciliter les expressions, on travaille avec la log-amplitude  $\chi$  définie par :

$$\chi(\vec{R}) = \ln \frac{\mathcal{A}(\vec{R})}{|E_0(\vec{R})|} = \Re[\Psi_1(\vec{R})]. \quad (3.13)$$

Même si l'objectif de la thèse est de modéliser les phénomènes ionosphériques perturbateurs au niveau des régions polaires, les hypothèses de travail décrites ci-dessus peuvent être généralisables à toutes les latitudes. Après avoir exposé les hypothèses de travail, on va maintenant dériver les expressions des variances de log-amplitude dans les deux configurations 3D et 2D, pour ensuite les comparer, afin d'évaluer quantitativement les conséquences de la réduction dimensionnelle 3D/2D quant à l'estimation des effets de scintillation ionosphérique.

## 3.2. Variances de log-amplitude 3D et 2D

### 3.2.1. Expression intégrale de la variance de log-amplitude 3D

D'après les expressions (3.6) et (3.13), la log-amplitude 3D s'écrit :

$$\chi^{3D}(\vec{R}, t) = -2k_0^2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3r \Delta n(\vec{r}, t) \Re \left[ G^{3D}(\vec{R}, \vec{r}) \frac{E_0(\vec{r})}{E_0(\vec{R})} \right]. \quad (3.14)$$

On remplace  $\Delta n$  par son expression (1.19) et on obtient :

$$\chi^{3D}(\vec{R}, t) = 2k_0 r_e \lambda \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3r \Delta N_e(\vec{r}, t) A^{3D}(\vec{R}, \vec{r}), \quad (3.15)$$

avec

$$A^{3D}(\vec{R}, \vec{r}) = \Re \left[ G^{3D}(\vec{R}, \vec{r}) \frac{E_0(\vec{r})}{E_0(\vec{R})} \right]. \quad (3.16)$$

Conformément au chapitre 1 (section 1.3.2.), les fluctuations de concentration électronique  $\Delta N_e$  sont de moyenne nulle. D'après (3.14), la moyenne de la log-amplitude est donc nulle. La variance de log-amplitude au niveau du récepteur est alors donnée par :

$$\langle \chi^2 \rangle^{3D} = (4\pi r_e)^2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3r A^{3D}(\vec{R}, \vec{r}) \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3r' A^{3D}(\vec{R}, \vec{r}') \langle \Delta N_e(\vec{r}, t) \Delta N_e(\vec{r}', t) \rangle. \quad (3.17)$$

D'après les expressions de la fonction de covariance  $B_{\Delta N_e}^{3D}$  (1.21) et (1.22), on peut exprimer la variance de log-amplitude en fonction du spectre des irrégularités  $S_{\Delta N_e}^{3D}$  :

$$\langle \chi^2 \rangle^{3D} = (4\pi r_e)^2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3K S_{\Delta N_e}^{3D}(\vec{K}) D^{3D}(\vec{K}) D^{3D}(-\vec{K}), \quad (3.18)$$

avec

$$D^{3D}(\vec{K}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3r \wp(s) A^{3D}(\vec{R}, \vec{r}) e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}}. \quad (3.19)$$

On pose

$$\Lambda^{3D}(\vec{K}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3r G^{3D}(\vec{R}, \vec{r}) \frac{E_0(\vec{r})}{E_0(\vec{R})} e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} \wp(s), \quad (3.20)$$

de sorte que :

$$D^{3D}(\vec{K}) = \frac{1}{2} [\Lambda^{3D}(\vec{K}) + \Lambda^{3D*}(-\vec{K})], \quad (3.21)$$

où \* désigne le complexe conjugué.

La fonction de Green 3D est définie dans l'équation (3.7). L'irrégularité ionosphérique est repérée par le vecteur  $\vec{r}$  que l'on décompose dans les coordonnées cylindriques :  $\vec{r} \equiv (r \cos \phi, r \sin \phi, s)$  (cf. figure 3.3 (a)). Le récepteur est situé à l'origine donc  $\vec{R} = \vec{0}$ . La fonction de Green 3D s'écrit :

$$G^{3D}(\vec{R}, \vec{r}) = \frac{e^{ik_0 \sqrt{s^2 + r^2}}}{4\pi \sqrt{s^2 + r^2}}. \quad (3.22)$$

On note  $\beta$  l'angle entre la projection orthogonale du vecteur  $\vec{K}$  sur le plan  $(u, v)$ , noté  $K_r$ , et l'axe  $u$  (cf. figure 3.4). Dans ces conditions,  $\vec{K} \equiv (K_r \cos \beta, K_r \sin \beta, K_s)$ . Le champ électrique  $E_0(\vec{r})$  est le champ propagé en espace libre, dans le sens des  $s < 0$  (i.e. vers le récepteur terrestre) de sorte que  $E_0(\vec{r}) = E_0 e^{-ik_0 s}$ .

La fonction  $\Lambda^{3D}(\vec{K})$  (3.20) devient donc :

$$\begin{aligned} \Lambda^{3D}(\vec{K}) &= \int_0^{+\infty} \varphi(s) ds \int_0^{+\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\phi \frac{e^{ik_0 \sqrt{s^2+r^2}}}{4\pi \sqrt{s^2+r^2}} e^{-ik_0 s} e^{i[rK_r \cos(\beta-\phi)+sK_s]}, \\ \Lambda^{3D}(\vec{K}) &= \int_0^{+\infty} \varphi(s) ds e^{-is(k_0-K_s)} \int_0^{+\infty} dr \frac{e^{ik_0 \sqrt{s^2+r^2}}}{4\pi \sqrt{s^2+r^2}} r \int_0^{2\pi} d\phi e^{irK_r \cos(\beta-\phi)}, \\ \Lambda^{3D}(\vec{K}) &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \varphi(s) ds e^{-is(k_0-K_s)} \int_0^{+\infty} dr \frac{e^{ik_0 \sqrt{s^2+r^2}}}{\sqrt{s^2+r^2}} r J_0(r K_r), \end{aligned} \quad (3.23)$$

où  $J_0$  est la fonction de Bessel d'ordre 0. Sous l'hypothèse paraxiale (« small-scattering angle approximation »), les tourbillons diffusants sont localisés à proximité de l'axe du LOS, de sorte que  $r \ll s$  et le terme de phase devient, au premier ordre,  $e^{ik_0 \sqrt{s^2+r^2}} \approx e^{i(k_0 s + r^2 k_0 / 2s)}$ . Par ailleurs, rappelant que  $\int_0^{+\infty} dx. x. e^{-p^2 x^2} J_0(ax) = \frac{1}{2p^2} e^{-a^2/(4p^2)}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \Lambda^{3D}(\vec{K}) &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{s} ds e^{isK_s} \int_0^{+\infty} dr. r e^{i\frac{k_0 r^2}{2s}} J_0(r K_r), \\ \Lambda^{3D}(\vec{K}) &= \frac{i}{2 k_0} \int_0^{+\infty} ds \varphi(s) e^{is\left(K_s - \frac{K_r^2}{2k_0}\right)}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

D'après (3.21) et la fonction de profil (3.5), la fonction  $D^{3D}(\vec{K})$  devient alors :

$$D^{3D}(\vec{K}) = \frac{1}{2 k_0} \int_{L_V}^{L_V + R_{iono}} ds e^{isK_s} \sin\left(\frac{sK_r^2}{2 k_0}\right). \quad (3.25)$$

Dans ces conditions, la variance de log-amplitude (3.18) se réécrit :

$$\begin{aligned} \langle \chi^2 \rangle^{3D} &= (\lambda r_e)^2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3K S_{\Delta N_e}^{3D}(\vec{K}) \\ &\times \int_{L_V}^{L_V+R_{iono}} ds_1 \int_{L_V}^{L_V+R_{iono}} ds_2 \sin\left(\frac{s_2 K_r^2}{2 k_0}\right) \sin\left(\frac{s_1 K_r^2}{2 k_0}\right) e^{iK_s(s_1-s_2)}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Le produit des deux intégrales en  $s$  sera le plus important autour de la diagonale  $s_1 = s_2$ . Dans ces conditions,  $\int_a^b dx \int_a^b dx' f(x)g(x') e^{iK(x-x')} = 2\pi\delta(K) \int_a^b dx f(x)g(x)$  où  $\delta$  est la distribution de Dirac. On arrive à :

$$\langle \chi^2 \rangle^{3D} = 2\pi\lambda^2 r_e^2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3K S_{\Delta N_e}^{3D}(\vec{K}) \delta(K_s) \int_{L_V}^{L_V+R_{iono}} ds \sin^2\left(\frac{sK_r^2}{2k_0}\right). \quad (3.27)$$

On résout l'intégrale en  $s$  :

$$\begin{aligned} I(K_r) &= \int_{L_V}^{L_V+R_{iono}} ds \sin^2\left(\frac{sK_r^2}{2k_0}\right) = \left[ \frac{s}{2} - \frac{\sin\left(\frac{sK_r^2}{k_0}\right)}{\frac{2K_r^2}{k_0}} \right]_{L_V}^{L_V+R_{iono}}, \\ I(K_r) &= \frac{R_{iono}}{2} [1 - \text{sinc}(\zeta X) \cos[X(1 + \zeta)]] = R_{iono} F_{\chi}^{3D}(K_r), \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$F_{\chi}^{3D}(K_r) = \frac{1}{2} [1 - \text{sinc}(\zeta X) \cos[X(1 + \zeta)]], \quad \zeta = \frac{R_{iono}}{2L_V} \quad \text{et} \quad X = \frac{L_V K_r^2}{k_0}. \quad (3.29)$$

Rappelant que  $f(x_0) = \int_a^b \delta(x - x_0)f(x)dx$  pour  $a < x_0 < b$ , la variance de log-amplitude (3.27) devient :

$$\langle \chi^2 \rangle^{3D} = 2\pi\lambda^2 r_e^2 R_{iono} \iiint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_v S_{\Delta N_e}^{3D}(K_u, K_v, 0) F_{\chi}^{3D}(K_u, K_v). \quad (3.30)$$

Par ailleurs, conformément au chapitre 2, le spectre 3D des fluctuations de densité électronique  $S_{\Delta N_e}^{3D}$  est défini par l'équation (2.49). En l'injectant dans (3.30), on obtient :

$$\langle \chi^2 \rangle^{3D} = 2\pi\lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y A_z C_s \times \iint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_v \left( AK_u^2 + BK_v^2 + 2CK_u K_v + \frac{K_0^2}{a^2} \right)^{-\frac{p}{2}} F_\chi^{3D}(K_u, K_v). \quad (3.31)$$

Les paramètres  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont définis en (2.50) comme des fonctions des angles  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\Psi$ . Pour résoudre l'intégrale (3.31), on définit le repère  $(u', v')$  lié à l'axe principal de l'irrégularité dans le plan transverse  $(u, v)$  et schématisé sur la figure 3.4.

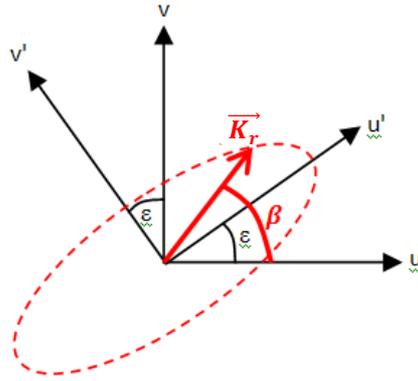


Figure 3.4 : Coupe de l'irrégularité dans le plan transverse  $(u, v)$  en pointillés rouges et définition du repère  $(u', v')$  lié aux axes principaux de l'ellipse.

On note  $K_{u'}$  et  $K_{v'}$ , les coordonnées du vecteur  $K_r$  dans le repère  $(u', v')$ . La matrice de changement de repère, de  $(u', v')$  à  $(u, v)$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

L'équation de l'ellipse, représentée en pointillés rouges sur la figure 3.4 peut s'écrire dans les repères  $(u, v)$  et  $(u', v')$  :

$$AK_u^2 + BK_v^2 + 2CK_u K_v = A'K_{u'}^2 + B'K_{v'}^2 + 2C'K_{u'} K_{v'}. \quad (3.33)$$

D'après (3.32) et (3.33), les coefficients  $A'$  et  $B'$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} A' &= A \cos^2 \varepsilon + B \sin^2 \varepsilon + 2 C \cos \varepsilon \sin \varepsilon, \\ B' &= A \sin^2 \varepsilon + B \cos^2 \varepsilon - 2 C \cos \varepsilon \sin \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Or  $C' = 0$  puisqu'on travaille dans le repère principal de l'ellipse. On peut alors exprimer l'angle  $\varepsilon$  en fonction des paramètres  $A$ ,  $B$  et  $C$  :

$$\begin{aligned} C' &= -2 A \cos \varepsilon \sin \varepsilon + 2 B \cos \varepsilon \sin \varepsilon + 2 C \cos^2 \varepsilon - 2 C \sin^2 \varepsilon = 0, \\ (B - A) \sin 2\varepsilon + 2 C \cos 2\varepsilon &= 0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \left( \frac{2 C}{A - B} \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Finalemment

$$\begin{aligned} A' &= \left( A + \frac{2 C^2}{A - B} \right) - \sin^2 \varepsilon \left( A - B + \frac{4 C^2}{A - B} \right), \\ B' &= \left( B - \frac{2 C^2}{A - B} \right) + \sin^2 \varepsilon \left( A - B + \frac{4 C^2}{A - B} \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

L'expression (3.31) devient :

$$\langle \chi^2 \rangle^{3D} = 2\pi \lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y A_z C_s \iint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_{v'} \left( A' K_u^2 + B' K_{v'}^2 + \frac{K_0^2}{a^2} \right)^{-p/2} F_{\chi}^{3D}(K_u, K_{v'}),$$

$$\begin{aligned} \langle \chi^2 \rangle^{3D} &= \pi \lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y A_z C_s \iint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_{v'} \left( A' K_u^2 + B' K_{v'}^2 + \frac{K_0^2}{a^2} \right)^{-\frac{p}{2}} \\ &\times \left[ 1 - \operatorname{sinc} \left[ \frac{R_{iono} (K_u^2 + K_{v'}^2)}{2 k_0} \right] \cos \left[ \frac{L_V (K_u^2 + K_{v'}^2)}{k_0} \left( 1 + \frac{R_{iono}}{2 L_V} \right) \right] \right]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Les techniques de résolution actuelles ne permettent pas de linéariser l'intégrale (3.37). Cependant, des hypothèses supplémentaires peuvent être posées afin de simplifier cette formulation et de proposer une expression asymptotique.

### 3.2.2. Hypothèses simplificatrices 3D

Dans l'expression (3.37), on pose le changement de variables polaires :

$$\begin{aligned} K'' \cos(\beta - \varepsilon) &= \sqrt{A'} K_{u'} , \\ K'' \sin(\beta - \varepsilon) &= \sqrt{B'} K_{v'} , \end{aligned} \quad (3.38)$$

où les angles  $\beta$  et  $\varepsilon$  sont définis conformément à la figure 3.4. Dans ces conditions, l'expression (3.37) devient :

$$\begin{aligned} \langle \chi^2 \rangle^{3D} &= \frac{\pi \lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y A_z C_s}{\sqrt{A' B'}} \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{+\infty} K'' dK'' \left( K''^2 + \frac{K_0^2}{a^2} \right)^{-p/2} \\ &\quad \times \left[ 1 - \text{sinc} \left[ \frac{R_{iono} K''^2 \left[ \frac{\cos^2(\beta - \varepsilon)}{A'} + \frac{\sin^2(\beta - \varepsilon)}{B'} \right]}{2 k_0} \right] \right] \\ &\quad \times \cos \left[ \frac{L_V K''^2 \left[ \frac{\cos^2(\beta - \varepsilon)}{A'} + \frac{\sin^2(\beta - \varepsilon)}{B'} \right]}{k_0} \left( 1 + \frac{R_{iono}}{2 L_V} \right) \right] \Bigg]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

La première étape consiste à étudier, dans l'expression (3.39), le produit du spectre des fluctuations de concentration électronique  $S_{\Delta N_e}^{3D}$  avec la fonction de filtrage  $F_\chi^{3D}$  en fonction du nombre d'onde  $K''$ . La figure 3.5 donne une représentation de ces deux fonctions.

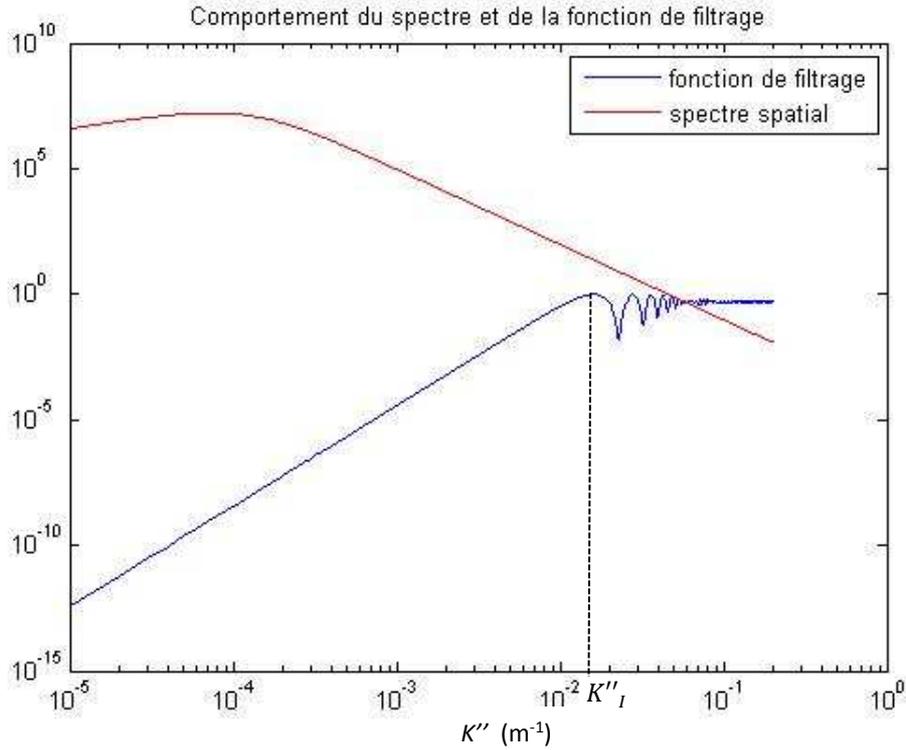


Figure 3.5 : Comparaison du spectre de concentration électronique (en rouge) et de la fonction de filtrage spatial (en bleu) (échelle logarithmique).

D'après la figure 3.5, en deçà de  $K''_l$ , la fonction de filtrage rend le produit des fonctions proche de 0. À partir de  $K''_l$ , cette fonction de filtrage reste pratiquement constante, égale à 1. Son produit avec le spectre est donc approximé au spectre du milieu seul.

On cherche à déterminer l'expression de l'abscisse  $K''_l$  repérée sur le graphique de la figure 3.5. Elle correspond à la dimension  $l$  de la turbulence ionosphérique telle que  $l = 2\pi/K''_l$ . On cherche les termes  $K''_s$  et  $K''_c$  correspondant respectivement à la première annulation du *sinc* et du *cos* de la formulation (3.39) :

- Première valeur nulle du *sinc* :

$$\text{sinc} \left[ \frac{R_{iono} K''^2_s \left[ \frac{\cos^2(\beta - \varepsilon)}{A'} + \frac{\sin^2(\beta - \varepsilon)}{B'} \right]}{2 k_0} \right] = 0,$$

$$\frac{R_{iono} K''^2_s \left( \frac{\cos^2 \beta}{A'} + \frac{\sin^2 \beta}{B'} \right)}{2 k_0} = \pi,$$

soit	$K''_s = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda R_{iono}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{A'} + \frac{\sin^2 \beta}{B'}}}. \quad (3.40)$
------	---

- Première valeur nulle du  $\cos$  :

$$\cos \left[ \frac{L_V K''^2 \left[ \frac{\cos^2(\beta - \varepsilon)}{A'} + \frac{\sin^2(\beta - \varepsilon)}{B'} \right]}{k_0} \left( 1 + \frac{R_{iono}}{2 L_V} \right) \right] = 0,$$

$$\frac{L_V K''^2 \left( \frac{\cos^2 \beta}{A'} + \frac{\sin^2 \beta}{B'} \right)}{k_0} \left( 1 + \frac{R_{iono}}{2 L_V} \right) = \frac{\pi}{2},$$

soit

$$K''_c = K''_s \sqrt{\frac{1}{2 + 4 \frac{L_V}{R_{iono}}}},$$

$K''_c = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda L_V}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{A'} + \frac{\sin^2 \beta}{B'}}} \sqrt{\frac{1}{4 + 2 \frac{R_{iono}}{L_V}}}. \quad (3.41)$
--

En comparant les expressions (3.40) et (3.41), on constate que  $K''_c < K''_s$  car l'épaisseur d'ionosphère traversée  $R_{iono}$  est inférieure à  $L_V$ . Le rôle du terme en  $\cos$  est donc prépondérant. On simplifie alors la fonction de filtrage en ne considérant que la contribution du terme  $\cos$ .

Une seconde hypothèse simplificatrice est de considérer que l'altitude de la couche ionosphérique est grande devant son épaisseur (hypothèse couche mince), soit  $L_V \gg R_{iono}$ . L'expression (3.41) devient :

$$K''_c = \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda L_V}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{A'} + \frac{\sin^2 \beta}{B'}}},$$

soit

$$K''_c = K_f \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{A'} + \frac{\sin^2 \beta}{B'}}}. \quad (3.42)$$

$K_f$  est le nombre d'onde de Fresnel  $K_f = 2\pi/L_f$ , la longueur de Fresnel étant définie par  $L_f = 2\sqrt{\lambda L_V}$ . Grâce à la formulation (3.42), on peut facilement définir la taille des tourbillons qui contribuent majoritairement à l'intensité de la scintillation ionosphérique en fonction de l'anisotropie considérée.

Ainsi, dans la situation où l'irrégularité est isotrope, i.e. pour  $A' = B' = 1$ , les tourbillons contribuant en majorité à la scintillation ont pour dimension caractéristique dans le plan transverse  $(u, v)$  la longueur de Fresnel  $L_f$ . Dans une situation anisotrope  $A' \geq 1$  et  $B' \geq 1$ , d'où, selon (3.42),  $K''_c > K_f$  : la taille des tourbillons contributifs est alors plus faible de même que l'énergie diffusante associée. Hunsucker & Hargreaves [2003] donnent la longueur de Fresnel comme limite supérieure à la taille des irrégularités à l'origine de scintillation d'amplitude. Leurs résultats expérimentaux sont donc en accord avec les résultats de cette étude analytique.

La dernière hypothèse de simplification des calculs découle de l'expression (3.42). Aux fréquences typiques de la bande L, de l'ordre de 1 GHz, l'échelle externe  $L_0$  des irrégularités ionosphériques, de l'ordre du km, est telle que  $L_0 \gg L_f \approx 200 \text{ m}$ , d'où  $K''_c \gg K_0$ . On va donc négliger le terme  $K_0$  dans l'expression (3.37).

Les trois hypothèses établies dans ce paragraphe (**fonction de filtrage simplifiée au seul terme  $\cos$ , hypothèse couche mince et terme  $K_0$  négligé**) vont être utilisées pour obtenir l'expression asymptotique de la variance de log-amplitude 3D.

### 3.2.3. Expression asymptotique de la variance de log-amplitude 3D

On reprend l'expression (3.37) avec les hypothèses simplificatrices établies plus haut :

$$\langle \chi^2 \rangle^{3D} = \pi \lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y A_z C_s \iint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_v (A' K_u^2 + B' K_v^2)^{-\frac{p}{2}} \times \left[ 1 - \cos \left[ \frac{L_V (K_u^2 + K_v^2)}{k_0} \right] \right]. \quad (3.43)$$

D'après la figure 3.4, dans le plan  $(u, v)$  transverse au LOS, le changement de variables polaires  $K_u = K_r \cos(\beta - \varepsilon)$ ,  $K_v = K_r \sin(\beta - \varepsilon)$  conduit à :

$$\langle \chi^2 \rangle^{3D} = \pi \lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y A_z C_s \times \int_0^{2\pi} d\beta [A' \cos^2(\beta - \varepsilon) + B' \sin^2(\beta - \varepsilon)]^{-\frac{p}{2}} \int_0^{+\infty} dK_r K_r^{-p+1} \left[ 1 - \cos \left[ \frac{L_V K_r^2}{k_0} \right] \right]. \quad (3.44)$$

On pose  $X = K_r^2$ . L'intégrale en  $\beta$ , de 0 à  $2\pi$ , ne dépend pas de  $\varepsilon$ . On obtient :

$$\langle \chi^2 \rangle^{3D} = \pi \lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y A_z C_s \times \int_0^{2\pi} d\beta [A' \cos^2 \beta + B' \sin^2 \beta]^{-\frac{p}{2}} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dX X^2 \left[ 1 - \cos \left[ \frac{L_V X}{k_0} \right] \right]. \quad (3.45)$$

Or  $\int_0^{+\infty} dx x^{-\mu} [1 - \cos(ax)] = -a^{\mu-1} \frac{\pi}{2\Gamma(\mu) \cos(\frac{\mu\pi}{2})}$  pour  $1 < \mu < 3$  et  $a > 0$  et où  $\Gamma$  est la fonction gamma. Appliquées à (3.45), ces conditions équivalent à  $2 < p < 6$ , condition vérifiée par l'indice spectral conformément au chapitre 1, et à  $L_V/k_0 > 0$ , ce qui est toujours vrai. Dès lors, l'expression asymptotique de la variance de log-amplitude 3D devient:

$$\langle \chi^2 \rangle^{3D} = \frac{-\pi^2 \lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y A_z C_s \left(\frac{L_V}{k_0}\right)^{\frac{p}{2}-1}}{4\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) A'^{\frac{p}{2}}} \times \int_0^{2\pi} d\beta \left( 1 - \frac{A' - B'}{A'} \sin^2 \beta \right)^{-\frac{p}{2}}. \quad (3.46)$$

Les paramètres  $A'$  et  $B'$  définissent la coupe ellipsoïdale de l'irrégularité ionosphérique dans le plan transverse  $(u, v)$  selon ses axes principaux notés  $u'$  et  $v'$  (cf. figure 3.4).  $A'$  et  $B'$  dépendent des paramètres géométriques qui décrivent le milieu, à savoir les facteurs d'anisotropie  $A_y$  et  $A_z$  ainsi que les angles  $\gamma$  et  $\psi$ . L'utilisation du repère  $(u, v)$  - ou  $(u', v')$  - transverse au LOS permet alors une interprétation directe de la scintillation d'amplitude : conformément à (3.46), celle-ci dépend de la coupe des irrégularités ionosphériques dans le plan transverse.

En particulier, d'après l'expression 3.681-1 tirée de [Gradshteyn & Ryzhik, 2007], le calcul intégral de l'expression (3.46) donne :

$$\langle \chi^2 \rangle^{3D} = \frac{-\pi^3 \lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y A_z C_s}{2 \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) A'^{\frac{p}{2}}} \left(\frac{L_V}{k_0}\right)^{\frac{p}{2}-1} {}_2F_1\left(\frac{p}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{A' - B'}{A'}\right), \quad (3.47)$$

où  ${}_2F_1$  est la fonction hypergéométrique. On obtient finalement une expression entièrement analytique de la variance de log-amplitude.

Afin de comparer les sorties numériques aux résultats analytiques, on reprend la configuration hautes latitudes décrite dans le tableau 2.4. La figure 3.6 représente les résultats numériques et analytiques de l'indice de scintillation  $S_4$  en 3D.

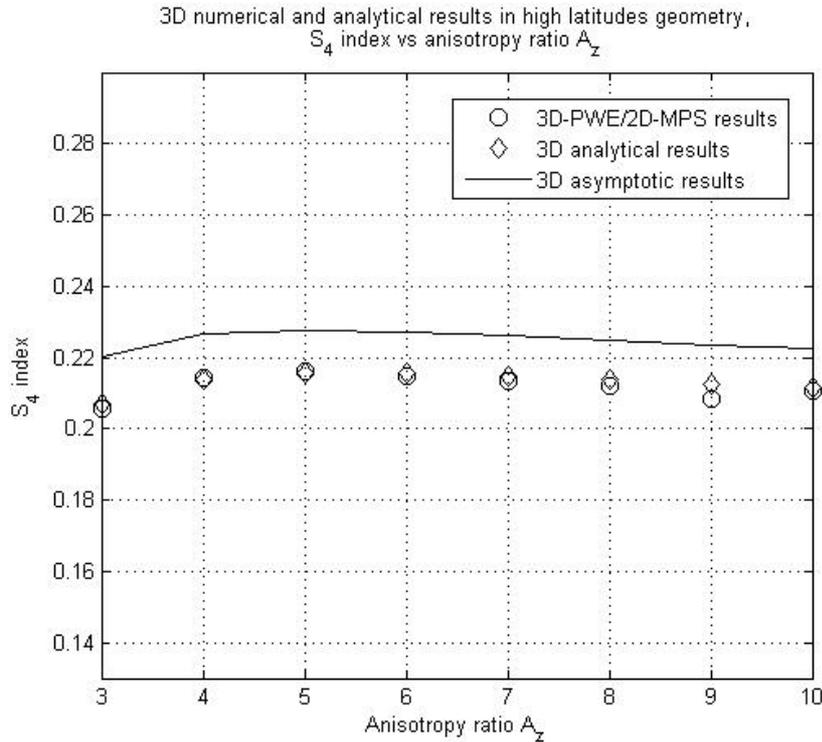


Figure 3.6 : Résultats numériques et analytiques de l'indice  $S_4$  pour une configuration hautes latitudes.

Figure 3.6, les résultats analytiques, correspondant à la résolution numérique de l'expression complète de la variance de log-amplitude (3.37), et asymptotiques, correspondant à la formulation (3.47), viennent bien valider les sorties du code numérique STIPEE implémenté en configuration 3D-PWE/2D-MPS. On remarque un écart d'environ 5% entre les résultats asymptotiques et les valeurs issues du calcul intégral (3.37) (résultats analytiques de la figure 3.6). Les hypothèses émises dans la partie 3.2.2 expliquent cette différence.

Comme indiqué en introduction de ce chapitre, dans la littérature, les formulations 3D de variance de log-amplitude ont été dérivées dans le repère géomagnétique, jamais dans le LOS. L'annexe 3 est consacrée à la comparaison de l'expression (3.47), dans le repère du LOS, avec la formulation de la variance de log-amplitude établie par Rino [1979 (1)] dans le repère géomagnétique. On arrive à la conclusion que les résultats, obtenus dans ces deux repères de travail différents, sont équivalents, au facteur  $8\pi^3$  près de la définition de  $C_s$  (cf. (1.40)). Cette comparaison valide donc le formalisme analytique développé ici dans le repère lié au LOS.

<b>Bilan des calculs de variance de log-amplitude 3D :</b>
<b>Expression intégrale complète dans le repère principal de l'ellipse (<math>u', v'</math>), transverse au LOS :</b>
$\langle \chi^2 \rangle^{3D} = \pi \lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y A_z C_s \iint_{-\infty}^{+\infty} dK_{u'} dK_{v'} \left( A' K_{u'}^2 + B' K_{v'}^2 + \frac{K_0^2}{a^2} \right)^{-\frac{p}{2}}$ $\times \left[ 1 - \text{sinc} \left[ \frac{R_{iono} (K_{u'}^2 + K_{v'}^2)}{2 k_0} \right] \cos \left[ \frac{L_V (K_{u'}^2 + K_{v'}^2)}{k_0} \left( 1 + \frac{R_{iono}}{2 L_V} \right) \right] \right].$
<b>Expression asymptotique (couche mince) dans le plan transverse au LOS :</b>
$\langle \chi^2 \rangle^{3D} = \frac{-\pi^3 \lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y A_z C_s}{2 \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) A'^{\frac{p}{2}}} \left(\frac{L_V}{k_0}\right)^{\frac{p}{2}-1} {}_2F_1\left(\frac{p}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{A' - B'}{A'}\right).$

Dans cette partie, nous avons développé l'expression analytique de la variance de log-amplitude en 3D. La section suivante va nous permettre d'établir, en suivant les mêmes étapes, les expressions analytiques de la variance de log-amplitude en configuration 2D.

### 3.2.4. Expression intégrale de la variance de log-amplitude 2D

On peut reprendre les mêmes calculs qu'en 3D en apportant les modifications inhérentes à la réduction dimensionnelle. Les vecteurs position  $\vec{r}$  et  $\vec{R}$  sont cette fois définis dans le repère 2D ( $u, s$ ) (cf. figure 3.3 (b)). D'après (3.8) et (3.13), la log-amplitude 2D s'écrit :

$$\chi^{2D}(\vec{R}, t) = 2k_0 r_e \lambda \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2r \Delta N_e(\vec{r}, t) A^{2D}(\vec{R}, \vec{r}), \quad (3.48)$$

avec

$$A^{2D}(\vec{R}, \vec{r}) = \Re \left[ G^{2D}(\vec{R}, \vec{r}) \frac{E_0(\vec{r})}{E_0(\vec{R})} \right]. \quad (3.49)$$

La fonction de Green 2D  $G^{2D}$  est définie en (3.9). La variance de log-amplitude 2D s'écrit :

$$\langle \chi^2 \rangle^{2D} = (4\pi r_e)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2r A^{2D}(\vec{R}, \vec{r}) \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2r' A^{2D}(\vec{R}, \vec{r}') \langle \Delta N_e(\vec{r}, t) \Delta N_e(\vec{r}', t) \rangle. \quad (3.50)$$

On peut exprimer la variance 2D  $\langle \chi^2 \rangle^{2D}$  en fonction du spectre 2D du milieu noté  $S_{\Delta N_e}^{2D}$  :

$$\langle \chi^2 \rangle^{2D} = (4\pi r_e)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} d^3K S_{\Delta N_e}^{2D}(\vec{K}) D^{2D}(\vec{K}) D^{2D}(-\vec{K}), \quad (3.51)$$

avec

$$D^{2D}(\vec{K}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \wp(s) d^2r A^{2D}(\vec{R}, \vec{r}) e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}}. \quad (3.52)$$

On pose :

$$\Lambda^{2D}(\vec{K}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} du ds G^{2D}(\vec{R}, \vec{r}) \frac{E_0(\vec{r})}{E_0(\vec{R})} e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} \wp(s). \quad (3.53)$$

D'où :

$$D^{2D}(\vec{K}) = \frac{1}{2} [\Lambda^{2D}(\vec{K}) + \Lambda^{2D*}(-\vec{K})], \quad (3.54)$$

L'irrégularité ionosphérique est repérée par le vecteur  $\vec{r} \equiv (u, s)$ , défini sur la figure 3.3 (b). Le récepteur est situé à l'origine donc  $\vec{R} = \vec{0}$ . Les coordonnées du vecteur  $\vec{K}$  sont  $\vec{K} \equiv (K_u, K_s)$ . La fonction de Green 2D (3.9) s'écrit alors :

$$G^{2D}(\vec{R}, \vec{r}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}[k_0 \|\vec{r}\|]. \quad (3.55)$$

Or, considérant  $\lambda \ll r$ , on a  $k_0 \|\vec{r}\| \gg 1$ . Dans ces conditions, la fonction de Hankel de type 1 et d'ordre 0 s'écrit :

$$H_0^{(1)}[k_0 \|\vec{r}\|] = \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 \sqrt{u^2 + s^2}}} e^{ik_0 \sqrt{u^2 + s^2}} e^{-\frac{i\pi}{4}}. \quad (3.56)$$

De plus, comme on considère des angles de diffusion faibles (hypothèse paraxiale), on a  $u \ll s$ . L'expression (3.56) se simplifie et on arrive à :

$$G^{2D}(\vec{R}, \vec{r}) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k_0 s}} e^{ik_0 s \left(1 + \frac{u^2}{2s}\right)},$$

$$G^{2D}(\vec{R}, \vec{r}) = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{ik_0 s} e^{ik_0 \frac{u^2}{2s}}}{\sqrt{8\pi k_0 s}}. \quad (3.57)$$

On considère une propagation dans la direction des  $s$  décroissants. Le champ électrique  $E$  s'écrit :

$$E_0(\vec{r}) = E_0 e^{-ik_0 s}. \quad (3.58)$$

En injectant les expressions (3.57) et (3.58) dans (3.53), la fonction  $\Lambda^{2D}(\vec{K})$  devient donc :

$$\Lambda^{2D}(\vec{K}) = \int_0^{+\infty} ds \int_{-\infty}^{+\infty} du e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{ik_0 \frac{u^2}{2s}}}{\sqrt{8\pi k_0 s}} e^{i[uK_u + sK_s]} \rho(s),$$

$$\Lambda^{2D}(\vec{K}) = \frac{i}{2k_0} \int_0^{+\infty} ds e^{is\left(K_s - \frac{K_u^2}{2k_0}\right)} \rho(s). \quad (3.59)$$

D'après (3.54), la fonction  $D^{2D}(\vec{K})$  devient alors :

$$D^{2D}(\vec{K}) = \frac{i}{4k_0} \int_0^{+\infty} ds \left[ e^{isK_s} e^{-\frac{isK_u^2}{2k_0}} - e^{isK_s} e^{\frac{isK_u^2}{2k_0}} \right] \rho(s),$$

$$D^{2D}(\vec{K}) = \frac{1}{2k_0} \int_{L_V}^{L_V + R_{iono}} ds e^{isK_s} \sin\left(\frac{sK_u^2}{2k_0}\right). \quad (3.60)$$

La variance de log-amplitude (3.51) devient :

$$\begin{aligned} \langle \chi^2 \rangle^{2D} &= (\lambda r_e)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2 K S_{\Delta N_e}^{2D}(\vec{K}) \\ &\times \int_{L_V}^{L_V+R_{iono}} ds_1 \int_{L_V}^{L_V+R_{iono}} ds_2 \sin\left(\frac{s_2 K_u^2}{2 k_0}\right) \sin\left(\frac{s_1 K_u^2}{2 k_0}\right) e^{iK_s(s_1-s_2)}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

La double intégrale en  $s$  se résout comme dans le calcul de la fonction de filtrage 3D (cf. expression 3.28). On arrive à :

$$\langle \chi^2 \rangle^{2D} = 2\pi\lambda^2 r_e^2 R_{iono} \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2 K S_{\Delta N_e}^{2D}(\vec{K}) \delta(K_s) F_{\chi}^{2D}(K_u), \quad (3.62)$$

$$F_{\chi}^{2D}(K_u) = \frac{1}{2} [1 - \text{sinc}(\zeta X') \cos[X'(1 + \zeta)]], \quad \zeta = \frac{R_{iono}}{2 L_V} \quad \text{et} \quad X' = \frac{L_V K_u^2}{k_0}. \quad (3.63)$$

Le spectre des fluctuations électroniques 2D est relié au spectre 3D par la formulation (2.73). L'expression (3.62) devient :

$$\langle \chi^2 \rangle^{2D} = 2\pi\lambda^2 r_e^2 R_{iono} \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3 K S_{\Delta N_e}^{3D}(K_u, K_v, K_s) \delta(K_s) F_{\chi}^{2D}(K_u). \quad (3.64)$$

Par définition de la fonction Dirac  $\delta$ , la variance de log-amplitude 2D (3.64) devient :

$$\langle \chi^2 \rangle^{2D} = 2\pi\lambda^2 r_e^2 R_{iono} \iint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_v S_{\Delta N_e}^{3D}(K_u, K_v, 0) F_{\chi}^{2D}(K_u). \quad (3.65)$$

En injectant l'expression du spectre des fluctuations de densité électronique  $S_{\Delta N_e}^{3D}$  (2.49), la formulation intégrale complète de la variance de log-amplitude 2D est donc :

$$\begin{aligned}
\langle \chi^2 \rangle^{2D} &= \pi \lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y A_z C_s \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} dK_u \left[ 1 - \text{sinc} \left( \frac{R_{iono} K_u^2}{2 k_0} \right) \cos \left[ \frac{L_V K_u^2}{k_0} \left( 1 + \frac{R_{iono}}{2 L_V} \right) \right] \right] \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} dK_v \left( A K_u^2 + B K_v^2 + 2 C K_u K_v + \frac{K_0^2}{a^2} \right)^{-p/2}.
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Les formulations de la log-amplitude 2D (3.65) et 3D (3.30) ne diffèrent que par la définition de la fonction de filtrage. Comme pour la résolution des intégrales de la variance de log-amplitude 3D, quelques hypothèses simplificatrices vont être établies pour comprendre les effets de la réduction dimensionnelle sur les résultats 2D et ainsi résoudre plus facilement les intégrales mises en jeu.

### 3.2.5. Hypothèses simplificatrices 2D

Pour simplifier le calcul intégral de l'expression (3.66), on étudie le produit de la fonction de filtrage par le terme  $K_u^2$ , comme précédemment dans les calculs de variance de log-amplitude 3D. Pour cela, on passe dans le repère principal de l'ellipse noté  $(u', v')$  (cf. figure 3.4). L'expression (3.66) devient :

$$\begin{aligned}
\langle \chi^2 \rangle^{2D} &= \pi \lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y A_z C_s \int_{-\infty}^{+\infty} dK_{u'} \\
&\times \left[ 1 - \text{sinc} \left[ \frac{R_{iono} (K_{u'} \cos \varepsilon - K_{v'} \sin \varepsilon)^2}{2 k_0} \right] \cos \left[ \frac{L_V (K_{u'} \cos \varepsilon - K_{v'} \sin \varepsilon)^2}{k_0} \left( 1 + \frac{R_{iono}}{2 L_V} \right) \right] \right] \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} dK_{v'} \left( A' K_{u'}^2 + B' K_{v'}^2 + \frac{K_0^2}{a^2} \right)^{-p/2}.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

On procède ensuite au changement de variable  $K''$  défini par (3.38). On arrive finalement à :

$$\begin{aligned}
 \langle \chi^2 \rangle^{2D} &= \frac{\pi \lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y A_z C_s}{\sqrt{A'B'}} \int_0^{2\pi} d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} K'' dK'' \left( K''^2 + \frac{K_0^2}{a^2} \right)^{-p/2} \\
 &\times \left[ 1 - \text{sinc} \left[ \frac{R_{iono} K''^2 \left( \frac{\cos(\beta - \varepsilon) \cos \varepsilon}{\sqrt{A'}} - \frac{\sin(\beta - \varepsilon) \sin \varepsilon}{\sqrt{B'}} \right)^2}{2 k_0} \right] \right. \\
 &\times \cos \left. \left[ \frac{L_V K''^2 \left( \frac{\cos(\beta - \varepsilon) \cos \varepsilon}{\sqrt{A'}} - \frac{\sin(\beta - \varepsilon) \sin \varepsilon}{\sqrt{B'}} \right)^2}{k_0} \left( 1 + \frac{R_{iono}}{2 L_V} \right) \right] \right]. \tag{3.68}
 \end{aligned}$$

On cherche à déterminer l'expression de l'abscisse  $K''_l$  repérée sur le graphique de la figure 3.5. Comme pour la résolution 3D, section 3.2.2, on cherche les termes  $K''_s$  et  $K''_c$  correspondant respectivement à la première annulation du *sinc* et du *cos* de la formulation (3.68).

- Première valeur nulle du *sinc* :

$$\begin{aligned}
 \text{sinc} \left[ \frac{R_{iono} K''^2_s \left( \frac{\cos(\beta - \varepsilon) \cos \varepsilon}{\sqrt{A'}} - \frac{\sin(\beta - \varepsilon) \sin \varepsilon}{\sqrt{B'}} \right)^2}{2 k_0} \right] &= 0, \\
 \frac{R_{iono} K''^2_s \left( \frac{\cos(\beta - \varepsilon) \cos \varepsilon}{\sqrt{A'}} - \frac{\sin(\beta - \varepsilon) \sin \varepsilon}{\sqrt{B'}} \right)^2}{2 k_0} &= \pi,
 \end{aligned}$$

$  \text{soit } K''_s = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda} R_{iono}} \frac{1}{\left( \frac{\cos(\beta - \varepsilon) \cos \varepsilon}{\sqrt{A'}} - \frac{\sin(\beta - \varepsilon) \sin \varepsilon}{\sqrt{B'}} \right)}. \tag{3.69}  $
--

- Première valeur nulle du *cos* :

$$\cos \left[ \frac{L_V K''^2_c \left( \frac{\cos(\beta - \varepsilon) \cos \varepsilon}{\sqrt{A'}} - \frac{\sin(\beta - \varepsilon) \sin \varepsilon}{\sqrt{B'}} \right)^2}{k_0} \left( 1 + \frac{R_{iono}}{2 L_V} \right) \right] = 0,$$

$$\frac{L_V K''_c \left( \frac{\cos(\beta - \varepsilon) \cos \varepsilon}{\sqrt{A'}} - \frac{\sin(\beta - \varepsilon) \sin \varepsilon}{\sqrt{B'}} \right)^2}{k_0} \left( 1 + \frac{R_{iono}}{2 L_V} \right) = \frac{\pi}{2},$$

soit

$$K''_c = K''_s \sqrt{\frac{1}{2 + 4 \frac{L_V}{R_{iono}}}},$$

$$K''_c = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda} L_V} \frac{1}{\left[ \frac{\cos(\beta - \varepsilon) \cos \varepsilon}{\sqrt{A'}} - \frac{\sin(\beta - \varepsilon) \sin \varepsilon}{\sqrt{B'}} \right]} \sqrt{\frac{1}{4 + 2 \frac{R_{iono}}{L_V}}}. \quad (3.70)$$

En comparant les expressions (3.69) et (3.70), on constate que  $K''_c < K''_s$ . Comme dans la configuration 3D, on simplifie la fonction de filtrage en ne considérant que la contribution du terme cos. De même qu'en 3D,  $K''_c \gg K_0$ , on va donc négliger le terme  $K_0$  dans l'expression (3.66).

L'hypothèse couche mince est valable aussi bien en 3D qu'en 2D. L'expression (3.70) devient :

$$K''_c = \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda} L_V} \frac{1}{\frac{\cos(\beta - \varepsilon) \cos \varepsilon}{\sqrt{A'}} - \frac{\sin(\beta - \varepsilon) \sin \varepsilon}{\sqrt{B'}}},$$

soit

$$K''_c = K_f \frac{1}{\frac{\cos(\beta - \varepsilon) \cos \varepsilon}{\sqrt{A'}} - \frac{\sin(\beta - \varepsilon) \sin \varepsilon}{\sqrt{B'}}}, \quad (3.71)$$

avec  $K_f = 2\pi/L_f$  le nombre d'onde de Fresnel et  $L_f = 2\sqrt{\lambda L_V}$  la longueur de Fresnel. La taille des tourbillons impactant le résultat 2D dépend donc des termes d'anisotropie  $A'$  et  $B'$  mais également de l'angle  $\varepsilon$  entre l'axe principal de l'ellipse et l'axe  $u$ . En posant  $\varepsilon = 0$  (cf. figure 3.4), i.e. en choisissant l'orientation de l'axe  $u$  pour qu'il corresponde à l'axe principal de l'ellipse dans l'espace des  $K$ , on obtient :

$$K''_c = K_f \frac{\sqrt{A'}}{\cos \beta}. \quad (3.72)$$

On voit que la taille des tourbillons impactant le résultat 2D ne dépend que de  $A'$ . On constate dans un premier temps que les résultats 2D (3.72) et 3D (3.42) sont équivalents si  $B' \gg 1$ , ce qui signifie, en terme de dimension des tourbillons, que ces derniers sont très allongés selon l'axe  $v'$ . Ainsi, on retrouve le résultat qualitatif énoncé par Rino [1979 (1)] : pour une équivalence 3D/2D, le plan de propagation 2D doit couper l'irrégularité ionosphérique fortement anisotrope dans sa plus petite dimension.

Dans toute autre situation, on remarque que  $K''_c(2D) \geq K''_c(3D)$ . Les fonctions de filtrage 3D et 2D agissent comme des filtres passe-haut. Or, la variance de log-amplitude correspond à l'intégrale du spectre du milieu  $S_{\Delta N_e}$  par la fonction de filtrage  $F_\chi$ , aussi bien en 3D (cf. (3.30)) qu'en 2D (cf. (3.65)). La fréquence de coupure 2D étant supérieure à la fréquence de coupure 3D, la variance de log-amplitude 2D est donc inférieure à la variance de log-amplitude 3D. Cette analyse rapide de la fonction de filtrage 2D nous permet donc de mettre en relief l'impact de la réduction dimensionnelle et prédire qualitativement, pour une forme d'anisotropie et des angles d'arrivée donnés, si un schéma 2D peut être utilisé pour modéliser les effets de la scintillation ionosphérique.

Les trois hypothèses établies dans ce paragraphe, identiques aux hypothèses déjà formulées en 3D, vont être utilisées pour obtenir l'expression asymptotique de la variance de log-amplitude 2D. Le passage au repère principal de l'ellipse  $(u', v')$  ne permet pas de résoudre totalement les intégrales mises en jeu. On reste dans le repère initial  $(u, v)$  transverse au LOS.

### 3.2.6. Expression asymptotique de la variance de log-amplitude 2D

On reprend l'expression (3.66) et on résout l'intégrale en  $K_v$  :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dK_v (AK_u^2 + BK_v^2 + 2C K_u K_v)^{-p/2} \quad (3.73)$$

On pose  $Q = 2CK_u$  et  $R = AK_u^2$ .

On obtient :

$$I = B^{-p/2} T^{1-p} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}, \quad (3.74)$$

avec  $T^2 = \frac{R}{B} - \frac{Q^2}{4B^2}$ .

