



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

---

---

Présentée et soutenue le *21 Juillet 2014 (21/07/2014)* par :

**ARNAUD BETH**

**Modélisation semi-analytique des exosphères planétaires:  
analyse de l'influence des collisions et de la pression de  
radiation stellaire**

---

---

### JURY

JEAN-BAPTISTE HIRIART-URRUTY	Professeur des Universités	Président du jury
DOMINIQUE TOUBLANC	Professeur des Universités	Directeur de thèse
PHILIPPE GARNIER	Maître de Conférences	Co-Directeur de thèse
JOSEPH LEMAIRE	Professeur émérite	Rapporteur
FRANÇOIS LEBLANC	Directeur de Recherche	Rapporteur
NICOLE MEYER-VERNET	Directrice de Recherche émérite	Examineur
GÉRARD CHANTEUR	Directeur de Recherche émérite	Examineur

---

**École doctorale et spécialité :**

*SDU2E : Astrophysique, Sciences de l'Espace, Planétologie*

**Unité de Recherche :**

*Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie (UMR 5277)*

**Directeur(s) de Thèse :**

*Dominique TOUBLANC et Philippe GARNIER*



## Résumé

La partie externe de l'atmosphère, l'exosphère, est une région encore mal connue. Les densités y sont trop faibles pour nombre d'instruments, et la modélisation de la dynamique des particules peut être complexe. Au cours de ma thèse, je me suis intéressé à deux problématiques : la production de particules « satellites » à partir des rares collisions dans la basse exosphère et l'influence de la pression de radiation sur la structure de l'exosphère.

Dans la première partie de ma thèse, nous avons modélisé l'impact des rares collisions près de l'exobase sur les densités à plus haute altitude pour les cas de la Terre, Titan et Mars, au travers de la production de particules « satellites », absentes des modèles non-collisionnels. Dans une seconde partie, j'ai étudié l'effet de la pression de radiation sur la structure de l'exosphère par une approche semi-analytique. La pression de radiation affecte les profils de densité des populations « balistiques » et induit de fortes asymétries à haute altitude. Elle augmente également le flux d'échappement thermique, que nous avons déterminé analytiquement au point subsolaire. Finalement, nous avons également étudié l'influence de la pression de radiation stellaire sur le problème à trois corps et son impact sur la stabilité des atmosphères, en particulier celles des exoplanètes de type Jupiters chauds.

Mots-clés : atmosphères, exoplanètes, Mars, Titan, modèles, exosphères



## **Abstract**

The external part of the atmosphere, the exosphere, is not a well-known region. The densities are too low for many instruments compared with their detection capabilities, and the modeling of the particles dynamics can be complex. During my PhD thesis, I focused on two problems: the production of “satellite” particles from the scarce collisions in the lower exosphere and the influence of the radiation pressure on the exosphere structure.

In the first part of my thesis, we modeled the influence of the scarce collisions near the exobase on the density profiles at higher altitudes for the Earth, Titan and Mars, through the production of “satellite” particles, which are neglected in the collisionless models. In a second part, I studied the effect of the radiation pressure on the structure of the exosphere with a semi-analytical approach. The radiation pressure changes the “ballistic” particle density profiles and implies strong asymmetries at high altitudes. It increases also the thermal escaping flux, which we determined analytically at the subsolar point. Finally, we studied its influence on the Three-Body problem and on the stability of the atmospheres, in particular for hot Jupiter exoplanets.

Keywords: atmospheres, exoplanets, Mars, Titan, models, exospheres



# Remerciements

Il faut bien évidemment faire une place aux remerciements. C'est avant tout pour moi l'occasion d'exprimer toute la sympathie et la reconnaissance, voire plus, que j'éprouve envers ceux et celles que j'ai rencontrés durant ma thèse, qui m'ont supporté et avec lesquels j'ai passé d'agréables moments. La thèse ne se réalise pas seul et se pave de nombreuses rencontres.

Pour commencer, je remercie évidemment en premier lieu ma famille et donc mes parents qui m'ont permis d'en arriver là, de réaliser mon rêve de gosse, de m'en avoir donnés les moyens et d'en être fier. J'ai une pensée toute particulière pour mes défunts grands-parents, ma grand-mère disparue durant ma première année.

Viennent naturellement les amis de plus ou moins longue date, du collège au laboratoire. Je remercie les vieux potes, Jérôme et Sébastien, avec lesquels j'ai pu passer du temps (à jouer) pendant la rédaction bien que la distance nous sépare. Je remercie mon petit Kévin, ça va faire plus de 10 ans, sans qui rien n'aurait été possible (tu vois, je la mets). Je remercie particulièrement Stéphane, toujours là, depuis Fermat à maintenant, dont partager la chambre en CPGE est la seule chose que je puisse regretter de cette époque. Merci à toi et aussi à ta compagne et amie, Anaïs, que j'ai eu la chance de connaître au tout début de ma thèse, merci pour ces soirées, merci d'avoir toujours été là aussi bien pour les moments de joie comme de tristesse, merci pour ces moments partagés. Je remercie mon petit marin et sa belle-famille (bientôt un de plus!) : Baptiste, sa femme Delphine et son frère Julien. Baptiste, bien qu'il soit difficile avec ton travail de se voir, il est toujours bon de se « chahuter » par téléphone ou SMS au réveil avant d'aller travailler. Delphine, future mère, ça me fera toujours bizarre de se remémorer l'évolution depuis l'Université à maintenant en passant par le mariage (je radote, je prends un coup de vieux au passage) et finalement je suis content de connaître la femme que tu es aujourd'hui. Julien, depuis la Licence, et finalement au laboratoire, il a toujours été bon de t'avoir à quelques mètres pour partager les petits aléas de la vie quotidienne de chacun, me faisant oublier la dure tâche qu'est la thèse. Je pense aussi à Mickaël et Aurélie venus assister à ma soutenance et avec qui j'ai toujours plaisir à parler. Je pense aussi à Hélène, limite délurée (c'est un compliment en comparaison de ma passivité), rien que de te voir me redonnait la patate. Je pense aussi à Marie et Amanda, je pense toujours un peu à vous ; à Éléna, Benoît, Vincent, les M1 ATS et les générations de M2P TSI que j'ai connues, je pense à vous.

Je pense aussi à la petite Lise et aux les longues pauses thé qui m'ont réellement manqué après ton départ, heureusement que tu étais là! Les conférences sans toi, ce n'est pas la même chose (Vienne et surtout San Francisco). Je pense aussi à mes ex-co-bureaux : Frédéric, pour m'avoir rendu complètement accro au chocolat (je remercie au passage le Moulin des Moines et la Biocoop pour mon approvisionnement, une pensée au passage pour Mallory) et Alexis, sans doute exaspéré par

mon comportement durant sa rédaction.

Je remercie aussi tous les autres doctorants, docteurs et aussi toute l'équipe Astro-Jeunes : Laurianne P., Claire D., Nicolas L., Simon N., Aurélia B., Isidre M., Romain A., Étienne B., Alexandre C., Yann P., Bernard B., Antoine C., Anthony S., Ilane S., Anthony A., Vincent H., Nicolas V., Philippe P., David Q., William R., Fabien D., Camille C., Alexandre S., Guillaume N., Thierry D., Dana A., David S..

Sous la contrainte et la peur d'une quelconque forme de représailles, l'une d'elles m'a obligé (laquelle a tenu à garder l'anonymat) à tenir ces quelques mots : « je tiens fort à remercier très chaleureusement tous mes gentils prédécesseurs qui m'ont laissé terminer cette thèse dans les meilleures conditions possibles et surtout qui ne se sont pas vengés ». Je n'en pense pas moins.

Je pense aussi à l'équipe, aux autres membres du laboratoire, croisés quotidiennement dans les couloirs ou autour d'un café pendant ces trois années : Iannis D., Christian M., Henry R., Sandrine R. G., Christophe P., Benoît L., Alexis R., Illya P., Andrea O., Primoz K., Aurélie M., Pierre-Louis B., François F., Vincent G., Gabriel F., Nicolas A., Michel R., Pierre-Yves M., à tous les ingénieurs (je citerai en particulier Philippe R. et David M. pour notre petit tour de la Floride), sans qui on ne ferait rien derrière nos ordinateurs, aux administratifs (merci à Dorine) et à l'équipe qui gère le café nécessaire au bon réveil de chacun et à la bonne humeur (Odile C.-J., Jean R., Qiu Mei L., Vincent W., Salima E., etc...).

Je remercie encore Iannis et Christian pour m'avoir donné les moyens de partir en conférence et pour m'avoir permis d'assister au lancement de MAVEN à Cap Canaveral, ça restera un moment inoubliable.

Je pense aussi aux nouveaux thésards et anciens M2R ASEP que j'ai rencontré et les remercie : Gabriel (je ne t'ai pas oublié), Morgane, Jason, Aliénor, Jean, Armelle.

Je pense aussi aux quelques Matheux de l'IMT rencontrés grâce à Stéphane : Antoine, Tatiana, Malika, Mélanie, Sofiane, Raphaël, Claire, Kévin et aussi Sylvie C., secrétaire exceptionnelle.

Je voudrais remercier au passage ma prof de Collège, Chantal Mallen-Tricon, qui m'a vraiment donné envie de continuer dans les Maths et mon prof de Lycée, Michel Claparède, pour m'avoir donné aussi son goût pour la Physique.

Merci aussi aux enseignants de l'Université : Pierre Cafarelli et Mai Seve-Dinh qui m'ont donné l'opportunité d'assurer des enseignements dans leur matière respective et avec qui j'ai toujours eu énormément de plaisir à interagir. Je pense aussi aux générations d'étudiants de L3 auxquels j'ai enseigné et que j'espère retrouver dans le futur.

Merci aussi à ceux et celles que j'ai rencontré et recroisé régulièrement au cours des conférences et colloques : Angélica, Baptiste, Sébastien, Ludivine, Lucile, Marion, etc...

Le plus important pour la fin : je remercie tous les membres de mon jury de m'avoir fait l'honneur d'être présent et de juger mon travail de thèse. Merci à :

- Jean-Baptiste HIRIART-URRUTY, professeur des Universités en Mathématiques, pour avoir présidé ce jury et représenté une matière à laquelle je tiens,
- Gérard CHANTEUR et Nicole MEYER-VERNET, examinateurs,
- François LEBLANC et Joseph LEMAIRE, rapporteurs. Merci pour vos remarques pertinentes,

les discussions scientifiques mais aussi celles plus générales. Joseph, je te remercie pour ta visite guidée de Bruxelles.

- Dominique TOUBLANC et Philippe GARNIER, mes chefs.

Je tiens tout particulièrement à remercier mes deux encadrants, tant sur le plan humain que scientifique : pour les heures passées dans vos bureaux à parler sciences, mais aussi sur l'Université et finalement sur des choses plus personnelles. Vous avez été d'une excellente complémentarité dans mon encadrement. Merci finalement de m'avoir donné cette forme de liberté dans mon travail de thèse vers laquelle tout chercheur aspire à mon sens.



# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>I Contexte de la thèse</b>	<b>17</b>
A De la surface à l'exobase : la barosphère . . . . .	19
B Au-delà de l'exobase : l'exosphère . . . . .	20
B.1 Définition . . . . .	20
B.2 Aux origines ... . . . .	21
C Observations de l'exosphère . . . . .	22
C.1 Moyens mis en œuvre et limites techniques . . . . .	23
C.2 Interprétations des observations . . . . .	26
C.2.a Les couronnes non-thermiques . . . . .	26
C.2.b Les particules satellites . . . . .	28
C.2.c La pression de radiation et les asymétries de l'exosphère . . . . .	29
D La modélisation de l'exosphère . . . . .	31
D.1 Les modèles analytiques . . . . .	31
D.2 Les modèles numériques . . . . .	34
E La complexité des processus exosphériques . . . . .	36
F Objectifs de la thèse . . . . .	37
<b>II Modélisation des densités de particules satellites</b>	<b>39</b>
A Introduction . . . . .	40
A.1 L'approximation $\zeta_{sat}$ de Chamberlain (1963) . . . . .	41
A.2 Définition d'une distance critique : une alternative? . . . . .	43
A.3 Une approche rigoureuse : l'équation de Boltzmann . . . . .	43
B Description du modèle . . . . .	44
B.1 L'approche théorique . . . . .	44
B.2 Les limites d'intégration . . . . .	45
B.2.a Les limites d'intégration pour les angles . . . . .	46
B.2.b Les limites d'intégration pour les vitesses . . . . .	47
B.2.c Les limites d'intégration pour les distances . . . . .	48
B.3 Calcul des densités des particules satellites . . . . .	49
B.4 Les processus de production et de pertes pour les particules satellites . . . . .	50
B.4.a Les taux de productions et de pertes . . . . .	51

B.4.b	La production de particules satellites à partir des particules candidates	51
B.5	Les vitesses relatives et les sections efficaces utilisées	52
B.6	Description de l'algorithme	53
C	Application à l'hydrogène atomique sur Terre	54
C.1	Validation du modèle : comparaison avec Richter et al. (1979)	54
C.2	Comparaison à hautes altitudes	57
D	Application au dihydrogène sur Titan	58
D.1	Introduction	58
D.2	Profils de densité des particules $H_2$ -satellites dans l'exosphère de Titan	60
D.3	Les processus de production et de pertes	63
D.4	Le volume de l'espace des phases	65
D.5	La durée de vie moyenne des particules satellites	67
E	Application à l'hydrogène atomique sur Mars	68
E.1	Introduction	68
E.2	L'exosphère martienne froide	70
E.3	L'exosphère martienne chaude	71
F	Hypothèses et limites du modèle	73
G	Discussions comparatives	76
G.1	Comparaison entre les densités de particules satellites sur la Terre, Mars et Titan	76
G.2	Prédiction de l'importance relative des particules satellites	81
G.3	Comparaison avec le formalisme de Chamberlain	83
G.4	L'influence des distributions kappa	85
H	Conclusions	87

### III Influence de la pression de radiation 89

A	Introduction	90
A.1	Origine et détermination de la pression de radiation	92
A.2	Implication sur la dynamique des particules dans l'exosphère	93
A.3	Définition d'une exopause via la pression de radiation	94
B	L'approche théorique	95
B.1	Le formalisme hamiltonien	95
B.2	Le changement de coordonnées	97
B.3	Les constantes du problème	97
B.3.a	L'énergie mécanique $E$	99
B.3.b	La constante dite de Laplace $A$	99
B.3.c	La composante du moment cinétique le long de l'axe Soleil-planète $p_\phi$	100
B.4	L'expression des coordonnées généralisées	100
B.5	Introduction de potentiels effectifs	102
B.6	L'adimensionnement des équations	104
B.7	Les hypothèses pour la modélisation	106
C	Les différents types de trajectoires	107
C.1	Caractérisation des trajectoires	107

C.1.a	Restriction générale sur le mouvement . . . . .	107
C.1.b	Restriction sur le mouvement suivant la coordonnée $u$ . . . . .	110
C.1.c	Restriction sur le mouvement suivant la coordonnée $w$ . . . . .	113
C.1.d	Restrictions sur le mouvement final . . . . .	115
C.2	Visualisation dans l'espace $(x, y, z)$ . . . . .	118
C.3	Visualisation dans le plan $(x, \rho)$ . . . . .	119
C.4	Visualisation dans le plan $(u, w)$ . . . . .	122
C.5	Redéfinition des notions de particules balistiques, satellites et d'échappement .	122
D	Calcul des densités de particules balistiques . . . . .	126
D.1	Approche . . . . .	127
D.2	Algorithme . . . . .	129
D.3	Application aux exosphères de la Terre, Mars et Titan . . . . .	131
D.3.a	Application à l'hydrogène sur Terre . . . . .	131
D.3.b	Application à l'hydrogène sur Titan . . . . .	137
D.3.c	Application à l'hydrogène sur Mars . . . . .	140
D.3.d	Comportement général . . . . .	140
E	Calcul des densités de particules en échappement . . . . .	146
E.1	Approche . . . . .	146
E.2	Algorithme . . . . .	146
E.3	Application à toute l'exosphère et difficultés de sa mise en œuvre . . . . .	146
F	Calcul du flux d'échappement à l'exobase . . . . .	148
F.1	Approche . . . . .	149
F.2	Calcul analytique de l'échappement côté jour . . . . .	149
F.3	Discussion sur l'échappement thermique induit par la pression de radiation . .	160
F.3.a	Comparaison à l'échappement de Jeans . . . . .	160
F.3.b	Écart relatif à l'échappement de Jeans et effet au premier ordre de la pression de radiation . . . . .	161
G	Implication sur la population satellite . . . . .	162
G.1	Zones de stabilité . . . . .	162
G.2	Calcul des densités des particules satellites . . . . .	167
H	Conclusions . . . . .	170

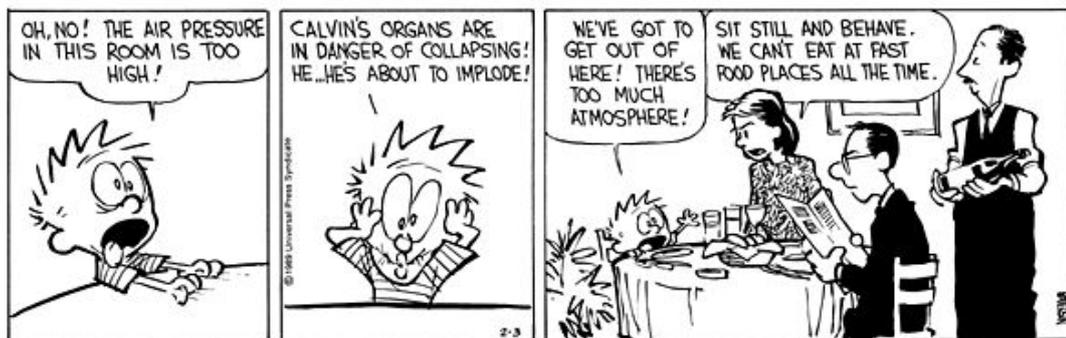
#### **IV À l'assaut des exoplanètes 173**

A	Le contexte scientifique . . . . .	173
A.1	La détection des exoplanètes . . . . .	173
A.2	Une grande diversité . . . . .	175
A.3	Les Jupiter chauds . . . . .	176
A.3.a	Caractéristiques . . . . .	176
A.3.b	Le cas de HD 209458b . . . . .	176
B	La pression de radiation et le problème à trois corps . . . . .	177
B.1	Le problème à trois corps . . . . .	177
B.2	L'influence de la pression de radiation . . . . .	178

B.3	L'effet d'une forte pression de radiation . . . . .	186
B.4	L'échappement atmosphérique de HD 209458b . . . . .	186
B.4.a	Un échappement de type « blow-off » . . . . .	186
B.4.b	Calcul du flux d'échappement . . . . .	188
B.5	Un autre scénario pour HD 209458b? . . . . .	189
C	Conclusion . . . . .	190
<b>V</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>193</b>
	<b>Annexes</b>	<b>196</b>
<b>A</b>	<b>L'équation de Boltzmann</b>	<b>197</b>
<b>B</b>	<b>Le formalisme de Chamberlain</b>	<b>201</b>
<b>C</b>	<b>Rappels de mécanique céleste et lois de Kepler</b>	<b>207</b>
<b>D</b>	<b>Méthodes de calcul numérique d'intégrales</b>	<b>211</b>
<b>E</b>	<b>Méthode de Cardan</b>	<b>219</b>
<b>F</b>	<b>Les coordonnées paraboliques</b>	<b>223</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>227</b>

# Introduction

Dans l'Univers, tous les corps suffisamment massifs possèdent une couche de gaz plus ou moins fine à leur surface : une atmosphère. Sur Terre, à sa surface, la colonne de gaz située au-dessus de chaque individu exerce une pression énorme, l'équivalent d'une masse de dix tonnes sur un mètre carré.



La pression et la densité du gaz, à mesure que nous nous éloignons de la surface, chutent alors drastiquement avec l'altitude.

L'exosphère est la couche externe de l'atmosphère. C'est à partir de sa limite basse, l'exobase, que l'atmosphère s'évapore dans le milieu interplanétaire. Cette limite, caractérisée par un nombre de Knudsen de l'ordre de l'unité, définit la zone de transition entre un milieu fortement collisionnel et un milieu quasi non-collisionnel. La basse atmosphère, avec des nombres de Knudsen grand, est facilement modélisable à partir des équations de Navier-Stokes et de la diffusion. Par contre, pour l'exosphère, ces approches sont inadaptées.

La volonté de caractériser l'exosphère a enflammé beaucoup d'auteurs à partir des années 1950. Les premiers modèles d'exosphère considéraient avant tout une atmosphère non-collisionnelle : la dynamique de chaque particule dans l'exosphère est alors dictée uniquement par le champ de force externe, principalement la gravité de la planète. Cependant, l'exosphère est un milieu quasi non-collisionnel, il faut donc tenir compte des quelques collisions qui se produisent dans les premiers kilomètres au-dessus de l'exobase. Il existe une approche rigoureuse à cette modélisation : la résolution de l'équation de Boltzmann. Cette équation décrit l'évolution de la fonction de distribution, information primordiale pour caractériser un gaz, en fonction des collisions entre espèces mais sa résolution reste problématique car elle ne permet pas d'obtenir de solutions explicites simples. Seules des méthodes numériques performantes et des ressources de calcul importantes permettent d'obtenir des solutions au prix de nombreuses journées voire semaines de calcul.

Dans l'exosphère, nous trouvons aussi bien des espèces neutres que ionisées. Durant ma thèse, je me suis intéressé à la composante neutre et légère des exosphères comme l'hydrogène ou le dihydrogène, qui est la plus susceptible d'être présente à très haute altitude. Il est important de caractériser correctement cette composante neutre et légère. D'une part, il s'agit de la plus dense et donc de la composante dominante de l'exosphère. D'autre part, outre le phénomène essentiel d'échappement atmosphérique, elle est responsable de phénomènes sous-jacents importants tel que la production des atomes neutres énergétiques, par réaction d'échange de charge avec les ions, mais également la génération d'ondes après ionisation et création d'ions dit « pick-up », ou encore le freinage des satellites artificiels en orbite.

Cette thèse s'organise selon quatre axes principaux. Le premier replace le contexte de cette thèse. Je reviendrai sur l'évolution des modèles de l'exosphère de leur origine à aujourd'hui en rappelant leurs limitations tant au niveau des capacités de simulations que des observations à disposition comme paramètres d'entrée. Je ferai état notamment des connaissances à l'heure actuelle des environnements exosphériques sur les différentes planètes du Système Solaire.

La deuxième partie est consacrée à la modélisation de la composante « satellite » des exosphères planétaires. Cette composante ne peut être produite qu'à partir de quelques collisions, majoritairement à proximité de l'exobase. En modélisant leur contribution grâce à l'équation de Boltzmann, nous pourrions confirmer l'importance de tenir compte des collisions ou non dans la modélisation des densités exosphériques pour les exosphères de la Terre, Mars et Titan.

La troisième partie est axée sur la modélisation de la structure de l'exosphère, soumise à l'influence de la pression de radiation solaire. Nous avons développé un modèle d'exosphère non collisionnelle tenant compte de la dynamique induite à la fois par le champ de pesanteur de la planète et par la pression de radiation exercée par les photons solaires, à l'aide de l'équation de Liouville et de la mécanique hamiltonienne. Ce travail avait auparavant été appliqué uniquement pour le profil de densité le long de l'axe Soleil-planète. Ici, j'ai étendu cette approche à toute l'exosphère (approche 2D), comparé avec les observations et déterminé analytiquement le flux d'échappement thermique au point subsolaire en fonction de la pression de radiation.

Enfin, dans la dernière partie, je traite de l'effet de la pression de radiation sur le problème bien connu à trois corps et son implication sur la forme et la structure des exosphères des exoplanètes, en particulier pour celles proches de leur étoile telles que les Jupiters chauds.

# Chapitre I

## Contexte de la thèse

### Sommaire

---

<b>A</b>	<b>De la surface à l'exobase : la barosphère</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>B</b>	<b>Au-delà de l'exobase : l'exosphère</b> . . . . .	<b>20</b>
	B.1 Définition . . . . .	20
	B.2 Aux origines ... . . . .	21
<b>C</b>	<b>Observations de l'exosphère</b> . . . . .	<b>22</b>
	C.1 Moyens mis en œuvre et limites techniques . . . . .	23
	C.2 Interprétations des observations . . . . .	26
<b>D</b>	<b>La modélisation de l'exosphère</b> . . . . .	<b>31</b>
	D.1 Les modèles analytiques . . . . .	31
	D.2 Les modèles numériques . . . . .	34
<b>E</b>	<b>La complexité des processus exosphériques</b> . . . . .	<b>36</b>
<b>F</b>	<b>Objectifs de la thèse</b> . . . . .	<b>37</b>

---

Cette thèse s'inscrit dans la compréhension de l'exosphère neutre, couche supérieure de n'importe quelle atmosphère aussi ténue ou épaisse soit elle. Ce chapitre constitue la base nécessaire pour appréhender les objectifs de cette thèse. Je présenterai d'abord les différentes couches de l'atmosphère dans le cas terrestre et je m'intéresserai plus particulièrement à l'exosphère. Je détaillerai l'historique souvent méconnu des travaux sur l'exosphère. Une revue des observations sera ensuite effectuée, avant de présenter les modèles récents ainsi que les difficultés de mise en œuvre de tels modèles. Enfin, je présenterai les objectifs de cette thèse.

Toute atmosphère est subdivisée en sous-couches. Chaque sous-couche est définie en fonction des processus mis en jeu : turbulence, diffusion moléculaire, photo-ionisation, chauffage par absorption de rayons ultraviolets, etc... Selon le mécanisme physique étudié, le nombre de sous-couches change et elles peuvent se recouper pour différents mécanismes. Par exemple, la partie de l'atmosphère où domine la turbulence s'appelle l'homosphère, celle-ci regroupe la troposphère, la stratosphère et la mésosphère, définies à partir du profil de température. Du point de vue des collisions, l'atmosphère

peut se décomposer en deux parties : la barosphère et l'exosphère. Chacune de ces couches est caractérisée par une grandeur sans dimension, le nombre de Knudsen (1952) :

$$Kn = \frac{\lambda}{L} \quad (\text{I.1})$$

où  $\lambda$  est défini comme le libre parcours moyen et  $L$  une grandeur caractéristique de l'écoulement fluide étudié. Par exemple, pour modéliser l'écoulement de l'eau autour d'un bateau,  $L$  sera la longueur du bateau ; pour l'écoulement d'un fluide dans une canalisation,  $L$  sera la largeur du tuyau. Dans l'étude des atmosphères, il n'existe pas a priori de limite « physique » à l'écoulement. La seule grandeur physique dans une atmosphère avec la dimension d'une longueur reste finalement la hauteur d'échelle :

$$H(r) = \frac{Mg(r)}{k_B T(r)} \quad (\text{I.2})$$

où  $M$  est la masse moléculaire moyenne,  $g$  l'accélération locale de la gravité,  $k_B$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température du milieu. Cette grandeur peut se définir à partir du gradient de pression à partir de la loi hydrostatique :

$$H(r) = \frac{P(r)}{\frac{dP(r)}{dr}} \sim \frac{n(r)}{\frac{dn(r)}{dr}} \quad (\text{I.3})$$

La hauteur d'échelle de pression décrit aussi la hauteur caractéristique de variation de la densité pour une atmosphère isotherme. Le nombre de Knudsen est donc ramené à :

$$Kn = \frac{\lambda}{H} \quad (\text{I.4})$$

Dans le cas d'un gaz composé d'une seule espèce et d'atomes ou molécules « rigides », le libre parcours moyen d'un atome ou d'une molécule est (Chapman and Cowling (1952)) :

$$\lambda = \frac{1}{\pi n \sigma^2 \sqrt{2}} \quad (\text{I.5})$$

où  $n$  est la densité de l'espèce et  $\pi\sigma^2$  la section efficace.

L'atmosphère est séparée en deux zones du point de vue des collisions et du nombre de Knudsen :

- Une région à faible nombre de Knudsen ( $Kn \ll 1$ ), la barosphère. Les collisions dominent la dynamique à l'échelle microscopique des atomes et molécules. Un faible nombre de Knudsen peut signifier deux choses : un libre parcours moyen petit (les collisions sont fréquentes) et/ou une échelle de hauteur grande (l'énergie thermique domine l'énergie potentielle gravitationnelle ou le gradient de pression est petit).
- Une région à grand nombre de Knudsen ( $Kn \gg 1$ ), l'exosphère. La dynamique microscopique est dominée par les forces externes, en particulier la gravitation. L'énergie thermique est négli-

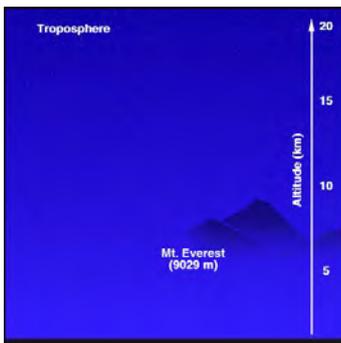
geable devant l'énergie gravitationnelle.

Selon les valeurs du nombre de Knudsen d'une couche atmosphérique, il sera nécessaire de privilégier une approche cinétique ou une approche fluide pour sa modélisation.

## A De la surface à l'exobase : la barosphère

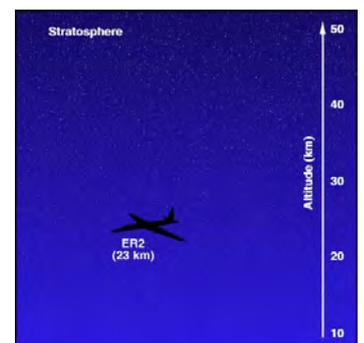
Cette partie de l'atmosphère est collisionnelle, le nombre de Knudsen est petit devant 1. L'approche fluide est donc justifiée. La dynamique de cette partie de l'atmosphère est modélisable à partir des équations de Navier-Stokes et de la diffusion.

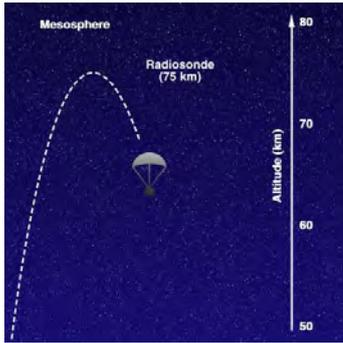
La barosphère est décomposée en sous-couches, l'existence de chacune et leurs épaisseurs respectives dépendent de chaque planète, en fonction des mécanismes de turbulence, d'advection, de chauffage et des réactions chimiques. Sur Terre, la physique et la chimie de la barosphère sont relativement complexes, avec quatre couches différentes. Pour les autres atmosphères comme celle de Titan, Vénus ou Mars, le nombre de sous-couches est généralement limité à trois. Contrairement au cas terrestre et de quelques géantes gazeuses (Jupiter), ces planètes ou satellites n'ont pas de stratosphère. Nous allons présenter rapidement ces différentes couches au sein de la barosphère, en se basant sur le cas terrestre qui reste le mieux connu à ce jour.



La couche la plus basse s'appelle la troposphère. Elle contient la majorité de la masse de l'atmosphère. Cette partie de l'atmosphère n'absorbe quasiment pas les photons solaires, par contre, elle chauffe par contact avec le sol et l'océan. La convection se déclenche induisant un fort mélange jusqu'à la tropopause, limite haute de la troposphère où le gradient thermique devient positif et stoppe la convection.

La stratosphère se situe au-dessus de la troposphère. Nous pourrions penser que la température y continue de décroître avec l'altitude mais non. L'absorption de l'émission ultraviolet du Soleil se fait dans cette couche. Sur Terre, l'élément principal absorbant est l'ozone. Une partie du rayonnement ultraviolet du Soleil atteint cette couche pour être absorbée par l'ozone. Cette absorption transforme une partie de l'énergie des photons en chaleur par dissociation de l'ozone en dioxygène et oxygène atomique.



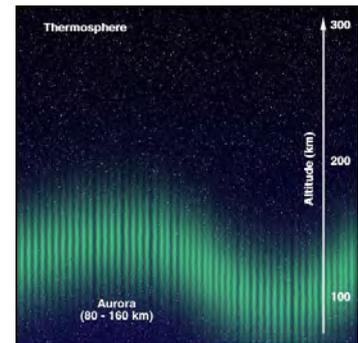


Située au-dessus de la stratosphère, la mésosphère a de nouveau un gradient négatif de température pour des altitudes croissantes. Cette région, même pour la Terre, reste la plus mal connue car ni les satellites, trop hauts, ni les ballons sondes, trop bas, permettent de l'étudier. Cette région est bien plus complexe que la stratosphère, par ses processus d'oxydation et de pénétration du rayonnement ultraviolet (Banks and Kockarts (1973)). La formation de constituants mineurs et l'émission « airglow », résultats de réactions chimiques, jouent un rôle important dans la balance thermique et l'ionisation de la mésosphère.

La troposphère, la stratosphère et la mésosphère constituent l'homosphère : la diffusion turbulente domine la diffusion moléculaire. La proportion relative de chaque espèce reste quasiment constante, c.-à-d. qu'elle est indépendante de la masse moléculaire.

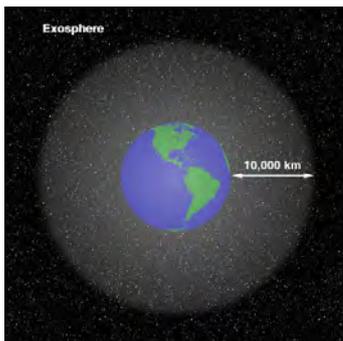
Au-dessus de l'homopause, correspondant au bas de la thermosphère ici, la diffusion moléculaire domine. Il y a déplétion des espèces les plus lourdes vers le bas. La proportion d'espèces légères augmente avec l'altitude en l'absence de réactions chimiques.

La thermosphère est l'avant-dernière couche de l'atmosphère. La température remonte. Le rayonnement solaire est directement absorbé provoquant des photo-ionisations ou des photo-dissociations. Les atomes ou molécules ionisés peuvent alors se recombiner en partie avec les électrons du milieu : c'est la recombinaison dissociative. Il en résulte des espèces atomiques très énergétiques, redistribuant le surplus d'énergie soit par rayonnement soit par collisions.



## B Au-delà de l'exobase : l'exosphère

### B.1 Définition



Couche externe de l'atmosphère, l'exosphère est par conséquent la couche la moins dense. La densité de particules est relativement faible en comparaison avec celle au sol et la fréquence des collisions l'est tout autant. Par définition, l'exosphère est caractérisée par un nombre de Knudsen grand : le libre parcours moyen est grand devant la hauteur d'échelle de pression. L'exosphère est en interaction directe avec les ions magnétosphériques ou bien encore les protons ou électrons du vent solaire. Elle constitue la zone d'échange entre la basse atmosphère et le milieu interplanétaire, elle est la région de l'échappement atmosphérique. À partir de 5000 km voire 10 000 km, les densités exosphériques deviennent du même ordre de grandeur que les densités du milieu interplanétaire. Il peut alors être admis ce passage constitue la limite supérieure de l'exosphère.

## B.2 Aux origines ...

L'étude de l'exosphère possède une longue, très longue histoire. Celle-ci est directement liée à la théorie cinétique des atmosphères planétaires « aussi vieille que la théorie cinétique des gaz elle-même », comme le disent Lemaire and Scherer (1974).

L'une des revues les plus récentes sur l'exosphère Johnson et al. (2008) porte notamment sur les résultats les plus actuels des observations et modèles exosphériques et ne mentionne pas d'historique, sa référence la plus ancienne n'étant autre que Chamberlain (1963) pour son modèle. Or, la découverte et l'étude de l'exosphère trouvent leurs origines bien avant. Pour cet aspect historique, j'encourage vivement le lecteur novice à lire les revues de Lemaire and Scherer (1974) et de Fahr and Shizgal (1983).

Le premier à émettre officiellement l'idée d'une telle zone de l'espace sans collision fût George Johnstone Stoney en 1868 dans son article intitulé « *On the Physical Constitution of the Sun and the Stars* » paru dans « *Proceedings of The Royal Society* » (Stoney (1868)), traitant de l'atmosphère du Soleil. Dans son étude, il suggère que la dispersion en vitesse des molécules était toujours suffisante pour qu'une fraction d'entre elles aient des vitesses supérieures à la vitesse d'échappement, même si la vitesse moyenne des molécules, dite thermique, lui était inférieure. Cette même fraction pouvait alors s'échapper dans le milieu interplanétaire et générer l'échappement au sens d'une atmosphère (Stoney (1898)). Pourtant, Stoney ne fut pas le premier à développer cette théorie cinétique de l'échappement. 50 ans auparavant, en 1846, Waterston développa une théorie des gaz dans son article « *On the Physics of Media that consists of perfectly Elastic Molecules in a State of Motion* » mais il tomba aux oubliettes des Archives de la Royal Society, ses deux rapporteurs, Baden Powell et John William Lubbock (Wisniak (2007)), refusant son papier à la publication. Ce dernier en dit : « *the paper is nothing but nonsense, unfit even for reading before the Society* ». Pourtant, Waterston y proposait notamment : « *in a mixed media, the mean square molecular velocity is inversely proportional to the specific weight of the molecules* », conclusion à laquelle arriva aussi Maxwell mais 15 ans plus tard, suivi de la loi d'Avogadro. Le résumé de l'article parut dans « *Proceedings of the Royal Society* » (Waterston (1846)) mais jamais l'article lui-même. Ce n'est qu'en 1892 que Rayleigh, alors secrétaire de la Royal Society, retrouva cet article dans les archives, où il reconnut son importance historique. Rayleigh en rédigea l'introduction et le publia dans son intégralité (Waterston (1892)), réhabilitant Waterston de façon posthume, puisque mort en 1883. Haldane (1928) dans une biographie consacrée à Waterston, écrivit ces quelques lignes : « *It is probable that in the long and honourable history of the Royal Society no mistake more disastrous in its actual consequences for the progress of science and the reputation of British science than the rejection of Waterston's papers was ever made* ».

C'est ainsi que commence l'histoire de la théorie cinétique des gaz avec finalement quelques décennies de retard. Inspiré des travaux de Stoney et en utilisant une distribution de Maxwell-Boltzmann (Maxwell (1860)), Cook (1900) estima la quantité de particules en échappement. Bryan (1900,1901) en fit de même en prenant en compte la rotation de la planète et étudia aussi le problème d'une distribution stationnaire dans ce cas.

Le taux de perte des atmosphères planétaires a bien évidemment été traité par Jeans (1916), dont la formule est bien connue, supposant une atmosphère isotherme et une fonction de distribution des vitesses maxwellienne. Dans la formule de Jeans, la distance limite à partir de laquelle les collisions deviennent suffisamment rares reste indéterminée. Elle sera à partir de là appelée exobase ou baropause et son altitude sera référencée comme l'altitude critique (Spitzer, Jr., L. (1949)).

Les premiers à tenter d'estimer la hauteur de cette exobase furent Milne (1923) et Jones (1923) en se plaçant dans un cas collisionnel. Ils ont montré que le libre parcours moyen dépendait de la direction que prenait la particule, pouvant être aussi bien fini qu'infini. Il y a alors deux conditions à l'échappement d'une particule :

- (1) sa vitesse doit être suffisante pour s'affranchir de la force d'attraction gravitationnelle mais aussi éviter d'autres collisions,
- (2) la direction du vecteur  $\vec{v}$  de la particule après une collision doit appartenir à un cône d'échappement dont la taille dépend du lieu de la collision. Ce cône est dirigé vers le haut et s'ouvre de plus en plus avec les altitudes croissantes. À l'exobase, ce cône est dégénéré en une simple demi-droite.

Spitzer, Jr., L. (1949) indiqua que cette altitude critique, l'exobase, était finalement l'altitude à laquelle le libre parcours moyen HORIZONTAL était égale à l'échelle de hauteur. Öpik and Singer (1961) préférèrent donner une définition légèrement différente. Dans le cas d'un flux omnidirectionnel, il faut qu'à l'altitude critique la probabilité de collisions soit  $1/2$ . La profondeur cinétique d'une couche (semblable à la profondeur optique mais ici appliqué à un atome) dans la direction verticale est  $\log 2 / (\sec(45^\circ) \log e) = 0,49$  (donné tel quel dans leur article) ce qui donne approximativement un libre parcours moyen égal à 2 fois la hauteur d'échelle.

La définition de l'exobase reste finalement une question de convention. Il s'agit d'une couche de transition entre un milieu très collisionnel et un milieu sans collisions, et la réduire à une simple surface n'est qu'un moyen commode pour tous les calculs dans l'exosphère : elle permet de simplifier les soucis de conditions aux limites dans la modélisation, l'estimation des densités ou encore du flux d'échappement.

## C Observations de l'exosphère

Les densités exosphériques sont souvent faibles en comparaison avec les limites de détection des instruments. Il existe néanmoins plusieurs techniques permettant d'observer cette région externe, qui ont amené à de nombreuses découvertes quant à sa composition et à sa structure. L'objet de cette partie est de présenter une revue (non exhaustive) des principales techniques et de quelques résultats

d'observations dans les exosphères planétaires.

Nous précisons par ailleurs que le travail de cette thèse porte surtout sur les exosphères de planètes possédant une atmosphère dense. La fonction de distribution peut alors être considérée comme proche d'une maxwellienne à l'exobase, hypothèse qui sera importante pour ce travail de thèse. Cependant, ce travail peut éventuellement être étendu aux exosphères présentes dès la surface comme pour Mercure ou bien Ganymède.

## C.1 Moyens mis en œuvre et limites techniques

L'exosphère étant la partie externe de toute atmosphère, aussi ténue soit-elle (y compris pour les petits corps n'ayant qu'une atmosphère d'échappement), le champ d'investigation est très vaste. De nombreuses missions, de nombreux instruments ont étudié les exosphères des corps du Système Solaire (planètes telluriques et géantes, lunes telles que Titan, etc.) mais également celles d'exoplanètes dont la composition reste très mal connue.

Il existe principalement deux types d'observations disponibles pour l'exosphère :

- les données obtenues sur place par le satellite, dites « in situ » : les observations sont effectuées sur place et fournissent directement une information locale sur le milieu environnant
- celles obtenues à distance par télédétection plus connues sous le terme anglais « remote sensing » : il s'agit de mesures établies à distance aussi bien depuis la Terre qu'à bord d'un satellite. Ces données fournissent généralement un paramètre intégré le long d'une ligne de visée, ce qui nécessite en aval une analyse détaillée pour extraire des informations locales.

Les techniques utilisées dépendent ensuite du type de particules étudié : les atomes neutres thermiques, les ions ou bien encore les ENA (Atomes Énergétiques Neutres). Nous nous focaliserons ici sur la détection de la composante neutre de l'atmosphère, même si des informations sur les deux autres types de particules (en particulier les ENAs au travers des réactions d'échange de charge) permettent d'obtenir des informations indirectes sur les neutres thermiques.

Tout d'abord, nous avons les observations à distance, par « remote sensing », à l'aide de spectromètres, soit embarqués à bord d'un satellite soit au sol montés sur un télescope. Le spectromètre (à ne pas confondre avec les spectromètres de masse) permet de prendre une « image » du spectre électromagnétique sur une large bande de longueur d'onde avec une résolution  $\lambda/\Delta\lambda$  plus ou moins grande en fonction de la qualité de l'instrument. Chaque transition électronique (passage d'un électron d'une couche électronique supérieure à une couche inférieure et émission d'un photon) est caractéristique d'une espèce chimique ; en fonction de l'intensité de la raie en émission, il est possible de déterminer la densité de colonne de l'espèce dans la direction d'observation et éventuellement le profil de densité

en fonction de l'altitude en utilisant un modèle. Pour un spectromètre embarqué, en répétant cette opération au cours d'un ou plusieurs survols, nous pouvons reconstruire une cartographie complète de l'exosphère pour une espèce donnée.

Les observations de ce type ne datent pas d'hier. Les premières observations furent acquises grâce à l'ensemble des sondes envoyées dans le cadre du programme Mariner. Mariner 5 ouvrit le bal (lancée en 1967) : elle fut la première sonde à observer l'émission dans la raie Lyman- $\alpha$  de Vénus (Barth et al. (1967,1968)) indiquant la présence d'hydrogène. Les sondes Mariner qui suivirent furent toutes équipées de spectromètres. Les sondes Mariner 6, 7, 8 et 9 ont été consacrées à Mars. Nous pouvons aussi prendre pour exemple les premiers survols de Mercure effectués par la sonde Mariner 10 en 1974 et 1975. Les observations à l'aide de UVS (spectromètre ultraviolet) sur Mariner y ont mis en évidence la présence d'hydrogène, d'hélium et d'oxygène notamment (Broadfoot et al. (1976)). Les données obtenues depuis le sol et analysées par Potter and Morgan(1985,1985) ont également révélé la présence de sodium et potassium.. Plus tard, les observations de la sonde MESSENGER (Mercury Surface, Space Environment, Geochemistry and Ranging) mirent aussi en évidence la présence de calcium et de magnésium à l'aide du spectromètre MASCS (Mercury Atmospheric and Surface Composition Spectrometer) (McClintock et al. (2008,2009)). Ces contributions neutres sont obtenues en partie par l'impact des ions et de micrométéorites directement sur la surface herméenne (Solomon et al. (2008)).

Nous avons aussi des observations récentes de Mars grâce à la mission Mars Express (lancée le 2 juin 2003) de l'ESA avec à son bord le spectromètre PFS (Planetary Fourier Spectrometer) pour identifier les gaz présents sous forme de trace (c'est-à-dire dans des proportions négligeables) dans la basse atmosphère et le spectromètre SPICAM (Spectroscopic Investigation of the Characteristics of the Atmosphere of Mars) travaillant dans l'ultraviolet et l'infrarouge. SPICAM a effectué de nombreuses observations de la couronne martienne, et permis d'obtenir de précieuses informations sur différents paramètres (cf. Bertaux et al. (2006), Leblanc et al. (2007), Chaufray et al. (2008)) : les profils (thermique et non thermique) de l'hydrogène exosphérique, les conditions à l'exobase du diazote, les profils de densité d'ozone, les profils de température afin de mieux contraindre les modèles de circulation, la présence de poussières nanométriques, etc. Cependant, des débats persistent entre auteurs avec par exemple l'article de Feldman et al. (2011) : ces auteurs ajustent les observations d'hydrogène et d'oxygène sur Mars, par l'instrument Alice de Rosetta, sans nécessité de tenir compte d'une composante suprathermique pour les deux.

Dans le même schéma, l'ESA a aussi envoyé une mission pour Vénus deux ans plus tard : Venus Express, le 9 novembre 2005. À son bord se trouvait également un spectromètre infrarouge de haute résolution SPICAV (Spectroscopic Investigation of the Characteristics of the Atmosphere of Venus), héritage direct de SPICAM (Bertaux et al. (2007)). Les observations ont pu notamment mettre en évidence la présence (attendue) de couronnes non-thermiques, notamment d'hydrogène (Chaufray et al. (2012)), évoquées dans la partie C.2.a.

Aussi étrange que cela puisse paraître, l'exosphère terrestre est peu observée. Nous avons la série

des Orbiting Geophysical Observatories au nombre de 6 lancées entre 1964 et 1969. Les observations de l'émission Lyman- $\alpha$  (propre à la détection de l'hydrogène) ont permis de faire une comparaison avec les profils de densité obtenus à partir du modèle exosphérique de Chamberlain (Bertaux (1978)) ou de parfaire les modèles empiriques comme celui de Jacchia (1977). Il y eût aussi Dynamics Explorer (1981), un ensemble de deux satellites, dont les observations ont permis une meilleure représentation des régions polaires dans le modèle de Hedin (1987). Plus récemment, en 2006 et en 2008, la paire de satellites Two Wide-Angle Imaging Neutral-Atom Spectrometers (TWINS) a été mise en orbite avec deux objectifs principaux : obtenir une image stéréoscopique de la magnétosphère en explorant une gamme d'énergie comprise entre 1 et 100 keV et observer aussi la composante froide d'hydrogène à l'origine des ENAs et donc la géocouronne terrestre via un détecteur Lyman- $\alpha$ . Cette mission bénéficie d'une extension et quelques articles paraissent depuis 2010 (p. ex. Zoennchen et al. (2011,2013), Bailey and Gruntman) sur la structure de l'exosphère terrestre en fonction des saisons ou de l'activité solaire.

Nous pouvons aussi citer d'autres techniques telles que l'imagerie direct des ENA comme pour le cas de Titan par l'instrument MIMI/INCA. Celle-ci permet aussi, par inversion, de déterminer la densité totale des neutres présents dans l'exosphère à partir des ENA reçus directement sur le détecteur.

Finalement, nous avons aussi la possibilité d'étudier et de caractériser les planètes mais cette fois extra-solaires depuis le sol. Nous avons notamment le spectromètre HARPS monté sur le télescope de 3,6 mètres à La Silla ou bien encore, dans un futur proche, SPIROU au CFHT. Leur objectif scientifique concerne la détection des exoplanètes et aussi la caractérisation de leurs atmosphères (cf. également la partie IV, où nous étudierons la stabilité des atmosphères des Jupiters chauds). Ces observations permettront d'étendre la planétologie au-delà du Système Solaire.

Comparativement, il existe relativement peu de mesures locales, « in situ », analysant la composition et la structure des exosphères. L'une des missions les plus prolifiques à l'heure actuelle, Cassini-Huygens, lancée en 1997, permet des mesures directes de la composition des neutres et ions du système saturnien grâce à son spectromètre de masse Ion and Neutral Mass Spectrometer (INMS) (Waite et al. (2004)). Sa résolution  $\Delta M/M$  est de l'ordre de 1 % distinguant ainsi toutes les espèces avec un nombre de masse compris entre 1 et 100. Néanmoins, son seuil de détection pour les densités est limité à environ  $10^4 \text{ cm}^{-3}$ . Il permet donc d'analyser assez précisément la basse exosphère de Titan mais non la haute exosphère de cette lune c'est-à-dire jusque 2000 km d'altitude pour  $N_2$  et  $CH_4$  et 7000 km pour  $H_2$  (Cui et al. (2008)) qui est plus léger et domine à haute altitude.

Actuellement en route pour Mars, la sonde Mars Atmosphere and Volatile Evolution (MAVEN) dispose à son bord d'un spectromètre de masse Neutral Gas and Ion Mass Spectrometer (NGIMS). Grâce à sa trajectoire très elliptique autour de Mars, MAVEN permettra de collecter une grande quantité de mesures sur une large gamme d'altitudes allant de 150 km (altitude du périapse de son orbite) voire 125 km (« deep-dip » campaigns afin de descendre jusqu'à l'homopause), c.-à-d. sous

l'exobase située entre 190 km et 250 km (Krasnopolsky (2002)), jusque 6000 km d'altitude (son apoapse), c.-à-d. à moins de 3 rayons martiens du centre de la planète. NGIMS fonctionne dans une gamme de masses comprises entre 2 et 150 unités de masse atomique.

Enfin, dans les années à venir la mission BepiColombo à destination de Mercure comprendra deux sondes, Mercury Magnetospheric Orbiter (MMO) et Mercury Planetary Orbiter (MPO), et sera muni du spectromètre de masse STart from a ROTating FIeld mass spectrOMeter (STROFIO) pour identifier la densité de neutres avec une résolution en masse  $M/\Delta M$  de 60 et une haute sensibilité (Orsini et al. (2010)). N'oublions pas non plus les missions comme Rosetta, tout juste sortie de son long sommeil de 10 ans, afin d'étudier l'environnement - coma et atmosphère - d'une comète, 67 P/Churyumov-Gerasimenko, avec l'aide en particulier du spectromètre ultraviolet ALICE et des spectromètres de masse de ROSINA (Rosetta Orbiter Spectrometer for Ion and Neutral Analysis).

## C.2 Interprétations des observations

### C.2.a Les couronnes non-thermiques

Le terme « couronne » est souvent utilisé à la place de « exosphère » et correspond donc à la région externe (au-dessus de l'exobase) des atmosphères planétaires ou satellites. Elles peuvent se séparer en deux catégories : thermique et non-thermique. Les couronnes dites thermiques sont produites à partir des collisions fréquentes dans la basse atmosphère. Lorsque le milieu est suffisamment dense, en négligeant les réactions chimiques, les différentes espèces se mélangent et grâce aux nombreuses collisions, le milieu se thermalise : toutes les espèces présentent la même température (c'est-à-dire la même dispersion en énergie cinétique). Le gaz s'expand alors dans l'exosphère seulement en fonction de la masse de l'espèce et de sa température autour de la planète (par exemple les lois du type barométrique ou Chamberlain).

Les couronnes dites non-thermiques sont produites à partir des éventuelles réactions chimiques exothermiques principalement dans la thermosphère : grâce à ces réactions, certaines espèces neutres vont pouvoir se retrouver dans un état excité avec un surplus d'énergie cinétique issu de la réaction. Nous pouvons notamment prendre le cas de la recombinaison dissociative de l'oxygène sur Mars :  $O_2^+ + e^- \rightarrow O + O^*$ . Un des atomes d'oxygène, ici  $O^*$ , va récupérer une partie de l'énergie sous forme d'énergie cinétique. Ceci va donc produire une autre population beaucoup plus chaude que la première, non thermalisée avec celle-ci puisque les collisions se font plus rares dans cette partie de l'atmosphère, pouvant s'expandre beaucoup plus loin car plus chaude.

D'autres processus non-thermiques sont à l'œuvre dans la région de transition entre les parties collisionnelle (thermosphère et en-deçà) et (quasi) non-collisionnelle (exosphère) des atmosphères planétaires. Les processus non thermiques dans leur ensemble, dont une liste non exhaustive est fournie en partie E, sont à l'origine de populations plus chaudes, non thermalisées avec le reste des constituants atmosphériques. Ils créent ainsi des couronnes non thermiques ou suprathermiques (es-

essentiellement d'hydrogène, de carbone, d'azote et d'oxygène), sur des planètes telles que la Terre, Mars (paragraphe précédent), Vénus, mais également sur des lunes telles que Titan ou Europe.

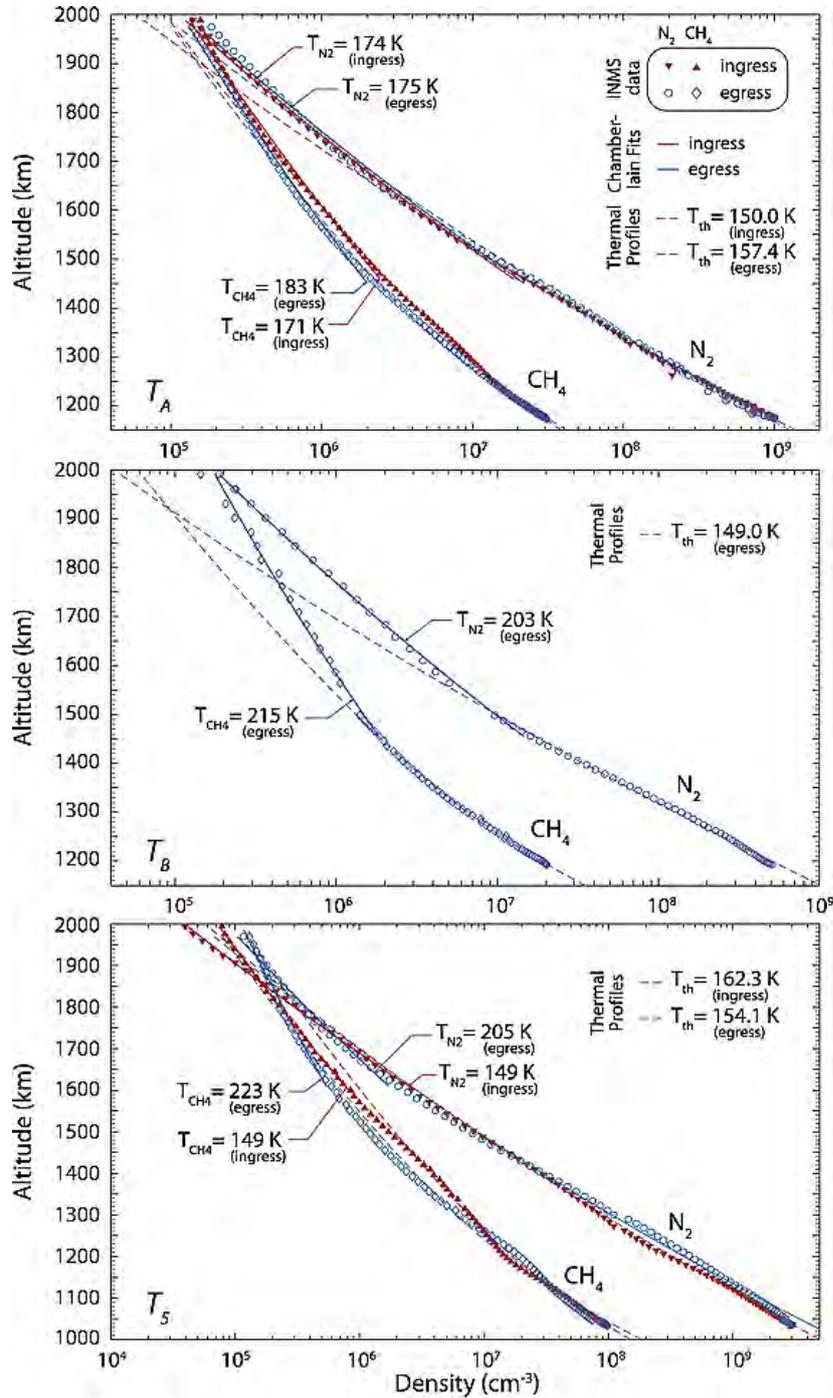


FIGURE I.1 – Profils de densités de  $CH_4$  et  $N_2$  en fonction de l'altitude pour différents survols de Titan ( $T_A$ ,  $T_B$  et  $T_5$ ). Les profils sont ajustés à l'aide d'un profil de Chamberlain (1963) dont la température est indiquée sur le côté droit des figures. Au-delà de 1500 km d'altitude, il est nécessaire d'ajuster avec un deuxième profil dont la température est plus élevée (indiquée aussi sur les figures). Les symboles correspondent aux observations de INMS. Tirés de De La Haye et al. (2007)).

Les observations au voisinage de Titan par la mission Cassini ont ainsi mis en évidence des profils thermosphériques de  $N_2/CH_4$  qui pourraient s'expliquer par des processus non thermiques (De La Haye et al. (2007), figure I.1). En effet, au travers de ces observations, nous voyons selon les

survol la présence de deux populations dans l'exosphère de Titan avec deux températures distinctes de plusieurs dizaines de kelvins. De la même manière, certains auteurs se sont intéressés à une potentielle couronne non thermique d'azote atomique sur Titan, en analysant les processus suivants : la recombinaison dissociative de  $N_2^+$  (Lammer and Bauer (1991), Shematovich et al. (2003)), les ions « pick-up » (Lammer and Bauer (1991)), le criblage (Lammer and Bauer (1991), Shematovich et al. (2003), Smith et al. (2004)). Les mécanismes de recombinaison dissociative (impliquant  $O_2^+$  ou  $CO_2^+$ ) ont lieu par ailleurs dans les environnements de Vénus et Mars (Krasnopolsky (1986), McElroy (1972), Nagy and Cravens (1988), Valeille et al.(2009b,2009a), Chaufray et al. (2012)) créant des couronnes d'hydrogène, de carbone et d'oxygène chauds. La présence de telles populations non thermiques bien plus chaudes que le reste de l'exosphère est à l'origine d'un échappement atmosphérique accru et peut jouer un rôle prépondérant dans l'évolution à long terme des atmosphères planétaires.

### C.2.b Les particules satellites

Comme détaillé dans la partie A, les exosphères sont constituées de différents types de populations, dont des populations de particules dites « satellites » qui ne croisent pas l'exobase. Cette population occupe une place bien particulière dans l'espace des phases : elles n'ont pas de vitesse suffisante pour s'échapper, par contre, tout comme les particules balistiques, leurs trajectoires sont des ellipses. Elles ont donc une énergie mécanique négative et restent gravitationnellement liées à la planète comme les particules balistiques. Par contre, elles ont un périapse au-dessus de l'exobase contrairement aux particules balistiques. Les particules satellites vont donc graviter autour de la planète sans jamais croiser l'exobase ce qui n'est pas le cas des particules balistiques. Ces particules seront étudiées plus en détails dans la première partie de notre travail de thèse (chapitre II).

Comme les densités de particules satellites étaient censées être la contribution dominante des exosphères à haute altitude d'après les travaux pionniers de Chamberlain (1963), elles devaient inévitablement se retrouver dans les observations à grande distance. Wallace et al. (1970) menèrent une étude à partir des données de Mariner 5 recueillies sur Terre. Ils n'arrivèrent pas à conclure sur la présence ou non de particules satellites dans l'exosphère terrestre. Néanmoins, d'après leur dernière figure, il semblerait que les particules satellites soient présentes majoritairement à basses altitudes mais qu'elles seraient détruites à plus haute altitude par des mécanismes comme l'échange de charge. Nous pouvons aussi citer l'article d'Anderson (1976). À partir des observations Lyman- $\alpha$  sur Vénus et en supposant des profils de densité issus du formalisme de Chamberlain - satellites comprises -, il n'arriva pas à trouver d'ajustement adéquat. Le meilleur ajustement est obtenu en considérant toujours une exosphère non-collisionnelle - sans satellites cette fois - mais avec deux populations, une chaude et une froide, en accord avec les précédents résultats de Barth et al. (1967,1968). Enfin, dans l'article de Bertaux and Blamont (1973), les auteurs font déjà état d'une asymétrie jour-nuit. Celle-ci ne peut pas, selon les auteurs, s'expliquer en l'absence de particules satellites, uniquement par la différence de densité et de température à l'exobase des deux côtés.

Leur impact sur la densité totale reste encore aujourd'hui assez mal compris. Des auteurs comme Bertaux and Blamont (1973), Bertaux et al. (1995), Østgaard et al. (2003) suggèrent que les parti-

cules satellites s'étendent dans la direction anti-solaire (avec de grandes excentricités et le périapsis côté jour), avec une diminution à haute altitude plus forte côté jour que côté nuit. Par opposition, Hodges (1994) et Chamberlain (1979) mirent en évidence l'absence de particules satellites dans le plan méridional contenant l'axe Terre-Soleil par comparaison au plan tangent à l'orbite terrestre.

Il existe peu de travaux récents traitant de la problématique des particules satellites, car il existe une sorte de consensus sur l'absence de populations significative de particules satellites dans les exosphères. Elle sont parfois mentionnées, soit pour proposer une explication aux asymétries de la géo-couronne ou aux observations en ENAs autour de Titan (Brandt et al. (2012)), soit pour préciser le type de modèle exosphérique utilisé (avec ou sans particule satellite, le plus souvent sans).

### C.2.c La pression de radiation et les asymétries de l'exosphère

La pression de radiation est une force d'origine stellaire. Toutes les étoiles émettent un flux de photons sur une large bande spectrale (cf. émission du corps noir en plus des raies en absorption et en émission des différentes espèces présentes au niveau du Soleil). Les espèces chimiques présentes dans les atmosphères planétaires sont sensibles à ce rayonnement soit pour être excitées (seules certaines longueurs d'onde le peuvent, cf. quantification des niveaux d'énergie) soit ionisées quand ce flux est suffisamment intense. Dans le cas de l'excitation, l'atome ou la molécule ne va pas pouvoir rester dans son état excité, il va donc émettre un photon à la même longueur que celui qu'il a absorbé. Ce mécanisme s'appelle la diffusion résonnante (absorption puis émission d'un photon à la même longueur d'onde). Cependant, l'atome ou molécule ne reçoit pas un seul photon, il en reçoit une quantité importante chaque seconde provenant de la même direction mais réémet un photon avec la même énergie dans une direction complètement aléatoire. Ceci engendre un différentiel de quantité de mouvement entre l'absorption (acquisition de quantité de mouvement portée par le photon selon une direction spécifique et entièrement absorbée par l'espèce) et après la réémission (en moyenne, l'espèce ne cède pas la quantité de mouvement qu'il vient d'acquérir puisqu'il émet avec la même probabilité dans n'importe quelle direction). Ceci constitue un apport de quantité de mouvement à chaque seconde correspondant tout simplement à une force nommée la pression de radiation. L'accélération induite par les photons solaires  $a$  s'écrit :

$$a = \frac{h\nu g}{mc} \quad (\text{I.6})$$

avec  $h$  la constante de Planck,  $h\nu/c$  la quantité de mouvement apportée par chaque photon,  $m$  la masse de l'espèce chimique affectée par la pression de radiation et  $g$  la probabilité de diffuser un photon solaire de fréquence  $\nu$  par unité de temps et par molécule ("fluorescence efficiency" ou encore "g-factor"). Ce fameux facteur est dépendant du flux de photons à la longueur d'onde d'absorption et des coefficients d'Einstein, régissant les désexcitations vers les états d'excitation inférieurs :

$$g_{ul} = \frac{\pi \mathcal{F}_\lambda \lambda^2}{c} \frac{\pi q^2}{4\pi \epsilon_0 m c} f P_{ul} \quad (\text{I.7})$$

avec  $\mathcal{F}_\lambda$  le flux de photons moyen par unité de longueur d'onde autour de la raie  $\lambda$  exprimé en photons.m<sup>-2</sup>.s<sup>-1</sup>.m<sup>-1</sup> et

$$P_{ul} = \frac{A_{ul}}{\sum_{l'} A_{ul'}} \quad (\text{I.8})$$

le « branching ratio » : la probabilité relative de transition dépendante des coefficients d'Einstein  $A_{ij}$ . Dans le cas d'une diffusion résonnante, le photon émis est exactement le même que celui reçu et, par conséquent,  $P_{ul} = 1$ . Ce terme prend toute son importance pour les molécules, dû aux désexcitations vers les états vibrationnels.

La pression de radiation est effective sur toutes les espèces pour peu que le flux de photons soit suffisamment important. Cette pression dépend de plusieurs facteurs : du flux lumineux reçu à la longueur d'onde spécifique, de la probabilité d'absorption ou d'émission d'un photon pour les transitions entre les différents niveaux d'énergie d'un atome ou d'une molécule (ou bien “oscillator strength” en anglais, cf. [http://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/lines\\_form.html](http://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/lines_form.html) pour consulter les raies des différentes espèces et les “oscillator strengths” correspondants) et des coefficients d'Einstein. Cette pression dépend finalement de l'espèce impliquée et du type d'étoile considéré, outre avec une variabilité au cours du temps liée à l'activité stellaire.

La pression de radiation peut avoir une influence significative sur l'exosphère, notamment dans des cas tel que Mercure, qui ne possède pas de réelle atmosphère (pas assez dense, le nombre de Knudsen est grand dès la surface) mais plutôt une exosphère directement à sa surface, ou même les planètes telluriques un peu plus éloignées telles que la Terre. Cela dépend avant tout des espèces présentes dans celles-ci et leur sensibilité à cette pression. Nous pouvons par exemple citer plusieurs articles pour Mercure : Ip (1986), par une approche Monte-Carlo, modélise l'exosphère hermétique en relevant déjà qu'une partie des atomes à la surface de Mercure pouvait s'échapper côté nuit grâce à la pression de radiation, et ce même s'ils avaient une vitesse en-dessous de la vitesse d'échappement, induisant ensuite une asymétrie jour/nuit. Nous avons aussi l'article de Killen et al. (1990) qui fournit le ratio entre l'intensité de la pression de radiation et la gravité de surface pour le sodium. À cause de la forte excentricité de Mercure ( $e = 0,2056$ ), l'intensité de la pression de radiation varie grandement : elle peut varier entre 5% et 50% de la gravité de surface et induire une grande variabilité de la dynamique exosphérique sur l'année.

Pour la Terre, les premiers à révéler la présence d'une « geotail » (queue de la géo-couronne) furent Thomas and Bohlin (1972). À l'aide des observations du satellite OGO 5, ils mirent en évidence un accroissement de la densité d'hydrogène à partir de 70 000 km d'altitude dans la direction anti-solaire, avec pour probable responsable la pression de radiation. Il est aussi important de noter qu'ils montrèrent aussi la corrélation entre l'activité solaire, associée à la rotation du Soleil, et l'émission Lyman- $\alpha$  de l'hydrogène exosphérique. Hodges and Tinsley (1981) ont modélisé l'exosphère terrestre par une approche Monte-Carlo en tenant compte aussi des réactions d'échange de charge mais cette simulation ne s'étendait que jusque 4 rayons terrestres. Tinsley et al. (1986) étendirent la simulation jusqu'à 31 rayons terrestres. Au travers des différents profils de densité de ce dernier article, nous remarquons qu'une asymétrie jour/nuit se développe à partir de 10 rayons terrestres. Toutes les asymétries à haute altitude ne dépendent pas uniquement de la pression de radiation mais

celle-ci prend un rôle dominant dans l'asymétrie jour/nuit à très haute altitude.

Par la suite, d'autres travaux ont approfondi notre connaissance des asymétries de la géo-couronne, comme Hodges (1994) ou Østgaard et al. (2003) dont une partie des modèles est basée sur de l'imagerie. Enfin, il nous faut mentionner les études récentes de Zoennchen et al. (2011, 2013) et de ? issues des observations TWINS, dont nous discuterons plus en détails dans la partie D.3.a.