La variance de log-amplitude 2D devient :

$$\begin{aligned} \langle \chi^2 \rangle^{2D} &= 2\pi\lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y A_z C_s \sqrt{\frac{\pi}{B}} \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} dK_u F_{\chi}^{2D}(K_u) \left[ \left( A - \frac{C^2}{B} \right) K_u^2 \right]^{\frac{1-p}{2}}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

On injecte la fonction de filtrage 2D (3.63) :

$$\begin{aligned} \langle \chi^2 \rangle^{2D} &= \pi\lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y A_z C_s \sqrt{\frac{\pi}{B}} \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \left( A - \frac{C^2}{B} \right)^{\frac{p-1}{2}}} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} K_u dK_u \frac{1 - \cos\left(\frac{L_V K_u}{k_0}\right)}{K_u^p}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

On pose  $X = K_u^2$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \langle \chi^2 \rangle^{2D} &= \pi\lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y A_z C_s \sqrt{\frac{\pi}{B}} \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \left( A - \frac{C^2}{B} \right)^{\frac{p-1}{2}}} \\ &\times \int_0^{+\infty} dX \frac{1 - \cos\left(\frac{L_V X}{k_0}\right)}{X^{\frac{p}{2}}}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Rappelant que  $\int_0^{+\infty} dx x^{-\mu} [1 - \cos(ax)] = -a^{\mu-1} \frac{\pi}{2\Gamma(\mu) \cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)}$ , on arrive à :

$$\langle \chi^2 \rangle^{2D} = \frac{-\pi^2 \sqrt{\pi} \lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y A_z C_s \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right) \left(\frac{L_V}{k_0}\right)^{\frac{p-1}{2}}}{2 \left[\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\right]^2 \left(A - \frac{C^2}{B}\right)^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{B} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)} \quad (3.78)$$

Les dérivations analytiques 2D originales (3.66) et (3.78), vont maintenant être comparées aux résultats numériques dérivés des simulations 2D-PWE/1D-MPS. Pour cela, comme en 3D, on reprend les paramètres d'entrée du tableau 2.4 décrivant une situation haute latitude. La figure 3.7 représente les résultats 2D, analytiques et numériques pour l'indice de scintillation  $S_4$ .

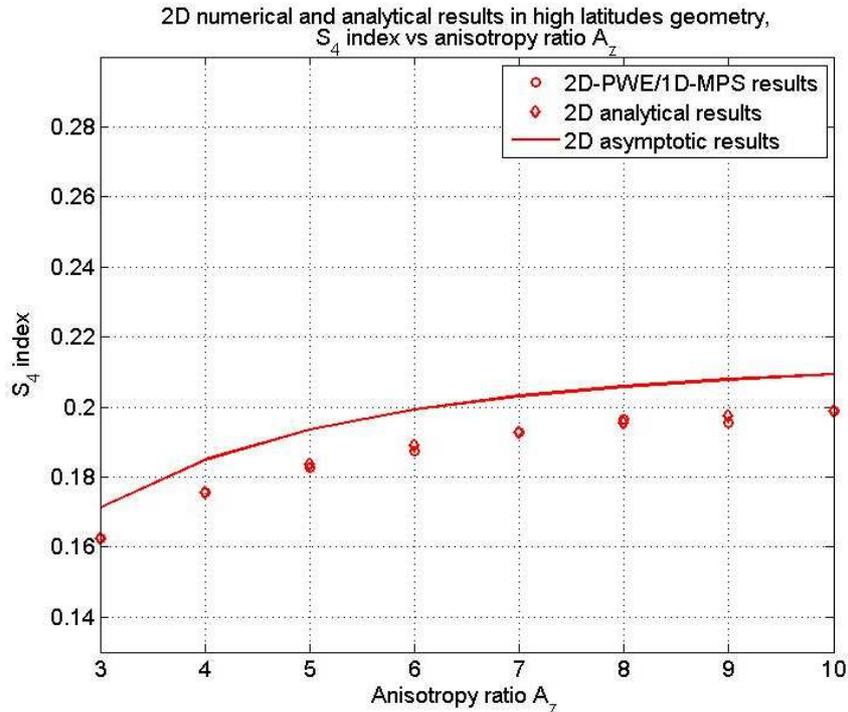


Figure 3.7 : Résultats numériques et analytiques de l'indice  $S_4$  pour une configuration 2D hautes latitudes.

Les résultats analytiques viennent bien valider les résultats numériques 2D, comme illustré dans la figure 3.7. De la même façon que pour les résultats 3D (cf. figure 3.6), les résultats asymptotiques 2D sont supérieurs de 5% aux valeurs analytiques et numériques. Les hypothèses simplificatrices (essentiellement l'hypothèse couche mince) pour les calculs asymptotiques expliquent encore une fois cette différence.

<b>Bilan des calculs de variance de log-amplitude 2D</b>
<b>Expression intégrale complète dans le repère <math>(u, v)</math> transverse au LOS :</b>
$\langle \chi^2 \rangle^{2D} = \pi \lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y A_z C_s \int_{-\infty}^{+\infty} dK_u \left[ 1 - \text{sinc} \left( \frac{R_{iono} K_u^2}{2 k_0} \right) \cos \left[ \frac{L_V K_u^2}{k_0} \left( 1 + \frac{R_{iono}}{2 L_V} \right) \right] \right]$ $\times \int_{-\infty}^{+\infty} dK_v \left( A K_u^2 + B K_v^2 + 2 C K_u K_v + \frac{K_0^2}{a^2} \right)^{-p/2} .$
<b>Expression asymptotique (couche mince) dans le repère <math>(u, v)</math> transverse au LOS :</b>
$\langle \chi^2 \rangle^{2D} = \frac{-\pi^2 \sqrt{\pi} \lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y A_z C_s \Gamma \left( \frac{p-1}{2} \right) \left( \frac{L_V}{k_0} \right)^{\frac{p}{2}-1}}{2 \left[ \Gamma \left( \frac{p}{2} \right) \right]^2 \left( A - \frac{C^2}{B} \right)^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{B} \cos \left( \frac{p\pi}{4} \right)} .$

Après avoir développé les expressions de la variance de log-amplitude en 3D,  $\langle \chi^2 \rangle^{3D}$ , et en 2D,  $\langle \chi^2 \rangle^{2D}$ , nous allons maintenant comparer ces approches en quantifiant l'erreur introduite par la réduction dimensionnelle 3D/2D sur la variance de log-amplitude pour identifier les configurations de liaison pour lesquelles l'utilisation d'un schéma réductionnel 2D est justifiée.

### 3.2.7. Rapport 3D/2D des variances de log-amplitude

D'après les expressions 3D (3.30) et 2D (3.65), en y injectant les expressions des fonctions de filtrage 3D (3.29) et 2D (3.63), le rapport  $R_\chi$  des variances de log-amplitude s'écrit :

$$R_\chi = \frac{\iint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_v S_{\Delta N_e}^{3D}(K_u, K_v, 0) \left[ 1 - \text{sinc} \left[ \frac{R_{iono}(K_u^2 + K_v^2)}{2 k_0} \right] \cos \left[ \frac{L_V (K_u^2 + K_v^2)}{k_0} \left( 1 + \frac{R_{iono}}{2 L_V} \right) \right] \right]}{\iint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_v S_{\Delta N_e}^{2D}(K_u, K_v, 0) \left[ 1 - \text{sinc} \left( \frac{R_{iono} K_u^2}{2 k_0} \right) \cos \left[ \frac{L_V K_u^2}{k_0} \left( 1 + \frac{R_{iono}}{2 L_V} \right) \right] \right]} \quad (3.79)$$

La différence entre les approches 3D et 2D tient dans la fonction de filtrage : le terme  $K_v^2$  n'apparaît pas dans la fonction 2D (3.63). Ainsi, pour que les approches 3D et 2D soient équivalentes, il faut que le terme en  $K_v$  soit négligeable devant le terme en  $K_u$ . D'après la figure 3.4, il faut donc que, dans l'espace des  $K$ , la coupe ellipsoïdale des irrégularités ionosphériques sur le plan  $(u, v)$  soit allongée selon l'axe  $u$ . Dans l'espace direct, sachant que  $l = 2\pi/K$ , c'est la plus petite dimension de l'irrégularité ionosphérique qui doit être alignée avec l'axe  $u$ .

Dans l'étude d'une liaison donnée, deux angles sont fixés par les conditions expérimentales (cf. figure 2.4) :

- L'angle  $\gamma$  entre les lignes de champ magnétique et le LOS,
- L'angle  $\psi$  entre le second axe d'anisotropie et le plan transverse  $(u, v)$ .

L'orientation des axes  $u$  et  $v$ , donc la valeur de l'angle  $\alpha$  est libre. Si l'objectif est d'utiliser un code numérique 2D pour reproduire une situation expérimentale 3D, l'angle  $\alpha$  doit être choisi de façon à ce que le plan  $(u, s)$  coupe l'irrégularité dans sa plus petite dimension. L'équivalence des résultats 3D et 2D n'est cependant assurée que si la dimension selon  $u$  est négligeable par rapport à celle selon l'axe  $v$ .

On va maintenant simplifier l'expression (3.79) pour caractériser les situations basses latitudes et hautes latitudes déjà décrites numériquement au chapitre 2. Grâce aux expressions asymptotiques des variances de log-amplitude 3D (3.47) et 2D (3.78), on obtient le rapport suivant :

$$R_\chi = \frac{\langle \chi^2 \rangle^{3D}}{\langle \chi^2 \rangle^{2D}} \quad (3.80)$$

$$R_\chi = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \left(A - \frac{C^2}{B}\right)^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{B} \int_0^{2\pi} d\beta [A' - (A' - B') \sin^2 \beta]^{-\frac{p}{2}}}{2\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}.$$

Ce rapport (3.80) dépend des angles de propagation, des ratios d'anisotropie  $A_y$  et  $A_z$  ainsi que de l'indice spectral  $p$ . Dans le cas particulier où  $p = 4$ , valeur communément

trouvée (cf. figure 1.17), le calcul de l'intégrale dans (3.80) peut être conduit analytiquement. On parvient alors au résultat suivant<sup>3</sup> :

$$R_\chi = 1 + \frac{A}{B}. \quad (3.81)$$

$A$  représente ici la dimension de l'irrégularité selon l'axe  $u$ , et  $B$  la dimension selon l'axe  $v$ . On a vu, au chapitre 2, que les modèles numériques 2D étaient fréquemment utilisés pour prédire les effets de scintillation 3D. On voit, bien, d'après l'expression simplifiée (3.81) que cette utilisation n'est justifiée que si  $A \ll B$ , donc pour des valeurs particulières des angles de propagation et des ratios d'anisotropie. Dans une situation équatoriale, telle celle décrite dans le tableau 2.3 du chapitre 2 et d'après les expressions de  $A$  et  $B$  en (2.50), le rapport (3.81) devient :

$$R_\chi = \frac{1 + A_z^2}{\sin^2 \alpha + A_z^2 \cos^2 \alpha}. \quad (3.82)$$

Pour  $A_z \gg 1$ , l'expression (3.82) varie de 1 à  $A_z^2$  lorsque l'angle  $\alpha$  varie de 0 à  $\pi/2$ . On retrouve donc bien les résultats numériques de la figure 2.11 et le fait qu'en posant  $\alpha = 0$ , un schéma 2D puisse être utilisé. En revanche, dans la situation hautes latitudes du tableau 2.4, pour une valeur quelconque de l'angle  $\gamma$ , le rapport (3.81) donne :

$$R_\chi = \frac{2 + (A_z^2 - 1) \sin^2 \gamma}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha [1 + (A_z^2 - 1) \sin^2 \gamma]}. \quad (3.83)$$

Cette fois, lorsque  $\alpha$  varie de 0 à  $\pi/2$ , le rapport (3.83) croît de  $[1 + [1 + (A_z^2 - 1) \sin^2 \gamma]^{-1}]$  à  $[2 + (A_z^2 - 1) \sin^2 \gamma]$ .

Dans la situation où  $\gamma = 0$  (le LOS est aligné avec les lignes de champ magnétique), la coupe de l'irrégularité dans le plan  $(u, v)$  forme un cercle : le rapport (3.83) est constant et vaut 2 quelle que soit la valeur de l'angle  $\alpha$ <sup>4</sup>. Pour toute autre valeur de  $\gamma$ , le rapport minimum n'est plus égal à 1 comme dans la situation des latitudes équatoriales. On retrouve donc également les résultats numériques illustrés sur la figure 2.14. On atteint

<sup>3</sup> Cf. annexe 4.

<sup>4</sup> On rappelle que cette valeur particulière de 2 est obtenue pour un indice spectral  $p = 4$ .

ainsi les limites du modèle 2D dans la représentation d'une configuration hautes latitudes et pour une morphologie ellipsoïdale des irrégularités ionosphériques.

Pour un indice spectral  $p$  quelconque, on utilise la formulation générale (3.80) avec les paramètres d'anisotropie et les angles d'arrivée  $\gamma$  et  $\psi$ . On détermine ensuite la valeur de l'angle  $\alpha$  qui rend le rapport proche de 1 pour pouvoir utiliser une modélisation 2D. Si le rapport est toujours supérieur à 1, un facteur correctif devra être appliqué sur les sorties 2D.

On a vu dans cette partie l'impact de la réduction dimensionnelle sur la variance de log-amplitude du signal  $\langle \chi^2 \rangle$  ou, de manière équivalente, sur l'indice de scintillation d'amplitude  $S_4$ . Nous allons nous intéresser maintenant à l'effet de la réduction dimensionnelle sur la variance de phase  $\langle \varphi^2 \rangle$ , ou sur l'indice de phase  $\sigma_\varphi$ .

### 3.3. Variances de phase 3D et 2D

#### 3.3.1. Variance de phase 3D

Le calcul de la variance de phase reprend les mêmes étapes que celui de la variance de log-amplitude développé dans la partie 3.2. D'après (3.6) et (3.11), la phase s'exprime comme :

$$\varphi^{3D}(\vec{R}, t) = 2k_0 r_e \lambda \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3 r \Delta N_e(\vec{r}, t) B^{3D}(\vec{R}, \vec{r}), \quad (3.84)$$

avec

$$B^{3D}(\vec{R}, \vec{r}) = \Im \left[ G^{3D}(\vec{R}, \vec{r}) \frac{E_0(\vec{r})}{E_0(\vec{R})} \right]. \quad (3.85)$$

Comme  $\langle \varphi^{3D} \rangle = 0$ , la variance de phase peut alors s'écrire :

$$\langle \varphi^2 \rangle^{3D} = (4\pi r_e)^2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3 K S_{\Delta N_e}^{3D}(\vec{K}) E^{3D}(\vec{K}) E^{3D}(-\vec{K}), \quad (3.86)$$

avec

$$E^{3D}(\vec{K}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3r B^{3D}(\vec{R}, \vec{r}) e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} p(s). \quad (3.87)$$

L'expression intégrale de la variance de phase est<sup>5</sup>:

$$\langle \varphi^2 \rangle^{3D} = 2\pi\lambda^2 r_e^2 R_{iono} \iint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_v S_{\Delta N_e}^{3D}(K_u, K_v, 0) F_\varphi^{3D}(K_u, K_v). \quad (3.88)$$

La fonction de filtrage  $F_\varphi^{3D}$  propre à la variance de phase s'exprime :

$$F_\varphi^{3D}(K_u, K_v) = \frac{1}{2} [1 + \text{sinc}(\zeta X) \cos[X(1 + \zeta)]], \quad (3.89)$$

$$F_\chi^{3D}(K_u, K_v) = 1 - F_\varphi^{3D}(K_u, K_v).$$

Les termes  $\zeta$ ,  $X$  et  $F_\chi^{3D}$  sont définis en (3.29).

A partir de la définition de la fonction de filtrage en phase (3.89) et du comportement de la fonction de filtrage en amplitude  $F_\chi^{3D}$  décrit figure 3.5, on peut étudier qualitativement le produit du spectre  $S_{\Delta N_e}^{3D}$  par  $F_\varphi^{3D}$ , dans l'équation (3.88). La fonction de filtrage est en effet égale à 1 pour des valeurs de  $K < K_f = \frac{2\pi}{L_f}$ , le nombre d'onde de Fresnel. C'est donc le spectre  $S_{\Delta N_e}^{3D}$  qui définit la taille des tourbillons contributeurs : d'après la figure 3.5, les tourbillons qui contribuent majoritairement à la variance de phase sont donc de dimension  $L_0 > L_f$ . Cette différence de comportement entre la variance de log-amplitude (étudiée en section 3.2.2) et la variance de phase vis-à-vis de la dimension caractéristique des tourbillons contributifs est analysée dans le chapitre 4, dédié à l'étude paramétrique des indices de scintillation.

En injectant l'expression du spectre des fluctuations de densité électronique (2.49) dans (3.88), l'expression analytique complète de la variance de phase 3D est donnée par :

---

<sup>5</sup> Cf. annexe 5.

$$\langle \varphi^2 \rangle^{3D} = 2\pi\lambda^2 r_e^2 a^{3-p} A_y A_z C_S R_{iono} \times \int_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_v \left( AK_u^2 + BK_v^2 + 2C K_u K_v + \frac{K_0^2}{a^2} \right)^{-p/2} - \langle \chi^2 \rangle^{3D} . \quad (3.90)$$

On résout l'intégrale (3.90) terme à terme. Le calcul analytique de la variance de phase donne<sup>6</sup>:

$$\langle \varphi^2 \rangle^{3D} = \frac{4\pi^2 \lambda^2 r_e^2 a A_y A_z C_S R_{iono} K_0^{2-p}}{(p-2)\sqrt{AB-C^2}} - \langle \chi^2 \rangle^{3D} . \quad (3.91)$$

De même que pour la variance de log-amplitude 3D, on va comparer l'expression de la variance de phase  $\langle \varphi^2 \rangle^{3D}$  (3.91) établie dans le repère du LOS à la formulation de la variance de phase établie par Rino [1979 (1)] dans le repère géomagnétique<sup>7</sup>. On trouve finalement que l'expression (3.91) et celle développée par Rino ne diffèrent que du terme  $\langle \chi^2 \rangle^{3D}$ . Toutefois, celui-ci peut être considéré comme négligeable devant le premier terme de (3.91).

Comme dans la partie précédente, nous allons comparer les sorties numériques de STIPEE aux résultats analytiques pour la variance de phase du signal. La même configuration hautes latitudes est utilisée (cf. tableau 2.4) et la figure 3.8 illustre le comparatif des approches numérique et analytique.

<sup>6</sup> Cf. annexe 5.

<sup>7</sup> Cf. annexe 3.

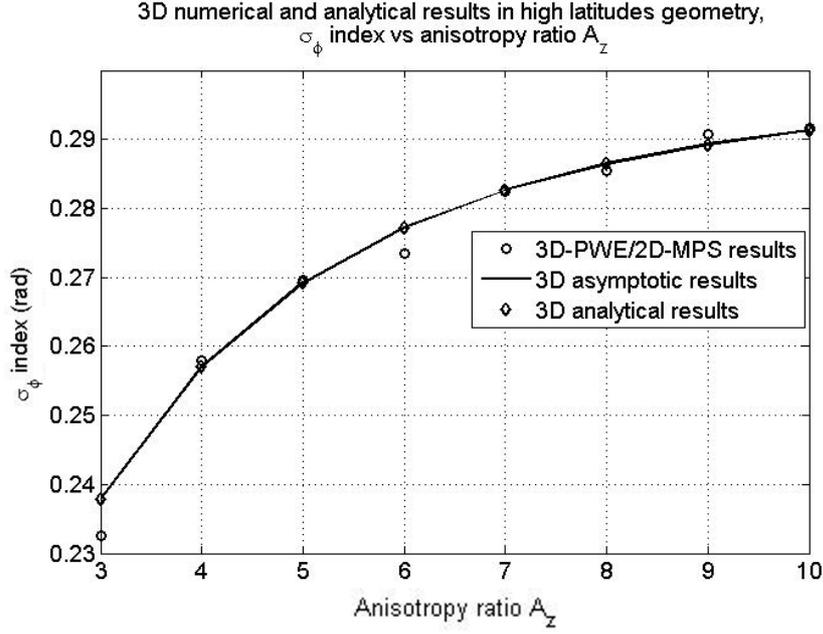


Figure 3.8 : Résultats numériques et analytiques de  $\sigma_\phi$  pour une configuration hautes latitudes.

Les résultats asymptotiques sont obtenus à partir de l'expression de la variance de phase 3D (3.91) dans laquelle l'expression  $\langle \chi^2 \rangle^{3D}$  correspond à l'expression asymptotique (3.47). Les résultats analytiques sont obtenus en remplaçant  $\langle \chi^2 \rangle^{3D}$  par la formulation (3.37). La figure 3.8 montre bien la validité du code numérique pour la détermination de la variance de phase analytique 3D. Contrairement aux résultats de log-amplitude pour lesquels les expressions asymptotiques surévaluent la valeur de  $S_4$  ou  $\langle \chi^2 \rangle^{3D}$  attendue théoriquement, on remarque que les résultats de variance de phase asymptotiques ou analytiques complets sont identiques. On peut donc en conclure que le terme  $\langle \chi^2 \rangle^{3D}$  est bien négligeable dans la formulation de la variance de phase 3D (3.91) dans le cas de cette liaison hautes latitudes.

<b>Bilan des calculs de variance de phase 3D :</b>
<b>Expression intégrale complète dans le plan <math>(u, v)</math> transverse au LOS :</b>
$\langle \varphi^2 \rangle^{3D} = 2\pi\lambda^2 r_e^2 a^{3-p} A_y A_z C_S R_{iono}$ $\times \iint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_v \left( AK_u^2 + BK_v^2 + 2C K_u K_v + \frac{K_0^2}{a^2} \right)^{-p/2} - \langle \chi^2 \rangle^{3D} .$

**Expression asymptotique (couche mince) dans le plan  $(u, v)$  transverse au LOS :**

$$\langle \varphi^2 \rangle^{3D} = \frac{4\pi^2 \lambda^2 r_e^2 a A_y A_z C_S R_{iono} K_0^{2-p}}{(p-2)\sqrt{AB-C^2}} - \langle \chi^2 \rangle^{3D}.$$

Les calculs de variance de phase sont maintenant menés en configuration 2D.

**3.3.2. Variance de phase 2D**

La variance de phase 2D  $\langle \varphi^2 \rangle^{2D}$  est donnée par :

$$\langle \varphi^2 \rangle^{2D} = (4\pi r_e)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2 r B^{2D}(\vec{R}, \vec{r}) \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2 r' B^{2D}(\vec{R}, \vec{r}') \langle \Delta N_e(\vec{r}, t) \Delta N_e(\vec{r}', t) \rangle, \quad (3.92)$$

avec 
$$B^{2D}(\vec{R}, \vec{r}) = \Im \left[ G^{2D}(\vec{R}, \vec{r}) \frac{E_0(\vec{r})}{E_0(\vec{R})} \right]. \quad (3.93)$$

La fonction de Green 2D est définie dans l'équation (3.9). La variance de phase devient :

$$\langle \varphi^2 \rangle^{2D} = (4\pi r_e)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} d^3 K S_{\Delta N_e}^{2D}(\vec{K}) E^{2D}(\vec{K}) E^{2D}(-\vec{K}), \quad (3.94)$$

avec 
$$E^{2D}(\vec{K}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2 r B^{2D}(\vec{R}, \vec{r}) e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} \varphi(s). \quad (3.95)$$

On arrive à<sup>8</sup> :

$$\langle \varphi^2 \rangle^{2D} = 2\pi \lambda^2 r_e^2 R_{iono} \iint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_v S_{\Delta N_e}^{3D}(K_u, K_v, 0) F_\varphi^{2D}(K_u). \quad (3.96)$$

La fonction de filtrage spécifique à la variance de phase  $F_\varphi^{2D}(K_u)$  est définie par :

<sup>8</sup> Cf. annexe 5.

$$F_{\varphi}^{2D}(K_u) = \frac{1}{2} [1 - \text{sinc}(\zeta X') \cos[X'(1 + \zeta)]] = 1 - F_{\chi}^{2D}(K_u), \quad (3.97)$$

Les termes  $\zeta$ ,  $X'$  et  $F_{\chi}^{2D}$  sont définis en (3.63). En injectant dans (3.96) l'expression du spectre du milieu (2.49), on arrive à l'expression intégrale :

$$\begin{aligned} \langle \varphi^2 \rangle^{2D} &= 2\pi \lambda^2 r_e^2 a^{3-p} A_y A_z C_S R_{iono} \\ &\times \iint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_v \left( AK_u^2 + BK_v^2 + 2C K_u K_v + \frac{K_0^2}{a^2} \right)^{-p/2} - \langle \chi^2 \rangle^{2D}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

La résolution de l'intégrale (3.98) donne finalement <sup>9</sup>:

$$\langle \varphi^2 \rangle^{2D} = \frac{4\pi^2 \lambda^2 r_e^2 a A_y A_z C_S R_{iono} K_0^{2-p}}{(p-2)\sqrt{AB-C^2}} - \langle \chi^2 \rangle^{2D}. \quad (3.99)$$

Les variances de phase 2D (3.99) et 3D (3.91) ne diffèrent donc que par le terme de variance de log-amplitude, respectivement 2D et 3D. De la même manière que pour le calcul 3D, on peut, au premier ordre, négliger le terme  $\langle \chi^2 \rangle^{2D}$  dans le calcul de la variance de phase (3.99). En 2D, comme en 3D, la taille des tourbillons qui contribuent majoritairement à  $\langle \varphi^2 \rangle^{2D}$  correspond à l'échelle externe  $L_0$ .

L'expression originale (3.99) va être comparée avec les résultats du modèle numérique 2D-PWE/1D-MPS : la figure 3.9 illustre ces comparaisons.

---

<sup>9</sup> Cf. annexe 8.

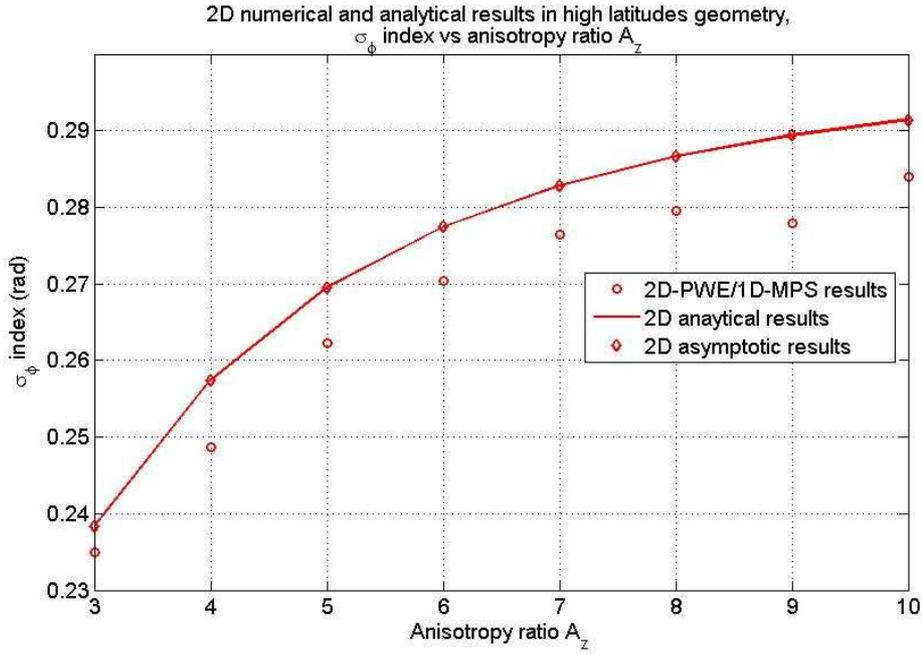


Figure 3.9 : Résultats numériques et analytiques de l'indice  $\sigma_\phi$  pour une configuration 2D hautes latitudes en fonction du ratio d'anisotropie  $A_z$ .

D'après la figure 3.9, les résultats analytiques viennent bien valider les sorties numériques 2D pour l'indice de phase. On constate une légère surestimation (environ 3%) des résultats analytiques par rapport aux résultats numériques, écart probablement lié à l'approche Monte-Carlo conduite dans le schéma 2D-PWE/1D-MPS.

<b>Bilan des calculs de variance de phase 2D :</b>
<b>Expression intégrale complète dans le plan <math>(u, v)</math> transverse au LOS :</b>
$\langle \varphi^2 \rangle^{2D} = 2\pi\lambda^2 r_e^2 a^{3-p} A_y A_z C_S R_{iono}$ $\times \iint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_v \left( AK_u^2 + BK_v^2 + 2C K_u K_v + \frac{K_0^2}{a^2} \right)^{-p/2} - \langle \chi^2 \rangle^{2D} .$
<b>Expression asymptotique (couche mince) dans le plan <math>(u, v)</math> transverse au LOS :</b>
$\langle \varphi^2 \rangle^{2D} = \frac{4\pi^2 \lambda^2 r_e^2 a A_y A_z C_S R_{iono} K_0^{2-p}}{(p-2)\sqrt{AB-C^2}} - \langle \chi^2 \rangle^{2D} .$

D'après le chapitre 2, dans les situations aux latitudes équatoriales et aux latitudes polaires traitées, on a constaté numériquement que le rapport des variances de phase 3D et 2D restait relativement proche de 1 (cf. figures 2.11 et 2.15). Cependant, il convient, pour traiter toutes les situations possibles, de quantifier également l'erreur due à la réduction dimensionnelle sur l'indice de phase et connaître son comportement en fonction des paramètres d'entrée. C'est l'objet de la section suivante.

### 3.3.3. Rapport 3D/2D des variances de phase

Le rapport des expressions des variances de phase 3D (3.91) et 2D (3.99) donne :

$$R_\varphi = \frac{\langle \varphi^2 \rangle^{3D}}{\langle \varphi^2 \rangle^{2D}} = \frac{\frac{4\pi^2 \lambda^2 r_e^2 a A_y A_z C_S R_{iono} K_0^{2-p}}{(p-2)\sqrt{AB-C^2}} - \langle \chi^2 \rangle^{3D}}{\frac{4\pi^2 \lambda^2 r_e^2 a A_y A_z C_S R_{iono} K_0^{2-p}}{(p-2)\sqrt{AB-C^2}} - \langle \chi^2 \rangle^{2D}}, \quad (3.100)$$

soit 
$$R_\varphi = \frac{\Phi - R_\chi}{\Phi - 1}, \quad (3.101)$$

avec 
$$\Phi = \frac{4\pi^2 \lambda^2 r_e^2 a A_y A_z C_S R_{iono} K_0^{2-p}}{(p-2)\sqrt{AB-C^2} \langle \chi^2 \rangle^{2D}},$$

$$\Phi = \frac{-8 \left[ \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \right]^2 \left( A - \frac{C^2}{B} \right)^{\frac{p-2}{2}} a^{p-2} K_0^{2-p} \cos \frac{p\pi}{4} \left( \frac{L_V}{k_0} \right)^{1-\frac{p}{2}}}{\sqrt{\pi} (p-2) \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}. \quad (3.102)$$

Lorsque le rapport des variances de log-amplitudes  $R_\chi$  (3.80) tend vers 1, le rapport des variances de phase (3.101) tend également vers 1. On retrouve donc les résultats numériques de la figure 2.11 pour l'angle  $\alpha = 0$ . Le comportement du rapport des variances de phase (3.101) est plus complexe à étudier pour d'autres valeurs du rapport  $R_\chi$ , du fait de l'influence du terme  $\Phi$  (3.102). Outre le fait que les angles d'arrivée  $\gamma$ ,  $\psi$  et  $\alpha$ , et les paramètres d'anisotropie  $A_y$  et  $A_z$  influent sur  $R_\varphi$ , on voit que celui-ci dépend également de l'échelle externe des irrégularités  $L_0$  (cf. expression (1.25)), de la

fréquence  $f$  du signal ainsi que de la distance  $L_V$  entre le récepteur terrestre et la couche ionosphérique. Le terme  $\Phi$  (3.102) s'écrit :

$$\Phi = \frac{-8 \left[ \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \right]^2 \left( A - \frac{C^2}{B} \right)^{\frac{p-2}{2}} a^{p-2} (2\pi)^{\frac{2-p}{2}} \cos \frac{p\pi}{4} \left( \frac{\lambda L_V}{L_0^2} \right)^{1-\frac{p}{2}}}{\sqrt{\pi} (p-2) \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)} \quad (3.103)$$

L'échelle externe  $L_0$  étant grande devant la longueur de Fresnel  $L_f = 2\sqrt{\lambda L_V}$  et sachant que  $p > 3$ , on a  $\left( \frac{\lambda L_V}{L_0^2} \right)^{1-\frac{p}{2}} \gg 1$ . Selon la valeur du terme  $\left( A - \frac{C^2}{B} \right)$ , plusieurs cas de figure peuvent se présenter. Si  $\left( A - \frac{C^2}{B} \right) \geq 1$ , on obtient donc  $\Phi \gg 1$ . Le rapport des variances de phase (3.101) est donc inférieur ou égal à 1 et peut s'écrire :

$$R_\varphi = 1 - \frac{R_\chi}{\Phi} \quad (3.104)$$

Ainsi, si  $R_\chi$  est proche de 1, on peut conclure que la variance de phase  $\langle \varphi^2 \rangle$  est peu impactée par la réduction dimensionnelle quelle que soit la situation expérimentale.

Si  $0 < \left( A - \frac{C^2}{B} \right) < 1$ , il est plus difficile de conclure sur le rapport des variances de phase  $R_\varphi$ . Cependant, si l'objectif est de déterminer les paramètres qui rendent le rapport des variances de log-amplitude  $R_\chi$  le plus proche de 1, dans cette situation, le rapport des variances de phase  $R_\varphi$  (3.101) tend également vers 1.

Ces deux études des variances de log-amplitude et de phase en 3D et 2D ont permis de quantifier l'impact de la réduction dimensionnelle sur les indices de scintillation d'amplitude et de phase. Les expressions des spectres fréquentiels de log-amplitude vont maintenant être dérivées. Ces dérivations vont nous permettre de retrouver analytiquement les résultats numériques de la figure 2.16 (a) et (b).

### 3.4. Spectres de log-amplitude 3D et 2D

#### 3.4.1. Expression intégrale du spectre de log-amplitude 3D

Le spectre fréquentiel de la log-amplitude au niveau du récepteur est la transformée de Fourier de la fonction de covariance temporelle de la log-amplitude du signal au même point :

$$W_{\chi}^{3D}(\omega) = \int_0^{+\infty} d\tau \langle \chi(\vec{R}, t) \chi(\vec{R}, t + \tau) \rangle^{3D} e^{-i\omega\tau}. \quad (3.105)$$

D'après (3.15), on peut exprimer la covariance de la log-amplitude en fonction de la covariance de densité électronique  $\Delta N_e$  :

$$\begin{aligned} \langle \chi(\vec{R}, t) \chi(\vec{R}, t + \tau) \rangle^{3D} &= (4\pi r_e)^2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3r A^{3D}(\vec{R}, \vec{r}) \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3r' A^{3D}(\vec{R}, \vec{r}') \\ &\times \langle \Delta N_e(\vec{r}, t) \Delta N_e(\vec{r}', t + \tau) \rangle. \end{aligned} \quad (3.106)$$

On considère l'hypothèse de Taylor selon laquelle le milieu est gelé et advecté d'une vitesse  $\vec{V}$  de sorte que  $\Delta N_e(\vec{r}', t + \tau) = \Delta N_e(\vec{r}' + \vec{V}\tau, t)$ . D'après (3.17) et (3.18), on a :

$$\langle \chi(\vec{R}, t) \chi(\vec{R}, t + \tau) \rangle^{3D} = (4\pi r_e)^2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3K S_{\Delta N_e}^{3D}(\vec{K}) e^{i\vec{K} \cdot \vec{V}\tau} D^{3D}(\vec{K}) D^{3D}(-\vec{K}). \quad (3.107)$$

On peut reprendre les mêmes étapes de calcul que pour les dérivations de la variance de log-amplitude 3D (cf. section 3.2.1). L'expression (3.107) devient :

$$\begin{aligned}
 \langle \chi(\vec{R}, t) \chi(\vec{R}, t + \tau) \rangle^{3D} &= 2\pi\lambda^2 r_e^2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3K S_{\Delta N_e}^{3D}(K_u, K_v, K_s) e^{i\vec{K} \cdot \vec{V}\tau} \delta(K_s) \\
 &\times \int_{L_V}^{L_V + R_{iono}} ds \sin^2\left(\frac{s(K_u^2 + K_v^2)}{2k_0}\right).
 \end{aligned} \tag{3.108}$$

Le vecteur vitesse  $\vec{V}$  est défini par ses coordonnées selon les trois axes  $u$ ,  $v$  et  $s$  :  $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_u \\ V_v \\ V_s \end{pmatrix}$ . L'expression de la covariance de log-amplitude (3.108) devient :

$$\begin{aligned}
 \langle \chi(\vec{R}, t) \chi(\vec{R}, t + \tau) \rangle^{3D} &= 2\pi\lambda^2 r_e^2 R_{iono} \iint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_v S_{\Delta N_e}^{3D}(K_u, K_v, 0) \\
 &\times e^{i(K_u V_u \tau + K_v V_v \tau)} F_{\chi}^{3D}(K_u, K_v).
 \end{aligned} \tag{3.109}$$

En réinjectant cette expression (3.109) dans l'expression du spectre fréquentiel de log-amplitude (3.105), celui-ci s'écrit :

$$\begin{aligned}
 W_{\chi}^{3D}(\omega) &= 2\pi\lambda^2 r_e^2 R_{iono} \iint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_v S_{\Delta N_e}^{3D}(K_u, K_v, 0) F_{\chi}^{3D}(K_u, K_v) \\
 &\times \int_0^{+\infty} d\tau e^{i\tau(K_u V_u + K_v V_v - \omega)}.
 \end{aligned} \tag{3.110}$$

Par définition de la fonction Dirac, l'intégrale en  $\tau$  de (3.110) peut s'écrire :

$$\int_0^{+\infty} d\tau e^{i\tau(K_u V_u + K_v V_v - \omega)} = 2\pi \delta(K_u V_u + K_v V_v - \omega). \tag{3.111}$$

On pose  $X = K_u V_u + K_v V_v - \omega$  et on exprime  $K_v$  en fonction de  $K_u$  et  $X$  :  $K_v = \frac{X + \omega - K_u V_u}{V_v}$ .

La différentielle de  $X$  est calculée en considérant  $K_u$  et  $\omega$  constants<sup>10</sup> :  $dX = V_v dK_v$ . Le spectre devient :

$$W_\chi^{3D}(\omega) = \frac{4\pi^2 \lambda^2 r_e^2 R_{iono}}{V_v} \times \int_{-\infty}^{+\infty} dK_u dX S_{\Delta N_e}^{3D} \left( K_u, \frac{X + \omega - K_u V_u}{V_v}, 0 \right) F_\chi^{3D} \left( K_u, \frac{X + \omega - K_u V_u}{V_v} \right) \delta(X). \quad (3.112)$$

Par définition de la fonction de Dirac, (3.112) devient :

$$W_\chi^{3D}(\omega) = \frac{4\pi^2 \lambda^2 r_e^2 R_{iono}}{V_v} \int_{-\infty}^{+\infty} dK_u S_{\Delta N_e}^{3D} \left( K_u, \frac{\omega - K_u V_u}{V_v}, 0 \right) F_\chi^{3D} \left( K_u, \frac{\omega - K_u V_u}{V_v} \right), \quad (3.113)$$

soit, en injectant l'expression de la fonction de filtrage  $F_\chi^{3D}$  (3.29) et celle du spectre des fluctuations électroniques  $S_{\Delta N_e}^{3D}$  (2.49) :

$$W_\chi^{3D}(\omega) = \frac{2\pi^2 \lambda^2 r_e^2 a^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono}}{V_v} \times \int_{-\infty}^{+\infty} dK_u \left[ AK_u^2 + B \left( \frac{\omega - K_u V_u}{V_v} \right)^2 + 2CK_u \left( \frac{\omega - K_u V_u}{V_v} \right) + \frac{K_0^2}{a^2} \right]^{-\frac{p}{2}} \times \left[ 1 - \text{sinc} \left[ \frac{\left[ K_u^2 + \left( \frac{\omega - K_u V_u}{V_v} \right)^2 \right] R_{iono}}{2k_0} \right] \right] \times \cos \left[ \frac{L_V \left[ K_u^2 + \left( \frac{\omega - K_u V_u}{V_v} \right)^2 \right]}{k_0} \left( 1 + \frac{R_{iono}}{2L_V} \right) \right]. \quad (3.114)$$

<sup>10</sup> On peut mener le même raisonnement en exprimant cette fois  $K_u$  en fonction de  $K_v$  et en considérant  $K_v$  constant. Les résultats sur les spectres sont les mêmes.

La résolution de l'intégrale (3.114) est encore une fois rendue complexe par la fonction de filtrage  $F_{\chi}^{3D}$  et la présence du nombre d'onde  $K_0$ . On va donc déterminer les expressions asymptotiques du spectre fréquentiel lorsque  $\omega \rightarrow 0$  et  $\omega \rightarrow +\infty$ . On va ainsi distinguer les comportements hautes fréquences (HF) et basses fréquences (BF) du spectre de log-amplitude.

### 3.4.2. Expressions asymptotiques du spectre de log-amplitude 3D

Les calculs donnent<sup>11</sup> :

$$W_{\chi}^{3D}(\omega \rightarrow 0) = \frac{-\pi^3 \lambda^2 r_e^2 a^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono} V_r^{p-1}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \cos\left(\frac{p+1}{4}\pi\right) (AV_v^2 + BV_u^2 - 2CV_uV_v)^{p/2}} \left(\frac{L_V}{k_0}\right)^{\frac{p-1}{2}}, \quad (3.115)$$

$$W_{\chi}^{3D}(\omega \rightarrow +\infty) = \frac{2\pi^2 \sqrt{\pi} \lambda^2 r_e^2 a^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono} \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{(AV_v^2 + BV_u^2 - 2CV_uV_v)^{1-p/2} (AB - C^2)^{\frac{p-1}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \omega^{1-p}, \quad (3.116)$$

où  $V_r = \sqrt{V_u^2 + V_v^2}$  est la composante de la vitesse de drift perpendiculaire au LOS, dans le plan  $(u, v)$ .

On trouve dans [Crane, 1976] l'expression analytique du spectre fréquentiel de la log-amplitude, dans l'hypothèse d'**un seul axe d'anisotropie** selon le champ magnétique terrestre. Dans [Yeh & Liu, 1982], l'expression analytique du spectre de log-amplitude ainsi que les expressions asymptotiques sont dérivées dans l'hypothèse d'une **irrégularité ionosphérique isotrope**. Les formulations originales (3.114), (3.115) et (3.116), avec la prise en compte de trois axes d'anisotropie et en travaillant dans le repère du LOS, vont donc être comparées avec les sorties numériques du code STIPEE.

La figure 3.10 donne la représentation des résultats numériques (cf. figure 2.16 (a)), du spectre théorique (3.114) ainsi que des asymptotes BF (3.115) et HF (3.116). Les paramètres d'entrée hautes latitudes sont repris du tableau 2.4.

<sup>11</sup> Cf. annexe 6.

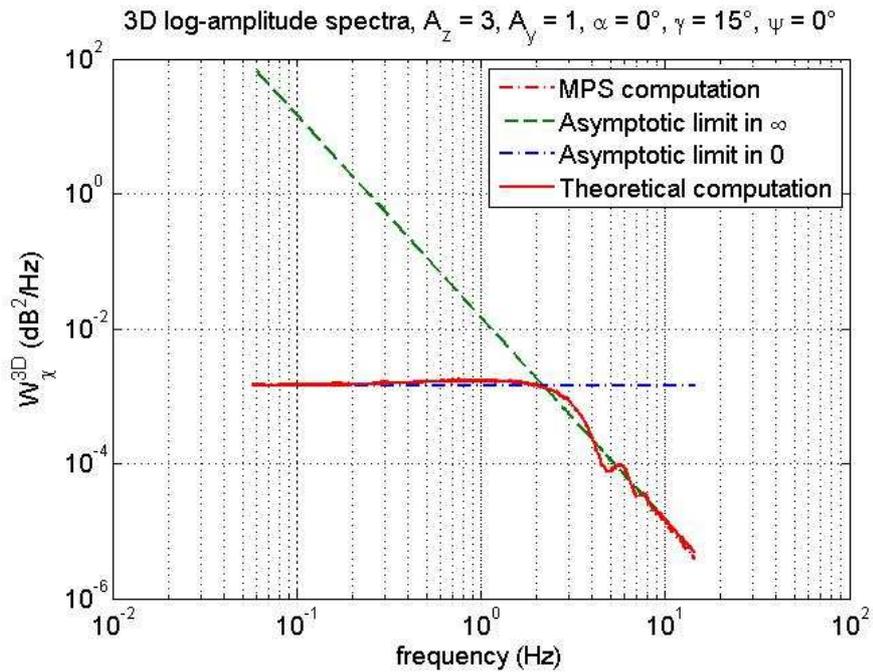


Figure 3.10 : Spectres de log-amplitude 3D analytiques et numérique.

Les résultats de la figure 3.10 montrent bien la correspondance entre les spectres calculés théoriquement et ceux déterminés numériquement. Les dérivations asymptotiques (3.115) et (3.116), du fait de leur facilité d'utilisation par rapport à la formulation générale (3.114), peuvent être utiles à l'exploitation de données expérimentales et permettre une éventuelle inversion des données pour remonter aux paramètres du milieu ionosphérique. Ce point est discuté dans le chapitre 4.

Après avoir détaillé les calculs et expressions spectrales de la log-amplitude en configuration 3D, le même raisonnement va être suivi en 2D.

### 3.4.3. Expression analytique du spectre de log-amplitude 2D

Pour déterminer son expression analytique, on reprend la démarche développée dans la configuration 3D. Comme pour la configuration 3D, le spectre fréquentiel de log-amplitude 2D est donné par la transformée de Fourier de la covariance 2D de la log-amplitude du signal :

$$W_{\chi}^{2D}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \langle \chi(\vec{R}, t) \chi(\vec{R}, t + \tau) \rangle^{2D} e^{-i\omega\tau}, \quad (3.117)$$

avec

$$\begin{aligned} \langle \chi(\vec{R}, t) \chi(\vec{R}, t + \tau) \rangle^{2D} &= (4\pi r_e)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2r A^{2D}(\vec{R}, \vec{r}) \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2r' A^{2D}(\vec{R}, \vec{r}') \\ &\times \langle \Delta N_e(\vec{R}, t) \Delta N_e(\vec{R}, t + \tau) \rangle^{2D}, \end{aligned} \quad (3.118)$$

où  $A^{2D}(\vec{R}, \vec{r}) = \Re \left[ G^{2D}(\vec{R}, \vec{r}) \frac{E_0(\vec{r})}{E_0(\vec{R})} \right]$  et la fonction de Green 2D est définie dans (3.9). On travaille également sous l'hypothèse de Taylor. La vitesse d'advection  $\vec{V}$  du milieu gelé est cette fois définie sur 2 dimensions, telle que  $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_u \\ V_s \end{pmatrix}$ , et on obtient :

$$\langle \Delta N_e(\vec{R}, t) \Delta N_e(\vec{R}, t + \tau) \rangle^{2D} = \langle \Delta N_e(\vec{R}, t) \Delta N_e(\vec{R} + \vec{V}\tau, t) \rangle^{2D},$$

soit

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} d^2K S_{\Delta N_e}^{2D}(K_u, K_s) e^{i\vec{K} \cdot (\vec{r}' - \vec{r} + \vec{V}\tau)} D^{2D}(-\vec{K}) D^{2D}(\vec{K}). \quad (3.119)$$

En utilisant l'équation (2.73) reliant les spectres 2D et 3D de fluctuation de densité électronique, la résolution de l'expression (3.119) donne la formulation analytique suivante <sup>12</sup>:

$$W_{\chi}^{2D}(\omega) = \frac{4\pi^2 \lambda^2 r_e^2 R_{iono}}{V_u} F_{\chi}^{2D} \left( \frac{\omega}{V_u} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} dK_v S_{\Delta N_e}^{3D} \left( \frac{\omega}{V_u}, K_v, 0 \right), \quad (3.120)$$

où la fonction de filtrage  $F_{\chi}^{2D}$  est définie par (3.63). On utilise ensuite l'expression du spectre 3D (2.49) et on obtient la formulation analytique 2D :

<sup>12</sup> Cf. annexe 6.

$$W_{\chi}^{2D}(\omega) = \frac{4\pi^2 \sqrt{\pi} \lambda^2 r_e^2 a_x^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono} \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{V_u \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} B^{\frac{p}{2}-1} \quad (3.121)$$

$$\times \left[ \left( A \frac{\omega^2}{V_u^2} + \frac{K_0^2}{a^2} \right) B - C^2 \frac{\omega^2}{V_u^2} \right]^{\frac{1-p}{2}} \left[ 1 - \text{sinc}\left(\frac{\omega^2 R_{iono}}{2 V_u^2 k_0}\right) \cos\left[\frac{L_V \omega^2}{V_u^2 k_0} \left(1 + \frac{R_{iono}}{2 L_V}\right)\right] \right].$$

Contrairement au résultat 3D du spectre de log-amplitude (3.114), l'expression 2D (3.121) ne contient pas d'intégrale indéterminée, ce qui en facilite l'étude et l'implémentation numérique. Tout comme pour le spectre de log-amplitude 3D, on détermine également les expressions asymptotiques en 0 et  $+\infty$ .

#### 3.4.4. Expressions asymptotiques du spectre de log-amplitude 2D

On travaille dans l'hypothèse couche mince, déjà expliquée en section 3.2.2. La fonction de filtrage 2D (3.63) est également simplifiée au terme cosinus seul et on procède à un développement limité en  $\omega \rightarrow 0$  :

$$F_{\chi}^{2D}\left(\frac{\omega}{V_u}\right)_{\omega \rightarrow 0} = \frac{L_V^2 \omega^4}{4 V_u^4 k_0^2}. \quad (3.122)$$

L'expression finale du spectre aux basses fréquences devient :

$$W_{\chi}^{2D}(\omega \rightarrow 0) = \frac{\pi^2 \sqrt{\pi} \lambda^2 r_e^2 a_x^2 A_y A_z C_s R_{iono} \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right) L_V^2 K_0^{1-p}}{V_u^5 \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) k_0^2 \sqrt{B}} \omega^4. \quad (3.123)$$

D'après l'expression (3.123), la vitesse de drift selon l'axe  $u$  ne doit pas être nulle, au risque de faire diverger ce résultat. Le choix du plan de coupe est donc, encore une fois, crucial pour une modélisation correcte du milieu et de la propagation transionosphérique.

Pour  $\omega \rightarrow +\infty$ , la fonction de filtrage  $F_\chi^{2D}$  tend vers :

$$F_\chi^{2D} \left( \frac{\omega}{v_u} \right)_{\omega \rightarrow +\infty} = \frac{1}{2}. \quad (3.124)$$

L'expression du spectre aux hautes fréquences donne :

$$W_\chi^{2D}(\omega \rightarrow +\infty) = \frac{2\pi^2 \sqrt{\pi} \lambda^2 r_e^2 a^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono} \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right) B^{\frac{p}{2}-1}}{V_u^{2-p} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) (AB - C^2)^{\frac{p-1}{2}}} \omega^{1-p}. \quad (3.125)$$

On retrouve bien l'expression asymptotique HF du spectre 3D en posant  $V_v = 0$  dans l'expression (3.116). La figure 3.11 donne une représentation des spectres 2D de log-amplitude analytique et numérique. Les paramètres d'entrée, typiques d'une configuration hautes latitudes, sont toujours tirés du tableau 2.4.

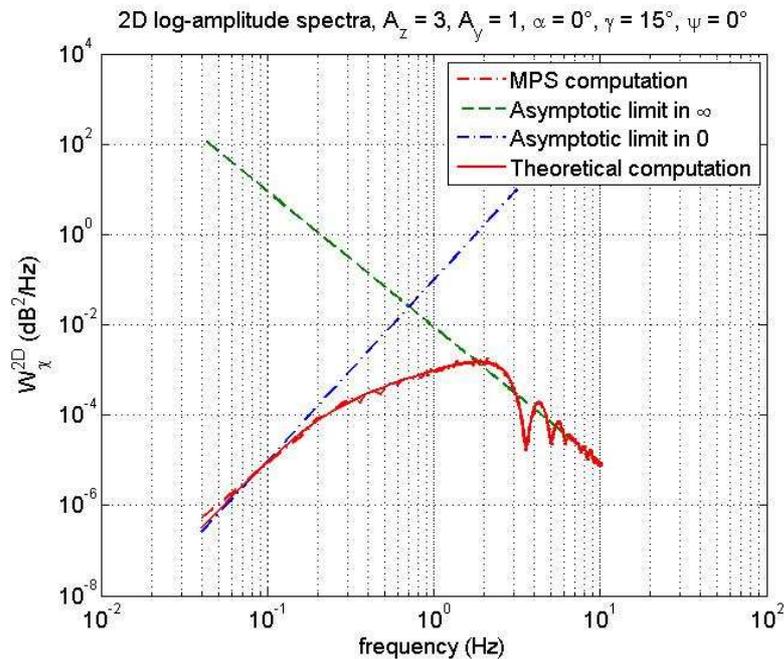


Figure 3.11 : Spectres de log-amplitude 2D analytiques et numérique.

La figure 3.11 illustre bien la validation du code numérique par les expressions analytiques (3.121) et asymptotiques (3.123) et (3.125).

En comparant les figures 3.10 et 3.11, entre 1 et 10 Hz, on remarque une différence dans la figure d'interférence des spectres analytiques 3D et 2D. Cette différence a déjà été constatée numériquement sur la figure 2.16 (a). On mesure sur la figure 3.10 (spectre 3D) une première fréquence minimale d'environ 4,5 Hz alors qu'elle est de 3,5 Hz figure 3.11 (spectre 2D). Pour une configuration donnée, ces fréquences d'extinction sont liées aux minima de la fonction de filtrage correspondante, donc liées à la coupe des tourbillons caractéristiques. D'après les études menées aux sections 3.2.2 et 3.2.5, ces minima des fonctions de filtrage sont très différents en 3D et en 2D, ce qui explique les comportements distincts des spectres de log-amplitude 3D et 2D à ces fréquences.

Les comportements asymptotiques aux hautes fréquences des spectres de log-amplitude 3D et 2D sont identiques en posant  $V_v = 0$ , c'est-à-dire en choisissant un plan de coupe  $(u, s)$  tel que l'axe  $u$  corresponde à la direction de la vitesse de drift du milieu sur le plan transverse  $(u, v)$ . Même en choisissant cette condition sur la direction du vecteur vitesse, les comportements basses fréquences restent, eux, très différents d'une configuration à l'autre.

Cependant, on remarque que, dans une situation équatoriale, décrite par le tableau 2.3, le terme  $B$  atteint sa valeur maximale, qui vaut  $A_z^2$ , rendant ainsi minimale la valeur asymptotique BF 3D (3.115). Plus le ratio  $A_z$  est élevé, plus l'asymptote basses fréquences 3D est basse. D'après la figure comparative 2.16 (a), on peut en déduire que l'intégrale du spectre de log-amplitude 3D se rapproche de la configuration 2D. On retrouve donc les résultats déjà établis pour la correspondance des variances de log-amplitude 3D et 2D, dans la partie 3.2.3.

On va maintenant dériver les expressions analytiques des spectres de phase en 3D et en 2D.

### 3.5. Spectres de phase 3D et 2D

#### 3.5.1. Expressions intégrale et asymptotiques du spectre de phase 3D

On obtient le spectre fréquentiel de la phase du signal reçu en suivant la même démarche que pour la détermination du spectre de la log-amplitude. Ainsi, l'équation (3.84) et les calculs de la variance de phase, détaillés en annexe 5, donnent :

$$W_{\varphi}^{3D}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \langle \varphi(\vec{R}, t) \varphi(\vec{R}, t + \tau) \rangle^{3D} e^{-i\omega\tau}, \quad (3.126)$$

avec

$$\langle \varphi(\vec{R}, t) \varphi(\vec{R}, t + \tau) \rangle^{3D} = (4\pi r_e)^2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3r B^{3D}(\vec{R}, \vec{r}) \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3r' B^{3D}(\vec{R}, \vec{r}') \times \langle \Delta N_e(\vec{r}, t) \Delta N_e(\vec{r}', t + \tau) \rangle. \quad (3.127)$$

$$\langle \varphi(\vec{R}, t) \varphi(\vec{R}, t + \tau) \rangle^{3D} = (4\pi r_e)^2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3K S_{\Delta N_e}^{3D}(\vec{K}) \wp(s) e^{i\vec{K} \cdot \vec{V} \tau} E^{3D}(\vec{K}) E^{3D}(-\vec{K}). \quad (3.128)$$

On arrive finalement à :

$$W_{\varphi}^{3D}(\omega) = \frac{4\pi^2 \lambda^2 r_e^2 R_{iono}}{V_v} \int_{-\infty}^{+\infty} dK_u S_{\Delta N_e}^{3D}\left(K_u, \frac{\omega - K_u V_u}{V_v}, 0\right) F_{\varphi}^{3D}\left(K_u, \frac{\omega - K_u V_u}{V_v}\right), \quad (3.129)$$

où la fonction de filtrage  $F_{\varphi}^{3D}$  est définie en (3.89). De la même façon que pour le spectre de log-amplitude, on détermine les expressions asymptotiques du spectre de phase du signal reçu pour  $\omega \rightarrow 0$  et  $\omega \rightarrow +\infty$ . On obtient finalement <sup>13</sup>:

$$W_{\varphi}^{3D}(\omega) = \frac{4\pi^2 \sqrt{\pi} \lambda^2 r_e^2 a^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono} \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \sqrt{AV_v^2 + BV_u^2 - 2CV_u V_v}} \times \left( \frac{AB - C^2}{AV_v^2 + BV_u^2 - 2CV_u V_v} + \frac{K_0^2}{a^2 \omega^2} \right)^{\frac{1-p}{2}} \omega^{1-p} - W_{\chi}^{3D}(\omega), \quad (3.130)$$

<sup>13</sup> Cf. annexe 7.

$$W_{\phi}^{3D}(\omega \rightarrow 0) = \frac{4\pi^2 \sqrt{\pi} \lambda^2 r_e^2 a^2 A_y A_z C_s K_0^{1-p} R_{iono} \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \sqrt{AV_v^2 + BV_u^2 - 2CV_u V_v}} - W_{\chi}^{3D}(0), \quad (3.131)$$

$$W_{\phi}^{3D}(\omega \rightarrow +\infty) = W_{\chi}^{3D}(\omega \rightarrow +\infty). \quad (3.132)$$

Dans [Yeh & Liu, 1982], on trouve les expressions théoriques et asymptotiques du spectre de phase, dans l'hypothèse d'une **irrégularité isotrope**. Dans cet article, Yeh & Liu [1982] ne prennent pas en compte le nombre d'onde  $K_0^2$  et l'expression de l'asymptote hautes fréquences est  $W_{\phi}^{3D}(\omega \rightarrow 0) = 2W_{\phi}^{3D}(\omega \rightarrow +\infty)$ . Crane [1976] donne également les formulations des spectres de phase, avec **un seul axe d'anisotropie**.

De même que pour les spectres de log-amplitude, les formulations originales (3.129), (3.131) et (3.132) des spectres de phase vont pouvoir être comparées aux sorties numériques de STIPEE.

La figure 3.12 donne une représentation fréquentielle des spectres de phase numérique, analytique (3.130) et asymptotiques HF (3.131) et BF (3.132). Les paramètres d'entrée de la situation hautes latitudes sont donnés dans le tableau 2.4.

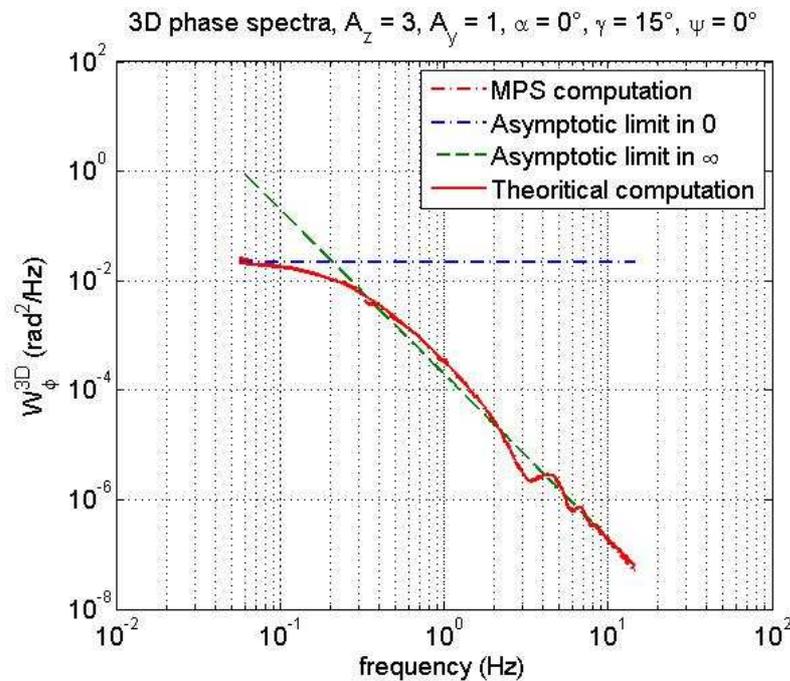


Figure 3.12 : Spectres de phase 3D analytiques et numérique.

D'après la figure 3.12, les expressions analytiques 3D du spectre de phase 3D viennent bien valider les résultats numériques 3D. L'asymptote hautes fréquences rend davantage compte du comportement général du spectre de phase que l'asymptote basses fréquences.

On va maintenant s'intéresser aux dérivations des spectres analytiques de phase en configuration 2D.

### 3.5.2. Expressions analytiques et asymptotiques du spectre de phase 2D

Le spectre fréquentiel de phase 2D est défini à partir de la transformée de Fourier de la covariance de phase :

$$W_{\varphi}^{2D}(\omega) = \int_0^{+\infty} d\tau \langle \varphi(\vec{R}, t) \varphi(\vec{R}, t + \tau) \rangle^{2D} e^{-i\omega\tau}. \quad (3.133)$$

La covariance de phase peut être écrite en fonction du spectre de fluctuations de densité électronique, en utilisant de nouveau l'hypothèse de Taylor. L'expression analytique du spectre de phase 2D devient <sup>14</sup>:

$$W_{\varphi}^{2D}(\omega) = \frac{4\pi^2 \lambda^2 r_e^2 R_{iono}}{V_u} F_{\varphi}^{2D} \left( \frac{\omega}{V_u} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} dK_v S_{\chi}^{3D} \left( \frac{\omega}{V_u}, K_v, 0 \right). \quad (3.134)$$

La fonction de filtrage de phase 2D est définie par (3.96). De même que pour le spectre de log-amplitude 2D, on injecte la formule du spectre des fluctuations de concentration électronique dans (3.134) ce qui donne l'expression analytique suivante <sup>15</sup>:

---

<sup>14,15</sup> Cf. annexe 7.

$$W_{\phi}^{2D}(\omega) = \frac{4\pi^2 \sqrt{\pi} \lambda^2 r_e^2 a^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono} \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{V_u \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} B^{\frac{p}{2}-1} \times \left[ \left( A \frac{\omega^2}{V_u^2} + \frac{K_0^2}{a^2} \right) B - C^2 \frac{\omega^2}{V_u^2} \right]^{\frac{1-p}{2}} - W_{\chi}^{2D}(\omega). \quad (3.135)$$

On détermine les expressions asymptotiques aux hautes et basses fréquences :

$$W_{\phi}^{2D}(\omega \rightarrow 0) = \frac{4\pi^2 \sqrt{\pi} \lambda^2 r_e^2 a^2 A_y A_z C_s K_0^{1-p} R_{iono} \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{V_u \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \sqrt{B}} - W_{\chi}^{2D}(0). \quad (3.136)$$

$$W_{\phi}^{2D}(\omega \rightarrow +\infty) = W_{\chi}^{2D}(\omega \rightarrow +\infty). \quad (3.137)$$

La figure 3.13 représente les spectres de phase analytique et asymptotiques 2D.

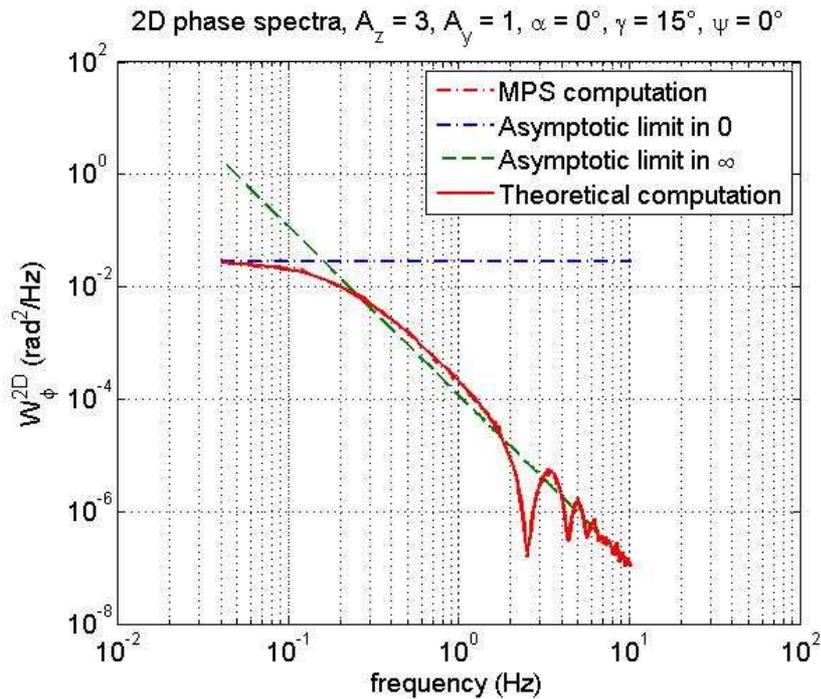


Figure 3.13 : Spectres de phase 2D analytiques et numériques.

D'après cette figure 3.13, les résultats donnés par le code numérique et ceux des expressions analytiques correspondent parfaitement.

La figure d'interférence, observée sur les figures 3.12 et 3.13 entre 1 et 10 Hz est très différente d'une configuration à l'autre. Cela est dû à la différence entre les fonctions de filtrage 3D et 2D comme on l'a montré précédemment avec l'étude des spectres de log-amplitude 3D et 2D (cf. 3.4.4).

Le comportement asymptotique hautes fréquences est identique dans les configurations 3D et 2D. En effet, on retrouve les mêmes expressions en phase et en log-amplitude ((3.132) et (3.137)), et on a déjà montré que les expressions asymptotiques HF des spectres de log-amplitude 3D (3.116) et 2D (3.125) étaient égales, lorsque  $V_p = 0$ .

De même, les expressions asymptotiques basses fréquences sont relativement proches en 3D (3.131) et en 2D (3.136), dès lors que  $V_p = 0$ . Comme illustré par les figures 3.12 et 3.13, les spectres de phase 3D et 2D donnent en effet sensiblement les mêmes résultats. Cela est dû au fait que l'on peut négliger, dans les expressions (3.131) et (3.136), le terme asymptotique basses fréquences du spectre de log-amplitude devant le premier terme.

### 3.6. Conclusion

En conclusion de ce troisième chapitre, les dérivations analytiques ont été menées, aussi bien en 3D qu'en 2D, dans le repère du LOS. Les résultats 3D des variances et des spectres de log-amplitude et de phase, dérivées dans ce repère, ont été validés par les formulations déjà existantes dans la littérature, dérivées dans le repère géomagnétique, et les sorties du code numérique STIPEE 3D-PWE/2D-MPS. Les expressions 2D, quant à elles, sont tout à fait nouvelles et ont donc été validées par comparaison aux résultats numériques 2D-PWE/1D-MPS. On avait montré, dans le chapitre 2, que les sorties des modèles numériques de propagation transionosphérique 3D-PWE/2D-MPS et 2D-PWE/1D-MPS étaient différentes pour certaines configurations de liaison GNSS, notamment aux hautes latitudes, tout du moins pour les résultats de log-amplitude. Les dérivations conduites dans ce chapitre permettent maintenant de quantifier analytiquement les erreurs potentiellement introduites par un schéma réductionnel 2D. Elles permettent notamment de choisir le plan de coupe adéquat qui rend l'utilisation d'un modèle 2D équivalent à un modèle 3D. En particulier, en conduisant les dérivations

analytiques dans le repère du LOS, il a alors été montré que l'intensité des scintillations ionosphériques s'explique par la géométrie des irrégularités dans le plan transverse au LOS. Si la différence des résultats 3D/2D reste importante, par exemple en cas d'isotropie sur le plan de coupe transverse  $(u, v)$ , on dispose maintenant des facteurs correctifs pour obtenir les indices de scintillation d'amplitude et de phase 3D à partir des sorties numériques 2D.

Une question mérite ici d'être soulevée : pourquoi ne pas utiliser directement les expressions analytiques 3D plutôt que de corriger les sorties numériques d'un modèle 2D ? Trois justifications à l'utilisation d'un modèle numérique 2D peuvent être données. Tout d'abord, on a montré que les résultats 2D pouvaient être équivalents aux résultats 3D si les conditions justifiant la réduction dimensionnelle sont vérifiées. Connaissant le rapport 3D/2D des variances de log-amplitude (3.80), on peut donc choisir l'angle de coupe  $\alpha$  de façon à pouvoir utiliser un modèle numérique 2D sans avoir à pondérer les résultats par un facteur correctif. Le second point est que les dérivations menées dans ce chapitre ne sont valables que dans un régime de faibles perturbations. Ce n'est pas le cas d'un modèle numérique qui peut s'adapter à une situation de fortes perturbations (strong scattering). Enfin, un autre intérêt de travailler avec des modèles numériques est que les sorties d'amplitude et de phase sont corrélées. Pour une situation donnée, on peut ainsi générer des séries temporelles 2D, en amplitude et en phase, et les corriger, si nécessaire, grâce aux expressions analytiques spectrales 3D.

Ce chapitre permet donc de clore la modélisation 3D/2D, analytique/numérique de la scintillation ionosphérique, i.e. du problème électromagnétique direct. Toutefois, les expressions analytiques sont complexes : une analyse de sensibilité aux divers paramètres d'entrée est nécessaire. Celle-ci est conduite dans le chapitre 4, où une étude préliminaire de données expérimentales est également proposée pour poser les bases d'un problème inverse.



## **Chapitre 4 : Etude de sensibilité des variances et spectres de log-amplitude et de phase ; application au traitement préliminaire de données hautes latitudes**

---

Le travail mené dans les chapitres 2 et 3 nous a permis, d'une part, de valider le modèle numérique STIPEE par les expressions analytiques et, d'autre part, de quantifier l'erreur existant entre les résultats des configurations 2D et 3D, quels que soient les angles d'arrivée du signal dans la couche turbulente et la morphologie des irrégularités ionosphériques considérées. La confrontation aux mesures réelles est la dernière étape pour tester la validité du modèle construit durant cette thèse. L'investissement en temps pour un travail d'analyse complet étant trop important, seul un traitement préliminaire des données est présenté dans ce chapitre.

Afin de faciliter ce travail de traitement des données expérimentales, l'étape préparatoire a consisté à étudier théoriquement l'influence des paramètres du milieu et de la liaison sur les grandeurs mesurées. Les paramètres d'anisotropie, la variance des fluctuations de concentration électronique, la dimension caractéristique des irrégularités sont autant de variables dont l'importance dans l'estimation des indices de scintillation se doit d'être établie. Une étude de sensibilité des variances de log-

amplitude et de phase à ces différents paramètres d'entrée est donc menée dans la première partie de ce chapitre, pour caractériser au mieux l'influence de chacun.

Cependant, il est difficile d'inverser la valeur de ces paramètres uniquement à partir des variances. La deuxième partie est alors dédiée à l'étude des spectres analytiques de log-amplitude et de phase. En effet, contrairement aux expressions uniques des indices de scintillation de phase et d'amplitude, on dispose ici des expressions asymptotiques hautes et basses fréquences, ainsi que de la fréquence de coupure, correspondant à l'intersection de deux asymptotes du spectre de log-amplitude.

Cette étude de sensibilité est suivie d'un travail préliminaire de comparaison des spectres analytiques 3D avec des spectres issus de mesures expérimentales hautes latitudes. La troisième partie de ce chapitre commence avec la présentation du réseau de scintillateurs localisés en Norvège. Le traitement des données et les pistes pour un travail d'inversion sont ensuite développés. Une seconde étude est menée sur un événement de scintillation observé depuis le réseau de scintillateurs du Canadian High Arctic Ionospheric Network (CHAIN). Ces premiers résultats comparatifs entre le modèle numérique et les mesures expérimentales ouvrent ainsi les futurs axes de recherche qui suivront cette thèse.

#### 4.1. Étude paramétrique des variances de phase et de log-amplitude

Dans le chapitre 3, les dérivations analytiques ont validé les sorties du modèle numérique. Comme précisé dans l'introduction, les expressions asymptotiques 3D des variances de phase (3.90) et de log-amplitude (3.47) dépendent de nombreux paramètres<sup>1</sup>. L'objectif de cette première partie est d'étudier la sensibilité de ces variances, donc des indices de scintillation associés, aux différents paramètres d'entrée. Cette étude va porter aussi bien sur les paramètres propres au milieu ionosphérique que sur les caractéristiques géométriques et radioélectriques de la liaison. Le tableau 4.1 liste les paramètres qui feront l'objet de cette étude.

<b>Paramètres caractéristiques du milieu ionosphérique</b>	Echelle externe $L_0$
	Ratios d'anisotropie $A_y$ et $A_z$
	Variance de fluctuation de concentration électronique $\sigma_{\Delta N_e}^2$
	Altitude $H$ et épaisseur $\Delta H$ de la couche ionosphérique
	Indice spectral $p$
<b>Paramètres caractéristiques de la liaison</b>	Fréquence du signal $f$
	Angles de propagation $\vartheta, \gamma, \psi$

Tableau 4.1 : Paramètres d'entrée influant sur les variances de log-amplitude et de phase.

##### 4.1.1. Variance de phase $\langle \varphi^2 \rangle$

On rappelle l'expression (3.90) de la variance de phase 3D :

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{4\pi^2 \lambda^2 r_e^2 a A_y A_z C_S R_{iono} K_0^{2-p}}{(p-2)\sqrt{AB-C^2}} - \langle \chi^2 \rangle \quad (3.90)$$

<sup>1</sup> Du fait de l'anisotropie du milieu, la configuration 3D est la plus à même de se rapprocher des résultats expérimentaux [Wernik et al., 1990].

On néglige le terme  $\langle \chi^2 \rangle$  d'après l'étude menée au chapitre 3 (partie 3.3.3). Les expressions des paramètres  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont donnés en (2.50). D'après l'expression de la force de la turbulence  $C_S$  (1.38) et de  $K_0$  (1.25), l'expression (3.90) devient :

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{2 c^2 r_e^2 \sigma_{\Delta N_e}^2 a A_y A_z R_{iono} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) L_0}{\sqrt{\pi} f^2 \Gamma\left(\frac{p-3}{2}\right) (p-2) \sqrt{AB - C^2}} \quad (4.1)$$

Cette formule (4.1) va nous permettre d'étudier les variations de la variance de phase en fonction des paramètres listés dans le tableau 4.1.

- **Fréquence du signal  $f$  :**

D'après (4.1), la variance de phase est inversement proportionnelle au carré de la fréquence du signal traversant. On considère ici des signaux GNSS, en bande L. Pour des fréquences plus élevées, l'effet des scintillations ionosphériques sur la phase diminue.

- **Altitude  $H$  de la couche ionosphérique :**

L'épaisseur de la couche ionosphérique traversée,  $R_{iono}$ , est fonction de l'altitude  $H$  de la couche ionosphérique (cf. annexe 2). Son expression est :

$$R_{iono} = \sqrt{(R_t + H + \Delta H)^2 - R_t^2 \sin^2 \vartheta} - \sqrt{R_t^2 \cos^2 \vartheta + H^2 + 2 H R_t}. \quad (4.2)$$

D'après l'hypothèse couche mince déjà établie au chapitre 3,  $\Delta H \ll H$ , l'épaisseur traversée  $R_{iono}$  ne diminue que très légèrement avec l'augmentation de l'altitude  $H$ , donc, d'après (4.1), la variance de phase  $\langle \varphi^2 \rangle$  ne varie pas de façon significative avec  $H$ . La variance de phase étant liée à la dimension longitudinale des structures turbulentes traversées, il apparaît donc normal qu'une augmentation de la distance parcourue dans le vide depuis le bas de la couche ionosphérique jusqu'au récepteur n'impacte pas la valeur de la variance de phase  $\langle \varphi^2 \rangle$ .

- **Épaisseur  $\Delta H$  de la couche ionosphérique :**

D'après (4.2),  $R_{iono}$  augmente avec l'épaisseur  $\Delta H$ . Plus le trajet dans l'ionosphère est important, plus le signal traverse des irrégularités qui vont conduire à une perturbation plus importante de la phase du signal.

L'épaisseur de la couche ionosphérique est cependant délicate à estimer, d'autant plus aux hautes latitudes où les lignes de champ magnétique sont ouvertes. On trouve dans la littérature des valeurs variant de 50 km [Yeh & Liu, 1982] à 200 km [Wernik & Liu, 1973]. En considérant une liaison telle que  $\vartheta = 0$ , si l'épaisseur passe de 50 à 100 km, la variance de phase se trouve multipliée par 2 également.

- **Variance de fluctuations électroniques  $\sigma_{\Delta N_e}^2$  :**

D'après (4.1), la variance de phase  $\langle \varphi^2 \rangle$  est proportionnelle à la variance des fluctuations de concentration électronique. Plus  $\sigma_{\Delta N_e}^2$  augmente, plus la variance de phase augmente. D'un point de vue physique, plus les gradients de concentration électronique sont importants, plus la vitesse de propagation du signal va être perturbée, donc plus la variance de phase du signal va être grande.

D'après [Wernik & Liu, 1973] et [Lilensten & Blelly, 1999], on trouve, pour la variance des fluctuations électroniques, des valeurs de  $10^{18} \text{ el}^2 \cdot \text{m}^{-6}$  (perturbations faibles) à  $10^{24} \text{ el}^2 \cdot \text{m}^{-6}$  (perturbations fortes).

- **Échelle externe  $L_0$  :**

D'après (4.1), la variance de phase est proportionnelle à l'échelle externe de l'irrégularité  $L_0$  : plus celle-ci est grande, plus  $\langle \varphi^2 \rangle$  va être élevée. Pour mieux appréhender l'impact de l'échelle externe  $L_0$  sur la variance de phase, on reprend la formulation générale de la variance de phase 3D (3.90) et on l'exprime dans le repère des axes principaux de l'ellipse ( $u', v'$ ) selon :

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{2\lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y A_z \sigma_{\Delta N_e}^2 K_0^{p-3} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{p-3}{2}\right)} \quad (4.3)$$

$$\times \iint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_v \left( A' K_u^2 + B' K_v^2 + \frac{K_0^2}{a^2} \right)^{-\frac{p}{2}}.$$

On passe aux coordonnées polaires en utilisant le changement de variables (3.38) :

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{4\sqrt{\pi}\lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y A_z \sigma_{\Delta N_e}^2 \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p-3}{2}\right) \sqrt{A'B'}} \quad (4.4)$$

$$\times K_0^{p-3} \int_0^{+\infty} K'' dK'' \left( K''^2 + \frac{K_0^2}{a^2} \right)^{-p/2}.$$

D'après (4.4), la variance de phase est proportionnelle à l'intégrale du spectre des fluctuations de densité électronique  $S_{\Delta N_e}^{3D}$ . La taille des tourbillons qui contribuent majoritairement à la variance de phase ont pour dimension  $aL_0$ . Ainsi, en augmentant  $L_0$ , on diminue  $K_0$  (cf. (1.25)) et, tous les autres paramètres restants constants par ailleurs, le produit de l'intégrale du spectre  $S_{\Delta N_e}^{3D}$  par  $K_0^{p-3}$  augmente du même coup, comme l'illustre la figure 4.1.

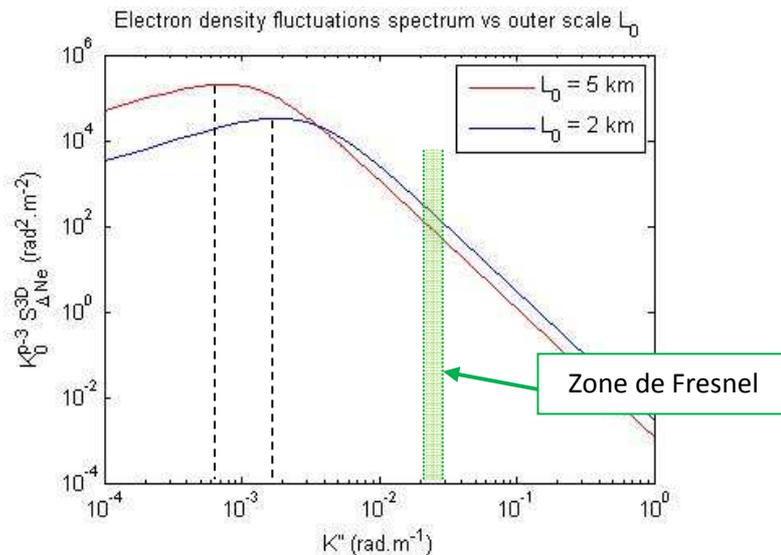


Figure 4.1 : Spectre des fluctuations de densité électronique en fonction de l'échelle externe des irrégularités  $L_0$ .

La zone de Fresnel, représentée en vert figure 4.1 désigne les valeurs du nombre d'onde de Fresnel,  $K_f = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda} L_V}$ , correspondant aux fréquences de la bande L (de 1 à 2 GHz).

On retrouve bien les observations faites par [Hunsucker & Hargreaves, 2003], à savoir que les irrégularités qui produisent une variance de phase plus importante ont une taille supérieure à la longueur de Fresnel, c'est-à-dire supérieure à plusieurs centaines de mètres en bande L. Plus la dimension longitudinale de l'irrégularité traversée est grande, plus les variations de vitesse, donc de phase, sont importantes [Tatarskii, 1961].

- **Indice spectral  $p$  :**

On peut écrire l'expression (4.1) comme :

$$\langle \varphi^2 \rangle = \Phi f(p), \quad (4.5)$$

avec 
$$\Phi = \frac{2 c^2 r_e^2 \sigma_{\Delta N_e}^2 a A_y A_z R_{iono} L_0}{\sqrt{\pi} f^2 \sqrt{AB - C^2}}, \quad (4.6)$$

et 
$$f(p) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p-3}{2}\right) (p-2)}. \quad (4.7)$$

La fonction  $f(p)$  est croissante avec  $p$  comme le montre la figure 4.2.

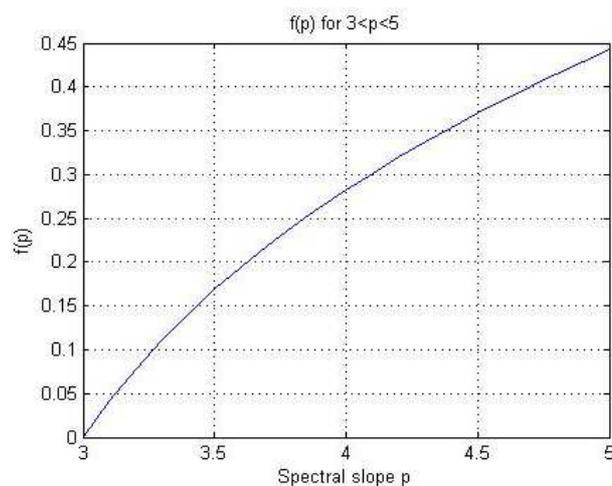


Figure 4.2 : Variations de  $f(p)$  en fonction de l'indice spectral  $p$ .

Plus l'indice spectral  $p$  est élevé, plus la variance de phase augmente. Aux latitudes polaires, les valeurs typiques de l'indice spectral  $p$  obtenues par Mushini [2012] et Fremouw et al. [1985] à partir des pentes spectrales  $q$ , varient majoritairement de 2,25 à 3,75<sup>2</sup>. D'après la définition de la constante de structure  $C_s$  (1.38),  $p > 3$ . Le domaine de variation de  $p$  est relativement restreint mais l'indice spectral peut malgré tout influencer sur la variance de phase. Ainsi, on observe, figure 4.2, une augmentation d'un facteur 5 de  $f(p)$ , donc de la variance de phase (4.5) lorsque  $p$  varie de 3,1 à 3,75.

- **Ratios d'anisotropie  $A_y$  et  $A_z$  et angles d'arrivée sur l'anisotropie**

Les paramètres caractéristiques de la forme de l'irrégularité et les angles d'arrivée du signal sur cette irrégularité sont plus complexes à appréhender. On va donc s'intéresser à l'impact de ces paramètres sur l'indice de phase  $\sigma_\varphi$  en faisant varier les angles d'arrivée  $\gamma$  et  $\psi$  (cf. figure 2.4) et les ratios d'anisotropie  $A_y$  et  $A_z$  pour différentes formes d'irrégularités principalement rencontrées aux hautes latitudes. Cette étude sera limitée aux trois formes d'anisotropie décrites dans la partie 1.3.1 et sur la figure 1.15, à savoir :

- Des **ellipsoïdes** allongés dans la direction du champ magnétique et isotropes dans le plan transverse, telles que 1:1:  $A_z$ , avec  $3 \leq A_z \leq 10$  (figure 1.15 (a))
- Des **feuilletts** plasmiques de type 1:  $A_z$ :  $A_z$ , avec  $5 \leq A_z \leq 10$  (figure 1.15 (b))
- Des **ails** de plasma de type 1:  $A_y$ :  $A_z$ , avec  $6 < A_z < 15$  et  $1.8 < A_y < 3$  (figure 1.15 (c)).

**Les ellipsoïdes** sont les géométries les plus fréquemment rencontrées aux hautes latitudes [Livingston et al., 1982]. Ces irrégularités étant symétriques autour du champ magnétique terrestre (cf. figure 1.15 (a)), l'angle  $\psi$  n'influe pas sur les résultats. On peut donc poser  $\psi = 0$  et on va étudier l'impact de l'angle  $\gamma$  et du ratio d'anisotropie  $A_z$  sur l'indice de phase. La figure 4.3 représente la forme de l'irrégularité et les paramètres mis en jeu dans cette étude.

---

<sup>2</sup> On rappelle que la pente spectrale  $q$  mesurée sur les spectres de puissance est simplement reliée à l'indice spectral  $p$  par  $p = q + 1$ .

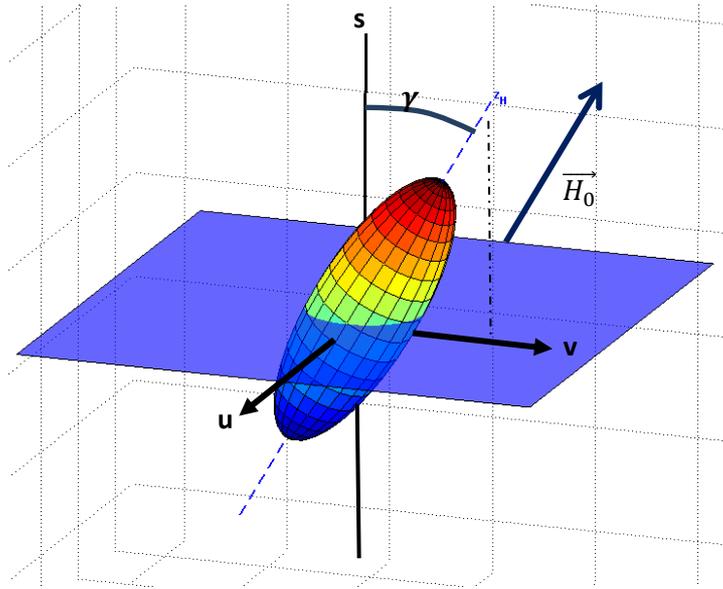


Figure 4.3 : Irrégularité ellipsoïdale 1: 1:  $A_z$  et angle d'arrivée  $\gamma$ .

Sur la figure 4.3, le plan transverse 2D, en bleu, correspond au plan des écrans de phase du schéma numérique 3D-PWE/2D-MPS. Pour un angle d'arrivée  $\gamma$  donné, la coupe de l'irrégularité ionosphérique sur ce plan ne va pas changer si l'irrégularité tourne autour de l'axe  $s$ . On pose donc également  $\alpha = 0$ , c'est-à-dire que la projection de l'axe principal de l'ellipse sur le plan  $(u, v)$  est selon l'axe  $v$  (cf. figure 2.4 (b)). L'expression (4.1) devient :

$$\langle \varphi^2 \rangle^{3D} = \frac{4\pi^2 \lambda^2 r_e^2 A_z C_S R_{iono} K_0^{2-p}}{(p-2)\sqrt{1 + \sin^2 \gamma (A_z^2 - 1)}} \quad (4.8)$$

La figure 4.4 représente les résultats pour l'indice de phase  $\sigma_\varphi$ , en fonction de l'angle d'arrivée  $\gamma$  et du ratio d'anisotropie  $A_z$ . Les autres paramètres d'entrée, caractéristiques des hautes latitudes, sont issus du tableau 2.4.

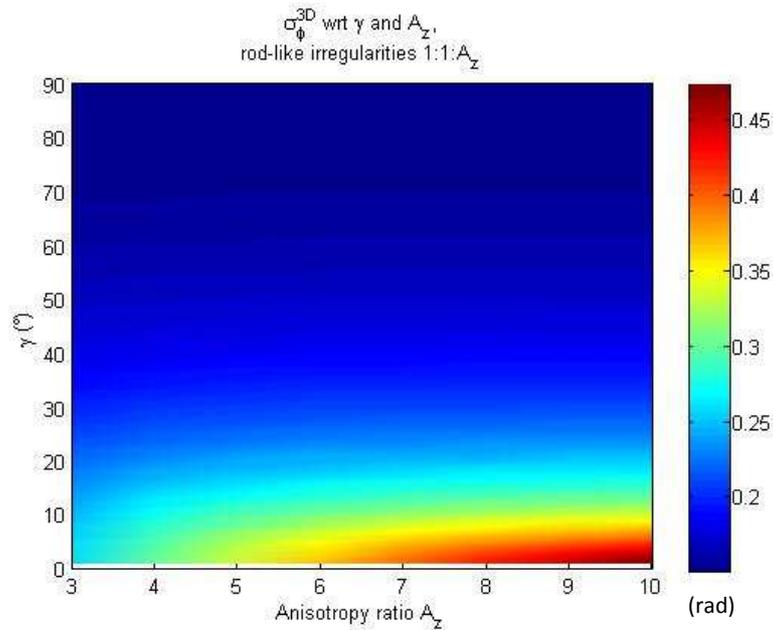


Figure 4.4 : Indice de phase  $\sigma_{\phi}$  (rad) en fonction de l'angle d'arrivée  $\gamma$  et du ratio d'anisotropie  $A_z$  pour une forme d'irrégularité ellipsoïdale 1: 1:  $A_z$ .

La figure 4.4 montre une forte variabilité de l'indice de phase en fonction du ratio d'anisotropie  $A_z$ , notamment lorsque le LOS est aligné dans la direction du champ magnétique ( $\gamma = 0$ ). On voit également que plus l'anisotropie  $A_z$  est forte, plus les variations de  $\sigma_{\phi}$  en fonction de l'angle de visée  $\gamma$  sont importantes. On retrouve donc le résultat déjà constaté dans l'étude en fonction de l'échelle externe  $L_0$ , à savoir que plus la dimension de l'irrégularité traversée par le signal est importante, plus l'indice de phase augmente.

L'autre forme d'anisotropie rencontrée aux hautes latitudes est la géométrie en **feuillet**s (cf. figure 1.15 (b)). Contrairement aux ellipsoïdes, l'irrégularité ionosphérique n'est plus symétrique autour des lignes de champ magnétique : on va donc étudier l'influence des angles d'arrivée  $\gamma$  et  $\psi$ , ainsi que du ratio d'anisotropie  $A_z$ . La figure 4.4 donne une représentation de la forme de l'irrégularité et des angles de propagation mis en jeu.

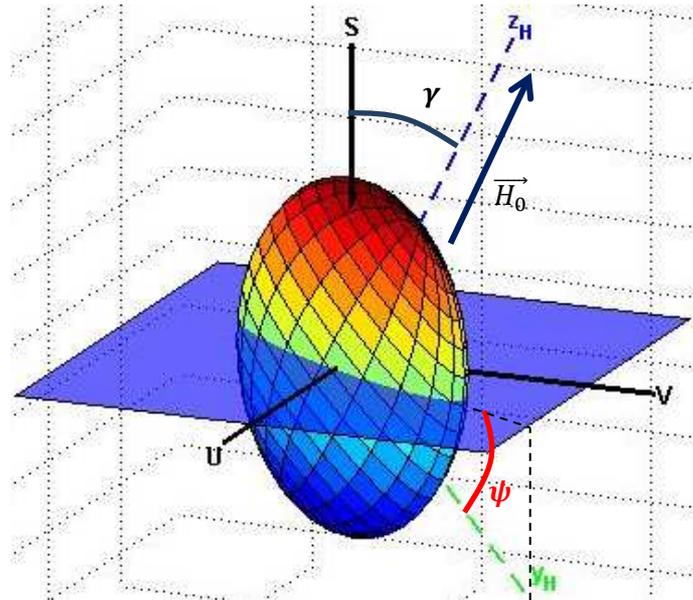


Figure 4.5 : Feuillet plasmique 1:  $A_z:A_z$  dans le repère  $(u, v, s)$ .

D'après la figure 4.5 et l'expression (2.48),  $|\psi| \leq |\gamma|$ . Les résultats de l'indice de phase en fonction des angles  $\gamma$  et  $\psi$  et du ratio d'anisotropie  $A_z$  sont présentés sur la figure 4.6.

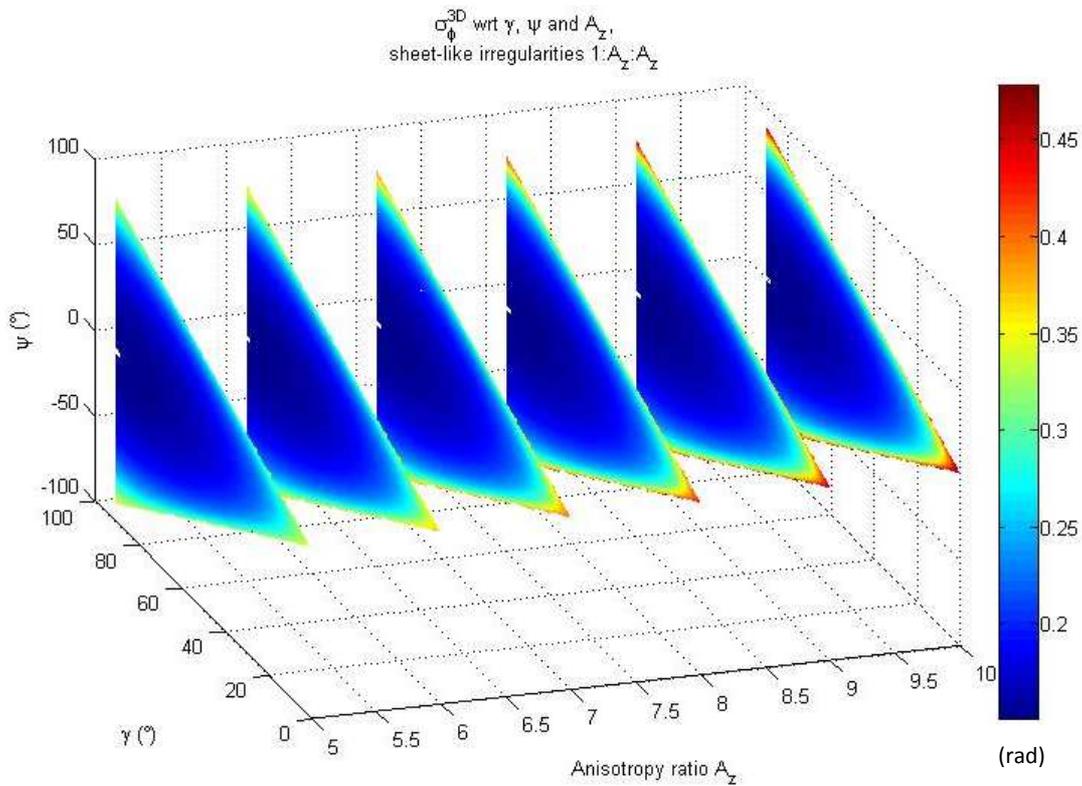


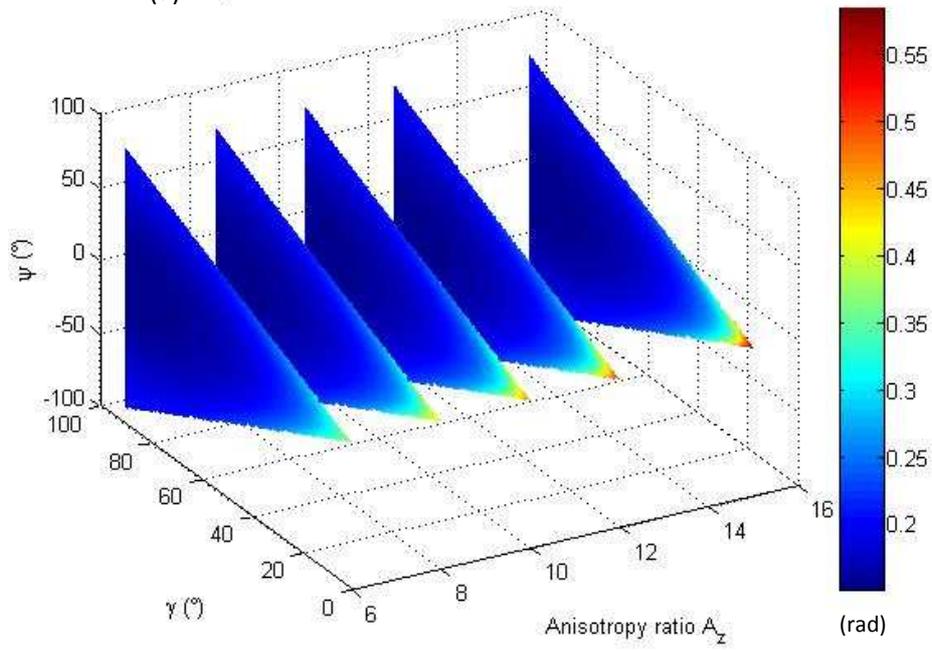
Figure 4.6 : Indice de phase  $\sigma_\phi$  (rad) en fonction des angles d'arrivée  $\gamma$  et  $\psi$ , et du ratio d'anisotropie  $A_z$  pour une forme d'irrégularité en feuillet 1:  $A_z:A_z$ .

D'après la figure 4.6, quelle que soit la valeur du ratio d'anisotropie  $A_z$ , plus  $|\psi|$  est grand, plus l'indice de phase est élevé. Pour un angle  $\gamma$  fixé, la rotation de l'irrégularité autour de l'axe principal lié au champ magnétique revient à faire varier l'angle  $\psi$  de  $-\gamma$  à  $+\gamma$ . Sur la figure 4.6, on voit que cette rotation joue sur la longueur de l'irrégularité traversée par le signal radioélectrique, selon l'axe  $s$ . Plus  $|\psi|$  est grand, donc plus  $\gamma$  est élevé, plus la longueur d'irrégularité traversée est grande et plus l'indice  $\sigma_\varphi$  est élevé.

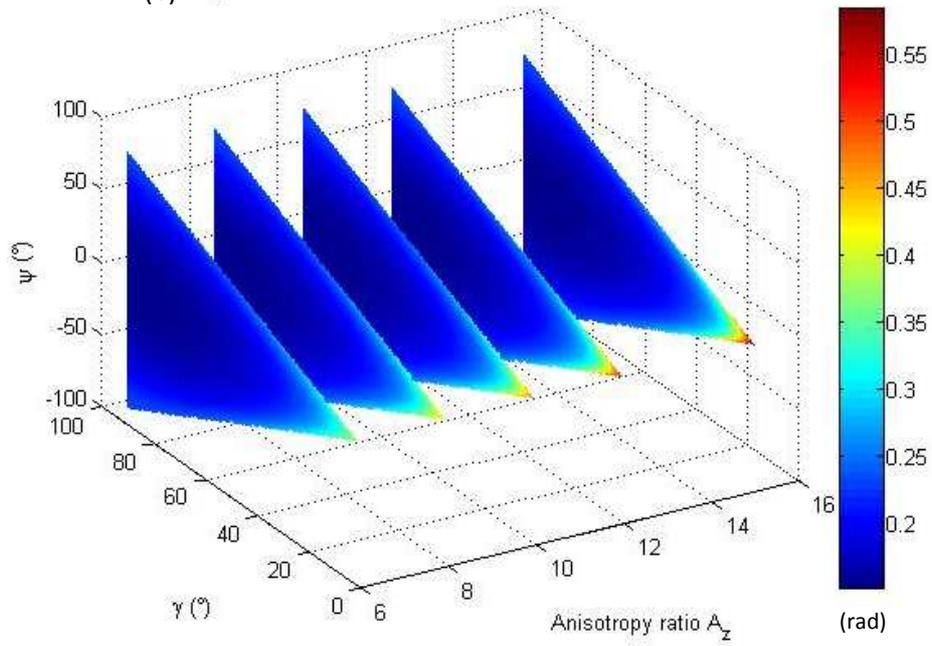
On voit également que plus le ratio d'anisotropie  $A_z$  est élevé, plus la valeur maximale de  $\sigma_\varphi$  est grande. Les cas où la variance de phase est la plus grande correspondent, pour une valeur de  $\gamma$  fixée, aux situations où  $|\psi|$  est le plus élevé. Dans ces situations, la longueur de l'irrégularité traversée par le signal est proportionnelle au ratio d'anisotropie, d'où l'augmentation de la valeur maximale de l'indice de phase  $\sigma_\varphi$  avec  $A_z$ .