## D La modélisation de l'exosphère

Au vu de la partie précédente proposant une revue (non exhaustive) des observations exosphériques, nous nous rendons bien compte qu'il s'agit encore d'une partie de l'atmosphère assez mal connue, et ce même sur Terre. L'une des principales limites étant bien évidemment la capacité à mesurer des concentrations faibles de particules. Il est donc essentiel de développer des modèles exosphériques pour combler ce manque d'observations. Mais au-delà de cela, la modélisation apporte une compréhension fine des processus en jeu, qui peuvent être analysés spécifiquement ou inclus de manière globale dans une simulation réaliste. Nous allons dans cette partie détailler l'historique des modèles d'exosphère qui ont été développés, qu'il s'agisse d'approches analytiques ou numériques.

### D.1 Les modèles analytiques

Après les travaux pionniers de Jeans (1916) et Spitzer, Jr., L. (1949) ayant permis de définir l'exosphère et sa limite basse appelée exobase, et discutés dans la partie introductive (cf. partie B.2), de nombreux travaux de modélisation furent développés à partir des années 1960. Ces travaux successifs, teintés de rivalités entre leurs auteurs, ont permis progressivement de comprendre la structure et l'allure des profils de densités de l'exosphère.

Dans une série d'articles, Öpik and Singer (1959,1960,1961) ont montré, par exemple, qu'utiliser la loi barométrique n'était possible que si la fonction de distribution des vitesses était maxwellienne. Singer (1960) montra ainsi clairement la différence entre la densité d'après la loi barométrique et d'après le modèle de Öpik and Singer (1959).

À partir de ce moment, deux types de populations dans l'exosphère furent clairement identifiés : les particules balistiques et celles en échappement. Brandt and Chamberlain (1960), critiquant Öpik and Singer (1959), soutiennent qu'il est cependant nécessaire de prendre en compte aussi les particules satellites dans le calcul de la densité totale, car il subsiste quelques collisions au-delà de l'exobase. Grâce à ces quelques collisions, une partie des particules balistiques peuvent devenir satellites et, de la même manière, le processus inverse est possible. Mais la mésentente perdure entre Chamberlain d'un côté, Öpik et Singer de l'autre. Öpik and Singer (1960) affirment que Brandt and Chamberlain (1960) ont tort dans leur approche : les équations sur lesquelles reposent leur calcul sont fausses et il n'y a pas de composante satellite <sup>1</sup>. Comme le rappelle plus tard Fahr and Shizgal (1983), leur désac-

<sup>1</sup>Il ne faut pas oublier qu'il n'existait pas encore de calcul analytique pour la densité totale, appliqué à l'hydrogène terrestre ici. Leur estimation de la densité totale reposait sur le calcul d'intégrales, estimées numériquement.

cord général vient en partie de leurs approches différentes. Dans l'article de Öpik and Singer (1959), l'approche repose sur la conservation du moment cinétique et donc elle ne peut tenir compte des particules satellites, c.-à-d. de particules ne croisant pas l'exobase. En supposant une fonction de distribution maxwellienne à l'exobase, Chamberlain (1963) donna le premier une expression analytique des densités pour les particules balistiques, en échappement et satellites (cette dernière composante est pourtant incompatible avec les conditions nécessaires pour appliquer le théorème de Liouville, j'y reviendrai dans le chapitre II). Le formalisme de Chamberlain est depuis devenu le modèle analytique le plus courant pour modéliser les profils de densité.

Mais les observations de la raie Lyman  $\alpha$  ne permirent pas de conclure réellement sur la présence de particules satellites. D'après Chamberlain (1963), la densité de particules satellites diminue avec l'altitude mais aussi domine les autres catégories ; il semble que ce n'est pas le cas, la densité de particules satellites serait négligeable à haute altitude sur Terre (Meier and Mange (1970), Mange (1972), Bertaux and Blamont (1973), Richter et al. (1979)).

De nombreuses recherches se sont portées aussi sur le flux d'échappement à l'exobase. Les quelques collisions dans l'exosphère réduisent le flux d'échappement des espèces légères. Il dépend notamment de l'espèce dominante. Fahr (1971) montre que ces quelques collisions réduisent le flux d'échappement de Jeans de 10%. Dans le livre de Chamberlain and Hunten (1987), une des études porte sur le flux d'échappement de l'hydrogène et de l'hélium, et son écart à la formule de Jeans (1916), en fonction du paramètre de Jeans et de l'espèce dominante environnante. Plus l'espèce environnante possède une masse proche de celle qui s'échappe, plus l'écart au flux de Jeans est faible. Le flux d'échappement peut être réduit jusqu'à 50% du flux de Jeans (cas de l'hydrogène dans du dioxyde de carbone). L'explication est la suivante : l'atmosphère sous l'exobase est en équilibre hydrostatique. Par contre, à l'exobase, si nous supposons que toutes les particules avec des vitesses supérieures à la vitesse d'échappement dans la direction descendante sont absentes (il est censé n'y avoir aucune particule avec une vitesse supérieure à celle d'échappement provenir de l'extérieur), le résultat est une distribution maxwellienne tronquée à la vitesse d'échappement. L'équilibre ne peut pas être maintenu tel quel (c'est-à-dire une coupure nette à 0 de la fonction de distribution à la vitesse d'échappement), la queue de la distribution se retrouve dépeuplée ; le flux de particules ascendant vers l'exobase est alors en équilibre hydrodynamique diffusif pour compenser cette troncature et le gradient de densité s'écarte du gradient imposé par la loi barométrique. Cela génère par la même occasion un refroidissement dit anisotropique (la température et son gradient dépendent de la direction (Liwshitz and Singer (1966))).

Souvent, la rotation de la planète n'est pas non plus prise en compte dans les modèles exosphériques. Il est évident que l'échappement est plus favorable pour une particule dont la vitesse thermique est dans le sens de la rotation. D'après Burke (1969), en plus de réduire la vitesse d'échappement de façon artificielle (la composante radiale de la force centrifuge s'oppose à la gravitation), la rotation faciliterait l'échappement des particules avec un moment cinétique grand à l'altitude critique. Le flux radial et les densités de particules ne dépendent alors plus seulement de la distance mais aussi de la latitude. Pour une distance radiale fixe, ces deux grandeurs sont des fonctions décroissantes

de la latitude. Par ailleurs, la rotation joue un rôle d'autant plus important sur les espèces lourdes (Hagenbuch and Hartle (1969)). La rotation décentre la distribution maxwellienne à l'exobase et va permettre d'apporter de l'énergie cinétique supplémentaire aux atomes et molécules. Cet apport est en valeur relative plus bénéfique aux espèces lourdes.

Généralement, les modèles analytiques utilisés dans la bibliographie se fondent sur plusieurs hypothèses :

- une exosphère supposée sans collisions. Le mouvement des particules, à l'échelle microscopique, est seulement dicté par la gravitation de la planète (nous pouvons appliquer en outre le théorème de Liouville),
- le lien entre l'exosphère et la barosphère se fait au travers d'une surface, appelée exobase ou encore altitude critique. La transition est abrupte, le nombre de Knudsen n'est pas une fonction continue de l'altitude,
- jusqu'à l'exobase, la fonction de distribution des vitesses est supposée maxwellienne,
- une exosphère à symétrie sphérique.

Conséquence de l'hypothèse de symétrie sphérique, la plupart des modèles exosphériques imposent une exobase uniforme autour de la planète, les densités des espèces à l'exobase ne dépendent ni de la longitude ni de la latitude. Par ailleurs, l'exosphère est généralement supposée isotherme. Les densités exosphériques et le flux d'échappement possèdent donc une symétrie sphérique (sauf dans les cas où la rotation est prise en compte). Pourtant, les densités varient grandement entre le côté jour et le côté nuit. Les réactions chimiques ne sont pas les mêmes et la photo-ionisation, par exemple, n'est pas possible côté nuit, dans l'ombre de la Terre. Il est clair que l'exobase possède alors une structure asymétrique. Plusieurs auteurs tentèrent de prendre justement en compte cette asymétrie dans leurs calculs (Hanson and Patterson (1963); Donahue and McAfee (1964); Patterson (1966); McAfee (1965), 1967; Hodges and Johnson (1968); Fahr (1970); Hartle (1971); Vidal-Madjar and Bertaux (1972); Quessette (1972)). Pour une exosphère asymétrique, le flux à l'exobase ne dépend plus seulement des particules en échappement mais aussi des particules balistiques. En théorie, le flux de particules balistiques rentrant à l'exobase compense le flux sortant (une particule contribue aussi bien au flux vertical montant qu'au flux vertical descendant). Or, si l'exosphère est asymétrique, il existera des températures et valeurs de densité différentes à l'exobase selon la zone considérée, ce qui induira des échanges complexes de flux de particules balistiques entre ces régions.

Le modèle analytique le plus utilisé de nos jours est bien évidemment celui de Chamberlain (1963) dont le formalisme est rappelé dans l'annexe B. Notre chapitre III s'inscrit d'ailleurs dans la lignée de ce type de modèle. Ce sont justement les modèles qui nécessitent le moins de ressources informatiques

(intégration numérique, modèle souvent 1D, etc...), ressources qui sont la principale limite actuelle. Je cite une liste non exhaustive des derniers articles se basant sur le formalisme de Chamberlain : Chaffin et al. (2014), Poppe et al. (2013) Waldrop and Paxton (2013), Yagi et al. (2012), Sarantos et al. (2012), Garnier et al. (2007), etc... Souvent, le formalisme de Chamberlain est adopté dans les grosses simulations pour modéliser rapidement la composante neutre nécessaire au reste de la simulation.

## D.2 Les modèles numériques

Nous nous rendons bien compte que pour aller plus loin dans la modélisation de l'exosphère et surtout de la zone de transition à l'exobase, il faut résoudre l'équation de Boltzmann en tenant compte des collisions entre chaque atome. Mais devant la complexité du problème, le nombre croissant de paramètres physiques et d'espèces à prendre en compte, cette approche est extrêmement coûteuse en temps de calcul <sup>2</sup>, d'autant plus qu'il faut traiter les collisions à chaque pas de temps.

En parallèle des modélisations de l'exosphère surtout analytiques présentées précédemment, des outils se sont développés pour résoudre l'équation de Boltzmann en fonction du nombre de Knudsen, les équations de Navier-Stokes n'étant valides que pour des nombres de Knudsen inférieurs à 0,1 (Bird (1994), p.3). La première théorie dans cette lignée est explicitée dans Chapman and Cowling (1952) : la théorie de Chapman-Enskog. La fonction de distribution  $f$  est supposée être le résultat d'une distribution maxwellienne  $f_M^{eq}$  faiblement perturbée de l'état d'équilibre :  $f = f_M^{eq}(1 + \phi_1)$ .  $\phi_1$  peut être obtenu explicitement pour un gaz d'une seule espèce :  $\phi_1$  est fonction de la densité, de la vitesse moyenne et de la température du gaz.

L'approche numérique, a priori, la plus adaptée à la résolution de l'équation de Boltzmann serait les « Direct Boltzmann Computational Fluid Dynamics » : la fonction de distribution est paramétrée par 7 coordonnées (trois de position et de vitesse, une de temps) dans l'espace des phases et l'équation est résolue numériquement à l'aide d'une méthode de différences ou d'éléments finis. Mais celle-ci a ses limites : dans cet espace, le nombre de points de la grille dans l'espace des phases explose, 100 points dans chaque dimension =  $10^{14}$  points au total. Le problème est donc souvent réduit à un écoulement à une dimension. Nordsieck and Hicks (1967) et Yen (1971) furent les premiers à appliquer avec succès cette méthode (écoulement stationnaire à une dimension). Par commodité, l'intégrale de collisions dans l'équation de Boltzmann est estimée à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo pour réduire la lourdeur du calcul <sup>3</sup>. Le principal souci de ces méthodes est d'imposer des limites dans l'espace des vitesses, et donc de négliger une partie de la queue de la distribution (qui s'étend à l'infini) qui peut jouer un rôle important pour l'échappement.

<sup>2</sup>Dans un système à  $N$  particules, l'espace des paramètres est de dimension  $7^N$  (3 de position, 3 de vitesse, 1 de temps pour une particule) ou si la résolution pour chaque dimension nécessite  $M$  points, le nombre total de points dans l'espace des phases grimpe à  $M^7$

<sup>3</sup>Mais ce n'est pas à proprement parler une méthode probabiliste type DSMC car le but ici est d'utiliser la méthode de Monte-Carlo pour évaluer l'intégrale de collisions alors que dans les modèles DSMC, le caractère probabiliste vient aussi de la probabilité que deux « super » particules au sein d'une même maille rentrent en collisions ou non suivant une certaine probabilité, le choix se faisant par le tirage d'un nombre aléatoire

Dans une autre catégorie, nous avons les simulations déterministes (pour une même entrée au modèle, nous avons toujours la même sortie ; cette méthode s'oppose à la définition des modèles Monte-Carlo probabilistes) : les méthodes de simulation directe prennent en compte un grand nombre de particules (allant du millier au million). Les positions et vitesses de chaque particule sont stockées à chaque instant et il n'est pas nécessaire de fixer un état initial de la fonction de distribution. La première méthode de simulation dite physique est la méthode des dynamiques moléculaires par Alder and Wainwright (1957). Le temps de calcul est proportionnel au carré du nombre de particules. Par contre, le nombre de particules n'est pas fixé par l'utilisateur, il dépend de la géométrie de l'écoulement et de la densité du gaz, pour une taille fixée des particules. Le nombre de particules à simuler est d'autant réduit que la densité augmente (Bird (1994), p. 202). Cette approche est donc préférable pour les gaz denses alors que l'équation de Boltzmann est réservée aux gaz dilués. Pour des gaz dilués et respecter les hypothèses de l'équation de Boltzmann, il faudrait simuler  $10^{20}$  particules.

Par la suite, se sont développées des méthodes dite probabilistes (s'opposant à déterministes) introduites par Haviland and Lavin (1962) basées sur une méthode de Monte-Carlo : un ensemble de particules-test est généré de façon aléatoire suivant une fonction de distribution initiale. Ces particules-test interagissent avec des particules-cibles suivant aussi une certaine fonction de distribution. À chaque itération, une particule-test est générée, interagit avec les particules-cibles, l'intégrale de collisions évolue et les fonctions de distribution des particules-test et cibles sont mises à jour, jusqu'à ce qu'il y ait équilibre entre les deux distributions ; cela suppose évidemment que nous sommes dans un cas stationnaire. Une alternative à cette méthode fut la simulation directe par méthode Monte-Carlo (DSMC), la plus utilisée pour modéliser l'exosphère de nos jours, introduite par Bird (1963). Elle est dépendante du temps et tient compte des trajectoires de chaque molécule simultanément mais elle ne peut-être appliquée qu'aux gaz dilués et avec des interactions intermoléculaires de courte portée. Cependant, un nombre fixe de molécules réelles est généralement réduit à une seule molécule simulée : au lieu d'assigner une grandeur physique à chaque molécule réelle, une distribution de valeurs est associée à la molécule simulée. Ce type de simulation peut s'appliquer aux milieux faiblement ionisés à partir du moment où le champ électrique s'obtient indépendamment de la simulation DSMC. Mais leur principal faiblesse reste leur temps de calcul : il est énorme en comparaison des autres simulations. Ils ont l'avantage de demander peu de contraintes sur le plan mathématique, la régularité des fonctions de distribution ou autres. Mais la convergence est lente : les fluctuations relatives des grandeurs macroscopiques comme la température  $\Delta T/T$  sont proportionnelles à  $1/\sqrt{N}$  pour un gaz parfait où  $N$  est le nombre de particules. Il faut un nombre important de particules dans chaque cellule de la grille de simulation pour donner un réel sens physique à la modélisation.

Finalement, il reste les méthodes de discrétisation appelées « gaz sur réseau » (« lattice Boltzmann methods » en anglais). L'espace est décomposé sous forme d'un réseau constitué de nœuds et le mouvement des particules est limité à ces nœuds. La position des particules est limitée à la position de ces nœuds et la direction de leur vecteur vitesse est toujours vers un autre nœud. Le pas de temps est fixé de manière à ce qu'une particule ne puisse passer qu'à un nœud voisin et la vitesse des particules ne peut prendre qu'une voire quelques valeurs. Il est cependant difficile d'en tirer les

grandeurs macroscopiques comme la température.

De nos jours, les modèles numériques de l'exosphère les plus utilisés sont les suivants : les modèles basés sur la résolution de l'équation de Boltzmann (peu nombreux), les modèles de type DSMC (plus courants). Nous pouvons citer notamment : Tucker et al. (2013), Leclercq et al. (2013), Schmidt (2013), Yagi et al. (2012), Mura (2012), Killen et al. (2012), etc...

## E La complexité des processus exosphériques

Les modèles exosphériques employés à l'heure actuelle peuvent finalement se distinguer en deux grandes catégories : analytique basé sur le théorème de Liouville (comme le formalisme de Chamberlain), probabiliste comme les DSMC. Quel que soit le type de modélisation, il est nécessaire de faire un certain nombre d'hypothèses, d'approximations sur la physique et la chimie mises en jeu.

Bien que du temps soit passé depuis l'émergence des premiers modèles exosphériques, la modélisation de cette partie de l'atmosphère et la prise en compte de tous les processus physiques et chimiques qui y siègent reste finalement un défi majeur, non seulement pour la compréhension de la zone de transition entre les régimes collisionnel et non collisionnel, mais également pour celle de l'exosphère étendue. L'image d'une exosphère purement non-collisionnelle, strictement composée de particules balistiques et d'échappement, à symétrie sphérique, non influencée par la gravité des corps voisins, ou par la radiation solaire, et dont la limite basse est précisément définie, est bien loin de la réalité.

Cependant, résoudre l'équation de Boltzmann est comme nous l'avons vu très compliqué, même au moyen d'hypothèses simplificatrices. Par exemple, elle est souvent résolue pour un gaz d'une ou de deux espèces car y incorporer les collisions inélastiques accroît la difficulté (il faut tenir compte des différents états d'excitation de chaque espèce et des réactions qui en découlent). L'intégrale de collisions à l'origine représente la création et la destruction d'une particule dans l'espace des vitesses mais pas dans celui des positions : après une collision, la particule est toujours au même endroit mais possède un vecteur vitesse différent. Or, tenir compte des collisions inélastiques revient à produire d'autres types de particules, il est nécessaire de prendre aussi en compte les fonctions de distributions de ces nouvelles espèces produites et les sections efficaces associées. Et ne parlons pas des différents états excités que peuvent avoir chaque espèce, à l'origine des couronnes non thermiques...

Malheureusement, la physique et la chimie de l'exosphère n'est jamais simple quelle que soit la planète. Voici une liste non exhaustive des processus à l'œuvre dans les exosphères :

- Collisions élastiques : les atomes et molécules s'entrechoquent sans modification de leur énergie interne (excitation par exemple). Il y a échange de moment cinétique entre les deux protagonistes mais pas de modification de leur nature (un atome d'hydrogène reste un atome d'hydrogène après la collision) (p. ex.  $H + O \rightarrow H + O$ ).

- Réactions d'échange de charge : le plasma du vent solaire ou des magnétosphères planétaires interagit avec les atomes ou molécules neutres de l'exosphère. Les ions peuvent arracher un électron aux espèces neutres et transférer leur charge positive à cette même espèce (p. ex.  $H^+ + O \rightarrow H + O^+$ ).
- Recombinaison dissociative : le plasma (ionosphérique, magnétosphérique, ou du vent solaire) contient des électrons. Ces électrons collisionnent avec les cations, présents dans l'environnement, se recombinant avec les électrons pour donner des espèces neutres souvent excitées (p. ex.  $O_2^+ + e^- \rightarrow O^* + O$ ).
- Dissociation par impact électronique : l'électron très énergétique va impacter et céder une partie de son énergie cinétique pour casse une molécule (p. ex.  $N_2 + e^- \rightarrow N^* + N + e^-$ ).
- Photo-dissociation. Les photons énergétiques de l'étoile irradient les molécules et peuvent les casser par cet apport d'énergie (p. ex.  $O_2 + h\nu \rightarrow O^* + O^*$ ).
- Réactions ion-neutre : il n'y a pas seulement des réactions d'échange de charge mais aussi parfois réarrangement des atomes (e.g  $O^+ + H_2 \rightarrow OH^+ + H^*$ ).
- Criblage (en anglais, « sputtering ») : il s'agit d'un ion très rapide ou d'un ENA frappant un atome ou une molécule, à laquelle il cède une partie de son énergie (p. ex.  $Na + S^{+*} \rightarrow Na^* + S^{+*}$ ).
- Photo-ionisation : un photon ionise un atome ou une molécule neutre (p. ex.  $O + h\nu \rightarrow O^+ + e^-$ ).

À part le premier mécanisme, tous les autres sont dit processus non-thermiques. Mais outre ces processus, des forces extérieures doivent parfois être prises en compte dans la modélisation de la couronne planétaire. En effet, des phénomènes tels que la pression de radiation stellaire, l'effet Poynting-Robertson, ou le champ de pesanteur d'un autre corps (étoile, planète pour un lune, etc.) vont potentiellement influencer sur la structure et la dynamique de l'exosphère, en particulier à hautes altitudes.

## F Objectifs de la thèse

La prise en compte de l'ensemble des processus à l'oeuvre dans les exosphères est complexe à mettre en oeuvre. Les modèles de type Monte-Carlo permettent d'inclure tous les processus que l'on souhaite, mais les temps de calcul nécessaires pour modéliser l'ensemble de la couronne (depuis la

zone de transition à l'exobase jusqu'à sa limite externe ou exopause) peuvent être considérables, et doivent être adaptés à chaque environnement. Les modèles analytiques simples (du type Chamberlain notamment) sont quant à eux facilement transportables sur des planètes différents, mais restent incapables d'inclure divers processus sans violer les hypothèses du modèle.

Notre travail de thèse a donc consisté à proposer des approches semi-analytiques, s'appliquant aisément à tout environnement planétaire, avec des temps de calcul relativement faibles, et ce afin d'étudier les effets de plusieurs processus : les collisions dans la basse exosphère (à l'origine d'une population de particules dites satellites), la pression de radiation solaire, et l'effet éventuel combiné du champ de pesanteur d'un autre corps.

Le but de cette thèse est donc de proposer deux modèles semi-analytiques différents pour mieux comprendre la structure des exosphères neutres sous l'influence des rares collisions existantes et de la pression de radiation solaire :

- Le premier modèle, abordé dans le chapitre II, permet de déterminer la contribution des particules satellites dans une exosphère quasiment non-collisionnelle. Seules quelques collisions subsistent au-dessus de l'exobase, mais celles-ci peuvent être éventuellement à l'origine de la présence de particules satellites. Comme mentionné précédemment, seul Chamberlain proposa une formulation pour la densité des particules satellites en supposant une exosphère sans collision, même si celle-ci n'est pas physiquement viable. Notre modèle permet de les prendre en compte grâce à l'équation de Boltzmann. Il sera appliqué à la Terre, Titan et Mars.
- Le second modèle, abordé dans le chapitre III, évalue l'impact d'une des principales forces externes sur l'exosphère autre que la gravitation, la pression de radiation en provenance du Soleil. Cette fois-ci, le milieu est considéré sans collision et le théorème de Liouville peut être alors appliqué. L'étude porte sur les profils de densité et le flux d'échappement, déterminé de façon analytique face au Soleil.
- Une dernière partie sera consacrée aux exoplanètes. Le modèle présenté dans le chapitre III n'est pas dépendant de la planète pour peu que certaines conditions soient respectées. Nous verrons que l'étude de la pression de radiation, combinée au problème à trois corps, induit de fortes contraintes sur les modèles d'atmosphères d'exoplanètes et notamment sur les Jupiters chauds, riches en hydrogène.

# Chapitre II

## Modélisation des densités de particules satellites dans les exosphères planétaires

### Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Introduction</b>	<b>40</b>
A.1	L'approximation $\zeta_{sat}$ de Chamberlain (1963)	41
A.2	Définition d'une distance critique : une alternative ?	43
A.3	Une approche rigoureuse : l'équation de Boltzmann	43
<b>B</b>	<b>Description du modèle</b>	<b>44</b>
B.1	L'approche théorique	44
B.2	Les limites d'intégration	45
B.3	Calcul des densités des particules satellites	49
B.4	Les processus de production et de pertes pour les particules satellites	50
B.5	Les vitesses relatives et les sections efficaces utilisées	52
B.6	Description de l'algorithme	53
<b>C</b>	<b>Application à l'hydrogène atomique sur Terre</b>	<b>54</b>
C.1	Validation du modèle : comparaison avec Richter et al. (1979)	54
C.2	Comparaison à hautes altitudes	57
<b>D</b>	<b>Application au dihydrogène sur Titan</b>	<b>58</b>
D.1	Introduction	58
D.2	Profils de densité des particules $H_2$ -satellites dans l'exosphère de Titan	60
D.3	Les processus de production et de pertes	63
D.4	Le volume de l'espace des phases	65
D.5	La durée de vie moyenne des particules satellites	67
<b>E</b>	<b>Application à l'hydrogène atomique sur Mars</b>	<b>68</b>
E.1	Introduction	68
E.2	L'exosphère martienne froide	70

E.3	L'exosphère martienne chaude . . . . .	71
<b>F</b>	<b>Hypothèses et limites du modèle . . . . .</b>	<b>73</b>
<b>G</b>	<b>Discussions comparatives . . . . .</b>	<b>76</b>
G.1	Comparaison entre les densités de particules satellites sur la Terre, Mars et Titan . . . . .	76
G.2	Prédiction de l'importance relative des particules satellites . . . . .	81
G.3	Comparaison avec le formalisme de Chamberlain . . . . .	83
G.4	L'influence des distributions kappa . . . . .	85
<b>H</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>87</b>

## A Introduction

L'exosphère est la couche supérieure de toute atmosphère planétaire : il s'agit d'un milieu quasiment non-collisionnel où la trajectoire des particules est essentiellement déterminée par l'ensemble des forces extérieures telles que la gravité ou la pression de radiation plutôt que par les collisions. Au-delà de l'exobase, la limite basse de l'exosphère, le nombre de Knudsen (Ferziger and Kaper (1972)) devient bien supérieur à 1, le libre parcours moyen est alors plus grand que l'échelle de hauteur caractéristique, les collisions se font plus rares et, par conséquent, l'approximation de la fonction de distribution des vitesses par une distribution maxwellienne devient inadaptée. Lorsqu'une particule est seulement soumise au champ de gravité de la planète, les équations du mouvement sont entièrement résolues et les trajectoires connues. Pour décrire correctement les particules exosphériques, il est nécessaire de distinguer 3 types de particules (voir la figure II.1) :

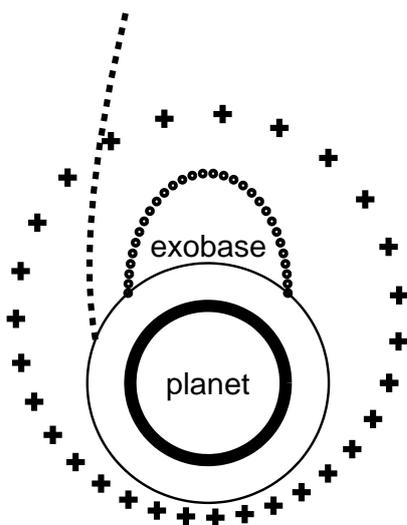


FIGURE II.1 – Trois types de particules dans l'exosphère : en échappement (pointillé), balistique (o) et satellite (+).

-les **particules en échappement** à l'origine de l'échappement atmosphérique, dit aussi de Jeans. Elles proviennent de l'exobase, leur vitesse est supérieure à la vitesse d'échappement à l'exobase et ont une énergie mécanique positive. Elles peuvent ainsi échapper à l'influence gravitationnelle de la planète ;

-les **particules balistiques** proviennent de l'exobase mais ont une vitesse inférieure à la vitesse d'échappement. Leur énergie mécanique est négative : elles atteignent une altitude maximale pour ensuite retomber sur la planète et croiser de nouveau l'exobase ;

**-les particules satellites** qui, contrairement aux particules balistiques, ne croisent pas l'exobase. Leur trajectoire décrit une ellipse complète au-dessus de l'exobase de la planète. Leur origine provient surtout de particules balistiques ayant subi une voire plusieurs collisions principalement dans les premiers kilomètres au-dessus de l'exobase. Dans un modèle non-collisionnel, les particules satellites ne peuvent pas exister : sans collisions, elles ne peuvent être produites.

Chamberlain (1963) proposa une approche afin d'estimer ces différentes populations en utilisant le théorème de Liouville. Cette approche est détaillée dans l'annexe B. En supposant une distribution maxwellienne à l'exobase, Chamberlain étend la fonction de distribution à l'ensemble de l'exosphère. La densité de chaque population est alors obtenue comme le produit de la loi barométrique et d'une fonction de partition  $\zeta$  :

$$n(r) = n_{bar}\zeta(\lambda) = n(r_{exo})e^{\lambda-\lambda_{exo}}\zeta(\lambda) \quad (\text{II.1})$$

où  $\lambda$  correspond au ratio entre l'énergie gravitationnelle et thermique

$$\lambda(r) = \frac{GMm}{k_B T_{exo} r} = \frac{v_{esc}(r)^2}{U^2} \quad (\text{II.2})$$

avec  $r$  la distance au centre de la planète,  $v_{esc}(r) = \sqrt{2GM/r}$  la vitesse d'échappement à la distance  $r$ ,  $U$  la vitesse la plus probable (à ne pas confondre avec la vitesse thermique dont le calcul se base sur la variance de la fonction de distribution ; pour une distribution maxwellienne, les deux diffèrent d'un facteur  $\sqrt{2}$ ) pour la distribution maxwellienne,  $G$  la constante gravitationnelle,  $M$  la masse de la planète et  $T_{exo}$  la température à l'exobase supposée constante dans toute l'exosphère.

## A.1 L'approximation $\zeta_{sat}$ de Chamberlain (1963)

Chamberlain (1963) fournit une approximation pour la contribution des particules satellites au travers de la fonction de partition  $\zeta_{sat}$ . Cette fonction de partition peut potentiellement dominer, à haute altitude (donc basse valeur de  $\lambda$ ), les contributions cumulées des populations balistiques et d'échappement ( $\zeta_{bal} + \zeta_{esc}$ ). Il est possible de déterminer, à partir du calcul des fonctions de partition  $\zeta(\lambda)$  de chaque population, un ajustement numérique pour obtenir le paramètre de Chamberlain  $\lambda_{dom}$  en-dessous duquel (donc l'altitude au-dessus de laquelle) l'approximation  $\zeta_{sat}$  domine.

$$\begin{aligned} \log_{10}(\lambda_{dom}) = & 0,0029 \log_{10}(\lambda_c)^6 - 0,0254 \log_{10}(\lambda_c)^5 + 0,0451 \log_{10}(\lambda_c)^4 + \log_{10}(\lambda_c)^3 \\ & - 0,8377 \log_{10}(\lambda_c)^2 + 1,6384 \log_{10}(\lambda_c) - 0,5853 \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

L'équation (II.3) permet d'estimer, en fonction du paramètre de Jeans à l'exobase  $\lambda_c$ , le paramètre  $\lambda_{dom}$  pour lequel la fonction de partition des particules satellites  $\zeta_{sat}$  égale celle des balistiques et en échappement  $\zeta_{bal} + \zeta_{esc}$ . C'est un ajustement de  $\log_{10}(\lambda_{dom})$  en fonction de  $\log_{10}(\lambda_c)$  par un polynôme de degré 6 avec un coefficient de corrélation de Pearson de 0,9993. Nous avons représenté cet ajustement sur la figure II.2 et donné les valeurs d'altitude limite correspondantes sur Terre, Mars et Titan dans le tableau II.1. Il semble donc, d'après cette première analyse, que les populations

Body	Earth	Mars	Titan
$GM$ ( $m^3.s^{-2}$ )	$3,986.10^{14}$	$4,283.10^{13}$	$8,978.10^{12}$
Radius / exobase altitude (km)	6371/500	3390/(190/250)	2575/(1500/1600)
Exobase emperature (K)	800 / 1200	200 / 350	152
Altitude where $\zeta_{sat}$ may dominate with Chamberlain formalism (km) (cf. figure II.2)	$2,35.10^4$	$1,28.10^4$	$1,18.10^4$
Main species	$H$	$H$	$H_2$
$\lambda_c$	8,78/5,86	7,24/4,07	3,51/3,43

TABLE II.1 – Tableau référençant les différentes caractéristiques des planètes ou satellites étudiées. Les valeurs d’altitude de l’exobase sont données par Krasnopolsky (2002) pour Mars ; par Cui et al. (2008) pour Titan et par Richter et al. (1979) pour la Terre

satellites sont toujours la population dominante à haute altitude.

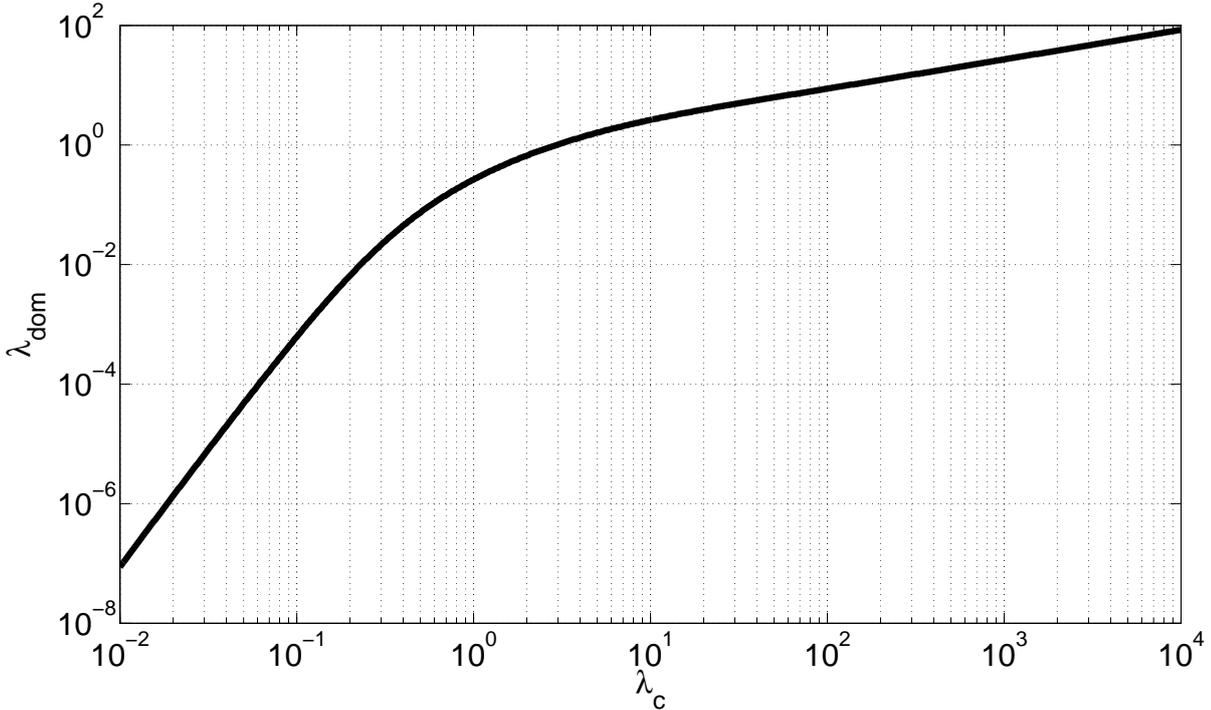


FIGURE II.2 –  $\lambda_{dom}$  tel que les particules satellites dominent les contributions des particules balistiques et d’échappement d’après le formalisme de Chamberlain ( $\zeta_{sat} > \zeta_{bal} + \zeta_{esc}$ )

Il y a néanmoins un problème dans cette analyse : la population de particules satellites ne peut être estimée correctement par cette approche. Pour pouvoir appliquer le théorème de Liouville, il faut que la particule provienne de l’exobase, la dernière limite où l’on puisse considérer une distribution maxwellienne pour les vitesses. Or, par définition, une particule satellite ne croise pas l’exobase donc nous ne pouvons pas appliquer le théorème de Liouville aux particules satellites. L’approximation  $\zeta_{sat}$  donnée par Chamberlain ne peut pas être rigoureuse et surestime probablement cette population. La seule façon de les estimer de manière rigoureuse est d’utiliser l’équation de Boltzmann (Annexe A) qui peut prendre en compte les rares collisions s’opérant dans l’exosphère. La plupart des modèles

exosphériques sont sans collisions et se basent notamment sur le formalisme de Chamberlain, en ne tenant compte généralement que des particules balistiques et en échappement (p. ex. Chaufray et al. (2008)), tandis que d'autres prennent aussi arbitrairement en compte les particules satellites au travers de l'approximation  $\zeta_{sat}$  (p.ex. Brandt et al. (2012)).

## A.2 Définition d'une distance critique : une alternative ?

Une idée évoquée par Chamberlain (1963) pour tenir compte des particules satellites, sachant qu'elles ne sont produites que dans une région limitée au-dessus de l'exobase, consiste à définir une distance critique  $r_{cs}$  de production des particules satellites (Chamberlain (1963), Richter et al. (1979), Fahr and Shizgal (1983), Bishop (1991)). En supposant que le périapse de toutes les particules satellites est en-dessous de cette limite, Chamberlain propose de modéliser la densité de particules satellites au-delà de  $r_{cs}$  grâce à sa formulation pour les particules balistiques. Entre  $r_{exo}$  et  $r_{cs}$ , il conserve son formalisme avec  $\zeta_{sat}$ . Comme le périapse des particules satellites est supposé en deçà de  $r_{cs}$ , les particules satellites présentes au-dessus de  $r_{cs}$  sont balistiques vis-à-vis de la sphère de rayon  $r_{cs}$ . Il paraît alors naturel d'utiliser sa formulation pour les particules balistiques avec non plus pour limite basse  $r_{exo}$  mais  $r_{cs}$ . Néanmoins, cette approche génère une discontinuité problématique à  $r_{cs}$  (Fahr and Shizgal (1983)). Ce concept de rayon critique est abordé dans les travaux de Bertaux et al. (1978) et Prisco and Chamberlain (1979).

Nous montrerons par la suite (partie G.3) que cette approche n'est pas adaptée à la représentation des profils de densité des particules satellites.

## A.3 Une approche rigoureuse : l'équation de Boltzmann

Richter et al. (1979) ont utilisé l'équation de Boltzmann pour estimer la densité de particules satellites dans l'exosphère terrestre en prenant en compte les processus de production et de perte. Ils ont calculé cette densité dans les 2500 premiers kilomètres au-dessus de l'exobase et conclurent qu'elle ne pouvait dominer la densité de particules balistiques et en échappement entre 500 kilomètres (hauteur de l'exobase terrestre) et 2500 kilomètres. Cependant, elles pourraient dominer à haute altitude puisque le ratio de la densité de particules satellites sur la densité totale croît avec l'altitude.

Dans ce chapitre, nous proposons d'approfondir l'étude de Richter (section C) et de l'étendre à d'autres planètes (Titan et Mars) pour estimer rigoureusement leur population de particules satellites, en utilisant en entrée les modèles et données les plus récentes. Dans un premier temps, nous décrivons le modèle, puis nous comparerons nos résultats terrestres avec ceux de Richter avec les mêmes conditions initiales afin de valider notre modèle. Les sections suivantes porteront sur l'application à Titan (section D) et Mars (section E) ainsi que sur les limitations de notre modèle (section F). Enfin, nous ferons une discussion comparative entre les différentes planètes ainsi qu'une conclusion (sections G et H).

## B Description du modèle

### B.1 L'approche théorique

Les particules balistiques et satellites, possédant toutes deux une énergie mécanique négative, décrivent des ellipses autour de la planète d'après les lois de la gravitation. La distinction entre ces deux types de particules se fait sur la position de leur périapse  $r_p$  (point le plus proche de la planète au cours de leur révolution) : les particules balistiques ont  $r_p$  inférieur à  $r_{exo}$  (distance de l'exobase au centre de la planète) et les particules satellites ont  $r_p$  supérieur à  $r_{exo}$ . La présence de particules satellites résulte des quelques collisions subies par les particules balistiques près de l'exobase et modifiant leur trajectoire. La fonction de distribution des particules satellites peut être résolue grâce à l'équation de Boltzmann :

$$\frac{Df_s(\vec{r}_s, \vec{v}_s)}{Dt} = P^+(\vec{r}, \vec{v}) + P^-(\vec{r}, \vec{v}) \quad (\text{II.4})$$

où  $P^+$  et  $P^-$  sont les taux locaux de production et de perte avec le vecteur position  $\vec{r}$  et le vecteur vitesse  $\vec{v}$  par unité de volume de l'espace des phases ( $m^{-6}.s^2$ ).

Le long d'une trajectoire elliptique, l'équation (II.4) devient :

$$\frac{Df_s}{Dt} \equiv \frac{\partial f_s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f_s = \frac{\partial f_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial f_s}{\partial s} = P^+ + P^- \quad (\text{II.5})$$

où  $s$  représente l'abscisse curviligne sur l'ellipse et  $v_s$  la vitesse associée. Le taux local de perte est directement proportionnel à la fonction de distribution :

$$P^- = -f_s.L_s \quad (\text{II.6})$$

où  $L_s$  est le taux net de perte par particule satellite et son unité est  $s^{-1}$ . Finalement, nous obtenons, dans le cas stationnaire ( $\partial/\partial t = 0$ ) :

$$v_s \frac{df_s}{ds} = P^+ - f_s.L_s \quad (\text{II.7})$$

L'équation intégral-différentielle de Boltzmann est réduite à une simple équation différentielle. Pour la résoudre, nous supposons que la fonction de distribution des particules satellites ne dépend pas des autres particules satellites subissant des collisions, les particules satellites étant négligeables dans la basse exosphère. Ceci donne :

$$f_s(\vec{r}, \vec{v}) = \exp\left(-\int_{s_0}^s \frac{L'_s}{v'_s} ds'\right) \left[ f_s(\vec{r}_0, \vec{v}_0) + \int_{s_0}^s P_s^{+'} \exp\left(\int_{s_0}^{s'} \frac{L''_s}{v''_s} ds''\right) \frac{ds'}{v'_s} \right] \quad (\text{II.8})$$

où  $f_s(\vec{r}_0, \vec{v}_0)$  est la fonction de distribution des particules satellites à une abscisse curvilinéaire donnée  $s_0$  et  $f_s(\vec{r}, \vec{v})$  la fonction de distribution des particules satellites à une abscisse  $s$  quelconque.

Après une révolution, la particule revient dans sa configuration initiale  $(\vec{r}_0, \vec{v}_0)$ .

$$f_s(\vec{r}_0, \vec{v}_0) = \exp\left(-\oint \frac{L'_s}{v'_s} ds'\right) \left[ f_s(\vec{r}_0, \vec{v}_0) + \oint P_s^{+'} \exp\left(\int_{s_0}^{s'} \frac{L''_s}{v''_s} ds''\right) \frac{ds'}{v'_s} \right] \quad (\text{II.9})$$

En réarrangeant les termes, l'équation II.9 devient :

$$f_s(\vec{r}_0, \vec{v}_0) = \frac{\oint_{s_0} P_s^{+'} \exp\left(\int_{s_0}^{s'} \frac{L''_s}{v''_s} ds''\right) \frac{ds'}{v'_s}}{\exp\left(\oint_{s_0} \frac{L'_s}{v'_s} ds'\right) - 1} \quad (\text{II.10})$$

Le choix du couple  $(\vec{r}_0, \vec{v}_0)$  est complètement arbitraire. Il impose les caractéristiques de l'ellipse et le point de départ pour l'intégration  $s_0$ . Grâce à la fonction de distribution, nous pouvons en déduire la densité de particules satellites en intégrant sur l'ensemble de l'espace des vitesses :

$$n_s(\vec{r}) = \int_{\Sigma_s(\vec{r})} f_s(\vec{r}, \vec{v}) d\vec{v}^3 \quad (\text{II.11})$$

où  $\Sigma_s(\vec{r})$  est la partie de l'espace des phases des vitesses accessible aux particules satellites.

## B.2 Les limites d'intégration

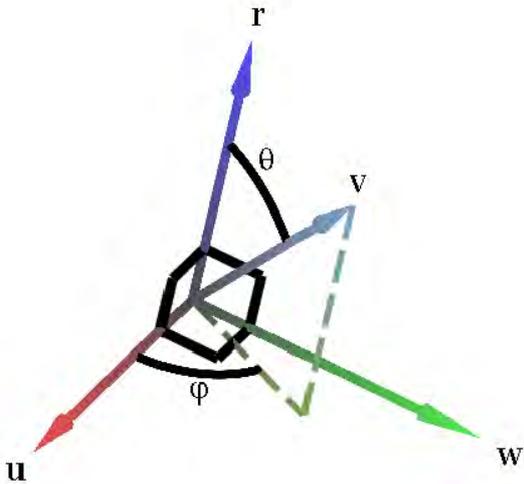


FIGURE II.3 – Le système de coordonnées pour le vecteur  $\vec{v}$ , avec l'angle polaire  $\theta$  et l'angle azimutale  $\phi$ . Le mouvement est indépendant de  $\phi$ .

Comme première étape, nous considérons une symétrie sphérique pour l'exosphère, avec des conditions à l'exobase et dans toute l'exosphère ne dépendant que de la distance  $r$ . Cette hypothèse d'uniformité autour de la planète ne prend pas en compte l'ensemble des asymétries observées dans les atmosphères planétaires. Ceci impose une première limite à notre modèle et sera abordé dans la section C.2 pour la Terre et E.3 pour Mars. Comme le problème est à symétrie sphérique pour les positions, le vecteur vitesse ne dépend que de sa norme et de l'angle  $\theta = (\vec{r}, \vec{v}_s)$  (voir la figure II.3 pour la représentation). La fonction de distribution devient fonction de seulement trois variables :  $r, v, \theta$ .

L'élément infinitésimal de volume pour les vitesses devient :

$$d\vec{v}^3 = v^2 \sin \theta dv d\theta d\phi \quad (\text{II.12})$$

Il faut maintenant déterminer correctement les bornes d'intégration. Comme les particules satellites ont un périapse au-delà de l'exobase et une énergie mécanique négative, cela impose des

conditions sur  $\theta$  et  $v$ . Le lecteur est invité à se reporter à l'annexe C afin de se rafraîchir la mémoire au sujet des lois de Kepler et des différents paramètres caractérisant une orbite.

### B.2.a Les limites d'intégration pour les angles

Pour les particules satellites, il y a conservation du moment cinétique :

$$r_p v_p = r v \sin \theta \quad (\text{II.13})$$

où  $v_p$  est la vitesse au périapse. Le plus petit moment cinétique que peut avoir une particule satellite est le cas d'une orbite circulaire à la distance  $r_{exo}$ . Ceci impose que toute particule satellite dans l'exosphère doit respecter la condition :

$$r_{exo} v_{exo} < r v \sin \theta \quad (\text{II.14})$$

et de la conservation de l'énergie mécanique, nous déduisons :

$$v^2 - \frac{2GM}{r} = v_{exo}^2 - \frac{2GM}{r_{exo}} \quad (\text{II.15})$$

Nous obtenons ainsi  $v_{exo}$  la vitesse de la particule à l'exobase (égalité (C.12)) :

$$v_{exo} = \sqrt{GM \left( \frac{2}{r_{exo}} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{v^2 + 2GM \left( \frac{1}{r_{exo}} - \frac{1}{r} \right)} \quad (\text{II.16})$$

$a$  est le demi-grand axe de l'ellipse. Finalement,

$$\sin \theta > \frac{r_{exo} v_{exo}}{r v} = \frac{r_{exo}}{r v} \sqrt{v^2 + 2GM \left( \frac{1}{r_{exo}} - \frac{1}{r} \right)} \quad (\text{II.17})$$

équivalent à l'inégalité

$$\pi - \theta_c(r, v) > \theta > \theta_c(r, v) \quad (\text{II.18})$$

avec

$$\theta_c(r, v) = \arcsin \left( \frac{r_{exo}}{r v} \sqrt{v^2 + 2GM \left( \frac{1}{r_{exo}} - \frac{1}{r} \right)} \right) \quad (\text{II.19})$$

En plus de cette première limite introduite par Richter et al. (1979), nous avons introduit une limite externe à l'exosphère, une « exopause ». Quand la distance entre la particule et la planète augmente, le champ gravitationnel de la planète décroît et deux autres forces commencent à prendre l'ascendant, considérées comme de simples perturbations près de la planète. Il s'agit de la pression de radiation du Soleil et le champ gravitationnel des autres planètes. À partir du moment où ces forces sont dominantes, nous supposons la particule satellite perdue (c.-à-d. en échappement). Nous avons pour cela introduit une limite haute  $R_{lim} = \min\{R_{Hill}, R_{pressure}\}$  pour les particules satellites avec :  $R_{Hill}$  le rayon de la sphère de Hill (1878),  $R_{pressure}$  la limite à partir de laquelle la pression de radiation devient dominante par rapport au champ de gravité de la planète (les valeurs numériques sont données plus loin, cf. tableau II.2 ; cf. également la partie B.2.c pour plus de détails). L'apoapse

$r_a$  de la particule satellite ne doit pas dépasser cette limite :

$$R_{lim}v_{lim} < rv \sin \theta \quad (\text{II.20})$$

$$v_{lim}(r) = \sqrt{GM \left( \frac{2}{R_{lim}} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{v^2 + 2GM \left( \frac{1}{R_{lim}} - \frac{1}{r} \right)} \quad (\text{II.21})$$

en supposant

$$v^2 + 2GM \left( \frac{1}{R_{lim}} - \frac{1}{r} \right) > 0 \quad (\text{II.22})$$

car la particule satellite n'a pas forcément l'énergie nécessaire pour atteindre cette limite. Cette inégalité II.22 conduit à une seconde condition sur les angles.

$$\pi - \theta_l(r, v) > \theta > \theta_l(r, v) \quad (\text{II.23})$$

où

$$\theta_l(r, v) = \begin{cases} \arcsin \left( \frac{R_{lim}}{rv} \sqrt{v^2 + 2GM \left( \frac{1}{R_{lim}} - \frac{1}{r} \right)} \right) & \text{si } 2a > R_{lim} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

Il faut à la fois respecter la condition donnée par II.18 et II.23, ceci implique que le domaine d'intégration pour  $\theta$  est  $[\max(\theta_c, \theta_l); \pi - \max(\theta_c, \theta_l)]$ .

La figure II.4 représente l'espace des phases accessible pour une particule satellite pour un  $r$  et  $\theta$  donnés. Pour ces deux valeurs fixées, le périapse et l'apoapse vont devenir fonctions uniquement de  $\theta$ . Or, il faut respecter la condition  $r_p > r_{exo}$  et  $R_{lim} > r_a$  ce qui n'est possible que dans la zone verte sur la figure.

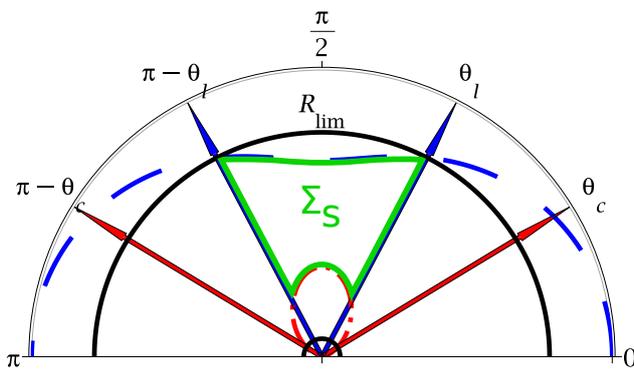


FIGURE II.4 – Tracé dans le cas de Titan du périapse (en rouge) et de l'apoapse (en bleu) d'une particule située initialement à  $r = 2.10^7 \text{ m}$  avec une vitesse  $v = 785 \text{ m.s}^{-1}$  en fonction de  $\theta$ . La particule est satellite dans le domaine  $[\theta_l; \pi - \theta_l]$ . Les cercles noirs correspondent aux limites inférieures  $r_{exo}$  et extérieures  $R_{lim}$  de l'exosphère. Nous avons représenté sur le même graphe les valeurs de  $\theta_c$  et  $\theta_l$  délimitant  $\Sigma_s$  le volume d'espace des phases pour les particules satellites pour des conditions initiales  $r$  et  $v$  fixées.

### B.2.b Les limites d'intégration pour les vitesses

Le long d'une ellipse, la vitesse minimale d'une particule est atteinte à l'apoapse, le point le plus éloigné du foyer de l'ellipse, alors que sa vitesse maximale se situe au niveau de son périapsis. Sachant

que la limite basse du périapse d'une particule satellite est l'exobase, nous en déduisons :

$$v_{min}(r) = \sqrt{2GM \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r + r_{exo}} \right)} \quad (\text{II.25})$$

la vitesse minimale que peut avoir une particule satellite à la distance  $r$  tout en restant en révolution au-delà de l'exobase.

De même, comme nous avons défini une distance limite pour la trajectoire pour les particules satellites, nous avons

$$v_{max}(r) = \sqrt{2GM \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r + R_{lim}} \right)} \quad (\text{II.26})$$

la vitesse maximale d'une particule à la distance  $r$  pour ne pas sortir de l'exosphère. Dans la limite où  $R_{lim}$  tend vers  $+\infty$ , nous retrouvons la vitesse d'échappement. Il est important de noter que Richter et al. (1979) n'avait considéré aucune limite externe.

### B.2.c Les limites d'intégration pour les distances

Pour notre étude, il était nécessaire de faire la comparaison entre les différentes forces mises en jeu dans l'exosphère. Il convenait alors de comparer les distances limites à partir desquelles ces forces devenaient dominantes. Dans notre étude, les deux seules forces pouvant dominer la dynamique des particules, autres que la gravité de la planète elle-même, sont la pression de radiation et l'attraction gravitationnelle des autres corps. Ces distances limites sont référencées sous les termes de  $R_{pressure}$  pour la pression de radiation et  $R_{Hill}$  pour l'attraction gravitationnelle d'autres corps.

	Titan	Earth	Mars
Radius / exobase's altitude (km)	2575/1426	6371/500	3389/190
$R_{pressure}$ = Limit distance where the radiation pressure becomes dominant (medium Sun activity)	$3,45 \cdot 10^5$	$2,30 \cdot 10^5$	$1,14 \cdot 10^5$
$R_{Hill}$ = Hill sphere radius (in $R_{pressure}$ )	0,15	6,38	8,55
$R_{lim} = \min(R_{Hill}, R_{pressure})$ : upper limit of the exosphere	$R_{Hill}$	$R_{pressure}$	$R_{pressure}$
Neutral species	$H_2$	$H$	$H$

TABLE II.2 – Limites caractéristiques pour les exosphères de Titan, la Terre et Mars

Dans le tableau II.2, nous avons, pour chaque cas, les valeurs comparées de  $R_{pressure}$  et  $R_{Hill}$ , et déterminé la plus petite des deux pour l'espèce étudiée. Pour Titan, c'est la sphère de Hill qui limite la dynamique : Titan est loin du Soleil, proche de Saturne et en plus, sa masse est petite devant celle de sa planète hôte Saturne. Par contre, la Terre et Mars ne sont pas à proximité de corps lourds, le plus proche est le Soleil. Il paraît donc logique que la pression de radiation l'emporte.

### B.3 Calcul des densités des particules satellites

Maintenant que  $\Sigma_s$ , le volume d'espace des phases des vitesses dans lequel se trouvent les particules satellites, est correctement défini (pour un aperçu visuel, se référer à la figure II.4), nous pouvons exprimer la densité de particules satellites  $n_s$  :

$$n_s(r) = 2\pi \int_{v_{min}}^{v_{max}} \int_{\max(\theta_c, \theta_l)}^{\pi - \max(\theta_c, \theta_l)} f_s(r, v, \theta) v^2 \sin \theta \, dv \, d\theta \quad (\text{II.27})$$

Cependant, il est à noter qu'intégrer suivant la différentielle  $ds$  n'est pas commode mathématiquement : toutes les entrées du problème telles que les termes de production et de perte dépendent des coordonnées  $r$  et  $v$  et il n'existe pas de relation simple avec  $s$ . Par exemple, l'abscisse curviligne  $s$  est une fonction continue strictement croissante du temps alors que  $r$  est une fonction continue périodique du temps oscillant entre  $r_p$  et  $r_a$ . Il n'existe donc pas de relation de bijection entre ces deux variables. Pour toute fonction qui à  $s$  associe une valeur de  $r$ , celle-ci est forcément surjective. Nous avons, pour palier ce problème, décidé de passer par un autre système de paramétrisation des intégrales basé sur la différentielle de l'anomalie vraie  $d\Omega$ . Cette formulation est plus adaptée car  $s$  et  $\Omega$  sont en bijection. Il existe un ensemble de relation simple entre  $r$ ,  $v$  et  $\Omega$  :

$$r(\Omega) = \frac{p}{1 + e \cos \Omega}$$

$$p(r, v, \theta) = \frac{r^2 v^2 \sin^2 \theta}{GM} = \frac{r_p^2 v_p^2}{GM}$$

$$e(r, v, \theta) = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} = \sqrt{1 + \left(v^2 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{r^2 v^2 \sin^2 \theta}{G^2 M^2}}$$

avec  $e$  l'excentricité,  $p$  le paramètre ou connu sous l'appellation « demi latus rectum » et  $\Omega$  l'anomalie vraie ce qui implique

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (rd\Omega)^2} = \frac{p\sqrt{1 + 2e \cos \Omega + e^2}}{(1 + e \cos \Omega)^2} d\Omega \quad (\text{II.28})$$

$$\frac{ds}{v_s} = \sqrt{\frac{p^3}{GM}} \frac{1}{(1 + e \cos \Omega)^2} d\Omega \quad (\text{II.29})$$

La différentielle  $ds$  dépend uniquement de la différentielle  $d\Omega$  car  $p$  et  $e$  sont des constantes du mouvement données par les conditions initiales de la particule satellite. En remplaçant  $ds$  par  $d\Omega$ , de même que  $s_0$  par  $\Omega_0$  dans l'équation II.10 avec :

$$\Omega_0(r, v, \theta) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{1}{e}\left(\frac{p}{r} - 1\right)\right) & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{1}{e}\left(\frac{p}{r} - 1\right)\right) & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases}$$

Il existe donc une relation de bijection entre tout 3-uplet  $(p, e, \Omega)$  et  $(r, v, \theta)$  définissant les ca-

ractéristiques de l'ellipse ainsi que la position de la particule sur celle-ci. Nous obtenons l'expression finale pour la fonction de distribution, corrigée comparé à celle de Richter et al. (1979) :

$$f_s(r, v, \theta) = \frac{\sqrt{\frac{p^3}{GM}} \int_{\Omega_0}^{\Omega_0+2\pi} \frac{P^+}{(1 + e \cos \Omega)^2} \exp \left( \sqrt{\frac{p^3}{GM}} \int_{\Omega_0}^{\Omega} \frac{L_s}{(1 + e \cos \Omega')^2} d\Omega' \right) d\Omega}{\exp \left( \sqrt{\frac{p^3}{GM}} \int_{\Omega_0}^{\Omega_0+2\pi} \frac{L_s}{(1 + e \cos \Omega')^2} d\Omega' \right) - 1} \quad (\text{II.30})$$

Nous pourrions dorénavant utiliser cette formulation de la fonction de distribution pour l'expression II.27.

## B.4 Les processus de production et de pertes pour les particules satellites

Plusieurs mécanismes sont à l'origine de la production (et de la perte) de particules satellites. Il y a les collisions élastiques - dans l'approximation des sphères rigides - ou inélastiques.

Parmi les collisions inélastiques à l'origine de la production de particules satellites (d'espèce  $X$ ), il y a l'échange de charge entre les ions  $X^+$  et les espèces neutres présentes dans l'exosphère. Dans le cas de la Terre, les protons  $H^+$  peuvent échanger leur charge avec l'hydrogène atomique  $H$  ou bien l'oxygène atomique  $O$  et devenir à leur tour un atome d'hydrogène et, éventuellement, un atome d'hydrogène satellite ( $H$ -satellite).

Un second processus de production par collisions élastiques (détaillé en B.4.b) rentre en jeu dans tous les cas de figure : la production à partir des particules balistiques. Une particule balistique peut quitter l'exobase sur une trajectoire balistique pour rejoindre une certaine altitude puis, en supposant une collision purement élastique (afin d'éviter une conversion de l'énergie) et le cas sphère rigide (pour supposer une section efficace constante), voit sa trajectoire modifiée : elle conserve son énergie mécanique négative mais son moment cinétique est modifié de telle façon que son périapse se retrouve au-dessus de l'exobase. La particule balistique devient satellite via ce mécanisme, car, rappelons-le, les particules satellites et balistiques ont la même gamme d'énergie mécanique mais une position du périapse différente.

---

N.B : il peut être plus adéquat de remplacer le dénominateur  $\exp(x) - 1$  par  $2 \sinh(x/2) \exp(x/2)$  pour des raisons numériques. Dans le cas où le terme dans l'exponentiel est inférieur à la précision de la machine, nous avons d'abord l'opération  $\exp(x) \sim 1$  (puisque l'erreur ne pourra être contenue dans les décimales suivant la virgule), le dénominateur sera alors nul une fois 1 soustrait et  $f_s$  sera un NaN. Par contre, pour le deuxième choix,  $\exp(x/2) \sim 1$  mais  $\sinh(x/2) \sim x/2$  (numériquement, les fonctions prédéfinies sont construites grâce à un développement limité et la machine n'aura d'autre choix que de commencer à l'ordre 1 ici), le dénominateur sera  $x$  (le vrai développement limité de  $\exp(x) - 1$ ).

### B.4.a Les taux de productions et de pertes

La contribution des collisions inélastiques par échange de charge en termes de production pour les particules satellites est donnée par :

$$P_k^+ = \sigma_{ij} w_{ij} N_i f_j (m^{-6} . s^2) \quad (\text{II.31})$$

avec  $\sigma_{ij}$  la section efficace de la réaction (supposée constante et non dépendante de l'énergie),  $w_{ij}$  la vitesse relative entre les espèces  $i$  et  $j$ ,  $N_i$  la densité de l'espèce neutre  $i$  et  $f_j$  la fonction de distribution de l'espèce chargée  $j$  capable de devenir satellite (par exemple, un proton).

Le taux net de perte de particule satellite (tenant compte des collisions élastiques et inélastiques et de la photo-ionisation) est :

$$L_s(r, v) = \sum_j \sigma_{sj} w_{sj} n_j + L_{ion} \quad (\text{II.32})$$

avec  $L_{ion}$  le taux de photo-ionisation ( $s^{-1}$ ) et  $\sigma_{sj}$  la section efficace de la réaction entre la particule satellite et l'espèce  $j$ .

### B.4.b La production de particules satellites à partir des particules candidates

La principale contribution en termes de production de particules satellites, hors réactions d'échange de charge, consiste en des collisions élastiques entre des particules balistiques dites « candidates » et d'autres particules balistiques. Les particules « candidates », ou encore « candidates satellites », sont des particules balistiques provenant de l'exobase supposées ne subir aucune collision lors de son trajet jusqu'à la distance  $r$ . Arrivées à la distance  $r$ , elles subissent une collision pour devenir potentiellement une particule satellite si elle acquiert le moment cinétique adéquat. La fonction de distribution de ces particules balistiques, « candidates » pour devenir satellites, est dénotée  $f_0$  (l'indice 0 fait référence à leur caractère « candidate »).

La probabilité pour une particule balistique venant de l'exobase d'atteindre la distance  $r$  sans collisions est

$$\exp \left( -\sqrt{\frac{p^3}{GM}} \int_{\Omega_{exo}}^{\Omega_0} \frac{L_s}{(1 + e \cos \Omega')^2} d\Omega' \right) \quad (\text{II.33})$$

avec

$$\Omega_{exo}(r, v, \theta) = \arccos \left( \frac{1}{e} \left( \frac{p}{r_{exo}} - 1 \right) \right) \quad (\text{II.34})$$

Le terme dans l'exponentielle représente le nombre de collisions que subit la particule « candidate » entre l'exobase et la distance  $r$  le long d'une trajectoire elliptique. Il s'agit du même terme de perte que pour les particules satellites : les particules candidates et satellites sont de même nature, soumises aux mêmes réactions de perte mais occupent des places différentes dans l'espace des phases. La fonction de distribution  $f_0$  résulte finalement du produit entre la fonction de distribution des particules balistiques à l'exobase, supposée maxwellienne, avec la probabilité de rejoindre la

distance  $r$  :

$$f_0(r, v, \theta) = f_{exo}(r_{exo}, v_{exo}, T_{exo}) \exp \left( -\sqrt{\frac{p^3}{GM}} \int_{\Omega_{exo}}^{\Omega_0} \frac{L_s}{(1 + e \cos \Omega')^2} d\Omega' \right) \quad (\text{II.35})$$

Par contre, la fonction de distribution  $f_0$  n'est pas définie  $\forall \theta$ . Nous pouvons distinguer deux types de particules « candidates » selon les valeurs de  $\theta$ . Tout d'abord, il y a les particules balistiques montantes provenant directement de l'exobase, et qui ne sont donc pas passées par leur apoapse. Leur fonction de distribution est notée  $f_0^+$ . L'angle  $\theta$  est compris entre 0 et  $\theta_c$ . Ensuite, il y a les particules balistiques descendantes qui ont atteint leur apoapse, sans dépasser  $R_{lim}$ , retombant vers la planète et subissant une collision à la distance  $r$  avant qu'elles ne puissent atteindre l'exobase. Leur fonction de distribution est notée  $f_0^-$  et l'angle  $\theta$  est compris entre  $\pi - \min(\theta_c, \theta_l)$  et  $\pi - \theta_c$ . La densité des particules « candidates » à la distance  $r$  est donnée par :

$$N_0(r) = 2\pi \int_{v_{min}}^{v_{max}} v^2 \left( \int_0^{\theta_c} f_0^+ \sin \theta d\theta + \int_{\pi-\theta_c}^{\pi-\min(\theta_c, \theta_l)} f_0^- \sin \theta d\theta \right) dv = N_{upward}(r) + N_{downward}(r) \quad (\text{II.36})$$

où  $N_{upward}(r)$  correspond à la densité de particules « candidates » se dirigeant vers le haut et  $N_{downward}(r)$  pour les particules se dirigeant vers le bas.

Comparé à Richter, nous avons décidé de réduire le domaine d'intégration aux vitesses pour les particules « candidates ». En effet, il était suggéré d'effectuer l'intégration de 0 à  $v_{esc}$ , or, si la particule n'a pas une vitesse suffisante, quel que soit le moment cinétique qu'elle aura, même après une collision sans transfert d'énergie, son périapse sera toujours en-dessous de l'exobase et elle restera balistique. Par contre, si sa vitesse est bien trop élevé, elle sortira de l'exosphère. Il faut donc intégrer de  $v_{min}(r)$  à  $v_{max}(r)$  et non de 0 à  $v_{esc}$  comme préconisé par Richter et al. (1979).

Une fois la densité de particules « candidates » établie, il ne reste plus qu'à déterminer le taux de production associé, production due aux collisions élastiques entre les particules « candidates » et les autres espèces  $j$  :

$$P_1^+(r, v) = \sum_j \sigma_{0j}(h.s.) w_{0j} n_j \frac{\int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\theta_c} f_0^+ \sin \theta d\theta + \int_{\pi-\theta_c}^{\pi-\min(\theta_c, \theta_l)} f_0^- \sin \theta d\theta \right) d\phi}{4\pi} \quad (\text{II.37})$$

avec  $\sigma_{0j}(h.s.)$  la section efficace de collisions en supposant des sphères dures entre la particule « candidate » et l'espèce  $j$  (indépendante de  $\theta$ ),  $w_{0j}$  est la vitesse moyenne relative entre les deux espèces dépendante de  $v$  et  $n_j$  la densité de l'espèce  $j$ .

## B.5 Les vitesses relatives et les sections efficaces utilisées

Quelques hypothèses et approximations sont nécessaires pour notre étude, sans lesquelles il nous est impossible de résoudre l'équation de Boltzmann.

Concernant les particules « candidates » nous supposons qu'elles conservent leur énergie, leur

vitesse, au cours des collisions élastiques. Cette hypothèse nécessite de se limiter aux collisions avec des éléments plus lourds.

Pour ces espèces lourdes, nous utiliserons les densités fournies par les formules de Chamberlain (1963) en prenant compte les populations balistiques et en échappement. Leur fonction de distribution en vitesse sera supposée maxwellienne.

Avec cette dernière hypothèse, il est possible d'estimer la vitesse relative moyenne  $w_{ij}$  entre une espèce  $i$  se mouvant à une vitesse  $v$  et une espèce  $j$  suivant une loi maxwellienne pour sa distribution en vitesse. Cette valeur est donnée par Fahr and Weidner (1977) et Richter et al. (1979) :

$$\begin{aligned} w_{ij}(v) &= \int |\vec{v} - \vec{V}| f_j(\vec{V}) d\vec{V}^3 \\ &= \iiint V^2 \sqrt{v^2 + V^2 - 2vV \cos \theta} f_j(V) \sin \theta d\theta dV d\phi \\ &= \frac{U_j}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{U_j^2}\right) + v \left(1 + \frac{U_j^2}{2v^2}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{v}{U_j}\right) \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

avec  $U_j = (2k_B T/m_j)^{1/2}$  la vitesse thermique moyenne de l'espèce  $j$ .