La dernière forme d'irrégularités ionosphérique étudiée ici est également la moins fréquente aux hautes latitudes. Les **ails de plasma** (cf. figure 1.15 (c)) sont en effet, d'après [Livingston et al., 1982] et comme présenté en partie 1.3.1 du chapitre 1, des formes de transition entre les ellipsoïdes et les feuillets plasmiques, ce qui explique leur plus faible occurrence. Ces irrégularités présentent deux ratios d'anisotropie,  $1:A_y:A_z$  tels que  $A_y < A_z$ ,  $1,8 \leq A_y \leq 3$  et  $6 \leq A_z \leq 15$ . Cette géométrie étant intermédiaire aux deux autres formes d'irrégularités étudiées précédemment, son comportement vis-à-vis de l'anisotropie et des angles d'arrivée ressemble aux comportements déjà observés sur les figures 4.4 et 4.6. La figure 4.7 regroupe les résultats obtenus pour différentes valeurs des ratios  $A_y$  et  $A_z$ , en fonction des angles d'arrivée  $\gamma$  et  $\psi$ .

(a)  $\sigma_{\phi}^{3D}$  wrt  $\gamma$ ,  $\psi$  and  $A_z$ , wing-like irregularities 1:1.8: $A_z$



(b)  $\sigma_{\phi}^{3D}$  wrt  $\gamma$ ,  $\psi$  and  $A_z$ , wing-like irregularities 1:2.4: $A_z$



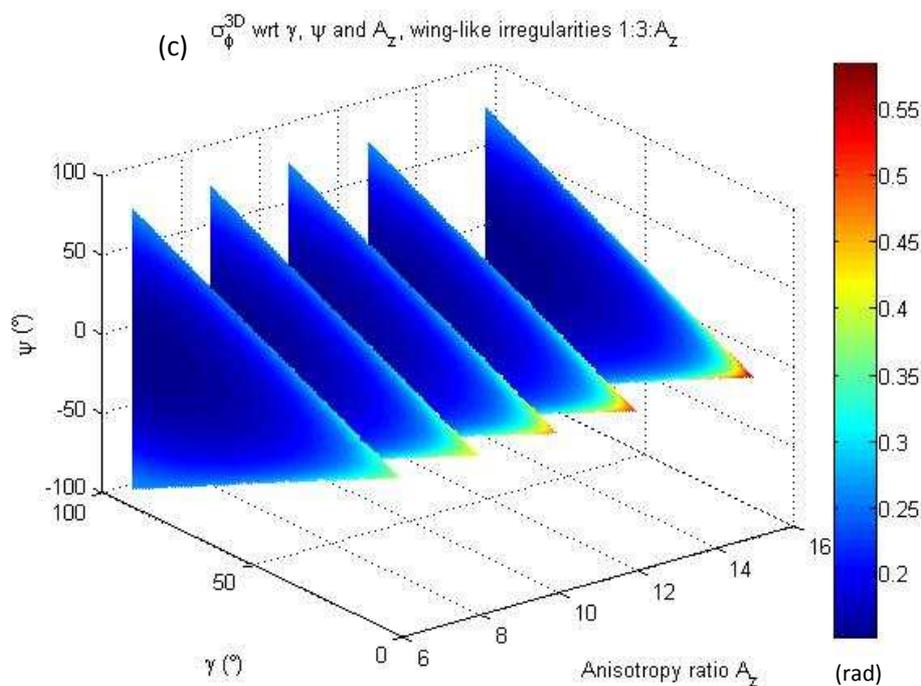


Figure 4.7 : Variations de  $\sigma_{\phi}$  (rad) en fonction des angles d'arrivée  $\gamma$  et  $\psi$ , et du ratio d'anisotropie  $A_z$  pour différentes valeurs du ratio transverse (a)  $A_y = 1,8$ , (b)  $A_y = 2,4$  et (c)  $A_y = 3$ , forme d'irrégularité en aile 1:  $A_y:A_z$ .

D'après la figure 4.7, on remarque que l'angle  $\psi$  et le ratio d'anisotropie transverse  $A_y$  ont peu d'impact sur l'indice de scintillation de phase. On retrouve donc le comportement d'une géométrie de type ellipsoïde (cf. figure 4.3).

#### 4.1.2. Cas particulier : comparaison des variances de phase aux hautes et aux basses latitudes

Pour mieux illustrer les résultats de l'étude paramétrique sur la variance de phase, on va s'intéresser à deux liaisons Terre-satellite et comparer les indices de phase :

- **une situation typique hautes latitudes** : on considère une visée au nadir, telle que  $\gamma = 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\vartheta = 0$ .  $\psi = 0$  et  $\alpha_y = 0$ . La variance de phase s'écrit, pour  $A_y$  et  $A_z$  quelconques :

$$\langle \varphi^2 \rangle_{p\hat{o}le} = \frac{2 c^2 r_e^2 \sigma_{\Delta N_e}^2 a A_z L_0 \Delta H \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\sqrt{\pi} f^2 \Gamma\left(\frac{p-3}{2}\right) (p-2)} \quad (4.9)$$

- **une situation typique basses latitudes** : on considère également une visée au nadir avec  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\vartheta = 0$ .  $\alpha_y = 0$  et  $\psi$  quelconque. On obtient :

$$\langle \varphi^2 \rangle_{\text{equateur}} = \frac{2 c^2 r_e^2 \sigma_{\Delta N_e}^2 a A_y L_0 \Delta H \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\sqrt{\pi} f^2 \Gamma\left(\frac{p-3}{2}\right) (p-2) \sqrt{\sin^2 \psi + A_y^2 \cos^2 \psi}} \quad (4.10)$$

Tous paramètres étant égaux par ailleurs, on constate que, dans la situation où  $A_y < A_z$ , la variance de phase hautes latitudes (4.9) est supérieure à la variance de phase aux latitudes équatoriales (4.10). Cette tendance est observée sur les mesures expérimentales [Forte et al., 2002], [Doherty et al., 2003]. Cependant, la dimension des irrégularités  $L_0$ , l'indice spectral  $p$  et l'épaisseur de la couche ionosphérique  $\Delta H$  varient en fonction de la latitude et participent également à la différence entre les indices de phase mesurés dans ces deux régions.

Dans cette première partie, les variations de la variance de phase ont été étudiées. L'étude paramétrique va maintenant être menée sur la variance de log-amplitude 3D.

#### 4.1.3. Variance de log-amplitude $\langle \chi^2 \rangle$

Rappelons l'expression (3.47) de la variance de log-amplitude 3D :

$$\langle \chi^2 \rangle = \frac{-\pi^3 \lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y A_z C_s}{2 \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) A'^{\frac{p}{2}}} \left(\frac{L_V}{k_0}\right)^{\frac{p}{2}-1} {}_2F_1\left(\frac{p}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{A' - B'}{A'}\right). \quad (3.47)$$

On développe dans l'expression (3.47) les termes  $\lambda$ ,  $k_0$  et  $C_s$  (d'après (1.38)) pour faire apparaître les termes énumérés dans le tableau 4.1 :

$$\langle \chi^2 \rangle = \frac{-\pi\sqrt{\pi} c^{\frac{p}{2}+1} r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y A_z \sigma_{\Delta N_e}^2 L_V^{\frac{p}{2}-1} (2\pi)^{\frac{p}{2}-2}}{2 f^{\frac{p}{2}+1} L_0^{p-3} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) \Gamma\left(\frac{p-3}{2}\right)} \quad (4.11)$$

$$\times {}_2F_1\left(\frac{p}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{A' - B'}{A'}\right).$$

On étudie l'influence des paramètres d'entrée sur la variance de log-amplitude  $\langle \chi^2 \rangle$  dans le même ordre que pour l'étude précédente de la variance de phase 3D.

- **Fréquence du signal  $f$  :**

D'après (4.11), la variance de log-amplitude est inversement proportionnelle à  $f^{\frac{p}{2}+1}$ . Plus l'indice spectral augmente, plus la variance  $\langle \chi^2 \rangle$  diminue avec la fréquence  $f$ .

- **Altitude  $H$  de la couche ionosphérique :**

Dans l'expression (4.11),  $R_{iono}$  et  $L_V$  sont fonction de l'altitude  $H$  de la couche ionosphérique<sup>3</sup>. On a déjà montré que les variations de l'épaisseur traversée  $R_{iono}$  par rapport à  $H$  étaient négligeables. On va donc étudier les variations de  $L_V$  avec l'altitude :

$$L_V = \sqrt{R_t^2 \cos^2 \vartheta + H^2 + 2 H R_t - R_t \cos \vartheta} \quad (4.12)$$

D'après (4.12),  $L_V$  est croissante avec  $H$  et d'après (4.11),  $\langle \chi^2 \rangle$  est proportionnelle à  $L_V^{\frac{p}{2}-1}$ . Or,  $p > 3$  donc la variance de log-amplitude augmente avec l'altitude de la couche ionosphérique.

$L_V$  correspond à la distance de propagation en espace libre du signal électromagnétique, à la verticale du récepteur, une fois passée la couche turbulente ionosphérique. Le front d'onde émergent est fortement perturbé et, du fait de la diffraction en espace libre, la variance de log-amplitude va augmenter jusqu'au récepteur. Ainsi, on retrouve bien les

<sup>3</sup> Cf. annexe 2.

conclusions du calcul (4.11) : plus l'altitude  $H$  est grande, plus la variance de log-amplitude est importante.

- **Épaisseur  $\Delta H$  de la couche ionosphérique :**

Comme on l'a déjà montré dans l'étude de la variance de phase et d'après (4.2), l'épaisseur traversée  $R_{iono}$  est croissante avec  $\Delta H$ . La variance de log-amplitude (4.11) augmente donc avec l'épaisseur de la couche ionosphérique.

Dans l'hypothèse de faibles perturbations, le signal ne rencontre qu'un seul objet diffractant. Augmenter l'épaisseur de la couche turbulente revient à augmenter la distance parcourue par le signal entre l'élément diffractant et le récepteur, ce qui a un effet identique à l'augmentation de l'altitude  $H$  sur  $\langle \chi^2 \rangle$ .

- **Variance de fluctuations électroniques  $\sigma_{\Delta N_e}^2$  :**

D'après (4.11),  $\langle \chi^2 \rangle$  est proportionnel à la variance des fluctuations électroniques  $\sigma_{\Delta N_e}^2$ . On peut interpréter facilement ce résultat par le fait que plus la variance des fluctuations de densité électronique est importante, plus la turbulence est grande et va donc davantage perturber le signal à sa traversée.

- **Échelle externe  $L_0$  :**

D'après (4.11), la variance de log-amplitude est inversement proportionnelle à  $L_0^{p-3}$ . Comme  $p > 3$ , l'augmentation de la taille des irrégularités entraîne une diminution de la variance de log-amplitude.

Pour comprendre cet effet, on reprend les figures 4.1 et 3.5 : la formulation asymptotique de la variance dans la section 3.2.2 a permis de conclure sur le fait que les tourbillons contribuant majoritairement à la variance de log-amplitude ont pour dimension la longueur de Fresnel  $L_f = 2\sqrt{\lambda L_V}$ . Le nombre d'onde associé est tel que avec  $K_f = \frac{2\pi}{L_f} \gg K_0$ . En diminuant  $L_0$  (courbe bleue sur la figure 4.1), d'après (1.25), on augmente  $K_0$ . Dans la zone de Fresnel délimitée en vert sur cette même figure, on voit que l'énergie associée à la courbe bleue est plus élevée que pour un  $L_0$  plus fort (courbe

rouge). On arrive bien à la conclusion que  $\langle \chi^2 \rangle$  diminue quand l'échelle externe des irrégularités augmente. On peut également expliquer ces résultats par une approche optique : sur le plan transverse au LOS, la coupe des irrégularités ionosphériques est assimilable à une lentille convergente qui va focaliser le signal plus ou moins loin. Si  $L_0$  augmente, la distance focale augmente également, donc la variance de log-amplitude va diminuer.

- **Indice spectral  $p$  :**

L'influence de l'indice spectral  $p$  est plus difficile à appréhender car il apparaît en exposants de certaines grandeurs d'entrée. Les dérivations mathématiques étant plus complexes que pour les paramètres précédents, les calculs sont menés numériquement. La figure 4.8 donne une représentation de l'influence de l'indice spectral  $p$  sur l'indice de scintillation d'amplitude, dans la configuration hautes latitudes décrite dans le tableau 2.4.

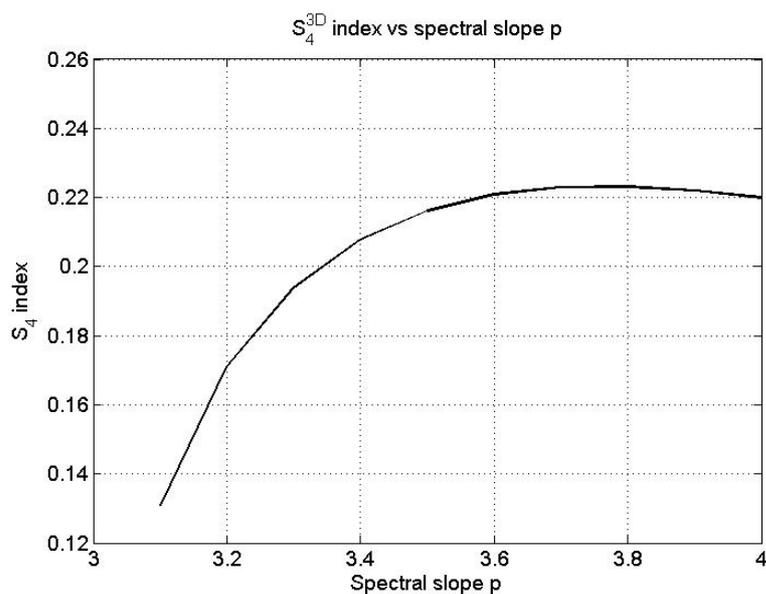


Figure 4.8 : Influence de l'indice spectral  $p$  sur l'indice de scintillation  $S_4$ .

Les résultats de la figure 4.8 montrent une augmentation de l'indice de scintillation avec la valeur de  $p$ . Cependant, à partir de  $p = 3,5$ , on constate que la valeur de  $S_4$  reste relativement constante.

Les valeurs de  $p$  aux hautes latitudes varient de 2,25 à 3,75 (cf. figure 1.17 (b)). La figure 4.9, tirée de [Mushini, 2012], donne une représentation des résultats expérimentaux de  $S_4$  en fonction de la pente mesurée  $q = p - 1$ .

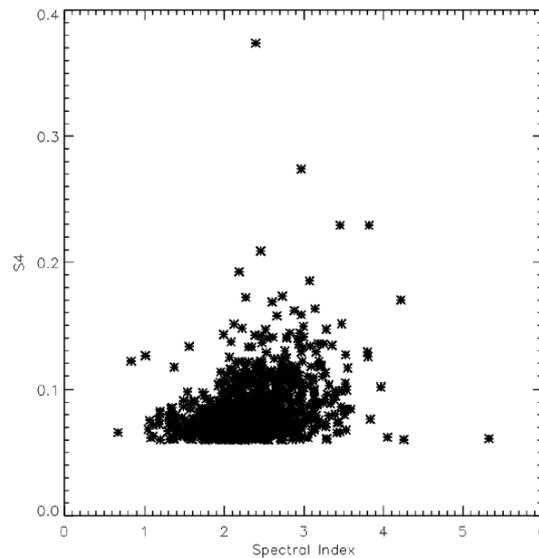


Figure 4.9 : Indice de scintillation  $S_4$  en fonction de  $p - 1$  ; valeurs issues du réseau CHAIN, événements de scintillation de 2009 à 2011 [Mushini, 2012].

Sur la figure 4.9, on retrouve le fait que l'indice  $S_4$ , donc la variance de log-amplitude, augmente avec la valeur de  $p$  mais cette tendance n'est pas très marquée.

- **Ratios d'anisotropie  $A_y$  et  $A_z$  et angles d'arrivée sur l'anisotropie :**

Comme pour la variance de phase étudiée précédemment, cette étude sera limitée aux trois formes d'anisotropie rencontrées aux hautes latitudes : les ellipsoïdes, les feuillets et les ailes plasmiques.

Dans le cas des **ellipsoïdes**, on étudie l'influence du ratio d'anisotropie  $A_z$  et de l'angle d'incidence  $\gamma$  (cf. partie 4.1.1). Les résultats pour l'indice  $S_4$  sont représentés figure 4.10.

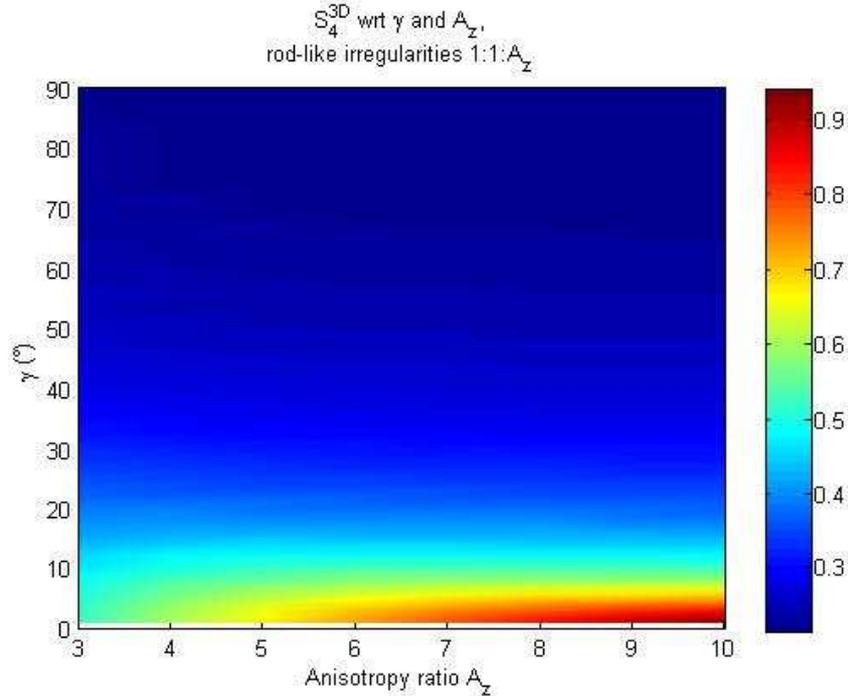


Figure 4.10 : Indice  $S_4$  en fonction de l'angle d'arrivée  $\gamma$  et du ratio d'anisotropie  $A_z$  pour une forme d'irrégularité ellipsoïdale 1: 1:  $A_z$ .

En analysant la figure 4.10, on constate que plus l'angle d'arrivée  $\gamma$  est proche de la direction du champ magnétique (vertical aux hautes latitudes), plus l'indice  $S_4$  augmente. D'après la relation (3.42) et la figure 3.5, on peut connaître la dimension des tourbillons qui contribuent majoritairement à la variance de log-amplitude. Pour une morphologie ellipsoïdale,  $A' = 1$  et  $B' = \cos^2 \gamma + A_z \sin^2 \gamma$  (cf. (3.34)). Lorsque  $\gamma = 0$ ,  $A' = B' = 1$ , et, selon (3.42), la taille des tourbillons contributeurs est égale à la longueur de Fresnel. D'après la formulation complète de la variance de log-amplitude (3.39), l'intégrale du spectre des fluctuations de densité électronique est donc maximale pour  $K''_c = K_f$ . Cette intégrale est pondérée par un terme proportionnel à  $A_z$  : on retrouve donc bien les résultats de la figure 4.10 lorsque  $\gamma$  tend vers 0 qui augmentent avec le ratio  $A_z$ . Lorsque  $\gamma$  augmente, selon (3.42), l'intégrale (3.39) est maximale pour  $K''_c > K_f$ . Or, les énergies mises en jeu sont plus faibles lorsque le nombre d'onde augmente comme le montre la figure 4.1. C'est pourquoi on observe une diminution de l'indice de scintillation  $S_4$  lorsque  $\gamma$  augmente (cf. figure 4.10). Cette diminution s'explique aussi du fait que la coupe de l'irrégularité sur le plan transverse  $(u, v)$  augmente lorsque l'angle  $\gamma$  augmente. On peut utiliser la même interprétation physique que pour l'étude de

l'influence de l'échelle externe  $L_0$ , à savoir que la coupe des irrégularités sur le plan transverse joue le rôle d'une lentille dont la distance focale est d'autant moins grande que la dimension de la coupe transversale est petite : ainsi, lorsque  $\gamma$  augmente, l'indice  $S_4$  diminue.

D'après [Wernik et al., 1990], l'échelle externe des irrégularités est d'autant plus faible que leur anisotropie est forte : Wernik donne les valeurs de  $L_0$  de 300 m, pour les forts ratio d'anisotropie, à 10 km pour les plus faibles. Ainsi, pour les fortes valeurs de  $A_z$ , la dimension de la coupe transversale est encore plus faible : la variance de log-amplitude tend à augmenter encore, ce qui confirme les résultats illustrés figure 4.10.

En reliant les résultats de la figure 4.10 à la figure 1.14, on peut conclure qu'aux très hautes latitudes, typiquement au-delà de  $70^\circ$ , les formes d'anisotropie sont pratiquement isotropes et, dans ce cas, la variance de log-amplitude reste inchangée quel que soit l'angle d'arrivée  $\gamma$ . Aux latitudes plus basses, entre  $65^\circ$  et  $70^\circ$ , le ratio d'anisotropie varie de 5 à 10 et, dans ce cas, la variance de log-amplitude augmente fortement lorsque l'angle  $\gamma$  diminue.

La deuxième géométrie étudiée est le **feuillelet** plasmique (cf. figure 4.5). Comme pour l'étude de la variance de phase, on va s'intéresser à l'impact des angles d'arrivée  $\gamma$  et  $\psi$  mais également à celui du ratio d'anisotropie  $A_z$ . La figure 4.11 donne une représentation des résultats obtenus.

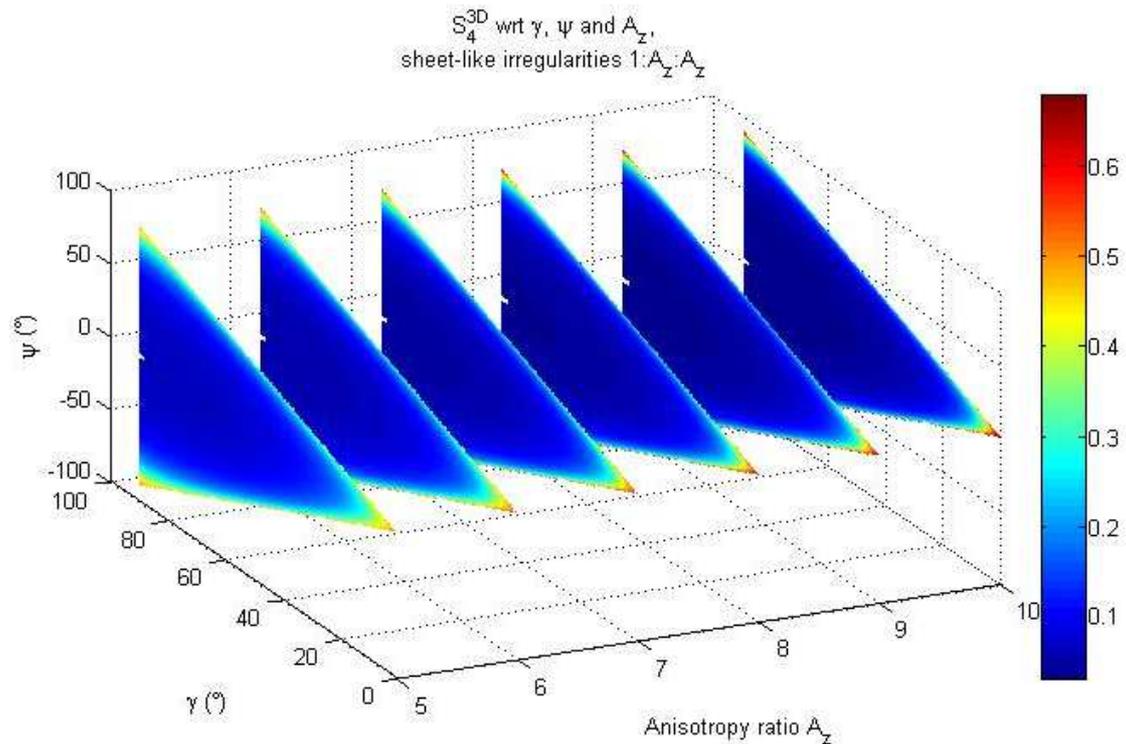


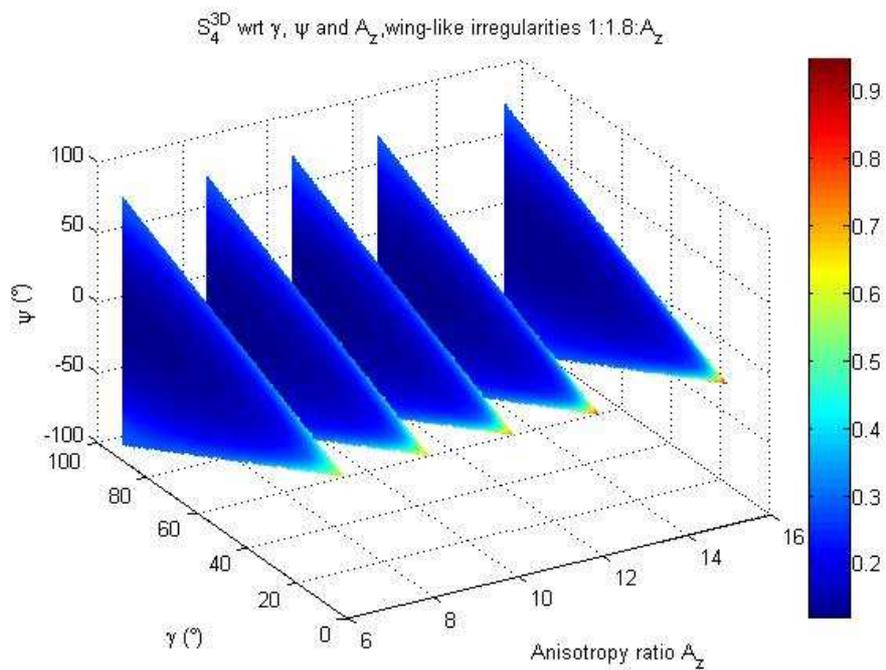
Figure 4.11 : Indice  $S_4$  en fonction des angles d'arrivée sur l'irrégularité ionosphérique et du ratio d'anisotropie  $A_z$ , pour une forme d'irrégularité en feuillet 1:  $A_z:A_z$

D'après la figure 4.11, quelle que soit la valeur du ratio d'anisotropie, le comportement de la variance de log-amplitude en fonction des angles d'arrivée  $\gamma$  et  $\psi$  est le même. La variance de log-amplitude augmente lorsque  $\psi$  et/ou  $\gamma$  diminuent. On remarque que plus le ratio d'anisotropie  $A_z$  est grand, plus la valeur maximale de la variance de log-amplitude est élevée.

Pour une incidence du signal dans la direction du champ magnétique terrestre, i.e. pour  $\gamma < 10^\circ$ , l'influence de l'angle  $\psi$  est négligeable. En effet, dans cette situation, faire varier l'angle  $\psi$  revient à faire tourner l'irrégularité ionosphérique autour de son axe principal, qui correspond également au LOS. La coupe de l'irrégularité sur le plan 2D  $(u, v)$  reste donc la même, quelle que soit la valeur de l'angle  $\psi$ , ce qui explique que la variance de log-amplitude reste constante. Si on considère la situation extrême pour laquelle  $\gamma = 90^\circ$ , le champ magnétique appartient au plan de coupe  $(u, v)$ . En faisant tourner l'irrégularité ionosphérique autour de son axe principal, la coupe sur le plan  $(u, v)$  va passer d'une ellipse ( $\psi = 90^\circ$ ) de grand axe  $L_0$  à un cercle ( $\psi = 0^\circ$ ) de rayon  $L_0$ . La

dimension de l'objet diffractant étant plus grande dans le second cas, on retrouve bien le fait que la variance de log-amplitude diminue avec  $\psi$ .

La dernière géométrie étudiée est l'**aile plasmique** (cf. 1.15 (c)). Ici encore, on va suivre l'étude menée pour la variance de phase et on va s'intéresser à l'impact des angles d'arrivée et des ratios d'anisotropie  $A_z$  et  $A_y$ . Les résultats sont schématisés figure 4.12.



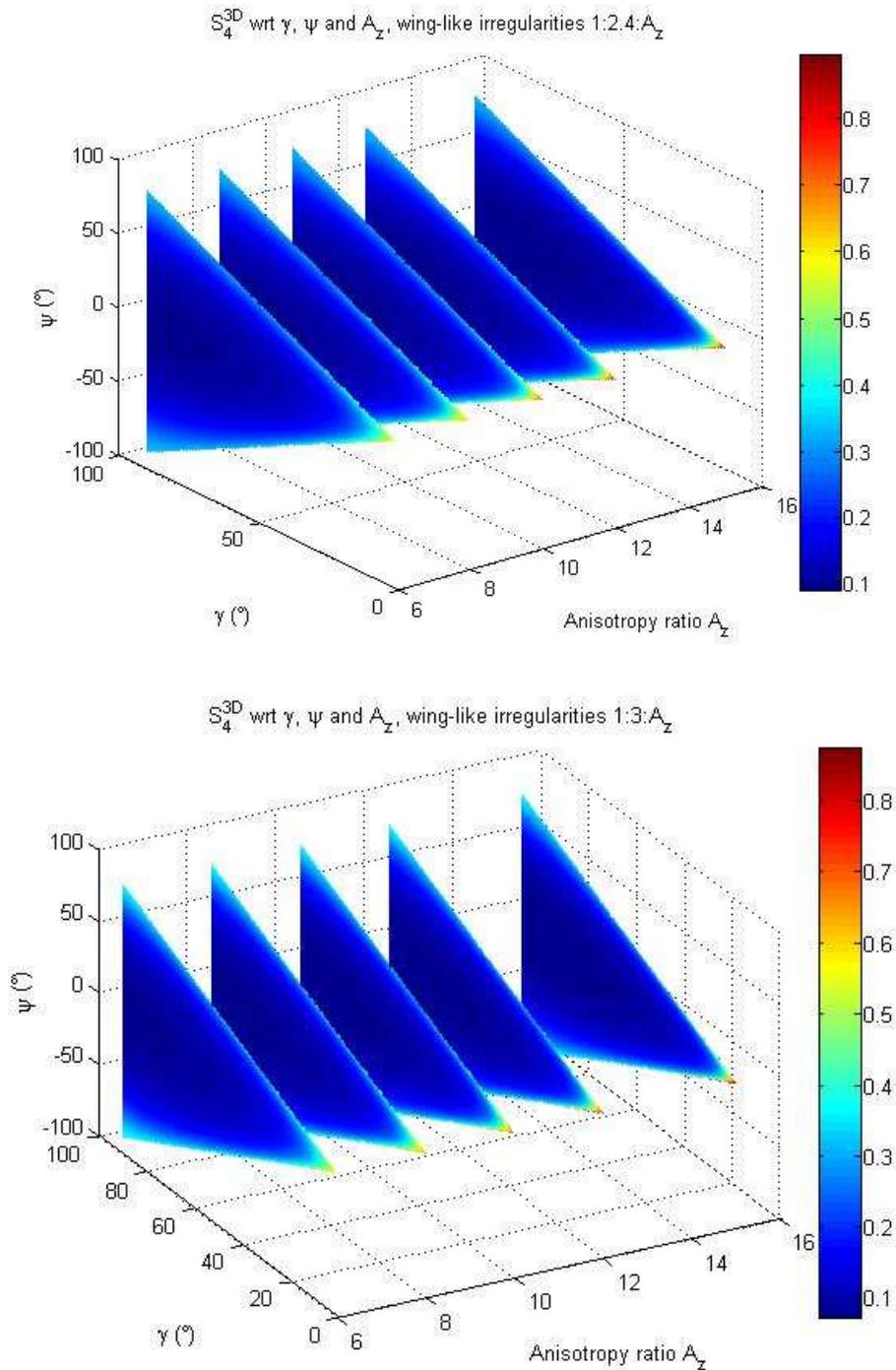


Figure 4.12 : Variations de  $S_4$ , en  $\text{dB}^2$ , en fonction des angles d'arrivée gamma et delta et pour différentes valeurs des ratio d'anisotropie  $A_y$  et  $A_z$ , (a)  $A_y = 1.8$ , (b)  $A_y = 2.4$  et (c)  $A_y = 3$ , pour une forme d'irrégularité en aile 1:  $A_y$ :  $A_z$ .

D'après la figure 4.12, on retrouve un comportement intermédiaire à la géométrie de type ellipsoïde, lorsque  $A_y = 1.8$ , et à la géométrie en feuillets, lorsque  $A_y$  augmente. Les

résultats peuvent donc être interprétés de la même façon que pour les précédentes géométries, étudiées plus haut.

Deux exemples simples vont permettre d'illustrer les résultats obtenus pour les variations de  $\langle \chi^2 \rangle$  : aux hautes latitudes et aux basses latitudes.

#### 4.1.4. Cas particulier : comparaison des variances de log-amplitude aux hautes et aux basses latitudes

On va donc comparer les indices d'amplitude dans les deux situations suivantes :

- une **situation typique hautes latitudes** : on considère une visée au nadir, telle que  $\gamma = 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\vartheta = 0$ .  $\psi = 0$  et  $\alpha_y = 0$ . La variance de log-amplitude s'écrit, pour  $A_y$  et  $A_z$  quelconques :

$$\langle \chi^2 \rangle_{p\text{ôles}} = \frac{-\pi^3 \lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y^{1-p} A_z C_s \left(\frac{L_V}{k_0}\right)^{\frac{p}{2}-1}}{2 \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)} {}_2F_1\left(\frac{p}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{A_y^2 - 1}{A_z^2}\right) \quad (4.13)$$

- une **situation typique basses latitudes** : on considère également une visée au nadir avec  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\vartheta = 0$ .  $\alpha_y = \frac{\pi}{2}$  et  $\psi$  quelconque. On obtient :

$$\langle \chi^2 \rangle_{\text{équateur}} = \frac{-\pi^3 \lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_z^{1-p} A_y C_s \left(\frac{L_V}{k_0}\right)^{\frac{p}{2}-1}}{2 \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)} {}_2F_1\left(\frac{p}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{A_z^2 - 1}{A_y^2}\right) \quad (4.14)$$

Tous paramètres étant égaux par ailleurs, dans le cas où  $A_y < A_z$ , la variance de log-amplitude hautes latitudes (4.13) est inférieure à la variance de log-amplitude aux latitudes équatoriales (4.14). Cette tendance est observée sur les mesures expérimentales [Forte et al., 2002]. De même que pour l'étude menée sur la variance de phase en section 4.1.2, les variations de l'échelle externe  $L_0$ , de l'indice spectral  $p$  et de l'épaisseur de la couche ionosphérique  $\Delta H$  en fonction de la latitude expliquent également la différence entre les indices d'amplitude mesurés aux latitudes hautes et basses.

Cette première partie était consacrée à l'étude de sensibilité des variances de log-amplitude et de phase, donc des indices de scintillation correspondant, en fonction des paramètres d'entrée, qu'ils soient propres au milieu ou à la liaison. La section suivante fait la synthèse de cette étude paramétrique et rappelle également des limitations expérimentales.

#### 4.1.5. Synthèse de l'étude paramétrique des variances

Les expressions des variances de phase (4.1) et de log-amplitude (4.11) font intervenir de nombreux paramètres. Expérimentalement, à partir des valeurs de  $S_4$  et  $\sigma_\varphi$ , il est alors difficile de remonter aux paramètres du milieu ou aux angles d'incidence sur l'irrégularité. Dans [Tereshchenko et al., 1999], les auteurs utilisent la formulation de la variance de log-amplitude 3D établie par Rino [1979 (1)], équivalente à la formulation (4.11), et proposent une inversion de résultats expérimentaux hautes latitudes. Celle-ci est basée sur la variation de  $\langle \chi^2 \rangle$  en fonction de l'angle de visée. Les satellites VHF (150 MHz) dont les signaux sont analysés passent à une altitude de 1000 km, leur vitesse importante autorise donc de supposer l'invariance du milieu pendant la durée du balayage en latitude, d'une dizaine de secondes. Par itérations successives, les auteurs estiment alors les ratios d'anisotropie et les angles d'inclinaison de l'irrégularité. Situés à plus de 20 000 km d'altitude, les satellites GPS ont une vitesse de défilement beaucoup plus faible. La technique utilisée par Tereshchenko et al. [1999] n'est donc pas applicable ici, du fait de la forte variabilité temporelle du milieu pendant le temps d'acquisition plus long. Selon la latitude à laquelle on travaille, on peut cependant limiter l'impact de certains paramètres, notamment des angles d'arrivée des signaux radioélectriques.

Le plan orbital des satellites GPS est incliné de  $55^\circ$  par rapport à l'équateur. Leur élévation  $\mathcal{E}$ , pour les stations situées aux hautes latitudes, n'atteint donc jamais  $90^\circ$  (cf. chapitre 2, section 2.2.2). De plus, les données des satellites GPS dont l'élévation est inférieure à  $20^\circ$  ne sont souvent pas prises en compte car sujettes aux phénomènes de multi-trajet. En supposant qu'à ces latitudes les lignes de champ magnétique terrestre sont verticales, sachant que  $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \mathcal{E}$  et d'après la relation (2.80) donnant l'angle  $\gamma$  en fonction de l'angle zénithal  $\vartheta$ , les valeurs de  $\gamma$  peuvent être limitées à l'intervalle

[10°; 65°]. Ainsi, en tronquant le domaine de définition de l'angle  $\gamma$  sur les figures présentées précédemment, les maxima des indices de scintillation qui pourraient théoriquement être obtenus diminuent d'un tiers pour l'indice de phase et pratiquement de moitié pour l'indice  $S_4$  (cf. figures 4.3 et 4.9). Si l'influence des angles d'arrivée  $\gamma$  et  $\psi$  reste toujours marquée, celle du ratio d'anisotropie  $A_z$  l'est beaucoup moins. En effet, toujours en analysant les figures 4.3 et 4.9, le ratio d'anisotropie joue un rôle important pour les faibles valeurs de  $\gamma$ , surtout pour l'indice de scintillation d'amplitude  $S_4$ . Dans l'hypothèse où la géométrie des irrégularités ionosphériques est majoritairement de type ellipsoïdale, les paramètres influant sur les indices de scintillation peuvent alors être réduits.

Le tableau 4.2 résume l'influence des principaux paramètres du milieu et de la propagation sur les variances de log-amplitude et de phase du signal traversant.

Paramètres d'entrée (valeurs croissantes)		Variations de la variance de log-amplitude 3D $\langle \chi^2 \rangle^{3D}$	Variations de la variance de phase 3D $\langle \varphi^2 \rangle^{3D}$
Fréquence $f$		↘	
Altitude $H$		↗	→
Épaisseur $\Delta H$		↗	
Variance de densité électronique $\sigma_{\Delta N_e}^2$		↗	
Échelle externe $L_0$		↘	↗
Indice spectral $p$		↗	
Géométrie et angles d'arrivée	Ellipsoïde	↗ avec $A_z$ , ↘ avec $\gamma$	
	Feuillet	↗ avec $A_z$ et $\psi$ , ↘ avec $\gamma$	
	Aile	↗ avec $A_z$ et $\psi$ , ↘ avec $\gamma$	

Tableau 4.2 : Synthèse de l'étude de sensibilité des variances de log-amplitude et de phase 3D.

Même si les conditions de mesures expérimentales peuvent limiter le domaine de définition de certains paramètres d'entrée comme les angles d'arrivée ou les ratios d'anisotropie, le nombre de paramètres influant sur les indices de scintillation ne permet pas d'inverser les mesures. L'approche complémentaire, plus adaptée aux fréquences des signaux GNSS, est d'inverser les spectres expérimentaux de log-amplitude et de phase : c'est l'objet de la partie suivante.

## 4.2. Étude paramétrique des spectres de phase et de log-amplitude

Comme dans la partie précédente pour l'étude de sensibilité des variances de log-amplitude et de phase, on va s'intéresser au comportement asymptotique hautes et basses fréquences des spectres de phase, dans la partie 4.2.1, et de log-amplitude, dans la partie 4.2.2. D'après la figure 3.10, les asymptotes du spectre de log-amplitude se croisent à une fréquence particulière, que l'on appelle fréquence de coupure et qui est notée  $\omega_c$  ou  $f_c$ . L'étude paramétrique de cette fréquence particulière est également menée en partie 4.2.2.

Les paramètres d'entrée sont les mêmes que ceux de l'étude des variances et sont décrits dans le tableau 4.1. Un paramètre supplémentaire vient s'y ajouter, la vitesse de drift du milieu, et notamment sa projection selon les axes  $u$  et  $v$  du repère lié au LOS.

### 4.2.1. Spectre de phase $W_\varphi$

D'après l'étude analytique des spectres de phase 3D (cf. figure 3.12), le comportement asymptotique aux hautes fréquences est plus représentatif du spectre de phase général. On va donc s'intéresser uniquement à l'asymptote hautes fréquences (HF), décrite par l'équation (3.115) (d'après l'égalité (3.131)) :

$$W_\varphi^{3D}(\omega \rightarrow +\infty) = \frac{2\pi^2\sqrt{\pi} \lambda^2 r_e^2 a^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono} \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{(AV_v^2 + BV_u^2 - 2CV_u V_v)^{1-\frac{p}{2}} (AB - C^2)^{\frac{p-1}{2}} \Gamma\left(\frac{p-3}{2}\right)} \omega^{1-p}. \quad (3.115)$$

L'indice spectral  $p$  est le seul paramètre qui impacte la pente du spectre de phase. Tous les paramètres influent sur le niveau de l'asymptote en ordonnée. On développe l'expression (3.116) pour faire apparaître les paramètres décrits dans le tableau 4.1 :

$$W_{\varphi}^{3D}(\omega \rightarrow +\infty) = \frac{\pi(2\pi)^{p-3} c^2 r_e^2 a^{3-p} A_y A_z \sigma_{\Delta N_e}^2 R_{iono} (p-3)}{f^2 (AV_v^2 + BV_u^2 - 2CV_u V_v)^{1-\frac{p}{2}} (AB - C^2)^{\frac{p-1}{2}} L_0^{p-3}} \omega^{1-p}. \quad (4.15)$$

- **Fréquence du signal  $f$  :**

D'après (4.15), l'asymptote  $W_{\varphi}^{3D}(\omega \rightarrow +\infty)$  est inversement proportionnelle au carré de la fréquence. Plus la fréquence augmente, plus le spectre est translaté verticalement vers les basses puissances (selon l'axe des ordonnées). La variance de phase  $\langle \varphi^2 \rangle$  est égale à l'intégrale sur toutes les fréquences du spectre de phase  $W_{\varphi}$ . Le comportement du spectre, en fonction de  $f$ , correspond bien aux conclusions de l'étude de  $\langle \varphi^2 \rangle$  menée dans la partie 4.1.1, à savoir que la variance  $\langle \varphi^2 \rangle$  est inversement proportionnelle au carré de la fréquence du signal. Cette conclusion est bien sûr valable dans la mesure où le comportement basses fréquences du spectre de phase (3.131) est le même que celui de l'asymptote hautes fréquences en fonction de  $f$ .

- **Altitude  $H$  de la couche ionosphérique :**

D'après l'étude de la variance de phase 4.1.2, on a montré que la variation de  $R_{iono}$  en fonction de l'altitude  $H$  n'était pas significative. L'asymptote HF (4.15) ne va donc pas varier avec  $H$ , ce qui correspond également aux conclusions établies pour la variance de phase  $\langle \varphi^2 \rangle$ .

- **Épaisseur  $\Delta H$  de la couche ionosphérique :**

Comme on l'a déjà vu dans la partie 4.1,  $R_{iono}$  suit les variations de l'épaisseur  $\Delta H$ . D'après (4.15), l'asymptote hautes fréquences du spectre de phase varie proportionnellement à l'épaisseur traversée  $R_{iono}$ . Le niveau de puissance du spectre

(4.15) augmente avec  $\Delta H$ , ce qui correspond bien au comportement de la variance de phase en fonction de  $\Delta H$  étudié dans la partie 4.1.1.

- **Variance de fluctuations électroniques  $\sigma_{\Delta N_e}^2$  :**

Toujours d'après la formulation (4.15),  $W_\varphi^{3D}(\omega \rightarrow +\infty)$  est proportionnel à  $\sigma_{\Delta N_e}^2$  : plus cette variance augmente, plus la densité spectrale de puissance augmente. Ce comportement est conforme à l'évolution de la variance  $\langle \varphi^2 \rangle$  en fonction de  $\sigma_{\Delta N_e}^2$  décrit en 4.1.1.

- **Échelle externe  $L_0$  :**

D'après (4.15), l'asymptote hautes fréquences du spectre de phase est proportionnelle à  $L_0^{3-p}$ . Comme  $p > 3$ , le niveau de l'asymptote diminue avec l'augmentation de l'échelle externe.

- **Indice spectral  $p$  :**

D'après l'expression (4.15), l'indice spectral  $p$  est directement lié à la pente du spectre de phase aux hautes fréquences, noté  $q = p - 1$ .  $p$  joue également un rôle dans le niveau de l'asymptote HF. La figure 4.13 représente l'allure des asymptotes HF obtenues pour des valeurs de  $p$  variant de 3 à 5. Les autres paramètres hautes latitudes sont issus du tableau 2.5.

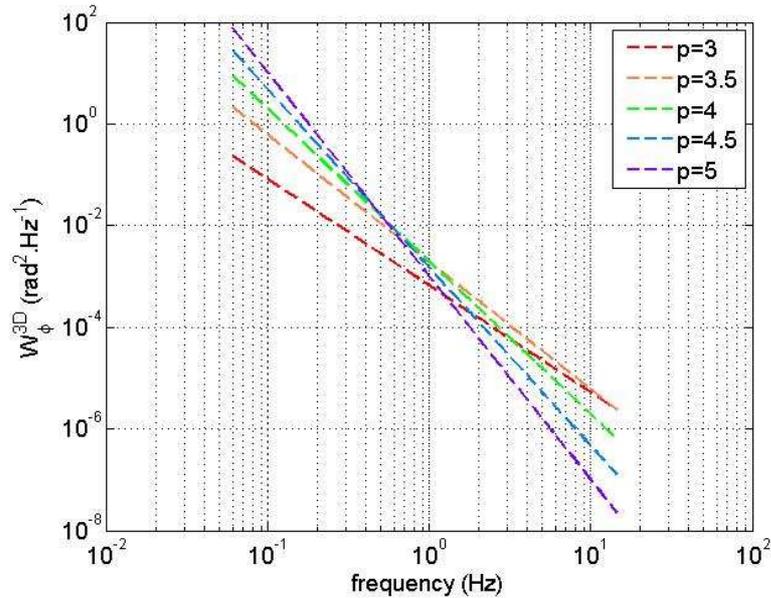


Figure 4.13 : Influence de l'indice spectral  $p$  sur l'asymptote hautes fréquences du spectre de phase.

Pour plus de lisibilité, les spectres analytiques n'ont pas été représentés sur la figure 4.13. On voit bien l'augmentation de la pente avec l'augmentation de l'indice spectral. On remarque également que  $p$  joue sur le niveau du spectre en ordonnées. On n'observe pas de translation selon l'axe des abscisses, donc peu d'influence de  $p$  sur la vitesse de drift, dans la situation hautes latitudes décrite ici.

- **Ratios d'anisotropie  $A_y$  et  $A_z$  et angles d'arrivée sur l'anisotropie :**

Comme dans la partie 4.1, on va s'intéresser aux trois principales morphologies d'irrégularités ionosphériques rencontrées aux hautes latitudes : ellipsoïdes, feuillets et ailes plasmiques (cf. figure 1.15).

Dans le cas d'une morphologie **ellipsoïdale** de type 1:1: $A_z$ , on étudie l'influence du ratio d'anisotropie  $A_z$  et de l'angle d'arrivée  $\gamma$  sur le comportement asymptotique hautes fréquences. Considérant cette morphologie, l'expression (4.15) se simplifie et donne :

$$W_{\phi}^{3D}(\omega \rightarrow +\infty) = \frac{\pi(2\pi)^{p-3} c^2 r_e^2 a^{3-p} A_z \sigma_{\Delta N_e}^2 R_{iono} (p-3)}{f^2 [\cos^2 \gamma V_v^2 + (1 + A_z^2 \sin^2 \gamma) V_u^2]^{1-\frac{p}{2}} [\cos^2 \gamma (1 + A_z^2 \sin^2 \gamma)]^{\frac{p-1}{2}} L_0^{p-3}} \omega^{1-p}. \quad (4.16)$$

La figure 4.14 donne une représentation de (4.16) en fonction du ratio d'anisotropie  $A_z$ , qui varie de 3 à 9, et de l'angle d'arrivée  $\gamma$ , qui varie de 0 (figure 4.14 (a)) à 15° (figure 4.14 (c)). Les autres paramètres d'entrée sont tirés du tableau 2.5.

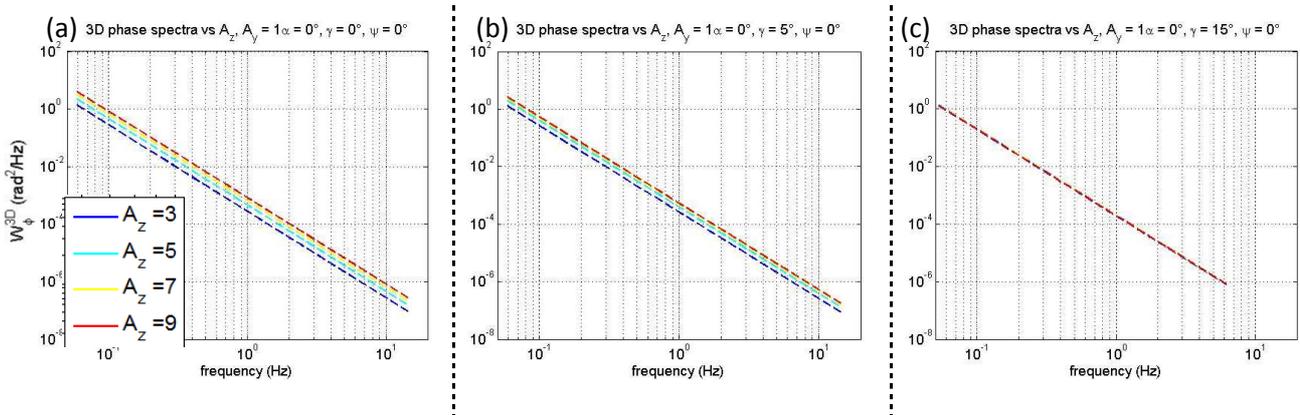


Figure 4.14 : Influence du ratio d'anisotropie  $A_z$  et de l'angle d'arrivée  $\gamma$  ((a)  $\gamma = 0$ , (b)  $\gamma = 5^\circ$  et (c)  $\gamma = 15^\circ$ ) sur l'asymptote hautes fréquences du spectre de phase, forme d'irrégularité ellipsoïdale

$$1: 1: A_z.$$

D'après la figure 4.14, pour des faibles valeurs de  $\gamma$ , plus l'anisotropie augmente, plus le niveau de l'asymptote augmente. A l'inverse, lorsque l'angle  $\gamma$  devient supérieur à une dizaine de degrés, le ratio d'anisotropie  $A_z$  n'influe pas sur le niveau de l'asymptote HF (4.16). On retrouve donc les résultats de l'étude de la variance de phase pour une morphologie ellipsoïdale des irrégularités ionosphériques (cf. figure 4.3) pour laquelle, à partir de 15° environ, ni  $\gamma$  ni  $A_z$  n'impactent plus les valeurs de l'indice de phase.

Dans le cas d'une morphologie de type **feuille** plasmique 1:  $A_z: A_z$ , on va s'intéresser à l'influence des angles d'arrivée  $\gamma$  et  $\psi$  ainsi qu'à celle du ratio d'anisotropie  $A_z$ . Les résultats sont représentés sur la figure 4.15 : sur la première ligne,  $\psi = 0$  et  $\gamma$  varie de 0

(a) à 15° (c), sur la deuxième ligne,  $\gamma$  suit les mêmes variations avec cette fois  $\psi = \gamma$  ((a), (b') et (c')).

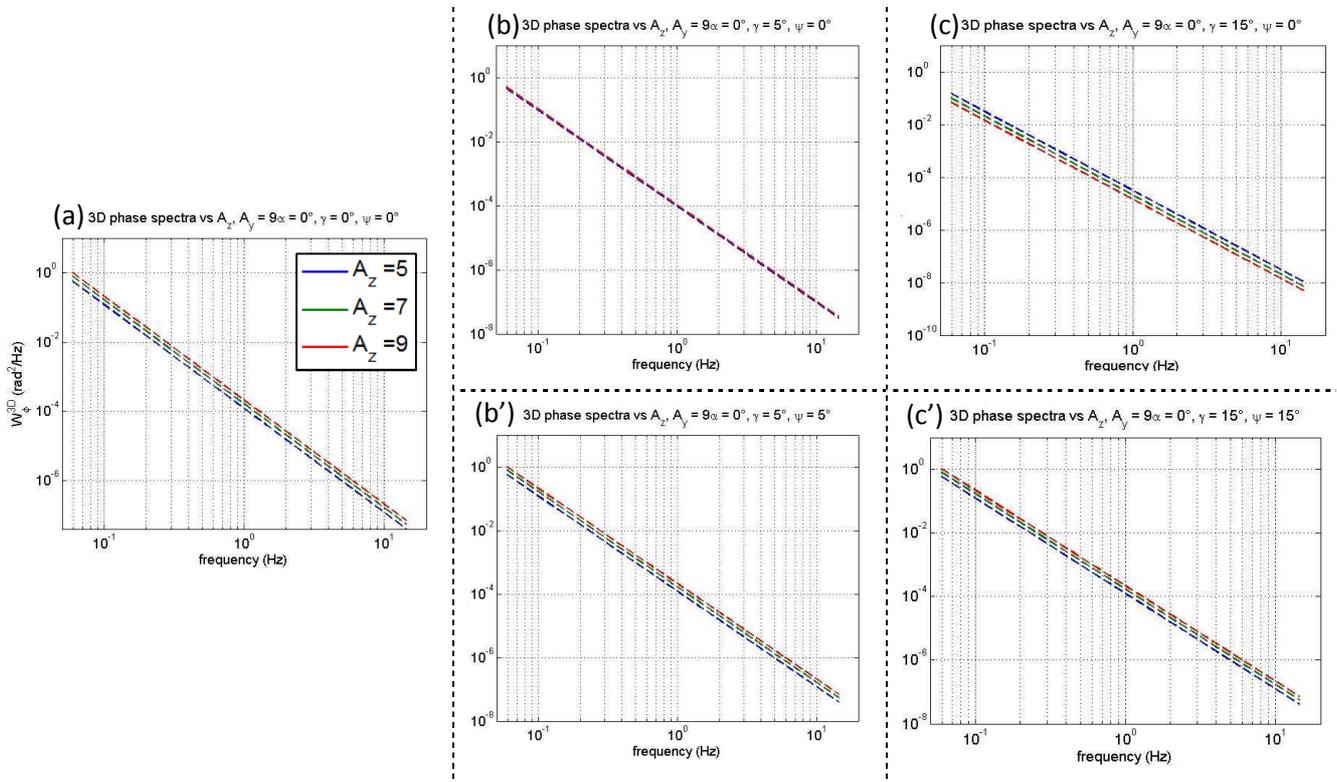


Figure 4.15 : Influence du ratio d'anisotropie  $A_z$  et des angles d'arrivée  $\gamma$  et  $\psi$  sur l'asymptote hautes fréquences du spectre de phase, pour une forme d'irrégularité en feuillets 1:  $A_z : A_z$ .

D'après la figure 4.15, lorsque  $\gamma$  augmente et que  $\psi = 0$ , l'asymptote HF diminue, d'autant plus que le ratio d'anisotropie  $A_z$  est élevé. En revanche, si  $\psi = \gamma$ , alors l'asymptote ne varie pratiquement pas avec l'augmentation de l'angle  $\gamma$ . On retrouve bien les résultats illustrés figure 4.6 : les valeurs maximales de l'indice de phase correspondent à des situations où  $\psi = \gamma$  et où le ratio d'anisotropie  $A_z$  est élevé. A  $\gamma$  fixé et en augmentant la valeur de l'angle  $\psi$  (comparaison figure 4.15 (b) et 4.15 (b')), la variance de phase augmente, d'autant plus que le ratio  $A_z$  est élevé.

Concernant la dernière géométrie de type **aile** de plasma, on va s'intéresser à l'impact des ratios d'anisotropie  $A_y$  et  $A_z$  ainsi que de l'angle d'arrivée  $\gamma$ . Pour faciliter la lecture des résultats et d'après la figure 4.15 montrant une plus forte variabilité de l'asymptote

dès lors que  $\psi = 0$ , on se limite donc à cette valeur. Les résultats sont résumés figure 4.16 : sur la première ligne,  $A_y = 1,8$  et  $\gamma$  varie de 0 (a) à 15° (c), sur la deuxième ligne,  $\gamma$  suit les mêmes variations avec cette fois  $A_y = 3$  ((a'), (b') et (c')).

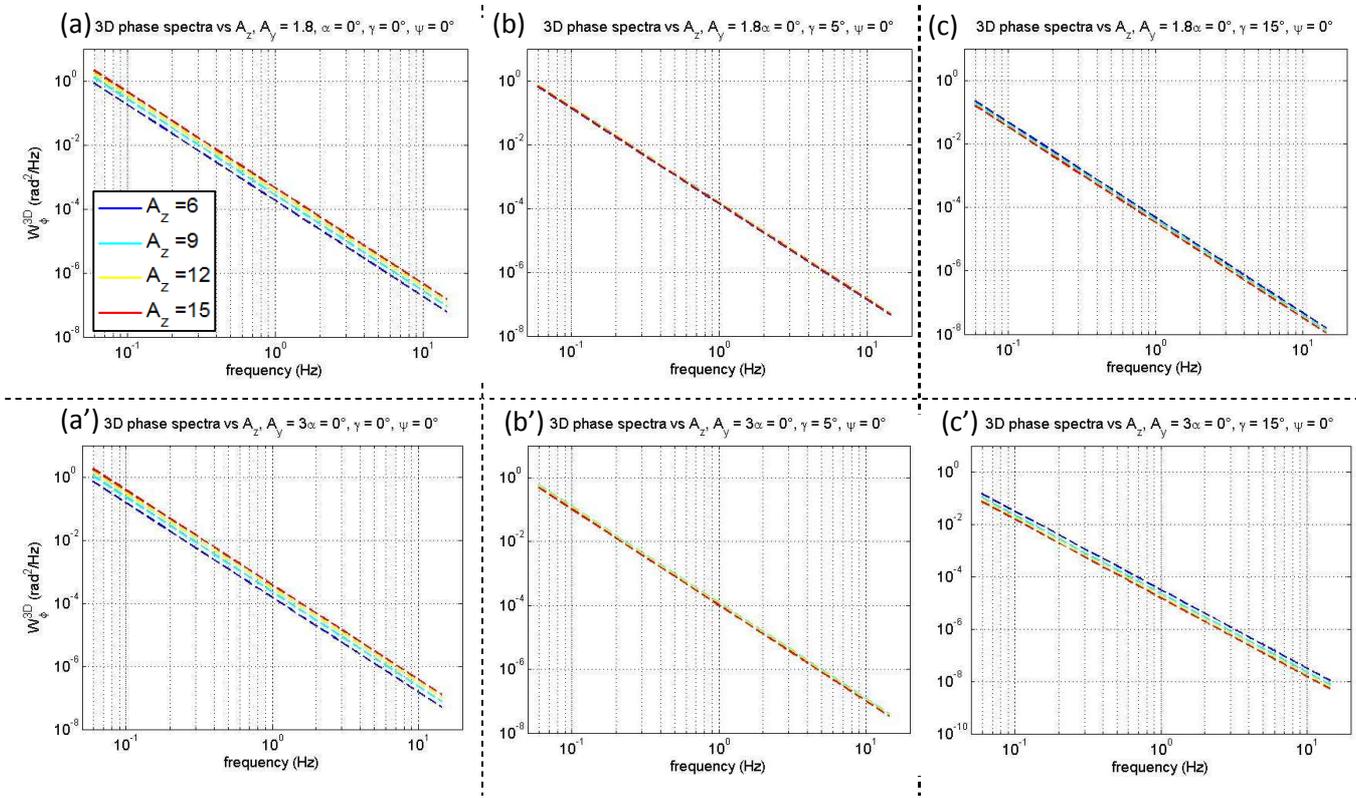


Figure 4.16 : Influence des ratios d'anisotropie  $A_y$  et  $A_z$  et des angles d'arrivée  $\gamma$  et  $\psi$  sur l'asymptote hautes fréquences du spectre de phase, ailes de plasma 1:  $A_y:A_z$ .

Sur la figure 4.16, on voit que l'asymptote HF diminue lorsque l'angle de visée  $\gamma$  augmente, d'autant plus que les ratios d'anisotropie principal  $A_z$  et secondaire  $A_y$  sont élevés. L'influence de  $A_y$  devient plus marquée lorsque  $\gamma \neq 0$ .

- **Vitesse de drift dans le plan transverse  $V_r$  :**

D'après l'équation (1.5), le déplacement du plasma ionosphérique se fait perpendiculairement aux lignes de champ magnétique terrestre, c'est-à-dire principalement dans le plan horizontal, aux latitudes polaires. La figure 1.3 montre des valeurs de vitesse de drift horizontale pouvant dépasser 1000 m/s. Dans le repère du LOS, les composantes  $V_u$  et  $V_v$  de la vitesse de drift projetée sur le plan transverse ( $u, v$ )

dépendent donc de l'angle d'arrivée  $\gamma$  du LOS par rapport au champ magnétique, ainsi que de la direction choisie pour les axes  $u$  et  $v$ . On va alors considérer des valeurs de  $V_u$  et  $V_v$  variant de -1000 à +1000 m/s.

D'après l'équation (4.15), on voit que l'impact des variations de la vitesse de drift dépend des facteurs  $A$ ,  $B$  et  $C$ , i.e. de la morphologie de l'irrégularité et des angles d'arrivée. Dans toutes les morphologies étudiées aux hautes latitudes, le choix a toujours été de considérer un angle  $\alpha = 0$  (cf. figure 2.4). L'angle  $\alpha$  n'influe pas sur les résultats 3D des variances de log-amplitude et de phase. En effet, c'est la coupe ellipsoïdale de l'irrégularité ionosphérique sur le plan transverse ( $u, v$ ) qui est prise en compte dans le calcul 3D de la variance de log-amplitude et la dimension longitudinale de l'irrégularité selon le LOS qui joue sur la variance de phase. La coupe transverse et la dimension longitudinale restent inchangées par rotation de l'irrégularité autour de l'axe  $s$ . On peut donc choisir un angle  $\alpha$  quelconque.

En posant  $\alpha = 0$ , le facteur  $C = 0^4$ . Ainsi, l'asymptote HF est une fonction croissante de la vitesse de drift, comme le montre la figure 4.17. Les autres paramètres d'entrée sont tirés du tableau 2.5.

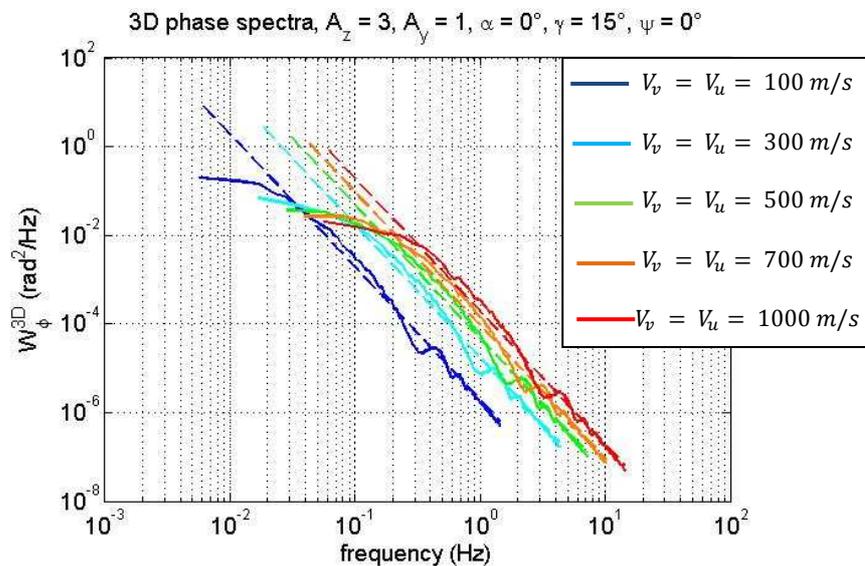


Figure 4.17 : Influence des composantes de la vitesse de drift  $V_u$  et  $V_v$  sur le spectre de phase (trait plein) et son asymptote HF (tirets), forme d'irrégularité ellipsoïdale 1: 1:  $A_z$ .

<sup>4</sup> On peut également définir l'axe  $u$  dans la direction de la vitesse de drift transverse  $V_r$ , ce qui donne  $V_v = 0$ . Dans ce cas  $\alpha \neq 0$ , mais les résultats présentés figure 4.17 restent valables.

La figure 4.17 montre une translation du spectre de phase vers les hautes fréquences avec l'augmentation de la vitesse de drift. En effet, d'après l'expression (3.90), la vitesse de drift n'impacte pas la valeur de la variance de phase 3D. On rappelle que la variance de phase correspond à l'intégrale du spectre de phase. Pour conserver une intégrale constante du spectre de phase en augmentant la valeur de la vitesse de drift, il faut donc déplacer le spectre vers les hautes fréquences.

De façon générale, les résultats obtenus dans l'étude de sensibilité du spectre de phase  $W_{\varphi}^{3D}$  sont similaires à ceux obtenus lors de l'étude de la variance de phase  $\langle \varphi^2 \rangle$ , menée en 4.1.1. On va maintenant s'intéresser aux comportements asymptotiques hautes et basses fréquences du spectre de log-amplitude.

#### 4.2.2. Spectre de log-amplitude $W_{\chi}$

Contrairement au spectre de phase, le comportement asymptotique HF et BF du spectre de log-amplitude est beaucoup plus marqué (cf. figure 3.10). On va donc s'intéresser à l'influence des paramètres d'entrée sur les asymptotes HF et BF du spectre de log-amplitude. D'après (3.131), les asymptotes HF des spectres de phase et de log-amplitude sont égales. On va donc se limiter, dans cette partie, à l'étude de sensibilité de l'asymptote BF du spectre de log-amplitude, décrite par l'équation (3.114) ainsi qu'à celle de la fréquence de coupure  $f_c$  (ou pulsation  $\omega_c^5$ ), i.e. fréquence à laquelle les deux asymptotes BF et HF se croisent :

$$W_{\chi}^{3D}(\omega_c)|_{\omega \rightarrow +\infty} = W_{\chi}^{3D}(\omega_c)|_{\omega \rightarrow 0}. \quad (4.17)$$

$$\omega_c = \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \cos\left(\frac{p+1}{4}\pi\right)} \right]^{\frac{1}{1-p}} \times \frac{(AV_v^2 + BV_u^2 - 2Cv_u v_v) \sqrt{2\pi f(AB - C^2)}}{\sqrt{c} L_V V_r} \quad (4.18)$$

<sup>5</sup> Comme  $\omega_c = 2\pi f_c$ , on utilise invariablement les notations  $\omega_c$  et  $f_c$  pour désigner la fréquence de coupure.

On reprend l'équation de l'asymptote BF (3.114) :

$$W_{\chi}^{3D}(\omega \rightarrow 0) = \frac{-\pi^3 \lambda^2 r_e^2 a^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono} V_r^{p-1}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \cos\left(\frac{p+1}{4}\pi\right) (AV_v^2 + BV_u^2 - 2CV_u V_v)^{p/2}} \left(\frac{L_V}{k_0}\right)^{\frac{p-1}{2}}. \quad (3.114)$$

On développe, dans (3.114), les différents termes pour faire apparaître les paramètres de cette étude, décrits dans le tableau 4.1. On obtient :

$W_{\chi}^{3D}(\omega \rightarrow 0) = \frac{-\pi\sqrt{\pi} c^{\frac{p+3}{2}} r_e^2 a^{3-p} A_y A_z \sigma_{\Delta N_e}^2 R_{iono} V_r^{p-1} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) (2\pi)^{\frac{p-5}{2}} L_V^{\frac{p-1}{2}}}{f^{\frac{p+3}{2}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p-3}{2}\right) \cos\left(\frac{p+1}{4}\pi\right) (AV_v^2 + BV_u^2 - 2CV_u V_v)^{p/2} L_0^{p-3}}. \quad (4.19)$
---

On va donc étudier l'impact des différents paramètres d'entrée sur l'asymptote BF (4.19) et la fréquence de coupure (4.18), mais également s'intéresser à l'allure générale des spectres de log-amplitude et fonction de ces paramètres.

- **Fréquence du signal  $f$  :**

D'après (4.19), l'asymptote BF du spectre de log-amplitude est inversement proportionnelle à  $f^{\frac{p+3}{2}}$ . La fréquence de coupure, selon (4.18), est proportionnelle à  $\sqrt{f}$ . Ainsi, plus la fréquence du signal traversant augmente, plus l'asymptote BF diminue mais plus la fréquence de coupure augmente. En effet, en comparant le comportement en fréquence des asymptotes BF (4.19) et HF (4.15), le niveau de l'asymptote BF diminue plus rapidement en fonction de  $f$  que l'asymptote HF. C'est pour cela qu'on observe un décalage vers les hautes fréquences de la fréquence de coupure. La figure 4.18 illustre ce phénomène. Les paramètres d'entrée sont issus du tableau 2.5 et les deux fréquences présentées correspondent aux fréquences porteuses du signal GPS L1 et L2.

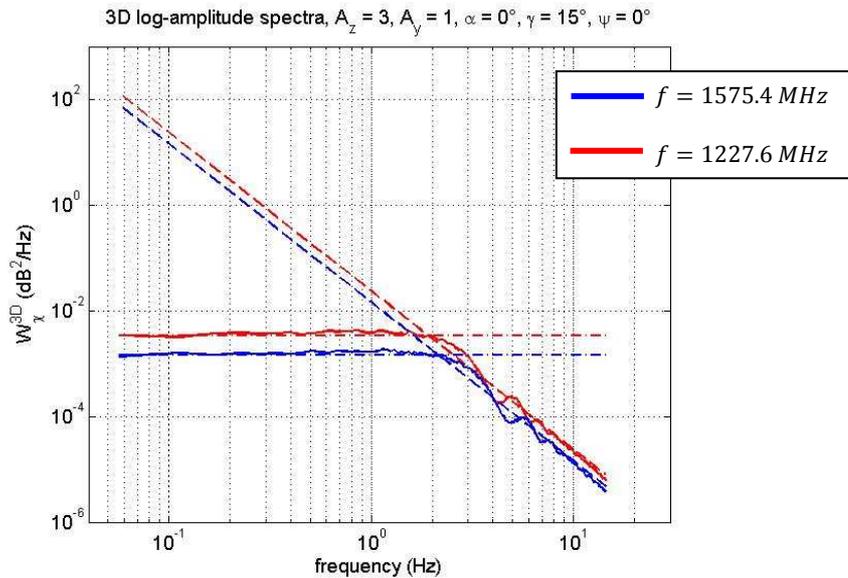


Figure 4.18 : Influence de la fréquence  $f$  du signal sur le spectre de log-amplitude (trait plein) et les asymptotes HF (tirets) et BF (tirets-pointillés).

D'après la figure 4.18, on retrouve bien le comportement de la variance de log-amplitude qui diminue en fonction de la fréquence du signal (cf. 4.1.3).

- **Altitude  $H$  de la couche ionosphérique :**

Comme on l'a montré en 4.1.1, l'altitude  $H$  n'influe pas de manière significative sur l'épaisseur d'ionosphère  $R_{iono}$  effectivement traversée par le signal. On s'intéresse donc uniquement à l'impact de  $H$  sur la distance  $L_V$ .

Les conclusions de l'étude menée en 4.1.3 sur la variance de log-amplitude peuvent être reprises ici, à savoir que, d'après l'expression (4.19) et sachant que  $p > 3$ , plus l'altitude de la couche ionosphérique augmente, plus l'asymptote BF augmente.

Concernant la fréquence de coupure (4.18), celle-ci diminue en  $\sqrt{L_V}$ , donc elle diminue lorsque  $H$  augmente. Cela est dû au fait que l'asymptote HF (4.15) ne varie pas avec  $H$  (cf. section 4.2.1). Cela entraîne une diminution de  $\omega_c$ , comme le montre la figure 4.19.

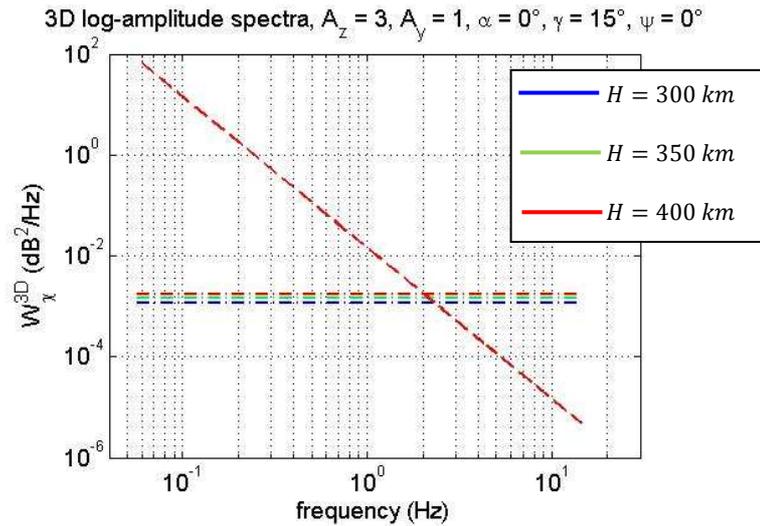


Figure 4.19 : Influence de l'altitude  $H$  de la couche ionosphérique sur les asymptotes HF et BF du spectre de log-amplitude.

De même que dans l'étude précédente sur l'influence de la fréquence du signal, on retrouve bien le comportement de la variance de log-amplitude en fonction de l'altitude de la couche ionosphérique (4.1.2).

- **Épaisseur  $\Delta H$  de la couche ionosphérique :**

On peut reprendre ici les mêmes conclusions que dans l'étude de l'asymptote HF du spectre de phase (4.2.1). En effet, d'après (4.19), l'asymptote BF du spectre de log-amplitude varie proportionnellement à l'épaisseur traversée  $R_{iono}$ . Comme l'asymptote HF de ce spectre augmente aussi proportionnellement à l'épaisseur traversée, la fréquence de coupure est indépendante de l'épaisseur  $\Delta H$  (cf. (4.14)) et l'intégrale du spectre suit bien la même évolution que la variance de log-amplitude décrite en partie 4.1.2, à savoir qu'elle augmente proportionnellement à  $R_{iono}$ .

- **Variance des fluctuations de densité électronique  $\sigma_{\Delta N_e}^2$**

D'après (4.19), l'asymptote BF est proportionnelle à  $\sigma_{\Delta N_e}^2$ , tout comme l'asymptote HF (4.15). L'intégrale du spectre de log-amplitude évolue donc de la même façon que la

variance de log-amplitude en fonction de  $\sigma_{\Delta N_e}^2$  (cf. partie 4.1.2) et on a bien la fréquence de coupure (4.14) qui ne dépend pas de  $\sigma_{\Delta N_e}^2$ .

- **Échelle externe  $L_0$  :**

Le comportement des asymptotes BF (4.19) et HF (4.15) est identique, inversement proportionnel à  $L_0^{p-3}$ . La fréquence de coupure (4.18) ne dépend pas de  $L_0$ . Comme  $p > 3$ , plus l'échelle externe  $L_0$  augmente, plus l'asymptote BF diminue. On rejoint donc les conclusions établies pour la variance de log-amplitude en fonction de  $L_0$  (cf. 4.1.2).

- **Indice spectral  $p$  :**

L'impact de ce paramètre est plus complexe à estimer. En effet, il joue sur la pente et l'asymptote HF (cf. figure 4.13) mais également sur le niveau de l'asymptote BF et la valeur de la fréquence de coupure. La figure 4.20 donne les variations du spectre de log-amplitude, donc des asymptotes BF et HF et de la fréquence de coupure, en fonction de l'indice spectral  $p$ .

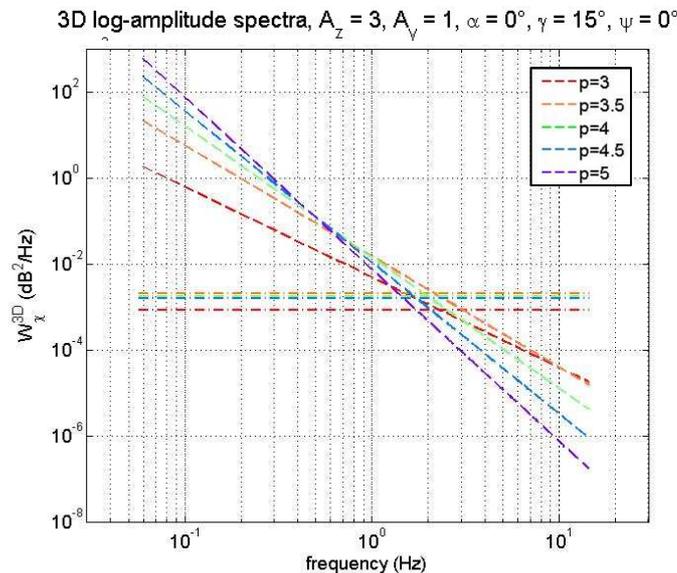


Figure 4.20 : Influence de l'indice spectral  $p$  sur les asymptotes HF et BF du spectre de log-amplitude.

Figure 4.20, on voit que la pente de l'asymptote HF et son niveau sont influencés par la valeur de l'indice spectral. La fréquence de coupure diminue d'autant plus que  $p$  est grand. Le niveau de l'asymptote BF augmente lorsque  $p$  varie de 3 à 3,5, puis diminue pour  $p > 3,5$ . Pour  $p = 5$ , l'asymptote BF diverge : en effet, d'après l'expression (4.19), le terme du dénominateur  $\cos\left(\frac{p+1}{4}\pi\right)$  s'annule pour cette valeur de l'indice spectral.

Un point important à noter ici est que, pour un spectre de log-amplitude mesuré, la valeur de la pente HF, notée  $q$ , donne facilement accès à l'indice spectral  $p$  correspondant, sachant que  $q = p - 1$ . D'après l'expression de la fréquence de coupure (4.18), le terme ne dépendant pas de  $p$  peut donc être calculé. Comme il est fonction de l'anisotropie, des angles d'arrivée et de la vitesse de drift, selon la morphologie des irrégularités ionosphériques, certains termes pourraient être simplifiés et permettre une inversion des données spectrales de log-amplitude.

- **Ratios d'anisotropie  $A_y$  et  $A_z$  et angles d'arrivée sur l'irrégularité :**

On reprend les 3 morphologies typiques des hautes latitudes : ellipsoïdes, feuillets et ailes de plasma.

On considère dans un premier temps la forme **ellipsoïdale**, telle que  $1:1:A_z$ ,  $\alpha = 0$  et  $\psi = 0$ . La fréquence de coupure (4.18) et l'asymptote HF (4.19) deviennent :

$$\omega_c = \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \cos\left(\frac{p+1}{4}\pi\right)} \right]^{\frac{1}{1-p}} \quad (4.20)$$

$$\times \frac{[V_v^2 + [1 + \sin^2 \gamma (A_z^2 - 1)]V_u^2] \sqrt{2\pi f [1 + \sin^2 \gamma (A_z^2 - 1)]}}{\sqrt{c L_V V_r}}$$

$$W_\chi^{3D}(\omega \rightarrow 0) = \frac{-\pi^3 \lambda^2 r_e^2 A_z C_s R_{iono} V_r^{p-1}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \cos\left(\frac{p+1}{4}\pi\right) [V_v^2 + [1 + \sin^2 \gamma (A_z^2 - 1)]V_u^2]^{p/2}} \left(\frac{L_V}{k_0}\right)^{\frac{p-1}{2}} \quad (4.21)$$

La figure 4.21 représente les spectres de log-amplitude analytique et les asymptotes BF et HF correspondantes pour différentes valeurs du ratio  $A_z$  et de l'angle d'arrivée  $\gamma$ . Pour

chacun des cas (a), (b) et (c) présentés figure 4.21,  $A_z$  varie de 3 à 9. De gauche à droite,  $\gamma$  augmente de 0 (a) à 15° (c).

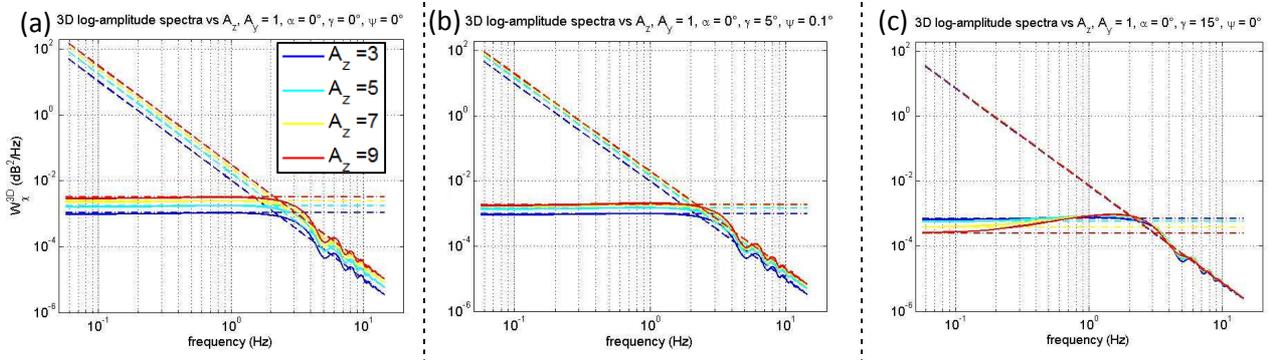


Figure 4.21 : Influence du ratio d'anisotropie  $A_z$  et de l'angle d'arrivée  $\gamma$  sur le spectre de log-amplitude (trait plein) et les asymptotes BF (tirets-pointillés) et HF (tirets), pour une forme d'irrégularité ellipsoïdale 1: 1:  $A_z$ .

Dans la géométrie ellipsoïdale choisie et avec les paramètres d'entrée définis dans le tableau 2.5, d'après la figure 4.21, les variations de  $A_z$  n'influent pas sur l'asymptote hautes fréquences dès lors que  $\gamma > 10^\circ$ . En revanche, l'asymptote basses fréquences et la fréquence de coupure varient en fonction de  $A_z$  : l'asymptote BF diminue avec  $\gamma$  et  $A_z$ , déplaçant du même coup  $\omega_c$  vers les hautes fréquences. On remarque également que la forme générale du spectre change beaucoup : la tangente à l'asymptote BF se fait à des fréquences d'autant plus basses que  $A_z$  est élevé et la valeur maximale du spectre analytique augmente lorsque  $\gamma > 10^\circ$ .

Pour une morphologie en **feuillets**, 1:  $A_z$ :  $A_z$ , on va étudier l'impact des angles d'arrivée  $\gamma$  et  $\psi$ , ainsi que celui du ratio d'anisotropie  $A_z$ . La figure 4.22 illustre l'influence de ces 3 paramètres, les autres étant toujours issus du tableau 2.5. Sur la première ligne,  $\psi = 0$  et  $\gamma$  augmente de 0 (a) à 15° (c). Sur la deuxième ligne,  $\gamma$  suit les mêmes augmentations (de 0 (a) à 15° (c')) et cette fois  $\psi = \gamma$ . Sur chaque graphique, le ratio  $A_z$  varie de 5 à 9. L'étude porte sur les asymptotes HF et BF mais également sur le spectre analytique (trait plein).

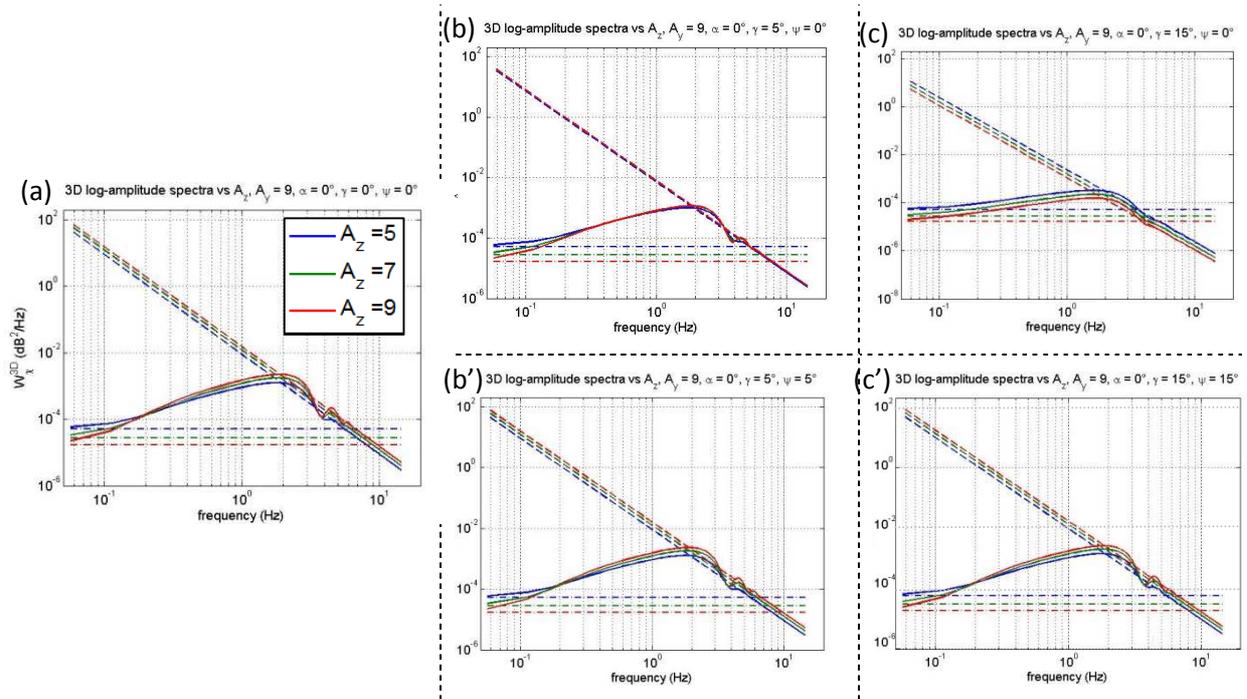


Figure 4.22 : Influence du ratio d'anisotropie  $A_z$  et des angles d'arrivée  $\gamma$  et  $\psi$  sur le spectre de log-amplitude (trait plein) et les asymptotes BF (tirets-pointillés) et HF (tirets), pour une forme d'irrégularité en feuillet 1:  $A_z: A_z$ .

D'après la figure 4.22, on remarque que le comportement asymptotique BF du spectre est loin de la formulation établie en (3.113), surtout pour des valeurs faibles de l'angle  $\gamma$  et lorsque  $\psi = \gamma$ . Pour  $\gamma > 10^\circ$  et  $\psi = 0$  (figure 4.22 (c)), l'asymptote HF (4.15) diminue lorsque  $\gamma$  et  $A_z$  augmentent. L'asymptote BF restant inchangée, c'est la fréquence de coupure qui diminue également.

La dernière morphologie, la moins fréquemment rencontrée, est l'**aile** de plasma. Les résultats présentés figure 4.23 donnent une représentation de l'influence de l'angle d'arrivée  $\gamma$  et des ratios d'anisotropie  $A_y$  et  $A_z$  sur le spectre de log-amplitude et la fréquence de coupure ( $\psi = 0$ ). Sur chacun des graphiques,  $A_z$  varie de 6 à 15. De gauche à droite,  $\gamma$  varie de 0 ((a) et (a')) à  $15^\circ$  ((c) et (c')). La première ligne correspond à  $A_y = 1,8$  et la deuxième ligne à  $A_y = 3$ .

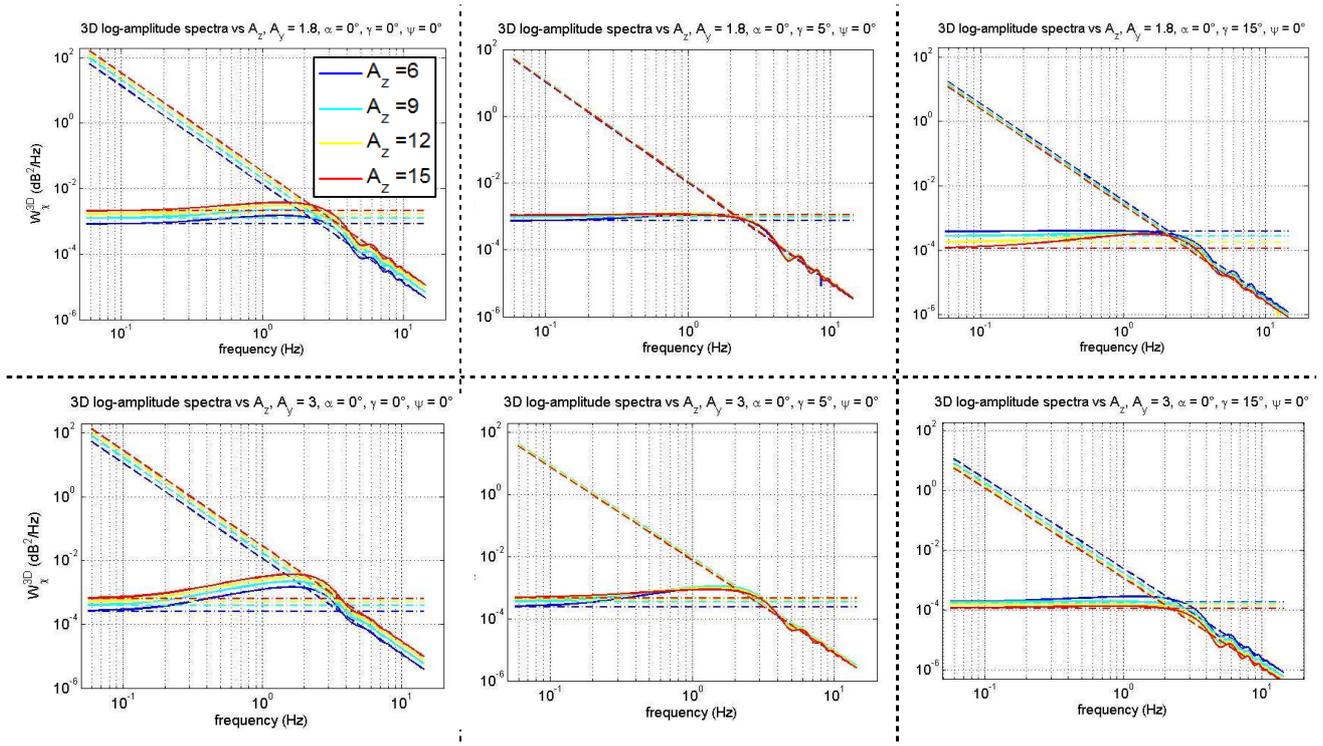


Figure 4.23 : Influence des ratios d'anisotropie  $A_z$  et  $A_y$ , et de l'angle d'arrivée  $\gamma$  sur le spectre de log-amplitude (trait plein) et les asymptotes BF (tirets-pointillés) et HF (tirets), pour une forme d'irrégularité en aile 1:  $A_y:A_z$ .

Sur la figure 4.23, on voit que l'allure générale des spectres ressemble davantage aux résultats obtenus pour une forme d'irrégularités de type ellipsoïdal. Distinguer l'influence de chacun des paramètres reste malgré tout relativement complexe pour cette morphologie. Par exemple, selon que l'angle  $\gamma$  est inférieur ou supérieur à  $10^\circ$ , l'augmentation du ratio  $A_y$  va conduire soit à une augmentation du niveau de l'asymptote BF (figures 4.23 (a) et (a')), soit à une diminution de ce niveau (figures 4.23 (c) et (c')).

- **Vitesse de drift dans le plan transverse  $V_r$  :**

On voit, d'après l'équation (4.19), que l'impact des variations de la vitesse de drift sur l'asymptote BF dépend des facteurs  $A$ ,  $B$  et  $C$ , i.e. de la morphologie de l'irrégularité et des angles d'arrivée. Pour faciliter les calculs, on pose, comme dans l'étude menée en section 4.2.1,  $\alpha = 0$ , ainsi le facteur  $C = 0$ . Comme  $A \geq 1$  et  $B \geq 1$  (cf. (2.52)),  $(AV_v^2 + BV_u^2)^{p/2} \geq V_r^{p-1}$ , donc l'asymptote BF diminue avec l'augmentation de la vitesse

de drift. On a montré en 4.2.1 que l'asymptote HF augmente avec  $V_r$ . Cela entraîne un déplacement de  $\omega_c$  vers les hautes fréquences, comme l'illustre la figure 4.24, pour laquelle les autres paramètres sont issus du tableau hautes latitudes 2.5.

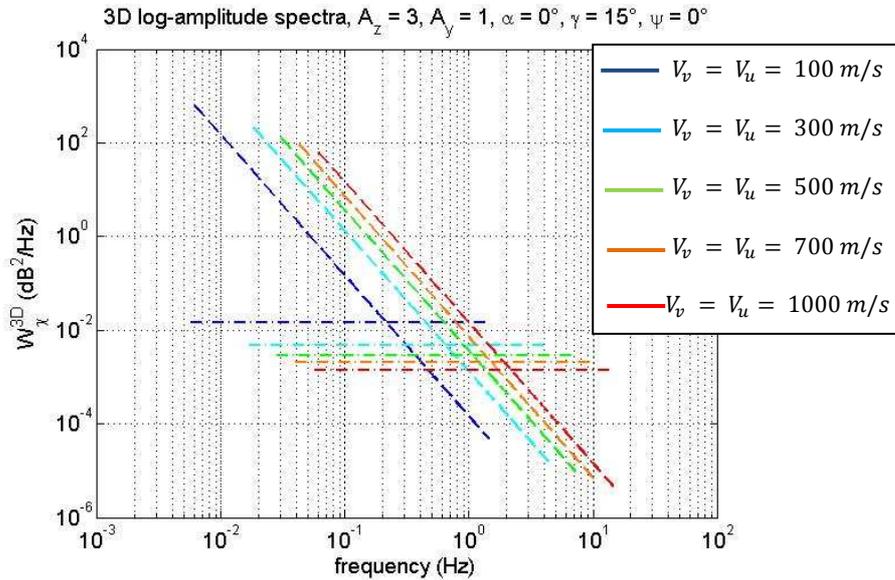


Figure 4.24 : Influence des composantes de la vitesse de drift  $V_u$  et  $V_v$  sur les asymptotes HF et BF du spectre de log-amplitude.

La figure 4.24 montre une translation du spectre de log-amplitude vers les hautes fréquences et, selon l'axe des ordonnées, vers les puissances plus basses. Ainsi, l'intégrale des spectres, donc la variance de log-amplitude, ne varie pas avec l'augmentation de la vitesse de drift.

### 4.2.3. Synthèse de l'étude paramétrique des spectres de log-amplitude et de phase

Le tableau 4.3 résume l'influence des paramètres d'entrée sur les spectres de log-amplitude et de phase, plus précisément sur l'asymptote hautes fréquences, commune aux spectres de phase et de log-amplitude, l'asymptote basses fréquences et la fréquence de coupure du spectre de log-amplitude.

Paramètres d'entrée (valeurs croissantes)		Asymptote HF (spectres de phase et de log-amplitude)	Asymptote BF (spectre de log-amplitude)	Fréquence de coupure (spectre de log-amplitude)
Fréquence $f$		↘	↘	↗
Altitude $H$		→	↗	↘
Épaisseur $\Delta H$		↗	↗	→
Variance de densité électronique $\sigma_{\Delta N_e}^2$		↗	↗	→
Échelle externe $L_0$		↘	↘	→
Indice spectral $p$		↗	↗ si $p < 3.5$ , ↘ sinon	↘
Vitesse de drift $V_r$		↗	↘	↗
Géométrie et angles d'arrivée	Ellipsoïde	↘ $\gamma$	↘ $\gamma$	↘ $\gamma$

Tableau 4.3 : Synthèse de l'étude de sensibilité des spectres de log-amplitude et de phase 3D.

À partir de cette étude des spectres de phase et de log-amplitude, des possibilités d'inversion se présentent. La pente des spectres aux hautes fréquences,  $q$ , donne notamment accès à l'indice spectral  $p$ , selon  $p = q + 1$ .

La formulation de la fréquence de coupure (4.18) est intéressante dans le sens où elle pourrait permettre, moyennant une morphologie ellipsoïdale des irrégularités ionosphériques, de remonter à la valeur du ratio d'anisotropie  $A_z$ . En effet, l'ellipsoïde est la forme d'anisotropie rencontrée majoritairement aux hautes latitudes. Les composantes transverses de la vitesse de drift peuvent être estimées par radar (cf. figure 1.3). Connaissant la direction du champ magnétique, l'angle  $\gamma$  est donc fixé par l'expérience. En injectant la valeur du ratio  $A_z$  dans l'expression asymptotique BF (4.19),

on peut alors obtenir le produit  $C_s R_{iono}$ . À partir de ces données inversées et de l'expression asymptotique HF (4.15), on peut remonter à l'échelle externe  $L_0$ .

Ce travail d'inversion théorique se heurte cependant à certaines limitations expérimentales. Tout d'abord, la durée d'acquisition d'un événement de scintillation doit tenir compte de la forte variabilité temporelle du milieu. On considère ici une durée maximale de 1 minute, ce qui correspond à une fréquence minimale accessible sur les spectres d'environ 0,017 Hz. De plus, le filtrage des basses fréquences<sup>6</sup> des données brutes empêche l'accès aux fréquences inférieures à 0,1 Hz, donc, dans certains cas, à l'asymptote BF de la log-amplitude (cf. figures 4.21 et 4.24). Si l'asymptote BF ne peut être obtenue, la fréquence de coupure non plus, réduisant les possibilités d'inversion. Une autre limitation à l'utilisation des spectres de log-amplitude vient du fait que les données d'amplitude ne sont souvent pas calibrées, rendant du même coup les niveaux des spectres non exploitables. Enfin les cartes radar fournissant la vitesse de drift ne couvrent pas toutes les latitudes, comme le montre par exemple la figure 4.25 avec la couverture du réseau SuperDARN.

---

<sup>6</sup> Ce filtrage, expliqué dans [Forte & Radicella, 2002], sert à isoler l'événement de scintillation en le distinguant des variations basses fréquences dues, notamment, au déplacement du satellite. Une fréquence de 0,1 Hz est presque systématiquement proposée pour l'étude des scintillations ionosphériques, mais elle est remise en question pour le traitement d'événements aux hautes latitudes. En effet, à cause de la vitesse de drift importante dans la direction transverse au LOS aux latitudes polaires, les spectres fréquentiels mesurés sont translatés vers les hautes fréquences. La composante basse fréquence devient alors très importante, notamment pour les spectres de phase, et explique que l'on observe des événements de scintillation de phase sans scintillation d'amplitude dans ces régions.