La dernière grande inconnue du problème est la section efficace de collisions dans un modèle de sphères rigides. Peu de données sont disponibles et elles sont obtenues ou issues des valeurs expérimentales de viscosité à partir de la mécanique quantique et ne sont disponibles que pour les molécules neutres ou les gaz nobles. Le modèle le plus simple est une collision de sphères rigides entre l'espèce  $i$  de rayon  $r_i$  et une espèce  $j$  de rayon  $r_j$  (voir le tableau II.3) :

$$\sigma_{ij} = \pi(r_i + r_j)^2 \quad (\text{II.39})$$

$r_i$  correspond à la distance à laquelle le potentiel de Lennard-Jones pour l'espèce  $i$  s'annule. Les valeurs de rayon sont issues de Hirschfelder et al. (1954) et Reid et al. (1987).

## B.6 Description de l'algorithme

Toutes nos étapes de calcul amenant à la détermination de la densité des particules satellites peuvent se résumer sous la forme suivante, également montrée sur le schéma de la figure II.5 :

**Étape 1** : Calcul de la fonction de distribution des particules « candidates » (Eq. (II.35), un calcul d'intégrale)

**Étape 2** : Calcul du taux de production dépendant des particules « candidates » (Eq. (II.37)) et des taux totaux de production et de perte (Eq. (II.31) et (II.32))

**Étape 3** : Détermination de la fonction de distribution des particules satellites (Eq. (II.30), deux intégrales)

**Étape 4** : Calcul de la densité de particules satellites (Eq. (II.27), une intégrale)

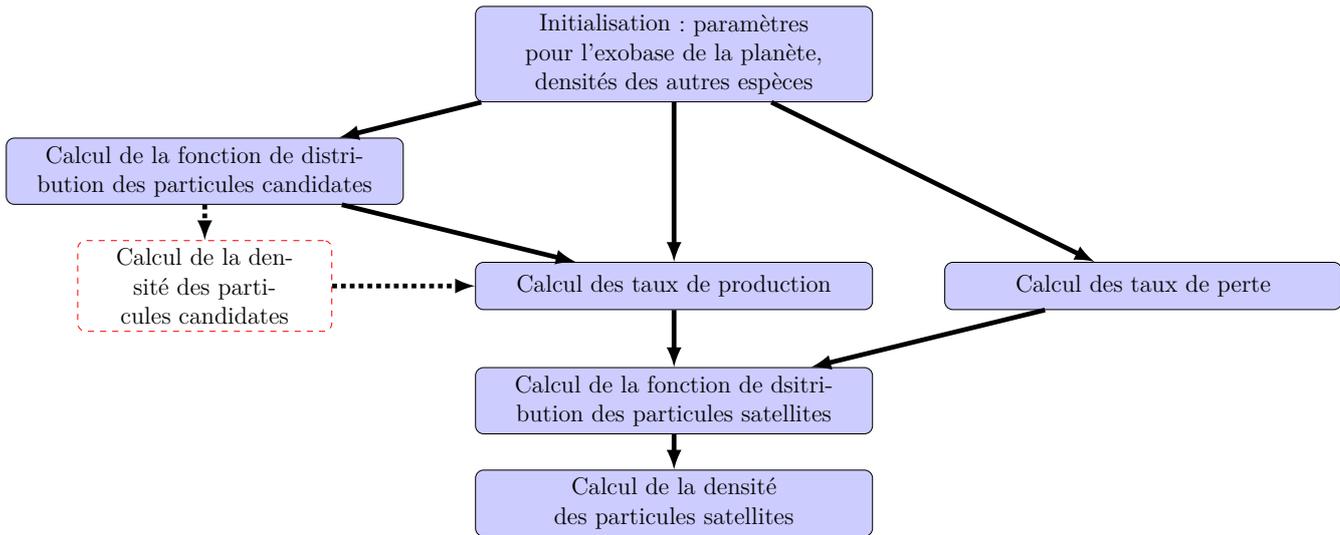


FIGURE II.5 – Algorithme pour le calcul des densités des particules satellites.

En ce qui concerne la méthode d'intégration numérique, nous avons décidé d'utiliser la méthode de Gauss-Legendre (détaillée dans l'annexe D). Celle-ci donne en effet un excellent compromis entre vitesse de calcul et précision numérique.

## C Application à l'hydrogène atomique sur Terre

### C.1 Validation du modèle : comparaison avec Richter et al. (1979)

Avant d'appliquer notre modèle à Titan et Mars, nous devons avant tout vérifier que nous retrouvons les mêmes résultats que Richter et al. (1979), dans les mêmes conditions avec les mêmes paramètres d'entrées. L'objectif de cette partie est de calculer la densité de particules  $H$ -satellites sur Terre entre l'exobase, située à 500 km d'altitude, et 3000 km d'altitude. Pour les paramètres d'entrées, nous avons choisi les densités d'oxygène et d'hydrogène atomiques fournies par CIRA (Jacchia (1977)) à 500 km d'altitude tandis que les données pour les ions (température, densité) ont été extraites à partir des figures de Richter et al. (1979). À partir de 3000 km, nous avons extrapolé les densités de  $O$ ,  $O^+$  et  $H^+$  à l'aide du formalisme de Chamberlain, ne tenant compte que des particules balistiques et en échappement. En plus des collisions élastiques entre  $H$  et  $O$ , les espèces majoritaires de l'exosphère terrestre, nous avons pris en compte quatre autres processus de perte et production :

---

production and loss :	elastic collision	$H + O$	$\rightarrow$	$H + O$
production and loss :	charge exchange	$H^+ + H$	$\rightarrow$	$H + H^+$
production :	charge exchange	$H^+ + O$	$\rightarrow$	$H + O^+$
loss :	charge exchange	$H + O^+$	$\rightarrow$	$H^+ + O$

---

ce qui implique les processus de production et perte suivants :

$$P_1^+ = \sigma_{HO} w_{HO} N_O \frac{\int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\theta_c} f_0^+ \sin \theta \, d\theta + \int_{\pi-\theta_c}^{\pi-\min(\theta_c, \theta_i)} f_0^- \sin \theta \, d\theta \right) \, d\phi}{4\pi}$$

$$P_2^+ = \sigma_{HH^+} w_{HH^+} N_{H_0} f_{H^+}$$

$$P_3^+ = \sigma_{H^+O} w_{H^+O} N_O f_{H^+}$$

$$P^- = -f_s (\sigma_{HH^+} w_{HH^+} N_{H^+} + \sigma_{HO} w_{HO} N_O + \sigma_{HO^+} w_{HO^+} N_{O^+} + L_{ion})$$

La figure II.6 montre la densité de  $H$ -candidates,  $H_0$ , ainsi que celle de  $H$ -satellites comparées aux valeurs de Richter et al. (1979) pour deux températures exosphériques (800 et 1200K), en fonction de l'activité solaire. Nous obtenons des profils de densité de  $H$ -satellites assez similaires à ceux de Richter et al. (1979) qui restent néanmoins négligeables devant la contribution des  $H$ -balistiques et en échappement combinées.

Cependant, des différences notables dans les valeurs de densité sont visibles par rapport aux résultats de Richter et al. (1979), en particulier pour une température à l'exobase de 800 K. Plusieurs explications peuvent être invoquées pour expliquer ces différences. Premièrement, le domaine d'intégration pour le calcul de la densité des  $H$ -candidates n'est pas exactement le même. Comme déjà évoqué précédemment, il est en effet à remarquer que dans l'article de Richter et al. (1979), le domaine d'intégration des vitesses est compris entre 0 et  $v_{esc}(r)$  alors que nous avons réduit ces limites à  $v_{min}(r)$  et  $v_{max}(r)$ . Sur la figure II.6, nous avons justement décidé de comparer sur notre modèle, l'impact éventuel de ce changement de domaine d'intégration (comparaison entre les candidates avec/sans corrections de notre modèle) sur la densité des  $H$ -candidates et non sur les  $H$ -satellites. À la vue des différences entre nos densités de  $H$ -satellites, il semble que ce domaine d'intégration en soit l'une des causes. De plus, Richter et al. (1979) ne fournit pas explicitement dans son article la densité d'hydrogène à l'exobase pour les deux activités solaires. À cela s'ajoute aussi l'absence d'information sur les profils de densité des autres espèces ( $H^+$ ,  $O$  et  $O^+$ ) pour n'importe quelle altitude. Les particules satellites se meuvent dans toute l'exosphère et peuvent être produites à tout moment sur leur trajectoire. Il faut donc une connaissance de tous les termes de production et de perte pour tout  $r$ . Les seules références données par Richter et al. (1979) sont : la référence ionosphérique de Rawer et al. (1975) et le modèle analytique de Raitt et al. (1975) qui cependant ne fournissent pas explicitement les profils nécessaires à notre modélisation.

Cette partie avait pour but de valider ou non notre approche ainsi que la fiabilité de notre modèle en comparant nos résultats avec ceux de Richter et al. (1979). Au vu des faibles écarts en-dessous de 3000 km d'altitude, des quelques erreurs ou approximations présentes dans l'article de Richter et al.

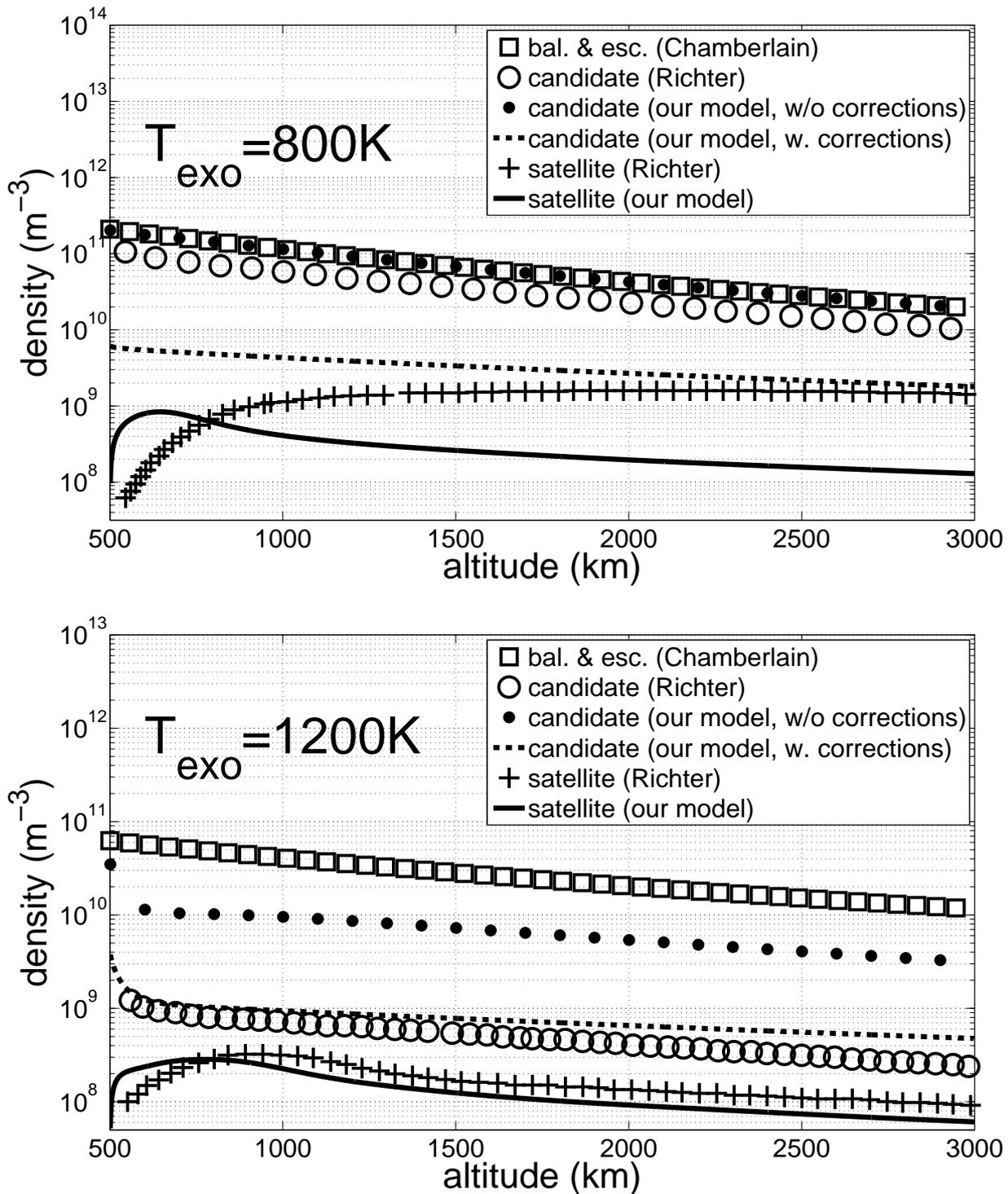


FIGURE II.6 – Profils de densités des  $H$ -candidates et  $H$ -satellites entre 500 et 3000 km d'altitude sur Terre pour deux activités solaires (en haut : faible activité,  $T_{exo} = 800 K$  ; en bas : forte activité,  $T_{exo} = 1200 K$ ). Le profil originale de Richter et al. (1979) (la densité de  $H$ -candidates représentée par les cercles, la densité  $H$ -satellites par la ligne composée de croix) sont comparées aux densités de  $H$ -candidates avec le même domaine d'intégration que Richter et al. (1979) (pointillés, confondus avec les carrés sur la première figure), la densité de  $H$ -candidates avec le domaine d'intégration corrigé (ligne tiretée), notre densité de  $H$ -satellites (trait plein) et la densité de  $H$ -balistiques et en échappement combinés (carrés) d'après le formalisme de Chamberlain.

(1979) qui nous ont poussé à utiliser des expressions corrigées, de la difficulté à connaître exactement les paramètres d'entrées de Richter et al. (1979) et peut-être des différences de capacités de calcul, nous considérons notre modèle validé.

## C.2 Comparaison à hautes altitudes

Nous avons réalisé un calcul à plus haute altitude pour savoir si la contribution des  $H$ -satellites restait petite (cf. figure II.7), en comparaison des densités des  $H$ -balistiques et en échappement.

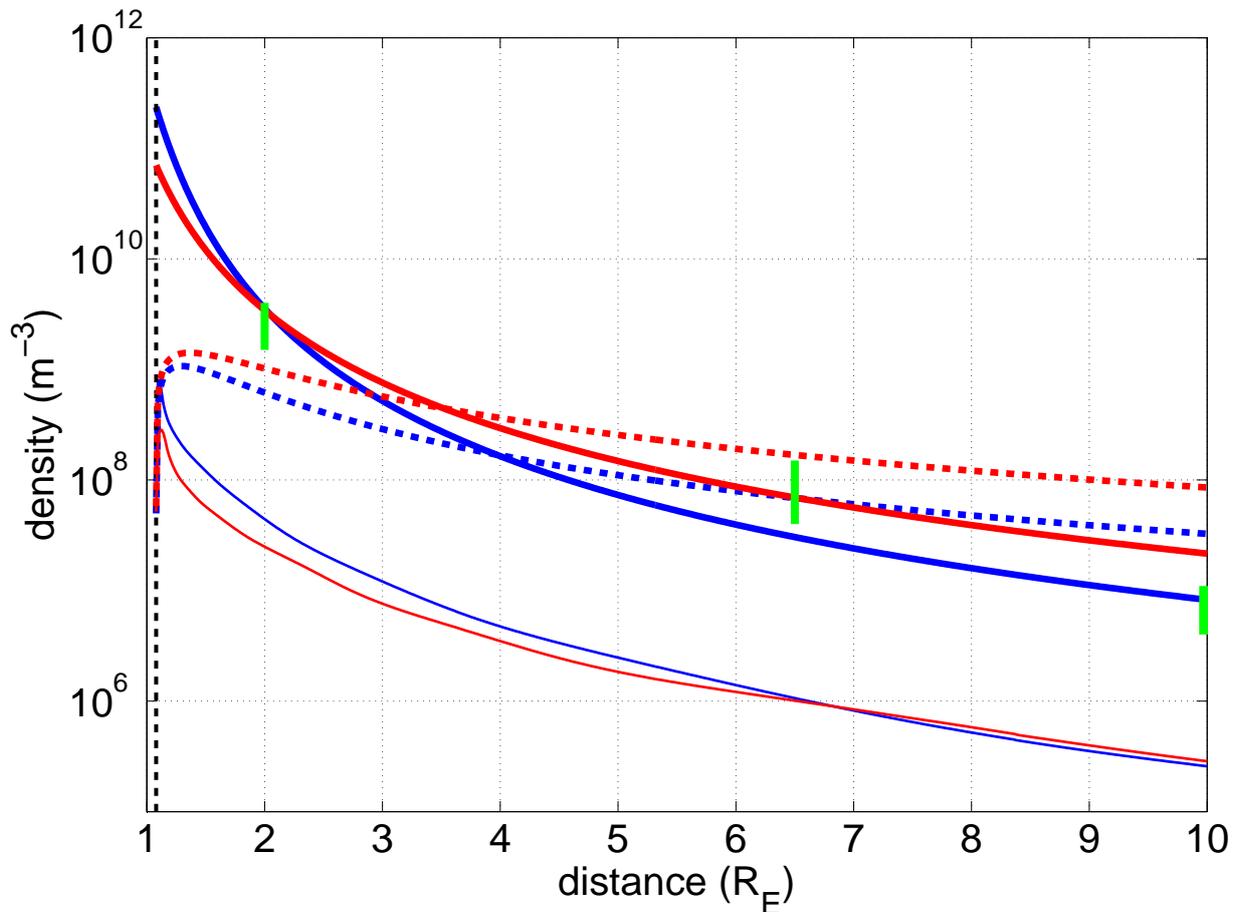


FIGURE II.7 – Profils de densité d'hydrogène de l'exosphère terrestre pour 800 K (bleu) et 1200 K (rouge). Nos profils de densités de  $H$ -satellite sont en traits fins. Les traits épais correspondent aux profils de densité issus du formalisme de Chamberlain pour les populations balistiques et en échappement. En trait pointillé, j'ai représenté le profil de satellites obtenu à partir de l'approximation  $\zeta_{sat}$  pour les deux températures. En vert sont représentées les gammes de valeurs fournies par les différents modèles référencés dans l'article de Ilie et al. (2013) (à 2 et 6,5  $R_E$ ) et les résultats obtenus par Fuselier et al. (2010) à partir des données IBEX (10  $R_E$ )

Nous observons qu'effectivement la densité de particules satellites obtenue à partir de notre modèle est très en-deçà de la densité de particules balistiques et en échappement. Nous avons un écart d'un facteur 100 pour une distance de 10 rayons terrestres du centre de la Terre. La densité de particules satellites est donc a priori négligeable avec notre modèle à haute altitude.

Comme évoquée dans la partie introductive (partie C.2.c) et discuté en détail plus tard (partie D.3.a), Zoennchen et al. (2011) ont montré la présence d'une asymétrie dans la densité d'hydrogène entre les côtés lever et coucher de Soleil pour des altitudes comprises entre 4 et 8 rayons terrestres. Les auteurs attribuent cette asymétrie à la possible présence de particules satellites, mais notre modèle 1D suggère qu'une autre interprétation est nécessaire pour rendre compte de telles asymétries.

Plusieurs auteurs fournissent des profils de densité d'hydrogène ajustés aux données à hautes altitudes. Ces modèles se basent sur une forme du même type que le formalisme de Chamberlain ou encore sur un ajustement à l'aide d'harmoniques sphériques, et ce jusque 10 rayons terrestres en utilisant par exemple les relevés d'émission de raies Lyman- $\alpha$  (Rairden et al. (1986), Østgaard et al. (2003), Fuselier et al. (2010), Bailey and Gruntman, Zoennchen et al. (2011)). Il est toutefois difficile de conclure sur la densité réelle de particules satellites, d'autant que les densités satellites obtenues, d'après notre modèle, sont inférieures aux différences entre les valeurs de densité fournies par ces différents auteurs.

Par ailleurs, il est important de rappeler une limite importante de notre modèle, qui nécessite de prendre avec précaution nos résultats terrestres à hautes altitudes : le modèle n'inclut pas l'effet de la pression de radiation solaire, qui, comme détaillé dans la deuxième partie de notre thèse, peut significativement influencer la structure de l'exosphère terrestre, en particulier à très haute altitude où la pression de radiation peut dominer la gravité terrestre.

## D Application au dihydrogène sur Titan

### D.1 Introduction

Titan est connue pour son atmosphère dense et épaisse (avec une exobase située au-delà de 1400 km d'altitude, Johnson et al. (2008), Waite et al. (2013)). Plusieurs modèles de photochimie (nous citerons par exemple Toubanc et al. (1995), Krasnopolsky (2002), Krasnopolsky (2009), Krasnopolsky (2010)) fournissent les densités des différentes espèces jusqu'à l'exobase, là où ces mêmes modèles deviennent inadéquates surtout pour les espèces légères comme  $H$  ou  $H_2$ . Ces espèces sont les plus pertinentes comme sujet d'étude des particules satellites car elles peuvent facilement s'extraire de l'exobase, atteindre les hautes altitudes, et subir des collisions avec des espèces plus lourdes qu'elles (voir aussi la section G et la figure II.19). Dans cette partie, nous décidons d'appliquer notre modèle, précédemment validé, au dihydrogène de Titan ; c'est une espèce dominante dans la couronne de Titan et la plus importante au-delà de 2000 km d'altitude environ, (Cui et al. (2008)) et elle est relativement légère comparée aux deux autres espèces dominantes : le méthane  $CH_4$  et le diazote  $N_2$ . Au vu du rapport de masse entre  $H_2$  et ces espèces, nous pouvons nous placer dans l'approximation où  $H_2$  conserve sa vitesse après une collision élastique avec  $N_2$  ou  $CH_4$ , ce qui nous permet donc d'utiliser notre modèle.

Nous avons décidé de prendre trois séries de conditions à l'exobase pour notre modèle (listées dans le tableau II.3) afin de visualiser l'impact de conditions limites diverses à l'exobase (altitude de l'exobase et densités). Pour nos deux premiers cas, nous avons utilisé comme entrées les densités données par Cui et al. (2008) pour  $H_2$  et Tucker et al. (2013) pour  $N_2$  et  $CH_4$ . L'exobase pour le premier cas (figure II.8.a) est fixée à 1600 km d'altitude et à 1500 km (figure II.8.b) pour le second. La hauteur de l'exobase est déterminée à partir du profil de densité de l'espèce majoritaire ( $N_2$  sur Titan). Celle-ci varie au cours des survols de la lune par la sonde Cassini et n'est pas, théoriquement, la même pour toutes les espèces (plus haute pour les espèces légères) (Cui et al. (2008)). Cette variation de la hauteur de l'exobase et son effet sur la modélisation des particules satellites seront abordés dans les sections 6 et 7. Pour prolonger les valeurs de densité de  $N_2$  et  $CH_4$  de 1500 km à 1600 km, nous avons appliqué une loi barométrique (ce qui implique une très forte diminution de  $N_2$  et  $CH_4$  due à leur très grande échelle de pression) et non pas un profil de type Chamberlain, puisque qu'il engendre une discontinuité plus importante pour les espèces légères (il ne tient pas compte des particules en échappement entrantes, et si nous voulons toujours appliquer une distribution maxwellienne, il faut utiliser la loi barométrique). La température de l'exosphère est fixée à 151.2 K (Cui et al. (2008)). Pour le troisième cas, nous avons pris les densités obtenues à partir d'une version mise à jour du modèle de Toubanc et al. (1995), avec une exobase placée à 1500 km d'altitude et la même température exosphérique. Via ce cas, nous pourrions rendre compte de l'influence des densités à l'exobase sur l'évolution de la densité des particules satellites. Le premier cas sera considéré comme le cas de référence.

Species	$H_2$	$N_2$	$CH_4$
Radius (Å)	2,9	3,7	3,8
Model 1 $z_c = 1500 \text{ km}$			
$N_{exo}(m^{-3})$	4,34.10 <sup>11</sup>	8,68.10 <sup>12</sup>	1,41.10 <sup>12</sup>
$\lambda_c$	3,51	48,80	27,94
Model 2 $z_c = 1600 \text{ km}$			
$N_{exo}(m^{-3})$	3,89.10 <sup>11</sup>	2,67.10 <sup>12</sup>	7,19.10 <sup>11</sup>
$\lambda_c$	3,43	47,63	27,28
Model 3 $z_c = 1500 \text{ km}$			
$N_{exo}(m^{-3})$	4,88.10 <sup>11</sup>	2,90.10 <sup>13</sup>	4,25.10 <sup>12</sup>
$\lambda_c$	3,51	48,80	27,94

TABLE II.3 – Détails des paramètres d'entrée pour le modèle sur Titan avec le paramètre de Chamberlain  $\lambda_c = \lambda(r_{exo})$ . Les rayons réfèrent aux tailles des atomes ou molécules pour le calcul des sections efficaces (voir équation (II.39)). Le modèle 1 et le modèle 2 ont pour densités à l'exobase les valeurs données par Cui et al. (2008) et Tucker et al. (2013). Le modèle 3 prend en compte comme entrées les densités à l'exobase de la version mise à jour du modèle de Toubanc et al. (1995).

Notre modélisation ne tient compte que de l'interaction entre neutre-neutre pour la production de particules satellites. À l'exobase, la densité des ions ionosphériques est très en-deçà des densités

des espèces neutres au niveau de l'exobase (Toublanc et al. (1995)) comme dans la majorité des atmosphères à l'exobase. Nous n'avons donc pas modélisé les collisions neutres-ions comme l'échange de charge. De plus, nous avons choisi de modéliser le dihydrogène plutôt que l'hydrogène, puisqu'il est l'espèce majoritaire dans la couronne.

Pour modéliser correctement notre taux de perte, nous avons pris en compte les autres mécanismes annexes (photo-ionisation, photo-dissociation, impact électronique et échange de charge) à travers un terme de perte constant  $L_{loss}$ . Chaque mécanisme a sa propre échelle de temps (cf. table 2, Cui et al. (2008)). Nous avons additionner les taux de perte de tous ces mécanismes rassemblés sous le même terme constant  $L_{loss} = 7,57.10^{-9} \text{ s}^{-1}$ . À ce taux de perte constant, s'ajoute donc évidemment la perte due aux collisions avec les espèces lourdes.

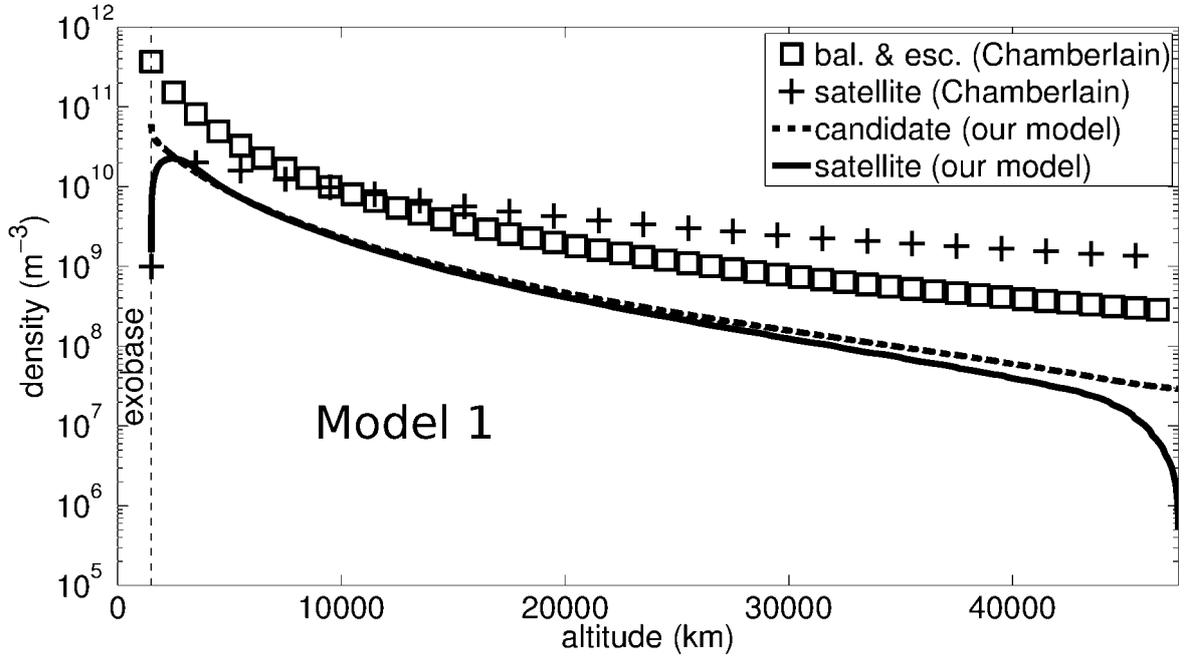
Nous proposons dans cette partie de modéliser, évaluer la densité de  $H_2$ -satellites dans l'exosphère de Titan puisque, d'une part, la plupart des modèles exosphériques (par exemple, celui de Cui et al. (2008)) sont non-collisionnels et, d'autre part, des travaux menés par Brandt et al. (2012) suggèrent que la population de  $H_2$ -satellites domine la haute exosphère de Titan.

## D.2 Profils de densité des particules $H_2$ -satellites dans l'exosphère de Titan

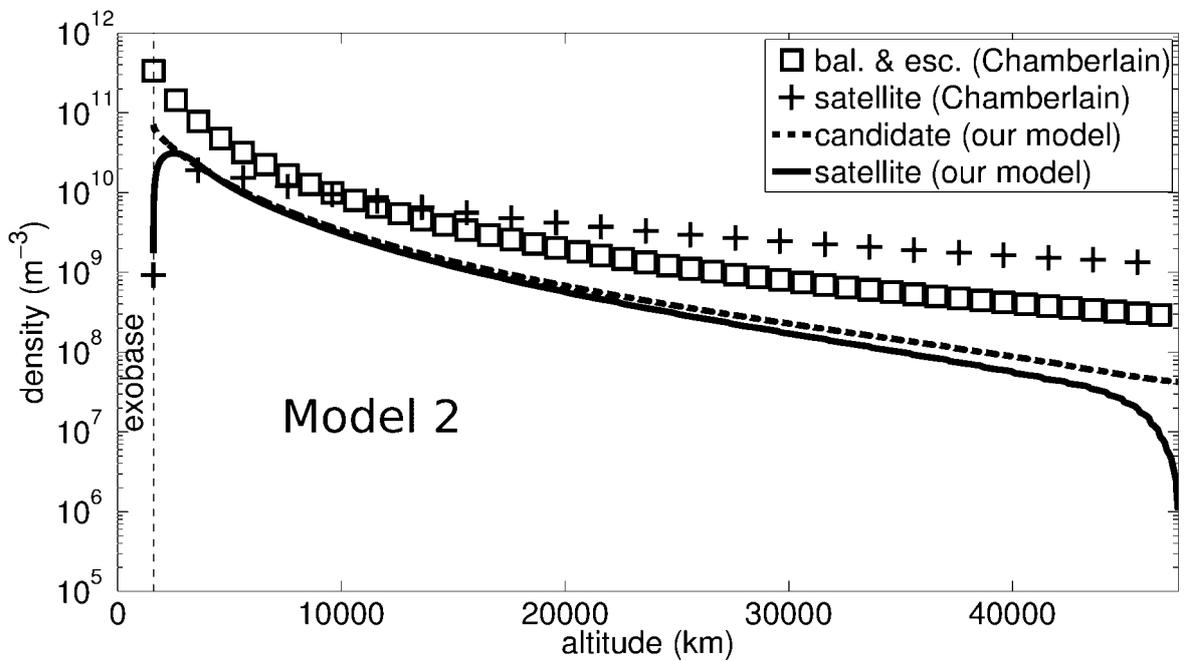
La figure II.8 montre l'ensemble de nos résultats pour les densités de  $H_2$ -satellites dans l'exosphère de Titan pour nos trois modèles (cf. table II.3). La figure fournit les profils jusqu'à la limite externe de l'exosphère de Titan, située à 50 000 km d'altitude et déterminée par le rayon de la sphère de Hill de Titan par rapport à Saturne.

Nous allons tout d'abord nous intéresser à la comparaison entre notre modèle et l'approximation de Chamberlain (1963), dont les profils sont également reportés sur la figure. Nous pouvons remarquer une différence de densité importante entre ces deux approches : nos densités de  $H_2$ -satellites sont toujours un voire deux ordres de grandeur inférieures à l'approximation de Chamberlain (1963). Nous savons déjà que cette approximation est incorrecte puisqu'elle se base sur le théorème de Liouville et la conservation de la fonction de distribution le long d'une trajectoire dynamique. Or il n'existe pas de trajectoire dynamique reliant une particule située à l'exobase et une particule satellite (ces deux situations sont contradictoires), rien n'affirme que la fonction de distribution des particules satellites soit maxwellienne, ce que Chamberlain (1963) affirme finalement dans son calcul. En se référant à l'approximation de Chamberlain (1963), la densité de  $H_2$ -satellites devrait dominer à partir de 8500 km (voir l'annexe B) alors que notre modélisation tend à montrer que cela ne peut arriver. Notre densité de  $H_2$ -satellites reste toujours inférieure, d'un facteur 4 à 10 (selon le modèle 1, 2 ou 3), à la densité de  $H_2$  balistiques et en échappement (voir aussi la section G).

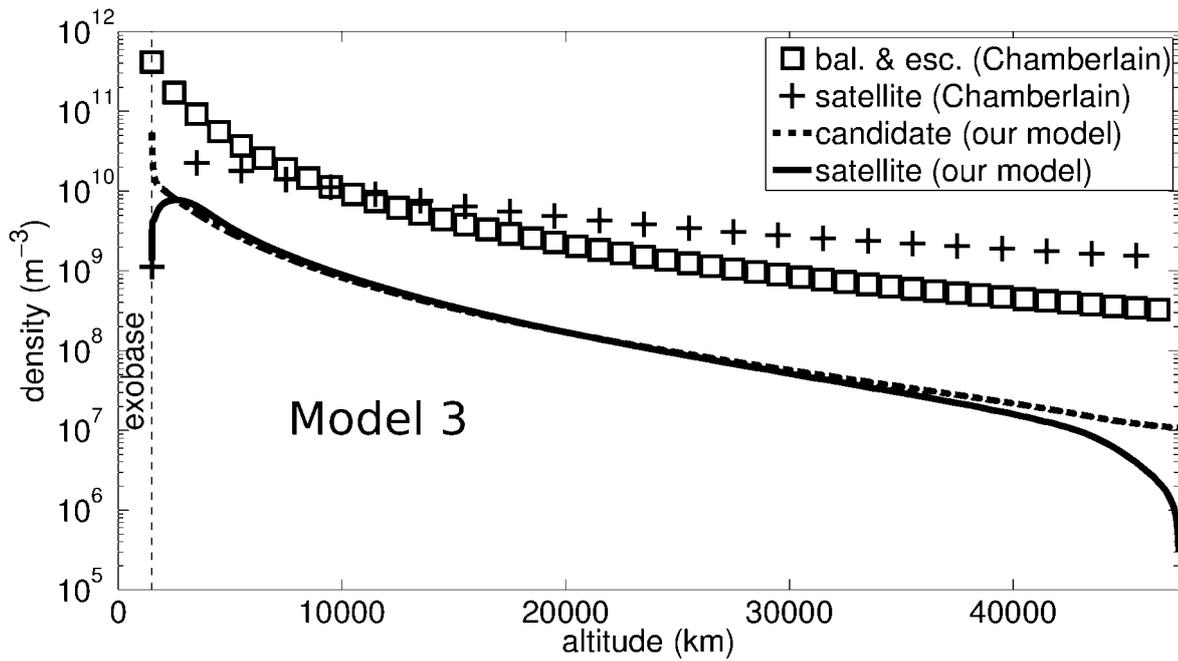
Dans une certaine région de la basse exosphère, sur la figure II.8a et c, la densité de  $H_2$ -satellites est supérieure à la densité de  $H_2$ -candidates. Cependant, toutes les collisions que subissent les  $H_2$ -



(a)



(b)



(c)

FIGURE II.8 – Tracés des densités de  $H_2$ -satellites avec notre modèle et densités issues du formalisme de Chamberlain (1963) : nos  $H_2$ -candidates (trait tireté), nos  $H_2$ -satellites (trait plein),  $H_2$ -balistiques et en échappement (carré) et satellites (trait pointillé) obtenues à partir du formalisme de Chamberlain (1963). La ligne tiretée verticale définit l'exobase. Les panneaux (a) et (b) correspondent au cas d'une exobase respectivement à 1500 km d'altitude (a) (modèle 1) et 1600 km d'altitude (b) (modèle 2), avec les densités données par Cui et al. (2008) et Tucker et al. (2013). Le panneau (c) (modèle 3) correspond au cas d'une exobase à 1500 km avec les densités fournies par une version mise à jour du modèle de Toublanc et al. (1995).

candidates ne produisent pas, forcément, des  $H_2$ -satellites. Cela peut sembler à priori contradictoire, en réalité cela signifie que toutes les  $H_2$ -satellites présentes à une distance  $r$  ne sont pas uniquement produites à partir des  $H_2$ -candidates à cette même distance  $r$ . Les  $H_2$  satellites proviennent en majorité des rares collisions subies par les  $H_2$  candidates à basse altitude, dans les quelques kilomètres au-dessus de l'exobase, puis rejoignent la haute exosphère le long d'une ellipse, trajectoire imposée simplement par la gravitation. Ce scénario probable peut être conforté par l'analyse des sources de production et de pertes, ainsi que par l'analyse du temps de vie des particules (cf. sections D.3 et D.5).

La différence entre nos trois modèles (1, 2 et 3) sera discutée plus loin (partie G.1) en terme d'importance des  $H_2$ -satellites par rapport aux autres populations, après une analyse globale des processus de sources/pertes, de l'espace des phases des particules satellites et de leur durée de vie.

### D.3 Les processus de production et de pertes

Dans cette partie, nous nous focalisons sur les processus de perte et de production et sur les régions de l'exosphère dans lesquelles ils se déroulent. Nous avons donc défini et déterminé deux nouvelles quantités :

- le périapse moyen qu'ont les  $H_2$ -satellites passant à la distance  $r$ , donné par :

$$\langle r_p(r) \rangle = \frac{\int_{v_{min}}^{v_{max}} \int_{\max(\theta_c, \theta_l)}^{\pi - \max(\theta_c, \theta_l)} \frac{p}{1+e} f_s v^2 \sin \theta \, dv \, d\theta}{\int_{v_{min}}^{v_{max}} \int_{\max(\theta_c, \theta_l)}^{\pi - \max(\theta_c, \theta_l)} f_s v^2 \sin \theta \, dv \, d\theta} \quad (\text{II.40})$$

- le rapport moyen entre les taux de production  $P^+$  et les taux de perte  $P^-$  :

$$\left\langle \frac{P^+}{P^-}(r) \right\rangle = \frac{\int_{v_{min}}^{v_{max}} \int_{\max(\theta_c, \theta_l)}^{\pi - \max(\theta_c, \theta_l)} \frac{P^+(r, v)}{P^-(r, v, \theta)} v^2 \sin \theta \, dv \, d\theta}{\int_{v_{min}}^{v_{max}} \int_{\max(\theta_c, \theta_l)}^{\pi - \max(\theta_c, \theta_l)} v^2 \sin \theta \, dv \, d\theta} \quad (\text{II.41})$$

La figure II.9 représente l'altitude moyenne du périapse des  $H_2$  satellites passant à l'altitude  $z = r - R_{Titan}$  ( $R_{Titan}$  est le rayon de Titan : 2575 km). Dans un premier temps, cette quantité croît avec l'altitude. En effet, les  $H_2$ -satellites présentes à basse altitude ont nécessairement un périapse plus proche de l'exobase que celles présentes à plus haute altitude.  $\langle r_p \rangle$  croît alors jusqu'à une valeur maximale ( $\sim 2500$  km) pour ensuite décroître lentement pour des altitudes croissantes vers une valeur stagnant autour de 2300 km. Il s'agit d'une information importante : les particules satellites présentes à haute altitude passent nécessairement aussi à basse altitude, près de l'exobase où elles sont donc produites grâce à de plus grandes probabilités de collisions pour les  $H_2$ -candidates.

Pour rendre compte justement de cette production à basse altitude, nous devons étudier le rapport de « force » entre la production et la destruction, dans l'espace des phases, des particules satellites. En-deçà de l'exobase, la fonction de distribution est supposée maxwellienne ; cette distribution est

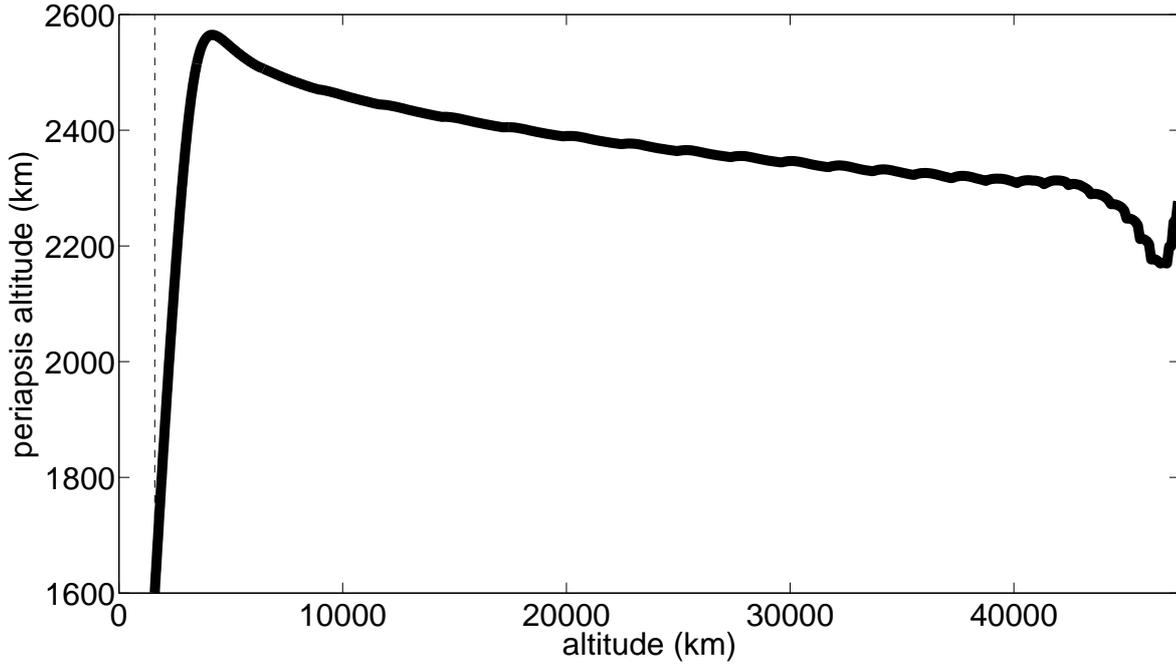


FIGURE II.9 – Altitude du périapse moyen des  $H_2$ -satellites en fonction de l'altitude où elles se situent sur Titan

isotrope, maximise l'entropie et ne dépend que de l'énergie cinétique. Il y a un équilibre thermodynamique local et les termes de production et perte s'annulent mutuellement. Au-delà de l'exobase, les rares collisions ne permettent plus de maximiser l'entropie, il n'y a plus d'équilibre thermodynamique local. Par contre, le long de la trajectoire d'une particule satellite c'est-à-dire une ellipse qui est une trajectoire fermée, nous avons dans le cas stationnaire :

$$\oint (P^+ + P^-) \frac{ds}{v_s} = f_s(r, v, \theta + 2\pi) - f_s(r, v, \theta) = 0 \quad (\text{II.42})$$

Il y a équilibre thermodynamique global. Pour que cette intégrale soit nulle, il existe forcément des zones où l'intégrande  $P^+ + P^-$  est positive (zone de production,  $|P^+/P^-| > 1$ ) et d'autres où elle est négative (zone de perte,  $|P^+/P^-| < 1$ ).

La figure II.10 permet de distinguer clairement ces deux régions :

- de quelques kilomètres au-dessus de l'exobase jusqu'à 14400 km d'altitude : les termes de production dominant, les  $H_2$ -satellites sont essentiellement produites dans cette région.
- au-delà de 14400 km d'altitude : les termes de perte, et principalement la photo-ionisation à très haute altitude, dominant. La fréquence des collisions élastiques diminue avec l'altitude, dû à la raréfaction des particules, tandis que les termes de perte se stabilisent autour d'une valeur constante imposée par la photo-ionisation (voir aussi la figure II.12 pour la durée de vie des  $H_2$ -satellites).

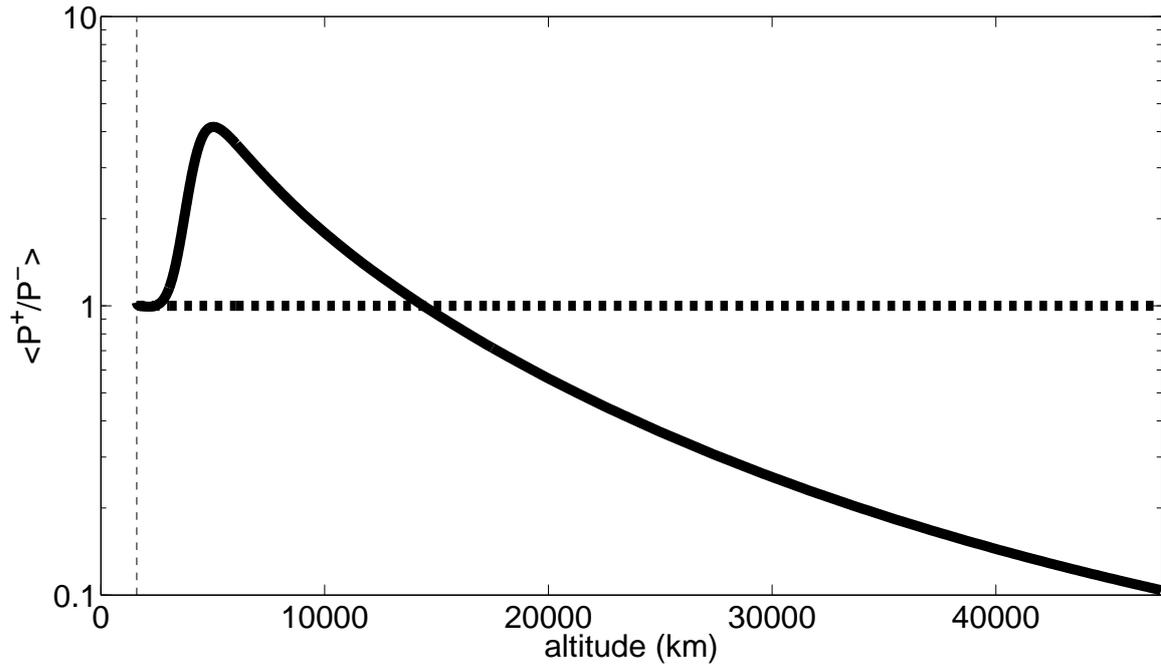


FIGURE II.10 – Rapport local moyen  $P^+/P^-$  par unité de volume de l'espace des phases et par unité de temps en fonction de l'altitude pour les  $H_2$ -satellites sur Titan.

Les indications apportées par l'étude des taux de production et de perte sont en accord avec les valeurs de la distance  $\langle r_p \rangle$  du périapse : les  $H_2$ -satellites sont produites dans la basse exosphère, puis atteignent les hautes altitudes, le long de trajectoires elliptiques, où elles sont détruites, les mécanismes de perte étant dominants. Le long de cette trajectoire, comme nous sommes dans le cas stationnaire, il y a équilibre globale entre production et perte.

#### D.4 Le volume de l'espace des phases

Il existe encore un paramètre important pour comprendre la production des particules satellites, établissant le lien entre les  $H_2$ -candidates et  $H_2$ -satellites : le volume d'espace des phases disponibles pour ces deux types de particules. Ces deux catégories de particules appartiennent à deux espaces distincts (même énergie, direction du vecteur vitesse différente) ayant des échanges au travers des rares collisions dans l'exosphère.

Par définition, le volume d'espace des phases est défini par l'ensemble de paramètres que peut avoir une particule.

Pour les particules candidates, en symétrie sphérique, cet ensemble  $V_{candidate}$  est :

$$\begin{aligned} V_{candidate}(r) &= \{(v, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 / \text{la particule est candidate}\} \\ &= [v_{min}(r), v_{max}(r)] \times \\ &\quad ([0; \theta_c(r, v)] \cup ([\pi - \theta_c(r, v); \pi - \min(\theta_c(r, v), \theta_l(r, v))]) \times \\ &\quad [0; 2\pi] \end{aligned}$$

et pour les particules satellites, l'ensemble  $V_{satellite}$  est :

$$\begin{aligned} V_{satellite}(r) &= \{(v, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 / \text{la particule est satellite}\} \\ &= [v_{min}(r), v_{max}(r)] \times \\ &\quad [\max(\theta_c(r, v), \theta_l(r, v)); \pi - \max(\theta_c(r, v), \theta_l(r, v))] \times \\ &\quad [0; 2\pi] \end{aligned}$$

$V_{candidate}$  correspond au volume d'espace des phases accessibles aux particules candidates. Il est plus restreint que celui des particules balistiques car la vitesse doit être comprise entre  $v_{min}$  et  $v_{max}$  en plus des restrictions sur les angles. Il est à comparer avec  $V_{satellite}$  car via l'intégrale de collisions dans l'équation de Boltzmann, les collisions élastiques vont être à l'origine d'un transfert dans l'espace des phases de  $V_{candidate}$  (auquel appartiennent les particules candidates) vers  $V_{satellite}$  (auquel appartiennent les particules satellites).

Le volume d'espace des phases associé (donné par  $\int_V d^3\vec{v}$ ) est représenté sur la figure II.11 pour les deux populations.

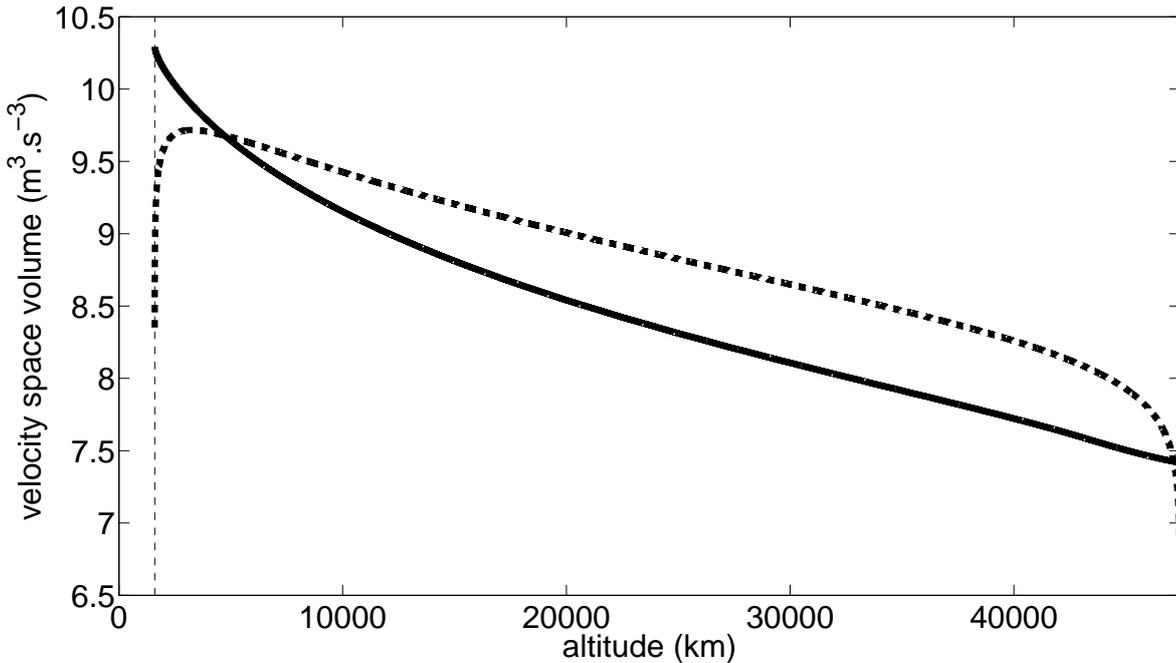


FIGURE II.11 – Tracé du volume d'espace des phases des vitesses pour les particules candidates (trait plein) et satellites (trait tireté) sur Titan

L'évolution de  $V_{satellite}$  se fait comme suit : à basse altitude, la vitesse des particules peut être

haute ( $v_{max}$  décroît avec l'altitude) mais le moment angulaire est limité (puisque  $max(\theta_c, \theta_l) \simeq \pi/2$  : l'intégration sur  $\theta$  est nulle  $\forall v$  et  $V_{satellite}$  est nulle). À haute altitude, le domaine d'intégration sur  $\theta$  est plus grand mais le domaine d'intégration sur les vitesses est plus petit. Dans l'optique d'atteindre les hautes altitudes, une particule a besoin d'avoir une vitesse suffisante à l'exobase (et donc une énergie mécanique élevée), mais comme la fonction de distribution est décroissante à haute énergie, la probabilité d'avoir une telle particule s'en trouve réduit.  $V_{satellite}$  décroît donc à haute altitude.

## D.5 La durée de vie moyenne des particules satellites

Un dernier élément permet de comprendre la dynamique des particules satellite : la durée de vie des particules et donc leur nombre de révolutions. La durée de vie moyenne  $\langle \tau_{mean} \rangle$  des particules passant à la distance  $r$  est :

$$\langle \tau_{mean}(r) \rangle = \frac{\int_{v_{min}}^{v_{max}} \int_{max(\theta_c, \theta_l)}^{\pi - max(\theta_c, \theta_l)} \frac{f_s}{L_s} v^2 \sin \theta \, dv \, d\theta}{\int_{v_{min}}^{v_{max}} \int_{max(\theta_c, \theta_l)}^{\pi - max(\theta_c, \theta_l)} f_s v^2 \sin \theta \, dv \, d\theta} \quad (\text{II.43})$$

La figure II.12 montre le temps de vie moyen des  $H_2$ -satellites passant à l'altitude  $z = r - R_{Titan}$  avec le taux net de perte  $L_s$  défini à partir de l'équation II.32. À basse altitude, près de l'exobase, les collisions restent nombreuses. Elles sont aussi bien à l'origine de la production que de la perte des  $H_2$ -satellites. Leur durée de vie s'en trouve réduite. Près de l'exobase, le nombre de Knudsen reste de l'ordre de 1, le libre parcours est encore faible. À haute altitude, la fréquence des collisions diminue, le nombre de Knudsen devient très grand devant 1, et le taux de perte tend vers la constante  $L_{ion}$ . En conséquence, la durée de vie moyenne tend vers :  $1/L_{loss} = 1,32 \cdot 10^8$  s (Cui et al. (2008)).

Sur la figure II.12, nous avons aussi tracé le nombre moyen de révolution des  $H_2$ -satellites situées à la distance  $r$  :

$$\langle N_r(r) \rangle = \frac{\int_{v_{min}}^{v_{max}} \int_{max(\theta_c, \theta_l)}^{\pi - max(\theta_c, \theta_l)} \frac{f_s}{T_{orb} L_s} v^2 \sin \theta \, dv \, d\theta}{\int_{v_{min}}^{v_{max}} \int_{max(\theta_c, \theta_l)}^{\pi - max(\theta_c, \theta_l)} f_s v^2 \sin \theta \, dv \, d\theta} \quad (\text{II.44})$$

avec la période donnée par la troisième loi de Kepler  $T_{orb}$  :

$$T_{orb}(r, v, \theta) = 2\pi \sqrt{\frac{p^3}{(1 - e^2)^3 GM}} \quad (\text{II.45})$$

Comme déjà évoqué précédemment, le nombre important de collisions près de l'exobase est à l'origine de la production des particules satellites. Par contre, la particule satellite tout juste produite ne va pas effectuer une révolution complète mais seulement 70 % de celle-ci en moyenne pour les particules situées à 500 km au-dessus de l'exobase. Finalement, le terme de « satellite » se réfère à une particule avec une trajectoire elliptique au-delà de l'exobase, même si la particule satellite ne va effectuer qu'une partie de la révolution. La fonction de distribution des particules satellites rend compte, à un instant  $t$ , du nombre de particule partageant la même ellipse.

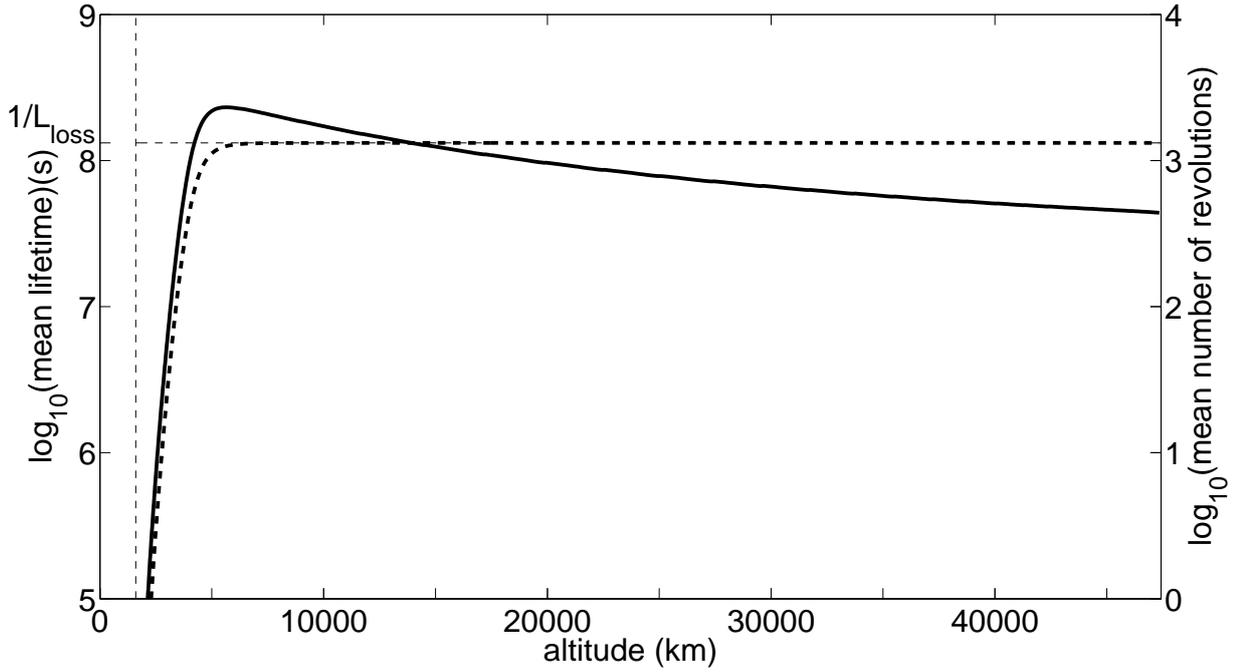


FIGURE II.12 – Durée de vie moyenne (trait tireté) et nombre moyen de révolutions (trait plein) pour les particules satellites passant à l'altitude  $z = r - R_{Titan}$  avec une échelle logarithmique en ordonnées.

Les  $H_2$ -satellites commencent à faire une révolution complète, en moyenne, dès qu'elles passent à 2140 km d'altitude. Au-delà, leur nombre de révolution commence à croître jusqu'à une limite de 4270 révolutions, avant de diminuer lentement avec l'altitude. À haute altitude, la perte est due à la photo-ionisation et, comme les orbites deviennent de plus en plus grandes et les révolutions longues, ce nombre moyen diminue.

## E Application à l'hydrogène atomique sur Mars

### E.1 Introduction

Dans cette partie, nous avons voulu aussi appliquer notre modèle à la planète Mars. L'atmosphère de Mars est très différente de Titan que ce soit par sa position dans le Système Solaire, sa composition, son épaisseur, sa pression, sa température et ses densités. Ces différents paramètres auront des impacts non négligeables sur la population de particules satellites dans la couronne martienne.

Si nous nous en référons à Krasnopolsky (2002), l'altitude de l'exobase martienne varie entre 190 km (pour une faible activité solaire) et 250 km (pour une forte activité solaire). Les espèces dominantes à l'exobase sont (par ordre d'importance) :  $CO_2$ ,  $O$ ,  $N_2$ ,  $CO$ ,  $Ar$  et  $H$ . L'hydrogène  $H$  étant l'espèce majeure dans la couronne martienne, en raison de sa grande échelle de hauteur, nous allons chercher à étudier la contribution des  $H$ -satellites aux densités exosphériques de l'hydrogène sur Mars.

Les mécanismes principaux pris en compte pour les sources et pertes de particules  $H$ -satellites

sont les collisions élastiques entre  $H$  et les autres espèces neutres (p. ex.  $CO_2$ ,  $O$  froid et chaud) qui sont de fait plus lourdes, en utilisant les mêmes sections efficaces que pour Titan (Hirschfelder et al. (1954)). Les densités des différentes espèces sont extraites des travaux de Krasnopolsky (2002) et Valeille (2009). Concernant la population d'oxygène chaud, nous avons modélisé son profil exosphérique à l'aide du formalisme de Chamberlain (1963), en ne prenant en compte que des particules en échappement et balistiques, avec une température  $T_{hot} = 4000K$  (Vaille (2009)). Deux conditions d'activité solaire sont considérées dans notre modèle, correspondant à des conditions différentes à l'exobase, détaillées respectivement dans les tables II.4 et II.5.

Les tables II.4 et II.5 listent tous nos paramètres d'entrées pour deux activités solaires distinctes.

Species	$H/H_2$	$He$	$CO_2$	$N_2$	$O$ cold/ $O$ hot	$CO$	$Ar$
$N_{exo}(m^{-3})$	$4,47.10^{11}$	$2,09.10^{11}$	$6,18.10^{13}$	$9,28.10^{12}$	$1,50.10^{13}/3,0.10^9$	$2,87.10^{12}$	$7,18.10^{11}$
$\lambda_c$	7,25/15,5	28,80	316,70	201,59	115,13/5,75	201,57	287,47
Radius (Å)	0,53/2,9	2,6	4,0	3,7	0,48	3,7	3,5

TABLE II.4 – Détail des paramètres d'entrée pour le modèle martien froid. Le  $\lambda_c = \lambda(r_{exo})$  est donné pour une température exosphérique de  $T_{exo} = 200$  K (faible activité solaire,  $T_{exo} = 4000$  K uniquement pour l'oxygène chaud) et une altitude de l'exobase de 190 km. Le rayon se rapporte à la taille des atomes ou des molécules pour le calcul des sections efficaces (équation (II.39)). Les densités proviennent de Krasnopolsky (2002) et Valeille (2009).

Species	$H/H_2$	$He$	$CO_2$	$N_2$	$O$ cold/ $O$ hot	$CO$	$Ar$
$N_{exo}(m^{-3})$	$2,82.10^{10}$	$1,07.10^{11}$	$1,46.10^{13}$	$3,12.10^{12}$	$1,37.10^{13}/1,0.10^{10}$	$1,97.10^{12}$	$2,04.10^{11}$
$\lambda_c$	4,07/8,14	16,18	177,99	113,29	64,7/5,66	113,28	161,56
Radius (Å)	0,53/2,9	2,6	4,0	3,7	0,48	3,7	3,5

TABLE II.5 – Détail des paramètres d'entrée pour le modèle martien chaud. Le  $\lambda_c = \lambda(r_{exo})$  est donné pour une température exosphérique de  $T_{exo} = 350$  K (forte activité solaire,  $T_{exo} = 4000$  K uniquement pour l'oxygène chaud) et une altitude de l'exobase de 250 km. Le rayon se rapporte à la taille des atomes ou des molécules pour le calcul des sections efficaces (équation (II.39)). Les densités proviennent de Krasnopolsky (2002) et Valeille (2009).

L'interaction complexe et asymétrique entre les composants de l'exosphère et le vent solaire (au-delà du choc, localisé à 2000 km d'altitude côté jour ; cf. Edberg et al. (2009), Trotignon et al. (2006) et Shirley and Fairbridge (1997)) ou le plasma de la magnétogaine (au-delà de la frontière d'empilement magnétique, située approximativement à 1000 km d'altitude du côté jour, cf. les mêmes références) ne peut être prise en compte de manière détaillée dans notre modèle.

Puisqu'il s'agit uniquement d'un modèle 1D, il n'est pas possible de prendre en compte les variations des termes de production et de perte, en longitude ou en latitude, liées justement à la géométrie du choc ou de la frontière d'empilement magnétique. Afin de pallier ce défaut de notre modèle, nous

avons considéré trois cas de figure :

- Le premier cas (aucune interaction) ne prend en compte que la photo-ionisation donnée par Modolo et al. (2005) :  $L_{ion} = 2.4 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$  pour une faible activité solaire et  $L_{ion} = 4.28 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$  pour une forte activité solaire ; ce cas présente le taux de perte le plus faible et correspond à des conditions rencontrées par les particules satellites en-deçà de la frontière d'empilement magnétique.
- Dans un second cas (interaction avec le vent solaire), nous avons rajouté à la photo-ionisation le taux de perte dû à l'ionisation par impact électronique ( $L_{e^-} = 0.76 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$ , Modolo et al. (2005)) et l'interaction avec les protons du vent solaire. Nous avons supposé une densité constante de protons ( $2 \text{ cm}^{-3}$ , Modolo et al. (2005)) dans toute l'exosphère et pris la section efficace de Killian et al. (2004) pour une vitesse moyenne du vent solaire de  $400 \text{ km.s}^{-1}$ . C'est notre cas intermédiaire.
- Dans le dernier cas (interaction avec le vent solaire et la magnétogaine), nous avons rajouté au précédent l'échange de charge avec les protons de la magnétogaine considérés avec une densité constante de  $8 \text{ cm}^{-3}$  (Modolo et al. (2005)). C'est le cas présentant le taux de perte pour les particules satellites le plus important.

Aucun des cas décrits ci-dessus n'est un cas réel. Par contre, ils constituent des limites et des cas extrêmes dans la modélisation des taux de perte des particules satellites et donc de leurs densités. En théorie, toute particule satellite est capable de se trouver dans l'un de ces environnements voire plusieurs selon ses paramètres orbitaux : distance du périapse, taille du demi-grand axe, inclinaison, position du nœud ascendant (ces deux derniers paramètres ne peuvent exister que dans le cas 3D).

## E.2 L'exosphère martienne froide

Dans cette partie, nous traitons le cas de l'exosphère martienne froide, avec une température exosphérique de 200 K pour une faible activité solaire.

Sur la figure II.13 sont représentés les différents profils de densité. Comme pour le cas de la Terre et Titan, la densité de particules satellites ne domine pas la population de particules balistiques et en échappement, même si leur contribution n'est pas tout à fait négligeable. Nos simulations ont montré que les différences entre les trois modèles d'interaction n'impactent que peu les densités des candidates (courbes confondues, donc une seule a été gardée) mais impactent significativement celles des particules satellites, jusqu'à un facteur 2 de variabilité.

Sur la figure II.14, nous avons de nouveau tracé, comme dans le cas de Titan, le ratio moyen entre les taux de production et de perte des  $H$ -satellites. Nous observons clairement la prédominance

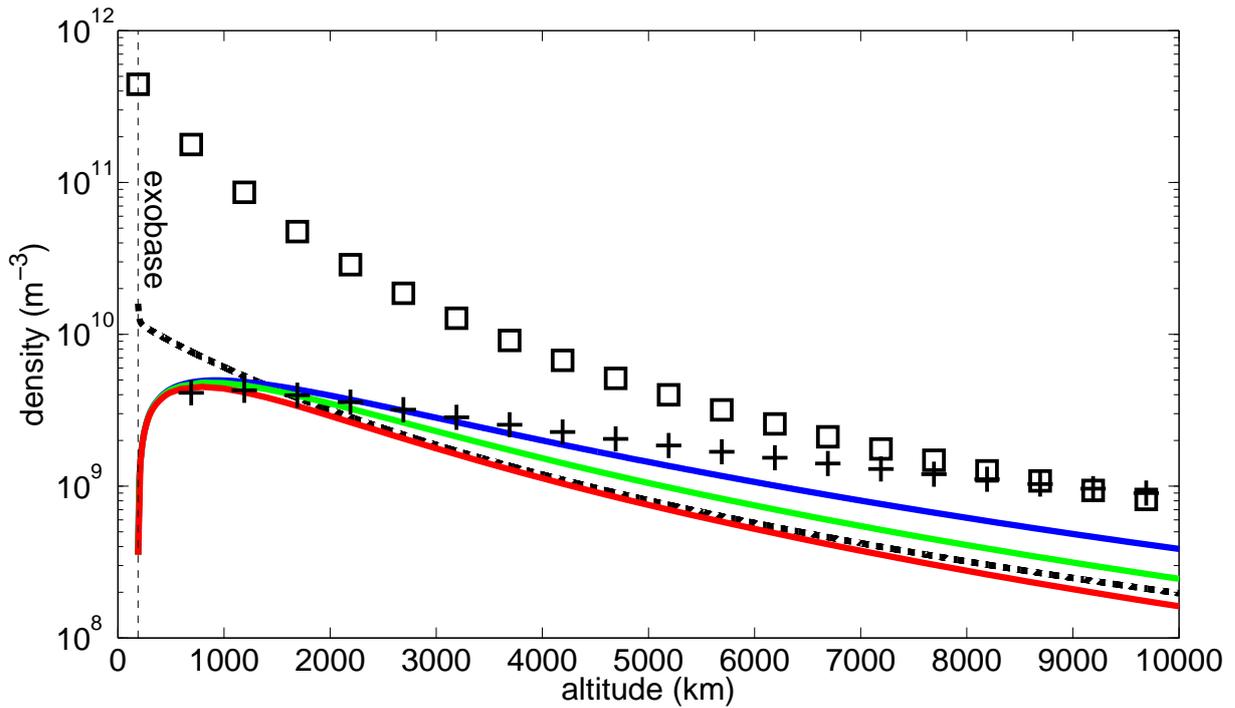


FIGURE II.13 – Profils de densité d’hydrogène atomique dans l’exosphère martienne pour  $T_{exo} = 200\text{ K}$  et  $h_{exo} = 190\text{ km}$  (faible activité solaire) : densités de  $H$ -candidates (trait pointillé) et de  $H$ -satellites (trait plein), contribution des  $H$ -balistiques et en échappement (carré) et comparaison avec la densité de  $H$ -satellites (croix) issues de l’approximation de Chamberlain. Trois cas ont été pris en compte pour les taux de perte : sans interaction avec le plasma (bleu), interaction avec le plasma du vent solaire (vert), interaction avec les plasmas de la magnétogaine et du vent solaire (rouge).

des taux de production dans la basse exosphère (ratio supérieur à 1), en particulier pour le cas de faibles taux de perte (bleu), puis une décroissance à plus haute altitude de ce ratio. Nous remarquons aussi un décalage du maximum du ratio moyen, situé à plus haute altitude pour des taux de perte plus importants. Comme les termes de pertes sont plus importants (principalement à haute altitude) et qu’il faut nécessairement un équilibre des productions et des pertes le long de la trajectoire (voir équation (II.42)), la zone de production (avec un ratio supérieur à 1) s’étale en altitude pour justement conserver cet équilibre sur une révolution.