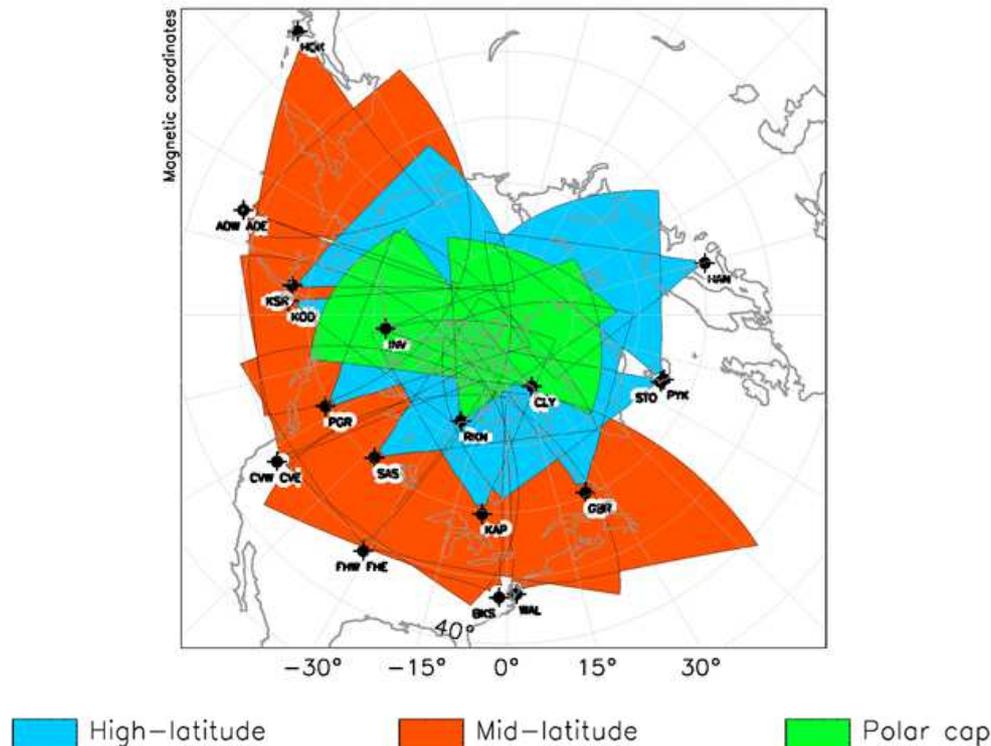


Figure 4.25 : Carte de couverture du réseau SuperDARN aux latitudes polaires (pôle Nord) (<http://vt.superdarn.org/>).

Sur la figure 4.25, on voit notamment que l'Europe du Nord n'est pas couverte par le réseau SuperDARN, contrairement à l'Amérique du Nord et aux régions arctiques.

### Conclusion sur l'étude de sensibilité des spectres et des variances de log-amplitude et de phase

Cette étude de sensibilité des spectres et des variances de phase et de log-amplitude permet finalement de quantifier et d'interpréter l'impact des différents paramètres entrant en jeu dans le phénomène de scintillation ionosphérique. Ce travail théorique est basé sur les dérivations analytiques 3D à trois axes d'anisotropie dérivées au chapitre 3.

Les expressions des variances de log-amplitude et de phase, avec ces trois axes d'anisotropie, existent déjà dans la littérature [Rino, 1979 (1)]. Cependant, elles ont été dérivées dans le repère géomagnétique. Dans l'étude paramétrique menée ici, on voit l'intérêt des dérivations dans le repère du LOS, repère choisi dans cette thèse. En effet,

les grandeurs  $A$ ,  $B$ ,  $A'$  et  $B'$  sont facilement interprétables en terme de dimension de la coupe de l'irrégularité dans le plan transverse  $(u, v)$  et de dimension longitudinale, dans la direction du LOS.

Concernant les spectres, une étude de sensibilité a été menée par Crane [1976] mais avec un seul ratio d'anisotropie le long du champ magnétique terrestre. Dans [Deshpande et al., 2014], l'étude paramétrique sur les spectres et les indices de scintillation ne repose que sur les résultats numériques du modèle SIGMA et non sur des formulations analytiques.

Le travail complet de modélisation et l'étude de sensibilité menée dans ce chapitre offrent donc des possibilités d'inversion des données brutes de scintillation. Ces perspectives sont présentées dans la dernière partie de ce manuscrit.

### **4.3. Analyse préliminaire des spectres fréquentiels expérimentaux**

Le premier objectif de cette thèse est de modéliser complètement le problème direct de la scintillation ionosphérique. Afin de valider ce modèle numérique et analytique, la confrontation aux données réelles est une étape importante. Or, comme précisé en introduction de ce chapitre, le traitement de données brutes représente un investissement en temps très important. Un travail d'analyse complet n'a donc pas pu être mené. Cette section propose donc une analyse préliminaire des données brutes, en particulier des spectres fréquentiels de phase et de log-amplitude car ils offrent, d'après l'étude de sensibilité menée en 4.2, des possibilités d'inversion intéressantes. Les données brutes analysées et présentées ici sont issues de scintillateurs hautes latitudes en Norvège et au Canada.

#### **4.3.1. Données expérimentales hautes latitudes**

L'étude R&T intitulée Ionospheric channel modeling at L band in polar region, financée par le CNES et impliquant le CNES, l'Onera, Telecom Bretagne, a démarré en 2011. L'objectif était de déterminer une relation entre l'activité magnétique du système Terre-

Soleil (SSN, Kp) et les évènements ionosphériques, tels que les scintillations et les fronts de TEC, qui impactent fortement les signaux en bande L en Europe du Nord. Le travail de thèse présenté dans ce manuscrit s'inscrit dans la continuité de cette étude. Afin d'obtenir des données expérimentales de scintillation ionosphérique aux latitudes polaires, complémentaires des données des réseaux de l'International GNSS Service (IGS) et de l'European Reference Frame (EUREF) disponibles publiquement, un partenariat a été établi entre le CNES, l'Onera, le Norwegian Space Center (NSC) et la Norwegian Mapping Authority (NMA). La NMA dispose en effet d'un important réseau de récepteurs GPS sur toute la surface de la Norvège, donc des infrastructures pour recueillir des données de scintillation. Trois scintillateurs ont été installés dans 3 stations de mesure localisées à des latitudes différentes, comme illustré sur la figure 4.26.

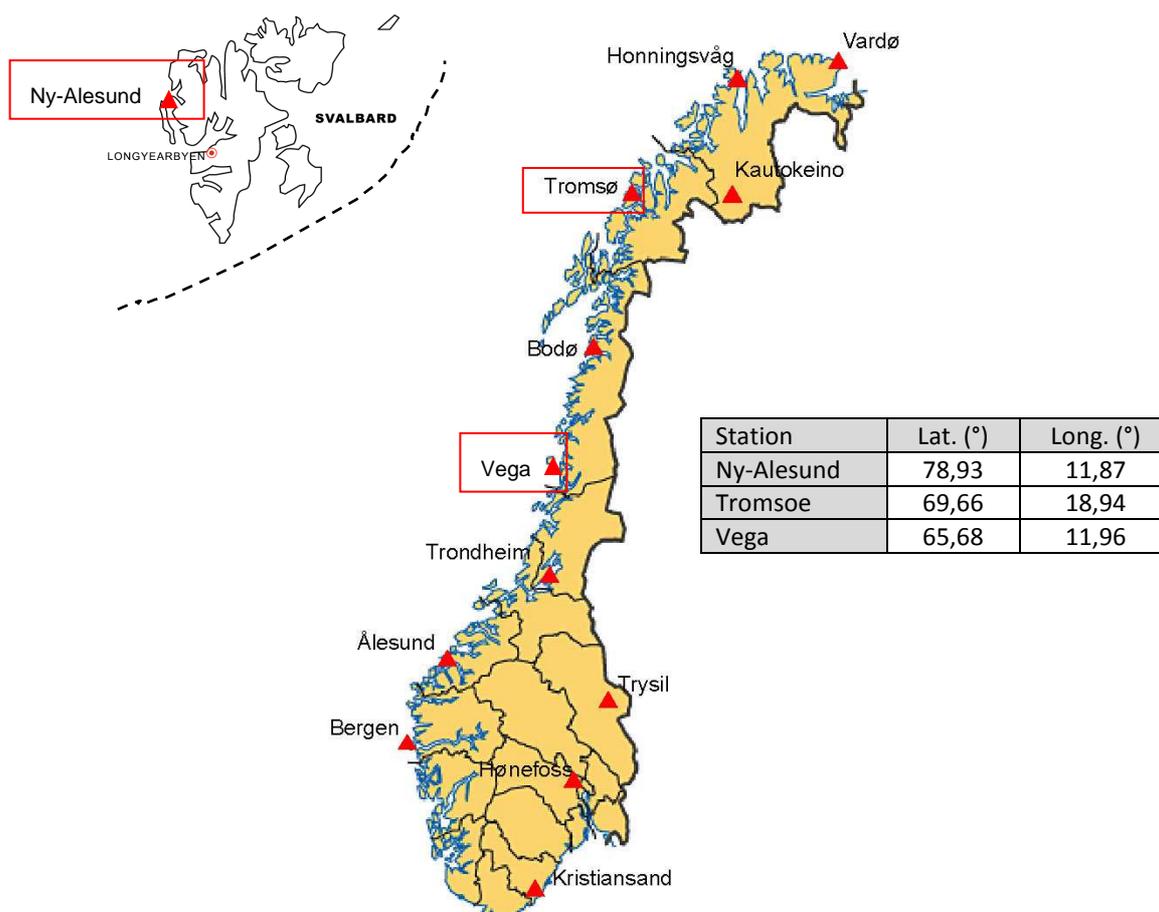


Figure 4.26 : Localisation des scintillateurs en Norvège.

Les récepteurs, ainsi localisés, permettent de balayer la couche ionosphérique en latitude et notamment dans l'ovale auroral (cf. figure 1.6). Pour les stations Vega et Tromsø, on dispose de données brutes depuis le 15 février 2012. Pour la station Ny-Alesund, le scintillateur a été installé plus tardivement et les données collectées débutent en janvier 2013. Dans cette thèse, le traitement porte jusqu'en mai 2013. Plus d'un an de données est donc disponible pour les deux stations continentales : une étude statistique peut donc être menée afin d'identifier les événements de scintillation les plus probants.

Les scintillateurs utilisés pour cette étude sont des PolaRxS de Septentrio [Septentrio, 2013]. Les sorties d'amplitude et de phase des signaux des satellites GNSS en visibilité sont échantillonnées à 50 Hz<sup>7</sup> et enregistrées au format Septentrio Binary Format (SBF) pour chacune des fréquences porteuses L1 et L2. L'échantillonnage haute fréquence est le principal avantage de ces appareils, en comparaison avec les récepteurs GPS des réseaux IGS et EUREF qui donnent des valeurs de pseudo-distance toutes les 30 secondes. Avec ces données haute fréquence, l'analyse spectrale de log-amplitude et de phase des signaux peuvent ainsi fournir des informations jusqu'à des fréquences de 25 Hz, d'après le critère de Nyquist.

Le logiciel RxLogger Tool convertit toutes les heures les fichiers SBF en ISMR (Ionospheric Scintillation Monitoring Records), qui contiennent les valeurs de TEC et les indices de scintillation d'amplitude et de phase pour chaque satellite en visibilité. Une routine permet de convertir les fichiers SBF en ASCII qui contiennent les deux valeurs de corrélation du signal brut  $I$  (composante en phase) et  $Q$  (composante en quadrature de phase), échantillonnées à 50 Hz. A partir de ces sorties, on peut obtenir l'amplitude  $\mathcal{A}$  et la phase  $\varphi$  du signal reçu :

$$\mathcal{A} = \sqrt{I^2 + Q^2} \quad (4.18)$$

$$\varphi = \text{atan} \frac{Q}{I} \quad (4.19)$$

On dispose donc des variations temporelles de la phase et de l'amplitude des signaux bruts. On va donc pouvoir analyser leur comportement en fréquence. Cependant, il convient d'identifier les événements de scintillation les plus probants parmi plus d'une

---

<sup>7</sup> Une partie des mesures est échantillonnée à 100 Hz.

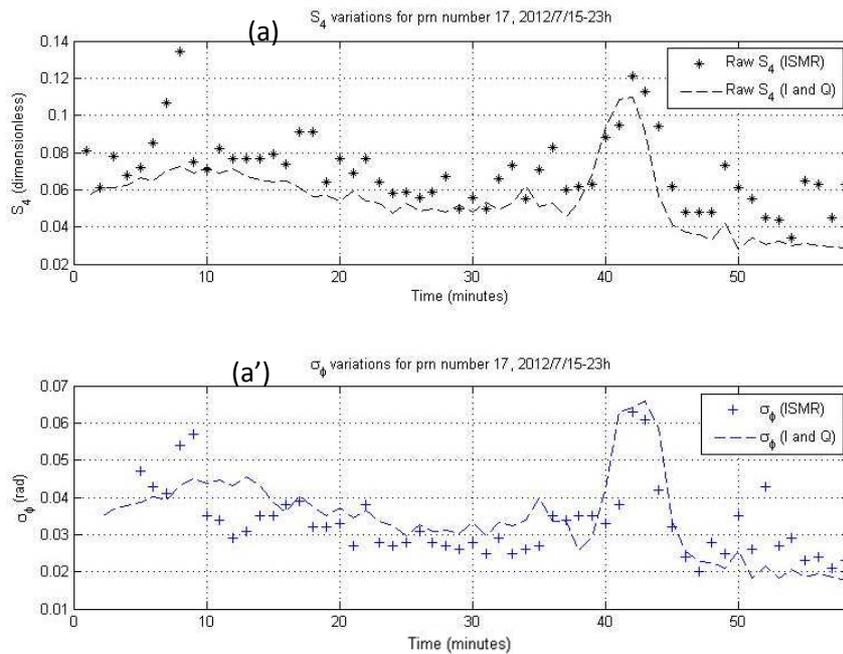
année de données expérimentales. On va donc s'intéresser aux indices de scintillation d'amplitude et de phase.

### 4.3.2. Sélection des événements de scintillation

Les indices de scintillation d'amplitude  $S_4$  et de phase  $\sigma_\varphi$  sont calculés à partir de  $\mathcal{A}$  et  $\varphi$ , sur une fenêtre glissante de 60 secondes. La phase du signal est d'abord filtrée par un filtre passe-haut à 0,1 Hz (filtre de Butterworth d'ordre 6) [Van Dierendonck & Arbesser-Rastburg, 2004]. Concernant l'indice de scintillation d'amplitude, d'après [Van Dierendonck & Arbesser-Rastburg, 2004] et [Rui et al., 2012], la composante basse fréquence de l'intensité du signal  $SI$  est filtrée en calculant<sup>8</sup> :

$$SI = \frac{I^2 + Q^2}{\langle I^2 + Q^2 \rangle_{60s}}. \quad (4.20)$$

On injecte ensuite l'expression de  $SI$  (4.20) dans (1.17) pour calculer l'indice  $S_4$ . La figure 4.27 donne quelques comparaisons entre les indices  $S_4$  et  $\sigma_\varphi$  fournis par les fichiers ISMR d'une part et calculés à partir des sorties  $I$  et  $Q$  d'autre part.



<sup>8</sup> Un autre calcul de  $SI$  est proposé par [Forte & Radicella, 2002] :  $SI = I^2 + Q^2 - \langle I^2 + Q^2 \rangle_{60s}$ .

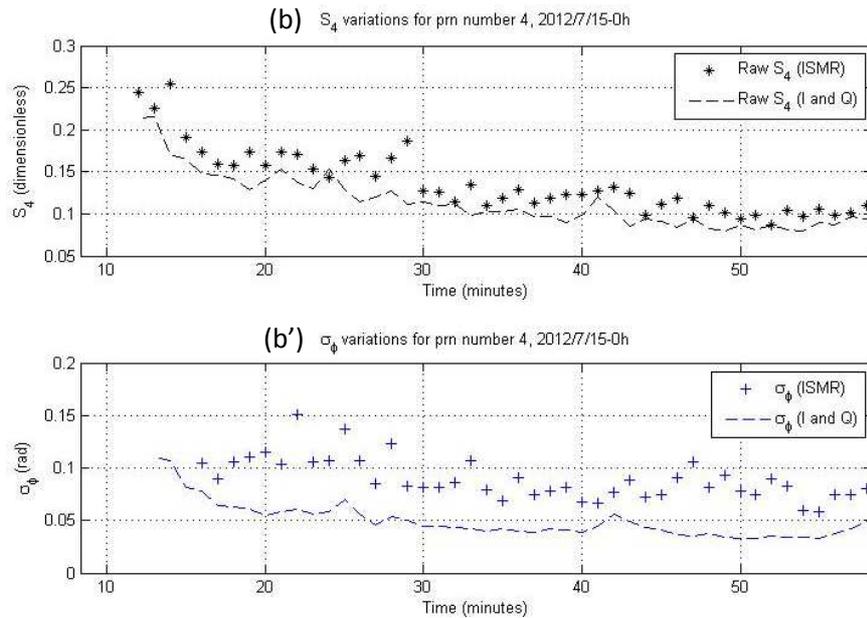


Figure 4.27 : Comparaison des indices de scintillation fournis par les ISMR et calculés à partir des données brutes, station Tromsøe, le 15/07/2012, (a et a') PRN 17 à 23h, (b et b') PRN 4 à 00h UT.

D'après la figure 4.27 (a) et (b), les tendances pour les indices de scintillation  $S_4$  restent sensiblement les mêmes, entre les ISMR et les données brutes. La valeur de  $S_4$  à partir des  $I$  et  $Q$  reste cependant toujours inférieure à la valeur donnée par les ISMR. La dynamique des variations de cet indice est également plus visible sur les ISMR, comme on le voit sur la figure 4.27 (a).

Si, pour les très faibles valeurs de  $\sigma_\phi$ , les deux approches ISMR et  $IQ$  correspondent bien (figure 4.27 (a')), les résultats sont significativement différents pour des indices de scintillation supérieurs à 0,07 rad (figure 4.27 (b')). On remarque également que les indices de phase restent très faibles ( $< 0,1 \text{ rad}$ ). La fiabilité des données de phase est discutée au paragraphe suivant, avec l'étude des spectres de phase.

La figure 4.28 donne une représentation du nombre d'événements de scintillation tels que  $S_4 > 0,1$ .

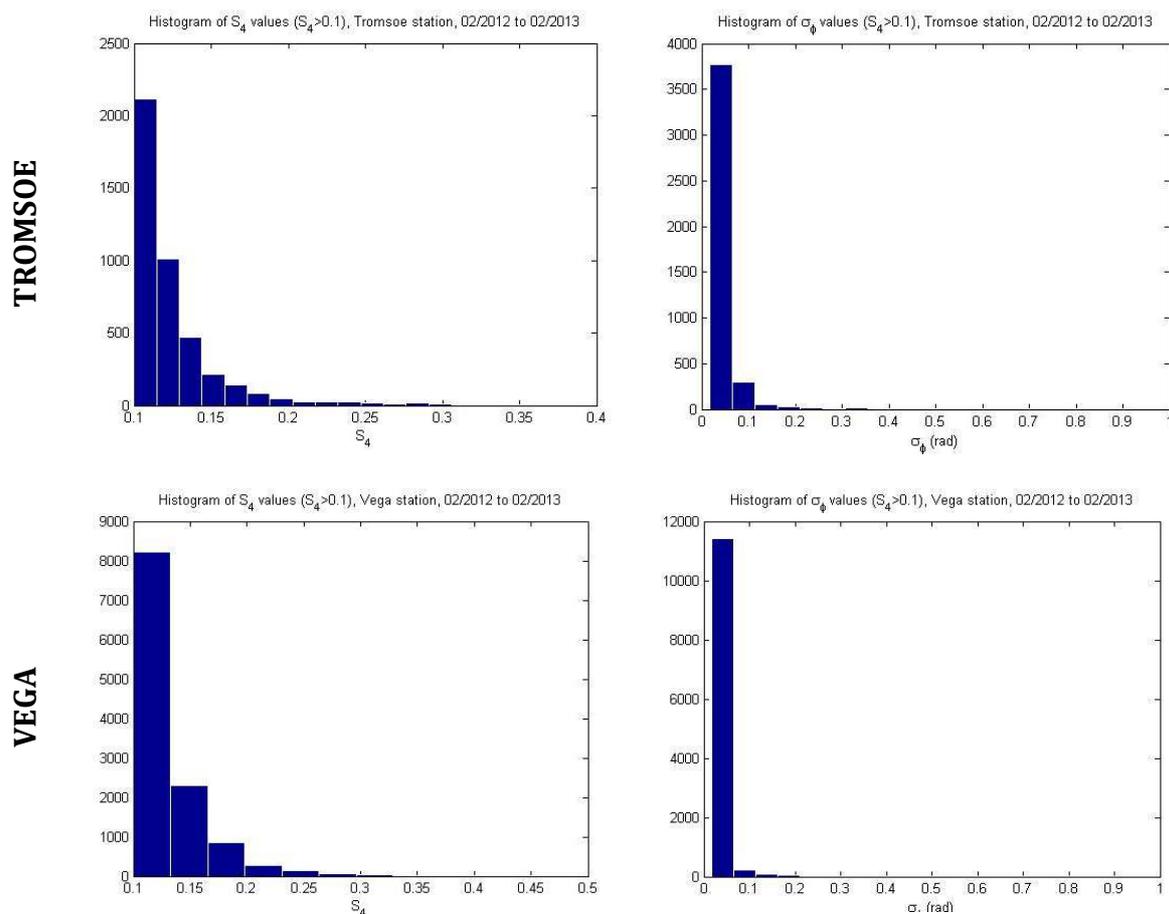


Figure 4.28 : Histogramme des indices  $S_4$  et  $\sigma_\phi$  pour les stations Tromsøe (en haut) et Vega (en bas), de février 2012 à février 2013.

D'après la figure 4.28, on remarque que, pour les deux stations, les valeurs de l'indice de phase sont très faibles, comme constaté sur la figure 4.27. Ces résultats sont en contradiction avec la littérature [Hunsucker & Hargreaves, 2003], [Doherty et al., 2003], [Forte, 2005], qui font état d'événements de scintillation plus fréquents en phase ( $\sigma_\phi > 0,15 \text{ rad}$ ) qu'en amplitude ( $S_4 > 0,2$ ). La phase des signaux est relativement sensible aux multi-trajets : ces phénomènes sont certainement à l'origine de la sous-estimation de la variance de phase, les sauts de phase dus aux scintillations étant en grande partie noyés dans le bruit. L'indice de scintillation d'amplitude  $S_4$  semble donc, dans le cas de ces données, plus approprié pour caractériser les événements de scintillation. Le seuil est pris ici à 0,1.

D'après la formule (1.13), les mesures de pseudo-distance permettent de calculer le STEC. Un autre indicateur de variations de concentration électronique dans

l'ionosphère, indépendant des mesures d'amplitude et de phase du signal, peut alors être calculé : il s'agit de l'indice de variations de TEC ou Rate Of TEC Index (ROTI). Celui-ci est défini comme l'écart-type du Rate Of TEC (ROT), selon :

$$ROTI = \sqrt{\langle ROT^2 \rangle - \langle ROT \rangle^2}, \quad (4.21)$$

avec

$$ROT = \frac{\Delta STEC}{\Delta t}. \quad (4.22)$$

L'intervalle de temps  $\Delta t$  pendant lequel est calculé le ROT est de 30 ou 60 secondes, ce qui correspond à l'intervalle de temps entre deux mesures d'un récepteur GNSS « classique ». Les indices locaux issus des mesures GNSS comme le ROTI, le Along-Arc TEC Rate (AATR) [Sanz et al., 2014] ou le Disturbance Ionospheric index (DIX) [Jakowski et al., 2012] sont aujourd'hui de plus en plus utilisés pour caractériser les variations spatio-temporelles de la scintillation ionosphérique<sup>9</sup>. La figure 4.29 montre la corrélation entre l'indice AATR<sup>10</sup> et la disponibilité<sup>11</sup> du signal EGNOS pour la station de mesure Maspalomas (MAS1) aux Canaries pour la fin de l'année 2000.

---

<sup>9</sup> Ces indices locaux sont mieux adaptés aux besoins de la communauté utilisatrice de signaux GNSS que les indices géomagnétiques plus globaux aussi bien spatialement que temporellement, tels que Kp, AE ou Dst (cf. note 9 section 1.1.2 du chapitre 1).

<sup>10</sup> L'AATR est défini par  $AATR = \Delta \frac{STEC}{\Delta t [M(\mathcal{E})]^2}$  [Sanz et al., 2014], où  $M(\mathcal{E})$  est le facteur d'obliquité, fonction de l'élévation du satellite  $\mathcal{E}$ . Il permet donc de convertir le STEC en VTEC et ainsi moins surestimer le ROTI.

<sup>11</sup> APV-I availability, ou Approach Procedures with Vertical guidance, est défini comme le pourcentage de temps sur un mois pour lequel les erreurs de positionnement sont inférieures aux niveaux d'alerte (Horizontal Protection Level HPL < 40m et Vertical Protection Level VPL < 50m) pour la navigation aérienne [ESSP, 2014].

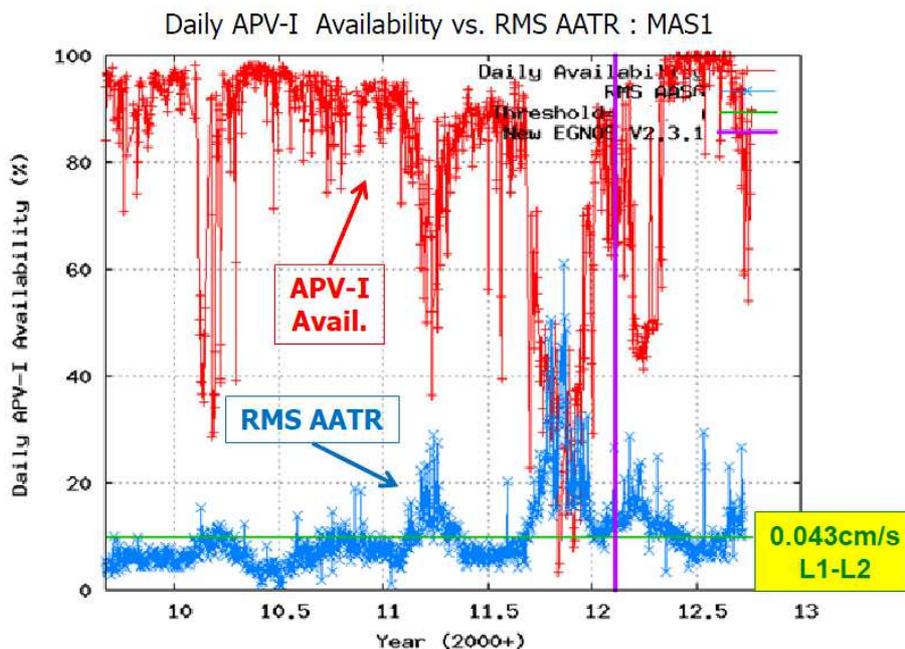


Figure 4.29 : Correspondance entre la disponibilité d'un signal EGNOS et la valeur moyenne horaire sur 24h de l'indice AATR, station réceptrice MAS 1, octobre à décembre 2000 [Juan et al., 2013].

A partir des résultats de la figure 4.29, Sanz et al. [2014] ont défini une valeur seuil pour la moyenne horaire de l'indice AATR à 0,043 cm/s de L1-L2<sup>12</sup>.

Outre le fait que les mesures de STEC permettent de caractériser les événements de scintillation, leur spectre fréquentiel est également relié au spectre fréquentiel de la phase. Ainsi, l'étude des données brutes de la phase, qui semblent ici peu fiables, peut être remplacée par l'étude du spectre de STEC. C'est l'objet de la partie suivante.

### 4.3.3. Etude des spectres de phase et des spectres de STEC

La figure 4.30 donne une représentation de spectres de phase obtenus à partir des données brutes, sur des intervalles de temps d'une minute.

<sup>12</sup> Ici, le STEC peut être calculé à partir des différences de phases des signaux (cf. (1.16)). On peut aussi choisir d'exprimer le STEC non pas en TECU mais également en m ou cm de (L1-L2), différence de mesure de phase sur les fréquences L1 et L2 respectivement, d'où l'unité de l'indice AATR.

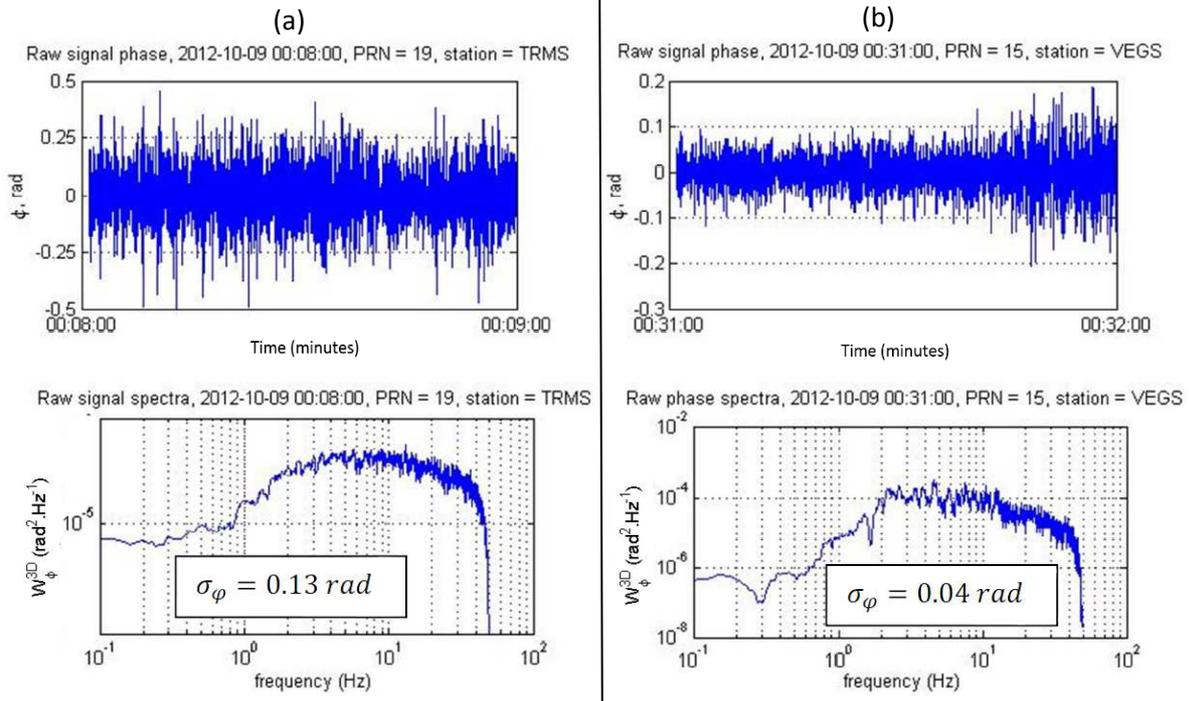


Figure 4.30 : Échantillons de données brutes de phase et spectres fréquentiels correspondants, le 10/09/2012 (a) pour la station Tromsøe 00:08 UT, PRN 19 et (b) pour la station Vega 00:31 UT, PRN 15.

On remarque sur la figure 4.30 que l'allure des spectres de phase ne correspond pas à celle des spectres théoriques (cf. figure 3.9). Les pentes typiques que l'on peut extraire sont inférieures à 1. Il est probable que les spectres de phase correspondent davantage à un spectre de bruit : ils ne sont donc pas exploitables pour notre étude. Afin de contourner cette difficulté, on peut étudier le spectre fréquentiel des fluctuations de *STEC*. En effet, d'après (1.13), le *STEC* est défini dans le repère du LOS ( $u, v, s$ ) par :

$$STEC(u, v, t) = \int_{I_1}^{I_2} N_e(u, v, s, t) ds .$$

où les points  $I_2$  et  $I_1$  sont les points d'entrée et de sortie du signal GNSS dans la couche ionosphérique (cf. figure 1.7). Sachant que :

$$STEC = \langle STEC \rangle + \Delta STEC ,$$

on obtient :

$$\Delta STEC (u, v, t) = \int_{I_1}^{I_2} \Delta N_e(u, v, s, t) ds . \quad (4.23)$$

Les bornes de l'intégrale (4.23) peuvent être étendues de 0 à l'infini car seule l'épaisseur d'ionosphère contribue au calcul du  $\Delta STEC$ . Le spectre fréquentiel des fluctuations de  $STEC$  s'écrit :

$$W_{\Delta STEC}(\omega) = \int_0^{+\infty} d\tau \langle \Delta STEC(\vec{r}, t) \Delta STEC(\vec{r}, t + \tau) \rangle e^{-i\omega\tau}. \quad (4.24)$$

$\vec{r}$  est le vecteur position dans  $(u, v, s)$ . En injectant l'expression (4.23) dans (4.24), on arrive à :

$$W_{\Delta STEC}(\omega) = \int_0^{+\infty} d\tau \left\langle \int_0^{+\infty} \Delta N_e(\vec{r}_1, t) ds_1 \int_0^{+\infty} \Delta N_e(\vec{r}_2, t + \tau) ds_2 \right\rangle e^{-i\omega\tau}, \quad (4.25)$$

$$W_{\Delta STEC}(\omega) = \int_0^{+\infty} d\tau \int_0^{+\infty} ds_1 \int_0^{+\infty} ds_2 \langle \Delta N_e(\vec{r}_1, t) \Delta N_e(\vec{r}_2, t + \tau) \rangle e^{-i\omega\tau}. \quad (4.26)$$

D'après l'hypothèse de Taylor d'un milieu gelé advecté d'une vitesse  $\vec{V} \equiv (V_u, V_v, V_s)$ , on obtient :

$$W_{\Delta STEC}(\omega) = \int_0^{+\infty} d\tau \int_0^{+\infty} ds_1 \int_0^{+\infty} ds_2 \langle \Delta N_e(\vec{r}_1, t) \Delta N_e(\vec{r}_2 + \vec{V}\tau, t) \rangle e^{-i\omega\tau}. \quad (4.27)$$

On note 
$$I = \langle \Delta N_e(\vec{r}_1, t) \Delta N_e(\vec{r}_2 + \vec{V}\tau, t) \rangle. \quad (4.28)$$

Par identification avec la fonction de covariance 3D (1.21) et le spectre des fluctuations de densité électronique (1.22), l'expression (4.28) s'écrit :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dK_s S_{\Delta N_e}^{1D}(K_s) e^{i\vec{K}(\vec{r}_2 + \vec{V}\tau - \vec{r}_1)}, \quad (4.29)$$

avec 
$$S_{\Delta N_e}^{1D}(K_S) = \int_{-\infty}^{+\infty} dK_u S_{\Delta N_e}^{2D}(K_u, K_S) = \iint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_v S_{\Delta N_e}^{3D}(K_u, K_v, K_S). \quad (4.30)$$

On retrouve donc le spectre des fluctuations de densité électronique  $S_{\Delta N_e}^{3D}$  défini en (2.49). En injectant (4.30) dans l'expression du spectre (4.27), on obtient :

$$W_{\Delta STEC}(\omega) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_v dK_S S_{\Delta N_e}^{3D}(K_u, K_v, K_S) \times \int_0^{+\infty} d\tau e^{i(\vec{K} \cdot \vec{V} - \omega)\tau} \int_0^{+\infty} ds_1 e^{-iK_S s_1} \rho(s_1) \int_0^{+\infty} ds_2 e^{-iK_S s_2} \rho(s_2), \quad (4.31)$$

$$W_{\Delta STEC}(\omega) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_v dK_S S_{\Delta N_e}^{3D}(K_u, K_v, K_S) \times \int_0^{+\infty} d\tau e^{i(\vec{K}_r \cdot \vec{V}_r - \omega)\tau} 2\pi \delta(K_S) \int_0^{+\infty} ds \rho(s), \quad (4.32)$$

où  $\vec{K}_r \equiv (K_u, K_v)$  et  $\vec{V}_r \equiv (V_u, V_v)$ . On arrive à :

$$W_{\Delta STEC}(\omega) = \iint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_v S_{\Delta N_e}^{3D}(K_u, K_v, 0) \int_0^{+\infty} d\tau e^{i(\vec{K}_r \cdot \vec{V}_r - \omega)\tau} 2\pi R_{iono}. \quad (4.33)$$

Les étapes de la résolution de l'équation (4.33) correspondent aux calculs du spectre fréquentiel de phase 3D<sup>13</sup>. On arrive finalement à :

$$W_{\Delta STEC}(\omega) = \frac{4\pi^2 \sqrt{\pi} a^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono} \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \sqrt{AV_v^2 + BV_u^2 - 2CV_u V_v}} \times \left( \frac{AB - C^2}{AV_v^2 + BV_u^2 - 2CV_u V_v} + \frac{K_0^2}{a^2 \omega^2} \right)^{\frac{1-p}{2}} \omega^{1-p}. \quad (4.34)$$

<sup>13</sup> Cf. annexe 7.

On retrouve le même comportement que le spectre de phase  $W_\phi(\omega)$  défini par l'expression (3.129), au terme  $W_\chi^{3D}(\omega)$  près et au facteur  $\lambda^2 r_e^2$  près. Expérimentalement, la partie basses fréquences du spectre de phase est difficilement exploitable car, pour éliminer la composante continue, on applique un filtre passe-haut à 0,1 Hz. Si on ne s'intéresse qu'à la partie hautes fréquences, on arrive à :

$$W_{\Delta STEC}(\omega \rightarrow +\infty) = \frac{2}{\lambda^2 r_e^2} W_\phi^{3D}(\omega \rightarrow +\infty). \quad (4.35)$$

Le spectre des fluctuations  $\Delta STEC$  est identique au spectre HF de phase au facteur  $\frac{2}{\lambda^2 r_e^2}$  près. La figure 4.31 reprend l'exemple de la figure 4.30 (a) en considérant le spectre de *STEC*.

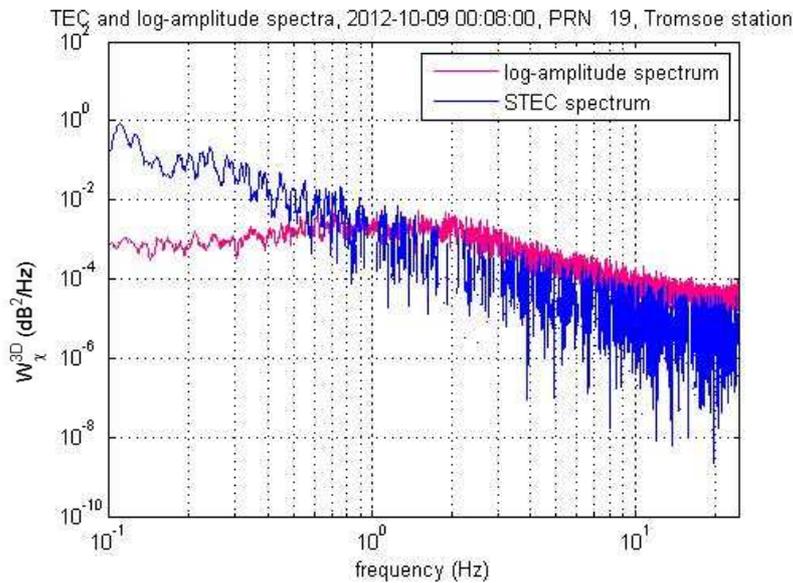


Figure 4.31 : Exemple de spectre de *STEC*, le 10/09/2012 pour la station Tromsø 00:08 UT, PRN 19.

Sur la figure 4.31, les spectres de *STEC* et de log-amplitude ont été décalés en ordonnée pour comparer plus facilement leurs pentes. D'après cette figure, le spectre de *STEC* correspond davantage au spectre de phase attendu théoriquement. Les deux spectres bruts (*STEC* et log-amplitude) présentent bien la même pente aux hautes fréquences. Un

résultat important est donc que l'on peut obtenir la pente du spectre de phase à partir du spectre des fluctuations de STEC. L'autre avantage est que même si les mesures de STEC ne sont pas calibrées<sup>14</sup>, les fluctuations de STEC, indépendantes de la valeur moyenne, sont quant à elles toujours calibrées. Finalement, dans l'expression hautes fréquences (4.35), les paramètres d'entrée qui restent inconnus sont :

- La force de la turbulence  $C_s$
- L'épaisseur de la couche ionosphérique  $R_{iono}$
- Les ratios d'anisotropie  $A_y$  et  $A_z$
- L'angle d'inclinaison de l'anisotropie  $\psi$

Grâce à des mesures radar, il est possible de remonter à la vitesse de drift du milieu. Même dans l'hypothèse où la forme d'anisotropie considérée est de type ellipsoïdal, forme majoritaire aux pôles, le nombre de paramètres inconnus reste important et ne rend pas possible une inversion du problème à partir des seuls spectres de STEC, comme on l'a montré dans l'étude de sensibilité des spectres de phase, en partie 4.1.1.

Une solution complémentaire est d'utiliser les spectres de la log-amplitude du signal reçu. C'est l'analyse menée dans le paragraphe suivant.

#### **4.3.4. Étude des spectres de log-amplitude**

On va s'intéresser ici à un cas concret de scintillation ionosphérique et du spectre de log-amplitude correspondant. La figure 4.32 représente l'intensité du signal reçu et le spectre fréquentiel correspondant à un événement de scintillation.

---

<sup>14</sup> Des fichiers de biais (Differential Code Biases, DCB) sont disponibles pour l'estimation précise de la position (Precise Point Positioning, PPP) et permettent de calibrer les mesures de TEC. Cependant, la fourniture de tels biais n'est pas automatique.

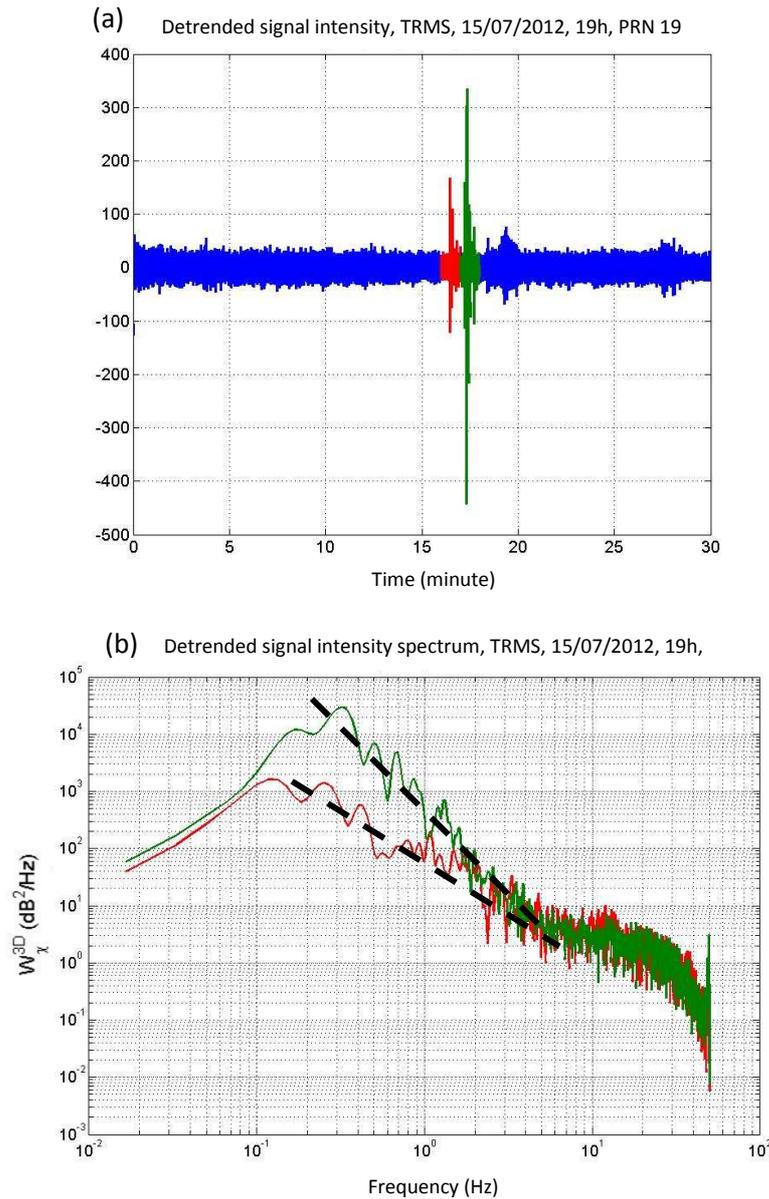


Figure 4.32 : (a) Intensité du signal reçu et (b) spectres de log-amplitude correspondants pour 2 intervalles de temps, station Tromsoe, PRN 19, 15/07/2012 à 19:00 UT.

On s'intéresse à deux événements d'une minute présentant une forte variation d'amplitude représentés sur la figure 4.32. Le tableau 4.4 donne les valeurs de la pente  $q$  du spectre mesuré ainsi que de la valeur de  $S_4$  correspondante.

Événement étudié	Pente du spectre $q$	Indice de scintillation $S_4$
N° 1 (minute 16 à 17)	1,6	0,142
N° 2 (minute 17 à 18)	2,8	0,211

Tableau 4.4 : Résultats de l'analyse de l'événement de scintillation données Septentrio, Tromsø, 15/07/2012, PRN 19, 19h16 et 19h17.

D'après le tableau 4.4, on constate que plus la valeur de  $S_4$  est importante, plus la pente  $q$  du spectre est marquée. Pour exploiter les formulations analytiques établies dans cette thèse, il faut que l'indice spectral  $p$  soit supérieur à 3, donc que la pente du spectre mesuré soit telle que  $q = p - 1 > 2$ . Seul le second événement répond à ce critère. La difficulté suivante, pour permettre une exploitation plus approfondie, est d'estimer la position de l'asymptote basses fréquences. Sur la figure 4.32 (b), pour l'événement n°2, on observe bien un maximum de puissance pour une fréquence de 0,3 Hz. Cette fréquence est située au-delà de la fréquence de filtrage à 0,1 Hz. Cependant, on peut difficilement estimer la position de l'asymptote BF. Les possibilités d'inversion restent donc limitées.

Étant donnée la grande quantité des données brutes disponibles (près de 12 To), la principale difficulté de cette étude est l'identification d'événement exploitables et susceptibles d'être candidats à l'inversion. La thèse de Mushini [2012] porte sur le traitement de données issues de récepteurs Novatel du réseau CHAIN. Il nous a fourni un set de données d'amplitude correspondant à un événement de scintillation particulièrement fort et qu'il avait également analysé dans son manuscrit. L'idée a donc été d'appliquer le traitement que nous avons appliqué aux données Septentrio (Norvège) aux données CHAIN et de comparer les résultats obtenus avec ceux de Mushini.

#### 4.3.5. Étude d'un événement de scintillation du réseau CHAIN

L'événement de scintillation d'amplitude fourni par CHAIN est daté du 14/02/2011, à 19h20 UT et a été mesuré à la station Qikiqtarjuaq (latitude 67,53°, longitude -64,03°).

La figure 4.33 donne l'allure de la puissance mesurée sur un intervalle de temps de 20 minutes.

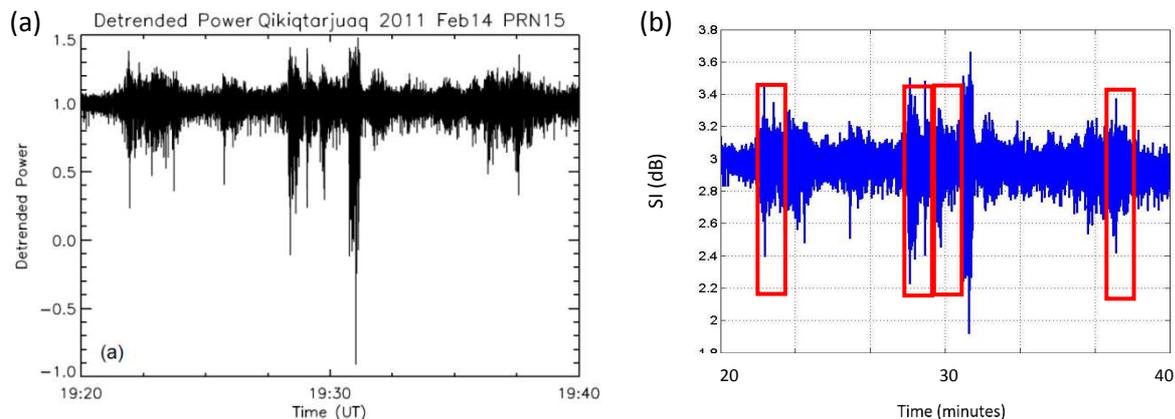
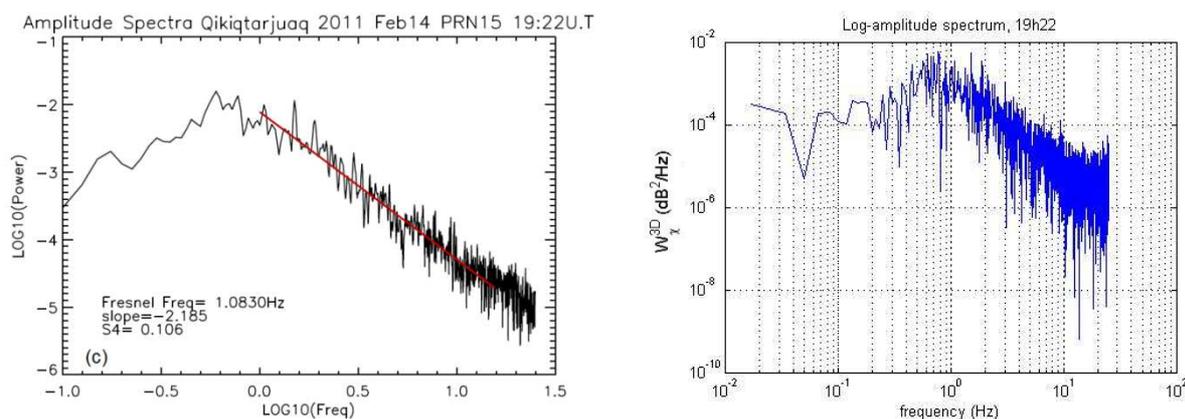


Figure 4.33 : Puissance mesurée en fonction du temps (a) dans [Mushini, 2012] et (b) dans cette thèse.

4 événements d'une minute de cet échantillon, encadrés en rouge sur la figure 4.33 (b), vont être particulièrement étudiés et comparés avec les résultats de Mushini : les minutes 22, 28, 29 et 37. La figure 4.34 donne une représentation des spectres fréquentiels obtenus pour ces 4 événements.