### E.3 L’exosphère martienne chaude

Nous avons étudié de la même façon le cas de pour une exosphère de Mars plus « chaude » avec une température exosphérique de 350 K pour une forte activité solaire.

Sur la figure II.15, la différence entre la densité de  $H$ -candidates et  $H$ -satellites est bien moindre dans le cas de l’exosphère chaude. L’explication est la suivante : la température exosphérique plus élevée favorise la production de  $H$ -satellites (les fréquences de collisions sont accrues car c’est une fonction croissante de la température), il y a donc un nombre plus important de  $H$ -candidates qui deviennent satellites, quelle que soit l’altitude. De même, l’écart est aussi moindre entre les densités de  $H$ -satellites issues de notre modèle et celles des  $H$ -balistiques et en échappement combinées issues du formalisme de Chamberlain. Ceci indique que les  $H$ -satellites peuvent contribuer de manière

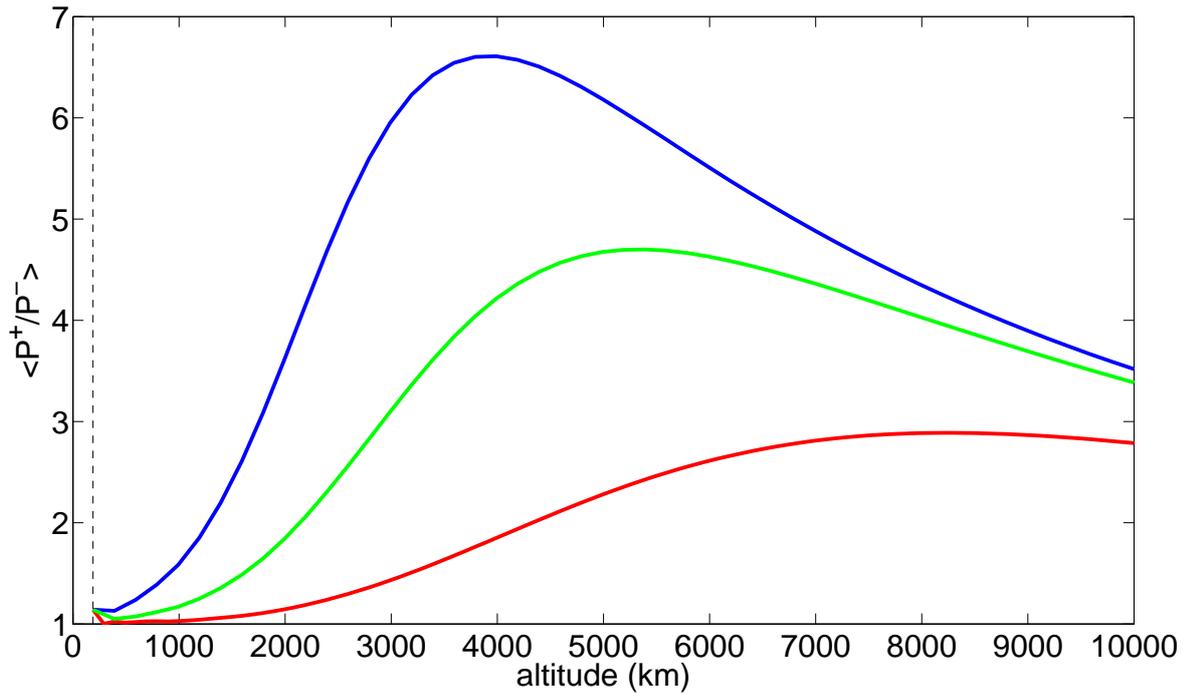


FIGURE II.14 – Ratio moyen entre les taux de production et de perte des  $H$ -satellites sur Mars, dans le cas de l'exosphère froide, en fonction de l'altitude. Les trois couleurs correspondent à nouveau aux différentes conditions d'interactions plasma. Les profils ne passent en-deça de 1 suggérant que la zone de perte se situe au-delà de 10000 km.

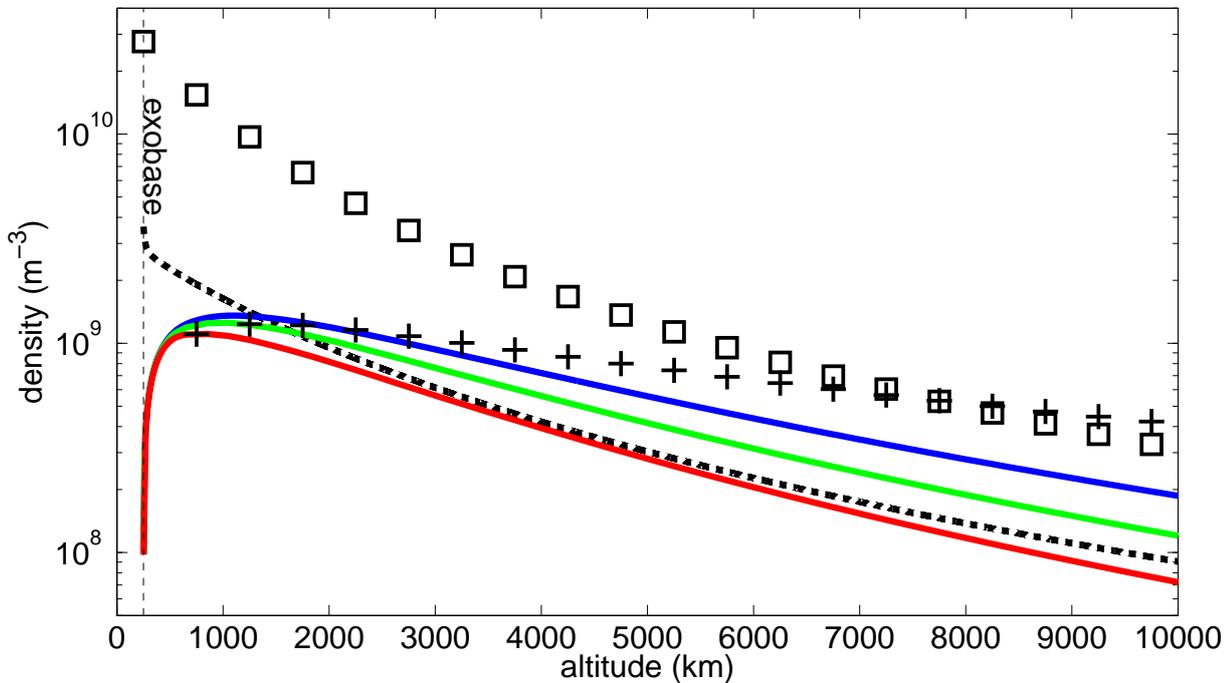


FIGURE II.15 – Profils de densité d'hydrogène atomique dans l'exosphère martienne pour  $T_{exo} = 350 K$  et  $h_{exo} = 250 km$  (faible activité solaire) : densités de  $H$ -candidates (trait tireté) et de  $H$ -satellites (trait plein), contribution des  $H$ -balistiques et en échappement (carré) et comparaison avec les densités de  $H$ -satellites (trait pointillé) issues de l'approximation de Chamberlain.

significative à la population exosphérique de Mars, principalement dans le cas d'une activité solaire forte, contrairement au cas terrestre ou de Titan. Cette différence fera l'objet d'une discussion dans une des sections suivantes (voir section G).

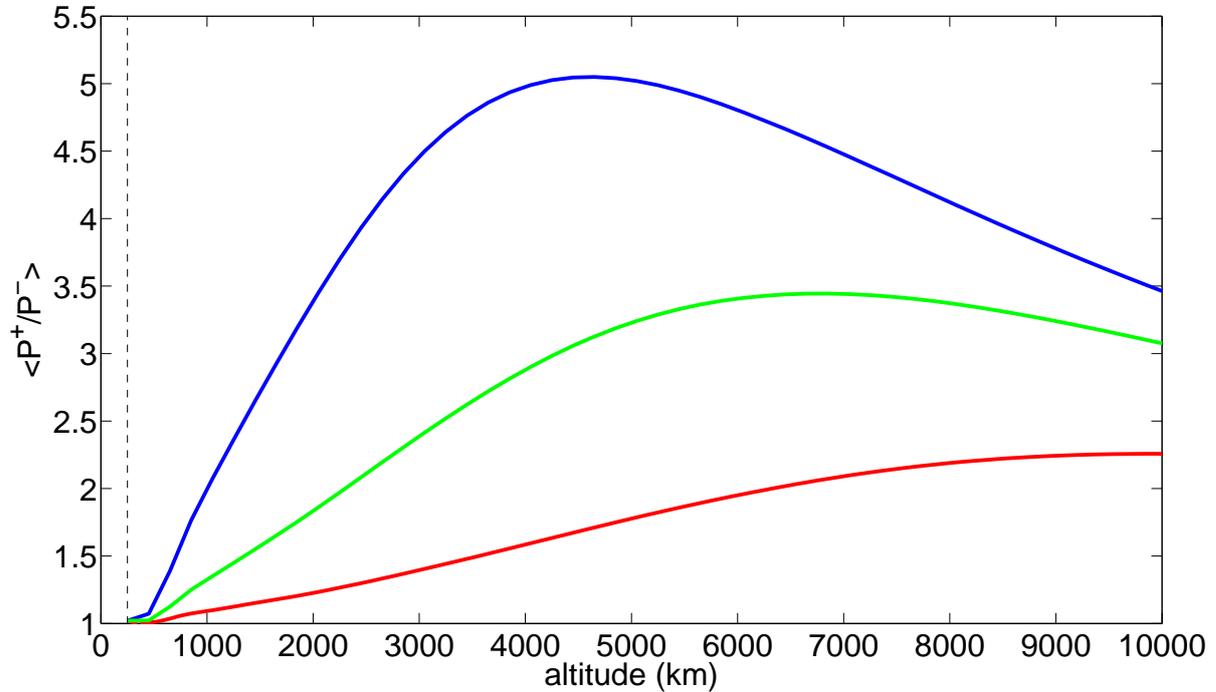


FIGURE II.16 – Ratio moyen entre les taux de production et de perte des  $H$ -satellites sur Mars, dans le cas de l'exosphère froide, en fonction de l'altitude.

Sur la figure II.16, de nouveau, nous avons représenté le rapport moyen en fonction de l'altitude entre les taux de production et de perte. Le comportement est toujours similaire : un rapport supérieur à 1 à basse altitude, plus important dans le cas de taux de perte plus faibles (bleu), une dérive du pic, etc... La plus faible valeur du ratio entre production et pertes comparativement au cas froid n'empêche pourtant pas une importance relative accrue des particules satellites, et ce pour la raison suivante : les zones de production (et également de perte) sont élargies dans le cas chaud, si bien que le pic diminue certes en intensité mais sa largeur augmente, et la contribution totale des particules satellites s'accroît.

## F Hypothèses et limites du modèle

Dans cette partie, je porte une attention particulière sur les hypothèses et les limites de ce modèle.

Comme il est fondé sur le calcul de l'équation de Boltzmann, il est nécessaire de faire un certain nombre d'approximations et d'hypothèses pour résoudre ce problème. Les hypothèses principales portent sur : la définition d'une exopause pour l'exosphère et la détermination de l'altitude de l'exobase, mais également la définition des collisions prises en compte et la précision des sections efficaces associées.

Tout d'abord, nous supposons l'existence d'une exopause, c'est-à-dire une limite externe pour l'exosphère, non prise en compte par Richter et al. (1979). Cette limite dépendrait de deux facteurs : la sphère de Hill ou la pression de radiation. Il est à préciser que le deuxième chapitre de ma thèse portera justement sur les effets de cette pression de radiation et montrera l'existence effective d'une telle exopause induite par la pression de radiation.

- La sphère de Hill (1878) est la limite à partir de laquelle une particule n'est plus gravitationnellement liée à la planète. Au-delà, la particule peut se mouvoir dans un espace ouvert (il n'existe plus de restriction en terme de distance au mouvement par rapport à la planète). Nous supposons donc que dans cet espace ouvert, la particule est perdue (en échappement finalement).
- Les forces extérieures impactent fortement la dynamique des particules dans l'exosphère, notamment la pression de radiation. Pour modéliser de manière simple son effet, nous avons estimé la distance limite à partir de laquelle la pression de radiation devient dominante devant la gravité de la planète (voir la section B.2.c et le tableau II.2). Cette méthode est cependant très simplificatrice, car la pression de radiation agit de manière continue dans l'ensemble de l'exosphère. Un précédent travail a justement porté sur cet aspect (Bishop and Chamberlain (1989)). Ils ont montré (pour un mouvement plan, sans rotation autour de l'axe Soleil-Terre) que le temps de vol des particules satellites est accru (ainsi que celui des particules candidates) et qu'il n'existe finalement pas de particules satellites dans ce cas, car elles retomberaient irrémédiablement sur l'exobase. Cependant, leur calcul ne considère que le cas 2D. L'étude du cas 3D que nous avons réalisée (voir chapitre III) montre qu'il existe des zones de stabilité pour les particules satellites dans le cas d'une rotation des particules autour de l'axe Soleil-planète.

Ensuite, seules les collisions élastiques entre une espèce légère (p. ex.  $H$  ou  $H_2$ ) et une espèce beaucoup plus lourde (p. ex.  $N_2$ ,  $O$ ) ont été prises en compte. Pendant la collision, nous supposons que la particule conserve sa vitesse, son énergie cinétique (il n'y a pas de transfert d'énergie entre les deux espèces). Cependant, la direction de son mouvement est impactée, et donc son moment cinétique. Sans ces hypothèses, les termes de production  $P^+$  et de perte  $P^-$  dépendraient d'un opérateur de collisions, bien trop complexe à résoudre dans notre cas. Notre approche est parfaitement justifiée pour l'étude des espèces comme  $H$  ou  $H_2$  mais cette hypothèse n'est pas justifiée pour le cas de l'oxygène sur Mars par exemple. Pour étudier la population de  $O$ -satellites, il est évidemment nécessaire de prendre en compte les collisions avec  $H/H_2/He$  à plus haute altitude (voir Krasnopolsky (2002)).

De plus, cette approximation ne peut être appliquée aux collisions entre deux  $H$  (p. ex. entre  $H$ -satellites et  $H$ -balistiques ou en échappement) ou entre  $H$  et  $H_2$  dans le cas de Titan. La première collision peut-être négligée en se basant sur le fait que les atomes d'hydrogène sont indiscernables. En un point donné, il n'est pas possible de savoir s'il y a eu effectivement une collision entre deux hydrogènes et de savoir exactement si l'un est devenu satellite ou non (s'il y a eu collision, la quantité

de mouvement de chacun est modifié). Pour le deuxième cas, une simulation test a été effectuée : si nous prenons en compte avec notre hypothèse la collision  $H - H_2$ , la densité de  $H$ -satellites est augmentée d'un facteur 3 à haute altitude. Néanmoins, les densités sont alors surestimées puisqu'en réalité les collisions entre  $H_2$  et  $H$  amèneraient à une perte d'énergie cinétique, et donc à une transformation de particules satellites en particules balistiques.

Il faut également préciser qu'il y a beaucoup d'incertitudes sur les sections efficaces à propos des collisions élastiques. La majorité des sections efficaces utilisées sont déterminées à partir des coefficients de viscosité (valable pour les gaz rares ou les gaz moléculaires) ou de la mécanique quantique (voir Hirschfelder et al. (1954) et les tableaux II.3-II.5) excepté pour la collision  $O - H$ , pour laquelle nous avons pris la valeur de Richter et al. (1979), en accord avec Zhang et al. (2009).

Enfin, pour notre modèle, une seule collision est prise en compte pour la production de particules satellites. Nous ne prenons pas en compte les multiples collisions qui peuvent avoir lieu le plus souvent près de l'exobase. Cette hypothèse est à priori justifiée par la rareté des collisions dans l'exosphère. Le choix de l'altitude de l'exobase aura d'ailleurs une influence : plus elle sera grande, plus la chance d'avoir plus d'une collision sera faible, et inversement.

Au sujet de l'altitude de l'exobase, celle-ci est généralement déterminée à partir des mesures de profils de densité des espèces majoritaires. En théorie, elle dépend de l'espèce considérée. Par exemple, dans le cas de Titan, Cui et al. (2008) préconisent une altitude de l'exobase à 1600 km pour  $H_2$  alors qu'elle n'est que de 1500 km pour  $N_2$ . Entre 1500 et 1600 km, cette région reste collisionnelle pour  $H_2$ . Nous sommes dans une région de transition où le nombre de Knudsen devient de l'ordre de l'unité. Elle constitue la zone où il y a transition entre un modèle fluide (équations de Navier-Stokes) et un modèle purement cinétique comprenant les collisions (équation de Boltzmann). Pour prendre en compte l'effet de la hauteur de l'exobase, nous avons décidé de faire une simulation de référence à 1600 km d'altitude pour l'exobase, et deux autres à 1500 km mais avec un jeu de densités à l'exobase différent (voir la section D). Ces simulations rendent compte de la sensibilité de notre modèle à ce paramètre (voir également plus loin la section G.1 et la figure II.17b).

Enfin, il est important de mentionner une dernière limite de notre modèle. En effet, nous supposons, lors du calcul des termes de sources et de pertes pour les particules satellites, que les particules candidates sont une population stable de particules balistiques dont sont issues les particules satellites. Cependant, ce réservoir est en réalité lui-même variable, puisque les particules satellites créées vident partiellement ce réservoir. Par ailleurs, un modèle itératif serait nécessaire pour prendre en compte l'augmentation des densités des autres espèces avec lesquelles les candidates collisionnent, car ces autres espèces ont elle-même des contributions satellites. Seul un modèle de type Monte-Carlo de l'ensemble de l'exosphère, couplant toutes les espèces et prenant en compte les inter-relations existantes, permettrait de fournir des valeurs plus fines de densité, mais un tel modèle est au-delà des objectifs de notre thèse (et probablement au-delà des capacités de calcul actuelles, partiellement fait par Cipriani et al. (2007) pour le carbone, l'oxygène et leurs composés).

## G Discussions comparatives

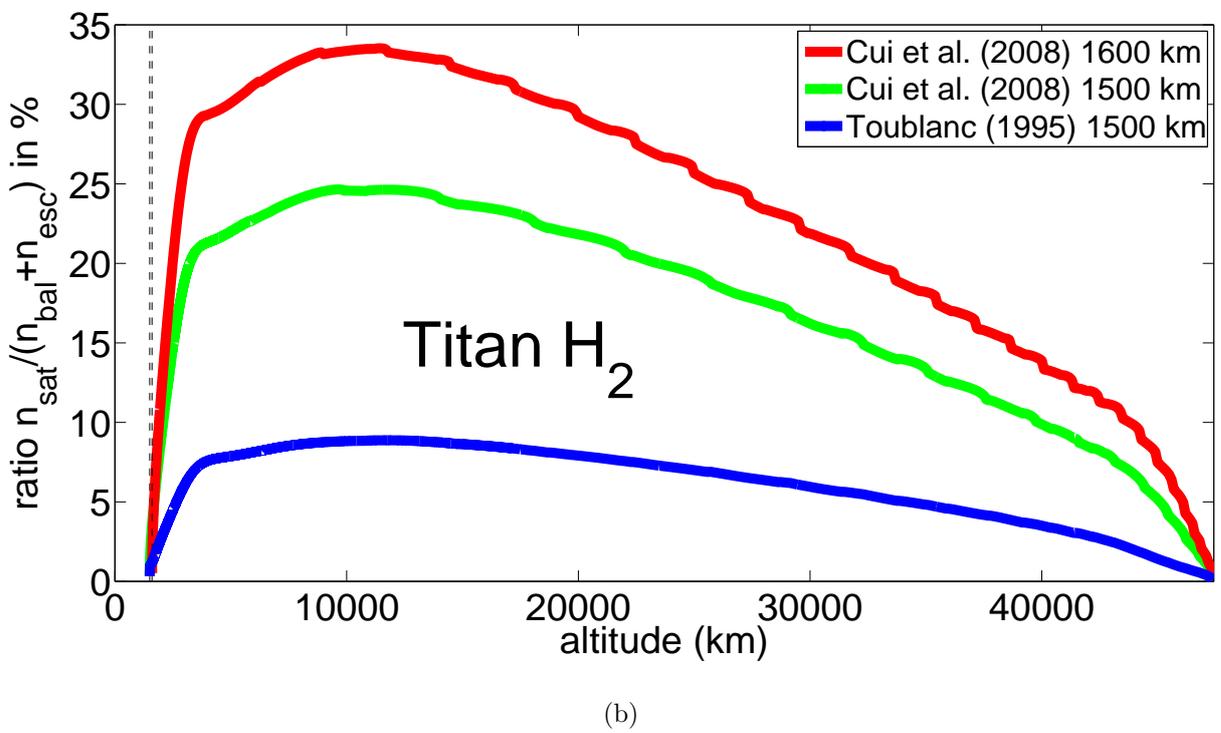
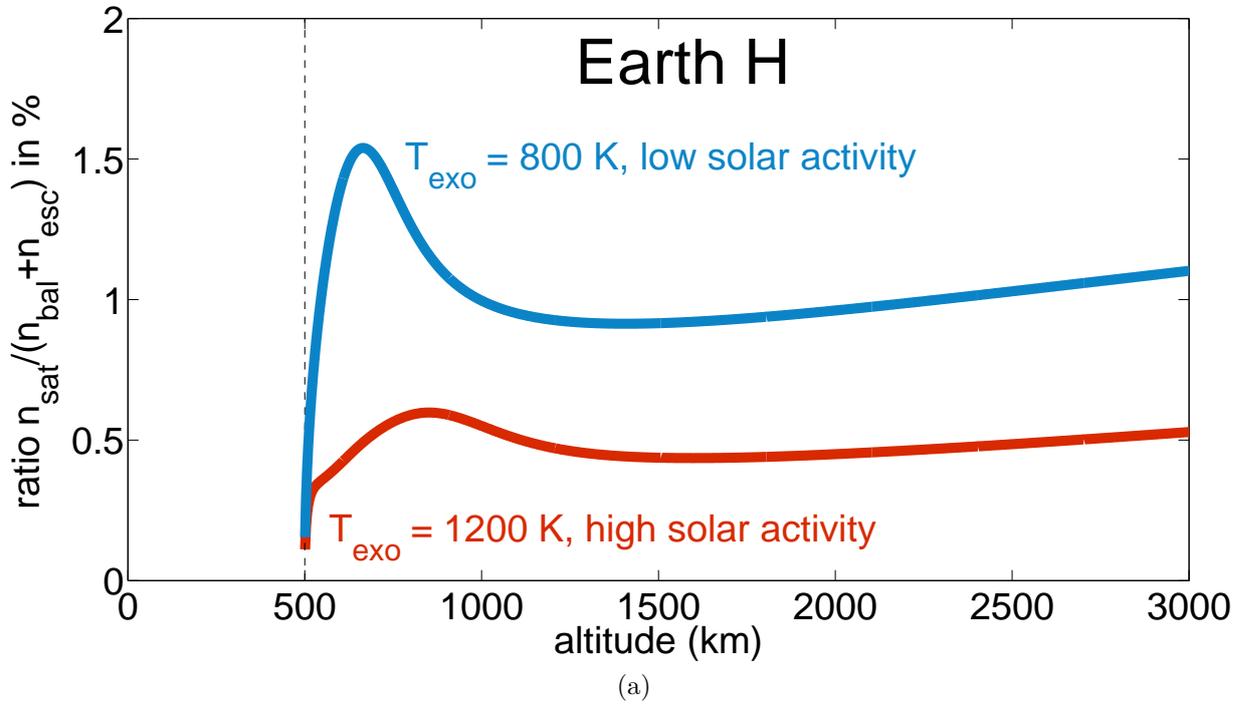
### G.1 Comparaison entre les densités de particules satellites sur la Terre, Mars et Titan

Nous avons pu remarquer des différences notables dans l'importance des particules satellites en fonction de l'environnement planétaire, pour la Terre, Titan ou Mars. Pour effectuer une discussion comparative entre ces cas, il convient de trouver une base de référence. Cette base sera les densités de particules balistiques et en échappement issues du formalisme de Chamberlain (1963), modèle largement utilisé et applicable uniquement pour une exosphère non-collisionnelle. Pour les trois exosphères, nous avons comparé les rapports de densité de particules satellites avec cette base. Si ce ratio est effectivement bas alors l'exosphère pourra être considérée non-collisionnelle, tandis que les rares collisions affecteront les densités de manière non négligeable dans le cas contraire.

La figure II.17 montre ce ratio pour les différentes planètes, sur la Terre, Titan et Mars.

Le ratio terrestre se situe donc en-deçà de 1,5/0,6% jusque 3000 km d'altitude, respectivement pour des activités solaires basse et forte. Des valeurs également faibles peuvent être obtenues pour des simulations à plus haute altitude (en-deçà de 1% à 10 rayons terrestres, cf. également figure II.7). Ces faibles valeurs sont probablement tout simplement liées au faible nombre de collisions. Ce peu de collisions est notamment visible au travers de la faible différence, pour une température exosphérique de 800 K (figure II.6, panneau du haut), entre les  $H$ -balistiques - vitesses comprises entre 0 et  $v_{esc}$  - plus celles en échappement de Chamberlain (1963) (points noirs) et les  $H$ -candidates de Richter et al. (1979) - vitesses comprises entre 0 et  $v_{esc}$  et ne subissant aucune collision jusqu'à l'altitude  $z = r - R_{Terre}$  - (carrés). En effet, plus il y a de collisions, plus l'écart en densité entre ces deux types de populations est important. Pour l'exosphère à 1200 K lors d'une forte activité solaire, l'écart est bien plus important (voir la figure II.6, panneau du bas). La fréquence est donc plus élevée mais pas encore suffisante pour produire assez de  $H$ -satellites. La production de  $H$ -satellites sur Terre provient de l'échange de charge entre  $H^+$  et  $O$  alors que le terme de perte est essentiellement dû aux collisions élastiques (voir également la revue de Fahr and Shizgal (1983), figure 20).

Sur Titan, le ratio augmente significativement avec des valeurs allant jusque 34% pour une exobase à 1600 km d'altitude. Pourquoi une telle différence avec le cas terrestre? Dans le cas de Titan, le paramètre de Chamberlain  $\lambda$  pour  $H_2$  à l'exobase (située à 1600 km d'altitude) est plus faible que celui de l'hydrogène sur Terre. La proportion de particules candidates à l'exobase est de  $\sim 10\%$  (contre  $\sim 2 - 4\%$  sur Terre; cf. également plus loin la figure II.19). Il y a donc un nombre plus important de particules qui peuvent potentiellement devenir des particules satellites, déjà à l'exobase, pour Titan que pour la Terre. Néanmoins, cela ne suffit tout de même pas pour obtenir un ratio supérieur à 10 ou 35% selon les conditions à l'exobase. En effet, l'atmosphère de Titan est dense, les premiers kilomètres au-dessus de l'exobase sont dans un état d'équilibre thermodynamique, le rapport des termes de production et perte est proche de 1 (voir la figure II.9). Les particules candidates subissent encore un nombre important de collisions entre l'exobase et les plus hautes altitudes. Il en



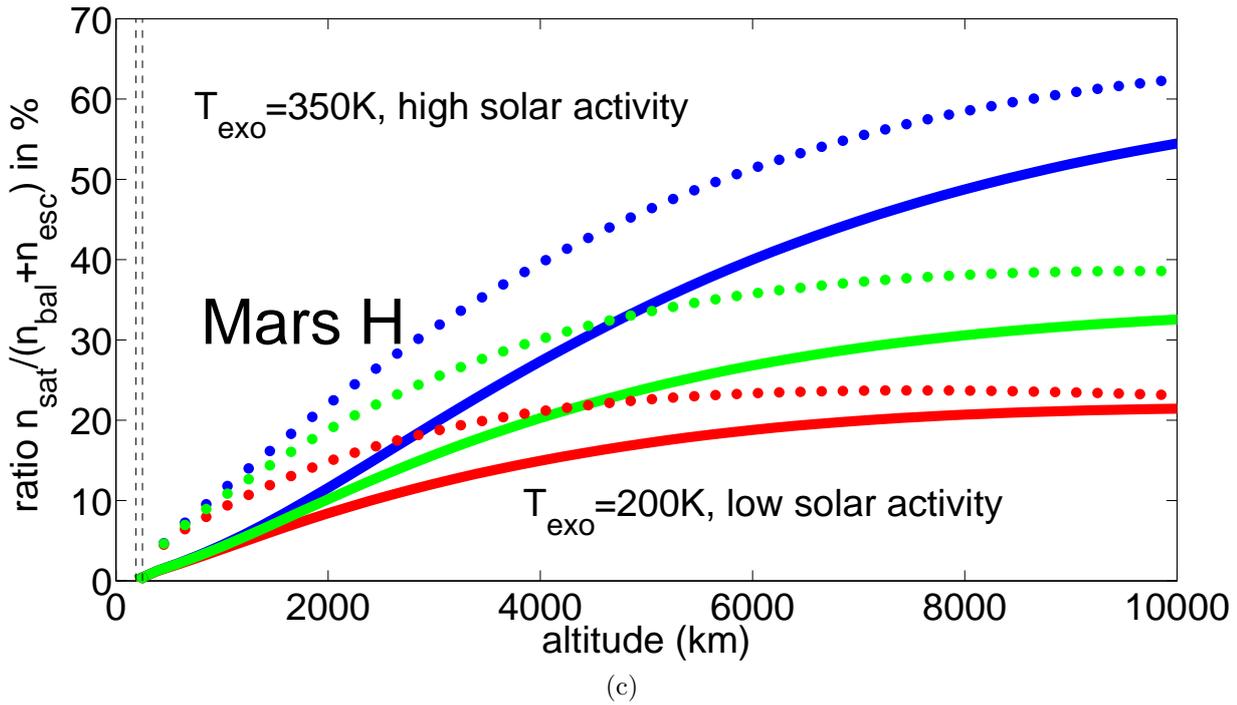


FIGURE II.17 – Profils en fonction de l’altitude du rapport de densités entre nos particules satellites et celles balistiques plus en échappement issues du formalisme de Chamberlain sur la Terre (panneau du haut), Titan (panneau du milieu) et Mars (panneau du bas). Sur Terre, nous avons considéré deux activités solaires. Sur Titan, nous avons considéré trois différentes conditions à l’exobase (voir figure II.8). Pour Mars, le ratio est fourni pour deux activités solaires (trait plein pour une faible activité solaire, trait pointillé pour une forte activité) et pour trois conditions d’interaction différentes : sans interaction avec le plasma environnant (bleu), interaction avec le plasma du vent solaire (vert), interaction avec les plasmas de la magnétogaine et du vent solaire (rouge). Le tracé sur Mars est limité à 100000 km car nous sommes au-delà du bow-shock où la symétrie de notre problème 1D est complètement inadaptée.

va de même pour les particules satellites fraîchement produites à basse altitude : leur temps de vie est relativement court (voir la figure II.12) près de l'exobase. Par ailleurs, la majorité des collisions élastiques impliquant  $H_2$  se font avec des espèces lourdes ( $N_2$ ,  $CH_4$ ). Ces espèces ont des échelles de hauteur très faibles et leur densité décroît très vite avec l'altitude, leurs paramètres de Chamberlain sont grands (voir le tableau II.3). Donc la production de  $H_2$ -satellites par ces collisions élastiques se fait essentiellement à basse altitude, près de l'exobase. Rajouter les collisions entre  $H_2$  et  $H$  dans notre modèle amènerait probablement à une augmentation des contributions de particules satellites, mais les hypothèses du modèle sont incompatibles avec leur prise en compte (cf. plus haut en section F). En tenant compte de ces collisions il serait possible de produire des particules satellites à partir de celles en échappement (comme les masses sont similaires, il serait alors possible de transférer le surplus de quantité de mouvement d'une particule en échappement lors d'une collision pour qu'elle puisse devenir satellite voire balistique). Les valeurs de densités que nous obtenons pour les particules satellites  $H_2$  sur Titan sont donc une limite basse.

Comme déjà expliqué dans les sections D.1 et F, nous avons fait trois simulations sur Titan : une pour une exobase à 1600 km d'altitude et deux pour une exobase à 1500 km mais avec des conditions de densités différentes. La première remarque est la suivante : une exobase à plus haute altitude induit une présence plus importante de  $H_2$ -satellites, comparée à celle des  $H_2$ -balistiques plus en échappement. Ce rapport de densité peut ainsi atteindre 34% contre seulement 25 % pour une exobase à 1500 km (les autres paramètres étant similaires). Cette sensibilité est directement liée à la décroissance rapide en densités des autres espèces, plus lourdes, avec lesquelles  $H_2$  collisionne pour devenir satellite : leur échelle de hauteur (p. ex. 80 km pour  $N_2$ ) est de l'ordre de grandeur de la différence d'altitude prise pour l'exobase entre nos simulations. La production de particules satellites va dépendre de la densité des espèces lourdes et de leurs échelles de hauteur respectives. Nous avons voulu vérifier si un changement de température de l'exosphère pouvait créer de tels effets. Nous avons donc aussi effectué une simulation à plus faible température exosphérique comme préconisé par Tucker et al. (2013) : 120 K. Ce changement affecte l'échelle de hauteur de toutes les espèces, le ratio de «  $H_2$ -candidates » à l'exobase (voir la figure II.19) et aussi la fréquence des collisions élastiques. Cependant, ces changements n'impliquent pas des différences aussi notables sur la population de  $H_2$ -satellites que la différence d'altitude de l'exobase, puisque l'échelle de hauteur est simplement ramenée à 60 km pour  $N_2$  et les vitesses relatives entre  $H_2$  et  $N_2$  ou  $CH_4$  restent du même ordre de grandeur.

Sur Mars, le rapport entre nos  $H$ -satellites et les  $H$ -balistiques plus en échappement peut être également important. Il est compris entre 10% et 20% à 2000 km (position du choc face au Soleil) ou entre 20% et 60% à 10 000 km, en fonction évidemment de l'activité solaire et de l'interaction avec le plasma environnant. Au vu de tels ratios, négliger la présence des  $H$ -satellites dans l'exosphère martienne peut conduire à une sous-estimation importante de la densité d'hydrogène exosphérique à haute altitude.

Pourquoi une telle importance des populations satellites ? Pour une forte activité solaire, le pa-

ramètre de Chamberlain de l'hydrogène martien est similaire à celui de  $H_2$  sur Titan : nous nous attendons donc à des comportements assez similaires mais ce n'est pas le cas. L'atmosphère de Mars est plus chaude et plus fine que celle de Titan, le nombre de collisions y est moindre. En effet,  $r_c/H(r_c) = \lambda_c$  donc pour des valeurs de  $r_c$  similaires (10% d'écart entre Mars et Titan) mais pour des  $\lambda_c$  4 à 5 fois moindres sur Mars que sur Titan, les hauteurs d'échelle sur Mars sont beaucoup plus faibles, les densités des espèces nécessaires aux collisions décroissent donc plus vite. Les particules candidates peuvent ainsi atteindre leur apoapse avant de retomber sur la planète et contribuer, de nouveau, à la production de particules satellites. L'exosphère martienne présente alors un flux plus important de particules candidates provenant non seulement du bas de l'exosphère mais aussi provenant des altitudes supérieures. Cette contribution de candidates descendantes implique une augmentation du nombre total de  $H$ -candidates de 20% (c'est-à-dire la contribution de  $N_{downward}(r)$  par rapport à  $N_{upward}(r)$ , II.36). De plus, dans l'exosphère martienne, les espèces plus lourdes comme l'oxygène ou le dihydrogène reste très présentes à haute altitude : la première à cause de la température de sa composante chaude, la deuxième en raison de sa faible masse. La faible fréquence de collisions permet aux  $H$ -candidates d'atteindre plus facilement les hautes altitudes. Par contre, la présence non négligeable d'oxygène chaud ou de dihydrogène dans la couronne donne encore la possibilité aux  $H$ -candidates de subir une collision pour devenir satellite. La zone de production s'en trouve plus étendue (voir les figures II.14 et II.16) que dans le cas de Titan (voir la figure II.9).

Néanmoins, il faut rappeler qu'en fonction des environnements rencontrés (ionosphère, vent solaire, magnétogaine), les densités peuvent varier d'un facteur 2 à 3. Chaque particule satellite peut se mouvoir dans un ou plusieurs de ces environnements et être soumis aux différents taux de perte associés. En l'occurrence, seul un modèle 3D pourrait estimer précisément les taux de perte de particules satellites dans ces différentes zones et leurs densités. Par ailleurs, il ne faut pas oublier que l'exosphère de Mars est très sensible à l'activité solaire et à la pression de radiation dont nous étudierons l'influence sur la dynamique des particules dans le chapitre III.

L'existence de ratios significatifs (pour Mars et Titan) entre nos densités de particules satellites et celles balistiques plus en échappement implique forcément que les collisions ne peuvent pas être négligées dans ces cas. Cependant, ce ratio ne donne pas l'erreur exacte sur la densité telle que fournie par un modèle non collisionnel de type Chamberlain. D'une part, la densité de particules balistiques et en échappement de Chamberlain se base sur une approche entièrement non-collisionnelle, notre modèle ne prend donc pas en compte d'échange, induit par des collisions, entre toutes ces populations. D'autre part, notre modèle repose sur un certain nombre d'hypothèses et ne prend en compte qu'une seule collision. Les termes « balistiques » et « satellites » n'ont pas de réel sens tant qu'il y aura des collisions pour les perturber sur leurs trajectoires imposées pas la gravitation. Seule une approche Monte-Carlo pour l'ensemble de l'exosphère, très coûteuse en temps, pourra estimer la densité totale dans les exosphères planétaires.

## G.2 Prédiction de l'importance relative des particules satellites

Nous avons pu évidemment nous rendre compte qu'il n'existe pas d'expression simple pour estimer approximativement la densité de particules satellites. Par contre, il est possible de déterminer la densité de particules « candidates » à l'exobase susceptibles de devenir satellites, c'est-à-dire la densité de particules balistiques avec la vitesse suffisante, comprise entre  $v_{min}(r_{exo}) = \sqrt{\lambda_c}U$  et  $v_{max}(r_{exo}) = \sqrt{2\lambda_c}U$ , pour devenir satellite. Cette fraction de particules à l'exobase capable de devenir satellite est donnée par :

$$\frac{N_{upward}(r_{exo})}{N_{exo}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{v_{min}(r_{exo})}^{v_{max}(r_{exo})} v^2 f_M(v) \sin(\theta) dv d\theta d\phi \quad (\text{II.46})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \sqrt{\frac{\lambda_c}{2}} e^{-\frac{\lambda_c}{2}} - \sqrt{\lambda_c \alpha} e^{-\lambda_c \alpha} \right] + \frac{1}{2} \left[ \text{erf} \left( \sqrt{\lambda_c \alpha} \right) - \text{erf} \left( \sqrt{\frac{\lambda_c}{2}} \right) \right] \quad (\text{II.47})$$

où

$$\alpha = 1 - \frac{1}{1 + \frac{R_{lim}}{r_{exo}}}$$

Pour les espèces lourdes (c.-à-d.  $\lambda_c \gg 1$ ), cette fraction est en  $\sim \sqrt{\lambda_c/2} e^{-\lambda_c/2}/\pi$ . La formule II.47 évalue la quantité de particules candidates susceptibles de devenir satellites dans la direction ascendante. Il peut aussi exister une contribution de « candidates » dans la direction descendante. Pour une exosphère très collisionnelle près de l'exobase, seule la composante ascendante  $N_{upward}(r_{exo})$  contribue aux « candidates » ( $N_{downward}(r_{exo}) \sim 0$ ). Dans le cas contraire, celui d'une exosphère peu collisionnelle (cas de Mars par exemple, cf. la discussion dans la section précédente), les particules « candidates » peuvent atteindre leur apoapse avant de redescendre. À l'exobase, la fraction totale de « candidates » est donc comprise entre  $N_{upward}/N_{exo}$  et  $2 N_{upward}(r_{exo})/N_{exo}$ .

Cette formule est très utilisée pour estimer la proportion de particules candidates à l'exobase en fonction du paramètre de Chamberlain, en s'affranchissant complètement de la physique qui peut se passer au-dessus de l'exobase. Si cette proportion est faible par défaut à l'exobase, alors le taux de production lié aux particules candidates sera faible car il est directement lié à cette proportion.

De la même façon, nous pouvons aussi calculer la proportion de particules avec une vitesse inférieure à  $v_{min}$  (particules balistiques dont le périapse sera toujours sous l'exobase quel que soit leur moment cinétique après une collision) et supérieure à  $v_{max}$  (particules en échappement), toujours dans la direction ascendante seulement. Ces trois quantités sont représentées sur la figure II.18 en fonction du paramètre de Chamberlain à l'exobase  $\lambda_c$  (voir l'expression (II.2)). La proportion de particules balistiques « candidates » dans la direction ascendante est maximale pour  $\lambda_c = \ln(8)$  avec un ratio inférieur à 20%. Elles ne peuvent donc pas dominer les autres populations provenant elles aussi de l'exobase. Nous observons qu'au-delà, ce ratio décroît avec  $\lambda_c$ . Plus  $\lambda_c$  est grand, plus la particule est liée gravitationnellement à la planète. La force de gravité les empêche de dépasser  $v_{min}(r_{exo})$ .

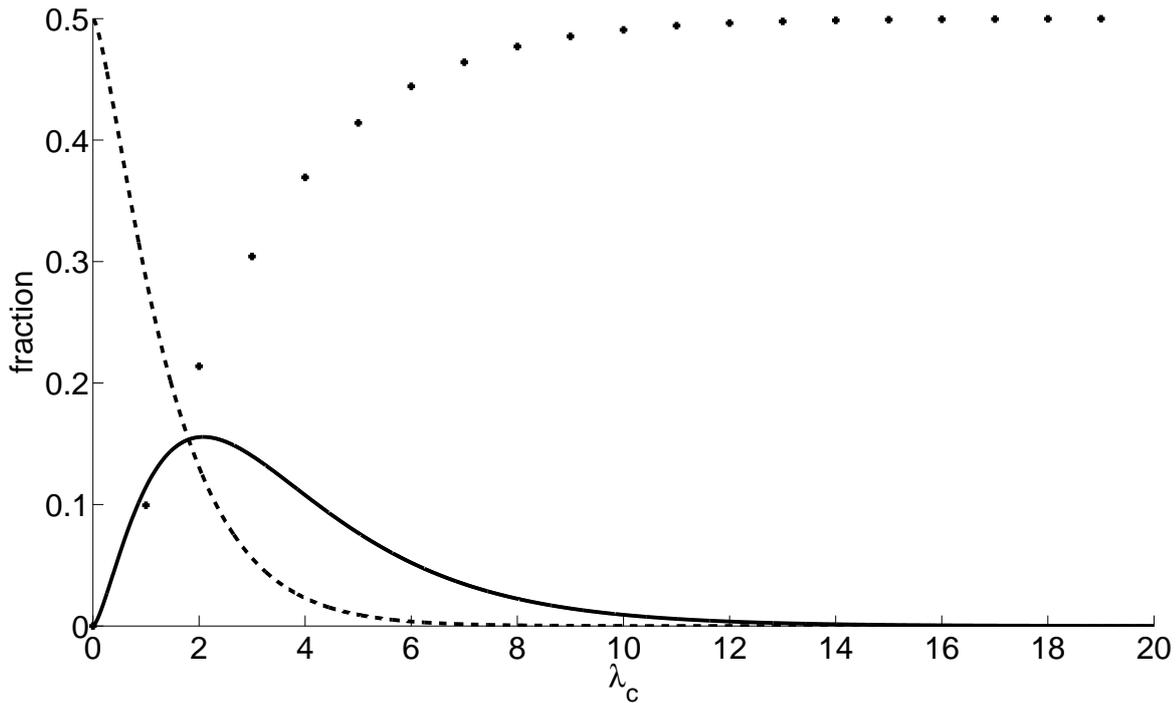


FIGURE II.18 – Profils pour  $\alpha = 1$  ( $R_{lim} \rightarrow +\infty$ ) du ratio - par rapport à la densité totale  $N_{exo}$  de particules exosphériques avec une vitesse entre 0 et  $v_{min}(r_{exo})$  (particules balistiques n'ayant pas l'énergie suffisante pour être satellite, trait pointillé), entre  $v_{min}(r_{exo})$  et  $v_{esc}(r_{exo})$  (particules candidates ascendantes, trait plein) et entre  $v_{esc}(r_{exo})$  et  $+\infty$  (particules en échappement, trait tireté).

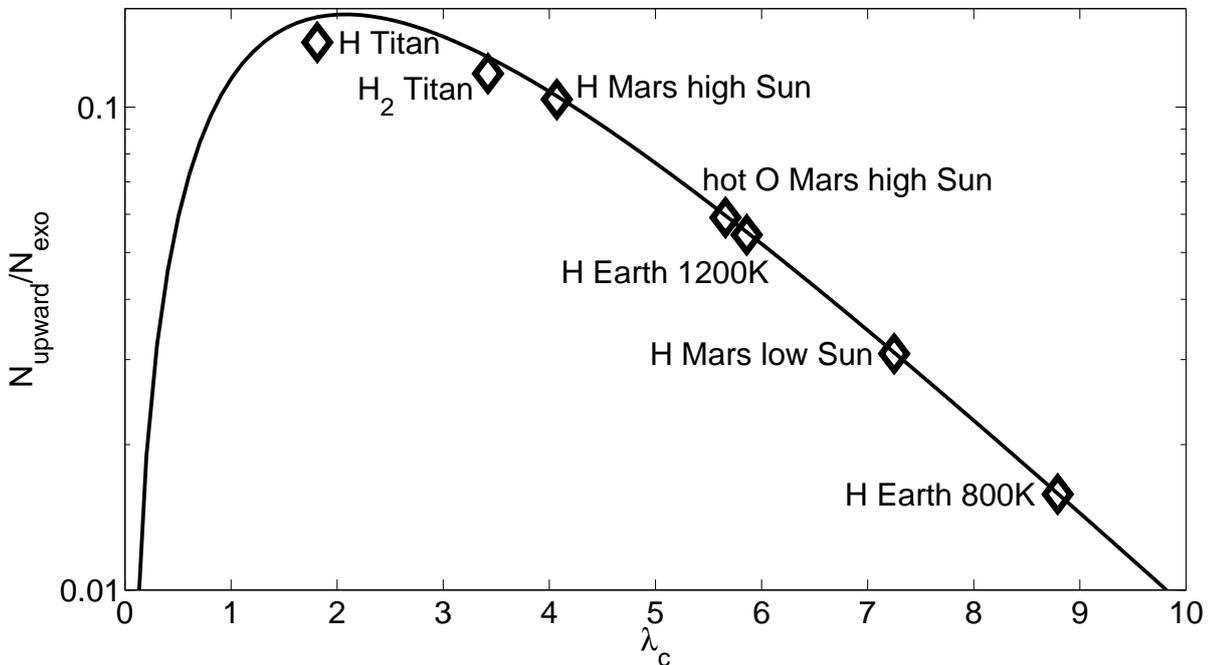


FIGURE II.19 – Ratio entre les densités de particules balistiques « candidates » ascendantes et la densité à l'exobase, pour différents corps et espèces dans le système solaire.

La figure II.19 donne un agrandissement du tracé en trait plein de la figure II.18, avec les valeurs réelles de  $\lambda_c$  pour différentes espèces sur différentes planètes et pour différentes activités solaires. Le pic de la courbe correspond généralement aux espèces légères (faibles valeurs de  $\lambda_c$ ), telles que

$H$  et  $H_2$  sur Titan. L'écart entre les cas réels et le tracé est dû à la valeur de  $\alpha$  : dans le cas de Titan,  $\alpha$  vaut 0.92 au lieu de 1 (valeur prise pour la courbe). La majorité des cas visibles sont pour des espèces légères. En effet si pour  $H$ , nous avons un paramètre de Chamberlain  $\lambda$  alors les autres espèces ont un paramètre de Chamberlain  $A\lambda$ , avec  $A$  leur nombre de masse. Les espèces lourdes ont donc rapidement des valeurs de  $\lambda_c$  grandes, et correspondent à un ratio faible : par exemple, pour  $N_2$  sur Titan,  $\lambda_c = 50$  et le ratio correspondant est en-deçà de  $10^{11}$ .

Cependant, la connaissance de  $\lambda_c$  n'est pas suffisante pour prédire l'importance finale de la contribution des particules satellites, car l'équilibre entre sources et pertes est complexe. A priori, les cas de  $H$  sur Mars pour une forte activité solaire et  $H_2$  sur Titan semblent similaires. Pourtant, l'importance des particules satellites dans les deux cas est très différente (plus importante sur Mars, voir la figure II.17), et ce pour des raisons déjà discutées dans la section G.1). Il n'est donc pas évident de prédire cette importance mais, au regard de la figure II.17 et de l'équation (II.47), il est possible de prédire quels sont les cas les plus susceptibles d'avoir une contribution satellite significative. En revanche, seul un calcul rigoureux à partir de l'équation de Boltzmann fournira des valeurs quantitatives réalistes pour leur contribution.

### G.3 Comparaison avec le formalisme de Chamberlain

Il est nécessaire de comparer notre densité de particules satellites avec celles obtenues à partir de deux types d'approximations proposées par Chamberlain (1963).

Premièrement, l'approximation  $\zeta_{sat}$  (détaillée dans l'annexe B) n'est pas cohérente dans ses hypothèses : elle est basée sur le théorème de Liouville, c'est-à-dire la conservation de la fonction de distribution le long d'une trajectoire dynamique en l'absence de collisions (les termes de production et de perte sont nuls). Ainsi, cette approximation suppose un lien avec l'exobase qui en réalité n'existe pas, et ne prend pas en compte les processus de production et de perte nécessaires pour rendre compte de l'existence même des particules satellites, au contraire de l'équation de Boltzmann.

Ensuite, l'analyse des figures II.7, II.8, II.13, II.15 montre clairement que nos densités de particules satellites restent inférieures dans tous les cas à la densité donnée par l'approximation de Chamberlain (1963). Cette approximation  $\zeta_{sat}$  surestime donc la population réelle de particules satellites. Il est possible aussi de comparer les comportements asymptotiques des deux approches : la fonction  $\zeta_{sat}$  à haute altitude est proche d'une loi en  $r^{-\frac{3}{2}}$  ; par contre, pour le cas de  $H_2/H$  sur Titan et Mars pour les particules satellites, un ajustement des tracés en log-log donne plutôt une loi en puissance en  $-2,9/-2,7/-2,4$  (cf. figure II.20 pour Titan, figure II.21 pour Mars « froid » et figure II.22 pour Mars « chaud » mais sans interaction avec le plasma ; sont prises en compte les altitudes situées loin des limites  $r_{exo}$  et  $R_{lim}$  où les gradients en densité sont forts). Nous sommes donc loin de la loi de puissance en  $-1.5$  donnée par l'approximation  $\zeta_{sat}$ . La décroissance des densités de particules satellites avec l'altitude est donc plus forte dans notre modèle. De plus, la loi de puissance pour les particules balistiques est en  $-2.5$  et pour celles en échappement en  $-2$ , et comme la densité de

particules satellites est inférieure à celle de ces deux populations combinées à basse altitude, cela explique qu'elle ne les dépasse jamais.

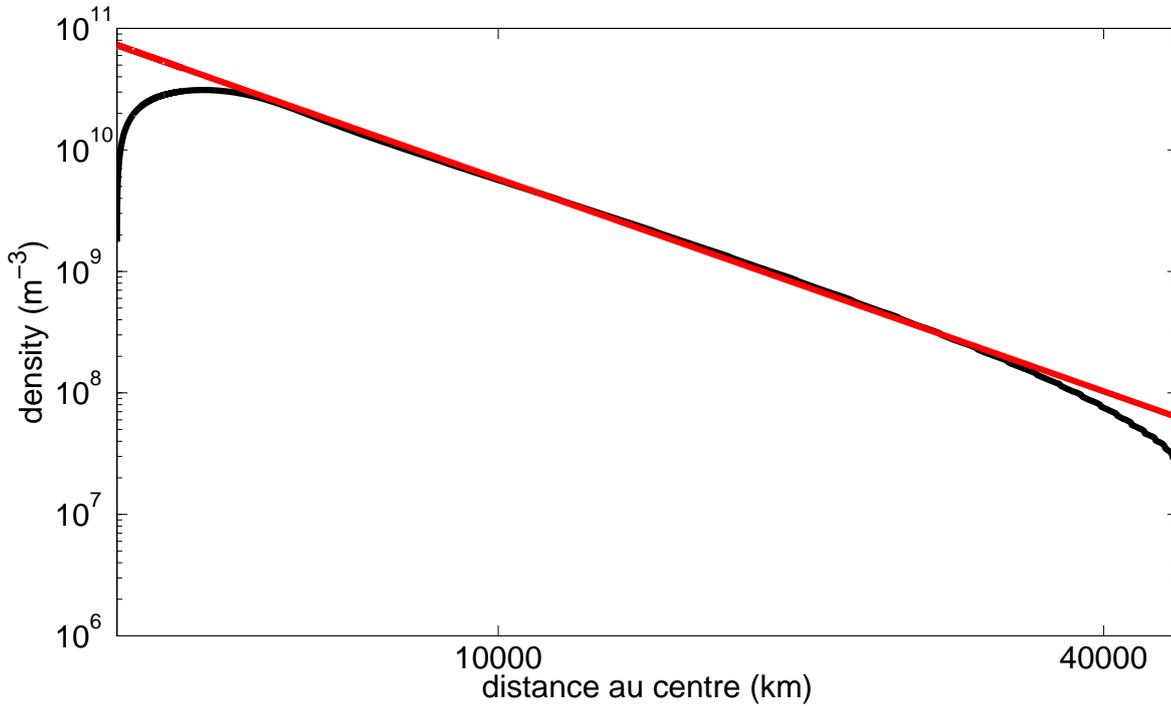


FIGURE II.20 – Agrandissement du tracé de la densité des particules  $H_2$ -satellites de la figure II.8a du cas avec  $h_{exo} = 1600$  km sur Titan, et ajustement par une loi de puissance en rouge. L’ajustement obtenu pour la partie linéaire en log – log donne :  $\log_{10}(n_{sat}(m^{-3})) \approx -2,905 \log_{10}(r(m)) + 12,66$

De plus, nous avons voulu comparer avec une seconde approximation des densités de particules satellites proposée encore par Chamberlain (1963) dans le même article, décrite dans la section A.2 en introduction. Il suggère cette fois-ci l’existence d’une altitude critique  $r_{cs}$  (cf. aussi la section A.2) pour la production de particules satellites (placée au-dessus de l’exobase). Il s’agit de la limite haute d’une région de transition (située entre l’exobase et  $r_{cs}$ ) où quelques collisions subsistent et sont supposées remplir l’espace des phases disponible aux particules satellite. Les particules satellites ne sont donc produites que dans cette région de transition, et toute particule satellite est ensuite (au-delà de  $r_{cs}$ ) considérée comme une particule balistique croisant non pas l’exobase mais  $r_{cs}$  désormais.

Si cette approximation est justifiée, il semble alors logique que la valeur de  $r_{cs}$  soit visible dans les profils de périapse des particules satellites, tel que sur la figure II.9 pour Titan. Plus précisément,  $r_{cs}$  serait ainsi la valeur maximale du périapse moyen des particules satellites, c’est-à-dire 2500 km pour Titan. Cependant, la contribution des particules satellites dans l’exosphère de Titan est toujours petite devant celle des balistiques et en échappement, si bien que les valeurs de  $r_{cs}$  les plus appropriées pour ajuster les profils conduisent inévitablement à des valeurs très proches de l’exobase, loin des 2500 km mentionnés. De plus, le périapse des particules satellites sur Mars montre un comportement très différent, sans vraiment de valeur limite qui pourrait justifier l’existence d’une altitude  $r_{cs}$ . Par ailleurs, Richter et al. (1979) tenta d’évaluer aussi  $r_{cs}$  mais en arriva aux mêmes conclusions : utiliser  $r_{cs}$  n’est pas une méthode adéquate pour représenter les profils de particules satellites.

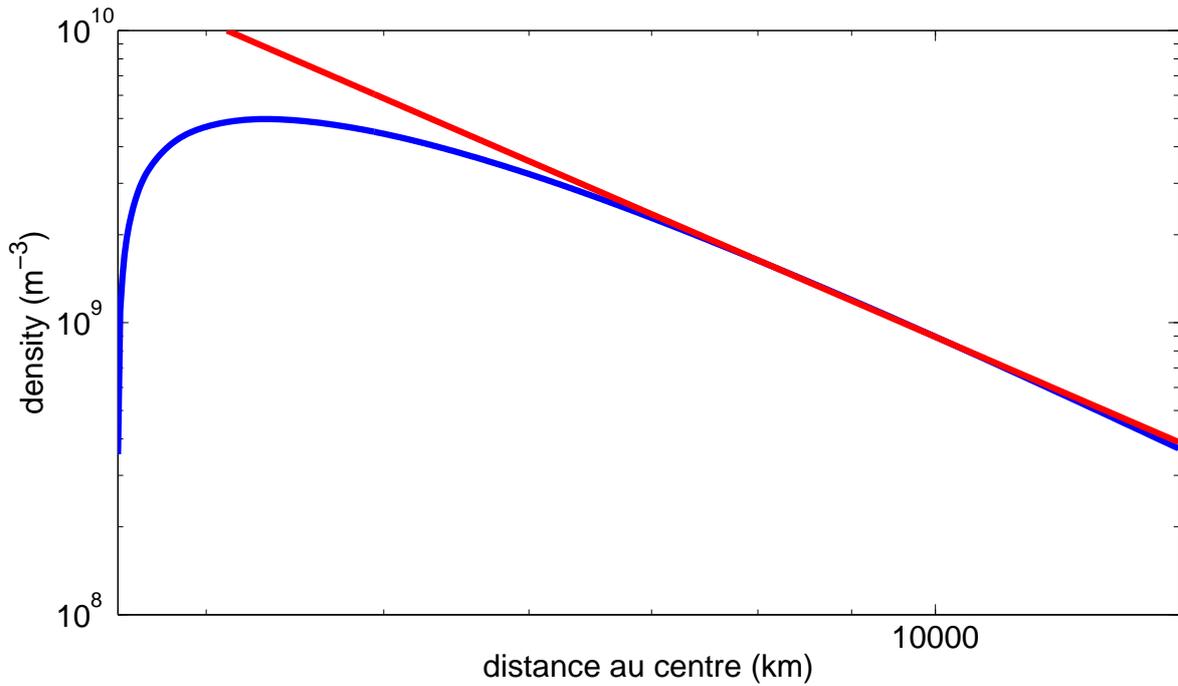


FIGURE II.21 – Agrandissement du tracé de la densité des particules  $H$ -satellites de la figure II.13 (Mars, faible activité solaire, courbe bleue) et ajustement par une loi de puissance en rouge. L’ajustement obtenu pour la partie linéaire en log – log donne :  $\log_{10}(n_{sat}(m^{-3})) \approx -2,715 \log_{10}(r(m)) + 11,66$

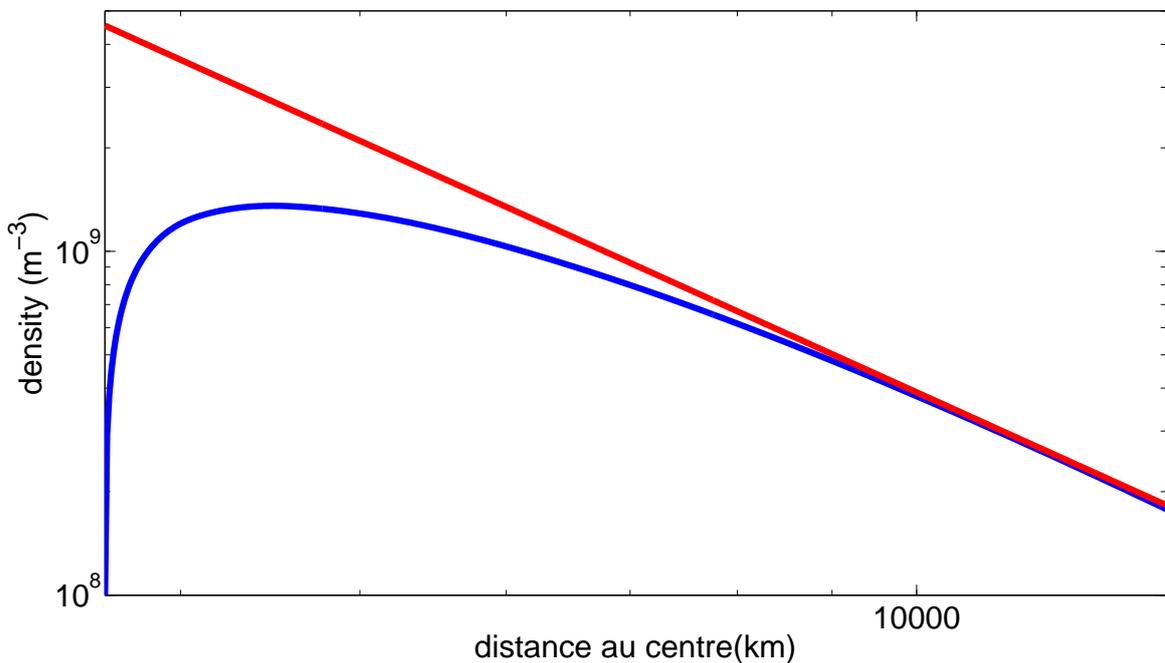


FIGURE II.22 – Agrandissement du tracé de la densité des particules  $H$ -satellites de la figure II.15 (Mars; forte activité solaire, courbe bleue) et ajustement par une loi de puissance en rouge. L’ajustement obtenu pour la partie linéaire en log – log donne :  $\log_{10}(n_{sat}(m^{-3})) \approx -2,432 \log_{10}(r(m)) + 11,01$

#### G.4 L’influence des distributions kappa

Récemment, plusieurs travaux ont suggéré que les fonctions de distribution des particules exosphériques sont du type distributions  $\kappa$  (Vasyliunas (1968)), utilisées à l’origine pour les plasmas

magnétosphériques, mais potentiellement présentes également dans les hautes atmosphères de Mars (Chaufray and Gladstone (2010)) ou de Titan (De La Haye et al. (2007)). Comparativement aux distributions maxwelliennes, elles possèdent une queue dite supra-thermique : la fonction de distribution décroît plus lentement, en loi de puissance et non exponentiellement, à haute énergie.

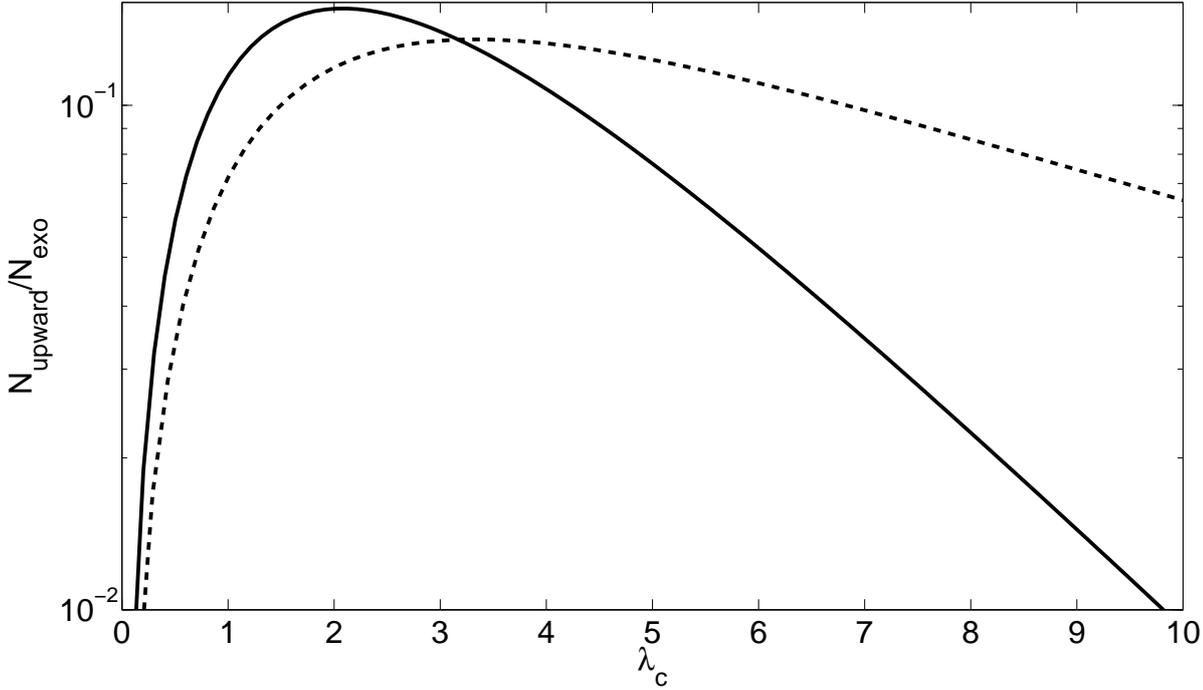


FIGURE II.23 – Fraction de particules « candidates » satellites (trait plein) à l'exobase et avec une distribution- $\kappa$  ( $\kappa = 5$ ; trait tireté).

Nous avons alors décidé d'étudier si la forme de la fonction de distribution pouvait avoir une influence notable sur la proportion de particules candidates à l'exobase dans la direction ascendante. Nous avons introduit dans l'équation (II.47) une distribution- $\kappa$  à la place d'une distribution maxwellienne. La figure II.23 fournit le résultat de ce calcul, en comparant les fractions de particules « candidates » ascendantes dans les cas maxwellien et distribution kappa (pour  $\kappa = 5$ ). À grand  $\lambda_c$  (c.-à-d. les espèces lourdes ou les bases températures), nous observons un accroissement important du rapport  $N_{upward}/N_{exo}$ . Le maximum est également légèrement décalé : il passe de  $\lambda_c \sim 2$  à  $\lambda_c \sim 3.4$ . Par conséquent, la présence d'une distribution du type  $\kappa$  impacte en priorité les espèces lourdes, tandis que la valeur maximale ne change pas de manière significative.

La proportion de particules candidates et donc de particules satellites est donc à priori essentiellement affectée dans le cas d'espèces lourdes ou de faibles températures. À l'avenir, des développements complexes seraient nécessaires pour étudier l'impact final sur les particules satellites (le changement de distribution affectera les particules candidates, les densités des particules collisionnant avec les candidates, les vitesses relatives entre particules etc.).

## H Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons tenté d'évaluer la contribution d'une population spécifique de l'exosphère, les particules satellites, dans les exosphères de la Terre, Titan et Mars. En effet, la plupart des modèles exosphériques sont non collisionnels et n'incluent que les contributions des particules balistiques et en échappement, en se basant par exemple sur l'approche de Chamberlain (1963). Il existe cependant quelques rares collisions dans l'exosphère et celles-ci engendrent des particules satellites, considérées jusqu'à aujourd'hui essentiellement négligeables dans les exosphères planétaires. Chamberlain (1963) proposa une approximation de cette population (même approche que pour les particules balistiques et en échappement, basée sur le théorème de Liouville). Cependant, l'utilisation de ce théorème et le calcul de densités de particules satellites qui en découle n'est ni justifiée ni réaliste. Seule l'approche à l'aide de l'équation de Boltzmann, sous couvert de certaines hypothèses ici, peut permettre un calcul plus rigoureux de la densité de particules satellites. Nous avons donc repris le travail précédent de Richter et al. (1979), basé sur l'équation de Boltzmann, et l'avons remanié, consolidé, pour évaluer l'importance des particules satellites dans les exosphères de la Terre, Titan et Mars.