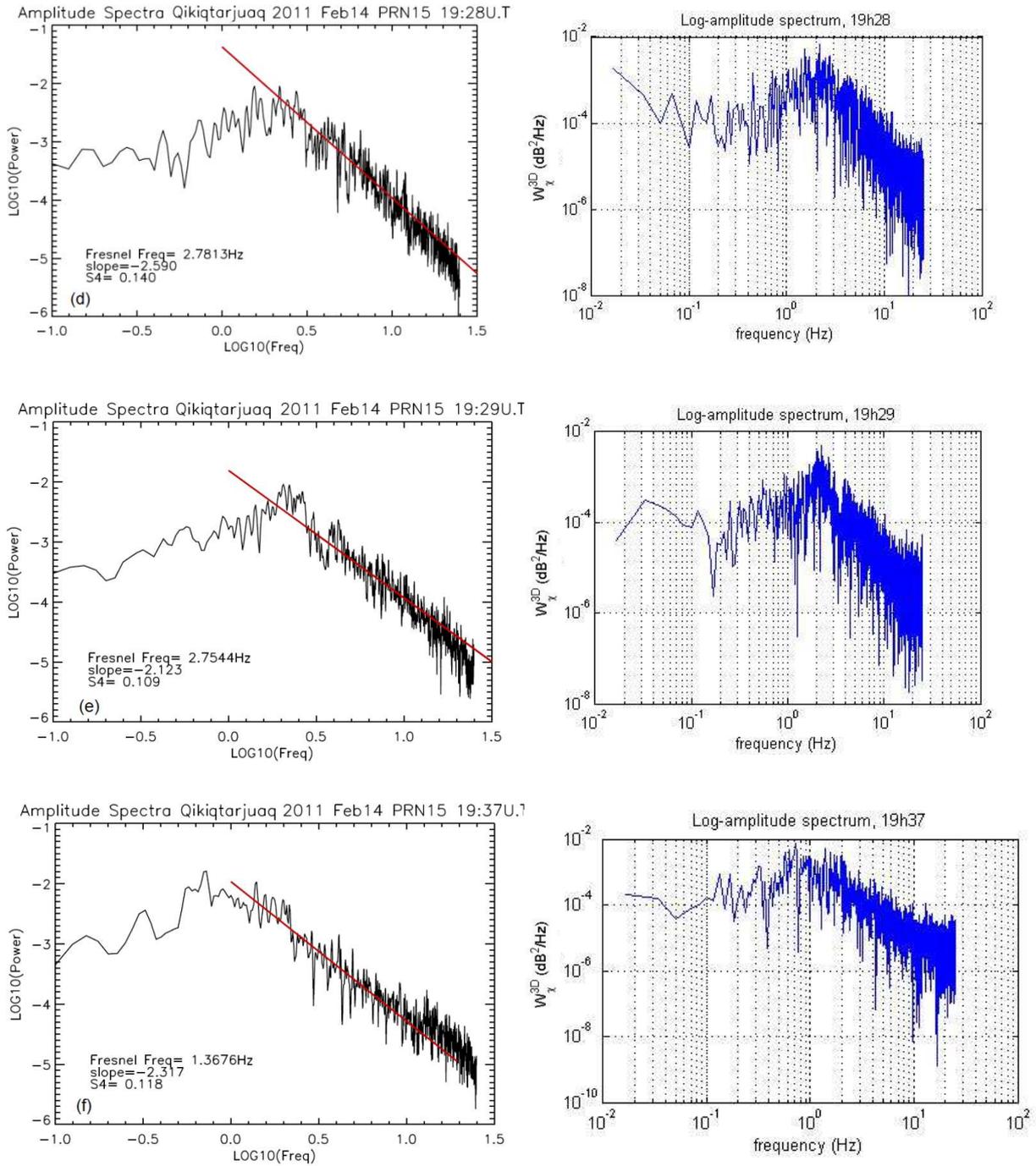


Figure 4.34 : Comparaison des spectres fréquentiels de log-puissance de Mushini (colonne de gauche) et issus du traitement de la thèse (colonne de droite) pour les 4 événements de scintillation, i.e. minutes (a) 22, (b) 28, (c) 29 et (d) 37.

Pour plus de lisibilité, les pentes mesurées et les valeurs d'indice de scintillation d'amplitude sont reportées dans le tableau 4.5.

Minute de l'événement		22	28	29	37
$S_4$	Mushini	0,106	0,140	0,109	0,118
	Galiègue	0,103	0,129	0,104	0,113
$q$	Mushini	2,19	2,59	2,12	2,32
	Galiègue	1,97	2,24	2,10	1,96

Tableau 4.5 : Comparaison des résultats de Mushini [2012] et de Galiègue pour 4 événements de scintillation mesurés sur Novatel.

Les spectres de la figure 4.34 et les résultats du tableau 4.5 montrent une bonne correspondance entre les traitements opérés sur les données Novatel. Les valeurs des pentes mesurées sont légèrement sous-estimées par rapport à celles de Mushini mais cela est dû à l'incertitude sur les fréquences de début et de fin de régression linéaire. Les ordres de grandeur restent les bons.

Malgré le fait que la station de mesure soit située dans une zone couverte par le réseau radar SuperDARN (cf. figure 4.25), les coordonnées de l'IPP, déterminées à partir des éphémérides des satellites GNSS, varient en latitude de  $53,2^\circ$  à  $54,5^\circ$  et en longitude de  $-50,3^\circ$  à  $-40,9^\circ$ . Cette zone n'est pas couverte par les radars, on ne peut donc pas accéder à la vitesse de drift du milieu.

Sur l'événement minute 28, on observe un comportement asymptotique BF : la fréquence de coupure mesurée vaut environ 7 Hz. La mesure de la pente spectrale  $q$  permet d'obtenir l'indice spectral  $p = 3,24$ . L'expression de la fréquence de coupure (4.14) ne permet pas de remonter à davantage d'informations sur le milieu, trop de paramètres sont encore indéterminés.

Cette étude préliminaire a permis de montrer la validité des traitements opérés sur les données GNSS issues des récepteurs Septentrio et Novatel. Elle met aussi en évidence la difficulté de l'exercice d'inversion, du fait du manque de données d'entrée comme notamment la vitesse de drift. Dans certaines situations, on peut accéder à l'asymptote

BF du spectre de log-amplitude. On peut donc penser que certains paramètres du milieu pourront être obtenus grâce à un traitement avancé des données.

#### 4.4. Conclusion

Une étude de sensibilité a été menée sur les variances de log-amplitude et de phase ainsi que sur les spectres fréquentiels correspondants. La première conclusion de cette étude est qu'elle a permis de comprendre l'influence de chacun des paramètres du milieu sur le phénomène de scintillation ionosphérique, et ce pour toutes les latitudes. Ce travail a également mis en relief les difficultés de l'exercice d'inversion des données GNSS :

- **Le nombre de paramètres mis en jeu dans la caractérisation du milieu ionosphérique est très important.** Il est donc complexe d'identifier expérimentalement le ou les paramètres directement responsables de la valeur de l'indice de scintillation ou de l'allure des spectres.
- **Le milieu ionosphérique est extrêmement variable,** aussi bien temporellement que spatialement. Les caractéristiques changent d'une mesure à l'autre et il faudrait, pour inverser efficacement les données, traiter des situations où la même zone d'ionosphère est balayée, dans un intervalle de temps limité à quelques minutes, par plusieurs satellites.
- La qualité des données expérimentales oblige à les filtrer et par là même à éliminer une partie du spectre fréquentiel accessible en basses fréquences.

Malgré ces difficultés expérimentales, des travaux d'inversion sont envisageables moyennant certaines hypothèses. Ainsi, pour une morphologie de type ellipsoïdal, l'exploitation des spectres de log-amplitude des signaux traversants pourrait permettre d'accéder au ratio d'anisotropie  $A_z$ , à l'échelle externe  $L_0$  et au produit  $C_s R_{iono}$ . Les données GNSS permettent également de mesurer le STEC et d'en déduire les fluctuations

de STEC. Comme nous l'avons montré dans ce chapitre, l'avantage des spectres de  $\Delta$ STEC est qu'ils ne nécessitent pas une calibration des données brutes.

Le traitement des données brutes hautes latitudes collectées depuis plus d'un an nécessite un travail approfondi d'identification et d'analyse des événements de scintillation les plus probants, puis un travail d'inversion à partir des spectres de log-amplitude, de fluctuations de STEC mais également des indices de scintillation et de phase. Afin de mieux caractériser le milieu ionosphérique, une collaboration avec les spécialistes de la météorologie spatiale permettrait d'obtenir plus facilement des informations à partir des données GNSS.

Pour prédire les effets de la scintillation ionosphérique sur la propagation des ondes électromagnétiques, des modèles numériques ont été développés [Secan & Fremouw, 1984], [Deshpande et al., 2014]. Ils sont basés sur la résolution de l'équation parabolique 3D (3D Parabolic Wave equation, 3D-PWE) couplée à un ou plusieurs écrans de phase bidimensionnels (2D Multiple Phase Screens, 2D-MPS), définissant un schéma numérique 3D-PWE/2D-MPS. Toutefois, un inconvénient majeur de ces modèles 3D-PWE/2D-MPS est le temps de calcul.

Pour pallier cette limitation, l'approche classiquement utilisée consiste à négliger l'une des dimensions [Béniguel, 2002], [Rogers et al, 2009]. Les résultats représentent alors la propagation selon une coupe longitudinale et consistent en une approximation bidimensionnelle d'un problème clairement tridimensionnel. Dans ces conditions, les écrans de phase deviennent unidimensionnels, définissant un schéma numérique 2D-PWE/1D-MPS qui permet de réduire considérablement la charge et les temps de calcul.

Aux latitudes équatoriales, où les irrégularités ionosphériques sont très allongées dans le plan horizontal, les indices de scintillation dérivés des schémas numériques 2D-PWE/1D-MPS montrent une bonne correspondance avec les mesures expérimentales. Divers auteurs ont alors justifié qualitativement la validité de la réduction dimensionnelle 2D-PWE/1D-MPS par la forte anisotropie des irrégularités turbulentes [Rino, 1979 (1)], [Béniguel & Buonomo, 1999].

**Quelle est alors l'erreur introduite par un schéma numérique 2D sur l'estimation des effets de scintillation ionosphérique ? Quel est son lien avec la morphologie des irrégularités ionosphériques aux latitudes équatoriales ?**

Aux latitudes polaires, l'élévation des satellites GPS est typiquement de 50°. L'épaisseur de la couche ionosphérique traversée par le signal peut alors atteindre plusieurs centaines de km. L'utilisation d'un schéma numérique 3D-PWE/2D-MPS peut alors devenir rapidement prohibitive lors de calculs intensifs. Selon les caractéristiques géométriques de la liaison et la morphologie des irrégularités ionosphériques aux hautes latitudes, **peut-on alors utiliser un schéma numérique réduit 2D-PWE/1D-**

**MPS pour prédire les effets des scintillations ionosphériques 3D aux latitudes polaires ? Si non, quelle est l'erreur introduite par la réduction dimensionnelle sur l'estimation des indices de scintillation d'amplitude et de phase ? Sur l'estimation des spectres correspondants ?**

Pour répondre à ces questions, une **modélisation complète, numérique puis analytique, 3D et 2D**, de la scintillation ionosphérique a été développée. Ses principales caractéristiques sont :

- **La prise en compte des irrégularités turbulentes ayant 3 axes d'anisotropie** : l'axe principal dans la direction du champ magnétique terrestre, l'axe secondaire perpendiculaire au premier dans la direction du champ électrique induit et le dernier axe formant un trièdre direct avec les deux précédents.
- **Son adaptabilité à toutes les latitudes** : le modèle est valable aussi bien dans les zones équatoriales qu'aux latitudes polaires, plus particulièrement étudiées dans cette thèse.
- **Son application en schémas de propagation 3D et 2D** : l'impact de la réduction dimensionnelle 3D/2D ayant été quantifié analytiquement, l'approche numérique 2D peut être utilisée à bon escient, permettant un gain très significatif en termes de temps de calcul et d'occupation mémoire.

Le **modèle numérique STIPEE** est basé sur la résolution numérique en 3D ou en 2D de l'équation de propagation couplée à des écrans de phase multiples. Les schémas numériques 3D-PWE/2D-MPS et 2D-PWE/1D-MPS associés peuvent décrire aussi bien des situations de faibles ou de fortes perturbations (weak or strong scattering). Contrairement aux modèles écrans de phase existants (WBMOD, SIGMA, GISM), le repère de définition des écrans de phase du modèle STIPEE est celui du LOS. Ce choix permet en effet de mieux appréhender les effets de la réduction dimensionnelle. Ainsi, les **dérivations analytiques**, menées dans ce même repère lié au LOS, aussi bien en 3D qu'en 2D, donnent des résultats originaux sur la problématique de la réduction dimensionnelle, en régime de faibles perturbations. Disposant des expressions

analytiques des variances et des spectres de log-amplitude et de phase, une étude de sensibilité a également pu être conduite.

Les principales conclusions de ce travail de modélisation analytique sont finalement :

- Une **validation des approches numériques** 3D-PWE/2D-MPS et 2D-PWE/1D-MPS développées.
- Une **quantification analytique de l'erreur** introduite par les schémas numériques réductionnels 2D-PWE/1D-MPS quant à l'estimation des divers effets de scintillations ionosphériques.
- **Une quantification de l'impact des paramètres d'entrée** sur les indices de scintillation et les spectres d'amplitude et de phase, ouvrant à une interprétation des résultats expérimentaux ainsi qu'à un travail d'inversion pour accéder aux caractéristiques du milieu ionosphérique (anisotropie, intensité de la turbulence...).

Plusieurs axes de recherche peuvent être développés pour élargir le champ d'application de ce modèle. Ils concernent les développements analytiques et les possibilités d'inversion des données expérimentales.

L'approximation de Rytov [Rytov et al., 1989], à la base des dérivations analytiques menées dans ce manuscrit, constitue l'une des limites de ce travail de résolution : en effet, les formulations établies sous cette hypothèse ne permettent de rejouer et de décrire des événements de scintillation qu'en régime de faibles perturbations. Le premier axe de recherche serait donc de **développer les expressions analytiques 3D et 2D en régime de fortes perturbations** et ainsi proposer une modélisation mieux adaptée à la réalité de la scintillation ionosphérique. C'est la problématique de la prochaine thèse, entre le CNES et l'Onera, dédiée plus spécifiquement aux latitudes équatoriales et à la modélisation « strong scattering ».

Le deuxième axe de recherche repose sur une étude approfondie des données expérimentales. L'étude préliminaire initiée pendant cette thèse a en effet mis en

exergue certaines difficultés de **traitement des données** sur lesquelles des travaux peuvent être menés.

La quantité de données à traiter nécessite de **mieux définir et de rechercher des événements de scintillation probants**. Un travail de corrélation entre les valeurs des indices de scintillation ( $S_4$  et  $\sigma_\phi$ ), des indices d'activité ionosphérique tels que le ROTI ou l'AATR, et les indices d'activité géomagnétique (Kp, Dst, AE...) pourrait permettre de mieux identifier de tels événements de scintillation.

**La qualité des données brutes et leur calibration** est une des limites à l'inversion. L'étude des données de phase a ainsi montré leur sensibilité aux phénomènes de multi-trajets et au bruit, les rendant non exploitables. Une alternative a été proposée, consistant à travailler directement à partir des spectres de fluctuations de STEC, qui ont l'avantage de ne pas être sensibles à la non-calibration des données brutes et sont équivalents aux spectres de phase, à un facteur multiplicatif près.

Enfin, un travail collaboratif avec le milieu scientifique de la météorologie spatiale pourrait ouvrir à **une modélisation plus représentative des structures turbulentes de l'ionosphère**. L'utilisation de données radar pourrait permettre d'accéder, sinon à la morphologie, du moins à l'altitude et à l'épaisseur de la couche ionosphérique, ainsi qu'à la vitesse de drift. À ce titre, le projet EISCAT-3D de modélisation de l'ionosphère hautes latitudes pourrait fournir ces informations caractéristiques du milieu avec des résolutions spatiale et temporelle réduites à quelques mètres et quelques secondes, respectivement [Pitout, 2010].

## Annexe 1 : Calcul simplifié d'Appleton-Hartree

---

Pour retrouver l'expression de l'indice de réfraction  $n$  (indice de phase) du milieu, on part des équations fondamentales de la dynamique et de l'électromagnétisme et on résout ces équations dans le domaine de Fourier.

Le mouvement des électrons est régi par plusieurs forces dues au champ magnétique terrestre mais également au champ électrique, induit par le mouvement des particules, et au courant électrique qui en découle. Plusieurs fréquences permettent de caractériser ces mouvements.

- **la fréquence de l'onde** qui se propage, notée  $f$  (Hz), ou la pulsation  $\omega$  correspondante ( $\text{rad.s}^{-1}$ ). On travaille ici avec les fréquences L1 et L2, 1,575 et 1,227 GHz respectivement.
- **la fréquence plasma** : c'est la pulsation naturelle d'un plasma, due au déplacement ondulatoire des charges positives et négatives. Elle est notée  $f_P = \frac{\omega_p}{2\pi}$  (cf. (1.6)), où la pulsation plasma est définie par  $\omega_p = \sqrt{\frac{N_e e^2}{m_e \epsilon_0}}$ . Aux concentrations considérées ici (de l'ordre de  $3 \cdot 10^{11}$   $\text{el.m}^{-3}$ , cf. figure 1.1), sa valeur atteint quelques dizaines de MHz.
- **la fréquence des collisions** entre les particules chargées et les neutres, notée  $\nu$  (en  $\text{s}^{-1}$ ). Elle varie avec l'altitude : de quelques MHz à 70 km à quelques dizaines de Hz en région F2 [Hunsucker & Hargreaves, 2003].
- **la fréquence cyclotron** ou fréquence de giration : elle dépend du champ magnétique terrestre  $B_T$ , de la charge  $e$  et de la masse  $m_e$  des électrons, notée  $f_B = \frac{1}{2\pi} \frac{eB_T}{m_e}$  ou  $\omega_B = \frac{eB_T}{m_e}$ . Aux latitudes polaires, en région F2, elle est de l'ordre de quelques dizaines de Hz.

On considère les hypothèses suivantes dans la suite des calculs : la fréquence cyclotron et la fréquence des collisions sont négligeables devant la fréquence du signal transionosphérique. Cela revient à négliger le champ magnétique terrestre dans le bilan des forces appliquées aux électrons. L'équation fondamentale de la dynamique est alors donnée par :

$$m_e \frac{d\vec{V}_e}{dt} = e\vec{E} \Rightarrow -i\omega\vec{V}_e = \frac{e}{m_e}\vec{E}. \quad (\text{A1.1})$$

Le courant électrique a donc pour expression, dans le domaine de Fourier :

$$\Rightarrow \vec{j} = i \frac{N_e e^2}{\omega m_e} \vec{E} = i \varepsilon_0 \omega \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \vec{E}. \quad (\text{A1.2})$$

Les équations de Maxwell donnent, toujours dans le domaine de Fourier :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow i\vec{k}_0 \wedge \vec{B} = i \varepsilon_0 \mu_0 \omega \left( \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 \right) \vec{E}. \quad (\text{A1.3})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow i\vec{k}_0 \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B}. \quad (\text{A1.4})$$

D'après ces équations, on arrive à l'équation de dispersion suivante :

$$k_0^2 c^2 - \omega^2 + \omega_p^2 = 0. \quad (\text{A1.5})$$

La vitesse de phase est définie par :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_0} = \frac{c}{n}. \quad (\text{A1.6})$$

L'indice de réfraction  $n$ , ou indice de phase, est alors donné par :

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1 - \frac{f_p^2}{f^2}. \quad (\text{A1.7})$$

## Annexe 2 : Expressions de $R_{iono}$ et $L_V$ en fonction des paramètres géométriques de la propagation

Selon la position du satellite GNSS, l'approximation Terre plate n'est pas suffisante pour exprimer la distance parcourue par le signal à travers l'ionosphère et jusqu'au récepteur. La figure A2.1 illustre la configuration de la liaison. La couche ionosphérique, située à une altitude  $H$ , a une épaisseur  $\Delta H$ . Le LOS fait un angle  $\vartheta$  avec la verticale locale au récepteur. On définit également la verticale locale au point  $I_1$ , qui fait un angle  $\vartheta'$  avec la direction du LOS. Selon la valeur de l'angle  $\vartheta$  et à cause de la rotondité de la Terre, l'approximation  $\vartheta = \vartheta'$  n'est pas toujours valable, donc la distance  $R_{iono} = I_1 I_2 \neq \Delta H \sec \vartheta$  et la distance  $L_V$ , de  $I_1$  au récepteur, est différente de  $H \sec \vartheta$ .

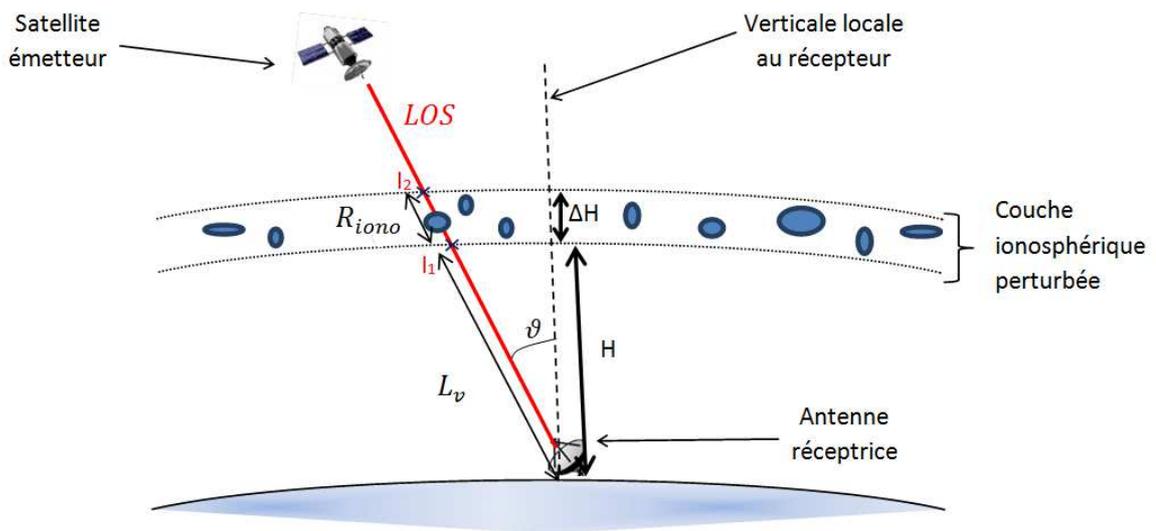


Figure A2.1 : Géométrie de la propagation transionosphérique vue dans le plan méridien.

La figure A2.2 illustre la géométrie du problème. Les seules hypothèses que nous allons considérer ici est que l'épaisseur de la couche ionosphérique reste constante en tout point et que son altitude ne varie pas.

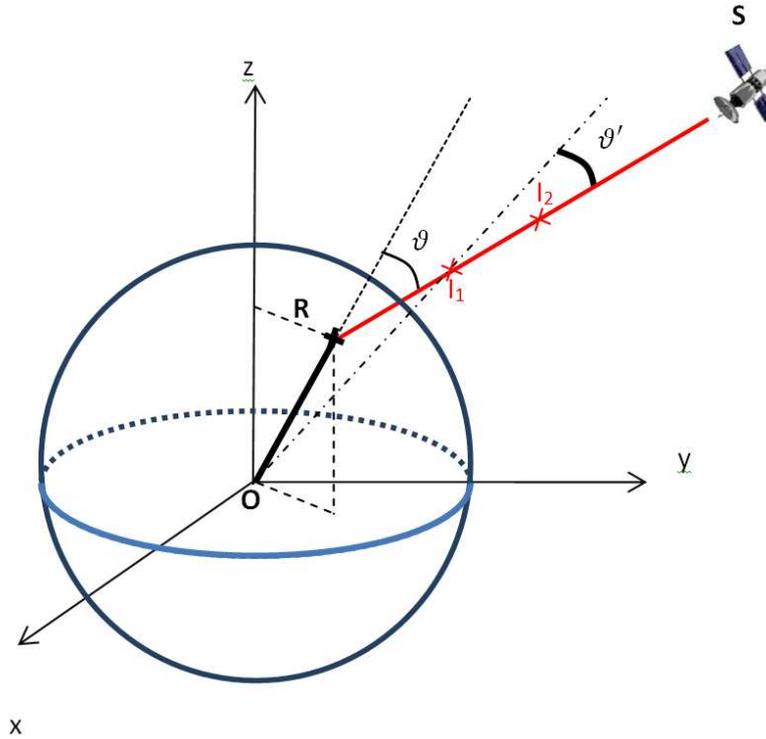


Figure A2.2 : Géométrie de la propagation et angles : le plan  $(x, z)$  contient le méridien de Greenwich,  $\mathbf{R}$  est la station réceptrice terrestre GNSS, les points  $\mathbf{I}_1$  et  $\mathbf{I}_2$  représentent les points de pénétration du signal dans l'ionosphère respectivement en bas et en haut de la couche.

On note  $\mathbf{O}$  le centre de la Terre et  $R_T$  son rayon. Le récepteur terrestre  $\mathbf{R}$  et le satellite émetteur  $\mathbf{S}$  sont repérés par leurs coordonnées en latitude (par rapport à l'axe  $Oz$ ) et longitude (par rapport à l'axe  $Ox$ ). L'objectif est de déterminer l'expression des distances  $RI_1$  (notée  $L_V$  ou longueur dans le vide) et  $I_1I_2$  (notée  $R_{iono}$ ) connaissant les coordonnées de la station sol et du satellite. On va utiliser le repère cartésien  $(x, y, z)$  représenté figure A2.2 et établir les équations paramétriques qui caractérisent la position des points  $I_1$  et  $I_2$ .

Les points  $I_1$  et  $I_2$  appartiennent à une sphère de rayon  $(R_t + H)$  et  $(R_t + H + \Delta H)$  respectivement. On peut écrire :

$$x_{I_1}^2 + y_{I_1}^2 + z_{I_1}^2 = (R_t + H)^2, \quad (\text{A2.1})$$

$$x_{I_2}^2 + y_{I_2}^2 + z_{I_2}^2 = (R_t + H + \Delta H)^2. \quad (\text{A2.2})$$

Les points R, I<sub>1</sub>, I<sub>2</sub> et S étant alignés sur une même droite, leurs coordonnées sont définies par les équations suivantes :

$$\frac{z_{I_1} - z_R}{z_S - z_R} = \frac{y_{I_1} - y_R}{y_S - y_R} = \frac{x_{I_1} - x_R}{x_S - x_R}, \quad (\text{A2.3})$$

$$\frac{z_{I_2} - z_R}{z_S - z_R} = \frac{y_{I_2} - y_R}{y_S - y_R} = \frac{x_{I_2} - x_R}{x_S - x_R}. \quad (\text{A2.4})$$

La résolution de ces 6 équations à 6 inconnues nous permet de déterminer les coordonnées des points d'entrée et de sortie de l'ionosphère, donc de calculer les longueurs  $L_V$  et  $R_{iono}$  d'après :

$$L_V = \sqrt{(x_{I_1} - x_R)^2 + (y_{I_1} - y_R)^2 + (z_{I_1} - z_R)^2}, \quad (\text{A2.5})$$

$$R_{iono} = \sqrt{(x_{I_2} - x_{I_1})^2 + (y_{I_2} - y_{I_1})^2 + (z_{I_2} - z_{I_1})^2}. \quad (\text{A2.6})$$

Si on dispose des coordonnées sphériques du satellite (latitude, longitude, altitude) et de la station réceptrice, on peut obtenir leurs coordonnées dans le repère cartésien puis déterminer les coordonnées des points I<sub>1</sub> et I<sub>2</sub>.

Si on souhaite étudier des cas plus généraux avec comme paramètres d'entrée l'altitude  $H$  de la couche ionosphérique, son épaisseur et l'angle  $\vartheta'$ , on peut développer les expressions des longueurs  $L_V$  et  $R_{iono}$  :

$$\begin{aligned} L_V^2 &= x_{I_1}^2 + y_{I_1}^2 + z_{I_1}^2 + x_R^2 + y_R^2 + z_R^2 - 2(x_{I_1}x_R + y_{I_1}y_R + z_{I_1}z_R), \\ L_V^2 &= (R_t + H)^2 + R_t^2 - 2\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OI_1}, \\ L_V^2 &= (R_t + H)^2 + R_t^2 - 2(\overrightarrow{OI_1} + \overrightarrow{I_1R}) \cdot \overrightarrow{OI_1}, \\ L_V^2 &= (R_t + H)^2 + R_t^2 - 2(R_t + H)^2 + 2(R_t + H)L_V \cos \vartheta'. \end{aligned} \quad (\text{A2.7})$$

On conserve la solution  $L_V$  positive :

$$L_V = (R_t + H) \cos \vartheta' - \sqrt{R_t^2 \cos^2 \vartheta' - \sin^2 \vartheta' (H^2 + 2 H R_t)}. \quad (\text{A2.8})$$

En suivant un raisonnement similaire, on peut exprimer l'épaisseur ionosphérique traversée :

$$R_{iono} = \sqrt{(R_t + H + \Delta H)^2 - \sin^2 \vartheta' (R_t + H)^2} - (R_t + H) \cos \vartheta' \quad (\text{A2.9})$$

Ces résultats font intervenir l'angle  $\vartheta'$ , angle entre le LOS et la verticale à  $I_1$ . Dans la pratique, c'est plutôt l'angle  $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  l'angle d'élévation du satellite, qui est donné en paramètre d'entrée. On va donc exprimer l'angle  $\vartheta'$  en fonction de l'angle  $\vartheta$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{RI_1} &= R_t L_V \cos \vartheta \\ R_t L_V \cos \vartheta &= \overrightarrow{OI_1} \cdot \overrightarrow{RI_1} + \overrightarrow{I_1 R} \cdot \overrightarrow{RI_1} \\ R_t \cos \vartheta &= (R_t + H) \cos \vartheta' - L_V \end{aligned} \quad (\text{A2.9})$$

En remplaçant  $L_V$  par son expression (A2.7), on arrive finalement à :

$$\begin{aligned} R_t \cos \vartheta &= (R_t + H) \cos \vartheta' - (R_t + H) \cos \vartheta' \\ &\quad + \sqrt{R_t^2 \cos^2 \vartheta' - \sin^2 \vartheta' (H^2 + 2 H R_t)} \end{aligned} \quad (\text{A2.10})$$

$$R_t^2 \cos^2 \vartheta = R_t^2 \cos^2 \vartheta' - \sin^2 \vartheta' (H^2 + 2 H R_t) \quad (\text{A2.11})$$

On développe l'expression (A2.11) en sin :

$$R_t^2 (1 - \sin^2 \vartheta) = R_t^2 (1 - \sin^2 \vartheta') - \sin^2 \vartheta' (H^2 + 2 H R_t)$$

$$\sin \vartheta' = \frac{R_t \sin \vartheta}{R_t + H} \quad (\text{A2.12})$$

Les longueurs  $L_V$  et  $R_{iono}$  deviennent :

$$L_V = \sqrt{R_t^2 \cos^2 \vartheta + H^2 + 2 H R_t} - R_t \cos \vartheta \quad (\text{A2.13})$$

$$R_{iono} = \sqrt{(R_t + H + \Delta H)^2 - R_t^2 \sin^2 \vartheta} - \sqrt{R_t^2 \cos^2 \vartheta + H^2 + 2 H R_t} \quad (\text{A2.14})$$

On retrouve les formulations de  $\vartheta'$  et  $L_V$  données dans [Briggs & Parkin, 1963].

Ces calculs, outre le fait qu'ils permettent de connaître l'épaisseur de la couche ionosphérique traversée, nous donnent aussi le facteur géométrique  $F_G$  permettant de passer du contenu électronique oblique STEC au contenu vertical VTEC :

$$F_G = \frac{H}{L_V} = \frac{H}{\sqrt{R_t^2 \cos^2 \vartheta + H^2 + 2 H R_t} - R_t \cos \vartheta} \quad (\text{A2.15})$$

Ainsi :

$$VTEC = F_G STEC$$

L'avantage de ce facteur est qu'il est applicable à toute valeur de l'angle  $\vartheta$ . Une hypothèse forte est que ce facteur est indépendant de l'azimut. Or le profil ionosphérique varie selon l'heure et la latitude. L'azimut est donc susceptible de jouer un rôle important dans le calcul du VTEC.

### Annexe 3 : Correspondances avec les formulations de Rino

L'objectif de cette annexe est de relier les expressions des variables de Rino  $A_R$ ,  $B_R$ ,  $C$ ,  $A''_R$  et  $C''_R$ , tirées des articles [Rino, 1977] et [Rino, 1979 (1)], aux expressions des grandeurs  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (cf. (2.50)),  $A'$  et  $B'$  (cf. (3.34)). Nous allons tout d'abord établir des liens entre la géométrie utilisée par Rino et le repère lié au LOS, choisi dans ce travail de thèse.

#### *Relations de passage entre le repère géomagnétique et le repère du LOS*

Dans [Rino, 1977], les irrégularités ionosphériques sont décrites dans le repère  $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  « local » tel que  $\underline{z}$  est aligné avec la verticale local,  $\underline{x}$  est l'axe géomagnétique Nord et  $\underline{y}$  l'axe géomagnétique Est. Le champ magnétique terrestre  $\underline{B}$  appartient au plan  $(\underline{x}, \underline{z})$  et fait un angle  $\psi_R$  avec l'axe  $\underline{x}$ . Si on considère une irrégularité ionosphérique, son axe principal d'anisotropie est selon le champ magnétique  $\underline{B}$  et l'axe secondaire fait un angle  $\delta_R$  avec le plan horizontal  $(\underline{x}, \underline{y})$ . La figure A3.1 donne une représentation des angles mis en jeu :

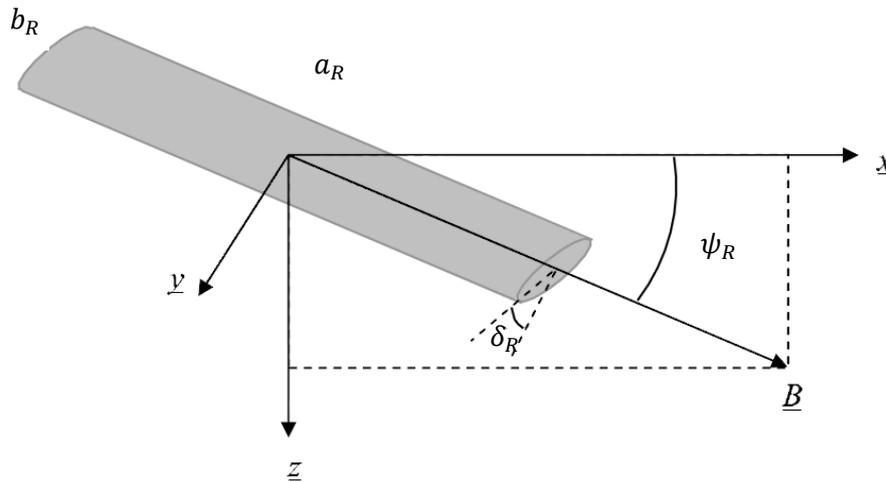


Figure A3.1 : Représentation du repère géomagnétique local  $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ , du champ magnétique terrestre  $\underline{B}$  et d'une irrégularité ionosphérique [Rogers, 2009].

$a_R$  et  $b_R$  sont respectivement les ratios d'anisotropie dans la direction du champ magnétique et perpendiculairement au champ. Dans le chapitre 1 (cf. figure 1.13), on a défini le repère lié au champ magnétique terrestre  $(x_H, y_H, z_H)$  tel que l'axe  $z_H$  est aligné avec le champ magnétique et l'axe  $y_H$  est le deuxième axe d'anisotropie. D'après la figure A3.1, on peut exprimer les vecteurs  $x_H$  et  $z_H$  dans  $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  :

$$x_H = \begin{pmatrix} \cos \delta_R \sin \psi_R \\ -\sin \delta_R \\ -\cos \delta_R \cos \psi_R \end{pmatrix}, \quad z_H = \begin{pmatrix} \cos \psi_R \\ 0 \\ \sin \psi_R \end{pmatrix}. \quad (\text{A3.1})$$

On calcule le produit vectoriel  $z_H \wedge x_H = y_H$  :

$$y_H = \begin{pmatrix} \sin \psi_R \sin \delta_R \\ \cos \delta_R \\ -\cos \psi_R \sin \delta_R \end{pmatrix}. \quad (\text{A3.2})$$

La matrice de passage du repère  $(x_H, y_H, z_H)$  au repère géomagnétique  $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  donne :

$$\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \\ \underline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta_R \sin \psi_R & \sin \psi_R \sin \delta_R & -\cos \psi_R \\ -\sin \delta_R & \cos \delta_R & 0 \\ -\cos \delta_R \cos \psi_R & -\cos \psi_R \sin \delta_R & \sin \psi_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{pmatrix}. \quad (\text{A3.3})$$

Rino, dans le même repère géomagnétique local  $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ , définit le vecteur propagation  $\underline{k}$ , direction du LOS, à partir des angles  $\phi_R$  et  $\theta_R$  schématisés sur la figure A3.2.

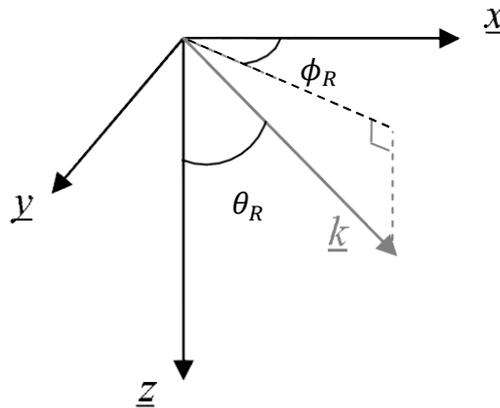


Figure A3.2 : Vecteur propagation  $\underline{k}$  dans le repère local  $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  [Rogers, 2009]

Dans ce manuscrit, le repère de travail, lié au LOS, est noté  $(u, v, s)$ , avec  $s$  dans la direction du LOS. D'après la figure A3.2, les coordonnées du vecteur  $s$  dans le repère  $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  sont :

$$s(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = \begin{pmatrix} \sin \theta_R \cos \phi_R \\ \sin \theta_R \sin \phi_R \\ \cos \theta_R \end{pmatrix}. \quad (\text{A3.4})$$

En utilisant la matrice de passage inverse de (A3.3), les coordonnées du vecteur  $s$  dans le repère  $(x_H, y_H, z_H)$  sont donc :

$$s(x_H, y_H, z_H) = \begin{pmatrix} \cos \delta_R \sin \psi_R \sin \theta_R \cos \phi_R - \sin \delta_R \sin \theta_R \sin \phi_R - \cos \delta_R \cos \psi_R \cos \theta_R \\ \sin \psi_R \sin \delta_R \sin \theta_R \cos \phi_R + \cos \delta_R \sin \theta_R \sin \phi_R - \cos \psi_R \sin \delta_R \cos \theta_R \\ - \cos \psi_R \sin \theta_R \cos \phi_R + \sin \psi_R \cos \theta_R \end{pmatrix}. \quad (\text{A3.5})$$

Le repère  $(u, v, s)$  est défini figure 2.4 et la matrice de passage du repère  $(u, v, s)$  au repère  $(x_H, y_H, z_H)$  est établie en (2.48). On peut alors exprimer les coordonnées du vecteur  $s$  dans le repère  $(x_H, y_H, z_H)$  en utilisant les angles  $\gamma$ ,  $\alpha_y$ ,  $\alpha$  et  $\psi$  définis figure 2.4 :

$$s(x_H, y_H, z_H) = \begin{pmatrix} \sin \gamma \cos \psi \sin(\alpha_y - \alpha) \\ -\sin \psi \\ \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (\text{A3.6})$$

Les équations (A3.5) et (A3.6) sont égales, on peut donc exprimer les angles utilisés par Rino, dans le repère du LOS  $(u, v, s)$  choisi dans cette thèse et ainsi comparer les expressions des indices de scintillation  $S_4$  et  $\sigma_\phi$  dans le repère géomagnétique et dans le repère du LOS.

### Correspondance entre indices d'amplitude $S_4$

D'après [Yeh & Liu, 1982], en régime de faible perturbation, on peut relier  $S_4$  à la variance de log-amplitude  $\langle \chi^2 \rangle^{3D}$  par :

$$S_4^2 \approx 4 \langle \chi^2 \rangle^{3D},$$

soit, d'après l'expression (3.44) établie dans le repère du LOS :

$$S_4^2 \approx \frac{4 \pi \lambda^2 r_e^2 R_{iono} a^{3-p} A_y A_z C_s}{A'^{\frac{p}{2}}} \times \int_0^{2\pi} d\beta \left( 1 - \frac{A' - B'}{A'} \sin^2 \beta \right)^{-\frac{p}{2} + \infty} \int_0^{\infty} dK_r K_r^{-p+1} \left[ 1 - \cos \left( \frac{L_V K_r^2}{k_0} \right) \right]. \quad (A3.7)$$

Les termes  $A'$  et  $B'$  sont définis en (3.34).

La formulation établie dans Rino [1979 (1)] s'écrit :

$$S_{4_{Rino}}^2 \approx \frac{\lambda^2 r_e^2 L \sec \theta_R a_R b_R C_s Rino}{\pi^2 A''_R \left( \nu + \frac{1}{2} \right)} \times \int_0^{2\pi} d\phi \left( 1 - \frac{A''_R - C''_R}{A''_R} \sin^2 \phi \right)^{-\nu - \frac{1}{2} + \infty} \int_0^{\infty} dq q^{-2\nu} \sin^2(Zq^2), \quad (A3.8)$$

soit

$$S_{4_{Rino}}^2 \approx \frac{\lambda^2 r_e^2 L \sec \theta_R a_R b_R C_s Rino}{2\pi^2 A''_R \left( \nu + \frac{1}{2} \right)} \times \int_0^{2\pi} d\phi \left( 1 - \frac{A''_R - C''_R}{A''_R} \sin^2 \phi \right)^{-\nu - \frac{1}{2} + \infty} \int_0^{\infty} dq q^{-2\nu} [1 - \cos(2Zq^2)]. \quad (A3.9)$$

Le tableau A3.1 donne les correspondances entre les termes définis par Rino et les paramètres établis dans le repère du LOS.

Repère Rino	Repère LOS	Commentaires
$Z$	$\frac{L_V}{2k_0}$	D'après [Rino, 1979 (1)], $Z = \frac{\lambda z \sec \theta_R}{4\pi}$ avec ( $z \sec \theta$ ) la distance parcourue par le signal entre le récepteur terrestre et la couche ionosphérique au point $I_1$ . La rotondité de la Terre n'est pas prise en compte dans $Z$ alors qu'elle l'est dans la formulation de $L_V$ .

$L \sec \theta_R$	$R_{iono}$	Épaisseur de la couche ionosphérique traversée par le signal. $\theta_R$ est l'angle entre le LOS et la verticale locale au récepteur. L'expression de Rino ne tient donc pas compte de la rotondité de la Terre et de celle de la couche ionosphérique, alors que c'est le cas dans la détermination de $R_{iono}$ (cf. annexe 2).
$a_R$	$A_z$	Ratios d'anisotropie respectivement aligné et perpendiculaire au champ magnétique terrestre. Le facteur $a$ est pris égal à 1.
$b_R$	$A_y$	
$2\nu + 1$	$p$	Indice spectral $p = 2\nu + 1$
$C_S Rino$	$8\pi^3 C_S$	Cf. expression (1.38)

Tableau A3.1 : Correspondances entre les expressions de Rino et celles développées dans la thèse dans le repère du LOS.

On simplifie les termes équivalents entre l'écriture de Rino (A3.9) et celle du repère  $(u, v, s)$  (A3.7) à partir du tableau A3.1. Il reste finalement à comparer les termes  $A''_R$  et  $A'$  d'une part,  $C''_R$  et  $B'$  d'autre part. En posant  $\alpha = 0$ , on montre que :

$$A''_R = A' \quad \text{et} \quad C''_R = B'. \quad (\text{A3.10})$$

<p>Finalement,</p>	$S_{4Rino}^2 = S_{4LOS}^2. \quad (\text{A3.11})$
--------------------	--

### Correspondance entre indices de phase $\sigma_\varphi$

Comparons l'expression (3.91) établie dans le repère du LOS avec la formulation de l'indice de phase de Rino [1979 (1)] :

$$\sigma_{\varphi_{LOS}}^2 = \frac{4\pi^2 \lambda^2 r_e^2 a A_y A_z C_S R_{iono} K_0^{2-p}}{(p-2)\sqrt{AB-C^2}} - \langle \chi^2 \rangle^{3D} \quad (\text{A3.12})$$

$$\sigma_{\varphi_{Rino}}^2 = r_e^2 \lambda^2 (L \sec \theta) C_S Rino \frac{a_R b_R}{\sqrt{A_R C_R - \frac{B_R^2}{4} \cos \theta_R}} \frac{K_0^{-2\nu+1} \Gamma(\nu - 1/2)}{4\pi \Gamma(\nu + 1/2)} \quad (\text{A3.13})$$

Dans (A3.12),  $\langle \chi^2 \rangle^{3D}$  peut être considéré comme négligeable par rapport au premier terme. En effet, les variances de phase, en  $\text{rad}^2$ , et de log-amplitude, en  $\text{dB}^2$ , sont du même ordre de grandeur. Or, pour passer des valeurs naturelles aux  $\text{dB}^2$ , concernant  $\langle \chi^2 \rangle^{3D}$ , le facteur multiplicatif à appliquer est  $(20/\ln 10)^2$ , soit environ 75. La valeur naturelle de la variance de log-amplitude n'influe donc que très peu sur la valeur de la variance de phase.

En remplaçant dans la formulation de Rino (A3.13) les différents termes du tableau A3.1, il reste à établir la correspondance entre les expressions :

$$\left( \sqrt{AB - C^2} \right)_{LOS} \quad \text{et} \quad \left( \sqrt{A_R C_R - \frac{B_R^2}{4} \cos^2 \theta_R} \right)_{Rino} .$$

D'après les expressions (2.50) des termes  $A$ ,  $B$  et  $C$ , après développement et simplification, on arrive à :

$$(AB - C^2)_{LOS} = A_y^2 A_z^2 \sin^2 \gamma \cos^2 \psi \sin^2(\alpha_y - \alpha) + A_y^2 \cos^2 \gamma + A_z^2 \sin^2 \psi . \quad (\text{A3.14})$$

D'après [Rino, 1977], les formulations de  $A_R$ ,  $B_R$  et  $C_R$  sont :

$$\begin{aligned} A_R = & A_z^2 \cos^2 \psi_R + \sin^2 \psi_R (A_y^2 \sin^2 \delta_R + \cos^2 \delta_R) \\ & + \tan^2 \theta_R \cos^2 \phi_R [A_z^2 \sin^2 \psi_R + \cos^2 \psi_R (A_y^2 \sin^2 \delta_R + \cos^2 \delta_R)] \\ & - 2 \tan \theta_R \cos \phi_R \sin \psi_R \cos \psi_R (A_z^2 - A_y^2 \sin^2 \delta_R - \cos^2 \delta_R), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_R = & 2[(A_y^2 - 1) \sin \psi_R \sin \delta_R \cos \delta_R \\ & + \tan^2 \theta_R \cos \phi_R \sin \phi_R [A_z^2 \sin^2 \psi_R + \cos^2 \psi_R (A_y^2 \sin^2 \delta_R + \cos^2 \delta_R)] \\ & - \tan \theta_R \cos \phi_R \sin \psi_R \cos \psi_R (A_z^2 - A_y^2 \sin^2 \delta_R - \cos^2 \delta_R) \\ & + \tan \theta_R \cos \phi_R \cos \psi_R \sin \delta_R \cos \delta_R (A_y^2 - 1)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_R = & A_y^2 \cos^2 \delta_R + \sin^2 \delta_R + \tan^2 \theta_R \sin^2 \phi_R [A_z^2 \sin^2 \psi_R + \cos^2 \psi_R (A_y^2 \sin^2 \delta_R + \cos^2 \delta_R)] \\ & + 2 \tan \theta_R \sin \phi_R \sin \delta_R \cos \delta_R \cos \psi_R (A_y^2 - 1). \end{aligned}$$

Après développement et simplification, le terme géométrique de Rino s'écrit :

$$\begin{aligned} & \sqrt{A_R C_R - \frac{B_R^2}{4} \cos \theta_R} \\ = & A_y^2 A_z^2 (-\sin \theta_R \cos \phi_R \cos \delta_R \sin \psi_R + \sin \theta_R \sin \phi_R \sin \delta_R + \cos \theta_R \cos \delta_R \cos \psi_R)^2 \\ & + A_y^2 (\sin \theta \cos \phi_R \cos \psi_R + \cos \theta_R \sin \psi_R)^2 \\ & + A_z^2 (-\sin \psi_R \sin \delta_R \sin \theta_R \sin \phi_R - \sin \theta_R \sin \phi_R \cos \delta_R + \cos \theta_R \sin \delta_R \cos \psi_R)^2. \end{aligned}$$

D'après l'égalité (A3.5) = (A3.6), on arrive finalement à :

$$\left( \sqrt{AB - C^2} \right)_{LOS} = \left( \sqrt{A_R C_R - \frac{B_R^2}{4} \cos \theta_R} \right)_{Rino}. \quad (A3.15)$$

D'où	$\sigma_{\varphi_{Rino}}^2 = \sigma_{\varphi_{LOS}}^2.$	(A3.16)
------	---	---------

## Annexe 4 : Simplification du ratio des variances de log-amplitude

3D/2D

On rappelle l'expression (3.80) du rapport des log-amplitude 3D et 2D dans laquelle on pose  $p = 4$  :

$$R_\chi = \frac{\left(A - \frac{C^2}{B}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{B} \int_0^{2\pi} d\beta [A' - (A' - B') \sin^2 \beta]^{-2}}{\pi}, \quad (\text{A4.1})$$

$$R_\chi = \frac{4 \left(A - \frac{C^2}{B}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{B} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\beta \left[1 - \left(\frac{A' - B'}{A'}\right) \sin^2 \beta\right]^{-2}}{\pi A'^2}. \quad (\text{A4.2})$$

Avec  $\int_0^{\pi/2} d\beta (1 - k^2 \sin^2 \beta)^{-2} = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(2, \frac{1}{2}; 1; k^2\right)$ , l'expression (A4.2) devient :

$$R_\chi = \frac{2 (AB - C^2)^{\frac{3}{2}}}{B A'^2} {}_2F_1\left(2, \frac{1}{2}; 1; \frac{A' - B'}{A'}\right). \quad (\text{A4.3})$$

On développe la fonction hypergéométrique et on arrive à :

$$R_\chi = \frac{(AB - C^2)^{\frac{3}{2}}}{B A'^{\frac{3}{2}}} \frac{A' + B'}{B'^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{A4.4})$$

À partir des expressions des coefficients  $A'$  et  $B'$ , en (3.34), on a :

$$\begin{aligned} A' + B' &= A \cos^2 \varepsilon + B \sin^2 \varepsilon + 2 C \cos \varepsilon \sin \varepsilon + A \sin^2 \varepsilon + B \cos^2 \varepsilon - 2 C \cos \varepsilon \sin \varepsilon, \\ &\Rightarrow A' + B' = A + B. \end{aligned} \quad (\text{A4.5})$$

Le produit  $A'B'$  donne :

$$\begin{aligned} A'B' &= AB(\cos^4 \varepsilon + \sin^4 \varepsilon) + \cos^2 \varepsilon \sin^2 \varepsilon (A^2 + B^2 - 4C^2) \\ &\quad - 2C \cos \varepsilon \sin \varepsilon (\cos^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon)(A - B). \end{aligned} \quad (\text{A4.6})$$

$$A'B' = AB + \frac{\sin^2(2\varepsilon)}{4} [(A - B)^2 - 4C^2] - C(A - B) \cos(2\varepsilon) \sin(2\varepsilon). \quad (\text{A4.7})$$

D'après l'expression (3.34) et d'après les propriétés trigonométriques, on obtient :

$$\sin^2(2\varepsilon) = \frac{4C^2}{(A - B)^2 + 4C^2}, \quad \cos(2\varepsilon) \sin(2\varepsilon) = \frac{2C(A - B)}{(A - B)^2 + 4C^2}. \quad (\text{A4.8})$$

L'expression (A4.7) devient :

$$A'B' = AB + \frac{C^2[(A - B)^2 - 4C^2]}{(A - B)^2 + 4C^2} - \frac{2C^2(A - B)^2}{(A - B)^2 + 4C^2}, \quad (\text{A4.9})$$

soit 
$$A'B' = AB - C^2. \quad (\text{A4.10})$$

En injectant les égalités (A4.5) et (A4.10) dans l'expression du rapport (A4.4), on arrive finalement à :

$R_x = 1 + \frac{A}{B}. \quad (\text{A4.11})$
---

## Annexe 5 : Calcul des variances de phase 3D et 2D

---

### Variance de phase 3D

On part des équations (3.86) et (3.87) :

$$\langle \varphi^2 \rangle^{3D} = (4\pi r_e)^2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3K S_{\Delta N_e}^{3D}(\vec{K}) E^{3D}(\vec{K}) E^{3D}(-\vec{K}), \quad (3.86)$$

avec

$$E^{3D}(\vec{K}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3r B^{3D}(\vec{R}, \vec{r}) e^{i\vec{K}\cdot\vec{r}} \varphi(s). \quad (3.87)$$

On définit :

$$E^{3D}(\vec{K}) = \frac{1}{2i} [\Lambda^{3D}(\vec{K}) - \Lambda^{3D*}(-\vec{K})], \quad (A5.1)$$

avec

$$\Lambda^{3D}(\vec{K}) = \frac{i}{2k_0} \int_0^{+\infty} ds e^{is(K_s - \frac{K_r^2}{2k_0})} \varphi(s). \quad (A5.2)$$

On obtient donc :

$$E^{3D}(\vec{K}) = \frac{1}{2k_0} \int_0^{+\infty} ds \varphi(s) e^{isK_s} \cos\left(\frac{SK_r^2}{2k_0}\right), \quad (A5.3)$$

$$\langle \varphi^2 \rangle^{3D} = 2\pi\lambda^2 r_e^2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3K S_{\Delta N_e}^{3D}(\vec{K}) \delta(K_s) \int_{L_V}^{L_V + R_{iono}} ds \cos^2\left(\frac{SK_r^2}{2k_0}\right), \quad (A5.4)$$

$$\langle \varphi^2 \rangle^{3D} = 2\pi\lambda^2 r_e^2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3K S_{\Delta N_e}^{3D}(\vec{K}) \delta(K_s) \int_{L_V}^{L_V + R_{iono}} ds \left[ 1 - \sin^2\left(\frac{SK_r^2}{2k_0}\right) \right], \quad (A5.5)$$

$$\langle \varphi^2 \rangle^{3D} = 2\pi\lambda^2 r_e^2 R_{iono} \iint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_v S_{\Delta N_e}^{3D}(K_u, K_v, 0) F_\varphi^{3D}(K_u, K_v), \quad (A5.6)$$

avec :

$$\begin{aligned} F_\varphi^{3D}(K_u, K_v) &= \frac{1}{2} [1 + \text{sinc}(\zeta X) \cos[X(1 + \zeta)]] \\ &= 1 - F_\chi^{3D}(K_u, K_v). \end{aligned} \quad (A5.7)$$

Par rapport à la variance de log-amplitude, seule la fonction de filtrage change et entraîne l'apparition d'un terme intégral supplémentaire dans la détermination de la variance de phase. D'après les expressions de  $S_{\Delta N_e}^{3D}$  (2.49) et  $F_\chi^{3D}$  (3.29) :

$$\begin{aligned} \langle \varphi^2 \rangle^{3D} &= 2\pi\lambda^2 r_e^2 a^{3-p} A_y A_z C_S R_{iono} \\ &\times \iint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_v \left( AK_u^2 + BK_v^2 + 2C K_u K_v + \frac{K_0^2}{a^2} \right)^{-p/2} - \langle \chi^2 \rangle^{3D} \end{aligned} \quad (A5.8)$$

On résout l'intégrale double terme après terme, d'abord en  $K_v$  :

$$I = \iint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_v \left( AK_u^2 + BK_v^2 + 2C K_u K_v + \frac{K_0^2}{a^2} \right)^{-p/2} \quad (A5.9)$$

On pose  $Q = 2CK_u$  et  $R = AK_u^2 + \frac{K_0^2}{a^2}$ .