Notre travail montre que toutes les exosphères n'ont pas du tout les mêmes caractéristiques du point de vue des particules satellites et qu'il n'existe pas de moyen simple pour les modéliser à l'aide d'une approche analytique pure. Nos résultats confirment que l'approximation  $\zeta_{sat}$ , donnée par Chamberlain (1963), surestime largement la densité de particules satellites dans l'exosphère, surtout à haute altitude : d'après Chamberlain (1963), la contribution des particules satellites domine les autres contributions à haute altitude (cf. également le tableau II.1). Par contre, avec un nombre suffisant de collisions et sous certaines conditions, la contribution de particules satellites peut représenter un peu plus de 50% (entre 20% et 60%, selon les conditions d'environnement) de la contribution combinée des particules balistiques et en échappement sur Mars (pour  $H$ ) et près de 36% sur Titan (pour  $H_2$ ). Cependant, la population de particules  $H$ -satellites reste négligeable dans l'exosphère terrestre.

L'existence de ratios très importants pour quelques cas montre l'importance de prendre en compte les collisions dans les modèles exosphériques, si rares soient elles. Négliger ces collisions peut entraîner une vraie sous-estimation des densités à hautes altitudes. Néanmoins, ce rapport entre particules satellites et balistiques plus en échappement ne fournit pas exactement l'écart à un modèle non collisionnel. Seule une modélisation par méthode Monte-Carlo de l'exosphère (DSMC) permet d'évaluer les densités totales de particules, mais une telle approche nécessiterait un temps de calcul énorme pour prendre en compte l'ensemble des collisions dans l'exosphère étendue, et ne permettrait pas nécessairement de distinguer les différents type de populations (balistiques, satellites, ...).

Dans le futur, notre code sera mis à disposition pour la communauté, après quelques remaniements pour le rendre plus ergonomique.

Notre modélisation des profils de densité de particules satellites s'est heurtée à la prise en compte

d'une force externe parfois importante, la pression de radiation solaire. Celle-ci a une influence non négligeable en particulier à hautes altitudes (cf. section C.2), transformant les trajectoires des particules, et impliquant l'existence d'une limite externe pour l'exosphère. Le formalisme utilisé dans l'étude des particules satellites ne permet pas de prendre en compte cette force de manière réaliste. Pour cette raison, nous avons développé dans le chapitre suivant une étude spécifique de l'influence de la pression de radiation sur la structure des exosphères planétaires.

# Chapitre III

## Influence et implication de la pression de radiation sur l'exosphère

### Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Introduction</b>	<b>90</b>
A.1	Origine et détermination de la pression de radiation	92
A.2	Implication sur la dynamique des particules dans l'exosphère	93
A.3	Définition d'une exopause via la pression de radiation	94
<b>B</b>	<b>L'approche théorique</b>	<b>95</b>
B.1	Le formalisme hamiltonien	95
B.2	Le changement de coordonnées	97
B.3	Les constantes du problème	97
B.4	L'expression des coordonnées généralisées	100
B.5	Introduction de potentiels effectifs	102
B.6	L'adimensionnement des équations	104
B.7	Les hypothèses pour la modélisation	106
<b>C</b>	<b>Les différents types de trajectoires</b>	<b>107</b>
C.1	Caractérisation des trajectoires	107
C.2	Visualisation dans l'espace $(x, y, z)$	118
C.3	Visualisation dans le plan $(x, \rho)$	119
C.4	Visualisation dans le plan $(u, w)$	122
C.5	Redéfinition des notions de particules balistiques, satellites et d'échappement	122
<b>D</b>	<b>Calcul des densités de particules balistiques</b>	<b>126</b>
D.1	Approche	127
D.2	Algorithme	129
D.3	Application aux exosphères de la Terre, Mars et Titan	131
<b>E</b>	<b>Calcul des densités de particules en échappement</b>	<b>146</b>

E.1	Approche . . . . .	146
E.2	Algorithme . . . . .	146
E.3	Application à toute l'exosphère et difficultés de sa mise en œuvre . . . . .	146
<b>F</b>	<b>Calcul du flux d'échappement à l'exobase . . . . .</b>	<b>148</b>
F.1	Approche . . . . .	149
F.2	Calcul analytique de l'échappement côté jour . . . . .	149
F.3	Discussion sur l'échappement thermique induit par la pression de radiation	160
<b>G</b>	<b>Implication sur la population satellite . . . . .</b>	<b>162</b>
G.1	Zones de stabilité . . . . .	162
G.2	Calcul des densités des particules satellites . . . . .	167
<b>H</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>170</b>

## A Introduction

L'exosphère est une couche de l'atmosphère très particulière : elle est à la fois liée gravitationnellement à la planète (Terre, Mars, Titan) mais elle est aussi en interaction directe avec le milieu interplanétaire et soumise aux forces externes. Ces influences externes ont plusieurs origines :

- Les photons solaires exercent une force de pression dite de radiation sur les atomes ou molécules. Cette force dépend directement du flux de photons, elle est donc proportionnelle à  $1/r^2$  par rapport à la distance à l'étoile.
- Les autres planètes ou corps massifs à proximité engendrent des perturbations gravitationnelles. Ceci est d'autant plus vrai pour le cas de satellites comme Titan à proximité de planètes massives comme Saturne.
- Le champ magnétique de la planète, soit produit par effet dynamo (p. ex. la Terre ; il est alors à l'origine de ceintures de radiations) soit d'origine crustale (p. ex. Mars), agit sur la dynamique des ions et des électrons et donc sur les interactions neutres/plasma dans l'atmosphère dense et dans l'exosphère.
- Le champ magnétique gelé dans le plasma du vent solaire ou bien de la magnétosphère de la planète hôte comme dans le cas de satellites (par exemple Titan). Ce champ interagit avec celui de la planète, modifie sa topologie et joue sur l'échappement atmosphérique dans l'exosphère (p. ex. processus d'échappement par des ions « pick-up » emmenés le long des lignes de champ)

- Le plasma du vent solaire ou en co-rotation dans le cas de Saturne interagit lui-même fortement avec la magnétosphère et avec l'exosphère au travers de divers processus collisionnels.

Nous allons considérer une exosphère non collisionnelle dans ce chapitre. Cette idée peut paraître erronée au vu du précédent chapitre, où nous avons montré l'importance de telles collisions sur les profils de densité mais cette hypothèse nous permettra d'étudier analytiquement l'influence spécifique de la pression de radiation solaire. Seules deux forces externes sont prises en compte : la force de gravitation de la planète sur l'atome et la pression de radiation, supposée constante au voisinage de la planète, et provenant du Soleil.

Il n'existe qu'un seul article traitant de façon purement analytique l'effet de la pression de radiation sur la dynamique des particules : Bishop and Chamberlain (1989). Dans cet article, par une approche hamiltonienne, Bishop and Chamberlain (1989) déterminent les profils de densité de l'hydrogène sur Mars, Vénus et la Terre et celui du sodium sur Mercure sous l'effet de la pression de radiation. Mais leur approche se limite à un calcul selon l'axe planète-Soleil<sup>1</sup> c'est-à-dire à un cas restrictif en 1D. Ils mettent en avant le phénomène de queue connu pour la géo-couronne : ils comparent le profil de densité côté jour et côté nuit le long de l'axe planète-Soleil obtenu analytiquement et mettent en évidence les densités bien plus élevées côté nuit, en ne tenant compte que de la composante « balistique » (nous redéfinirons pour l'occasion dans la section C.5).

Dans ce chapitre, je généralise l'approche analytique de Bishop and Chamberlain (1989) à toute l'exosphère, supposée non collisionnelle. Je présente et formalise cette approche au cas à trois dimensions. J'estime numériquement les profils de densité de particules dans l'exosphère, non seulement pour les particules balistiques, mais également la démarche à entreprendre pour les particules en échappement (non étudiées par Bishop and Chamberlain (1989)). De plus, j'étends cette approche au calcul du flux d'échappement thermique, généralisant l'idée d'échappement de Jeans au cas incluant l'effet de la pression de radiation. En particulier, j'obtiens une formule analytique pour l'échappement à l'avant de la planète.

Contrairement au chapitre II, nous supposons une exosphère sans collisions, afin de pouvoir appliquer un formalisme analytique incluant l'effet de la pression de radiation solaire. Cela peut paraître trop simplifié mais je voudrais citer en particulier Öpik and Singer (1960) : « *Approximate mathematical solutions are preferable, not only because the errors will be always less than the uncertainty in the physical conditions of a real case, but also because the effects of variable physical conditions can be more easily perceived in a simple model than in the complex exact solution* ».

Je continue de croire en de telles approches car elles permettent de comprendre et d'appréhender mieux la physique qui gouverne ces systèmes tout en gardant une vision à la fois simple et globale du problème.

---

<sup>1</sup>nous verrons que l'estimation des densités sur cet axe est un problème réduit à deux dimensions contrairement au reste de l'exosphère où il est à trois dimensions

## A.1 Origine et détermination de la pression de radiation

La pression de radiation provient de l'absorption d'un photon solaire par un atome ou une molécule. Prenons l'exemple de l'hydrogène. La plupart des photons solaires absorbés par l'hydrogène sont du type Lyman- $\alpha$  : ils sont émis lorsqu'un atome d'hydrogène redescend du premier état excité à l'état fondamental. Les atomes d'hydrogène sont susceptibles de les absorber et de les diffuser de façon isotrope : le photon transfère toute sa quantité de mouvement  $h\nu/c$  à l'atome lors de l'absorption ; par contre, puisque l'émission est isotrope dans l'approximation des mouvements non-relativistes (Burns et al. (1979))(ce que nous supposons ici), la résultante des forces de tous les photons réémis est nulle en moyenne.

La force générée par la pression de radiation  $\vec{F}_{rad}$  est définie comme la quantité de mouvement transférée par tous les photons à chaque seconde à un atome d'hydrogène (Chamberlain and Hunten (1987), p. 354) :

$$\|\vec{F}_{rad}\| = m_H a = \frac{n h \nu}{c} \quad (\text{III.1})$$

où  $h\nu$  est l'énergie d'un photon diffusé,  $n$  le nombre de photons diffusés par seconde,  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide et  $m_H$  la masse de l'hydrogène. Cette formule est indiquée pour l'hydrogène mais nous pouvons évidemment l'appliquer à d'autres espèces.  $n$  est proportionnel au flux de photons et à la section efficace d'absorption du photon. Pour le cas de l'hydrogène, Bishop (1991) donne la formule :

$$a = 0,1774 f_0 \text{ (cm.s}^{-2}\text{)} \quad (\text{III.2})$$

où  $f_0$  est l'intensité du centre de la raie Lyman- $\alpha$  en  $10^{11}$  photons.cm $^{-2}$ .s $^{-1}$ .Å $^{-1}$ .

Dans un cadre relativiste, l'émission du photon n'est pas isotrope. Dans le référentiel en mouvement de l'atome d'hydrogène, l'émission est isotrope. Cependant, si l'atome d'hydrogène se meut à une vitesse  $\vec{v}$ , dans le référentiel d'un observateur fixe, le photon sera émis préférentiellement dans la direction de  $\vec{v}$  par effet relativiste. L'atome transférera donc une partie de sa quantité de mouvement sous forme de photons dans la direction de  $\vec{v}$  en moyenne. Par conservation de la quantité de mouvement, l'atome va subir une force de recul  $\vec{F}_{recul}$  pour chaque photon émis, en moyenne opposée à  $\vec{v}$ . Par un petit calcul, nous montrons :

$$\frac{\|\vec{F}_{recul}\|}{\|\vec{F}_{rad}\|} = \frac{2}{3}\beta + o(\beta) \quad (\text{III.3})$$

où  $\beta = v/c$  est le rapport entre la vitesse de l'atome et la célérité. La résultante de la force due à l'absorption et à l'émission résonnante est alors :

$$\vec{F} = -a \left( \vec{e}_x + \frac{2}{3} \frac{\vec{v}}{c} + o(\beta) \right) \quad (\text{III.4})$$

avec  $\vec{e}_x$  le vecteur unitaire orienté de la planète vers le Soleil. Ce n'est pas tout à fait l'effet Poynting-Robertson car j'ai traité uniquement de la réémission et non de l'absorption. Pour cette

dernière, nous avons le phénomène dit d'aberration c'est-à-dire que le photon reçu par l'hydrogène n'est pas perçu venant directement du Soleil mais d'une direction légèrement différente qui dépend de sa propre vitesse dans le référentiel héliocentrique fixe.

L'approche relativiste montre que l'émission du photon engendre un freinage de la particule au cours de son mouvement proportionnel à  $\beta$ . Les espèces étudiées n'ont généralement pas de vitesses relativistes, les vitesses thermiques sont toujours de l'ordre de quelques kilomètres par seconde (la vitesse thermique de l'hydrogène exosphérique terrestre vaut  $2 - 3 \text{ km.s}^{-1}$ ) et l'échelle de temps sur laquelle cet effet relativiste devient important est de l'ordre de  $\tau \sim c/a \approx 1000$  ans. Nous pouvons donc négliger ce terme relativiste.

Finalement, le système étudié se résume à l'application de deux forces externes : la gravitation dirigée vers la planète et la pression de radiation dans la direction opposée à l'étoile. La relation fondamentale de la dynamique donne :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^2}\vec{e}_r - a\vec{e}_x \quad (\text{III.5})$$

avec  $r$  la distance de la planète à la particule et  $\vec{e}_r$  le vecteur unitaire radial dirigé de la planète vers la particule.

## A.2 Implication sur la dynamique des particules dans l'exosphère

Près de la planète, la pression de radiation est considérée comme une perturbation vis-à-vis de la force d'attraction gravitationnelle. Pour le cas de la Terre, à une unité astronomique,  $a$  vaut  $0,0075 \text{ m.s}^{-2}$  ( $f_0 = 4,2$ ) pour l'hydrogène (Bishop and Chamberlain (1989)) et la gravité de surface est  $9,81 \text{ m.s}^{-2}$ . Comme nous pouvons déjà le pressentir « physiquement », les orbites elliptiques, leurs paramètres (inclinaison, périapse, ligne des nœuds, etc...) vont être perturbées et modifiées au cours du temps (Chamberlain(1987,1993)). De plus, il paraît évident que l'ensemble des particules aura tendance à être petit-à-petit déporté côté nuit.

Sur la figure III.1, j'ai représenté un exemple de trajectoire d'une particule soumise à la pression de radiation au voisinage de la Terre. La trajectoire est obtenue numériquement par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 de l'équation (C.1). Il y a bien dérive de la particule côté nuit mais elle reste cependant liée à la planète : pour ces conditions initiales, la pression de radiation n'arrive pas à arracher la particule de l'emprise gravitationnelle de la planète. L'orbite n'est pas périodique mais il existe a priori avec cet exemple des cas où les particules peuvent rester à proximité de la planète.

Ce problème est finalement analogue à l'effet « Stark » (Stark (1914)) : un atome d'hydrogène est plongé dans un champ électrique constant. Le champ électrique va influencer ses états électroniques traités par la théorie des perturbations. Ici, il n'est pas question d'effets quantiques mais le problème est similaire. Notre particule (atome ou molécule) se comporte comme l'électron classique : le champ électrostatique du proton sur l'électron est analogue à l'attraction gravitationnelle de la planète sur

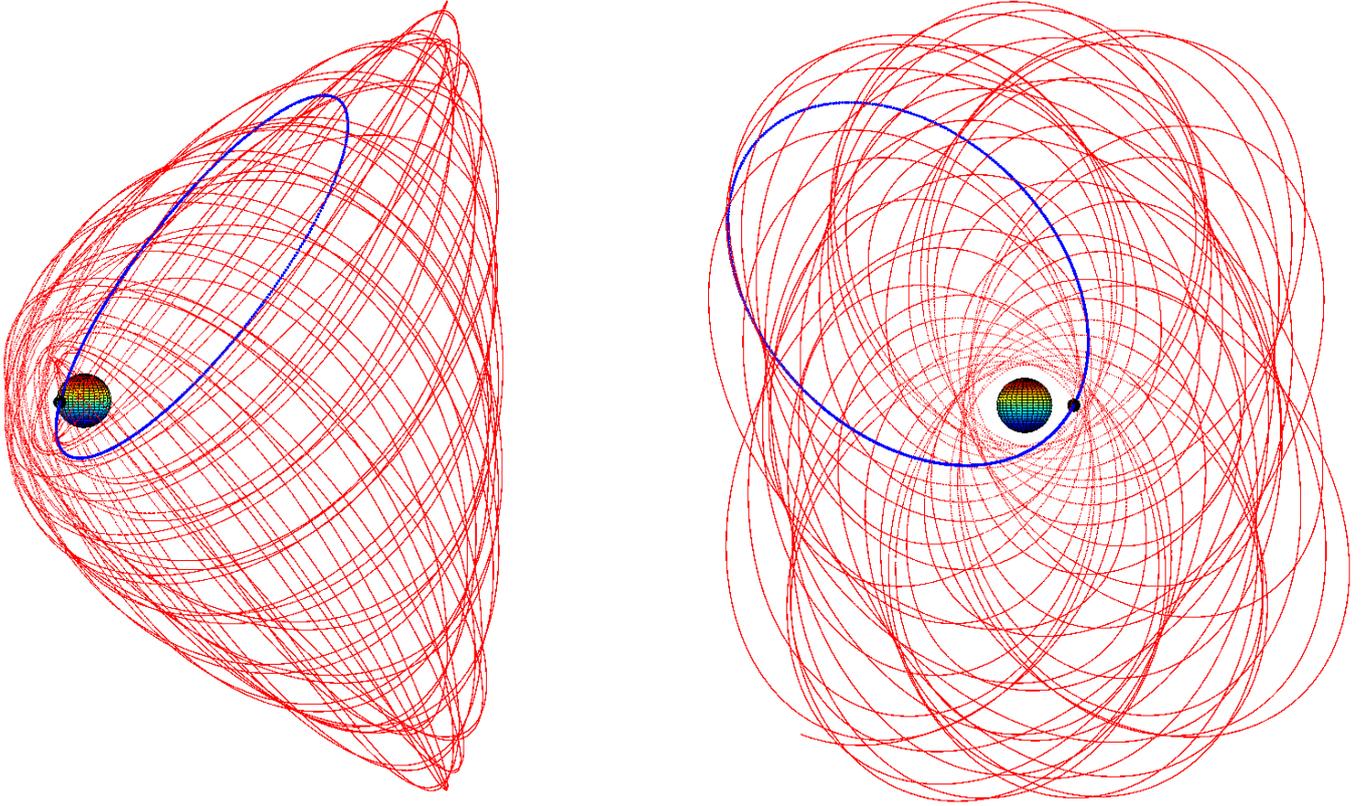


FIGURE III.1 – Exemple de trajectoire d’une particule soumise à la pression de radiation en orbite autour de la Terre. La sphère colorée représente l’exobase située à 500 km d’altitude. Le point noir représente la position initiale. La trajectoire est de couleur rouge et l’ellipse bleue correspond à la trajectoire non perturbée par la pression de radiation pour les mêmes conditions initiales au point noir. À gauche, il s’agit d’une vue de côté de l’axe Terre-Soleil, le Soleil situé sur la gauche. Le panneau de droite correspond à une vue de face de la trajectoire.

la particule (les deux forces varient en  $r^{-2}$ ) et le champ électrique constant est analogue à la pression de radiation provenant du Soleil, supposée constante.

### A.3 Définition d’une exopause via la pression de radiation

Nous nous rendons bien compte que la pression de radiation constante va inévitablement dominer à grande distance l’attraction gravitationnelle : la première est constante (en première approximation, l’effet Doppler n’est pas pris en compte ni le cône d’ombre) alors que la deuxième décroît en  $r^{-2}$ . Soit  $R_{pressure}$  la distance limite à partir de laquelle la pression de radiation  $a$  devient, en norme, égale à celle de la force gravitationnelle  $-GM/r^2$  (Bishop (1991)). Nous avons :

$$R_{pressure} = \sqrt{\frac{GM}{a}} = \sqrt{\frac{GMmc}{h\nu n}} \quad (\text{III.6})$$

Nous pouvons donc supposer vraisemblablement qu’au-delà de cette limite la dynamique de la particule est imposée par la pression de radiation. Comme la pression de radiation applique une accélération constante dans la direction opposée au Soleil, pour des distances supérieures à  $R_{pressure}$ , la particule sera soufflée et a priori perdue. La pression de radiation introduit l’idée d’exopause : limite haute de l’exosphère la séparant du milieu interplanétaire, c.-à-d. limite au-delà de laquelle aucune

particule issue de la planète ne peut revenir. Nous verrons plus loin (partie D.3.a) si l'exopause se situe effectivement à la distance  $R_{pressure}$ .

Bishop (1991) appliqua la même méthode que Chamberlain (1963) pour déterminer analytiquement la densité de particules balistiques, en échappement et satellites, avec une exopause à distance finie (Chamberlain (1963) repose finalement sur  $R_{pressure} \rightarrow +\infty$ ). Mais il y a un petit bémol : il suppose la même distance finie dans toutes les directions ET que les trajectoires restent des ellipses. Dans la suite du chapitre, nous allons montrer que les trajectoires s'écartent progressivement du cas elliptique au cours du temps et l'approche simplifiée de Bishop (1991) est inadaptée.

## B L'approche théorique

Dans le but de caractériser complètement les effets de la pression de radiation sur la dynamique des atomes ou molécules, il ne faut pas uniquement se baser sur la relation fondamentale de la dynamique mais sur le principe de moindre action dont découle la mécanique lagrangienne et hamiltonienne.

### B.1 Le formalisme hamiltonien

Par définition, le lagrangien  $\mathcal{L}$  d'un système dynamique est donné par :

$$\mathcal{L} = T - U \quad (\text{III.7})$$

où  $T$  est l'énergie cinétique de la particule et  $U$  son énergie potentielle.

Dans le cas de la symétrie sphérique, les coordonnées associées sont  $(r, \theta, \phi)$  où  $\theta$  est défini comme l'angle entre le vecteur position et l'axe  $(Ox)$  (la planète est le centre du repère et l'axe dirigé vers le Soleil pour les  $x$  positifs),  $\phi$  l'angle par rapport au plan de l'écliptique dans le plan  $(yOz)$  (cf. III.2). Comme la pression de radiation est supposée constante en norme et en direction au voisinage de la planète, son travail ne dépend pas de la trajectoire empruntée (le travail dépend uniquement du point de départ et d'arrivée), elle dérive alors d'une énergie potentielle.

L'expression de la pression de radiation s'écrit :

$$\vec{F}_{rad} = -ma\vec{e}_x \quad (\text{III.8})$$

où  $a$  est l'accélération due à la pression de radiation et  $m$ , la masse de la particule. On en déduit l'énergie potentielle  $E_{rad}$  correspondante :

$$E_{rad} = \int ma \vec{e}_x \cdot d\vec{l} = ma \int dx = max = mar \cos \theta \quad (\text{III.9})$$

Naturellement, l'énergie potentielle gravitationnelle est :

$$E_{grav} = -\frac{GMm}{r} \quad (\text{III.10})$$

Le Lagrangien est donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{GMm}{r} - mar \cos \theta \\ &= \frac{1}{2}m((\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r \sin \theta \dot{\phi})^2) + \frac{GMm}{r} - mar \cos \theta\end{aligned}\quad (\text{III.11})$$

ne dépendant ni de  $\phi$  ni de  $t$ .

Il faut maintenant déterminer les moments conjugués de chaque coordonnée. Par définition, le moment conjugué d'une coordonnée spatiale  $q_i$  ( $r$ ,  $\theta$  ou  $\phi$  ici) est donné par :

$$p_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (\text{III.12})$$

ce qui donne pour  $r$ ,  $\theta$  et  $\phi$  :

$$\begin{aligned}p_r &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\theta &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \\ p_\phi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}\end{aligned}\quad (\text{III.13})$$

L'Hamiltonien d'un système est défini par :

$$\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_i^N p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (\text{III.14})$$

L'Hamiltonien ne s'écrit qu'en fonction des coordonnées généralisées  $q_i$  et de leurs moments conjugués  $p_i$ . Il faudra remplacer les dérivées des coordonnées généralisées en fonction des moments conjugués.

Il faut donc remplacer dans l'expression du Lagrangien les variables  $\dot{q}_i$  en fonction des variables  $p_i$ . L'Hamiltonien  $\mathcal{H}$  du système est alors :

$$\mathcal{H}(r, \theta, \phi, p_r, p_\theta, p_\phi, t) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} - \frac{GMm}{r} + mar \cos \theta \quad (\text{III.15})$$

et les équations canoniques d'Hamilton sont par définition :

$$\dot{q}_i \equiv \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i \equiv -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}; \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \equiv \frac{d\mathcal{H}}{dt} \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (\text{III.16})$$

## B.2 Le changement de coordonnées

A priori, l'Hamiltonien  $\mathcal{H}$  ne présente pas de propriétés spécifiques. Pour approfondir l'étude, il faut adapter la même approche que pour l'effet Stark : passer du système de coordonnées cartésiennes au système de coordonnées paraboliques (Sommerfeld (1934)).

Sur les figures III.2, sont représentés les différents types de repère : cartésien, sphérique et parabolique. Pour la suite de cette étude, nous allons nous placer dans un repère parabolique. Un point est repéré par les coordonnées  $u$ ,  $w$  et  $\phi$ . Il vient naturellement que  $u + w = 2r$  et  $u - w = 2x$  et le Lagrangien associé :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u, w, \dot{u}, \dot{w}, \dot{\phi}) &= \frac{1}{2}m \left( \left( \frac{\dot{u} - \dot{w}}{2} \right)^2 + (\sqrt{uw})^2 + (\sqrt{uw}\dot{\phi})^2 \right) + \frac{2GMm}{u+w} - ma\frac{u-w}{2} \\ &= \frac{1}{2}m \left( \frac{\dot{u}^2 + \dot{w}^2 - 2\dot{u}\dot{w}}{4} + \frac{\dot{u}^2w^2 + \dot{w}^2u^2 + 2uw\dot{u}\dot{w}}{4uw} + uw\dot{\phi}^2 \right) + \frac{2GMm}{u+w} - ma\frac{u-w}{2} \\ &= \frac{1}{2}m \left( \frac{\dot{u}^2w(u+w) + \dot{w}^2u(u+w)}{4uw} + uw\dot{\phi}^2 \right) + \frac{2GMm}{u+w} - ma\frac{u-w}{2}\end{aligned}$$

Les moments conjugués sont alors :

$$\begin{aligned}p_u &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} = \frac{m(u+w)}{4u} \dot{u} \\ p_w &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{w}} = \frac{m(u+w)}{4w} \dot{w} \\ p_\phi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = muw\dot{\phi}\end{aligned}\tag{III.17}$$

d'où l'Hamiltonien :

$$\mathcal{H}(u, w, p_u, p_w, p_\phi) = \frac{2up_u^2 + 2wp_w^2}{m(u+w)} + \frac{p_\phi^2}{2muw} - \frac{2GMm}{u+w} + ma\frac{u-w}{2}\tag{III.18}$$

ne dépendant ni de  $\phi$ , ni de  $t$ .

Nous pouvons aussi donner au passage les relations liant  $p_u$ ,  $p_w$  à  $p_r$  et  $p_\theta$  :

$$\begin{aligned}p_r &= \frac{2(up_u + wp_w)}{u+w} \\ p_\theta &= \sqrt{uw}(p_w - p_u)\end{aligned}$$

## B.3 Les constantes du problème

Cette approche à l'aide des coordonnées paraboliques n'est pas anodine, elle rend compte plus facilement d'éventuelles constantes du mouvement. Pour le cas gravitationnel, il existe quatre constantes du mouvement : les trois composantes du moment cinétique et l'énergie mécanique. Bien que la pres-

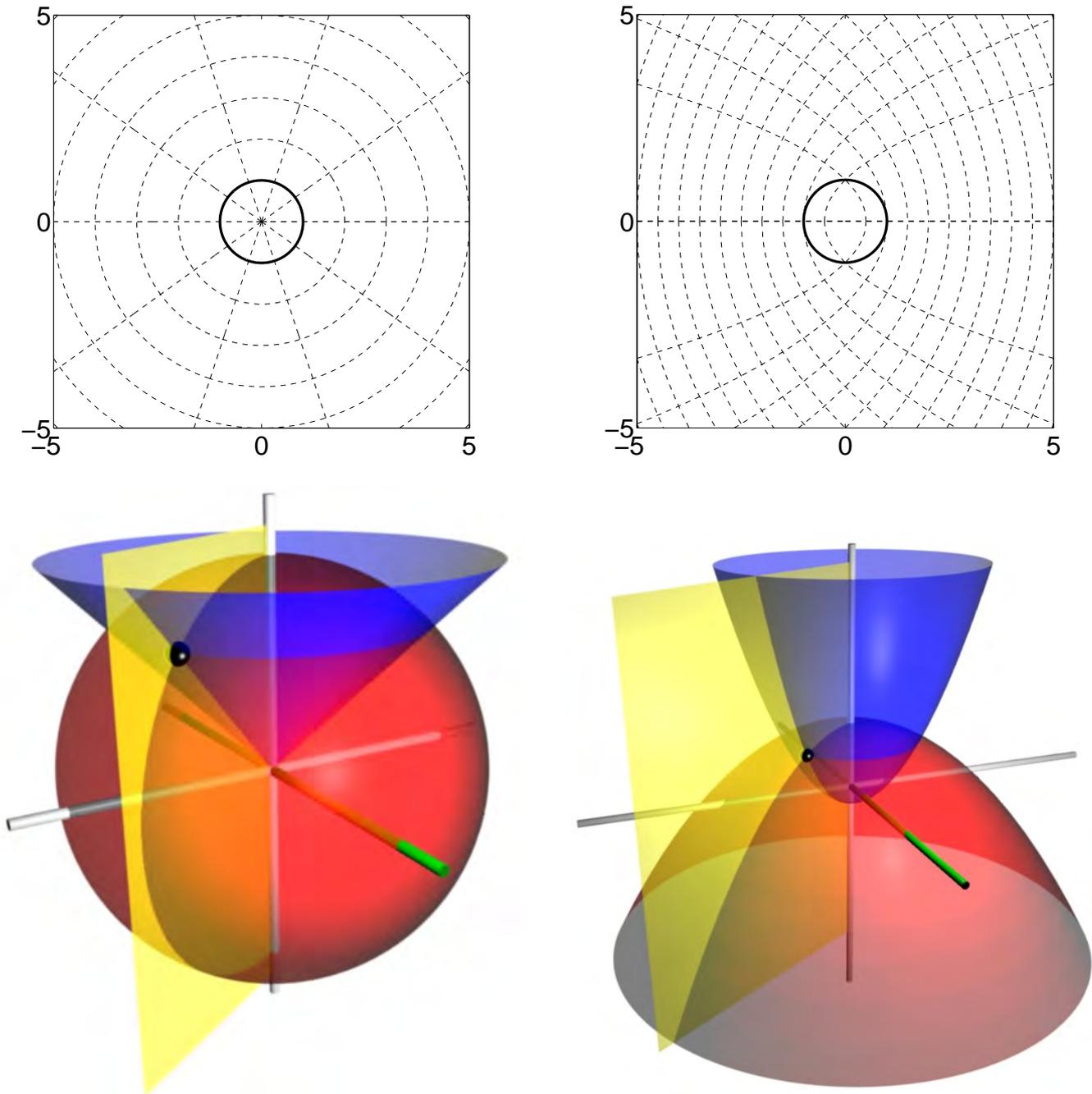


FIGURE III.2 – Représentations en deux et trois dimensions d'un repère sphérique et parabolique. Soient  $(x, y, z)$  les coordonnées dans le repère cartésien,  $(r, \theta, \phi)$  celles dans le repère sphérique et  $(u, w, \phi)$  celles dans le repère parabolique. Les relations reliant ces deux représentations sont :  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + x = r + x = r(1 + \cos \theta)$  et  $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x = r - x = r(1 - \cos \theta)$  (à  $u$  ou  $w$  constant, nous obtenons l'équation d'une parabole en coordonnées polaires). Pour les cas en trois dimensions, nous supposons que l'axe  $(Ox)$  est orienté de bas en haut. En haut à gauche : les lignes à  $x$  et  $y$  constants sont en pointillés. En haut à droite : les lignes à  $r$  et  $\theta$  constants sont en pointillés. En bas à gauche : en rouge, il s'agit de la surface à  $r$  constant, en bleu à  $\theta$  constant et en jaune à  $\phi$  constant (Source : [http://en.wikipedia.org/wiki/Parabolic\\_coordinates](http://en.wikipedia.org/wiki/Parabolic_coordinates)). En bas à droite : en rouge, il s'agit de la surface à  $u$  constant, en bleu à  $w$  constant et en jaune à  $\phi$  constant (Source : [www.cs.mcgill.ca/~rwest/link-suggestion/wpcd\\_2008-09\\_augmented/wp/s/Spherical\\_coordinate\\_system.htm](http://www.cs.mcgill.ca/~rwest/link-suggestion/wpcd_2008-09_augmented/wp/s/Spherical_coordinate_system.htm)).

sion de radiation brise la symétrie sphérique imposée par la gravitation, il existe néanmoins trois constantes du mouvement que nous allons détailler ici.

### B.3.a L'énergie mécanique $E$

Notre particule n'est soumise qu'à deux forces externes. Ces forces sont conservatives et dérivent donc d'un potentiel.

$$\vec{F}_{grav} = -\vec{\nabla} \left( -\frac{GMm}{r} \right) = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r \quad (\text{III.19})$$

$$\vec{F}_{rad} = -\vec{\nabla}(max) = -ma\vec{e}_x \quad (\text{III.20})$$

L'Hamiltonien de notre particule ne dépend donc pas du temps :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0 \quad (\text{III.21})$$

Il est lui-même une constante car il s'agit d'un système autonome : l'Hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps. Il se rapporte dans ce cas à l'énergie mécanique du système  $E$  (tous les Hamiltoniens ne correspondent pas à l'énergie mécanique, p. ex. prendre le cas d'une particule chargée dans un champ magnétique).

### B.3.b La constante dite de Laplace $A$

Grâce au résultat du paragraphe précédent, nous pouvons réécrire l'équation (III.18).

$$E = \frac{2up_u^2 + 2wp_w^2}{m(u+w)} + \frac{p_\phi^2}{2muw} - \frac{2GMm}{u+w} + ma\frac{u-w}{2} \quad (\text{III.22})$$

En multipliant chaque membre par  $2m(u+w)$ , nous avons :

$$2m(u+w)E = 4up_u^2 + 4wp_w^2 + p_\phi^2 \left( \frac{1}{w} + \frac{1}{u} \right) - 4GMm^2 + m^2a(u^2 - w^2) \quad (\text{III.23})$$

Nous remarquons qu'il n'existe plus de termes liant  $u$  à  $w$ , il y a uniquement une somme de termes dépendant de  $u$ ,  $w$  ou d'aucun des deux (p. ex.  $-4GMm^2$ ). En plaçant tous les termes dépendant de  $u$  à gauche, de  $w$  à droite en répartissant le terme  $-4GMm^2$  symétriquement, le résultat est :

$$2muE - 4up_u^2 - \frac{p_\phi^2}{u} - m^2au^2 + 2GMm^2 = -2mwE + 4wp_w^2 + \frac{p_\phi^2}{w} - m^2aw^2 - 2GMm^2 \quad (\text{III.24})$$

Or les variables  $u$ ,  $w$ ,  $p_u$  et  $p_w$  sont traitées comme des variables indépendantes. Nous avons donc une fonction uniquement de  $u$  et  $p_u$  à gauche égale à une fonction uniquement de  $w$  et  $p_w$  à droite. Ces deux fonctions sont donc égales à une constante dite de « séparation »  $A$ .

$$2muE - 4up_u^2 - \frac{p_\phi^2}{u} - m^2au^2 + 2GMm^2 = A = -2mwE + 4wp_w^2 + \frac{p_\phi^2}{w} + m^2aw^2 - 2GMm^2 \quad (\text{III.25})$$

Montrons qu'il s'agit bien d'une constante en prenant la fonction de gauche :

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{dt} &= 2mE\dot{u} - 4\dot{u}p_u^2 - 8up_u\frac{dp_u}{dt} + \dot{u}\frac{p_\phi^2}{u^2} - 2m^2au\dot{u} \\
&= \dot{u} \left( 2mE - 4p_u^2 - \frac{4w(p_w^2 - p_u^2)}{u+w} - \frac{p_\phi^2(u+w)}{u^2w} + \frac{4GMm^2}{u+w} + m^2a(u+w) + \frac{p_\phi^2}{u^2} - 2m^2au \right) \\
&= \frac{8up_u}{u+w} \left( E - \frac{4wp_w^2 + 4up_u^2}{2m(u+w)} - \frac{p_\phi^2}{2muw} + \frac{2GMm}{u+w} - ma\frac{u-w}{2} \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{III.26}$$

Il s'agit bien d'une constante de séparation : cette quantité est conservée au cours du mouvement.

### B.3.c La composante du moment cinétique le long de l'axe Soleil-planète $p_\phi$

Il reste une dernière constante du mouvement. D'après les équations canoniques d'Hamilton :

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} = 0 \tag{III.27}$$

puisque l'Hamiltonien ne dépend pas explicitement de  $\phi$ .  $p_\phi$  est donc aussi une constante du mouvement. Mais à quoi correspond  $p_\phi$  physiquement ? Par définition :

$$p_\phi = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = muw\dot{\phi} \tag{III.28}$$

C'est la composante du moment cinétique sur l'axe Soleil-planète. Comme une force centrale n'affecte pas la variation du moment cinétique et que la pression de radiation n'agit que dans la direction Soleil-planète, la composante du moment cinétique alignée avec cette dernière ne variera pas (la dérivée temporelle du moment cinétique est toujours orthogonale au vecteur position et à l'accélération :  $d\vec{L}/dt = m\vec{r} \wedge \vec{a}$ ).

Bishop and Chamberlain (1989) ont justement négligé ce terme,  $p_\phi$ , qu'ils ont considéré nul pour ramener le problème général à un cas 1D. Nous allons au contraire garder ce paramètre dans nos développements afin de généraliser l'approche au cas 2D.

## B.4 L'expression des coordonnées généralisées

Nous venons de définir finalement trois constantes du mouvement :  $E$ ,  $A$  et  $p_\phi$ . Ces constantes ne dépendent donc que des conditions initiales et sont conservées au cours du mouvement. Il est possible alors de réécrire les coordonnées généralisées  $p_u$  et  $p_w$  en fonction de ces constantes. À partir de l'équation (III.25), nous obtenons :

$$p_u^2 = \frac{2mu^2E - p_\phi^2 - mau^3 + (2GMm^2 - A)u}{4u^2} \tag{III.29}$$

$$p_w^2 = \frac{2mw^2E - p_\phi^2 + maw^3 + (2GMm^2 + A)w}{4w^2} \quad (\text{III.30})$$

Par contre, cette réécriture ne permet pas de faire la distinction entre les valeurs positive et négative.

$$p_u = \pm \sqrt{\frac{2mu^2E - p_\phi^2 - mau^3 + (2GMm^2 - A)u}{4u^2}} \quad (\text{III.31})$$

$$p_w = \pm \sqrt{\frac{2mw^2E - p_\phi^2 + maw^3 + (2GMm^2 + A)w}{4w^2}} \quad (\text{III.32})$$

Par souci de commodité et pour une meilleure appréhension, nous posons :

$$\begin{aligned} P_3(u) &= mau^3 - 2mEu^2 - (2GMm^2 - A)u + p_\phi^2 \\ Q_3(w) &= maw^3 + 2mEw^2 + (2GMm^2 + A)w - p_\phi^2 \end{aligned} \quad (\text{III.33})$$

ce qui donne la formulation réduite :

$$p_u = \pm \sqrt{\frac{-P_3(u)}{4u^2}} \quad (\text{III.34})$$

$$p_w = \pm \sqrt{\frac{Q_3(w)}{4w^2}} \quad (\text{III.35})$$

avec  $P_3$  et  $Q_3$  des polynômes de degré 3 et tels que le coefficient du terme de plus haut degré soit positif. L'étude de ces deux polynômes et de leurs racines jouent un rôle crucial dans la dynamique de la particule. Toutes nos grandeurs sont des quantités réelles, il faut donc que  $-P_3(u) > 0$  et  $Q_3(w) > 0$  pour que  $p_u$  et  $p_w$  le soient. Nous en y reviendrons plus en détail dans la partie C.1.

À partir des conditions initiales et de la position de la particule, nous pouvons déterminer, au signe près, l'impulsion de la particule ce qui réduit le nombre de dimensions du problème. Le système d'équations à résoudre passe de 3 équations d'ordre 2 (c.-à-d. la relation fondamentale de la dynamique) à 3 équations d'ordre 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = \pm \frac{2\sqrt{-P_3(u)}}{m(u+w)} \\ \frac{dw}{dt} = \pm \frac{2\sqrt{Q_3(w)}}{m(u+w)} \\ \frac{d\phi}{dt} = \frac{p_\phi}{muw} \end{array} \right. \quad (\text{III.36})$$

Il faut néanmoins les vitesses initiales pour déterminer  $E$ ,  $A$  et  $p_\phi$  et les signes. Il sera possible par la suite de lever l'ambiguïté sur le signe, ce qui est d'autant plus important qu'il change au cours du mouvement.

## B.5 Introduction de potentiels effectifs

Pour faciliter la résolution de ces équations, nous pouvons nous placer dans le formalisme un peu plus poussé d'Hamilton-Jacobi. Nous définissons tout d'abord l'action  $\mathcal{S}$  par :

$$\mathcal{S}[\vec{q}, t, \vec{q}_0, t_0] = \int_{t_0}^t \mathcal{L}(\vec{q}(\tilde{t}), \dot{\vec{q}}(\tilde{t}), \tilde{t}) d\tilde{t} \quad (\text{III.37})$$

Cette action ne dépend que des coordonnées généralisées  $q_i$ , du temps  $t$  et des conditions initiales  $\vec{q}_0$  à  $t = t_0$ .

De ce formalisme, il en sort deux équations importantes. Une variation infinitésimale de  $\mathcal{S}$  s'écrit :

$$d\mathcal{S} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} dt \quad (\text{III.38})$$

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = \mathcal{L}$$

Nous avons alors :

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i \quad (\text{III.39})$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = -\mathcal{H}$$

Cette dernière est dite équation d'Hamilton-Jacobi. Comme notre système est tel que  $\mathcal{H} = E =$  constante, il est possible de faire une séparation des variables sur l'action.

$$\mathcal{S}[u, w, \phi, t, u_0, w_0, \phi_0, t_0] = -E(t - t_0) + \tilde{\mathcal{S}}[u, w, \phi, u_0, w_0, \phi_0, E] \quad (\text{III.40})$$

avec  $\tilde{\mathcal{S}}$  la partie de l'action  $\mathcal{S}$  indépendante du temps  $t$ .

Revenons en à notre problème. L'impulsion conjuguée  $p_\phi$  est une constante du mouvement d'où

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi} = p_\phi = \text{constante} \quad (\text{III.41})$$

L'action  $\mathcal{S}$  (III.40) peut être de nouveau simplifiée

$$\mathcal{S}[u, w, \phi, t, u_0, w_0, \phi_0, t_0] = -E(t - t_0) + p_\phi(\phi - \phi_0) + \hat{\mathcal{S}}[u, w, u_0, w_0, E, p_\phi] \quad (\text{III.42})$$

avec  $\hat{\mathcal{S}}$  la partie de l'action  $\mathcal{S}$  dépendante ni du temps  $t$  ni de l'angle  $\phi$ .

Réécrivons l'équation III.25 en fonction de l'action :

$$2muE - 4u \left( \frac{\partial \hat{\mathcal{S}}}{\partial u} \right)^2 - \frac{p_\phi^2}{u} + 2GMm^2 - m^2au^2 = A \quad (\text{III.43})$$

$$-2mwE + 4w \left( \frac{\partial \hat{\mathcal{S}}}{\partial w} \right)^2 + \frac{p_\phi^2}{w} - 2GMm^2 - m^2aw^2 = A$$

L'action est de nouveau séparable ici : dans la première équation, la dérivée partielle de  $\hat{\mathcal{S}}$  par rapport à  $u, p_u$ , ne dépend que de  $u, E, p_\phi$  et  $A$ , et la dérivée partielle de  $\hat{\mathcal{S}}$  par rapport à  $w, p_w$ , ne dépend que de  $w, E, p_\phi$  et  $A$ .  $\hat{\mathcal{S}}$  peut alors s'écrire :

$$\hat{\mathcal{S}}[u, w, u_0, w_0, E, p_\phi] = \mathcal{S}_u[u, E, A, p_\phi] + \mathcal{S}_w[w, E, A, p_\phi] \quad (\text{III.44})$$

$$2muE - 4u \left( \frac{d\mathcal{S}_u}{du} \right)^2 - \frac{p_\phi^2}{u} + 2GMm^2 - m^2au^2 = A \quad (\text{III.45})$$

$$-2mwE + 4w \left( \frac{d\mathcal{S}_w}{dw} \right)^2 + \frac{p_\phi^2}{w} - 2GMm^2 - m^2aw^2 = A$$

$$\left( \frac{d\mathcal{S}_u}{du} \right)^2 = \frac{m}{2} \left( E - \frac{p_\phi^2}{2mu^2} + \frac{GMm}{u} - \frac{A}{2mu} - \frac{mau}{2} \right) > 0 \quad (\text{III.46})$$

$$\left( \frac{d\mathcal{S}_w}{dw} \right)^2 = \frac{m}{2} \left( E - \frac{p_\phi^2}{2mw^2} + \frac{GMm}{w} + \frac{A}{2mw} + \frac{maw}{2} \right) > 0$$

Des deux dernières expressions, nous introduisons deux potentiels effectifs :

$$V_u(u) = \frac{p_\phi^2}{2mu^2} - \frac{GMm}{u} + \frac{A}{2mu} + \frac{mau}{2} \quad (\text{III.47})$$

$$V_w(w) = \frac{p_\phi^2}{2mw^2} - \frac{GMm}{w} - \frac{A}{2mw} - \frac{maw}{2}$$

ce qui résume les équations III.46 à :

$$\left( \frac{d\mathcal{S}_u}{du} \right)^2 = \frac{m}{2} (E - V_u(u)) > 0 \quad (\text{III.48})$$

$$\left( \frac{d\mathcal{S}_w}{dw} \right)^2 = \frac{m}{2} (E - V_w(w)) > 0$$

Ces deux fonctions III.47 sont appelées potentiels effectifs. Elles sont analogues au potentiel dont dérivent les forces conservatives. Par contre, leur origine n'est pas directement liée à une force. En examinant l'Hamiltonien (III.18), nous nous rendons compte qu'une partie de l'énergie cinétique,  $p_\phi^2/2muw$ , ne dépend finalement que de la position, puisque  $p_\phi$  est une constante. Nous pouvons donc greffer cette partie dans la contribution de l'énergie potentielle et avoir une particule soumise à un potentiel fictif, fonction uniquement de la position et des conditions initiales, corrigeant l'énergie

potentielle de base.

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \underbrace{\frac{2up_u^2 + 2wp_w^2}{m(u+w)} + \frac{p_\phi^2}{2muw}}_{\text{Énergie cinétique}} - \underbrace{\frac{2GMm}{u+w} + ma\frac{u-w}{2}}_{\text{Énergie potentielle}} \\
&= \frac{2up_u^2 + 2wp_w^2}{m(u+w)} + \underbrace{\frac{p_\phi^2}{2muw} - \frac{2GMm}{u+w} + ma\frac{u-w}{2}}_{\text{Énergie potentielle effective}} \\
&= \frac{2up_u^2 + 2wp_w^2}{m(u+w)} + \frac{uV_u(u) + wV_w(w)}{u+w}
\end{aligned} \tag{III.49}$$

Ces deux dernières équations imposent à la fois  $E - V_u(u) > 0$  ET  $E - V_w(w) > 0$ . Le mouvement suivant  $u$  est découplé du mouvement suivant  $w$  mais leurs évolutions dans le temps sont liées (cf. le système (III.36)).

Sur la figure III.3, nous avons représenté un exemple de  $V_u$  et  $V_w$ . Ce tracé est assez similaire au cas gravitationnel pur pour des distances proches de la planète, située à  $u = 0$  et  $w = 0$  : pour une particule de moment cinétique  $L$ , le potentiel effectif est  $L^2/2mr^2 - GMm/r$ . Dans chaque direction,  $u$  et  $w$ , la particule obéit à un champ de force distinct. La dynamique sera donc différente sur la coordonnée  $u$  comparée à celle sur  $w$ . Ceci s'observe clairement sur la figure : le puits de potentiel est plus creusé pour  $V_u$  mais  $\forall E$ , le mouvement est toujours borné dans la direction  $u$ . Pour le potentiel  $V_w$ , il existe un puits de potentiel, pas toujours, près de la planète. Le mouvement peut-être borné dans la direction  $w$  dans le puits ou non pour des valeurs de  $w$  plus grandes.

## B.6 L'adimensionnement des équations

Il est souvent nécessaire par commodité et aussi pour des raisons numériques (p. ex. éviter les *overflow* et *underflow*) d'adimensionner les équations c.-à-d. réécrire toutes les variables  $x$  sous la forme  $x = \alpha X$  où  $X$  est la variable adimensionnée associée à  $x$  et  $\alpha$  une grandeur caractéristique du problème. Nous avons déjà établi une longueur caractéristique :  $R_{pressure}$ . Nous posons naturellement :

$$u = R_{pressure}U \tag{III.50}$$

$$w = R_{pressure}W \tag{III.51}$$

De plus, notre problème de départ est la répartition des densités des atomes ou molécules soumis à la pression de radiation dans l'exosphère. L'énergie cinétique de ces particules est de l'ordre de  $k_B T$ . Nous adimensionnons  $E$  :

$$E = k_B T \mathcal{E} \tag{III.52}$$

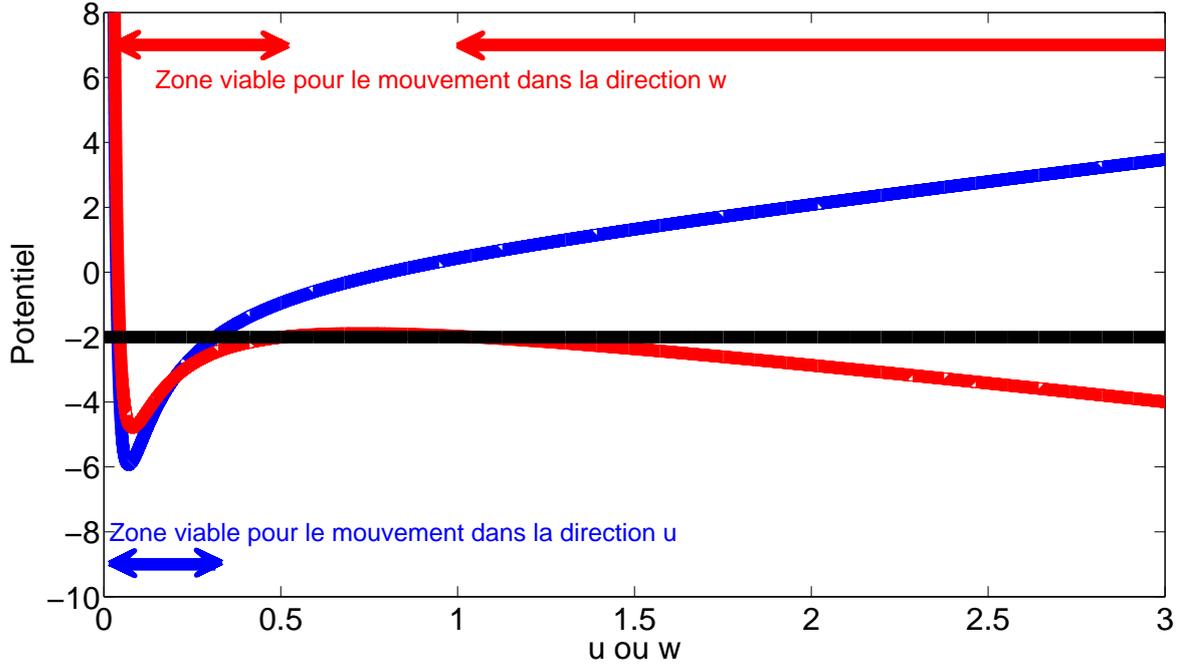


FIGURE III.3 – Exemple de tracés pour  $V_u(u)$  en bleu et  $V_w(w)$  en rouge avec des valeurs quelconques de  $A$  et  $p_\phi$  non nulles. L'axe des abscisses est soit  $u$  soit  $w$ . Nous avons fixé une énergie mécanique négative arbitraire  $E$  au trait noir horizontal. La particule ne peut se mouvoir que pour les conditions  $E - V_u > 0$  et  $E - V_w > 0$ . Elle ne peut donc dans ce cas évoluer que dans des zones bien définies de l'espace dans la direction  $u$  et la direction  $w$  représentées par les flèches et double-flèches horizontales. Nous remarquons qu'à grande distance, le potentiel  $V_w$  repasse sous la barre noire horizontale représentant l'énergie mécanique. En effet, pour  $u \gg 1$ ,  $V_u(u) \sim mau/2$  et pour  $w \gg 1$ ,  $V_w(w) \sim -maw/2$ . À grande distance, nous avons  $E - V_w > 0$ .

Cela impose dans l'Hamiltonien :

$$p_u = \sqrt{mk_B T P_U} \quad (\text{III.53})$$

$$p_w = \sqrt{mk_B T P_W} \quad (\text{III.54})$$

$$p_\phi = \sqrt{mk_B T R_{\text{pressure}} P_\phi} \quad (\text{III.55})$$

et finalement

$$A = mk_B T R_{\text{pressure}} \mathcal{A} \quad (\text{III.56})$$

Nous écrivons les grandeurs définies précédemment en fonction de ces nouveaux paramètres :

$$\mathcal{E} = \frac{2UP_U^2 + 2WP_W^2}{U + W} + \frac{P_\phi^2}{2UW} - \frac{2\lambda_a}{U + W} + \frac{\lambda_a}{2}(U - W) \quad (\text{III.57})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 2\mathcal{E}U - 4UP_U^2 - \frac{P_\phi^2}{U} + 2\lambda_a - \lambda_a U^2 \\ &= -2\mathcal{E}W + 4WP_W^2 + \frac{P_\phi^2}{W} - 2\lambda_a - \lambda_a W^2 \end{aligned} \quad (\text{III.58})$$

$$P_3(U) = \lambda_a U^3 - 2\mathcal{E}U^2 + (\mathcal{A} - 2\lambda_a)U + P_\phi^2 \quad (\text{III.59})$$

$$Q_3(W) = \lambda_a W^3 + 2\mathcal{E}W^2 + (\mathcal{A} + 2\lambda_a)W - P_\phi^2$$

$$\mathcal{V}_U(U) = \frac{P_\phi^2}{2U^2} - \frac{2\lambda_a - \mathcal{A}}{2U} + \frac{\lambda_a U}{2} \quad (\text{III.60})$$

$$\mathcal{V}_W(W) = \frac{P_\phi^2}{2W^2} - \frac{2\lambda_a + \mathcal{A}}{2W} - \frac{\lambda_a W}{2}$$

avec  $\lambda_a$  :

$$\lambda_a = \frac{\sqrt{GMam}}{k_B T} = \frac{GMm}{k_B T R_{pressure}} = \lambda(R_{pressure}) \quad (\text{III.61})$$

qui n'est autre que le paramètre de Jeans à la distance  $R_{pressure}$ . Ce paramètre rend compte à quel point la pression de radiation est forte.

## B.7 Les hypothèses pour la modélisation

Cette nouvelle approche pour estimer les effets de la pression de radiation dans l'exosphère présente ses limites et ne s'applique que sous certaines hypothèses :

- L'exosphère est supposée non-collisionnelle.
- La distribution des vitesses à l'exobase est supposée maxwellienne et l'exosphère isotherme.
- Les effets relativistes liés à la particule sont négligés : cela comprend aussi bien les effets d'anisotropie sur la diffusion que l'effet Doppler sur l'absorption.
- L'ombre de la Terre n'est pas prise en compte.
- Contrairement à Bishop and Chamberlain (1989), nous tenons compte de la différence d'accélération induite à l'exobase par la pression de radiation. Nous supposons que l'exobase est sphérique mais que l'ensemble des forces qui s'applique à ce niveau ne présente pas cette symétrie, sachant que la pression de radiation n'est qu'une légère perturbation à ce niveau.

## C Les différents types de trajectoires

Nous allons dorénavant nous intéresser aux trajectoires des particules avant d'attaquer les profils de densités. Dans le chapitre précédent, nous avons vu que les trajectoires sont de la famille des coniques : elliptiques pour les particules satellites ou balistiques, hyperboliques pour celles en échappement. Nous allons dans cette partie caractériser au mieux les orbites, les trajectoires des particules, en présence d'une force supplémentaire, la pression de radiation.

### C.1 Caractérisation des trajectoires

Nous avons pu voir que les potentiels effectifs  $V_U$  et  $V_W$  impliquaient des restrictions sur la dynamique en fonction de l'énergie mécanique  $E$  (ou  $\mathcal{E}$ ) de la particule. Dans cette partie, je tiens à rendre plus visuel ce problème pour en améliorer sa compréhension.

#### C.1.a Restriction générale sur le mouvement

Nous rappelons l'expression de  $E$  sous sa forme adimensionnée :

$$\mathcal{E} = \underbrace{\frac{2UP_U^2 + 2WP_W^2}{U + W}}_{>0} + \underbrace{\frac{U\mathcal{V}_U(U) + W\mathcal{V}_W(W)}{U + W}}_{\text{potentiel effectif}} \quad (\text{III.62})$$

Nous allons donc étudier les surfaces sur lesquelles le potentiel effectif (III.62) est constant appelées aussi surfaces de vitesses nulles (« zero velocity curves »). Posons  $\mathcal{E}_c$  l'énergie d'une équipotentielle effective :

$$\mathcal{E}_c = \frac{U\mathcal{V}_U(U) + W\mathcal{V}_W(W)}{U + W} = \frac{P_\phi^2}{2UW} - \frac{2\lambda_a}{U + W} + \frac{\lambda_a}{2}(U - W) \quad (\text{III.63})$$

Le mouvement d'une particule ne peut se faire que dans les zones de l'espace où  $\mathcal{E} < \mathcal{E}_c$ . L'équation d'une telle surface est donnée par :

$$2UW(U + W)\mathcal{E}_c - P_\phi^2(U + W) + 4\lambda_a UW - \lambda_a(U^2 - W^2)UW = 0 \quad (\text{III.64})$$

Il n'existe pas de surface connue s'écrivant sous cette forme dans le cas général. Par contre, pour  $P_\phi = 0$  c'est-à-dire une particule ne tournant pas autour de l'axe planète-Soleil et donc n'évoluant que dans un plan contenant cet axe, nous avons :

$$\begin{aligned} 2(U + W)\mathcal{E}_c + 4\lambda_a - \lambda_a(U^2 - W^2) &= 0 \\ \left(U - \frac{\mathcal{E}_c}{\lambda_a}\right)^2 - \left(W + \frac{\mathcal{E}_c}{\lambda_a}\right)^2 &= 4 \\ \left(\frac{U}{2} - \frac{\mathcal{E}_c}{2\lambda_a}\right)^2 - \left(\frac{W}{2} + \frac{\mathcal{E}_c}{2\lambda_a}\right)^2 &= 1 \end{aligned} \quad (\text{III.65})$$

Nous reconnaissons l'équation d'une hyperbole. Nous pouvons donc paramétrer les quantités  $U$

et  $W$  sous la forme :

$$\begin{aligned} U &= \pm 2 \cosh t + \frac{\mathcal{E}_c}{\lambda_a} \\ W &= 2 \sinh t - \frac{\mathcal{E}_c}{\lambda_a} \end{aligned} \quad (\text{III.66})$$

Le signe  $\pm$  permet de générer les deux branches d'hyperboles. Cependant, il faut  $U > 0$  et  $W > 0$  et la branche d'hyperbole générée à partir du signe  $-$  ne passe jamais par le premier quadrant :

$$-2 \cosh t + \frac{\mathcal{E}_c}{\lambda_a} \geq 0$$

$$-\operatorname{argcosh}\left(\frac{\mathcal{E}_c}{2\lambda_a}\right) \leq t \leq \operatorname{argcosh}\left(\frac{\mathcal{E}_c}{2\lambda_a}\right)$$

Cette dernière impose déjà  $\mathcal{E}_c \geq 2\lambda_a$ .

$$-\frac{\mathcal{E}_c}{\lambda_a} - \sqrt{\frac{\mathcal{E}_c^2}{\lambda_a^2} - 4} \leq 2 \sinh t - \frac{\mathcal{E}_c}{\lambda_a} \leq -\frac{\mathcal{E}_c}{\lambda_a} + \sqrt{\frac{\mathcal{E}_c^2}{\lambda_a^2} - 4} < 0$$

Pour la branche d'hyperbole issue du signe  $-$ , nous avons toujours  $W < 0$  si  $U > 0$ . Cette branche d'hyperbole n'est donc pas physique.

Une autre façon de le voir graphiquement (cf. figure III.4) : la paramétrisation indique que l'hyperbole est centrée sur le point  $(\mathcal{E}_c/\lambda_a, -\mathcal{E}_c/\lambda_a)$  représenté par la croix sur le schéma ci-contre ( $\mathcal{E}_c < 0$  ici). Le centre de l'hyperbole se déplace ainsi suivant la seconde bissectrice et les asymptotes de l'hyperbole sont parallèles aux premières et secondes bissectrices. La branche à gauche du centre se situe sous la seconde bissectrice : cette partie du plan ne croise jamais le premier quadrant. Au final, la branche d'hyperbole physique qui sera gardée est donc celle de droite.

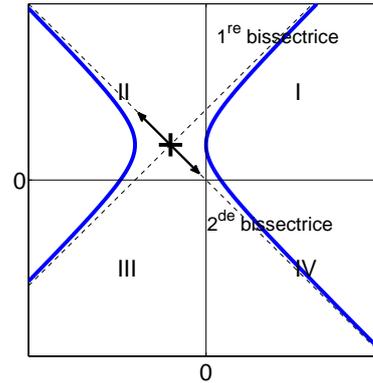


FIGURE III.4 – Représentation schématique. Seul le premier quadrant nous intéresse. Pour différentes énergies, toutes les hyperboles tracées sont parallèles les unes aux autres. Elles sont toutes obtenues à partir de cette hyperbole bleue translatée dans la direction de la double flèche.

Sur la figure III.5, j'ai représenté les équipotentiels pour  $P_\phi = 0$ . Elles se referment pour  $\mathcal{E}_c < -2\lambda_a$ . Les équipotentiels sont par définition perpendiculaires au champ de force. Près de la planète, la gravitation domine, les équipotentiels sont des sphères centrées sur la planète. À grande distance, la pression de radiation domine, les équipotentiels sont donc des plans perpendiculaires à l'axe  $(Ox)$ . Nous avons un point particulier situé côté nuit à la distance  $R_{pressure}$  : c'est un point d'équilibre col. Il est stable dans la direction perpendiculaire à  $(Ox)$  mais instable dans la direction  $(Ox)$ .

Ces schémas présentent le cas  $P_\phi = 0$  traité par Bishop and Chamberlain (1989). Au vu de la topologie du champ de force, nous remarquons déjà que pour des énergies mécaniques  $\mathcal{E}$  inférieures

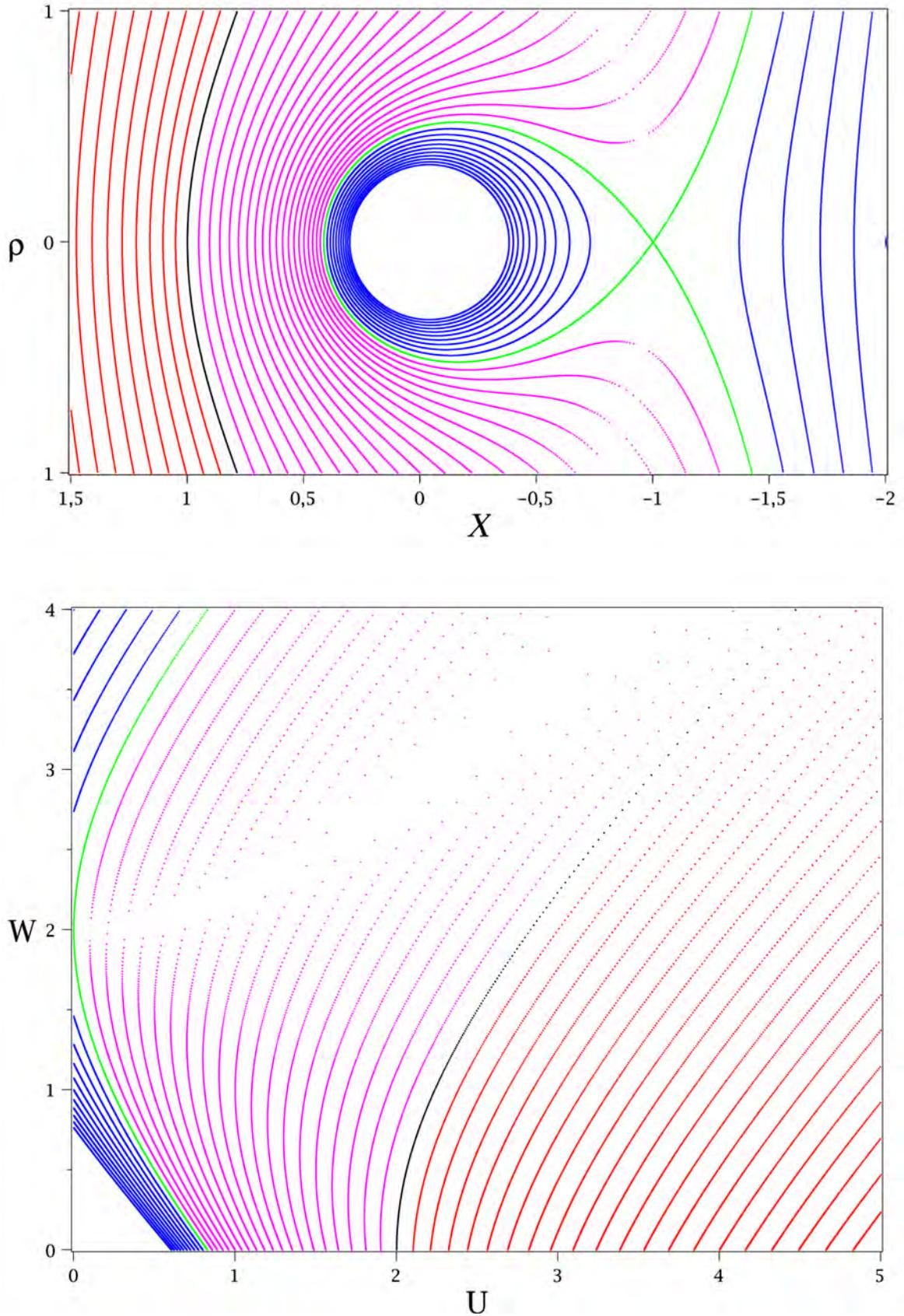


FIGURE III.5 – Tracés des lignes d'équipotentielles d'énergies  $\mathcal{E}_c$  pour  $P_\phi = 0$  dans le plan  $(X, \rho)$  avec  $\rho = \sqrt{UW}$  sur le panneau du haut et dans le plan  $(U, W)$  sur le panneau du bas. Il y a invariance par rotation autour de l'axe planète-Soleil, le Soleil est placé au point  $(\rho = 0, X = +\infty) = (U = +\infty, W = 0)$ . J'ai appliqué la symétrie par rapport à l'axe pour mieux identifier les structures sur la figure du haut. En rouge, ce sont les équipotentielles d'énergie  $\mathcal{E}_c > 0$ ; en noir,  $\mathcal{E}_c = 0$ ; en magenta,  $0 > \mathcal{E}_c > -2\lambda_a$ ; en vert,  $\mathcal{E}_c = -2\lambda_a$  et en bleu,  $\mathcal{E}_c < -2\lambda_a$ . Les unités sur les axes sont en multiple de  $R_{pressure}$ .

à  $-2\lambda_a$ , une particule restera liée à la planète quel que soit son moment cinétique. Par contre, pour des énergies supérieures et selon les valeurs de  $p_\phi$  (cf. plus bas) la particule s'échappera par l'arrière, là où la barrière de potentiel est ouverte.

Traitons maintenant le cas plus général avec  $P_\phi \neq 0$  qui n'a pas été abordé par Bishop and Chamberlain (1989). Nous ne pouvons trouver de solutions exactes pour éventuellement paramétrer  $U$  et  $W$  dans l'équation (III.64). Il est néanmoins possible, à l'aide de logiciels comme MAPLE (Matlab n'est pas assez précis pour ce calcul), de trouver les valeurs possibles de  $W$  en fonction de  $U$  et  $P_\phi$ .

Sur la figure III.6, en ajoutant le potentiel effectif provoqué par la composante du moment cinétique non-nulle le long de l'axe planète-Soleil (une valeur arbitraire non nulle est ici prise en compte), la topologie du champ de force change. Première observation : une barrière de potentiel se met en place le long de l'axe planète-Soleil. Pour une valeur de  $P_\phi \neq 0$ , la particule ne peut se rapprocher trop de l'axe car par conservation du moment cinétique, il faudrait que  $\dot{\phi}$  augmente, mais son augmentation est limitée par la conservation de l'énergie mécanique  $\mathcal{E}$ . Pour  $P_\phi \neq 0$ , il est interdit pour une particule de se trouver dans l'axe. Inversement, être sur l'axe impose à la particule d'avoir  $P_\phi = 0$ . Ensuite, de plus en plus d'équipotentiels se referment pour des énergies  $\mathcal{E} > -2\lambda_a$  et d'autres disparaissent pour  $\mathcal{E} < -2\lambda_a$ . À la vue de la structure et de l'organisation des équipotentiels, les particules peuvent rester à proximité de la planète dans des tores de section non-circulaires mais similaires, suivant le plan perpendiculaire à  $(Ox)$  (cf. les équipotentiels bleues, verte et magenta sur la figure III.6).

Nous précisons par ailleurs qu'une valeur grande de  $P_\phi$  a été considérée dans la figure III.6 afin de visualiser au mieux l'influence de ce paramètre. Ce paramètre est bien sûr différent pour chaque particule, il sera dépendant des conditions initiales. Nous allons voir également par la suite que la topologie et la dynamique des particules sont encore plus complexes que cela, en particulier dans le cas de  $P_\phi \neq 0$ , cas non abordé par Bishop and Chamberlain (1989).

### C.1.b Restriction sur le mouvement suivant la coordonnée $u$

Nous avons défini dans une des parties précédentes la notion de potentiel effectif suivant les coordonnées  $U$  et  $W$ . Nous allons étudier plus en détail  $\mathcal{V}_U$ .

Rappelons justement ce potentiel :

$$\mathcal{V}_U = \frac{P_\phi^2}{2U^2} - \frac{2\lambda_a - \mathcal{A}}{U} + \frac{\lambda_a U}{2} \quad (\text{III.67})$$

et l'impulsion associée dans la direction  $U$  :

$$P_U^2 = \frac{-P_3(U)}{4U^2} = \frac{E - \mathcal{V}_U}{2} \quad (\text{III.68})$$

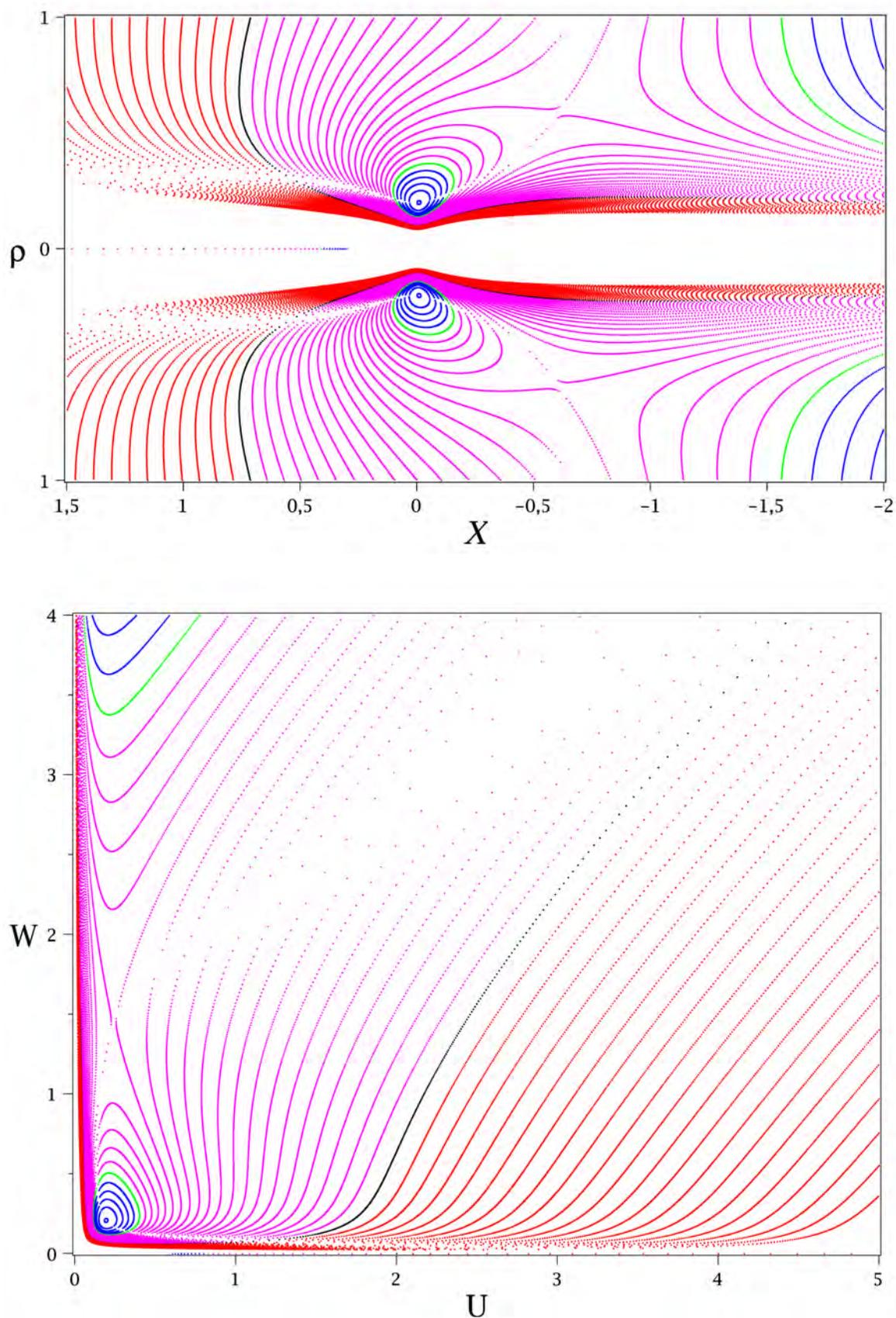


FIGURE III.6 – Tracés des mêmes équipotentiels que sur la figure III.5 mais pour  $P_\phi = 1$  et  $\lambda_a = 5$  avec les mêmes légendes. Les équipotentiels refermés correspondent à des tores en trois dimensions dans lesquels les particules peuvent être piégées selon leur énergie.

Pour étudier les restrictions sur  $U$ , il faut étudier le polynôme  $P_3(U)$  plus en détail :

$$P_3(U) = \lambda_a U^3 - 2\mathcal{E}U^2 + (\mathcal{A} - 2\lambda_a)U + P_\phi^2 \quad (\text{III.69})$$

Puisque  $P_U^2$  est une quantité réelle positive, il faut déterminer les valeurs de  $U$  telles que  $U > 0$  et  $P_3(U) < 0$ . Comme il s'agit d'un polynôme de degré 3, il est scindé dans  $\mathbb{C}$ , il admet donc 3 racines dans  $\mathbb{C}$  dont au moins une dans  $\mathbb{R}$  car il est de degré impair. Or,  $P_3(0) = P_\phi^2 > 0$  (nous supposons  $P_\phi \neq 0$ ) donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires et comme notre polynôme est une fonction continue de  $U$ ,  $P_3$  admet une racine réelle négative. Mais le mouvement existe et est réel,  $P_U$  est une quantité réelle donc il doit exister un ensemble de  $\mathbb{R}^+$  tel que  $P_U^2 \in \mathbb{R}^+$ ; donc il existe  $U_-$  et  $U_+$  positifs tels que  $\forall U \in [U_-; U_+] \subset \mathbb{R}^{+*}$ , avec  $P_3 < 0$ .  $U_-$  et  $U_+$  sont les deux autres racines de  $P_3$ .  $P_3$  a obligatoirement trois racines réelles, il n'est pas seulement scindé dans  $\mathbb{C}$  mais dans  $\mathbb{R}$  aussi. Ce résultat est très important : le mouvement de la particule vis-à-vis de la coordonnée  $U$  va être borné dans tous les cas entre deux valeurs finies  $U_-$  et  $U_+$  quels que soient  $P_\phi$ ,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{E}$  et donc quelles que soient les conditions initiales. Ces deux valeurs peuvent être calculées analytiquement par une méthode de Cardan (résolution analytique des racines d'un polynôme d'ordre 3) ou numériquement par des méthodes d'estimation de racines type Laplace ou Newton-Raphson (cf. Annexe E).

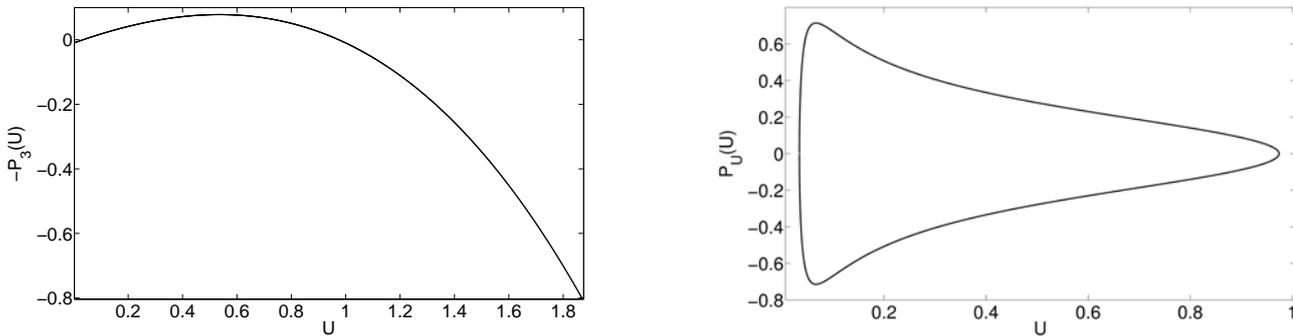


FIGURE III.7 – Représentation graphique de  $-P_3(U)$  et  $P_U$  pour  $\lambda_a = 0.1$ ,  $\mathcal{E} = -\lambda_a$ ,  $\mathcal{A} = -\lambda_a$  et  $P_\phi^2 = 0.1\lambda_a$ .  $P_3$  n'admet que deux racines positives, les seules d'intérêt physique.

Quelles que soient les valeurs des différents paramètres, nous avons un cycle dans l'espace des phases  $(U, P_U)$  (cf. figure III.7) puisqu'il existe un intervalle dans  $\mathbb{R}^+$  tel que le polynôme  $-P_3(U)$  soit positif. En règle générale, la présence d'une courbe fermée dans l'espace des phases implique un mouvement périodique mais ici ce n'est pas tout à fait vrai. Du point de vue du temps, le mouvement n'est pas forcément périodique. Rappelons la relation qui lie  $P_U$  et  $U$  :

$$P_U = \pm \frac{\sqrt{-P_3(U)}}{2U} = \frac{U + W}{4U} \frac{dU}{dt} \quad (\text{III.70})$$

$$\pm \frac{2\sqrt{-P_3(U)}}{U + W} = \frac{dU}{dt} \quad (\text{III.71})$$

$U$  ne présente a priori pas de mouvements périodiques à cause de la variation de  $W$ . Par contre,

si nous posons une nouvelle variable de temps  $\tau$  telle que sa différentielle s'écrit  $(U + W)d\tau = dt$  :

$$\pm 2\sqrt{-P_3(U)} = \frac{dU}{d\tau} \quad (\text{III.72})$$

$$T_U = \oint d\tau = \int_{U_-}^{U_+} \frac{1}{\sqrt{-P_3(U)}} dU \quad (\text{III.73})$$

Le facteur 2 se simplifie en tenant compte de la branche positive et négative. Le mouvement sera  $T_U$ -périodique vis-à-vis de  $\tau$  mais pas forcément de  $t$  : il faut que la période de  $U$  et  $W$  (si elle existe pour cette dernière) soient commensurables c.-à-d. le rapport de leurs périodes doit appartenir à  $\mathbb{Q}$  (donc être le rapport entre deux entiers).

### C.1.c Restriction sur le mouvement suivant la coordonnée $w$

Il faut faire aussi l'analyse pour la coordonnée  $W$ , pour laquelle nous rappelons le potentiel  $\mathcal{V}_W$  :

$$\mathcal{V}_W = \frac{P_\phi^2}{2W^2} - \frac{2\lambda_a + \mathcal{A}}{W} - \frac{\lambda_a W}{2} \quad (\text{III.74})$$

et l'impulsion associée dans la direction  $W$  :

$$P_W^2 = \frac{Q_3(W)}{4W^2} = \frac{E - \mathcal{V}_W}{2} \quad (\text{III.75})$$

Pour étudier les restrictions sur  $W$ , il faut étudier le polynôme  $Q_3(W)$  plus en détail :

$$Q_3(W) = \lambda_a W^3 + 2\mathcal{E}W^2 + (\mathcal{A} + 2\lambda_a)W - P_\phi^2 \quad (\text{III.76})$$

Comme dit précédemment,  $Q_3$  est aussi un polynôme de degré 3 donc il admet au moins une racine réelle. Or, cette fois-ci,  $Q_3(0) < 0$  (pour  $P_\phi \neq 0$ ), notre polynôme admet donc une racine réelle positive. De plus, le produit des racines du polynôme est donnée par  $(-1)^n a_0/a_n$  (voir les relations de Viète) où  $a_0$  est le coefficient devant le monôme de degré 0. Ce rapport vaut donc  $P_\phi^2/\lambda_a > 0$ . Puisqu'une des racines est déjà positive, nous avons une autre restriction : le produit des deux racines restantes est positif. Il n'existe que trois possibilités : soit les deux restantes sont toutes deux réelles positives soit réelles négatives soit complexes conjuguées. Il existe alors deux types de restriction. Posons  $W_-$ ,  $W_+$  et  $W_{max}$  de telle sorte que si les trois racines sont réelles,  $W_{max} > W_+ > W_-$  ; sinon,  $W_{max}$  est la seule réelle et  $W_-$  et  $W_+$  sont complexes conjuguées. Distinguons les cas :

- si les trois racines sont réelles et positives, alors  $P_W^2(W)$  existe et est réelle uniquement si  $W \in [W_-, W_+] \cup [W_{max}, +\infty[$ , le mouvement est borné par trois paraboloides comme sur la figure III.10, deux paraboloides bornent le mouvement près de la planète et une autre empêche une particule située initialement trop loin de se rapprocher (elle est soufflée par la pression de radiation),

- par contre, si  $W_-$  et  $W_+$  sont réelles négatives ou complexes conjuguées alors  $W \in [W_{max}, +\infty[$  pour que  $P_W$  soit réelle, il n'existe pas de régions bornées en valeurs supérieures, la particule ne peut se rapprocher comme dit précédemment.

Grâce à la méthode de Cardan (cf. l'annexe E), il est possible de faire un premier test sur les coefficients du polynôme pour savoir si effectivement celui-ci admet trois racines en calculant son discriminant mais cette méthode se révèle très imprécise. L'adimensionnement du polynôme ne résout pas le problème car il se base sur le rapport entre les  $a_j$ , chose qui ne change pas avec l'adimensionnement. La soustraction et la division de grands nombres du même ordre de grandeur induisent de nombreuses imprécisions numériques. Appliquons la méthode de Cardan sur  $Q_3(W)$  :

$$p = -\frac{4\mathcal{E}^2}{3\lambda_a^2} + \frac{2\lambda_a + \mathcal{A}}{\lambda_a}; \quad q = \frac{2\mathcal{E}}{27\lambda_a} \left( \frac{8\mathcal{E}^2}{\lambda_a^2} - \frac{9(2\lambda_a + \mathcal{A})}{\lambda_a} \right) - \frac{P_\phi^4}{\lambda_a} \quad (\text{III.77})$$

$$\Delta_W = -(4p^3 + 27q^2) \quad (\text{III.78})$$

Le nombre de racines réelles dépend du signe de  $\Delta_W$ . Nous connaissons les expressions analytiques des racines mais numériquement, elles restent imprécises au point de vue numérique pour deux raisons :

- il est nécessaire de résoudre les racines à partir d'opérations dans  $\mathbb{C}$  même pour le cas des trois racines réelles,
- le calcul des racines analytiques fait intervenir des opérations entre  $p$ ,  $q$  et  $\Delta_W$  et dépend du signe de  $\Delta_W$ . L'écriture des racines dépendra de ce signe, il faut donc connaître très précisément  $\Delta_W$  même quand il est très petit. Or, l'imprécision dans ce cas est d'autant plus grande que  $p$  et  $q$  sont grands (si  $|\Delta_W| = o(1)$  mais que  $p$  et  $q$  sont très grands, nous ne connaissons pas  $\Delta_W$  avec suffisamment de chiffres après la virgule).

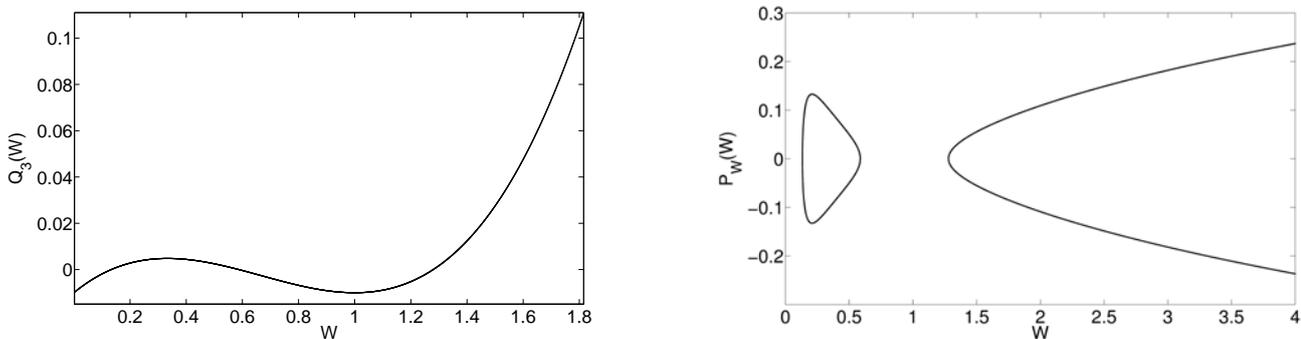


FIGURE III.8 – Représentation graphique de  $Q_3(W)$  et  $P_W$  pour  $\lambda_a = 0.1$ ,  $\mathcal{E} = -\lambda_a$ ,  $\mathcal{A} = -\lambda_a$  et  $P_\phi^2 = 0.1\lambda_a$ . J'ai pris soin de prendre le cas où  $Q_3$  possède trois racines. Si  $Q_3$  ne possédait qu'une racine, seule la branche de droite ouverte vers les  $W$  positifs subsisterait pour  $P_W$ . Nous pouvons voir que pour 3 racines réelles,  $P_W$  présente un cycle (compris entre  $W = 0$  et  $W = 1$ ).

Si  $Q_3$  admet trois racines réelles positives, nous avons aussi un cycle dans l'espace des phases  $(W, P_W)$  (voir figure III.8, panneau de droite). Rappelons la relation qui lie  $P_W$  et  $W$  :

$$P_W = \pm \frac{\sqrt{Q_3(W)}}{2W} = \frac{U + W}{4W} \frac{dW}{dt} \quad (\text{III.79})$$

$$\pm \frac{2\sqrt{Q_3(W)}}{U + W} = \frac{dW}{dt} \quad (\text{III.80})$$

$W$  sera éventuellement périodique puisque  $U$  l'est.

$$\pm 2\sqrt{Q_3(W)} = \frac{dW}{d\tau} \quad (\text{III.81})$$

$$T_W = \oint d\tau = \int_{W_-}^{W_+} \frac{1}{\sqrt{Q_3(W)}} dW \quad (\text{III.82})$$

Le mouvement sera  $T_W$ -périodique vis-à-vis de  $\tau$  mais pas de  $t$  : il faut que  $T_U/T_W \in \mathbb{Q}$ .

#### C.1.d Restrictions sur le mouvement final

D'après l'étude rapide menée sur la restriction du mouvement suivant les deux coordonnées, nous pouvons parfaitement définir la région de l'espace des phases dans laquelle la particule peut se mouvoir en fonction uniquement des conditions initiales. Le problème n'est pas intégrable complètement (il n'existe pas suffisamment d'intégrales premières du mouvement pour paramétrer simplement le mouvement en fonction du temps) mais nous pouvons déjà identifier les différents types de trajectoires.

Nous avons vu, dans une première approche, l'éventuelle restriction du mouvement à l'aide du potentiel effectif général  $(U\mathcal{V}_U + W\mathcal{V}_W)/(U + W)$ . Mais avec une étude plus détaillée, il s'avère que le mouvement des particules est plus restreint encore. En plus de la condition,  $\mathcal{E} - (U\mathcal{V}_U + W\mathcal{V}_W)/(U + W) > 0$ , condition nécessaire mais pas suffisante, il faut  $\mathcal{E} - \mathcal{V}_U > 0$  et  $\mathcal{E} - \mathcal{V}_W > 0$ , ces conditions impliquent la première mais sont plus restrictives et suffisantes. Le mouvement de la particule est donc limité par des paraboloides aussi bien dans la direction solaire qu'anti-solaire. Dans la direction  $u$  (c.-à-d. les paraboloides ouvertes côté nuit), le mouvement est toujours restreint entre deux paraboloides (figure III.5), l'une pouvant être dégénérée en la demi-droite correspondant à l'axe  $(Ox)$  mais côté nuit. De même, dans la direction  $w$  (c.-à-d. les paraboloides ouvertes côté jour), le mouvement est au moins limité par un paraboloïde (figure III.10) : le mouvement est borné par un autre paraboloïde ou non, ouvert sur l'infini. Il en résulte, par combinaison des deux types de mouvement, la figure III.11. L'avantage du système de coordonnées paraboliques, est finalement une représentation simple et synthétique : dans le plan  $(U, W)$ , les régions autorisées sont des rectangles fermés ou ouverts vers les  $W$  croissants (voir la figure III.12).

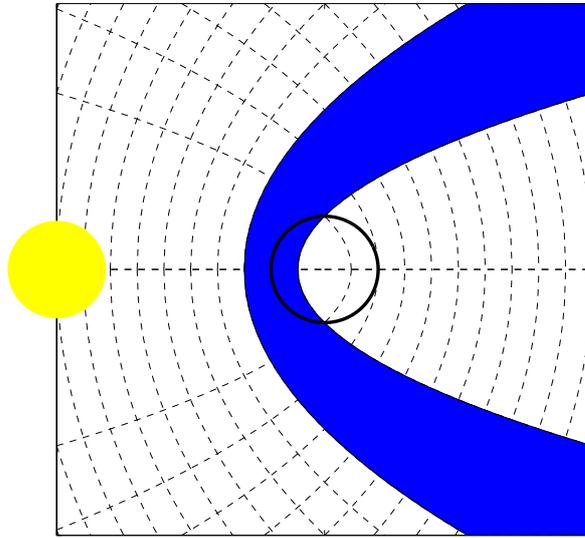


FIGURE III.9 – Vue en coupe de la zone dans laquelle la particule peut se mouvoir suivant la coordonnée  $U$ . Le mouvement n'est possible que dans la zone bleue. Il y a symétrie par rotation autour de l'axe planète-Soleil. Cette zone est bornée par deux paraboloides. Le Soleil ou l'étoile est représenté en jaune.

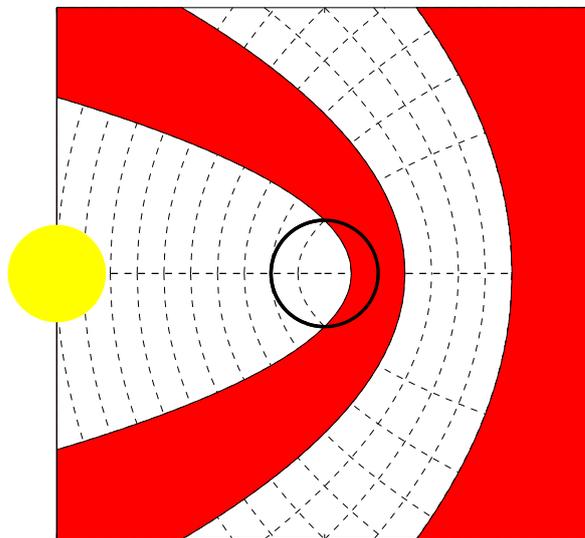


FIGURE III.10 – Vue en coupe de la zone dans laquelle la particule peut se mouvoir suivant la coordonnée  $W$ . Le mouvement n'est possible que dans la zone rouge. Il y a symétrie par rotation autour de l'axe planète-Soleil. Cette zone est bornée par une ou trois paraboloides. Le Soleil ou l'étoile est représenté en jaune.

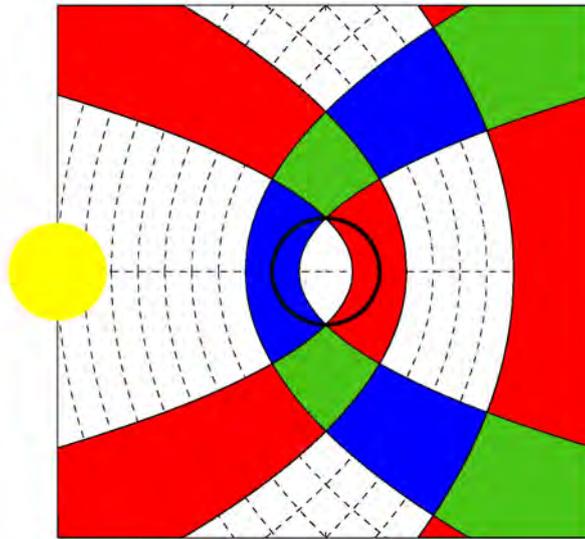


FIGURE III.11 – Vue en coupe de la zone dans laquelle la particule peut se mouvoir dans tout l'espace. Le mouvement n'est possible que dans la zone verte, intersection des zones bleues et rouges. Il y a symétrie par rotation autour de l'axe planète-Soleil. Le Soleil ou l'étoile est représenté en jaune. Les zones vertes sont bornées par 3 ou 4 paraboloïdes en fonction des conditions initiales.

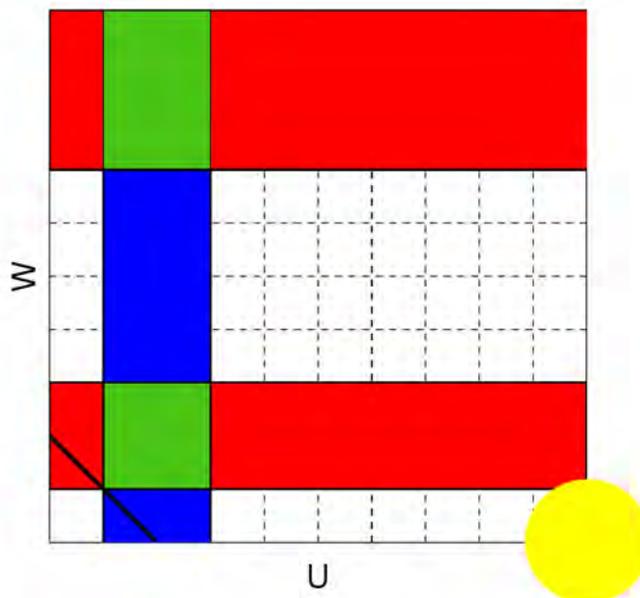


FIGURE III.12 – Représentation de la figure III.11 dans le plan  $(U, W)$ . La zone rouge supérieure est ouverte vers le haut et le Soleil est placé à l'infini sur l'axe des abscisses. Le trait noir représente la sphère qui en coordonnées paraboliques est donné par  $U + W = 2R$  où  $R$  est le rayon de la sphère. Les sphères sont donc représentées par des fonctions affines de pente  $-1$  et coupant l'axe des abscisses et des ordonnées en  $2R$ .

## C.2 Visualisation dans l'espace $(x, y, z)$

Nous rentrons désormais un peu plus dans le vif du sujet, maintenant que la base théorique et surtout mathématique est posée. Nous pouvons étudier plus en détail, plus physiquement la trajectoire des particules soumises à un champ gravitationnel et à la pression de radiation constante. Nous pouvons reprendre notre premier exemple donné en introduction (cf. III.1) et étudier la variation temporelle des paramètres de la particule tels que le demi grand-axe et l'excentricité (cf. III.13)

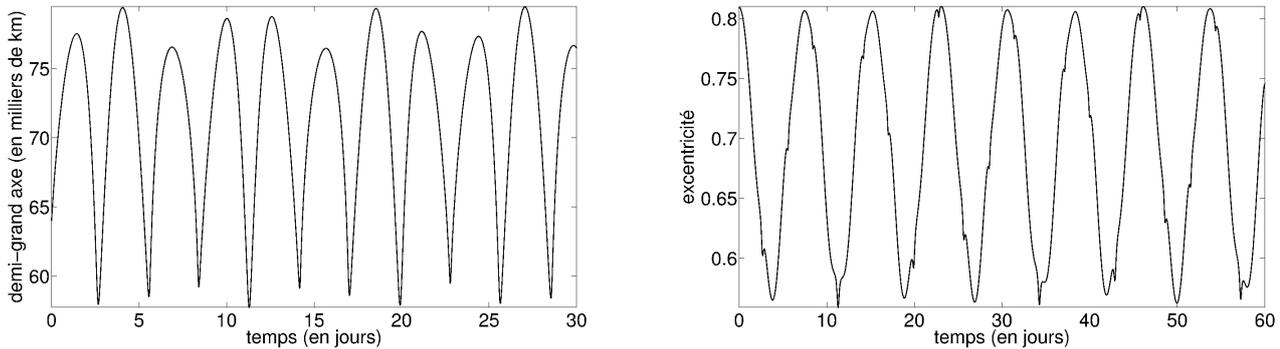


FIGURE III.13 – Profils temporels du demi-grand axe et de l'excentricité de la trajectoire de la figure III.1 au cours du temps autour de la Terre. Contrairement au cas elliptique, le demi-grand axe et l'excentricité varient au cours du temps mais ne présentent pas de périodicité.

Le mouvement de la particule ne présente pas de particularités : il n'y a pas de période qui ressorte après analyse spectrale. Une étude approfondie des résultats de Bishop and Chamberlain (1989) a été faite par Chamberlain and Bishop (1993). Dans cet article, ils étudient l'effet de la pression de radiation sur les variations de l'excentricité, de l'inclinaison, de l'argument du périastre et du nœud ascendant pour différents cas : inclinaison nulle, moyenne et grande par rapport au plan de l'écliptique.

Pourtant, ces approches ne donnent pas de solutions analytiques à notre problème pourtant similaire au célèbre effet Stark (Stark (1914)). Le lecteur intéressé se penchera sur l'article de Lantoine and Russell (2011) portant sur l'effet de la pression de radiation mais appliquée aux satellites en orbite. Il y donne les expressions « analytiques » pour le cas de Bishop and Chamberlain (1989) avec  $P_\phi = 0$  et le cas général  $P_\phi \neq 0$ . Le mot « analytique » reste quand même un bien grand mot : l'expression reste dépendante de  $\tau$ , il faut donc intégrer sa différentielle pour avoir le temps (c.-à-d. la solution ne s'écrit pas de manière explicite en fonction du temps) et les expressions s'écrivent à l'aide des fonctions elliptiques de Jacobi, très difficiles à appréhender.

Comme nous le voyons sur les figures III.1 et III.13, les trajectoires ne présentent pas de réelles caractéristiques à partir de leur représentation en coordonnées cartésiennes. Il faut donc essayer une autre représentation.

### C.3 Visualisation dans le plan $(x, \rho)$

Dans cette partie, nous allons enfin pouvoir vérifier numériquement si les propriétés sur le comportement des trajectoires (détaillées en section C.1) sont bien vérifiées, si l'on prend le cas de trajectoires telles que celle utilisée dans la figure III.1 .

La représentation dans le plan  $(x, \rho)$  -  $\rho$  étant la distance à l'axe Terre-Soleil de la particule - (telle que sur les figures III.14 et III.15), est nettement plus intéressante. Tout d'abord, les propriétés démontrées précédemment sur les restrictions du mouvement sont vérifiées : le mouvement est restreint entre des paraboloides. Il existe toujours deux paraboloides bleues (restriction sur  $U$ ) pour contraindre le mouvement (voir figures III.14 et III.15). Par contre dans l'autre direction (restriction sur  $W$ ), nous avons les deux cas : soit deux paraboloides rouges restreignent le mouvement pour une particule piégée (voir figure III.14) ou une seule pour une particule en échappement (voir figure III.15). De plus, le mouvement ne présente pas de réelles périodicités pour le cas de la particule piégée (figure III.14) : la trajectoire ne reboucle pas sur elle-même mais elle est quasi-périodique à cause de la perturbation par la pression de radiation. Visuellement, la trajectoire remplit de manière dense (c.-à-d. sans laisser de « trous » sur des temps suffisamment longs ce qui n'est pas vraiment le cas ici) l'espace compris entre les paraboloides dans le cas où le mouvement est borné <sup>2</sup>. Il s'agit finalement du résultat de l'un des plus grands théorèmes portant sur le chaos : le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser dit théorème KAM. Voici l'énoncé présenté par Arnold et traduit dans le livre de Gignoux and Silvestre-Brac (2002) :

#### **Théorème KAM (agrémenté de commentaires entre crochets)**

---

Considérons un système autonome non perturbé [le cas purement gravitationnel], non dégénéré [un seul degré de liberté, l'anomalie vraie] et soumettons-le à une perturbation autonome [la pression de radiation indépendante du temps]. Si la perturbation est suffisamment faible, la plupart des tores invariants non résonnants ne disparaissent pas [les trajectoires périodiques des ellipses], mais sont légèrement déformés. Plus précisément, dans l'espace des phases du système perturbé, il existe des tores invariants remplis, de façon dense, par des trajectoires s'enroulant autour d'eux avec un nombre de fréquences indépendantes [en gravitation pure,  $U$  et  $W$  ont la même période, là ce n'est plus le cas], égale au nombre de degré de liberté. Ces tores invariants forment la majorité, au sens où la mesure du complément de leur union est petite lorsque la perturbation est petite.

---

À cause de la pression de radiation, la symétrie est brisée, le nombre de degrés de liberté augmente (nous perdons deux des trois composantes du moment cinétique en tant que constantes du problème mais nous en récupérons une,  $A$ ).

Par contre, il n'y pas le même phénomène pour la figure III.15 : la particule vient de l'infini,

---

<sup>2</sup>Cet effet de « remplissage » est d'autant plus important que le mouvement est projeté en deux dimensions, en s'affranchissant du mouvement transverse dépendant de  $\phi$  dont la variation est fonction uniquement de l'inverse de  $\rho$ .

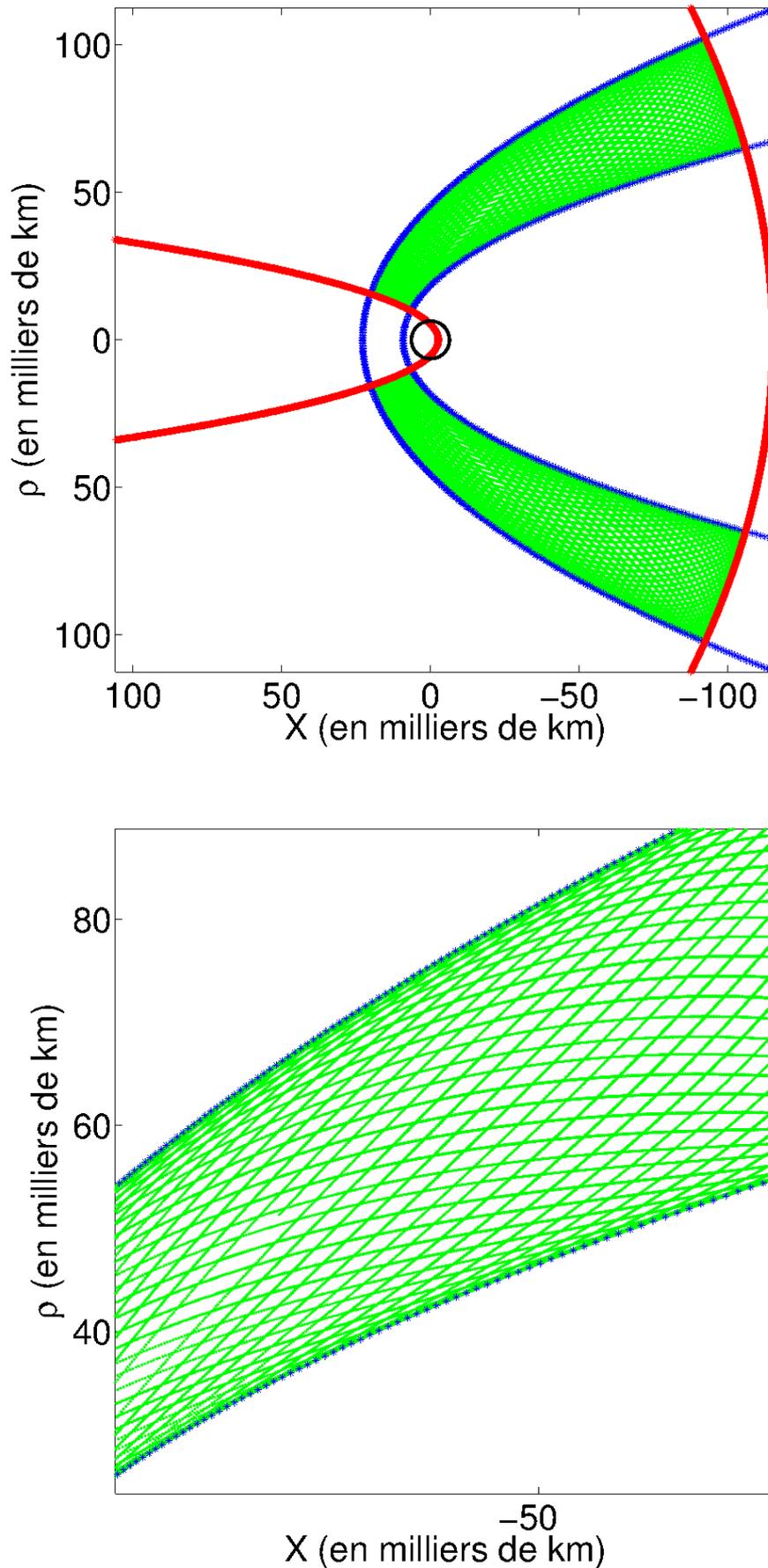


FIGURE III.14 – Représentation de la trajectoire confinée d'un atome d'hydrogène dans l'exosphère terrestre (ligne verte) dans le plan  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_\rho = \vec{e}_x \wedge \vec{e}_\phi)$  c'est-à-dire dans le plan tournant autour de l'axe Terre-Soleil. La représentation a été choisie pour bien faire apparaître les paraboles. Le panneau inférieur est un agrandissement du panneau supérieur.

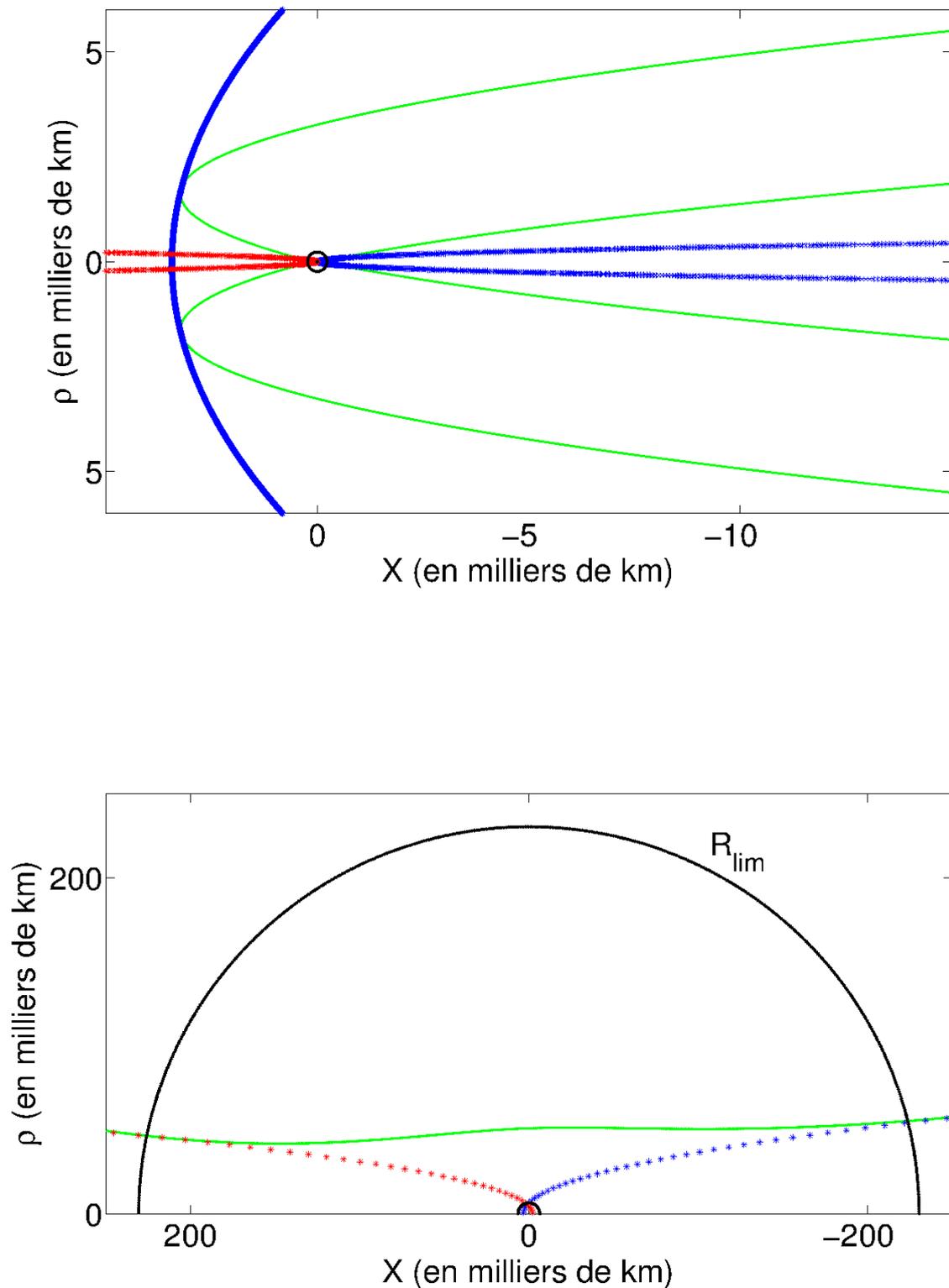


FIGURE III.15 – Représentation de la trajectoire dans le plan  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_\rho = \vec{e}_x \wedge \vec{e}_\phi)$  d'une particule d'hydrogène terrestre en échappement. Dans ce cas, les conditions initiales sont telles que la particule se situe sur la branche ouverte sur l'infini de  $P_W$ . Un seul paraboloïde limite le mouvement dans la direction  $w$  (parabole rouge). L'agrandissement montre que la trajectoire de la particule en vert ricoche sur les paraboles. Bien que les paraboles rouge et bleu se croisent sous l'exobase (panneau du bas), la trajectoire verte ne traverse pas l'exobase située autour de  $(0, 0)$ .

ricocher sur le paraboloïde rouge et repart vers l'infini. Il n'y a pas de périodicité du mouvement.

#### C.4 Visualisation dans le plan $(u, w)$

Il est tout aussi intéressant de visualiser le problème dans le plan  $(u, w)$ .

Sur la figure III.16, j'ai représenté de nouveau les mêmes trajectoires mais dans le plan  $(u, w)$ . Les paraboles deviennent des lignes droites. Les paraboles bleues correspondent aux droites verticales et les rouges aux horizontales. Nous observons clairement que les mouvements sont soit ceux de particules piégées dans un rectangle fermé (panneau du haut) soit simplement bornés d'un côté dans des rectangles ouverts (panneau du bas) selon les conditions initiales de la particule. De plus, pour la particule piégée, la trajectoire remplit effectivement de façon dense cet espace et est similaire à une courbe de Lissajous avec un rapport incommensurable des périodes.

Si le mouvement est périodique, alors la courbe se refermerait sur elle-même et le nombre d'intersection entre la courbe et les bords du rectangle serait fini : le rapport entre le nombre d'intersection avec le bord bleu et avec le bord rouge donnerait le ratio entre les périodes du mouvement dans les directions  $u$  et  $w$ . C'est-à-dire que si notre mouvement est périodique, cette représentation permettrait de s'en rendre compte immédiatement. Sur l'éventualité de tomber sur un mouvement périodique, le théorème KAM apporte une réponse : « Ces tores invariants forment la majorité, au sens où la mesure du complément de leur union est petite [attention, cette formulation est très importante] lorsque la perturbation est petite ». Traduction : il s'avère que tous les cas vont être quasi-périodiques et que la probabilité de tomber sur un cas parfaitement périodique (c.-à-d. les périodes sur les coordonnées  $u$ ,  $w$  et  $\phi$  sont commensurables) est quasiment nulle [pour les physiciens que nous sommes] à moins que l'on en fasse spécifiquement la recherche (Biscani and Izzo (2014)).

#### C.5 Redéfinition des notions de particules balistiques, satellites et d'échappement

Dans cette partie, j'ai mis un point d'honneur à caractériser physiquement - dans le cadre de notre formalisme - le type de trajectoire finale d'une particule, soumise à la fois au champ gravitationnel d'un corps massif proche et à la pression de radiation des photons supposée constante dans le temps.

La première partie de ma thèse porte sur la production d'un type particulier de particules présentes dans l'exosphère : les particules satellites. Les autres principales populations étant les particules balistiques et en échappement. À l'origine, les définitions de ces particules sont respectivement une particule en orbite elliptique ne croisant jamais l'exobase pour une satellite, une particule en orbite elliptique croisant l'exobase pour une balistique et une particule s'échappant de l'attraction gravitationnelle pour une particule en échappement.

Dans le cas présent, perturbé par la pression de radiation, la notion d'ellipse ou d'orbites périodiques est à proscrire. Alors qu'entends-je par « redéfinition » ? Les particules balistiques sont, par

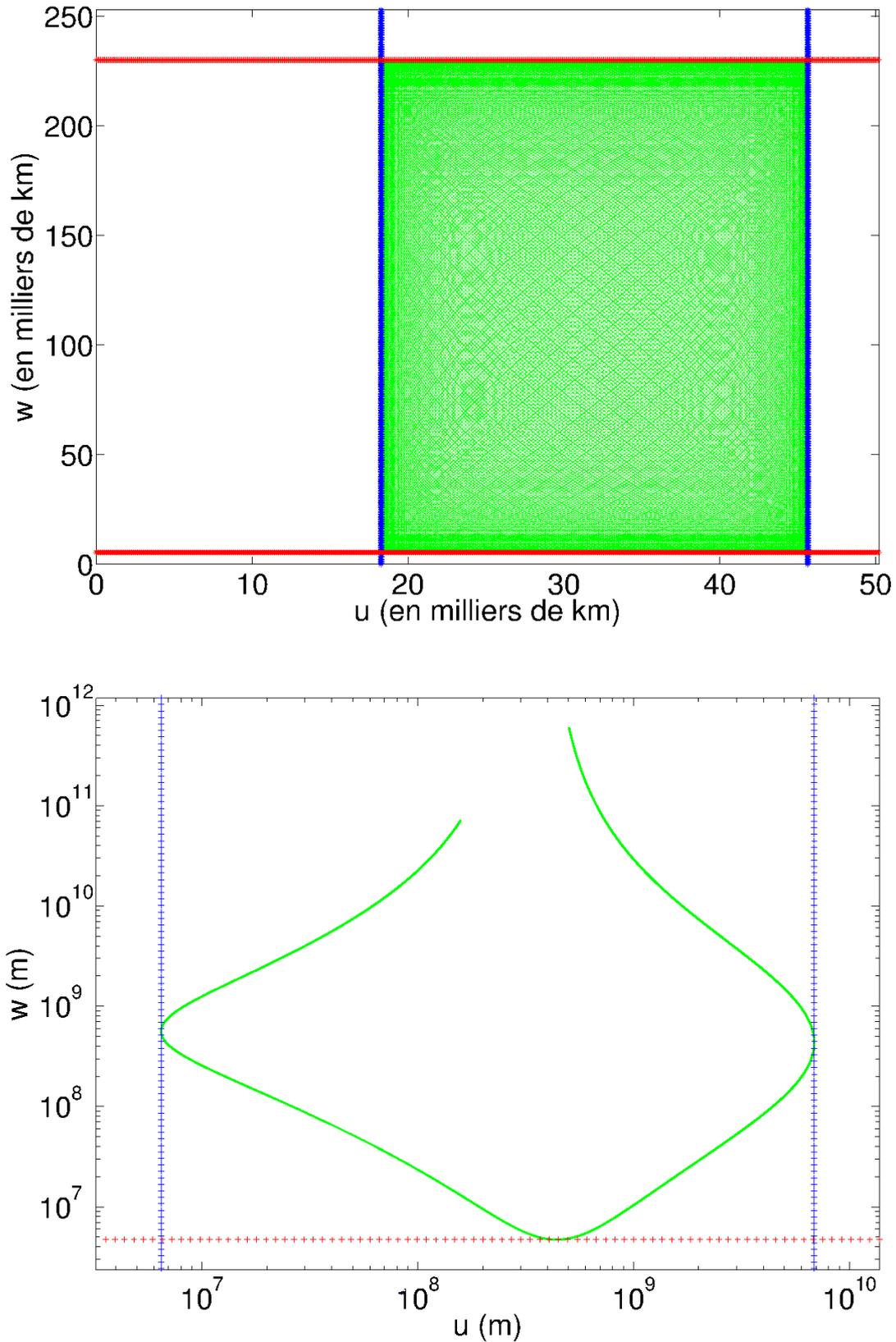


FIGURE III.16 – Représentation de la trajectoire dans le plan  $(u, w)$  des figures III.14 et III.15 d’une particule piégée (panneau du haut) et en échappement (panneau du bas). Nous observons que dans le cas de la particule piégée, sa trajectoire remplit tout l’espace borné par les racines  $U_-, U_+$  (lignes verticales bleues),  $W_-$  et  $W_+$  (lignes horizontales rouges). Pour la particule en échappement, il n’y a de limite supérieure dans la direction  $w$ . Bien que l’espace dans lequel celle-ci évolue croise l’exobase, sa trajectoire passe loin de la Terre, au-delà de 100 000 km.

extension de leur précédente propriété, des particules qui croisent deux fois l'exobase et restent liées à la planète. De même, les particules satellites restent liées à la planète tout en ne croisant jamais l'exobase. Finalement, les particules en échappement croisent l'exobase pour ensuite rejoindre l'infini. Par hypothèse le plus communément admis dans les modèles, l'exobase est supposée être une sphère centrée sur la planète. Dans le repère  $(u, w)$ , cette surface se réduit à une droite de pente  $-1$  coupant l'axe des abscisses et des ordonnées en  $2 r_{exo}$  (cf. figure III.12 ; avec  $r_{exo} = 6879 \text{ km}$ ) la distance de l'exobase au centre de la planète.

Mais prenons finalement le problème à l'envers : puisque l'on suppose une exosphère sans collision, nous pouvons donc appliquer le théorème de Liouville, la fonction de distribution est conservée le long d'une trajectoire physique. En supposant une fonction de distribution des vitesses maxwellienne à l'exobase, on en déduit que la fonction de distribution des vitesses est maxwellienne dans toute l'exosphère aussi mais multipliée par une indicatrice (fonction valant 0 ou 1). En fonction de la position dans l'espace des phases, cette indicatrice vaudra 1 si effectivement les coordonnées de la particule (position et vitesse) lui permettent de provenir de l'exobase afin de respecter le théorème de Liouville (ce que finalement Chamberlain (1963) fit comme erreur quand il a calculé  $\zeta_{sat}$ ). L'indicatrice valant au contraire 0 si les conditions sont incompatibles avec un croisement de l'exobase.

Or, avec notre étude, nous sommes déjà en mesure de connaître cette indicatrice : comme nous connaissons les conditions initiales en n'importe quel point de l'exosphère, je peux identifier les caractéristiques de la particule ( $E, A$  et  $p_\phi$  et par conséquent  $U_-, U_+, U_{min}, W_-, W_+, W_{max}$  réelles ou non) et savoir si ces paramètres lui permettent effectivement de croiser l'exobase. Pour résumer, en fonction de la position et des vitesses dans l'espace des phases, je vais pouvoir définir une zone verte comme sur la figure III.12 et vérifier si cette zone coupe ou non le trait noir défini par l'exobase. Si une particule vient de l'exobase, il faudra obligatoirement que la zone verte croise le trait noir. C'est une condition nécessaire mais pas forcément suffisante. Il existe des cas où cette condition est aussi suffisante mais il va falloir distinguer deux cas : le cas où la zone verte est fermée ou non. Nous allons montrer ci-dessous que si la zone verte est fermée, la particule remplira toute la zone et croisera nécessairement l'exobase, tandis qu'elle pourra rebondir et s'échapper si la zone est ouverte vers l'infini, sans forcément croiser l'exobase (cf. figure III.15).

Pour le cas où la particule est dans un rectangle vert fermé, c'est-à-dire que le polynôme  $Q_3$  admet trois racines réelles positives  $W_-, W_+, W_{max}$  et que la position initiale de la particule  $(U_0, W_0)$  dans le plan  $(U, W)$  est telle que  $W_0 \in [W_-, W_+]$ , la trajectoire est bornée dans l'espace des positions. Soient  $(U(t), W(t), \phi(t))$  les coordonnées dans l'espace des positions au cours du temps de la particule, alors  $(U(t), W(t), \phi(t)) \in [U_-, U_+] \times [W_-, W_+] \times [0, 2\pi]$  (car  $\phi$  est une coordonnée cyclique). Mais le mouvement est aussi borné vis-à-vis des impulsions. Soient  $(P_U(t), P_W(t), P_\phi(t))$  les coordonnées dans l'espace des impulsions conjuguées. Comme  $P_U$  (respectivement  $P_W$ ) est une fonction continue de  $U$  (respectivement  $W$ ) sur  $[U_-, U_+]$  (respectivement  $[W_-, W_+]$ ),  $P_U(t)$  (respectivement  $P_W(t)$ ) est bornée sur cet intervalle d'après le théorème de Weierstrass. Nous en déduisons que  $(P_U(t), P_W(t), P_\phi(t)) \in [-P_{U \max}, P_{U \max}] \times [-P_{W \max}, P_{W \max}] \times \{P_\phi\}$ . La particule est donc bornée

dans son mouvement aussi bien en position qu'en impulsion, son mouvement est donc borné dans l'espace des phases. Toutes les conditions nécessaires sont remplies pour appliquer un des théorèmes de Poincaré tel qu'il est énoncé dans le livre Gignoux and Silvestre-Brac (2002) :

### **Théorème de retour (ou de récurrence) de Poincaré**

Si un système hamiltonien est autonome et possède un espace de phase de volume fini [précédemment démontré], alors dans tout domaine, aussi petit soit-il, de l'espace de phase, il existe au moins deux points qui appartiennent à une même trajectoire suivie par le système.

Une formulation à la fois physique et mathématiquement peu poussée peut s'écrire : soit  $M(t_0)$  la position dans l'espace des phases de la particule à l'instant initiale  $t_0$  dans ce volume fini alors :  $\forall \epsilon > 0 / \exists \tau$  fini,  $\|O\vec{M}(\tau) - O\vec{M}(t_0)\| < \epsilon$ . Au cours du temps, la position  $M(t)$  du point dans l'espace des phases repassera dans un voisinage aussi petit soit-il de ces conditions initiales, pour presque toutes les conditions initiales.

Une autre version physique existe aussi : pour quasiment toutes les conditions initiales, un système dynamique conservatif, dont l'espace des phases est de volume fini, va repasser au cours du temps aussi près que l'on veut de ces conditions initiales. D'où cette impression de remplissage de manière dense sur la figure III.16. Sachant que la coordonnée  $\phi$  n'importe pas puisque que l'exobase est invariante par cette rotation, une particule, initialement placée à l'exobase, conservant ces constantes du mouvement et confinée dans l'espace des phases va repasser au cours du temps « aussi près de l'exobase que l'on veut » c'est-à-dire qu'une particule qui est confinée et qui croise l'exobase, la recroisera de nouveau au cours du temps mais nous ne savons pas quand. Inversement, une particule dans l'exosphère avec les conditions nécessaires pour être confinée croisera l'exobase si le volume fini dans lequel elle évolue dans l'espace des phases la croise. Si ce volume fini ne croise pas l'exobase, alors la particule ne croisera pas l'exobase mais elle sera confinée. Nous venons de redéfinir deux types de particules : les particules balistiques et les particules satellites. La condition pour croiser l'exobase sera alors :  $U_{min} + W_{min} = 2R_{min} < 2R_{exo}$  où  $R_{exo} = r_{exo}/R_{pressure}$  sachant que notre particule est déjà au-dessus de l'exobase initialement.

Pour le cas où la particule est dans un rectangle ouvert, c'est-à-dire que le polynôme n'admet qu'une racine réelle soit deux racines réelles négatives, la particule sera en échappement ou « de passage » : si la particule croise réellement l'exobase elle sera en échappement, tandis que si elle ne la croise pas il s'agira d'une particule externe passant au voisinage du corps étudié. L'ambiguïté sur le type de trajectoire vient du fait que le théorème de récurrence de Poincaré ne peut s'appliquer, ce n'est pas parce que le rectangle vert ouvert croisera la droite noire (l'exobase) que la particule viendra de l'exobase et sera donc en échappement. Le mouvement n'est pas borné, il ne remplira donc pas de manière dense cet espace, nous ne pouvons donc pas être sûr de son origine. La condition où le rectangle ouvert vert croise l'exobase est une condition nécessaire mais pas suffisante pour

caractériser une particule en échappement, mais nous y reviendrons plus en détail dans une partie dédiée (cf. la section E.3).

type	balistique	satellite	en échappement	
discriminant de $P_3 = \Delta_U$	$> 0$	$> 0$	$> 0$	
discriminant de $Q_3 = \Delta_W$	$> 0$	$> 0$	$> 0$	$< 0$
contrainte sur $W_0$	$\in [W_-, W_+] \cap \mathbb{R}^+$	$\in [W_-, W_+] \cap \mathbb{R}^+$	$\in [W_{max}, +\infty[$	aucune
condition sur $R_{exo}$	$> \frac{U_- + W_-}{2}$	$< \frac{U_- + W_-}{2}$	$> \frac{U_- + W_{max}}{2}$	
conditions nécessaires et suffisantes?	oui	oui	non sauf à l'exobase	

TABLE III.1 – Tableau récapitulatif des différents types de particules pour des conditions initiales  $(U_0, W_0, \phi_0, \mathcal{E}, \mathcal{A}, P_\phi)$  dans l'espace des phases. Je rappelle que les racines de  $P_3$  et  $Q_3$  dépendent uniquement de  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{A}$  et  $P_\phi$ , dépendants eux-mêmes des positions et vitesses initiales (cf. équations (III.57) et (III.58)).

Comme la trajectoire ne remplit pas de manière dense l'espace des phases dans lequel elle évolue, rien ne garantit que le fait d'être dans un volume fini borné croisant l'exobase implique que la trajectoire passera à un moment ou à un autre par l'exobase de nouveau (conséquence du théorème de récurrence de Poincaré). Par contre, si nous nous plaçons à l'exobase, nous imposons nécessairement la condition de croiser l'exobase, donc les conditions précédemment énoncées pour caractériser une particule en échappement deviennent suffisantes mais seulement à l'exobase. Ceci aura son importance pour deux quantités calculées plus loin : la densité de particules en échappement à l'exobase et le flux d'échappement associé. Nous avons donc redéfini dans le cadre de notre formalisme ce qu'étaient les particules de types balistique, satellite et en échappement. Les caractéristiques de ces trajectoires sont synthétisées dans la table III.1..

## D Calcul des densités de particules balistiques

Le but final de notre étude est de calculer les densités des différents types de populations dans l'exosphère soumise à la pression de radiation, afin d'étendre finalement le modèle de Chamberlain (1963) au cas général incluant l'effet de la pression de radiation. D'après les hypothèses et l'application du théorème de Liouville, nous pouvons donc exprimer la fonction de partition  $\zeta(u, w)$  (dépendante non pas que de  $r$  mais de  $u$  et  $w$ ) de la même manière que Chamberlain (1963) (cf. Annexe B). Cette fonction de partition représente la proportion en terme de densité de chaque type de particules dans l'espace des phases à une position donnée de l'espace définie à partir de  $u$  et  $w$ , et non plus seulement de  $r$ . Chaque type de particule définit les bornes d'intégration dans l'espace des phases. De plus, en supposant une distribution des vitesses maxwellienne comme Chamberlain, nous pouvons découpler

complètement la contribution de l'énergie potentielle c'est-à-dire que la fonction de distribution est le produit d'une fonction ne dépendant que de la position (comme le terme  $\exp(\lambda - \lambda_c)$ ), de l'énergie potentielle, et d'une fonction ne dépendant que des vitesses, de l'énergie cinétique. La contribution spatiale n'intervient donc pas dans le calcul. La fonction de partition est alors donnée par :

$$\zeta_{\text{type}}(u, w) = \frac{\int_{\text{type}} \exp\left(-\frac{p^2}{2mk_B T}\right) d^3\vec{p}}{\int \exp\left(-\frac{p^2}{2mk_B T}\right) d^3\vec{p}} = \frac{\int \mathbf{1}_{\text{type}} \exp\left(-\frac{p^2}{2mk_B T}\right) d^3\vec{p}}{\int \exp\left(-\frac{p^2}{2mk_B T}\right) d^3\vec{p}} \quad (\text{III.83})$$

Pour ce calcul, nous remarquerons que nous avons pris une fonction de distribution maxwellienne pour les vitesses. Le calcul est aussi valable pour d'autres fonctions de distribution mais à une condition : ces fonctions ne doivent dépendre uniquement de l'énergie mécanique de la particule ou ne s'écrire qu'en fonction de cette quantité pour respecter le théorème de Liouville. Ce calcul peut bien sûr se faire à l'aide d'autres distributions comme les distributions  $\kappa$ , lesquelles nous avons déjà utilisées dans la partie G.4.

Dans cette partie, nous allons détailler la procédure générale permettant de calculer les densités des différents types de populations exosphériques, et montrer les résultats pour les profils de densité des particules balistiques dans les exosphères de la Terre, de Titan et de Mars.

## D.1 Approche

Dans la section précédente, j'ai redéfini la notion de particules balistiques. Ce sont des particules dont les conditions initiales permettent de croiser plusieurs fois l'exobase car l'espace restreint dans l'espace des phases dans lequel elles évoluent est borné et coupe l'exobase. Grâce aux conditions exposées dans le tableau III.1, nous pouvons développer un algorithme pour déterminer la densité de particules balistiques dans une exosphère sans collisions soumise à la pression de radiation solaire et à la gravité de la planète, c.-à-d. nous allons caractériser plus en détail la fonction  $\mathbf{1}_{\text{balistic}}$ .

Depuis le début de notre problème, nous avons changé le système de coordonnées dans l'espace des positions en passant de grandeurs  $r, \theta$  à  $u, w$  mais il faut en faire de même pour les impulsions conjuguées car il va être plus facile de traiter avec  $p_u, p_w$  et  $p_\phi$ . Comme nous changeons de variable pour l'intégration sur  $d^3\vec{p} = dp_r dp_\theta dp_\phi / r^2 \sin \theta$ , il faut calculer le Jacobien pour passer de  $dp_r dp_\theta dp_\phi$  à  $dp_u dp_w dp_\phi$ . Nous obtenons alors (cf. Annexe F) :

$$d^3\vec{p} = \frac{4}{u+w} dp_u dp_w dp_\phi \quad (\text{III.84})$$

mais n'oublions pas que nous travaillons avec des quantités adimensionnées. Ceci a pour conséquence :

$$d^3\vec{p} = (mk_B T)^{3/2} \frac{4}{U+W} dP_U dP_W dP_\phi \quad (\text{III.85})$$

d'où la relation suivante :

$$\zeta_{\text{type}}(U, W) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{4}{U+W} \int \mathbf{1}_{\text{type}} \exp\left(-\frac{2UP_U^2 + 2WP_W^2}{U+W} - \frac{P_\phi^2}{2UW}\right) dP_U dP_W dP_\phi \quad (\text{III.86})$$

avec des grandeur adimensionnées.

Nous utilisons une méthode d'intégration standard du type Gauss-Legendre. En toute rigueur, il faut connaître parfaitement l'espace d'intégration sur les vitesses pour un résultat précis c.-à-d. l'espace sur lequel notre indicatrice  $\mathbf{1}$  vaudra toujours 1<sup>3</sup>. Le problème est qu'il n'est clairement pas évident de définir ces bornes :

- premièrement, il est déjà difficile d'exprimer explicitement à partir des expressions analytiques des racines des polynômes grâce à la méthode de Cardan les conditions remplies par les particules balistiques en fonction de  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{A}$  et  $P_\phi$ , eux-mêmes dépendants de  $P_U$ ,  $P_W$  et  $P_\phi$ ,
- deuxièmement, rien ne garantit que l'espace d'intégration en terme de  $P_U$ ,  $P_W$  et  $P_\phi$  soit connexe ou « sans trous » (par exemple, sur ce principe, il est hors de question d'intégrer le volume d'un tore en coordonnées cartésiennes, mais cela pose moins de problème en coordonnées cylindriques). Il faut limiter le nombre de passage de l'indicatrice de 0 à 1 puisque la précision numérique dépend de la valeur des dérivées n-ièmes de l'intégrande.

Par contre, nous pouvons contraindre et réduire l'espace d'intégration au mieux pour qu'il y ait un minimum de points dans l'intégration dont le poids (valeur de l'indicatrice) est nul. Il est en effet possible d'apporter des contraintes sur les caractéristiques des particules balistiques. De par leur confinement, elles imposent naturellement d'avoir 3 racines réelles positives pour  $Q_3$ , et 2 pour  $P_3$ , dans tous les cas. Ces informations sont essentielles : si nous nous en référons aux relations de Viète et à l'expression de  $Q_3$  (cf. équations III.59),

$$\frac{2\mathcal{E}}{\lambda_a} = -W_- - W_+ - W_{max} < 0 \quad (\text{III.87})$$

Pour les particules balistiques, il est en effet nécessaire d'avoir  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{potentiel}} + \mathcal{E}_{\text{cinétique}} < 0$ . Il advient alors :

$$\frac{2\lambda_a}{U+W} - \frac{\lambda_a}{2}(U-W) > \frac{2UP_U^2 + 2WP_W^2}{U+W} + \frac{P_\phi^2}{2UW} > 0 \quad (\text{III.88})$$

Conséquence : il n'est pas possible de trouver de particule balistique au-delà de l'équipotentielle noire ( $\mathcal{E}_{\text{potentiel}} = 0$ , cf. figure III.5) dans la zone rouge. Nos particules balistiques, en un point donné de l'espace  $(U, W)$ , sont donc bornées en énergie. Comment prendre en compte alors cette limitation ?

<sup>3</sup>L'indicatrice admet, au sens des distributions, la distribution de Dirac au point où sa valeur passe de 1 à 0 ; or l'erreur entre la valeur exacte et numérique de l'intégrale est dépendante des valeurs des dérivées n-ièmes de la fonction sur l'espace d'intégration

Il faut de nouveau faire un changement de variables en posant :

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{\frac{2U}{U+W}} P_U = R \sin \Theta \cos \Phi \\ Y &= \sqrt{\frac{2W}{U+W}} P_W = R \sin \Theta \sin \Phi \\ Z &= \frac{1}{\sqrt{2UW}} P_\phi = R \cos \Theta \end{aligned} \quad (\text{III.89})$$

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{type}}(U, W) &= \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \mathbb{1}_{\text{type}} \exp(-X^2 - Y^2 - Z^2) dX dY dZ \\ &= \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \mathbb{1}_{\text{type}} R^2 \exp(-R^2) dR d\Theta d\Phi \end{aligned} \quad (\text{III.90})$$

Lors de l'intégration, pour chaque triplet  $(R, \Theta, \Phi)$ , nous pouvons retrouver le triplet  $(P_U, P_W, P_\phi)$  associé ainsi que le triplet  $(\mathcal{E}, \mathcal{A}, P_\phi)$ . Avec ce nouveau système de coordonnées, la méthode de Gauss-Legendre est adaptée car toutes nos variables d'intégration sont bornées et mieux contraintes qu'elles ne pouvaient l'être dans le système  $(P_U, P_W, P_\phi)$ .

## D.2 Algorithme

Je présente dans cette partie la démarche à entreprendre pour calculer numériquement la densité de particules balistiques.