On obtient :

$$I = B^{-p/2} T^{1-p} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}, \quad (A5.10)$$

avec  $T^2 = \frac{R}{B} - \frac{Q^2}{4B^2}$ .

On arrive à :

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{B}} \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} dK_u \left[ \left( A - \frac{C^2}{B} \right) K_u^2 + \frac{K_0^2}{a^2} \right]^{\frac{1-p}{2}}. \quad (A5.11)$$

On résout ensuite l'intégrale en  $K_u$ . On obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dK_u \left[ \left( A - \frac{C^2}{B} \right) K_u^2 + \frac{K_0^2}{a^2} \right]^{\frac{1-p}{2}} = \left( A - \frac{C^2}{B} \right)^{\frac{1-p}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dK_u \left[ K_u^2 + \frac{K_0^2}{a^2 \left( A - \frac{C^2}{B} \right)} \right]^{\frac{1-p}{2}}, \quad (A5.12)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dK_u \left[ \left( A - \frac{C^2}{B} \right) K_u^2 + \frac{K_0^2}{a^2} \right]^{\frac{1-p}{2}} = \left( A - \frac{C^2}{B} \right)^{\frac{1-p}{2}} \left[ \frac{K_0^2}{a^2 \left( A - \frac{C^2}{B} \right)} \right]^{\frac{p-2}{2}} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)},$$

soit	$\langle \varphi^2 \rangle^{3D} = \frac{4\pi^2 \lambda^2 r_e^2 a A_y A_z C_S R_{iono} K_0^{2-p}}{(p-2)\sqrt{AB-C^2}} - \langle \chi^2 \rangle^{3D}$	(A5.13)
------	---	---------

### Variance de phase 2D

On part des formulations (3.94) et (3.95) :

$$\langle \varphi^2 \rangle^{2D} = (4\pi r_e)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} d^3K S_{\Delta N_e}^{2D}(\vec{K}) E^{2D}(\vec{K}) E^{2D}(-\vec{K}), \quad (3.94)$$

avec

$$E^{2D}(\vec{K}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2r B^{2D}(\vec{R}, \vec{r}) e^{i\vec{K}\cdot\vec{r}}, \quad (3.95)$$

On définit :

$$E^{2D}(\vec{K}) = \frac{1}{2i} [\Lambda^{2D}(\vec{K}) - \Lambda^{2D*}(-\vec{K})], \quad (A5.14)$$

avec

$$\Lambda^{2D}(\vec{K}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} du ds G^{2D}(\vec{R}, \vec{r}) \frac{E_0(\vec{r})}{E_0(\vec{R})} e^{i\vec{K}\cdot\vec{r}} \varphi(\vec{r}). \quad (A5.15)$$

D'après le calcul de la variance de log-amplitude 2D (section 3.2.4) et celui de la variance de phase 3D, on a :

$$E^{2D}(\vec{K}) = \frac{1}{2k_0} \int_0^{+\infty} ds \varphi(s) e^{isK_s} \cos\left(\frac{sK_u^2}{2k_0}\right). \quad (A5.16)$$

En suivant les étapes des calculs déjà menés plus haut pour la variance de phase 3D, on obtient :

$$\langle \varphi^2 \rangle^{2D} = 2\pi \lambda^2 r_e^2 R_{iono} \iint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_v S_{\Delta N_e}^{3D}(K_u, K_v, 0) F_\varphi^{2D}(K_u), \quad (A5.17)$$

où

$$F_\varphi^{2D}(K_u) = \frac{1}{2} [1 - \text{sinc}(\varepsilon X') \cos[X'(1 + \varepsilon)]], \quad (A5.18)$$

avec  $\varepsilon = \frac{R_{iono}}{2 L_V}$  et  $X' = \frac{L_V K_u^2}{k_0}$ .

Sachant que  $F_\varphi^{2D}(K_u) = 1 - F_\chi^{2D}(K_u)$ , on obtient :

$$\langle \varphi^2 \rangle^{2D} = 2\pi\lambda^2 r_e^2 R_{iono} \iint_{-\infty}^{+\infty} dK_u dK_v S_{\Delta N_e}^{3D}(K_u, K_v, 0) - \langle \chi^2 \rangle^{2D}. \quad (\text{A5.19})$$

Le calcul intégral est le même qu'en 3D et donne :

$$\langle \varphi^2 \rangle^{2D} = \frac{4\pi^2 \lambda^2 r_e^2 a A_y A_z C_S R_{iono} K_0^{2-p}}{(p-2)\sqrt{AB-C^2}} - \langle \chi^2 \rangle^{2D}. \quad (\text{A5.20})$$

## Annexe 6 : Expressions asymptotiques des spectres de log-amplitude

### 3D et 2D

#### *Spectre de log-amplitude 3D*

*Expression asymptotique en  $\omega \rightarrow 0$*

Le spectre fréquentiel de log-amplitude s'exprime de façon générale par (3.114) :

$$\begin{aligned}
 W_{\chi}^{3D}(\omega) &= \frac{2\pi^2 \lambda^2 r_e^2 a^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono}}{V_v} \\
 &\times \int_{-\infty}^{+\infty} dK_u \left[ AK_u^2 + B \left( \frac{\omega - K_u V_u}{V_v} \right)^2 + 2CK_u \left( \frac{\omega - K_u V_u}{V_v} \right) + \frac{K_0^2}{a^2} \right]^{-\frac{p}{2}} \\
 &\times \left[ 1 - \text{sinc} \left[ \frac{\left[ K_u^2 + \left( \frac{\omega - K_u V_u}{V_v} \right)^2 \right] R_{iono}}{2k_0} \right] \right] \\
 &\times \cos \left[ \frac{L_V \left[ K_u^2 + \left( \frac{\omega - K_u V_u}{V_v} \right)^2 \right]}{k_0} \left( 1 + \frac{R_{iono}}{2L_V} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{3.114}$$

On simplifie cette expression de la même façon que dans le calcul des variances de log-amplitude et de phase, c'est-à-dire en étudiant le produit du spectre par la fonction de filtrage en fonction de la valeur de  $K_u$ . Les mêmes conclusions sont ainsi réutilisées, à savoir que l'on néglige la contribution de  $K_0$ , que l'on travaille dans l'hypothèse couche mince et que l'on simplifie la fonction de filtrage à la seule fonction cosinus. L'asymptote en 0 s'écrit :

$$\begin{aligned}
W_{\chi}^{3D}(\omega \rightarrow 0) &= \frac{2\pi^2 \lambda^2 r_e^2 a^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono}}{V_v} \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} dK_u \left[ AK_u^2 + BK_u^2 \left( \frac{V_u}{V_v} \right)^2 - 2CK_u^2 \frac{V_u}{V_v} + \frac{K_0^2}{a^2} \right]^{-\frac{p}{2}} \\
&\times \left[ 1 - \cos \left[ \frac{L_v K_u^2 \left( 1 + \frac{V_u^2}{V_v^2} \right)}{k_0} \right] \right],
\end{aligned} \tag{A6.1}$$

$$W_{\chi}^{3D}(\omega \rightarrow 0) = \frac{2\pi^2 \lambda^2 r_e^2 a^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono}}{V_v \left[ A + B \left( \frac{V_u}{V_v} \right)^2 - 2C \frac{V_u}{V_v} \right]^{p/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} K_u dK_u \frac{1 - \cos \frac{L_v K_u^2 \left( 1 + \frac{V_u^2}{V_v^2} \right)}{k_0}}{K_u^{p+1}}$$

Or,  $\int_0^{+\infty} dx x^{-\mu} [1 - \cos(ax)] = -a^{\mu-1} \frac{\pi}{2\Gamma(\mu) \cos(\frac{\mu\pi}{2})}$ , ce qui donne finalement, en posant

$V_r^2 = V_u^2 + V_v^2$  la vitesse sur le plan  $(u, v)$  au carré :

$$W_{\chi}^{3D}(\omega \rightarrow 0) = \frac{-\pi^3 \lambda^2 r_e^2 a^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono} V_r^{p-1}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \cos\left(\frac{p+1}{4}\pi\right) (AV_v^2 + BV_u^2 - 2CV_u V_v)^{p/2}} \left(\frac{L_v}{k_0}\right)^{\frac{p-1}{2}} \tag{A6.2}$$

*Expression asymptotique en  $\omega \rightarrow +\infty$*

Dans (3.113), la fonction de filtrage  $F_{\chi}\left(K_u, \frac{\omega - K_u V_u}{V_v}\right)$ , pour  $\omega \rightarrow +\infty$ , tend vers  $\frac{1}{2}$ . On néglige  $K_0$  dans l'expression du spectre par rapport aux termes  $\omega$  et  $\omega^2$ . L'intégrale à calculer devient :

$$\begin{aligned}
W_{\chi}^{3D}(\omega \rightarrow +\infty) &= \frac{2\pi^2 \lambda^2 r_e^2 a^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono}}{V_v} \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} dK_u \left[ AK_u^2 + B \left( \frac{\omega - K_u V_u}{V_v} \right)^2 + 2CK_u \left( \frac{\omega - K_u V_u}{V_v} \right) \right]^{-p/2}
\end{aligned} \tag{A6.3}$$

$$W_{\chi}^{3D}(\omega \rightarrow +\infty) = \frac{2\pi^2 \lambda^2 r_e^2 a^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono}}{V_v} \int_{-\infty}^{+\infty} dK_u [P K_u^2 + Q K_u + R]^{-p/2},$$

avec  $P = A + B \frac{V_u^2}{V_v^2} - 2C \frac{V_u}{V_v}, \quad Q = 2C \frac{\omega}{V_v} - 2B \frac{\omega V_u}{V_v^2}, \quad R = B \frac{\omega^2}{V_v^2}.$

L'intégrale à calculer est :  $I = P^{-p/2} T^{1-p} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)},$  (A6.4)

avec  $T^2 = \frac{R}{P} - \frac{Q^2}{4P^2}.$

L'expression asymptotique finale du spectre de log-amplitude en  $\omega \rightarrow +\infty$  est :

$$W_{\chi}^{3D}(\omega \rightarrow +\infty) = \frac{2\pi^2 \sqrt{\pi} \lambda^2 r_e^2 a^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono} \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{(Av_v^2 + Bv_u^2 - 2Cv_u v_v)^{1-p/2} (AB - C^2)^{\frac{p-1}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \omega^{1-p} \quad (A6.5)$$

### Spectre de log-amplitude 2D

On part des expressions (3.117) et (3.118) :

$$W_{\chi}^{2D}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle \chi(\vec{R}, t) \chi(\vec{R}, t + \tau) \rangle^{2D} e^{-i\omega\tau}, \quad (3.117)$$

$$\langle \chi(\vec{R}, t) \chi(\vec{R}, t + \tau) \rangle^{2D} = (4\pi r_e)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2K S_{\Delta N_e}^{2D}(K_u, K_s) e^{i\vec{k} \cdot \vec{v} \tau} D^{2D}(-\vec{K}) D^{2D}(\vec{K}), \quad (A6.6)$$

avec :  $D^{2D}(\vec{K}) = \frac{1}{2k_0} \int_0^{+\infty} ds \wp(s) e^{isK_s} \sin\left(\frac{sK_u^2}{2k_0}\right).$  (A6.7)

(A6.6) devient :

$$\begin{aligned} \langle \chi(\vec{R}, t) \chi(\vec{R}, t + \tau) \rangle^{2D} &= 2\pi\lambda^2 r_e^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2K S_{\Delta N_e}^{2D}(K_u, K_s) e^{i\vec{K} \cdot \vec{V}\tau} \delta(K_s) \\ &\times \int_0^{+\infty} ds \varphi(s) \sin^2\left(\frac{SK_u^2}{2k_0}\right). \end{aligned} \quad (\text{A6.8})$$

D'après la relation (2.73) entre  $S_{\Delta N_e}^{2D}$  et  $S_{\Delta N_e}^{3D}$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \langle \chi(\vec{R}, t) \chi(\vec{R}, t + \tau) \rangle^{2D} &= 2\pi\lambda^2 r_e^2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3K S_{\Delta N_e}^{3D}(K_u, K_s, K_s) e^{i\vec{K} \cdot \vec{V}\tau} \delta(K_s) \\ &\times \int_0^{+\infty} ds \varphi(s) \sin^2\left(\frac{SK_u^2}{2k_0}\right), \end{aligned} \quad (\text{A6.9})$$

soit, par définition de la fonction  $\delta$  :

$$\langle \chi(\vec{R}, t) \chi(\vec{R}, t + \tau) \rangle^{2D} = \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2K S_{\Delta N_e}^{3D}(K_u, K_v, 0) e^{iK_u \cdot V_u \tau} \int_0^{+\infty} ds \varphi(s) \sin^2\left(\frac{SK_u^2}{2k_0}\right). \quad (\text{A6.10})$$

Par définition de la fonction de profil  $\varphi(s)$  (3.5), l'intégrale en  $s$  donne :

$$\int_0^{+\infty} ds \varphi(s) \sin^2\left(\frac{SK_u^2}{2k_0}\right) = R_{iono} F_{\chi}^{2D}(K_u), \quad (\text{A6.11})$$

avec  $F_{\chi}^{2D}$  définie en (3.63). On intègre ces équations dans l'expression du spectre de log-amplitude 2D (3.115) :

$$W_{\chi}^{2D}(\omega) = 2\pi\lambda^2 r_e^2 R_{iono} \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2K S_{\Delta N_e}^{3D}(K_u, K_v, 0) F_{\chi}^{2D}(K_u) \int_0^{+\infty} d\tau e^{i\tau(K_u \cdot V_u - \omega)}. \quad (\text{A6.12})$$

L'intégrale en  $\tau$  donne :

$$\int_0^{+\infty} dt e^{i\tau(K_u V_u - \omega)} = 2\pi \delta(K_u V_u - \omega).$$

On pose  $X = K_u \cdot V_u - \omega$ , ce qui donne  $K_u = \frac{X+\omega}{V_u}$  et  $dK_u = \frac{dX}{V_u}$ . Le spectre de log-amplitude devient :

$$W_\chi^{2D}(\omega) = \frac{4\pi^2 \lambda^2 r_e^2 R_{iono}}{V_u} \iint_{-\infty}^{+\infty} dK_v dX S_{\Delta N_e}^{3D} \left( \frac{X+\omega}{V_u}, K_v, 0 \right) F_\chi^{2D} \left( \frac{X+\omega}{V_u} \right) \delta(X),$$

$$W_\chi^{2D}(\omega) = \frac{4\pi^2 \lambda^2 r_e^2 R_{iono}}{V_u} F_\chi^{2D} \left( \frac{\omega}{V_u} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} dK_v S_{\Delta N_e}^{3D} \left( \frac{\omega}{V_u}, K_v, 0 \right). \quad (\text{A6.13})$$

On remplace le spectre des fluctuations de densité électronique par son expression (2.49) :

$$W_\chi^{2D}(\omega) = \frac{4\pi^2 \lambda^2 r_e^2 a_x^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono}}{V_u} F_\chi^{2D} \left( \frac{\omega}{V_u} \right)$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} dK_v \left( A \frac{\omega^2}{V_u^2} + BK_v^2 + 2C \frac{\omega}{V_u} K_v + \frac{K_0^2}{a_x^2} \right)^{-p/2}, \quad (\text{A6.14})$$

$$W_\chi^{2D}(\omega) = \frac{4\pi^2 \lambda^2 r_e^2 a_x^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono}}{V_u} F_\chi^{2D} \left( \frac{\omega}{V_u} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} dK_v (BK_v^2 + QK_v + R)^{-p/2},$$

avec  $Q = 2C \frac{\omega}{V_u}, \quad R = A \frac{\omega^2}{V_u^2} + \frac{K_0^2}{a^2}.$

L'expression théorique finale de spectre de log-amplitude 2D est :

$$W_\chi^{2D}(\omega) = \frac{4\pi^2 \sqrt{\pi} \lambda^2 r_e^2 a_x^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono} \Gamma \left( \frac{p-1}{2} \right)}{V_u \Gamma \left( \frac{p}{2} \right)} B^{\frac{p}{2}-1}$$

$$\times \left[ \left( A \frac{\omega^2}{V_u^2} + \frac{K_0^2}{a^2} \right) B - C^2 \frac{\omega^2}{V_u^2} \right]^{\frac{1-p}{2}} \left[ 1 - \text{sinc} \left( \frac{\omega^2 R_{iono}}{2 V_u^2 k_0} \right) \cos \left[ \frac{L_V \omega^2}{V_u^2 k_0} \left( 1 + \frac{R_{iono}}{2 L_V} \right) \right] \right]. \quad (\text{A6.15})$$

*Asymptote en 0*

On travaille dans l'hypothèse couche mince, qui simplifie la fonction de filtrage au terme  $\cos$  seul. Un développement limité en 0 de cette fonction donne :

$$F_{\chi}^{2D} \left( \frac{\omega}{v_u} \right) = \frac{1 - \cos \left( \frac{LV \omega^2}{v_u^2 k_0} \right)}{2},$$

$$F_{\chi}^{2D} \left( \frac{\omega}{v_u} \right)_{\omega \rightarrow 0} = \frac{LV^2 \omega^4}{4 v_u^4 k_0^2}. \quad (\text{A6.16})$$

On obtient :

$$W_{\chi}^{2D}(\omega \rightarrow 0) = \frac{4\pi^2 \sqrt{\pi} \lambda^2 r_e^2 a_x^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono} \Gamma \left( \frac{p-1}{2} \right)}{v_u \Gamma \left( \frac{p}{2} \right)} B^{\frac{p}{2}-1}$$

$$\times \left[ \left( A \frac{\omega^2}{v_u^2} + \frac{K_0^2}{a^2} \right) B - C^2 \frac{\omega^2}{v_u^2} \right]^{\frac{1-p}{2}} \frac{LV^2 \omega^4}{4 v_u^4 k_0^2}$$

$$W_{\chi}^{2D}(\omega \rightarrow 0) = \frac{\pi^2 \sqrt{\pi} \lambda^2 r_e^2 a_x^2 A_y A_z C_s R_{iono} \Gamma \left( \frac{p-1}{2} \right) LV^2 K_0^{1-p}}{v_u^5 \Gamma \left( \frac{p}{2} \right) k_0^2 \sqrt{B}} \omega^4. \quad (\text{A6.17})$$

*Asymptote en  $+\infty$*

La fonction de filtrage  $F_{\chi}^{2D}$  tend vers  $\frac{1}{2}$  lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$ . On peut négliger le terme en  $K_0$  dans l'expression du spectre 2D qui devient :

$$W_{\chi}^{2D}(\omega \rightarrow +\infty) = \frac{2\pi^2 \sqrt{\pi} \lambda^2 r_e^2 a_x^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono} \Gamma \left( \frac{p-1}{2} \right)}{v_u \Gamma \left( \frac{p}{2} \right)} B^{\frac{p}{2}-1} \left[ A \frac{\omega^2}{v_u^2} B - C^2 \frac{\omega^2}{v_u^2} \right]^{\frac{1-p}{2}},$$

$$W_{\chi}^{2D}(\omega \rightarrow +\infty) = \frac{2\pi^2 \sqrt{\pi} \lambda^2 r_e^2 a_x^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono} \Gamma \left( \frac{p-1}{2} \right) B^{\frac{p}{2}-1}}{v_u^{2-p} \Gamma \left( \frac{p}{2} \right) (AB - C^2)^{\frac{p-1}{2}}} \omega^{1-p}. \quad (\text{A6.18})$$

## Annexe 7 : Expressions asymptotiques des spectres de phase 3D et 2D

### Spectre de phase 3D

On part de l'équation (3.126). D'après la définition de la fonction de filtrage (3.89),  $F_\varphi \rightarrow 1$  et on peut écrire :

$$W_\varphi^{3D}(\omega) = \frac{4\pi^2 \lambda^2 r_e^2 R_{iono}}{V_v} \int_{-\infty}^{+\infty} dK_u S_{\Delta N_e}^{3D} \left( K_u, \frac{\omega - K_u V_u}{V_v}, 0 \right). \quad (A7.1)$$

On intègre en  $K_u$  :

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dK_u \left[ AK_u^2 + B \left( \frac{\omega - K_u V_u}{V_v} \right)^2 + 2CK_u \left( \frac{\omega - K_u V_u}{V_v} \right) + \frac{K_0^2}{a^2} \right]^{-p/2}.$$

On pose :

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dK_u [P K_u^2 + Q K_u + R]^{-p/2},$$

avec

$$P = A + B \frac{V_u^2}{V_v^2} - 2C \frac{V_u}{V_v}, \quad Q = 2C \frac{\omega}{V_v} - 2B \frac{\omega V_u}{V_v^2}, \quad R = B \frac{\omega^2}{V_v^2} + \frac{K_0^2}{a^2}.$$

$$I(\omega) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \frac{V_v}{\sqrt{AV_v^2 + BV_u^2 - 2CV_u V_v}}$$

On obtient :

$$\times \left( \frac{AB - C^2}{AV_v^2 + BV_u^2 - 2CV_u V_v} + \frac{K_0^2}{a^2 \omega^2} \right)^{\frac{1-p}{2}} \omega^{1-p}.$$

L'expression générale du spectre 3D de phase est donc :

$$W_\varphi^{3D}(\omega) = \frac{4\pi^2 \sqrt{\pi} \lambda^2 r_e^2 a^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono} \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \sqrt{AV_v^2 + BV_u^2 - 2CV_u V_v}} \times \left( \frac{AB - C^2}{AV_v^2 + BV_u^2 - 2CV_u V_v} + \frac{K_0^2}{a^2 \omega^2} \right)^{\frac{1-p}{2}} \omega^{1-p}. \quad (A7.2)$$

Expression asymptotique en  $\omega \rightarrow 0$

L'expression asymptotique du spectre de phase, en 0, donne finalement :

$$W_{\varphi}^{3D}(\omega \rightarrow 0) = \frac{4\pi^2 \sqrt{\pi} \lambda^2 r_e^2 a^2 A_y A_z C_s K_0^{1-p} R_{iono} \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \sqrt{AV_v^2 + BV_u^2 - 2CV_u V_v}} - W_{\chi}^{3D}(0). \quad (A7.3)$$

Expression asymptotique en  $\omega \rightarrow +\infty$

De même que pour le calcul de l'asymptote en 0,  $F_{\varphi} \rightarrow \frac{1}{2}$  et on arrive à :

$$W_{\varphi}^{3D}(\omega \rightarrow +\infty) = \frac{4\pi^2 \sqrt{\pi} \lambda^2 r_e^2 a^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono} \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) (Av_v^2 + Bv_u^2 - 2Cv_u v_v)^{1-p/2} (AB - C^2)^{\frac{p-1}{2}}} \omega^{1-p}. \quad (A7.4)$$

Spectre de phase 2D

On reprend les calculs des spectres de log-amplitude 2D ainsi que les calculs de la variance de phase 2D en les appliquant au spectre de phase 2D (3.133) :

$$W_{\varphi}^{2D}(\omega) = \int_0^{+\infty} d\tau \langle \varphi(\vec{R}, t) \varphi(\vec{R}, t + \tau) \rangle^{2D} e^{-i\omega\tau}, \quad (3.133)$$

$$W_{\varphi}^{2D}(\omega) = 2\pi \lambda^2 r_e^2 R_{iono} \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2K S_{\Delta N_e}^{3D}(K_u, K_v, 0) F_{\varphi}^{2D}(K_u) \int_0^{+\infty} d\tau e^{i\tau(K_u V_u - \omega)}, \quad (A7.5)$$

avec  $F_{\varphi}^{2D}(K_u) = 1 - F_{\chi}^{2D}(K_u)$ . En faisant apparaître la fonction de Dirac avec l'intégrale en  $\tau$  (cf. calcul du spectre 2D de log-amplitude 2D annexe 6), on obtient :

$$W_{\varphi}^{2D}(\omega) = \frac{2\pi^2 \sqrt{\pi} \lambda^2 r_e^2 a_x^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono} \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{V_u \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} B^{\frac{p}{2}-1} \times \left[ \left( A \frac{\omega^2}{V_u^2} + \frac{K_0^2}{a^2} \right) B - C^2 \frac{\omega^2}{V_u^2} \right]^{\frac{1-p}{2}} \times \left[ 1 + \text{sinc} \left( \frac{\omega^2 R_{iono}}{2 V_u^2 k_0} \right) \cos \left[ \frac{L_V \omega^2}{V_u^2 k_0} \left( 1 + \frac{R_{iono}}{2 L_V} \right) \right] \right]. \quad (A7.6)$$

*Asymptote en 0*

La fonction de filtrage  $F_\varphi^{2D}$  tend vers 1 lorsque  $\omega \rightarrow 0$ . L'expression asymptotique du spectre de phase 2D en 0 est alors :

$$W_\varphi^{2D}(\omega \rightarrow 0) = \frac{4\pi^2 \sqrt{\pi} \lambda^2 r_e^2 a^2 A_y A_z C_s K_0^{1-p} R_{iono} \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{V_u \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \sqrt{B}} - W_\chi^{2D}(0). \quad (A7.7)$$

*Asymptote en  $+\infty$*

Lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$ , la fonction de filtrage  $F_\varphi^{2D}$  tend cette fois vers  $\frac{1}{2}$ . L'expression asymptotique du spectre de phase 2D est donc identique à l'expression du spectre de log-amplitude 2D à savoir :

$$W_\varphi^{2D}(\omega \rightarrow +\infty) = \frac{2\pi^2 \sqrt{\pi} \lambda^2 r_e^2 a^{3-p} A_y A_z C_s R_{iono} \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right) B^{\frac{p}{2}-1}}{V_u^{2-p} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) (AB - C^2)^{\frac{p-1}{2}}} \omega^{1-p}. \quad (A7.8)$$



- (1) **[Aarons, 1982]** Aarons J., Global morphology of ionospheric scintillations, Proc. IEEE, invited paper, vol. 70, n°4, 1982
- (2) **[American National Standard, 2011]** American National Standard, Guide to reference and standard ionosphere models, American Institute of aeronautics and astronautics, 2011
- (3) **[Aquino et al., 2010]** Aquino M., Zeynep E., Forte B., De Franceschi G., Alfonsi L., Wernik A., Canto A., Fernandez I., Monico J. F. G., State-of-the-art review, European GNSS supervisory authority, Cigala, 2010
- (4) **[Basu et al., 1988]** Basu Sa. , MacKenzie E., Basu Su., Ionospheric constraints on VHF/UHF communication links during solar maximum and minimum periods, Radio Science, vol. 23, n°3, pp. 363-378, 1988
- (5) **[Béniguel & Buonomo, 1999]** Béniguel Y., Buonomo S., A Multiple Phase Screen Ionospheric Propagation Model to Estimate the Fluctuations of Transmitted Signals, Phys. Chem. Earth (C), vol. 24, n°4, pp. 333-338, 1999
- (6) **[Béniguel, 2002]** Béniguel Y., Global Ionospheric Propagation Model (GIM): a propagation model for scintillations of transmitted signals, Radio Science, vol. 37, n°3, 2002
- (7) **[Béniguel et al., 2009]** Béniguel Y., Adam J.-P., Jakowski N., Noack T., Wilken V., Valette J.-J., Cueto M., Bourdillon A., Lassudrie-Duchesne P., Arbesser-Rastburg B., Analysis of scintillation recorded during PRIS measurement campaign, Radio Science, vol. 44, RS0A30, 2009
- (8) **[Béniguel & Hamel, 2011]** Béniguel Y., Hamel P., A global ionosphere scintillation propagation model for equatorial regions, Journal of Space Weather and Space Climate, vol. 1, 2011
- (9) **[Bilitza, 2001]** Bilitza D., International Reference Ionosphere 2000, Radio Science, vol. 36, n°2, pp. 261-275, 2001
- (10) **[Blelly et al., 2005]** Blelly P.-L., Lathuillière C., Emery B., Lilensten J., Fontanari J., Alcaydé D., An extended TRANSCAR model including ionospheric convection: simulation of EISCAT observations using inputs from AMIE, Annales Geophysicae, n°23, pp. 419-431, 2005

- (11) **[Booker, 1979]** Booker H. G., The role of acoustic gravity waves in the generation of spread-F and ionospheric scintillation, *Journal of Atmos. And Terrestrial Research*, vol. 41, pp. 501-515, 1979
- (12) **[Briggs & Parkin, 1963]** Briggs B. H., Parkin I. A., On the variation of radio star and satellite scintillations with zenith angle, *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, vol. 25, pp. 339-365
- (13) **[Caouren, 2001]** Caouren N., Modélisation et prédiction des phénomènes de scintillations perturbateurs des liaisons radioélectriques par satellite, thèse de l'Université de Rennes 1, 2001
- (14) **[Costa & Kelley, 1977]** Costa E., Kelley M. C., Ionospheric scintillation calculations based on in situ irregularity spectra, *Radio Science*, vol. 12, n°5, pp. 797-809, 1977
- (15) **[Crane, 1976]** Crane R. K., Spectra of ionospheric scintillation, *Journal of Geophysical research*, vol. 81, n° 13, 1976
- (16) **[Deshpande, 2014]** Deshpande K. B., Investigation of high latitude ionospheric irregularities utilizing modeling and GPS observations, PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2014
- (17) **[Deshpande et al., 2014]** Deshpande K. B., Bust G. S., Clauer C. R., Rino C. L., Carrano C. S., Satellite-beacon Ionospheric-scintillation Global Model of the upper Atmosphere (SIGMA) I: High latitude sensitivity study of the model parameters, *Journal of Geophysical research*, vol. 119, pp. 4026-4043, 2014
- (18) **[Doherty et al., 2003]** Doherty P. H., Delay S. H., Vallardes C. E., Klobuchar J. A., Ionospheric scintillation effects on GPS in the equatorial and auroral regions, *Journal of the Institute of Navigation*, vol. 50, n°4, pp. 235-245, 2003
- (19) **[ESA, 2014]** ESA website, What is Galileo, [www.esa.int/Galileo/](http://www.esa.int/Galileo/), 2014
- (20) **[ESSP, 2014]** European Satellite Services Provider, Egnos monthly performance report, Ares(2014)84322, 2014
- (21) **[Fabbro & Féral, 2012]** Fabbro V., Féral L., Comparison of 2D and 3D electromagnetic approaches to predict tropospheric turbulence effects in clear sky conditions, *IEEE-Antennas and Propagation*, vol. 60, n°9, 2012
- (22) **[Forte, 2005]** Forte B., Optimum detrending of raw GPS data for scintillation measurements at auroral latitudes, *Journal of Atmospheric and Solar-terrestrial Physics*, vol. 67, pp. 1100 – 1109, 2005

- (23) **[Forte et al., 2002]** Forte B., Radicella S. M., Ezquer R. G., A different approach to the analysis of GPS scintillation data, *Annals of Geophysics*, vol. 45, n°3/4, 2002
- (24) **[Forte & Radicella, 2002]** Forte B., Radicella S. M., Problems in data treatment for ionospheric scintillation measurements, *Radio Science*, vol. 37, n°6, 1096, 2002
- (25) **[Fremouw & Bates, 1971]** Fremouw E. J., Bates H. F., World-wide behaviour of average VHF-UHF scintillation, *Radio Science*, vol. 6, n°10, pp 863-869, 1971
- (26) **[Fremouw & Secan, 1984]** Fremouw E. J., Secan J. A., Modeling and scientific application of scintillation results, *Radio Science*, vol. 19, n°3, pp. 687-694, 1984
- (27) **[Fremouw et al., 1985]** Fremouw E. J., Secan J. A., Lansinger J. M., Spectral behaviour of phase scintillation in the nighttime auroral region, *Radio Science*, vol. 20, n°4, pp 923-933, 1985
- (28) **[Gherm et al., 2005]** Gherm V. E., Zernov N. N., Strangeways H. J., Propagation model for transionospheric fluctuating paths of propagation: Simulator of the transionospheric channel, *Radio Science*, Vol. 40, 2005
- (29) **[Giraud & Petit, 1975]** Giraud A., Petit M., *Physique de l'ionosphère*, Presses Universitaires de France, 1975
- (30) **[Gola et al., 1992]** Gola M., Wernik A. W., Franke S. J., Liu C. H., Yeh K. C., Behaviour of HILAT scintillation over Spitzbergen, *Journal of Atmospheric and terrestrial Physics*, vol. 54, n°9, pp. 1207-1213, 1992
- (31) **[Gradshteyn & Ryzhik, 2007]** Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M., *Table of Integrals, Series, and Products*, Ed. Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger, seventh edition, 2007
- (32) **[Greenwald et al., 1995]** Greenwald R. A., Baker K. B., Dudeney J. R., Pinnock M., Jones T. B., Thomas E. C., Villain J.-P., Cerisier J.-C., Senior C., Hanuise C., Hunsucker R. D., Sofko G., Koehler J., Nielsen E., Pellinen R., Walker A. D. M., Sato N., Yamagishi H., DARN/SUPERDARN: a global view of dynamics high-latitude convection, *Space Science Reviews*, vol. 71, pp. 761-796, 1995
- (33) **[Grimault, 1998]** Grimault C., A multiple phase screen technique for electromagnetic wave propagation through random ionospheric irregularities, *Radio Science*, vol. 33, pp. 595-606, 1998
- (34) **[Hunsucker & Hargreaves, 2003]** Hunsucker R. D., Hargreaves J. K., *The High-Latitude Ionosphere and its effects on Radio Propagation*, Cambridge University Press, 2003

- (35) **[IGRF, 2010]** International Association of Geomagnetism and Aeronomy, International Geomagnetic Reference Field: the eleventh generation, *Geophysical Journal International*, vol 183, pp. 1216-1230, 2010
- (36) **[Ishimaru, 1978]** Ishimaru A., Wave propagation and scattering in random media, multiple scattering, turbulence, rough surfaces, and remote sensing, Academic Press, vol. 2, 1978
- (37) **[ITU-R, 2012]** ITU recommendation, Ionospheric propagation data and prediction methods required for the design of satellite services and systems, P series radiowave propagation, 2012
- (38) **[Jakowski et al., 2012]** Jakowski N., Borries C., Wilken V., Introducing a disturbance ionosphere index, *Radio Science*, vol. 47, RS0L14, 2012
- (39) **[Jayachandran et al., 2009]**, Jayachandran P. T., Langley R. B., MacDougall J. W., Mushini S. C., Pokhotelov D., Hamza A. M., Mann I. R., Milling D. K., Kale Z. C., Chadwick R., Kelly T., Danskin D. W., Carrano C. S., Canadian High Arctic Ionospheric Network, *Radio Science*, vol. 44, RS0A03, 2009
- (40) **[Juan et al., 2013]** Juan J. M., Sanz J., Hernandez-Pajares M., Prieto-Cerdeira R., Schlüter S., New indicator for definition of ionospheric operational conditions, SBAS-IONO Meeting 20, Bath, U. K., 2013
- (41) **[Knepp, 1983]** Knepp D. L., Multiple phase-screen calculation of the temporal behavior of stochastic waves, *proc. IEEE*, vol. 71, n°6, 1983
- (42) **[Kolmogorov, 1941]** Kolmogorov A. N., The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers, *Comptes rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS*, vol. 30, pp. 301-305, 1941
- (43) **[Lilensten & Blelly, 1999]** Blelly P.-L., Lilensten J., *Du Soleil à la Terre, Aéronomie et météorologie de l'espace*, Presses Universitaires de Grenoble, 1999
- (44) **[Livingston et al., 1982]** Livingston R. C., Rino C. L., Owen J., Tsunoda R. T., The anisotropy of High-Latitude nighttime F region irregularities, *Journal of Geophysical Research*, vol. 87, n° A12, pp. 10,519-10,526, 1982
- (45) **[Macaskill & Ewart, 1984]** Macaskill C., Ewart T. E., Computer simulation of two-dimensional random wave propagation, *IMA Journal of Applied Mathematics* 33, pp. 1-15, 1984

- (46) **[McClure & Hanson, 1973]** McClure J. P., Hanson W. B., a catalog of ionospheric F region irregularity behavior based on Ogo 6 retarding potential analyzer data, *Journal of Geophysical research*, vol. 78, n° 31, 1973
- (47) **[Moen et al., 2012]** Moen J., Oksavik K., Abe T., Lester M., Saito Y., Bekkeng T. A., Jacobsen K. S., First in-situ measurements of HF radar echoing targets, *Geophysical Research Letters*, vol. 39, issue 7, 2012
- (48) **[Mushini, 2012]** Mushini S. C., Characteristics of scintillating GPS signals at high latitudes during solar minima, these de University of New Brunswick, 2012
- (49) **[Perrone & De Franceschi, 1998]** Perrone L., De Franceschi G., Solar, ionospheric and geomagnetic indices, *Annali di Geofisica*, vol. 41, n°5-6, 1998
- (50) **[Pitout, 2010]** Pitout F., EISCAT 3D : une nouvelle génération de radars ionosphériques, journées scientifiques Propagations et Plasma, 2010
- (51) **[Radicella, 2009]** Radicella S., The NeQuick model genesis, uses and evolution, *Annals of Geophysics*, vol. 52, n°3/4, 2009
- (52) **[Rino, 1977]** Rino C. L., The angle dependence of singly scattered wavefield, *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, vol. 39, 1977
- (53) **[Rino, 1979 (1)]** Rino C. L., A power law phase screen model of ionospheric scintillation, 1. Weak scatter, *Radio Science*, vol 14, n°6, pp 1135-1143, 1979
- (54) **[Rino, 1979 (2)]** Rino C. L., A power law phase screen model of ionospheric scintillation, 2. Strong scatter, *Radio Science*, vol 14, n°6, pp 1144-1155, 1979
- (55) **[Rogers et al., 2009]** Rogers N. C., Cannon P. S., Groves K. M., Measurements and simulation of ionospheric scattering on VHF and UHF radar signals: Channel scattering function, *Radio Science*, vol. 44, 2009
- (56) **[Rufenach, 1972]** Rufenach C. L., Power-law wavenumber spectrum deduced from ionospheric scintillation observations, *Journal of Geophysical Research*, vol. 77, n°25, 1972
- (57) **[Rui et al., 2012]** Rui X., Zhizhao L., Min L., Yu M., Wu C., An analysis of low-latitude ionospheric scintillation and its effects on precise point positioning, *Journal of Global Positioning Systems*, vol. 11, n°1, pp. 22-32, 2012
- (58) **[Rytov et al., 1989]** Rytov S. M., Kravstov Yu. A., Tatarskii V. I., Principles of statistical radiophysics, 4. Wave propagation through random media, Springer – Verlag, 1989

- (59) **[Sanz et al., 2014]** Sanz J., Juan J.M., Gonzalez-Casado G., Prieto-Cerdeira R., Schlüter S., Orus R., Novel ionospheric activity indicator specifically tailored for GNSS users, Proc. Of ION GNSS+ 2014, pp. 1173-1182, 2014
- (60) **[Secan & Bussey, 1994]** Secan J. A., Bussey R. M., An improved model of high-latitude F-region scintillation (wbmod version 13), final report, NWRA, 1994
- (61) **[Secan & Fremouw, 1983]** Secan J. A., Fremouw E. J., Improvement of the scintillation irregularity model in WBMOD, Final report, Physical Dynamics inc., Defense Nuclear agency, 1983
- (62) **[Septentrio, 2013]** Septentrio Satellite Navigation, PolaRxS application manual, v 2.4.1, 2013
- (63) **[Shkarofsky, 1968]** Shkarofsky I. P., Generalized turbulence space-correlation and wave-number spectrum-function pairs, Canadian Journal of Physics, vol 46, 1968
- (64) **[Singleton, 1970]** Singleton D. G., The effect of irregularity shape on radio star and satellite scintillations, Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics, vol. 32, pp. 315-343, 1970
- (65) **[Spencer & Mitchell, 2007]** Spencer P. S. J., Mitchell C. N., Imaging of fast moving electron-density structures in the polar cap, Annals of Geophysics, vol. 50, n°3, 2007
- (66) **[Tatarskii, 1961]** Tatarskii V. I., Wave propagation in a turbulent medium, Ed. McGraw-Hill, 1961
- (67) **[Tatarskii, 1971]**, Tatarskii V. I., The effects of the turbulent atmosphere on wave propagation, Israel program for scientific translations, 1971
- (68) **[Tereshchenko et al., 1999]** Tereshchenko E. D., Zhudukon B. Z., Kozlova M. O., Nygrén T., Anisotropy of ionospheric irregularities determined from the amplitude of satellite signals at a single receiver, Ann. Geophysicae 17, pp. 508-518, 1999
- (69) **[Van Dierendonck & Arbesser-Rastburg, 2004]** Van Dierendonck A. J., Arbesser-Rastburg B., Measuring ionospheric scintillation in the equatorial region over Africa, including measurements from SBAS geostationary satellite signals, Proc. ION GNSS 2004, pp. 316-324, 2004
- (70) **[Wernik & Liu, 1973]** Wernik A. W., Liu C. H., Ionospheric irregularities causing scintillation of GHz frequency radio signals, Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics, vol 36, 871-879, 1973

- (71)[**Wernik & al., 1990**] Wernik A. W., Liu C. H., Franke S. J., Gola M., High-latitude irregularity spectra deduced from scintillation measurements, *Radio Sciences*, vol. 25, pp. 883 – 895, 1990
- (72)[**Wernik et al., 2007**] Wernik A. W., Alfonsi L., Materassi M., Scintillation modeling using in situ data, *Radio Science*, vol. 42, RS1002, 2007
- (73)[**Wheelon, 2004 (1)**] Wheelon A. D., *Electromagnetic scintillation, I. Geometrical Optics*, Cambridge University Press, 2004
- (74)[**Wheelon, 2004 (2)**] Wheelon A. D., *Electromagnetic scintillation, II. Weak scattering*, Cambridge University Press, 2004
- (75)[**Yeh & Liu, 1982**] Yeh K. C., Liu C. H., Radio wave scintillations in the ionosphere, *proc. of the IEEE*, vol 70, n°4, pp. 324-360, 1982
- (76)[**Zhang & Paxton, 2008**] Zhang Y., Paxton L. J., An empirical Kp-dependent global auroral model based on TIMED/GUVI FUV data, *Journal of Atmospheric and solar-terrestrial Physics*, vol 70, pp. 1231-1242, 2008

## **Modelling of ionospheric scintillation effects on L-band signals propagation at polar latitudes**

### **Abstract**

The ionospheric plasma is located at the border between neutral atmosphere and outer space and many complex ionization reactions occur inside this turbulent medium. The Earth magnetic field and induced electric fields cause rapid fluctuations of electron density, both spatially and temporarily. When crossing this turbulent layer, RF signals show fast variations of amplitude and phase, especially at high latitudes. This phenomenon is called ionospheric scintillation and it is particularly feared by air navigation using GNSS services, since it degrades the availability and the integrity of signals.

This PhD dissertation presents a complete modeling of the effects of ionospheric scintillation, with 3 anisotropy axes. It is based on a numerical approach using the multiple phase screens technique, both in 3D and 2D schemes, and on the analytical resolution of electromagnetic propagation equation, also both in 3D and 2D configurations. The limits of use of a 2D numerical scheme have been outlined by these original formulations of phase and log-amplitude variances and spectra. This complete modeling associated with a sensitivity study on these variances and spectra opens up interesting perspectives on data inversion, in order to better estimate the physical characteristics of the ionospheric medium.

**Key-words:** ionospheric scintillation, GNSS, parabolic wave equation, multiple phase screen, asymptotic modelling, turbulent medium propagation





**Auteur :** GALIEGUE Helene

**Titre :** Modélisation des effets des scintillations ionosphériques sur la propagation des ondes électromagnétiques en bande L aux latitudes polaires

**Directeurs de thèse :** FERAL Laurent, FABBRO Vincent

**Lieu et date de soutenance de thèse :** ONERA Toulouse, 02/07/2015

---

## Résumé

A la frontière entre l'atmosphère neutre et l'espace, le plasma ionosphérique est le siège de réactions d'ionisation complexes. Le champ magnétique terrestre et les champs électriques induits causent des fluctuations spatiales et temporelles de la concentration électronique. Ces irrégularités ionosphériques entraînent des variations rapides de l'amplitude et de la phase des signaux radioélectriques les traversant, notamment aux hautes latitudes. Ce phénomène est appelé scintillation ionosphérique et il est particulièrement craint par la communauté utilisatrice d'applications GNSS qui nécessite une disponibilité et une intégrité optimales des signaux.

Le travail présenté dans cette thèse propose une modélisation complète, à 3 axes d'anisotropie, de la scintillation ionosphérique. Ce modèle est basé sur une approche numérique 3D et 2D, de type écrans de phase, et sur la résolution analytique des équations de propagation, en 3D et en 2D. Ces dérivations originales des variances et des spectres de log-amplitude et de phase ont mis en relief les limites de validité d'un modèle numérique 2D. L'étude de sensibilité menée sur les variances et les spectres ouvre également des perspectives d'inversion des données GNSS pour remonter aux caractéristiques du milieu ionosphérique.

**Mots-clés :** scintillation ionosphérique, GNSS, méthode équation parabolique, écrans de phase multiples, modélisation asymptotique, propagation milieu turbulent

**Discipline :** ED GEET, Electromagnétisme et Systèmes Hautes Fréquences

**Laboratoire de rattachement :** laboratoire Laplace, CNRS-UPS-INPT, UMR 5213