Tout d'abord, nous souhaitons déterminer la fonction de partition des particules balistiques :

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{ballistic}}(U, W) &= \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \mathbb{1}_{\text{ballistic}}(R, \Theta, \Phi) R^2 \exp(-R^2) dR d\Theta d\Phi \\ &\approx \frac{1}{\pi^{3/2}} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{\text{ballistic}}(R_i, \Theta_j, \Phi_k) R_i^2 \exp(-R_i^2) w_i w_j w_k \end{aligned} \quad (\text{III.91})$$

pour une intégration sur  $N$  points pour les 3 coordonnées.

J'ai représenté la structure du programme principal sur la figure III.17.

Le début du programme consiste, à partir du jeu de variables choisi  $(R_i, \Theta_j, \Phi_k)$ , de repasser dans le repère  $(P_U, P_W, P_\phi)$ . Ensuite, il faut déterminer les constantes du mouvement  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{A}$  associées ( $P_\phi$  est déjà déterminé). Comme les particules balistiques sont piégées dans une région finie de l'espace, c.-à-d. aussi bien sur la coordonnée  $U$  (ce qui est toujours valable) que sur la coordonnée  $W$  (ce qui nécessite certaines conditions), il faut vérifier deux choses : d'une part, il faut que le polynôme  $Q_3(W)$  possède 3 racines réelles (test 1); d'autre part, si elles le sont, il faut qu'elles soient toutes positives (test 2). Et même si ces trois racines sont positives, il faut que notre point dans l'espace soit

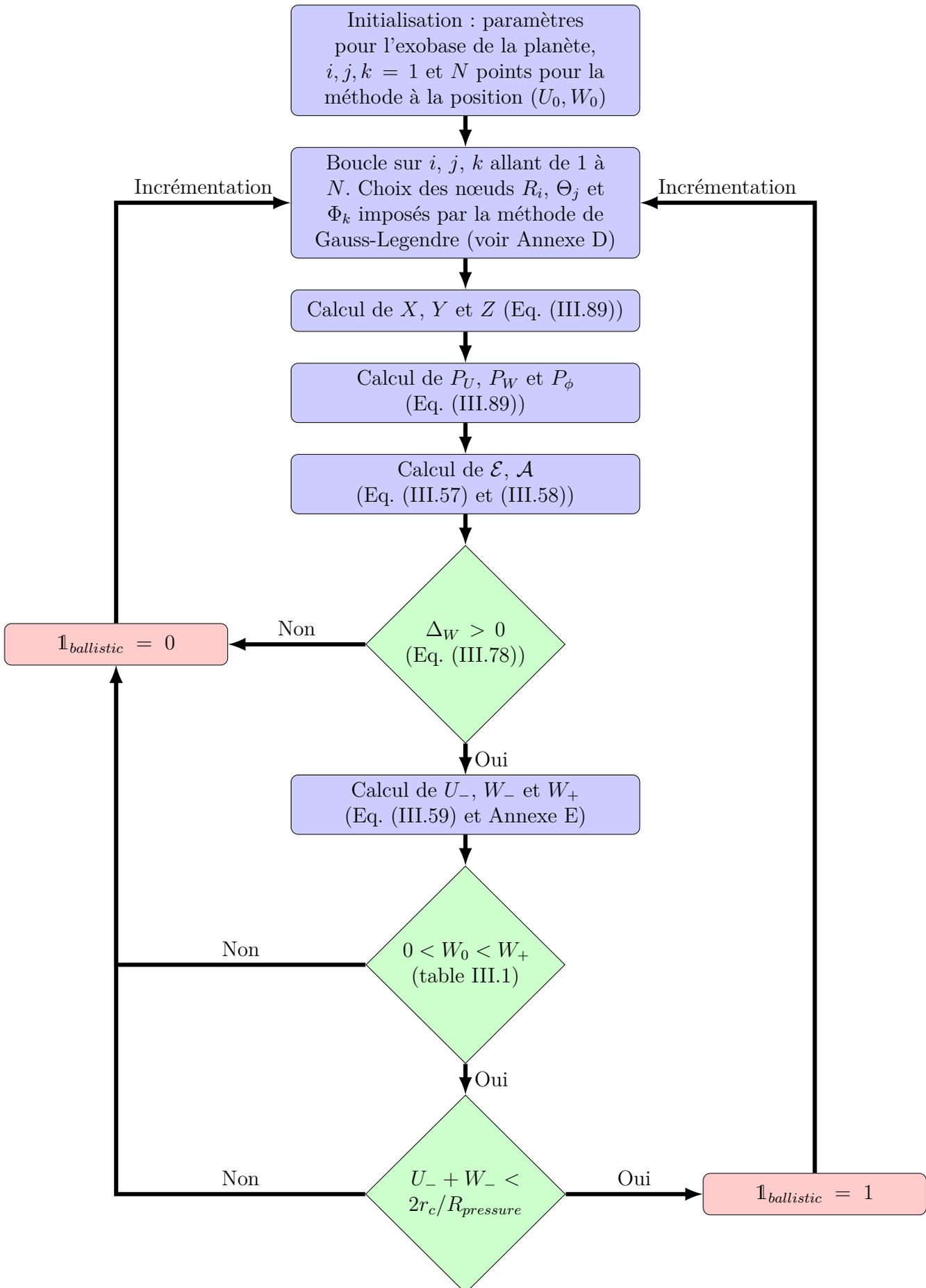


FIGURE III.17 – Algorithme du programme permettant de connaître la valeur, 0 ou 1 de l'indicateur sur l'ensemble d'intégration. Pondérée par le poids donné par la méthode de Gauss-Legendre du nœud associé et de la fonction de distribution, la somme de toutes les contributions donne la fonction de partition  $\zeta_{ballistic}$ .

piégé entre deux paraboloides c.-à-d.  $W$  compris entre  $W_-$  et  $W_+$ . Le deuxième test condense toutes ces conditions : nous vérifions à la fois que les racines sont réelles positives ET (au sens logique) que la particule est piégée. Enfin, le dernier test (test 3) vérifie si cette zone de confinement de la particule étudiée croise l'exobase ou non. Par défaut, notre calcul s'effectue dans l'exosphère c.-à-d.  $U_+ + W_+ > U + W > 2r_{exo}/R_{pressure}$ . Il faut vérifier aussi si  $U_- + W_- < 2r_{exo}/R_{pressure}$ , condition pour croiser l'exobase (cf. tableau III.1). S'il se révèle qu'à la fin de la boucle l'indicatrice vaut bien 1, il ne reste plus qu'à sommer avec le terme  $R_i^2 \exp(-R_i^2) w_i w_j w_k$ .

Pour des raisons de symétrie sur  $P_U$ ,  $P_W$  et  $P_\phi$  (seuls leurs carrés importent), l'intégration peut se réduire à l'intervalle  $[0, \pi/2]$  pour  $\Theta$  et  $\Phi$ .

Une fois la fonction de partition  $\zeta_{bal}$  déterminée numériquement, nous obtenons la densité par :

$$\frac{n_{ballistic}}{n_{exo}} = \exp(\lambda - \lambda_c) \exp\left(-\lambda_a \frac{r - r_{exo}}{R_{pressure}} \cos \theta\right) \zeta_{ballistic}(U, W) \quad (\text{III.92})$$

avec  $U = (r + x)/R_{pressure}$ ,  $W = (r - x)/R_{pressure}$  et  $\cos \theta = (U - W)/(U + W)$ .

Le deuxième terme exponentiel est introduit afin d'obtenir une densité uniforme à l'exobase en  $r = r_{exo}$  pour une fonction de partition égale à 1.

### D.3 Application aux exosphères de la Terre, Mars et Titan

Les briques de base sont maintenant agencées pour appliquer notre modèle aux différentes planètes et satellites du système solaire et, pourquoi pas, éventuellement aux exoplanètes. Dans cette partie, j'ai voulu de nouveau m'intéresser aux cas de la Terre, Titan et bien sûr Mars.

L'approche originale, dans les deux sens du terme, de Bishop and Chamberlain (1989) avait surtout pour but de rendre compte du phénomène de queue observé dans la géo-couronne le long de l'axe Soleil-planète de façon simple avec un minimum de paramètres. Cette approche nécessite un jeu limité de paramètres : l'accélération induite par la pression de radiation  $a$ , le paramètre  $GM$  et le paramètre de Jeans  $\lambda_c$ , ce dernier regroupe lui-même la température de l'exosphère  $T_{exo}$ , la masse de la particule  $m$  et la distance de l'exobase  $r_{exo}$ . Par l'universalité de cette approche que nous venons de généraliser, il est aisé d'appliquer ce modèle à différentes exosphères comme celles de la Terre, Mars, ou Titan.

#### D.3.a Application à l'hydrogène sur Terre

Cette partie est consacrée à la modélisation de la densité exosphérique d'hydrogène sur Terre, en particulier de sa composante majoritaire balistique (les échappement ne dominant qu'à très hautes altitudes, et les satellites sont négligeables d'après la partie C.1). Comme dans la première partie de la thèse, nous allons étudier deux niveaux d'activité solaire, correspondant respectivement à des tempé-

ratures exosphériques de 800 K et 1200 K. Pour la pression de radiation, j'utiliserai la valeur donnée dans le livre de Chamberlain and Hunten (1987) (p. 293) pour la quantité de photons diffusées par l'hydrogène pour la raie Lyman- $\alpha$ . Néanmoins, cette raie présente une forte variabilité en intensité. Dans son article de 1975, Vidal-Madjar (1975) présente une liste de relevés de 1969 à 1971 de cette valeur :  $f_0$  varie d'un facteur 2 (et donc  $a$ ) entre 2,5 et 5 environ (nous n'avons par ailleurs pas trouvé d'analyse plus récente de cette variabilité). La valeur choisie ici sera donc considérée comme une valeur moyenne.

### Profils de densité

Sur la figure III.18, j'ai représenté le ratio entre la densité des particules balistiques et la densité à l'exobase, en comparant mon modèle à celui de Chamberlain (1963) et ce pour les deux activités solaires. Pour mon modèle, je dois considérer une isopycne de référence, l'exobase, dont je suppose la forme parfaitement sphérique autour de la planète. L'exobase est représentée par un cercle noir au centre de l'image. Dans les deux cas, près de la planète, la densité dépend surtout de la distance radiale à la planète, sans asymétrie apparente. Par contre, à plus grande distance, des asymétries apparaissent : les particules sont concentrées sur l'axe jour-nuit avec des densités plus élevées côté nuit tandis qu'il y a beaucoup moins de particules balistiques dans le plan perpendiculaire à l'axe Terre-Soleil (c.-à-d. p.ex. côtés aube et crépuscule).

Côté nuit, là où le ratio entre mon modèle et celui de Chamberlain est le plus fort (cf. figure III.19), ce ratio atteint des valeurs proches de 4. Par contre, côté jour, ce ratio chute, et devient même parfois inférieur à 1, essentiellement dans les directions comprises entre 45 et 90 degrés par rapport à l'axe Terre-Soleil.

Par comparaison au modèle de Chamberlain, nous observons clairement, outre l'apparition d'asymétries, une différence dans les valeurs de densités, avec des densités de particules balistiques quasiment toujours plus élevées que celles de Chamberlain (cf. la quasi-absence de couleur bleue dans les panneaux du bas). Je reviendrai sur cet aspect dans la section D.3.d car il sera aussi présent pour les autres planètes.

Sur la figure III.19, j'ai représenté les profils radiaux de densité de particules balistiques, pour différentes valeurs d'angles par rapport à l'axe Soleil-Terre. Nous pouvons remarquer deux phénomènes importants : l'apparition d'une limite externe de l'exosphère ou exopause, ainsi que des asymétries jour/nuit/aube/crépuscule.

### Apparition d'une exopause

Les profils de densité de la figure III.19 montrent clairement l'existence d'une limite externe de l'exosphère, qui se manifeste au travers d'une chute brutale des densités aux plus hautes altitudes (au-delà de 30 rayons terrestres). Cette limite, que nous avons introduite artificiellement dans notre

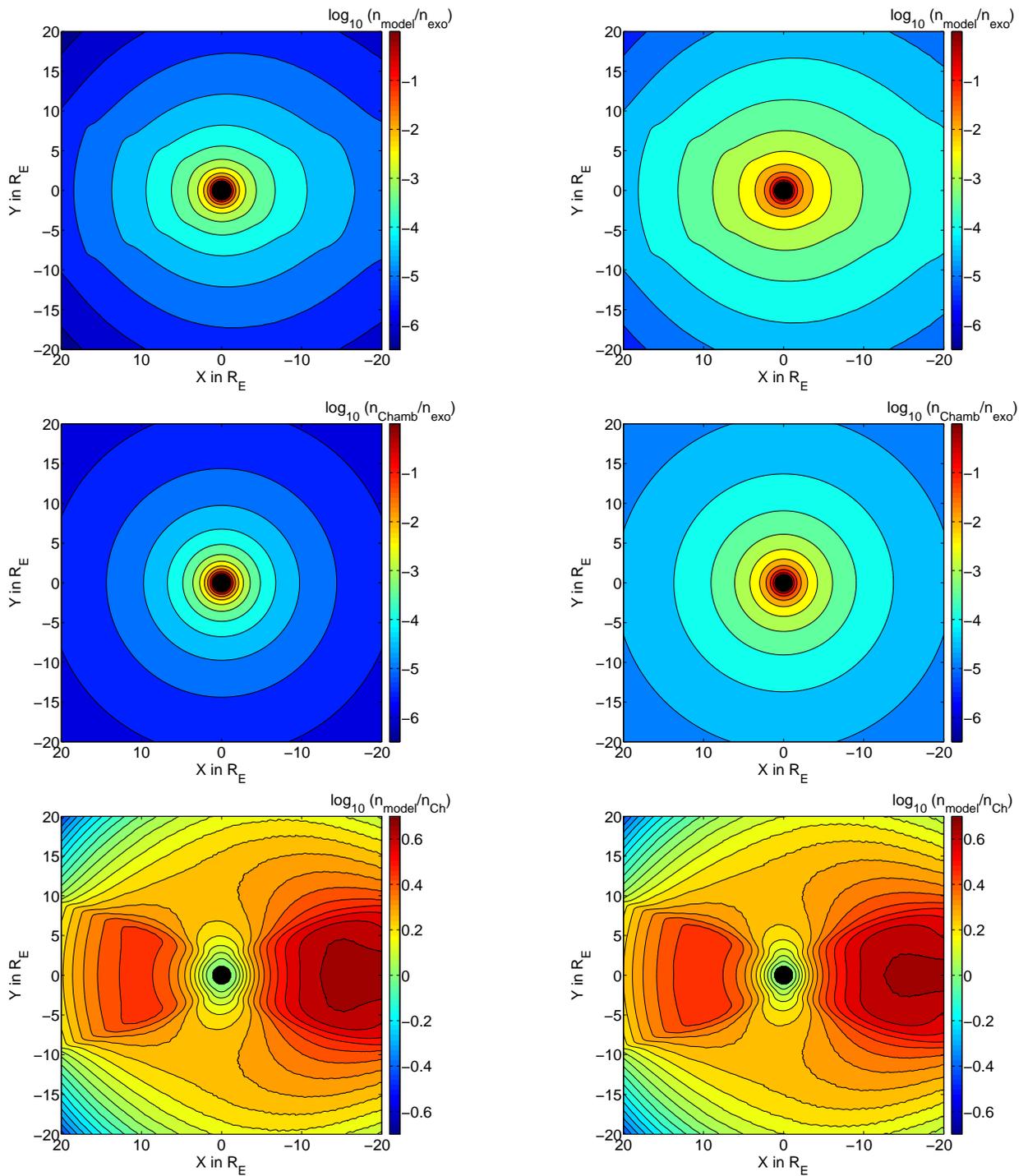


FIGURE III.18 – Tracés des isopycnes (contours le long desquels la densité est constante) des particules balistiques dans notre modèle (panneaux du haut) pour les cas avec  $T_{exo} = 800$  K (gauche) et 1200 K (droite), fournies par le modèle de Chamberlain pour la densité de particules balistiques (panneaux du milieu) et comparaison entre ces deux modèles (ratio entre notre modèle et celui de Chamberlain en échelle log, ce qui correspond aussi à la différence en log entre les panneaux du haut et du milieu ; panneaux du bas). L'échelle de couleurs est la même pour tous les graphes de densité. Il y a symétrie par rotation autour de l'axe  $(O, x)$  et le Soleil est placé à gauche des figures. Sur le panneau du bas, les couleurs chaudes identifient les zones où le modèle de Chamberlain sous-estime les densités de particules balistiques par rapport à notre modèle et inversement pour les couleurs froides

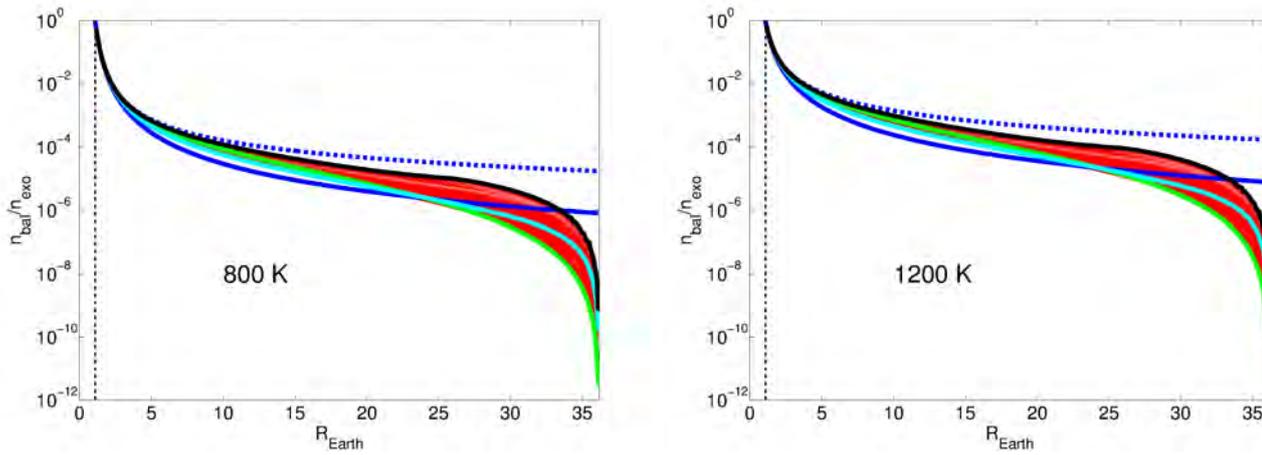


FIGURE III.19 – Tracés de la proportion de particules balistiques (normalisé par rapport à la densité à l'exobase) en fonction de la distance au centre de la Terre, pour une température exosphérique  $T_{exo} = 800$  K (panneau gauche) et 1200 K (panneau droit). J'ai tracé en trait continu bleu le profil balistique de Chamberlain et en trait pointillé bleu la densité de particules satellites (approximation  $\zeta_{sat}$ ) et balistiques au sens de Chamberlain. En rouge, nous avons nos densités pour différentes orientations. J'ai mis en valeur trois directions particulières : en vert, proche de l'axe Soleil-Terre côté jour ; en cyan, la direction perpendiculaire à cet axe (indifféremment côté aube ou crépuscule) ; en noir, proche de l'axe Soleil-Terre côté nuit.

étude des particules satellites (cf. partie B.2.c), apparaît désormais ici naturellement par l'effet de la pression de radiation. À notre connaissance, il s'agit du premier modèle exosphérique où une exopause apparaît ainsi naturellement. Cette limite, située à la même distance dans toutes les directions, correspond exactement à la distance à laquelle l'intensité de la pression de radiation vaut celle de la force gravitationnelle de la Terre.

### Discussion sur les asymétries

L'analyse des profils de densité en fonction de l'angle par rapport à l'axe Soleil-Terre amène à deux remarques. Premièrement, le profil radial côté nuit domine toujours les autres profils. Cela semble relativement logique puisque la direction de la force de pression de radiation aura tendance à repousser les particules côté nuit, donc à augmenter les densités de ce côté. Deuxièmement, les profils des directions perpendiculaires à l'axe Soleil-Terre (p.ex. côtés aube et crépuscule) sont les plus faibles à basse altitude, et c'est ensuite le profil en direction du Soleil qui devient le plus faible plus loin dans la couronne. L'explication aux plus hautes altitudes est simple : il existe un mur de potentiel côté jour qui empêche l'établissement de densités significatives côté jour. Par contre, l'explication pour le plan perpendiculaire est plus compliquée. Nous verrons plus loin (partie D.3.d) une autre explication possible de ces comportements, basée sur les transferts entre types de populations (satellite, balistiques, en échappement).

Comme nous l'avons déjà mentionné dans l'introduction de la thèse (partie D), de nombreux auteurs se sont intéressés à la modélisation de la répartition de l'hydrogène dans l'exosphère terrestre. Nous pouvons notamment citer Johnson (1961), Chamberlain (1963), Hodges and Tinsley (1981), Fahr and Shizgal (1983), Rairden et al. (1986), Tinsley et al. (1986), Bishop (1991), Hodges (1994)

ou encore Østgaard et al. (2003) dont une partie des modèles sont basés sur l'imagerie. Nous nous concentrerons ici sur les travaux les plus récents de Zoennchen et al. (2011, 2013) et de Bailey (2012), qui ont mis en évidence des asymétries de la géo-couronne directement comparables aux asymétries issues de notre modèle.

Sur le modèle de Hodges (1994), Zoennchen et al. (2011, 2013) proposent d'ajuster les densités issues d'observations de la raie Lyman- $\alpha$  par l'instrument TWINS et de fournir un modèle empirique. Zoennchen et al. (2013) proposent deux figures intéressantes, représentant la densité dans les plans équatorial et méridional passant par les pôles, à deux distances fixes de 4 et 8 rayons terrestres. Sur le même principe, j'ai tracé, pour une température exosphérique de 800 Kelvins, la densité de particules balistiques à 8 rayons terrestres sur la figure III.20 (il manque donc la composante en échappement qui a priori augmentera la densité totale côté nuit de préférence). Puisque Zoennchen et al. (2013) établit un modèle à l'aide d'harmoniques sphériques jusqu'à l'ordre 2, j'en ai fait de même pour une meilleure comparaison. Grâce au développement en série de Fourier, nous avons d'ailleurs gommé l'irrégularité présente vers 30 degrés (et 330 par symétrie).

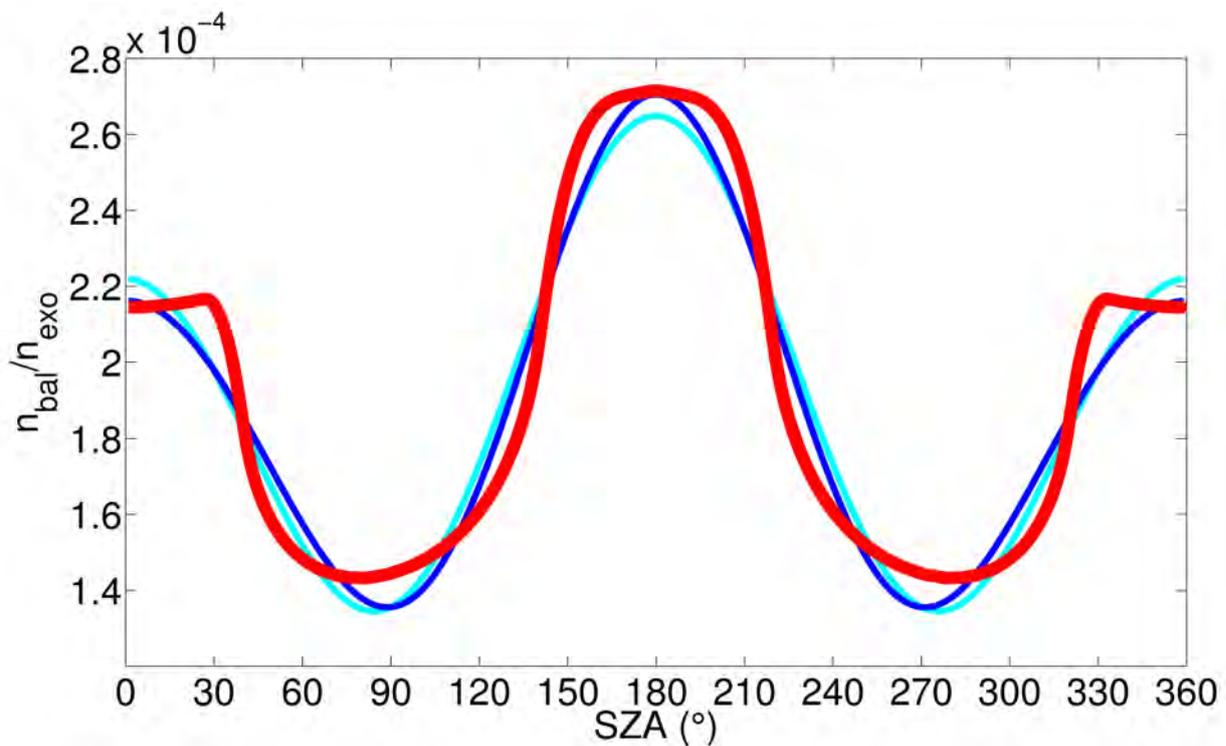


FIGURE III.20 – Tracé en fonction de l'angle solaire zénithal de la densité de particules balistiques à 8 rayons terrestres pour une température exosphérique de 800 K. La courbe rouge correspond au profil du modèle. En cyan et en bleu, j'ai ajusté cette courbe à l'aide d'un développement en série de Fourier, série qui ne comprend que des fonctions cosinus puisqu'il y a symétrie. La courbe en cyan correspond à l'ajustement avec le terme constant et les deux premières composantes sinusoidales et la courbe bleu avec une composante sinusoidale supplémentaire.

La comparaison entre nos courbes (figure III.20) et celles de Zoennchen et al. (2013) (montrées sur la figure III.21) révèle en premier lieu que la variabilité entre les côtés jour/nuit et aube/crépuscule est assez bien reproduite par notre modèle pour le profil au solstice dans le plan équatorial. À

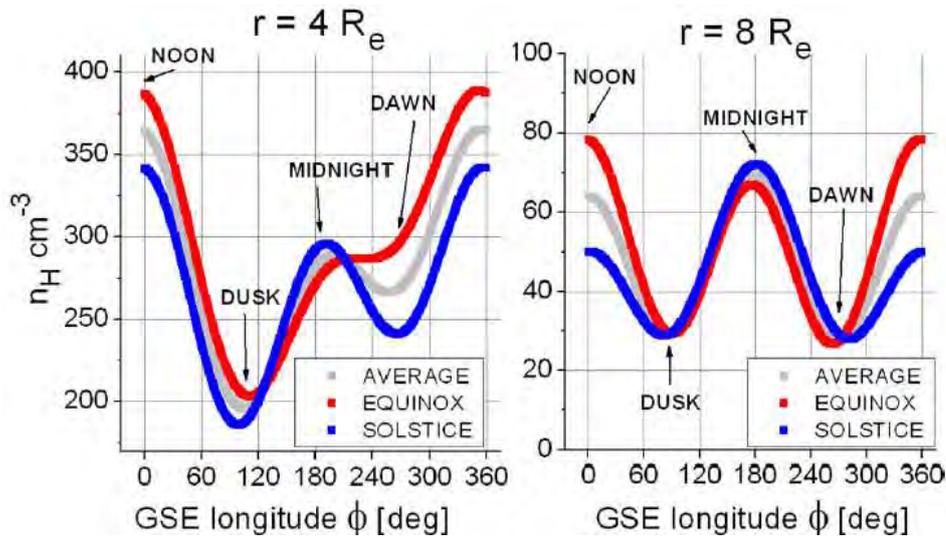


FIGURE III.21 – Extrait de Zoennchen et al. (2013), montrant les profils (dans le plan équatorial, en fonction de la longitude) de densités pour différentes conditions : solstice d’été, équinoxe, moyenne, et ce à des distances de 4 et 8 rayons terrestres.

l’équinoxe, la densité côté jour est en revanche sensiblement plus élevée que du côté nuit ce qui ne peut arriver dans mon modèle. Si les ordres de grandeur des variations en longitude sont les mêmes (conditions de solstice), nous observons néanmoins dans notre modèle une légère sous-représentation des densités d’hydrogène côté nuit (d’environ 25–30%), en comparaison avec les profils de Zoennchen et al. (2013). Ceci peut en partie s’expliquer par l’absence de particules en échappement dans mon modèle. Les particules en échappement vont contribuer principalement côté nuit, ce qui réduira la différence entre les deux modèles. Nous n’avons pas non plus pris en compte une éventuelle contribution des particules satellites. Cependant, notre étude du chapitre II a montré qu’elles sont a priori négligeables dans la haute exosphère terrestre. Néanmoins, comme nous le montrerons par la suite, les particules satellites ne peuvent pas contribuer aux densités près de l’axe Terre-Soleil.

Globalement, la variabilité en longitude, entre jour et nuit, ainsi que les densités moindres côté aube/crépuscule, est bien reproduite par mon modèle. D’autant plus que les conditions précises à l’exobase ne sont pas forcément les mêmes, qu’il existe également des incertitudes sur les mesures et donc sur les profils modélisés par Zoennchen et al. (2013). Par ailleurs, je suis convaincu que l’effet de la pression de radiation est en tout cas une meilleure explication aux densités plus élevées d’hydrogène neutre dans la queue de la géo-couronne que l’explication fournie par Zoennchen et al. (2013). Ces auteurs proposent en effet comme explication un transport plus efficace des atomes neutres énergétiques (c.-à-d. ENA) vers le côté nuit.

Par ailleurs, le profil de densité en longitude à une distance de 4 rayons terrestres montre un comportement très différent, avec des densités maximales côté jour et minimales côté nuit. Ces asymétries sont certainement liées à celles de l’exobase, dont les caractéristiques sont nécessairement différentes selon les conditions d’éclairement solaire notamment. Dans la haute exosphère, les asymétries à l’exobase sont ensuite gommées et remplacées au fur et à mesure par des asymétries liées à la dynamique des particules, dynamique qui est influencée de manière significative par la pression

de radiation solaire (cf. Vidal-Madjar and Bertaux (1972) pour la cas purement gravitationnel). Les fonctions de distributions des atomes et molécules dépendent, à de telles altitudes, plus de la dynamique de chaque atome/molécule que des collisions ou de la photo-ionisation, rares à ces distances, bien que des particules satellites pourraient éventuellement s'y aventurer.

Il est possible d'établir d'autres comparaisons avec des observations du même instrument. Bailey (2012) a consacré sa thèse à l'étude des données de TWINS 1/2. Il s'est intéressé notamment à des observations de l'année 2008, sur des périodes de quatre jours, à un mois d'intervalle par trois fois. La figure III.22 est extraite directement de sa thèse et représente les isopycnes dans les plans méridien et équatorial au cours de ces trois périodes. Les comportements observés dans notre modèle (et par Zoennchen et al. (2013)) se retrouvent à nouveau dans ces observations. Nous retrouvons en particulier cette forme elliptique des isopycnes à haute altitude, orientée dans la direction Terre-Soleil (point jaune). Une certaine variabilité existe entre les différentes périodes, selon le plan considéré, mais les asymétries restent globalement stables. Précisons d'ailleurs que Bailey a exprimé les incertitudes sur les mesures en fonction de la distance géocentrique. Ces incertitudes sont en-deçà de 10 % pour des distances inférieures à 6 rayons terrestres. Par contre, elles peuvent atteindre plus de 25 % à 8 rayons terrestres. Il sera donc difficile d'obtenir un accord parfait entre notre modèles et les observations de TWINS.

Par ailleurs, nous pouvons également citer les travaux plus anciens de Tinsley et al. (1986), qui, au moyen d'une approche Monte Carlo incluant l'effet de la pression de radiation solaire, ont montré des résultats très similaires : l'apparition des asymétries jour/nuit et aube/crépuscule à hautes altitudes dues à la pression de radiation, et l'existence d'asymétries à basses altitudes issues de l'inhomogénéité des conditions à l'exobase.

### D.3.b Application à l'hydrogène sur Titan

Nous avons également appliqué notre modèle sur Titan. La pression de radiation y est 100 fois moins importante que sur Terre car ce satellite est dix fois plus loin que la Terre. La pression de radiation peut y être considérée comme négligeable a priori mais il s'avère qu'elle peut avoir quelques effets sur la structure de l'exosphère. Nous nous sommes concentrés sur la modélisation de l'hydrogène atomique, qui est la deuxième espèce la plus importante dans la couronne étendue de Titan après le dihydrogène. Nous n'avons pas trouvé de valeurs de pression de radiation pour le hydrogène moléculaire, c'est l'une des raisons pour lesquelles nous avons poursuivi notre étude sur l'hydrogène atomique, bien qu'il soit présent en moindre quantité.

Sur les figures III.23, nous avons représenté, comme pour le cas terrestre précédent, la cartographie des densités de particules balistiques pour des distances allant jusqu'à 10 rayons de Titan. Les profils de densité sont donc compris entre le profil donné par la formule analytique de Chamberlain pour la composante balistique et le profil de Chamberlain donné pour la composante balistique plus satellite. L'impact de la pression de radiation sur l'exosphère induit presque toujours (comme dans

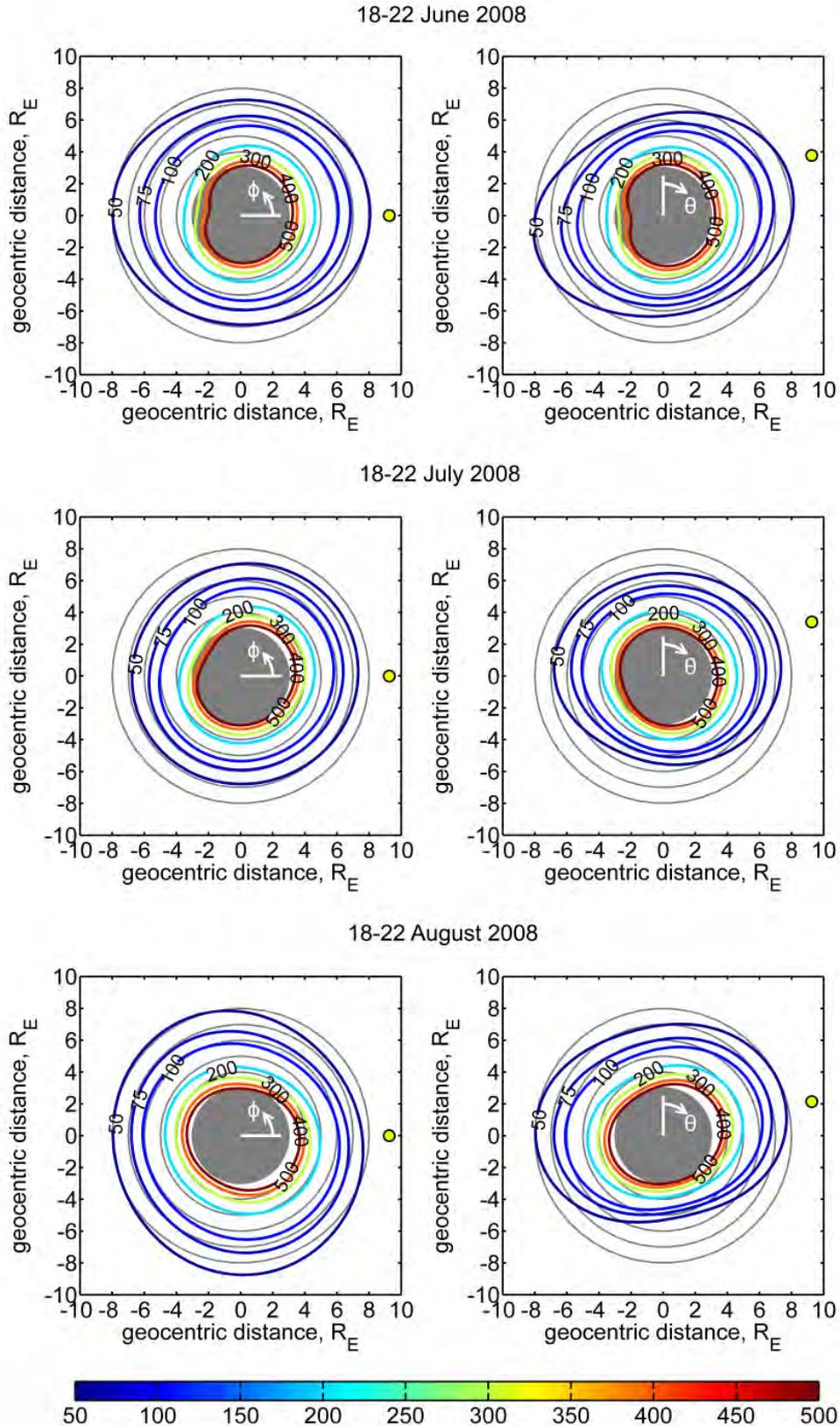


FIGURE III.22 – Extrait de la thèse de Bailey (2012). Carte de densité de l'hydrogène terrestre pour trois périodes : 18-22 Juin 2008 (panneau supérieur), 18-22 Juillet 2008 (panneau intermédiaire) et 18-22 Août 2008 (panneau inférieur). À gauche, nous avons la représentation dans le plan équatorial et à droite dans le plan méridien. Les différentes isopycnes sont identifiées, indexées de la densité correspondante en particules par  $\text{cm}^{-3}$ . Les cercles gris correspondent aux distances comprises entre 1 et  $8 R_E$  par pas de  $1 R_E$ . Le point jaune représente la direction du Soleil.

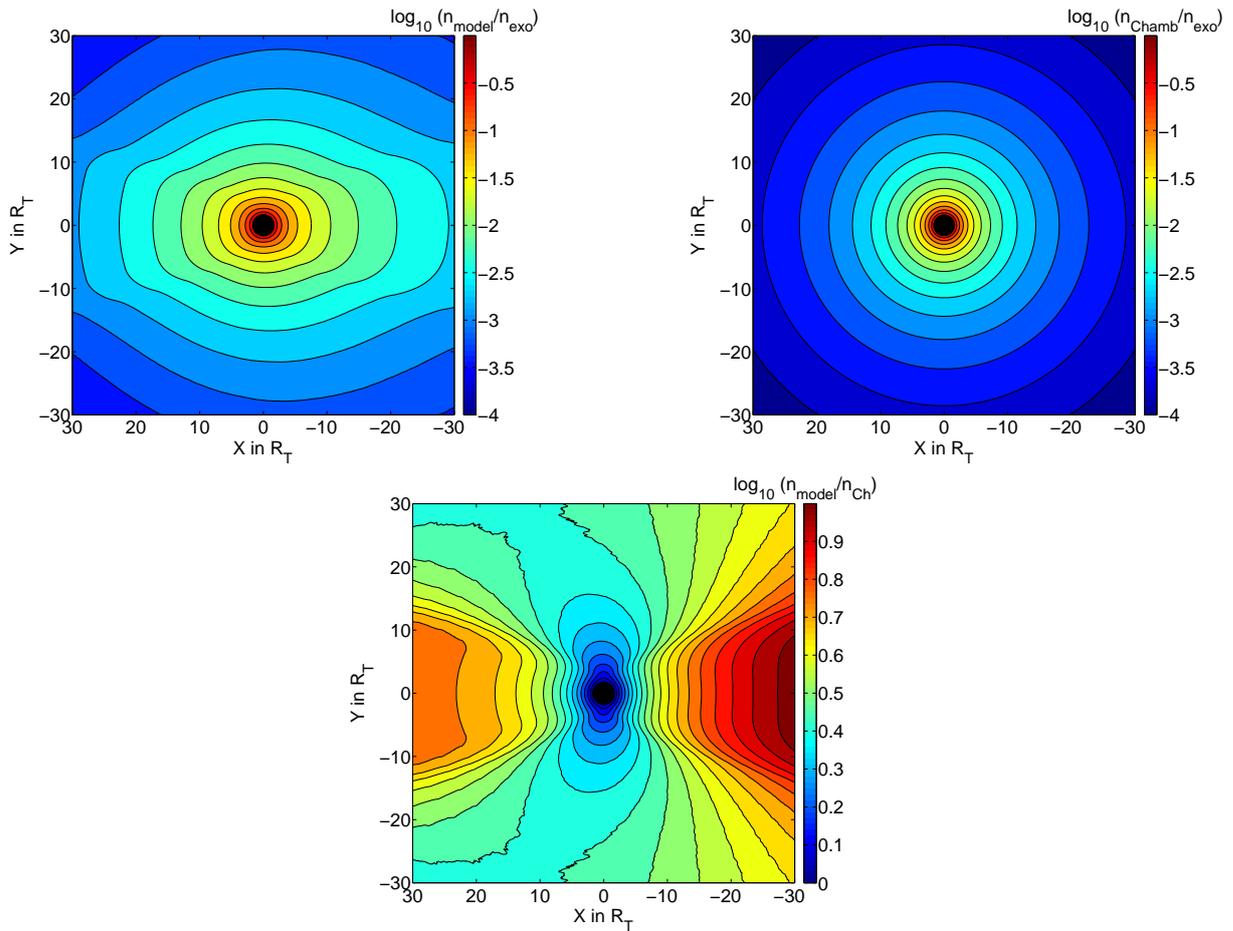


FIGURE III.23 – Isopycnés de l’hydrogène pour les particules balistiques dans l’exosphère de Titan avec  $T_{exo} = 150 K$  : notre modèle (premier panneau), le formalisme de Chamberlain (second panneau) et comparaison entre ces deux modèles (ratio entre notre modèle et celui de Chamberlain en échelle log, ce qui correspond aussi à la différence en log entre les panneaux du haut et du milieu ; panneaux du bas). L’échelle de couleurs est la même pour tous les graphes de densité. Il y a symétrie par rotation autour de l’axe  $(O, x)$  et le Soleil est placé à gauche des figures. Sur le panneau du bas, les couleurs chaudes identifient les zones où le modèle de Chamberlain sous-estime les densités de particules balistiques par rapport à notre modèle et inversement pour les couleurs froides

le cas terrestre) des densités plus fortes que celles prédites par le formalisme de Chamberlain si l’on étudie uniquement la composante balistique au sens de Chamberlain (1963). Je reviendrai dans la partie D.3.d sur la comparaison avec les densités issues de Chamberlain incluant les balistiques et les satellites.

Néanmoins, il faut faire très attention ici. Titan n’est pas un corps isolé, il évolue dans la magnétosphère de Saturne (parfois même en dehors) et la limite de la sphère de Hill de Titan par rapport à Saturne est de l’ordre d’une dizaine de rayons de Titan. La dynamique à hautes altitudes reposera surtout sur le problème à trois corps (qui sera abordé dans le cas des exoplanètes dans le chapitre IV). Néanmoins, cette modélisation simplifiée permet de présenter un cas pour lequel nous aurions une faible pression de radiation et nous permet de nous poser une question : pourquoi ne retrouve-t-on pas le profil de Chamberlain pour les particules balistiques dans la limite où la pression de radiation est faible ? Ce point sera abordé plus loin (partie D.3.d).

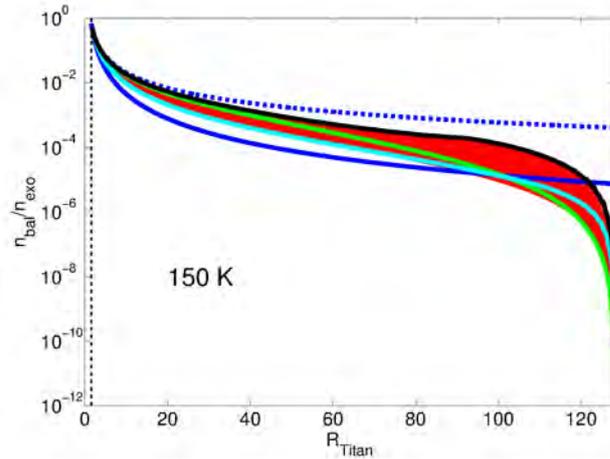


FIGURE III.24 – Tracés de la proportion de particules balistiques (normalisé par rapport à la densité à l'exobase) en fonction de la distance au centre de Titan, pour une température exosphérique  $T_{exo} = 150$  K. J'ai tracé en trait continu bleu le profil balistique de Chamberlain et en trait pointillé bleu la densité de particules satellites (approximation  $\zeta_{sat}$ ) et balistiques au sens de Chamberlain. En rouge, nous avons nos densités pour différentes orientations. J'ai mis en valeur trois directions particulières : en vert, proche de l'axe Soleil-Titan côté jour ; en cyan, la direction perpendiculaire à cet axe (indifféremment côté aube ou crépuscule) ; en noir, proche de l'axe Soleil-Titan côté nuit.

### D.3.c Application à l'hydrogène sur Mars

Nous avons appliqué précédemment notre modèle à la Terre et Titan. Nous pouvons naturellement nous intéresser à Mars, pour laquelle la mission MAVEN apportera très bientôt des éléments cruciaux sur l'évolution de sa haute atmosphère. Avec son lancement le 22 octobre 2013 et ensuite sa mise en orbite prévue vers Septembre 2014, MAVEN fournira en effet, par son orbite elliptique très particulière et ses « deep dip » (passage très bas dans l'atmosphère autour de 150 km donc sous l'exobase martienne), une grande base de données aussi bien du champ magnétique, du vent solaire, de la magnétogaine, des ions, des neutres, etc ...

J'ai représenté la densité d'hydrogène balistique dans l'exosphère martienne pour deux températures exosphériques (cf. figure III.25) correspondant à deux activités solaires :  $T_{exo} = 200$  K et 350 K. Les caractéristiques à l'exobase (altitude, température et densité) sont identiques à celles utilisées précédemment dans la partie II.

Nous retrouvons à nouveau la même structure que dans le cas de la Terre : des densités plus élevées côté nuit que côté jour et une déplétion dans le plan  $X = 0$  (l'axe des  $Y$  et  $Z$  sont équivalents par symétrie) c'est-à-dire côtés aube et crépuscule. Les densités sont là encore sous-estimées par les profils de Chamberlain dans une majorité de l'exosphère (cf. le panneau inférieur III.25), à l'exception des régions les plus externes à l'approche de l'exopause où les profils chutent brutalement.

### D.3.d Comportement général

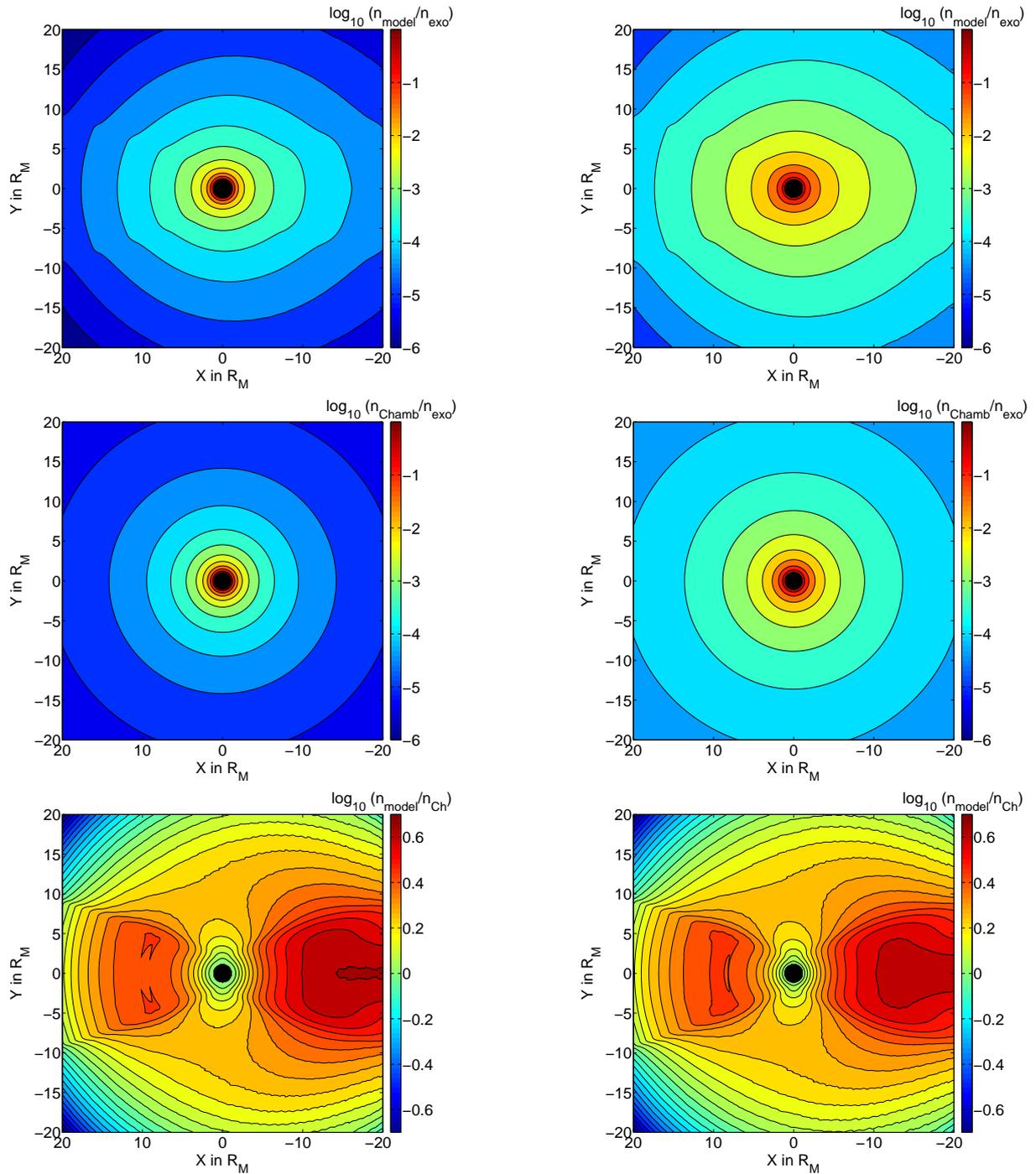


FIGURE III.25 – Tracés des isopycnes (contours le long desquels la densité est constante) des particules balistiques d’hydrogène pour le cas martien avec  $T_{exo} = 200\text{ K}$  (gauche) et  $350\text{ K}$  (droite), issues de notre modèle (panneaux du haut), d’après également le modèle de Chamberlain (panneaux du milieu). Les altitudes pour l’exobase sont respectivement de  $190\text{ km}$  pour  $200\text{ K}$  et  $250\text{ km}$  pour  $350\text{ K}$ . L’échelle de couleurs est la même pour les deux activités solaires. Il y a symétrie par rotation autour de l’axe  $(O, x)$  et le Soleil est placé à gauche de la figure. Les panneaux du bas contiennent la comparaison entre ces deux modèles (ratio entre notre modèle et celui de Chamberlain en échelle log, ce qui correspond aussi à la différence en log entre les panneaux du haut et du milieu ; panneaux du bas). L’échelle de couleurs est la même pour tous les graphes de densité. Il y a symétrie par rotation autour de l’axe  $(O, x)$  et le Soleil est placé à gauche des figures. Sur le panneau du bas, les couleurs chaudes identifient les zones où le modèle de Chamberlain sous-estime les densités de particules balistiques par rapport à notre modèle et inversement pour les couleurs froides

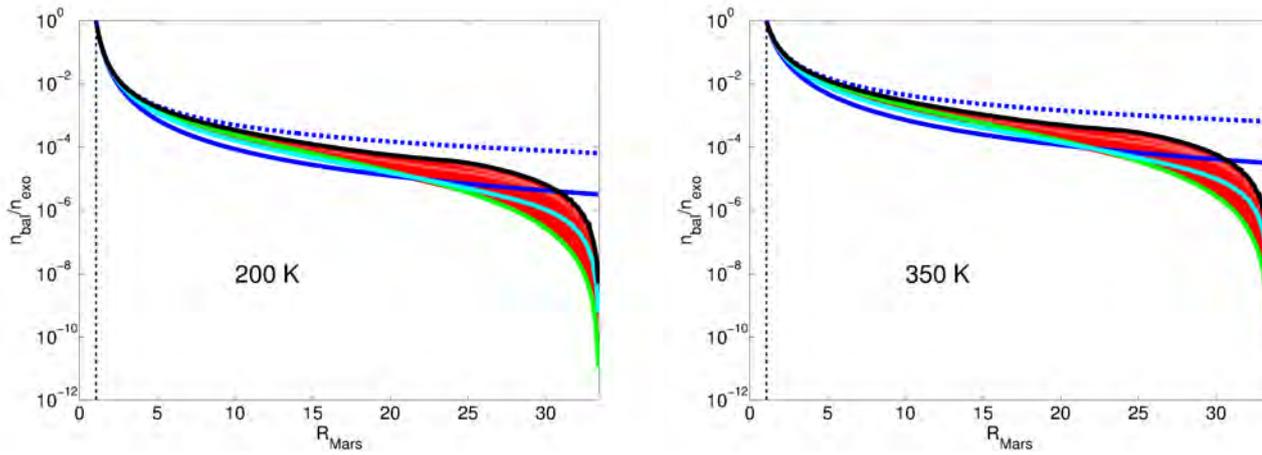


FIGURE III.26 – Tracés de la proportion de particules balistiques (densité locale normalisée par rapport à la densité à l'exobase) en fonction de la distance au centre de Mars, pour une température exosphérique  $T_{exo} = 200$  K (panneau gauche) et 350 K (panneau droit). J'ai tracé en trait continu bleu le profil balistique de Chamberlain et en trait pointillé bleu la densité de particules satellites (approximation  $\zeta_{sat}$ ) et balistiques au sens de Chamberlain. En rouge, nous avons nos densités pour différentes orientations. J'ai mis en valeur trois directions particulières : en vert, proche de l'axe Soleil-Mars côté jour ; en cyan, la direction perpendiculaire à cet axe (indifféremment côté aube ou crépuscule) ; en noir, proche de l'axe Soleil-Mars côté nuit.

Je vais résumer ici les principales observations faites au travers des différents cas (Terre, Mars et Titan) concernant l'influence de la pression de radiation sur les profils de densité des particules balistiques :

### La pression de radiation implique la présence d'une exopause située à $R_{pressure}$

Les profils de densité issus de notre modèle révèlent une chute brutale des densités aux plus hautes altitudes. Cette limite apparaît dans tous les cas aux alentours de  $R_{pressure}$ , définie comme la distance où l'accélération due à la pression de radiation domine celle due à la gravité (introduite par Bishop (1991)). La densité de particules balistiques est nulle au-delà de cette zone (cf. figure III.27), les particules encore présentes sont donc forcément en échappement à partir de cette limite et ne sont donc plus gravitationnellement liées à la planète. Nous précisons que cette limite externe ou exopause apparaît naturellement dans le modèle, au contraire des modèles présents dans la littérature qui introduisent cette limite de manière artificielle. Accessoirement, cela valide ainsi l'introduction d'une distance limite comme dans l'article de Bishop (1991) et dans notre chapitre précédent (cf. partie B.2.c). Cette distance limite pour la contribution balistique était par ailleurs déjà suggérée par les tracés d'équipotentiels (cf. figure III.5) car celles-ci se referment à des distances finies.

### La pression de radiation accroît la densité d'hydrogène neutre

L'analyse de chaque planète spécifique (figures III.19, III.26, III.24, III.26) ou comparée entre planètes (cf. figure III.27) des profils de densités balistiques issus de notre modèle (qui inclut la pres-

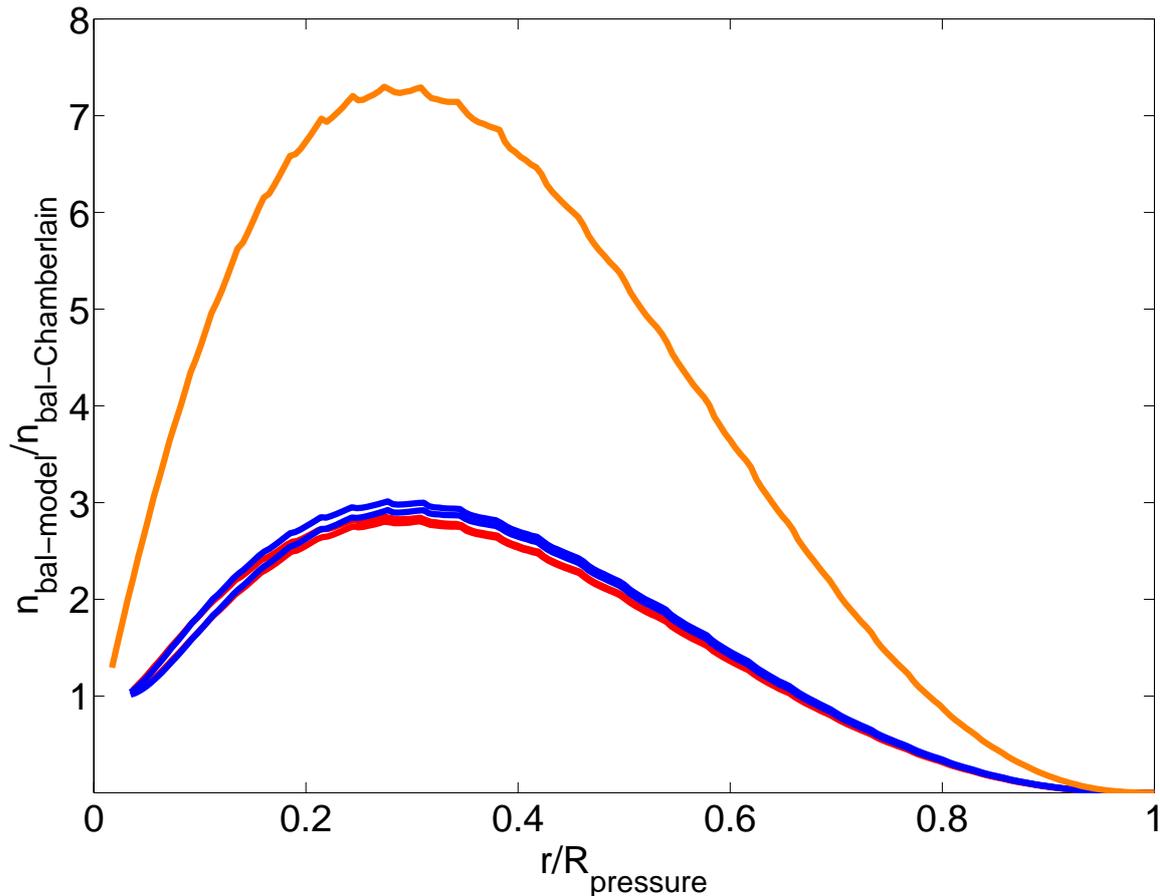


FIGURE III.27 – Ratios dans la direction du Soleil entre le profil de densité obtenu par notre modèle et par le formalisme de Chamberlain en fonction de la distance, normalisée par rapport au  $R_{pressure}$  de chaque planète. En bleu, j'ai représenté les deux cas terrestres, non distinguables ; de même pour Mars, en rouge. En orange, nous avons représenté le cas de Titan.

sion de radiation) et du formalisme de Chamberlain (qui ne l'inclut pas) montre que la pression de radiation augmente les valeurs de densités (jusqu'à un facteur 7) dans toute les directions (jusqu'à la région de l'exopause où les densités chutent fortement). Cela peut en partie s'expliquer par la présence de l'exopause. Dans le modèle de Chamberlain, les particules balistiques peuvent avoir des orbites très excentriques en l'absence de limite externe. Là, leur apoapse est limité, elles sont obligées d'être « potentiellement » confinées (c.-à-d. en terme de champ de force), ce qui amène à l'équivalent d'une diminution du volume de l'exosphère et donc à une augmentation des densités volumiques.

La figure III.27 fournit par ailleurs deux éléments intéressants. Le premier est que le pic de cette augmentation des densités est toujours situé à la même distance (environ  $0,3 R_{pressure}$ ). Le second est que les cas de Mars et de la Terre sont quasi-identiques, alors que Titan semble unique. Sur Mars et sur la Terre, l'hydrogène a certes un paramètre de Jeans qui n'est pas identique, mais les deux planètes ont en commun une valeur identique du rapport  $r_{exo}/R_{pressure}$  (peu dépendant de la température et donc du paramètre de Jeans à l'exobase), qui avoisine 0,03 pour les deux corps alors qu'il est de l'ordre de 0,01 pour Titan. Il semble donc affirmer que plus le rapport  $r_{exo}/R_{pressure}$  est petit plus l'écart aux profils sans pression de radiation est important. Cela peut paraître paradoxal,

puisque une faible pression de radiation correspond à la fois à un  $R_{\text{pression}}$  tendant vers l'infini et à un cas se rapprochant du formalisme de Chamberlain (et donc à un ratio attendu au final proche de 1). Néanmoins, la dynamique de l'exosphère est plus complexe, comme discuté ci-dessous.

De fait, la pression de radiation induit également un autre effet dont le principe (argumenté plus en détails ensuite) est le suivant : en l'absence de pression de radiation, l'exosphère est composée de proportions spécifiques de populations balistiques, satellites et d'échappement. L'apparition d'une pression de radiation va transformer ces proportions, et va en particulier transformer des particules satellites en particules balistiques, augmentant ainsi la proportion de balistiques (donc leurs densités) par rapport à un cas sans pression de radiation.

Aussi infime soit-elle, la pression de radiation brise la symétrie sphérique du modèle de Chamberlain. Dans tout plan contenant l'axe étoile-planète, aucune particule satellite ne survit, toutes les particules sont soit balistiques soit en échappement (cf. Bishop and Chamberlain (1989)). Dans le modèle de Chamberlain, en appliquant le théorème de Liouville, les particules satellites ne peuvent avoir d'existence « physique » dans les modèles non-collisionnels, puisque leur domaine dans l'espace des phases ne croisent jamais l'exobase. Néanmoins, en tenant compte de la pression de radiation, une plus grande partie des particules avec une énergie mécanique négative (dans le cas de Chamberlain, contributions des particules satellites et balistiques) existeront physiquement car la pression de radiation va déformer leur espace des phases afin qu'il puisse couper l'exobase. En présence de la pression de radiation, des particules dites satellites - sans la pression de radiation - vont devenir balistiques car la pression de radiation va déstabiliser leur périapse pour passer en-deça de l'exobase. La pression de radiation va donc convertir des particules satellites, en théorie non physiques dans l'approche non-collisionnelle, en particules balistiques, bien physiques. Cet effet est prépondérant (du point de vue des particules satellites) dans tout plan contenant l'axe étoile-planète puisque qu'aucune particule satellite ne peut exister au sens où leur volume d'espace des phases est nul (cf. plus loin la figure III.36). Par contre, cet effet est moindre dans le plan perpendiculaire à l'axe étoile-planète car il s'agit d'une région propice à l'existence des particules satellites au détriment des particules balistiques.

La figure III.28 montre le profil en angle solaire zénithal de densités de particules balistiques, dans le cas où l'on introduit une très faible pression de radiation. Nous retrouvons une symétrie jour-nuit (que nous n'avons pas en présence d'une pression de radiation significative) mais une asymétrie subsiste entre jour/nuit et aube/crépuscule. Une telle asymétrie est a priori inattendue pour une pression de radiation si faible, qui devrait amener à des profils constants du type Chamberlain. Précisons que ceci n'est pas un problème de calcul dans notre code (auquel nous avons pensé au premier abord). Côté jour et nuit, la densité de particules balistiques tend vers la contribution balistique plus satellite de Chamberlain car aucune particule ne peut-être satellite dans cette direction. Les particules satellites sont toutes converties en particules balistiques. Par contre, dans la direction perpendiculaire, certaines particules satellites subsistent et ne deviennent pas balistiques.

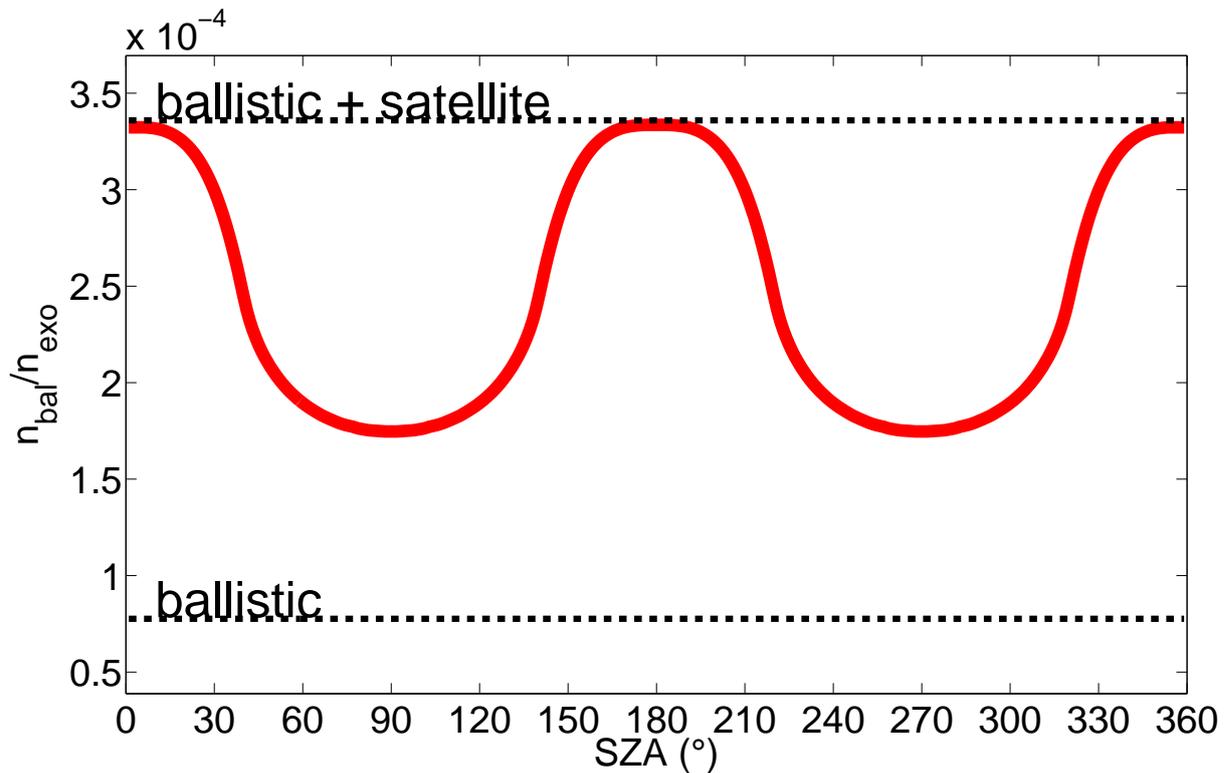


FIGURE III.28 – Courbe (en rouge) identique à la figure III.20 avec pour seule différence une pression de radiation mille fois plus faible. J’ai représenté en traits tiretés la densité fournie par le formalisme de Chamberlain pour les contributions uniquement balistique de Chamberlain et balistique plus satellite

Au vu de cette analyse, dans la majeure partie de l’exosphère (à l’exception de la région proche de l’exopause), il semblerait finalement adéquat d’adopter le formalisme de Chamberlain complet (balistique, échappement et approximation satellite) mais avec un certain poids pour la contribution des particules satellites compris entre 0 et 1 en fonction de la direction. C’est une approche fautive dans son principe physique mais qui permettrait de tenir compte de l’effet de la pression de radiation.

### La pression de radiation engendre une forte asymétrie

La pression de radiation est à l’origine de deux types d’asymétries : une asymétrie entre les côtés jour et nuit, et une réduction des densités dans le plan perpendiculaire à l’axe Soleil-planète (aube/crépuscule/pôle Nord/pôle Sud). Ce type d’asymétries a notamment été observé sur Terre (Zoennchen et al. (2011, 2011) ; Bailey and Gruntman ; cf. partie D.3.a). Nous comprenons intuitivement que la pression de radiation, par sa direction antisolaire, augmentera les densités côté nuit. L’asymétrie présente entre les régions aube/crépuscule et jour/nuit peut quant à elle s’expliquer de deux manières différentes. La première explication intuitive est que la pression de radiation, qui est dirigée le long de l’axe Soleil/planète, va induire un confinement de l’exosphère autour de cet axe. La seconde explication est celle développée ci-dessus basée sur les zones d’existence des populations satellites et balistiques. Dans l’axe planète-étoile, les particules balistiques existent au détriment de toutes les particules satellites, les densités balistiques de notre modèle sont donc significativement augmentées. Inversement, dans le plan aube/crépuscule/Pôle Nord/Pôle Sud, seule une partie des particules

satellites est convertie en particules balistiques, une partie subsiste donc officiellement en tant que particules satellites, si bien que notre densité de balistiques dans ces régions est comparativement plus faible.

## E Calcul des densités de particules en échappement

### E.1 Approche

De la même manière que notre calcul de densité pour les particules balistiques, il est, a priori, possible d'en faire de même pour les particules en échappement. Cependant, nous allons voir que ce calcul nécessite beaucoup, beaucoup plus de temps et dépend de la précision des calculs numériques. Même si ce calcul n'a finalement pas abouti, à la fois par manque de stabilité numérique et de temps, il reste important de détailler le schéma de calcul pour évaluer cette densité et peut-être un jour y arriver au moyen d'une approche numérique plus adaptée.

La connaissance de la densité de particules en échappement est importante, car elle devient très significative à l'approche de l'exopause où les densités de particules liées (balistiques et satellites) décroissent très rapidement vers 0. Nous nous attendons par ailleurs à des asymétries importantes sur les populations en échappement, avec une densité plus forte côté nuit en raison de la pression de radiation.

### E.2 Algorithme

Il apparaît naturel d'appliquer notre formalisme aux particules en échappement. Les particules en échappement présentent bien sûr des caractéristiques différentes. Les tests à appliquer pour identifier ces particules diffèrent donc un peu. Par contre, le calcul de densité pour les particules en échappement présente une étape supplémentaire dite de traque. Pour les particules balistiques, j'ai utilisé le théorème de récurrence de Poincaré pour justifier proprement qu'une particule venant de l'exobase et ne pouvant s'éloigner à l'infini recroisera l'exobase. Il n'est pas applicable ici, il faut donc « remonter » le temps et vérifier que la particule provient effectivement de l'exobase. Ce point constitue un des problèmes de ce calcul traité dans la partie E.3.

J'ai représenté sur la figure III.29 sous forme d'organigramme les différentes étapes du programme que j'ai tenté de mettre en place pour calculer cette densité, même si finalement le calcul n'a pas donné les résultats escomptés (les résultats montrent jusqu'ici des oscillations non physiques des différents paramètres). Je présente dans la partie suivante E.3 les causes, à ma connaissance, de cet échec.

### E.3 Application à toute l'exosphère et difficultés de sa mise en œuvre

Tel que je l'ai présenté sous sa forme logique (cf. figure III.29), mon programme ne devrait pas, a priori, poser de souci pour le calcul des densités des particules en échappement dans l'exosphère.

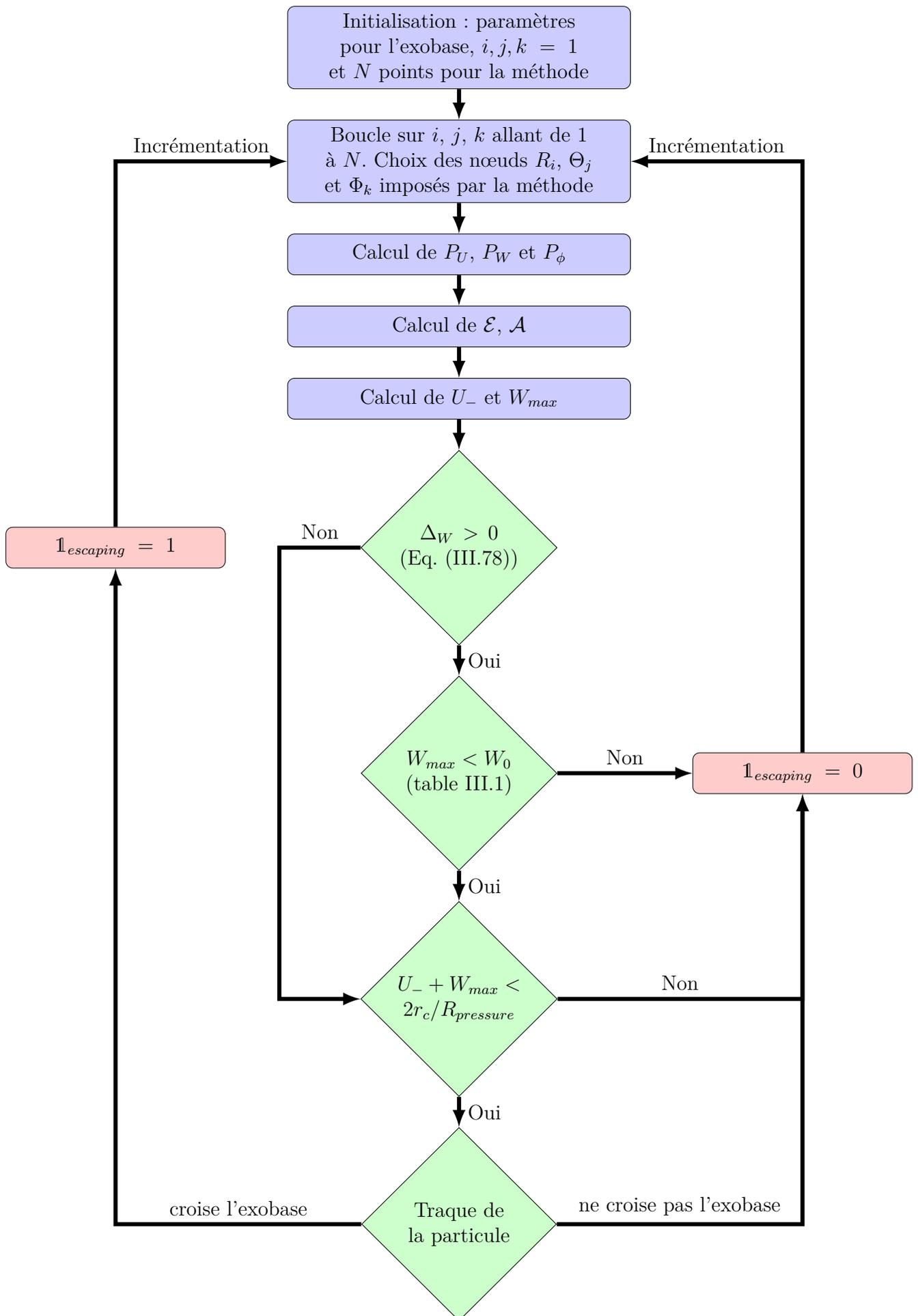


FIGURE III.29 – Algorithme pour le calcul des densités de particules en échappement.

Cependant, il possède des limites, pas nécessairement liées à la puissance de la machine.

Lorsque j'ai abordé ce calcul, posé ses fondements, tant sur le plan mathématique qu'au niveau de sa programmation, j'ai exploré toutes ces problématiques : les conditions à respecter (cf. les différents tests dans la figure III.29), la méthode d'intégration, les variables d'intégration, etc ...

D'abord, à propos des conditions à respecter : dans la partie consacrée aux particules balistiques, nous avons pu voir que nous pouvions faire appel à certains théorèmes, comme celui de récurrence de Poincaré, afin de nous garantir que la particule croise à nouveau l'exobase. Pour les particules en échappement, bien que nous puissions garantir que la zone où elle est autorisée à se mouvoir croise l'exobase, comme ce volume est en revanche ouvert sur l'infini, rien ne garantit qu'effectivement elle le fera : c'est une condition nécessaire mais pas suffisante. D'où l'intérêt de la traque de la particule, afin de vérifier si celle-ci croise bien l'exobase. Problème : cette partie est dépendante de la précision sur le pas de temps que nous voulons pour la trajectoire ET du critère de rejet. Comme nous ne pouvons connaître explicitement l'expression de la trajectoire en fonction du temps (il n'y a pas assez d'intégrales premières du mouvement), existe-il un critère sur l'évolution de  $P_U$ ,  $P_W$  et  $P_r$  plus contraignant pour rejeter certaines conditions initiales ? Ceci constitue un premier problème.

Ensuite, la méthode d'intégration : quelle est la plus appropriée ? Notre espace est ouvert, les deux méthodes à disposition pour ce genre de cas sont la méthode de Gauss-Laguerre et la méthode de Gauss-Hermite. Comme nous intégrons des fonctions du type loi normale, la plus adaptée semble a priori la méthode de Gauss-Hermite (la méthode de Gauss-Laguerre se base sur des fonctions poids du type  $x^\alpha \exp(-x)$  avec  $\alpha$  quelconque alors que la méthode de Gauss-Hermite se base sur la loi normale  $\exp(-x^2)$ ). C'est à cette fin que je me suis essayé à « produire » des méthodes du type quadrature de Gauss mais plus adaptées aux fonctions que j'emploie et mes bornes d'intégration mais sans grand succès. J'explique dans l'annexe D la manière dont il faut s'y prendre.

De plus, le choix des variables  $P_U$ ,  $P_W$  et  $P_\phi$  est-il judicieux ? Nous n'avons aucune idée de la forme de l'espace sur lequel  $\mathbb{1}_{\text{escaping}}$  vaut 1. Il suffit que notre espace soit non « convexe » (quel que soit le couple de points pris dans cet espace, la droite les joignant est toujours contenue dans cet espace) ou non « simplement connexe » (pour les physiciens que nous sommes je limiterai la définition à « sans trous ») pour avoir des problèmes permanents de précision même en augmentant le nombre de points d'intégration.

Néanmoins, je ne suis pas resté sur une défaite puisqu'il a été possible de calculer le flux d'échappement analytiquement à l'exobase côté jour.

## F Calcul du flux d'échappement à l'exobase

Au-delà des profils de densité, le formalisme utilisé permet de calculer (dans certaines conditions) le flux d'échappement modifié par l'influence de la pression de radiation. Cela constitue bien évidem-

ment une information cruciale pour la compréhension de l'évolution des atmosphères planétaires, qu'aucun modèle analytique n'a fourni jusqu'ici.

## F.1 Approche

Le problème va cette fois-ci être abordé de la même façon que Bishop and Chamberlain (1989). L'estimation du flux d'échappement est compliquée numériquement : le domaine d'intégration sur les impulsions est ouvert sur l'infini et vers les énergies mécaniques positives. Je n'ai pas trouvé de réelles contraintes sur le plan mathématique pour les particules en échappement et il est difficile de visualiser ce domaine (3 dimensions). De plus, nous nous sommes bien sûr placés à l'exobase pour nous passer de la partie « traque de la particule ».

Dans l'article de Bishop and Chamberlain (1989), les calculs de densité n'ont été effectués que sur l'axe Soleil-planète, en ne tenant compte que de la composante liée c'est-à-dire balistique. Pourquoi ? Pour toute particule croisant cet axe,  $P_\phi$  est forcément nulle. Le problème se passe donc d'une dimension : nous allons utiliser la même simplification pour calculer notre flux d'échappement, qui sera donc valide le long de l'axe Soleil-planète côté jour. De plus, comme je vais le montrer ici, l'utilisation non plus des impulsions mais des invariants  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{A}$  permet une simplification sur l'intégration du flux.

## F.2 Calcul analytique de l'échappement côté jour

Pour calculer analytiquement l'échappement côté jour ( $w = 0$ ), il faut se placer non plus dans l'espace des impulsions mais dans celui de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{A}$ . Dans l'annexe F, j'ai détaillé ce changement de variables. La formule de l'échappement thermique côté jour est donnée par :

$$\mathcal{F}_{esc}(u = 2r_{exo}, w = 0) = \int \frac{p_r}{m} f(q_i, p_i) d^3 p_i = \frac{\int \frac{p_r}{m} \frac{f(\mathcal{E})}{4UP_U} d\mathcal{E} d\mathcal{A} d\phi}{\int f d^3 p_i} \quad (\text{III.93})$$

avec  $f$  la fonction de distribution supposée maxwellienne à l'exobase :

$$f = n_{exo} \exp\left(-\frac{E_c}{k_B T}\right) = n_{exo} \exp(-2P_U^2) = n_{exo} \exp(-\mathcal{E}) \exp(-\lambda_c) \exp(\lambda_a r_{exo}/R_{pressure}) \quad (\text{III.94})$$

pour  $w = 0$  ( $P_w$  et  $P_\phi = 0$ ) et  $u = 2r_{exo}$ . Nous avons aussi :

$$p_r = 2p_u = 2\sqrt{mk_B T} P_U \quad (\text{III.95})$$

et

$$U_{exo} = \frac{2r_{exo}}{R_{pressure}} \quad (\text{III.96})$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{esc}(u = 2r_{exo}, w = 0) &= \frac{n_{exo}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \frac{R_{pressure}}{4r_{exo}} \exp(-\lambda_c) \exp\left(\frac{\lambda_a r_{exo}}{R_{pressure}}\right) \int \exp(-\mathcal{E}) d\mathcal{E} d\mathcal{A} d\phi \\
&= \frac{n_{exo} U_{th}}{2\sqrt{\pi}} \frac{R_{pressure}}{4r_{exo}} \exp(-\lambda_c) \exp(\lambda_a r_{exo}/R_{pressure}) \int \exp(-\mathcal{E}) d\mathcal{E} d\mathcal{A}
\end{aligned} \tag{III.97}$$

Il n'y a pas de facteur 2 (cf. fin de l'annexe F) puisque nous ne tenons compte que des particules avec  $p_r > 0$  (mouvement vers le haut) et donc  $p_u > 0$ . Il ne reste plus qu'à identifier les bornes d'intégration sur  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{A}$ . Nous allons voir qu'il est nécessaire de remplir un certain nombre de conditions pour qu'une particule soit en échappement et contribue au flux. Pour cela, je vais accompagner toutes mes conditions d'une représentation graphique dans l'espace  $(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ . Il faut étudier  $P_U$ ,  $P_3(U)$ ,  $P_W$  et  $Q_3(W)$  pour caractériser les conditions à remplir (de manière similaire à l'étude des particules balistiques en C.1.b et C.1.c), même si ces deux derniers sont nuls (puisque  $w = 0$ ) :

$$P_U = \sqrt{\frac{-\lambda_a U^2 + 2\mathcal{E}U + (2\lambda_a - \mathcal{A})}{4U}} \tag{III.98}$$

$$P_3(U) = U(\lambda_a U^2 - 2\mathcal{E}U + \mathcal{A} - 2\lambda_a)$$

$$P_W = \sqrt{\frac{\lambda_a W^2 + 2\mathcal{E}U + (2\lambda_a + \mathcal{A})}{4W}} \tag{III.99}$$

$$Q_3(W) = W(\lambda_a W^2 + 2\mathcal{E}W + 2\lambda_a + \mathcal{A})$$

Dans notre cas (le long de l'axe Soleil-planète), comme  $w = 0$ ,  $P_\phi$  aussi est nulle et donc une des racines de  $P_3$  et  $Q_3$  est 0. Nous pouvons donc en effet factoriser  $P_3(U)$  par  $U$  et  $Q_3(W)$  par  $W$ .

Nous savons que le type de particules dépendra exclusivement des racines des polynômes et de leurs valeurs. Puisque 0 est une racine de  $P_3$  et  $Q_3$ , l'expression de ces polynômes est réduite au produit d'un monôme,  $U$  ou  $W$ , et d'un polynôme d'ordre 2. Il est alors très aisé d'étudier ces deux polynômes. Pour un  $U$  fixé, l'expression de  $P_U$  donnée par l'équation (III.98) fournit une première condition à remplir :

$$\lambda_a U^2 - 2\mathcal{E}U + \mathcal{A} - 2\lambda_a < 0 \tag{III.100}$$

Pour respecter cette condition, il faut d'abord que ce polynôme possède deux racines réelles. Il faut calculer le discriminant  $\Delta_U$  :

$$\Delta_U = 4\mathcal{E}^2 - 4\lambda_a(\mathcal{A} - 2\lambda_a) > 0 \tag{III.101}$$

ce qui donne

$$\frac{\mathcal{E}^2}{\lambda_a} + 2\lambda_a > \mathcal{A} \tag{III.102}$$

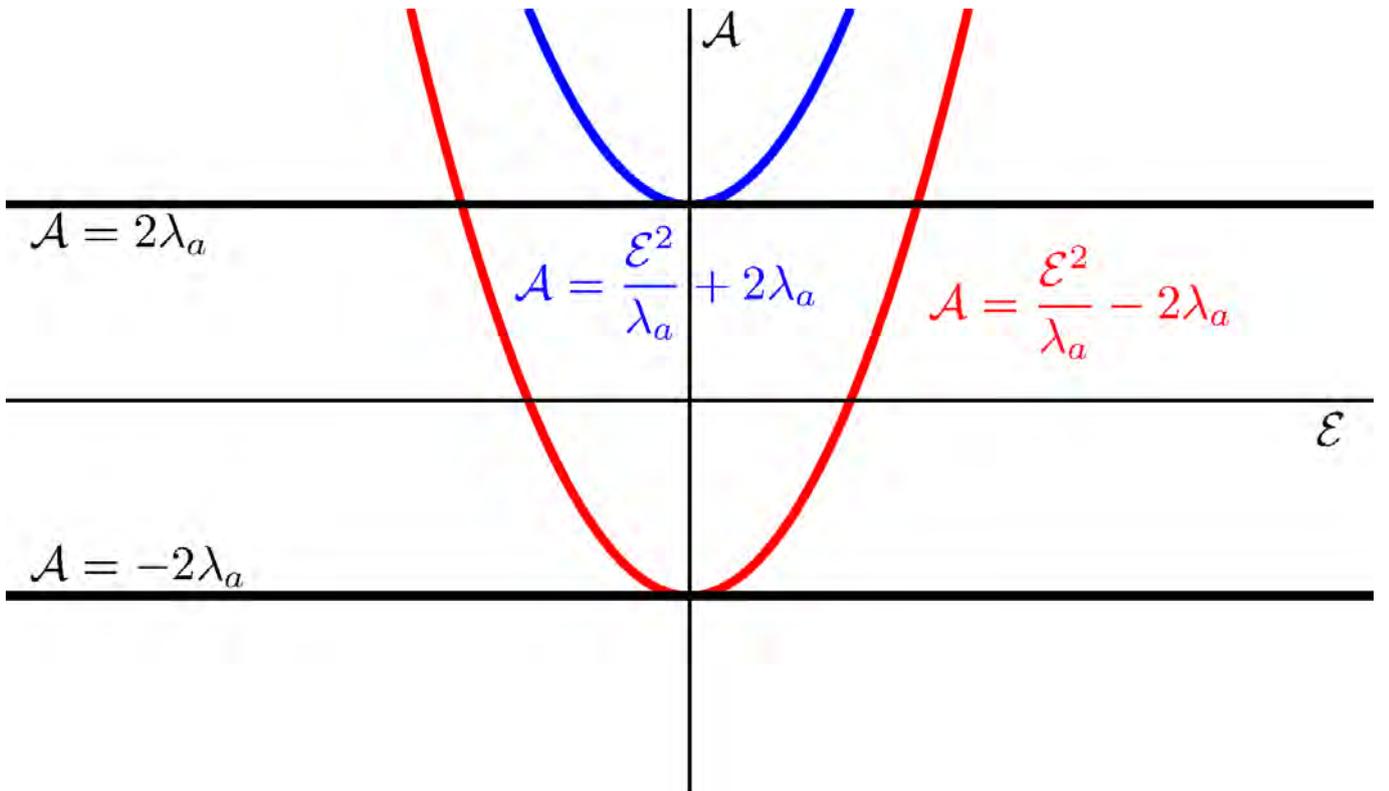


FIGURE III.30 – Représentation dans le plan  $(\mathcal{E}, \mathcal{A})$  avec les courbes associées aux différentes conditions à remplir pour le calcul du flux d'échappement. Cette figure sera complétée progressivement dans les figures suivantes.

La limite est représentée par la courbe bleue sur la figure III.30. Sur la figure III.31, j'ai rempli en bleu la zone ne remplissant pas la condition III.100.

Pour  $\Delta_U > 0$ , nous avons donc 2 racines réelles :

$$U_{\pm} = \frac{\mathcal{E}}{\lambda_a} \pm \frac{\sqrt{\mathcal{E}^2 - \lambda_a(\mathcal{A} - 2\lambda_a)}}{\lambda_a} \quad (\text{III.103})$$

et  $U = 0$ . En traçant un tableau des signes, nous nous rendrions compte que  $P_3$  est négatif en-dessous de la première racine et entre la deuxième et troisième racine. Il va falloir donc les classer. Trois cas de figures s'imposent :  $U_- < U_+ < 0$ ,  $U_- < 0 < U_+$  et  $0 < U_- < U_+$ . Il faut rajouter à cela que  $P_3$  doit être négatif pour  $U > 0$  (cf. section C.1.b), le premier cas n'est donc pas envisageable c.-à-d. les deux racines,  $U_+$  et  $U_-$ , négatives (si nous avons deux racines négatives et la dernière nulle alors  $P_3 > 0$  pour  $U > 0$ ). Les formules de Viète nous donnent les relations suivantes sur les racines du polynôme, si l'on considère le cas de deux racines négatives :

$$U_+ + U_- = \frac{2\mathcal{E}}{\lambda_a} < 0 \quad (\text{III.104})$$

$$U_+ U_- = \frac{\mathcal{A}}{\lambda_a} - 2 > 0 \quad (\text{III.105})$$

dans le cas où nous avons deux racines réelles c.-à-d.  $\Delta_U > 0$ .

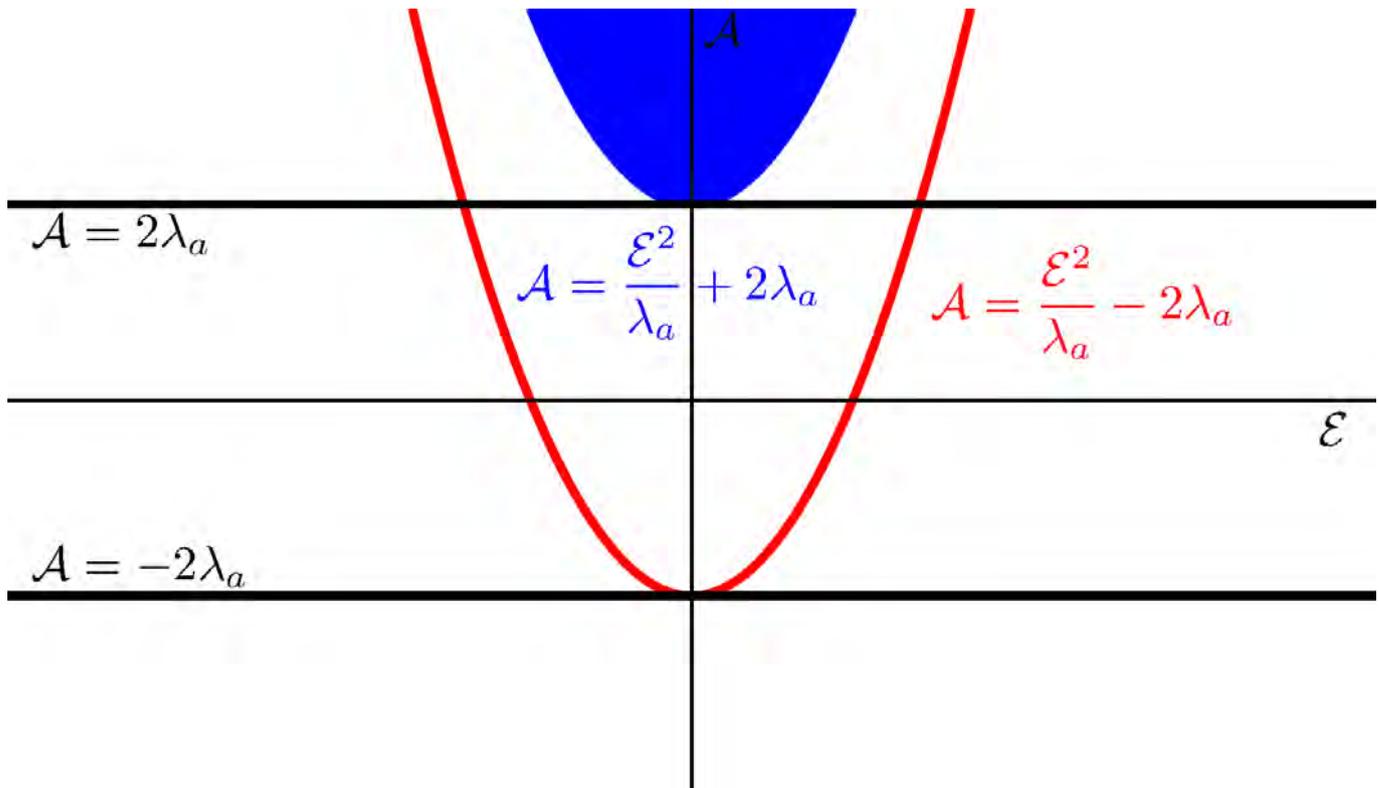


FIGURE III.31 – Représentation dans le plan  $(\mathcal{E}, \mathcal{A})$  des différentes conditions à remplir pour le calcul du flux d'échappement. En bleu, il s'agit de la zone de l'espace où  $\Delta_U < 0$ .

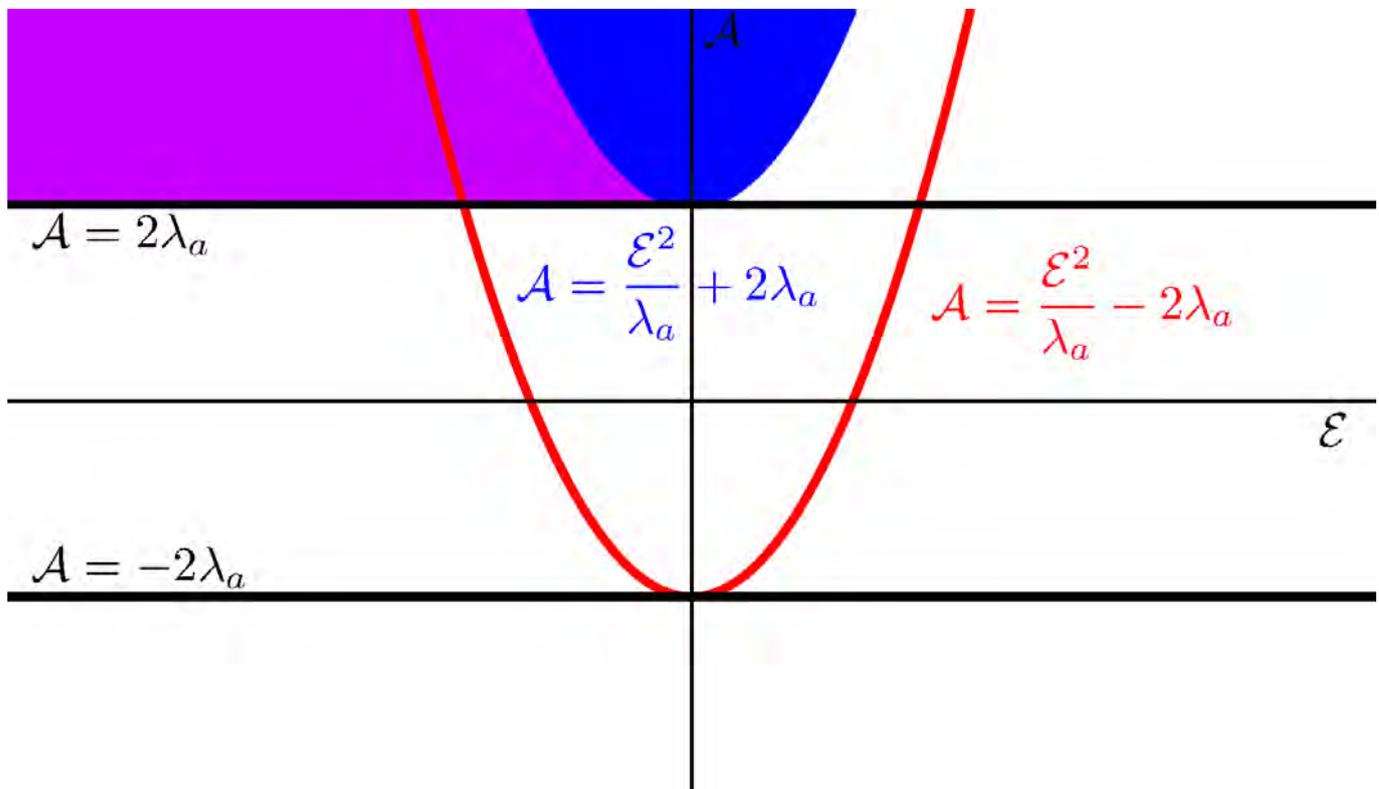


FIGURE III.32 – Représentation dans le plan  $(\mathcal{E}, \mathcal{A})$  de la zone ne respectant pas la condition d'avoir  $P_3 < 0$  pour  $U > 0$ . En violet, il s'agit de la zone de l'espace où les racines, autre que 0, sont négatives.

J'ai représenté sur la figure III.32 en violet la zone où les racines de  $P_3$  autres que 0 sont négatives.

Nous avons donc contraint une partie de l'espace en étudiant exclusivement  $P_3$ . Il faut maintenant étudier  $Q_3$ . J'ai déjà expliqué que dans tous les cas le mouvement suivant la coordonnée  $U$  était toujours contraint quel que soit le type de particule. Par contre, le type de particules va dépendre des conditions sur  $W$  et des caractéristiques de  $Q_3(W)$ . Par défaut, face au Soleil (hypothèse pour notre calcul du flux d'échappement), nous avons  $W = 0$ , cependant pour que la particule soit en échappement, il faudra qu'il n'existe pas de contrainte pour  $W > 0$  c.-à-d. qu'il n'existe pas de domaine inclus dans  $\mathbb{R}^{+*}$  sur lequel  $Q_3 < 0$  et donc sur lequel  $P_W$  n'est pas réel :

$$\lambda_a W^2 + 2\mathcal{E}W + 2\lambda_a + \mathcal{A} > 0 \quad \forall W > 0 \quad (\text{III.106})$$

Deux cas de figures se présentent : soit les deux racines de  $Q_3$  autres que 0 sont complexes, soit les deux racines sont réelles mais négatives (puisque'il ne faut pas que  $Q_3$  change de signe et donc passe par 0).

Calculons le discriminant :

$$\Delta_W = 4\mathcal{E}^2 - 4\lambda_a(2\lambda_a + \mathcal{A}) \quad (\text{III.107})$$

Les deux racines sont réelles à la condition :

$$\mathcal{A} < \frac{\mathcal{E}^2}{\lambda_a} - 2\lambda_a \quad (\text{III.108})$$

Au-dessus de la courbe rouge représentée sur les figures III.30, III.31 et III.32, il n'y a pas de contraintes. En-dessous, il faut vérifier que les deux racines sont bien négatives :

$$W_{\pm} = -\frac{\mathcal{E}}{\lambda_a} \pm \frac{\sqrt{\mathcal{E}^2 - \lambda_a(\mathcal{A} + 2\lambda_a)}}{\lambda_a} \quad (\text{III.109})$$

Les relations de Viète donnent pour ce cas

$$W_+ + W_- = -\frac{2\mathcal{E}}{\lambda_a} < 0 \quad (\text{III.110})$$

$$W_+ W_- = \frac{\mathcal{A}}{\lambda_a} + 2 > 0 \quad (\text{III.111})$$

Pour avoir  $\Delta_W > 0$ , il faut donc  $\mathcal{E} > 0$  ET  $\mathcal{A} > -2\lambda_a$ . Par contre, il n'existe aucune restriction pour  $\Delta_W < 0$  à ce point de notre démonstration.

J'ai représenté sur la figure III.33 en rouge la zone ne respectant pas ces conditions. Une partie de la zone rouge recoupe la partie violette. Cette figure montre à quel point le domaine d'intégration pour le calcul du flux se restreint. Elle montre aussi la complexité de la conceptualisation ne serait-ce qu'en deux dimensions. Vu le nombre de conditions distinctes à remplir, il est compréhensible qu'il n'a pas été possible de résoudre ce problème en tenant compte de  $P_{\phi} \neq 0$  pour calculer le flux en



$\mathcal{A} = 2\lambda_a + 2\mathcal{E}U_{exo} - \lambda_a U_{exo}^2$  correspond à l'équation d'une droite dans le plan  $(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ , tandis que l'équation  $\mathcal{E}^2/\lambda_a + 2\lambda_a$  correspond à la parabole déjà tracée en bleu. Il faut caractériser l'emplacement de cette droite par rapport à la parabole bleue. Cherchons le point tel que :

$$\frac{\mathcal{E}^2}{\lambda_a} + 2\lambda_a = 2\lambda_a + 2\mathcal{E}U_{exo} - \lambda_a U_{exo}^2 \quad (\text{III.114})$$

Nous obtenons :

$$(\mathcal{E} - \lambda_a U_{exo}) = 0 \quad (\text{III.115})$$

La droite et la parabole n'ont qu'un point en commun, il s'agit donc d'une tangente à cette parabole au point  $\mathcal{E} = \lambda_a U_{exo}$ . Puisque la courbe bleue définie par  $\Delta_U = 0$  est convexe, et qu'elle est au-dessus de ces tangentes, la première inégalité est toujours respectée. Par contre, la droite coupera l'autre parabole définie par  $\Delta_W = 0$  en deux points. Ces deux points vérifient l'équation :

$$4\lambda_a^2 = (\lambda_a U_{exo} - \mathcal{E})^2 \quad (\text{III.116})$$

Ces deux points ont pour abscisses :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \lambda_a(U_{exo} - 2) \\ \mathcal{E} &= \lambda_a(U_{exo} + 2) \end{aligned} \quad (\text{III.117})$$

J'ai représenté cette condition superposée aux précédentes sur la figure III.34.

En blanc, il reste donc le domaine sur lequel nous allons intégrer le flux d'échappement. Il existe déjà deux régimes :  $U_{exo} < 2$  et  $U_{exo} > 2$  c.-à-d.  $r_{exo} < R_{pressure}$  (régime de pression de radiation non extrême, valable pour toutes les planètes du système solaire) et  $r_{exo} > R_{pressure}$  (conditions extrêmes amenant à une exopause en-dessous de l'exobase, p.ex. pour certaines exoplanètes). Si nous augmentons  $U_{exo}$ , la droite, toujours tangente à la parabole bleue, va s'incliner de plus en plus et verra sa pente  $d\mathcal{A}/d\mathcal{E}$  augmenter. Pour  $U_{exo} > 2$ , le domaine ne sera défini que pour  $\mathcal{E} > 0$ .

Première observation : les particules d'énergie mécanique négative contribuent elles-aussi à l'échappement thermique. Dans le cas de l'échappement de Jeans, seules comptent les particules avec une énergie mécanique positive. Nous pouvons donc déjà nous attendre à avoir un échappement supérieur à celui de Jeans.

Deuxième observation : nous avons deux régimes selon la valeur de la pression de radiation. Nous découvrirons physiquement, une fois le calcul final résolu, ce qui en découle.

### Régime pour $U_{exo} < 2$ (pression de radiation raisonnable)

Dans le plan  $(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ , il faut distinguer deux régions,  $\mathcal{E} < 0$  et  $\mathcal{E} > 0$ . L'intégration va se faire comme suit :

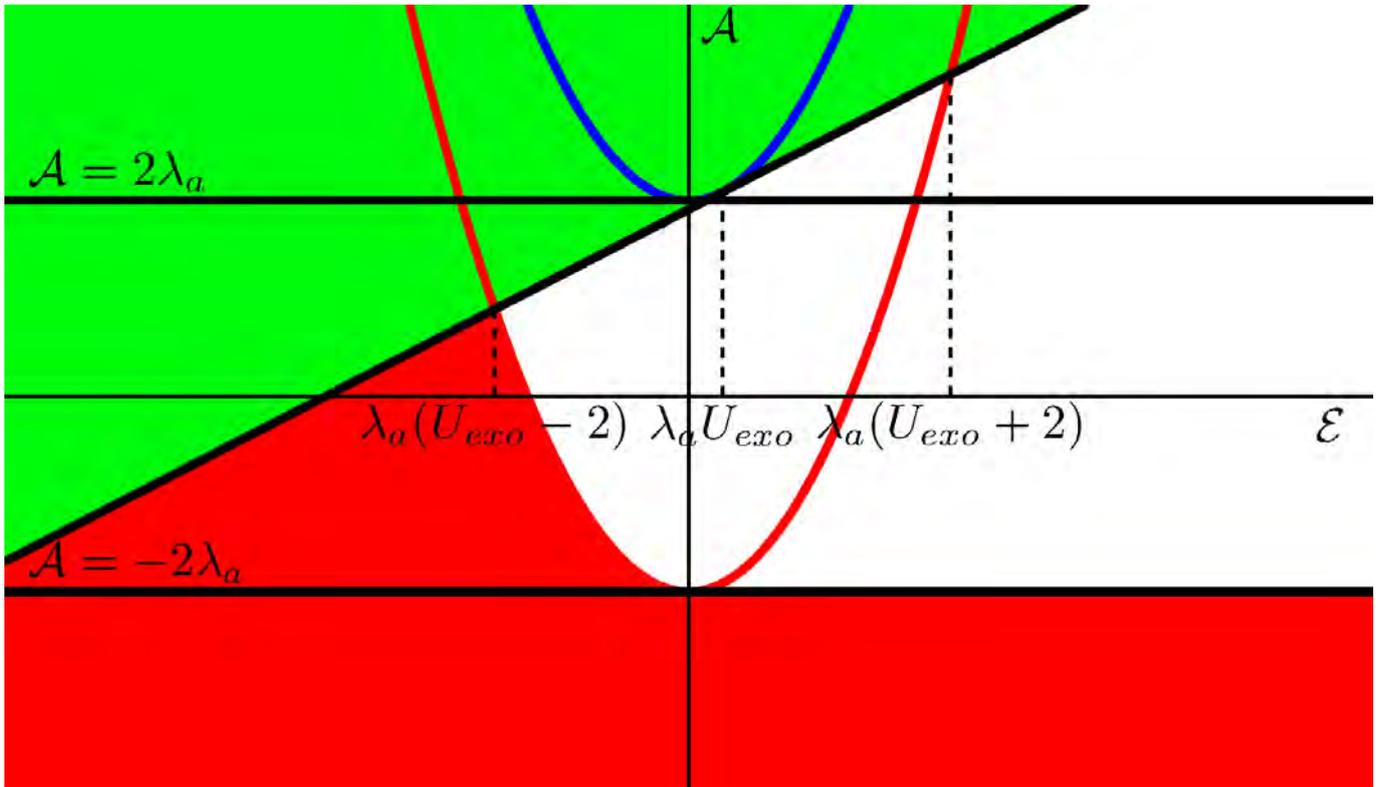


FIGURE III.34 – Représentation dans le plan  $(\mathcal{E}, \mathcal{A})$  de la zone (en vert) ne respectant pas la condition d'avoir la valeur  $U_{exo}$  comprise entre les deux racines  $U_-$  et  $U_+$ . Ce schéma est valable pour  $U_{exo} < 2$  (faux dans le cas d'une pression de radiation forte c.-à-d.  $r_{exo} > R_{pressure}$ ). La droite noire est donnée par l'équation  $\mathcal{A} = 2\lambda_a + 2\mathcal{E}U_{exo} - \lambda_a U_{exo}^2$ .

si

$$\lambda_a(U_{exo} - 2) < \mathcal{E} < 0 \quad (\text{III.118})$$

alors

$$\frac{\mathcal{E}^2}{\lambda_a} - 2\lambda_a < \mathcal{A} < 2\lambda_a + 2\mathcal{E}U_{exo} - \lambda_a U_{exo}^2 \quad (\text{III.119})$$

et si

$$0 < \mathcal{E} \quad (\text{III.120})$$

alors

$$-2\lambda_a < 2\lambda_a + 2\mathcal{E}U_{exo} - \lambda_a U_{exo}^2 \quad (\text{III.121})$$

Il faudra d'abord effectuer l'intégration sur  $\mathcal{A}$  puis sur  $\mathcal{E}$  puisque les bornes d'intégration de  $\mathcal{A}$  dépendent de  $\mathcal{E}$ . De plus, notre fonction  $\exp(-\mathcal{E})$  est parfaitement intégrable sur cet espace et positive, il est possible de choisir, d'après le théorème de Fubini, l'ordre d'intégration (c.-à-d.  $\mathcal{A}$  puis  $\mathcal{E}$ ) que nous voulons.

Pour calculer le flux, il faut d'abord estimer l'intégrale dans l'équation (III.97). Avec les limites d'intégration déterminées auparavant, l'intégrale vaut :

$$\begin{aligned}
& \iint \exp(-\mathcal{E}) \, d\mathcal{E} \, d\mathcal{A} \\
&= \int_{\lambda_a(U_{exo}-2)}^0 \int_{\frac{\mathcal{E}^2}{\lambda_a}-2\lambda_a}^{2\lambda_a+2\mathcal{E}U_{exo}-\lambda_a U_{exo}^2} \exp(-\mathcal{E}) \, d\mathcal{A} \, d\mathcal{E} + \int_0^{+\infty} \int_{-2\lambda_a}^{2\lambda_a+2\mathcal{E}U_{exo}-\lambda_a U_{exo}^2} \exp(-\mathcal{E}) \, d\mathcal{A} \, d\mathcal{E} \\
&= \int_{\lambda_a(U_{exo}-2)}^0 \left( 2\lambda_a + 2\mathcal{E}U_{exo} - \lambda_a U_{exo}^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{\lambda_a} + 2\lambda_a \right) \exp(-\mathcal{E}) \, d\mathcal{E} \\
&\quad + \int_0^{+\infty} \left( 2\lambda_a + 2\mathcal{E}U_{exo} - \lambda_a U_{exo}^2 + 2\lambda_a \right) \exp(-\mathcal{E}) \, d\mathcal{E} \\
&= \left( 4\lambda_a - \lambda_a U_{exo}^2 \right) \int_{\lambda_a(U_{exo}-2)}^{+\infty} \exp(-\mathcal{E}) \, d\mathcal{E} \\
&\quad + 2U_{exo} \int_{\lambda_a(U_{exo}-2)}^{+\infty} \mathcal{E} \exp(-\mathcal{E}) \, d\mathcal{E} - \frac{1}{\lambda_a} \int_{\lambda_a(U_{exo}-2)}^0 \mathcal{E}^2 \exp(-\mathcal{E}) \, d\mathcal{E} \\
&= \left( 4\lambda_a - \lambda_a U_{exo}^2 \right) \exp(-\lambda_a(U_{exo}-2)) + 2U_{exo} (\lambda_a(U_{exo}-2) + 1) \exp(-\lambda_a(U_{exo}-2)) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda_a} \left[ -2 + \left( (\lambda_a(U_{exo}-2))^2 + 2(\lambda_a(U_{exo}-2)) + 2 \right) \exp(\lambda_a(U_{exo}-2)) \right] \\
&= \left( 4\lambda_a - \lambda_a U_{exo}^2 + 2\lambda_a U_{exo}^2 - 4\lambda_a U_{exo} + 2U_{exo} - \lambda_a(U_{exo}-2)^2 - 2(U_{exo}-2) - \frac{2}{\lambda_a} \right) \\
&\quad \times \exp(-\lambda_a(U_{exo}-2)) + \frac{2}{\lambda_a} \\
&= 4 \exp(-\lambda_a(U_{exo}-2)) + \frac{2}{\lambda_a} (1 - \exp(-\lambda_a(U_{exo}-2)))
\end{aligned}$$

Rappelons que  $U_{exo} = 2r_{exo}/R_{pressure}$ . La formule finale pour l'échappement avec  $r_{exo} < R_{pressure}$  ( $U_{exo} < 2$ ) est donc :

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}_{esc}(u = 2r_{exo}, w = 0) \\
&= \frac{n_{exo} U_{th} R_{pressure}}{2\sqrt{\pi} \, 4r_{exo}} \exp(-\lambda_c) \exp(\lambda_a U_{exo}/2) \int \exp(-\mathcal{E}) \, d\mathcal{E} \, d\mathcal{A}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n_{exo} U_{th}}{2\sqrt{\pi}} \frac{R_{pressure}}{r_{exo}} \exp(-\lambda_c) \exp(-\lambda_a U_{exo}/2) \times \left( \exp(2\lambda_a) + \frac{1}{2\lambda_a} \exp(\lambda_a U_{exo}/2) - \frac{1}{2\lambda_a} \exp(2\lambda_a) \right) \\
&= \frac{n_{exo} U_{th}}{2\sqrt{\pi}} \frac{R_{pressure}}{r_{exo}} \exp(-\lambda_c) \exp(-\lambda_a U_{exo}/2) \exp(\lambda_a) \times \\
&\quad \left( \exp(\lambda_a) + \frac{\exp(\lambda_a U_{exo}/2)}{2\lambda_a} [\exp(\lambda_a (U_{exo} - 2)/2) - \exp(-\lambda_a (U_{exo} - 2)/2)] \right) \\
&= \frac{n_{exo} U_{th}}{2\sqrt{\pi}} \frac{R_{pressure}}{r_{exo}} \exp(-\lambda_c) \exp(-\lambda_a U_{exo}/2) \exp(2\lambda_a) \times \left( 1 - \frac{\exp(\lambda_a (U_{exo} - 2)/2)}{\lambda_a} \sinh\left(\frac{\lambda_a (2 - U_{exo})}{2}\right) \right) \\
&= \frac{n_{exo} U_{th}}{2\sqrt{\pi}} \frac{\lambda_c}{\lambda_a} \exp(-\lambda_c) \exp(-\lambda_a^2/\lambda_c) \exp(2\lambda_a) \times \left( 1 - \frac{\exp[-\lambda_a (1 - \lambda_a/\lambda_c)]}{\lambda_a} \sinh[\lambda_a (1 - \lambda_a/\lambda_c)] \right) \\
&= \frac{n_{exo} U_{th}}{2\sqrt{\pi}} \frac{\lambda_c}{\lambda_a} \exp\left(-\frac{(\lambda_c - \lambda_a)^2}{\lambda_c}\right) \times \left( 1 - \frac{\exp[-\lambda_a (1 - \lambda_a/\lambda_c)]}{\lambda_a} \sinh[\lambda_a (1 - \lambda_a/\lambda_c)] \right)
\end{aligned} \tag{III.122}$$

### Régime pour $U_{exo} > 2$ (pression de radiation extrême)

Mais il faut aussi faire le calcul pour  $r_{exo} > R_{pressure}$ . Il faut connaître pour cela le point d'intersection entre la droite d'équation  $\mathcal{A} = 2\lambda_a + 2\mathcal{E}U_{exo} - \lambda_a U_{exo}^2$  et  $\mathcal{A} = -2\lambda_a$  pour connaître la limite basse en énergie.

$$-2\lambda_a = 2\lambda_a + 2\mathcal{E}U_{exo} - \lambda_a U_{exo}^2$$

$$0 = 4\lambda_a + 2\mathcal{E}U_{exo} - \lambda_a U_{exo}^2$$

$$\mathcal{E} = \lambda_a \left( \frac{U_{exo}}{2} - \frac{2}{U_{exo}} \right)$$

$$= \lambda_a \left( \frac{\lambda_a}{\lambda_c} - \frac{\lambda_c}{\lambda_a} \right)$$

$$= \frac{\lambda_a^2}{\lambda_c} - \lambda_c$$

Nous connaissons la borne minimale en énergie mécanique. Nous pouvons alors de nouveau calculer notre intégrale :

$$\begin{aligned}
& \iint \exp(-\mathcal{E}) \, d\mathcal{E} \, d\mathcal{A} \\
&= \int_{\frac{\lambda_a^2}{\lambda_c} - \lambda_c}^{+\infty} \int_{-2\lambda_a}^{2\lambda_a + 2\mathcal{E}U_{exo} - \lambda_a U_{exo}^2} \exp(-\mathcal{E}) \, d\mathcal{A} \, d\mathcal{E} \\
&= \int_{\frac{\lambda_a^2}{\lambda_c} - \lambda_c}^{+\infty} (2\lambda_a + 2\mathcal{E}U_{exo} - \lambda_a U_{exo}^2 + 2\lambda_a) \exp(-\mathcal{E}) \, d\mathcal{A} \, d\mathcal{E} \\
&= (4\lambda_a - \lambda_a U_{exo}^2) \int_{\frac{\lambda_a^2}{\lambda_c} - \lambda_c}^{+\infty} \exp(-\mathcal{E}) \, d\mathcal{E} + 2U_{exo} \int_{\frac{\lambda_a^2}{\lambda_c} - \lambda_c}^{+\infty} \mathcal{E} \exp(-\mathcal{E}) \, d\mathcal{E} \\
&= (4\lambda_a - \lambda_a U_{exo}^2) \exp(-\lambda_a^2/\lambda_c + \lambda_c) + 2U_{exo} (\lambda_a^2/\lambda_c - \lambda_c + 1) \exp(-\lambda_a^2/\lambda_c + \lambda_c) \\
&= 2U_{exo} \exp(-\lambda_a^2/\lambda_c + \lambda_c) \\
&= \frac{4\lambda_a}{\lambda_c} \exp(-\lambda_a^2/\lambda_c + \lambda_c)
\end{aligned}$$

Pour  $R_{pressure} < r_{exo}$  le flux d'échappement est alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{esc}(u = 2r_{exo}, w = 0) &= \frac{n_{exo} U_{th}}{2\sqrt{\pi}} \frac{R_{pressure}}{4r_{exo}} \exp(-\lambda_c) \exp(\lambda_a U_{exo}/2) \int \exp(-\mathcal{E}) \, d\mathcal{E} \, d\mathcal{A} \\
&= \frac{n_{exo} U_{th}}{2\sqrt{\pi}} \frac{\lambda_c}{4\lambda_a} \exp(-\lambda_c) \exp(\lambda_a^2/\lambda_c) \frac{4\lambda_a}{\lambda_c} \exp(-\lambda_a^2/\lambda_c + \lambda_c) \quad (\text{III.123}) \\
&= \frac{n_{exo} U_{th}}{2\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

qui correspond à l'échappement de Jeans à  $\lambda_c = 0$ .

Nous tombons finalement dans un régime dit de « blow-off » : l'échappement ne dépend plus de  $\lambda_c$ . Ce régime se met en place à partir du moment où l'atmosphère n'est plus gravitationnellement liée à la planète. C'est le cas pour  $\lambda_a = \lambda_c$  ( $r_{exo} = R_{pressure}$ ) : la dernière équipotentielle fermée est sous l'exobase. Tous les points à l'exobase se trouvent sur des équipotentielles ouvertes. Les particules à l'exobase sont alors toujours en échappement. Le flux obtenu est une fonction croissante de la pression de radiation et tend vers une constante égale à l'échappement de Jeans pour  $\lambda_c$ . La présence de la pression de radiation va donc virtuellement réduire la valeur de  $\lambda_c$  dans la formule de Jeans et accroître l'échappement sans pour autant dépasser sa valeur maximale donnée pour  $\lambda_c = 0$ .

Ce calcul présente une limite : en théorie, il devrait y avoir un facteur géométrique qui tendrait à réduire le flux d'échappement. Si la planète est suffisamment grande, la particule va « ricocher » sur

la parabole bornant son mouvement et retomber sur la planète avant d'être complètement emportée par la pression de radiation. Cela peut induire une forme de criblage des neutres provenant des régions proches du point subsolaire de la planète.

### F.3 Discussion sur l'échappement thermique induit par la pression de radiation

#### F.3.a Comparaison à l'échappement de Jeans

Dorénavant, nous avons la forme analytique de l'échappement thermique face à l'étoile soumis à la pression de radiation. Cette formule constitue donc une extension à la formule analytique de Jeans de l'échappement thermique d'une atmosphère liée gravitationnellement à une planète.

Planète ou satellite	Terre	Mars	Titan
paramètre de Jeans $\lambda$ de l'hydrogène à l'exobase	8,39/5,59	7,25/4,07	1,72
$\mathcal{F}_{Jeans}$	1,15.10 <sup>12</sup> /4,87.10 <sup>12</sup>	2,97.10 <sup>12</sup> /3,70.10 <sup>12</sup>	2,87.10 <sup>12</sup>
$\mathcal{F}_{esc}$ au point subsolaire	1,55.10 <sup>12</sup> /5,85.10 <sup>12</sup>	3,89.10 <sup>12</sup> /4,26.10 <sup>12</sup>	3,10.10 <sup>12</sup>
accroissement du flux	+35%/+20%	+31%/+15%	+1,8%

TABLE III.2 – Tableau résumant les valeurs du flux d'échappement de l'hydrogène d'après la formule de Jeans (sans pression de radiation) ou d'après notre modèle (avec pression de radiation) pour la Terre, Mars et Titan. Les valeurs de flux sont exprimées en  $\text{atomes.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$  à l'exobase au point subsolaire. Comme dans le chapitre II, nous penons en compte deux activités solaires pour la Terre et Mars et donc deux températures exosphériques distinctes pour ces deux planètes.

Le tableau III.2 référence les quelques cas auxquels nous nous sommes intéressés dans le Système Solaire : Terre, Mars et Titan pour ne pas changer. J'ai répertorié les valeurs de  $\lambda_c$  de l'hydrogène pour ces trois corps et donné le flux d'échappement sans et avec la pression de radiation associée (pour une accélération due à la pression de radiation de  $7,5.10^{-3} \text{ m.s}^{-2}$  au niveau de la Terre, et j'applique une décroissance en  $1/r^2$  pour les autres corps). La pression de radiation entraîne par conséquent une augmentation significative du flux d'échappement pour l'hydrogène dans les environnements de la Terre (jusque +35%) et de Mars (jusque +31%) mais n'induit pas de variation significative pour Titan qui se trouve beaucoup plus loin du Soleil. Nous remarquons que pour des valeurs de  $\lambda_c$  grandes, c.-à-d. des corps et des conditions à l'exobase pour lesquels l'énergie potentielle gravitationnelle domine l'énergie thermique de l'atmosphère à l'exobase, les écarts à l'échappement de Jeans sont grands. Par contre, il ne faut pas oublier que cela correspond aussi à un échappement thermique de Jeans faible (proportionnel à  $\exp(-\lambda_c)(1 + \lambda_c)$ ).

Il est possible d'interpréter les résultats d'une autre façon : l'échappement, grâce à la pression de radiation, atteint une valeur maximale qui correspond à l'échappement de Jeans pour  $\lambda_c = 0$ . La

pression de radiation fait donc « virtuellement » décroître  $\lambda_c$  et va faciliter l'échappement, même si face au Soleil, la gravité planétaire et la pression de radiation sont dans le même sens.

Pourquoi le flux d'échappement côté subsolaire est-il augmenté par la pression de radiation ? L'intuition nous pousse à penser que la pression de radiation comprime l'exosphère côté jour et donc inhibe en partie l'échappement, tandis qu'elle augmentera l'échappement côté nuit. Ce raisonnement n'est vrai que pour les particules partant du point subsolaire et allant dans la direction exacte du Soleil, en ligne droite. Par contre, pour les particules se dirigeant légèrement de biais par rapport au Soleil, elles vont être parfois soufflées et repoussées loin de la planète, sans avoir la chance de revenir à l'exobase en un autre point (comme les particules balistiques pour le cas gravitationnel pur).

### F.3.b Écart relatif à l'échappement de Jeans et effet au premier ordre de la pression de radiation

Nous allons montrer ici comment calculer simplement l'augmentation du flux d'échappement due à la pression de radiation au premier ordre pour des faibles valeurs de  $a$  c'est-à-dire dans la limite où  $R_{pressure}$  est grand.

Pour les différentes exosphères que nous étudions (celles de la Terre, Mars et Titan), la pression de radiation est faible. En effet, lorsque nous déterminons la valeur de  $R_{pressure}$ , l'exopause est située très loin de l'exobase. Pour la Terre et Mars,  $R_{pressure}$  se situe à un trentaine de rayons planétaires et pour Titan, il se situe à plus de cent rayons. Nous sommes donc dans le cas où  $\lambda_a = \lambda_c r_{exo} / R_{pressure}$  est petit devant 1. Dans l'article de Bishop and Chamberlain (1989), ils donnent 0,13 pour Mars et 0,2 pour la Terre. La valeur pour Titan est en-deçà car  $\lambda_c$  est encore plus petit et  $R_{pressure} / r_{exo}$  est plus grand.

Pour  $\lambda_a = o(1)$ , un développement limité de l'équation III.122, difficile à calculer, amène à la formule suivante du flux d'échappement :

$$\mathcal{F}_{esc}(u = 2r_{exo}, w = 0) = \frac{n_{exo} U_{th}}{2\sqrt{\pi}} \exp(-\lambda_c) \left( (1 + \lambda_c) + \frac{4}{3} \lambda_c \lambda_a \right) + o(\lambda_a) \quad (\text{III.124})$$

et nous retrouvons pour une pression de radiation nulle, c.-à-d.  $\lambda_a = 0$ , la fameuse formule de l'échappement de Jeans  $\mathcal{F}_J$ . Nous pouvons à l'aide de logiciels de calcul formel, étendre le développement de cette formule :

$$\mathcal{F}_{esc}(u = 2r_{exo}, w = 0) = \frac{n_{exo} U_{th}}{2\sqrt{\pi}} \exp(-\lambda_c) \left( (1 + \lambda_c) + \frac{4}{3} \lambda_c \lambda_a + (\lambda_c - 1) \lambda_a^2 + \frac{4}{15} (2\lambda_c - 5) \lambda_a^3 \right) + o(\lambda_a^3) \quad (\text{III.125})$$

Pour des valeurs raisonnables de la pression de radiation (valable pour les planètes du système solaire), la faible valeur de  $\lambda_a$  permet d'obtenir une formule simple de l'écart relatif entre les flux d'échappement avec (notre modèle) et sans (flux de Jeans) pression de radiation :

$$\left| \frac{\mathcal{F}_{esc} - \mathcal{F}_J}{\mathcal{F}_J} \right| = \frac{4}{3} \frac{\lambda_c \lambda_a}{1 + \lambda_c} + o(\lambda_a) \quad (\text{III.126})$$

Par contre, cette approximation n'est valable que dans le cas où le terme d'ordre 2 reste négligeable devant celui d'ordre 1, donc pour :

$$\lambda_a \ll \frac{4}{3} \left( 1 + \frac{1}{\lambda_c - 1} \right) \quad (\text{III.127})$$

L'augmentation du flux d'échappement est donc proportionnel à  $\lambda_a$ , c.-à-d. qu'elle évolue en racine carrée de la pression de radiation  $\sqrt{a}$ . Connaissant l'ordre de grandeur de la pression de radiation exercée par une étoile et la distance de la planète à celle-ci, il devient aisé dans les modèles de corriger si nécessaire l'échappement thermique, afin de mieux quantifier l'érosion de l'atmosphère ou de fournir une meilleure condition aux limites pour les modèles atmosphériques.

La figure III.35 présente l'évolution de cet écart à l'échappement de Jeans en fonction du rapport  $\lambda_a/\lambda_c$  et ce pour différentes valeurs de  $\lambda_c$ . J'ai tracé le cas terrestre pour une température exosphérique de 800 K et 1200 K, le cas martien pour une température de 200 K et 350 K et enfin le cas de Titan avec une température de 150 K. La température exosphérique dépend fortement de l'activité solaire pour la Terre et Mars, j'ai donc représenté un cas plutôt chaud (activité solaire forte) et un cas plutôt froid (activité solaire faible).

La figure III.35 montre donc clairement les deux régimes évoqués précédemment, avec deux courbes asymptotiques simples qui permettent d'obtenir une valeur assez précise du flux d'échappement. Les conditions dans notre système solaire correspondent actuellement au premier régime, avec une augmentation du flux d'échappement qui peut atteindre 35% pour la Terre par exemple. D'autres analyses seraient intéressantes à réaliser, comme l'étude du cas de Mercure qui se trouve au plus près du Soleil (mais pour lequel la fonction de distribution à l'exobase, c'est-à-dire à la surface, n'est a priori pas maxwellienne), ou l'étude des premiers âges de notre système solaire où la pression de radiation était peut-être suffisante pour entrer dans le second régime dit de « blow-off » avec un échappement largement accru.

## G Implication de la pression de radiation sur les particules satellites

Après avoir étudié les populations balistiques puis d'échappement dans les parties précédentes, nous allons ici nous intéresser aux particules satellites, dont les densités sont probablement modifiées sous l'influence de la pression de radiation (qui n'était pas incluse dans la première partie de la thèse, chapitre II). Nous allons montrer ici que, si les densités ne sont pas calculables directement, d'autres informations intéressantes peuvent être fournies sur ces populations.

### G.1 Zones de stabilité

Nous savons, par définition des particules satellites, qu'elles partagent les mêmes propriétés que les particules balistiques si ce n'est qu'elles ne croisent pas l'exobase. Sur la figure III.6, nous pouvons

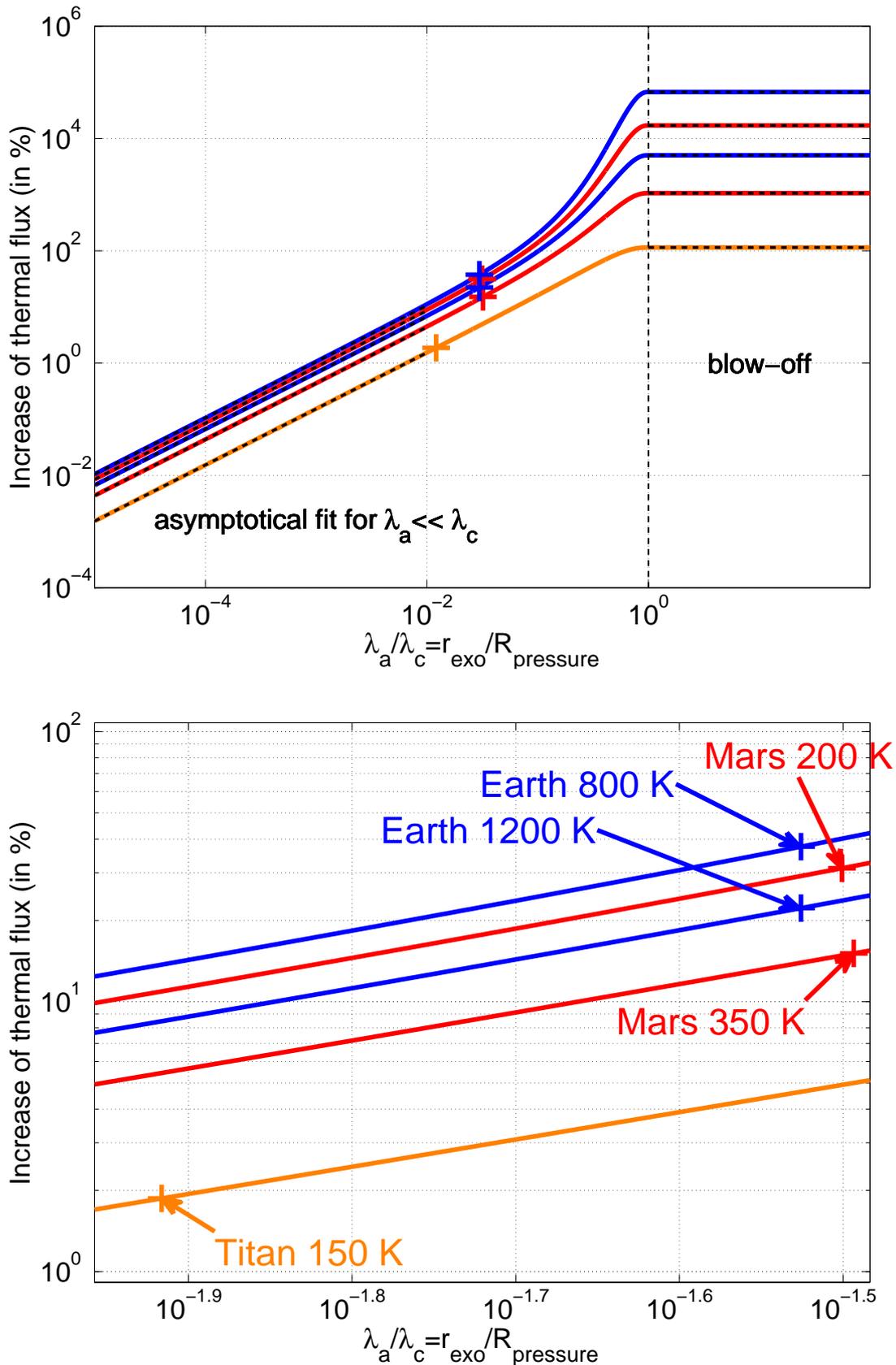


FIGURE III.35 – Écart relatif en pourcentage (par rapport à l'échappement de Jeans) induit par la pression de radiation, pour différents cas répertoriés dans le tableau III.2. Les différentes courbes correspondent à des valeurs de  $\lambda_c$  différentes (et décroissantes vers le bas). Les courbes bleues correspondent à la Terre, les rouges à Mars et la orange à Titan. Les lignes pointillées noires représentent les cas asymptotiques :  $\lambda_a \ll \lambda_c$  et  $\lambda_a > \lambda_c$ . Le panneau du bas est un agrandissement du panneau du haut autour des valeurs des planètes étudiées.

voir qu'il existe deux cercles particuliers : un point d'équilibre autour duquel les équipotentiels se referment qui est donc un point stable (le point au centre des zones bleues) ; et un cercle d'équilibre autour duquel les lignes se rapprochent dans une direction et s'éloignent dans l'autre, un point d'équilibre col (située dans la zone magenta). Ces points d'équilibre jouent un rôle clé pour les différents types de particules : pour les particules satellites, n'évoluant finalement qu'au sein des équipotentiels fermées, elles vont évoluer près de ce point d'équilibre stable, sinon elles croiseront de nouveau l'exobase<sup>4</sup>. Les particules satellites éventuelles (produites par collisions de particules balistiques dans la basse exosphère) sont donc a priori présentes essentiellement dans un plan perpendiculaire à l'axe Soleil-planète, situé d'ailleurs côté subsolaire ( $X$  négatif sur la figure). Des trajectoires circulaires seront par exemple stables dans ce plan.

Il est possible de déterminer numériquement la position de ces points d'équilibre. Il faut pour cela repartir de l'expression du potentiel effectif donnée par l'équation (III.63) :

$$\mathcal{V}_{eff} = \frac{U\mathcal{V}_U + W\mathcal{V}_W}{U + W} \quad (\text{III.128})$$

Ces points d'équilibre vérifient par définition les conditions :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}_{eff}}{\partial U} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{V}_{eff}}{\partial W} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.129})$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} -\frac{P_\phi^2}{2U^2W} + \frac{2\lambda_a}{(U+W)^2} + \frac{\lambda_a}{2} &= 0 \\ -\frac{P_\phi^2}{2UW^2} + \frac{2\lambda_a}{(U+W)^2} - \frac{\lambda_a}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.130})$$

ou réécrit différemment :

$$\begin{aligned} -P_\phi^2(U+W)^2 + 4\lambda_a U^2W + \lambda_a U^2W(U+W)^2 &= 0 \\ -P_\phi^2(U+W)^2 + 4\lambda_a UW^2 - \lambda_a UW^2(U+W)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.131})$$

En soustrayant la seconde équation à la première,

$$4\lambda_a UW(U-W) + \lambda_a UW(U+W)^3 = 0 \quad (\text{III.132})$$

---

<sup>4</sup>je tiens à rappeler que cette figure est invariante par rotation autour de l'axe planète-Soleil donc à tout point correspond un cercle dont le centre se situe sur l'axe planète-Soleil à la perpendiculaire du point d'équilibre

En repassant en coordonnées polaires,

$$R^2 + \cos \theta = 0 \quad (\text{III.133})$$

Avec un peu de recul, sans adimensionnement de l'équation III.133, cette équation n'est autre que la condition d'équilibre entre la force gravitationnelle et la pression de radiation projetée sur l'axe planète-Soleil.

$$-\frac{GMm \cos \theta}{r^2} - ma = 0 \quad (\text{III.134})$$

Autre façon de le voir : le point d'équilibre dans le plan  $(x, \rho)$  est la projection d'une orbite d'équilibre parfaitement circulaire. Comme ce point est invariant par rotation, l'orbite d'équilibre est en effet un cercle perpendiculaire à l'axe planète-Soleil. Sur cette orbite, il n'y a donc pas d'accélération dans la direction  $x$ . Via la relation fondamentale de la dynamique, cela signifie que la projection de la somme des forces appliquées au système le long de l'axe  $x$  est forcément nulle (puisque l'accélération dans cette direction l'est). Pour cette orbite stable, il faut donc que la pression de radiation compense la projection de l'attraction gravitationnelle dans la direction  $x$ .

Voici donc la première condition que vérifient nos points d'équilibre. Pour la deuxième, nous allons additionner les deux équations pour obtenir :

$$-2P_\phi^2(U + W)^2 + 4\lambda_a UW(U + W) + \lambda_a UW(U + W)^2(U - W) = 0 \quad (\text{III.135})$$

$$-P_\phi^2 + \lambda_a R \sin^2 \theta + \lambda_a R^3 \sin^2 \theta \cos \theta = 0 \quad (\text{III.136})$$

En substituant  $R^2$  par  $-\cos \theta$

$$-P_\phi^2 + \lambda_a R \sin^4 \theta = 0 \quad (\text{III.137})$$

Cette condition correspond à l'équilibre cette fois-ci entre la force centrifuge et la force gravitationnelle projetée dans le plan perpendiculaire à l'axe Soleil-planète.

$$mr \sin \theta \dot{\phi}^2 - \frac{GMm \sin \theta}{r^2} = 0 \quad (\text{III.138})$$

En effet, dans la direction  $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$ , la pression de radiation n'induit pas d'accélération. Par contre, comme notre orbite est circulaire, nous avons une force supplémentaire dans cette direction, la force centrifuge. Comme nous sommes en un point d'équilibre, il faut, dans le référentiel tournant, par la relation fondamentale de la dynamique, que la force centrifuge compense l'attraction gravitationnelle mais cette fois-ci dans la direction  $\rho$ .

Nous pouvons alors combiner nos deux conditions III.133 et III.137 :

$$(\sin^2 \theta)^9 - (\sin^2 \theta)^8 + \frac{P_\phi^8}{\lambda_a^4} = 0 \quad (\text{III.139})$$

Il serait intéressant d'obtenir, à partir de cette condition, une valeur limite de  $P_\phi$  pour savoir

si une particule sera a priori piégée, ou en échappement. Il n'existe pas de solution analytique au problème pour un polynôme de degré 9 (Théorème d'Abel). Par contre, nous pouvons faire une petite étude de ce polynôme :

$$P(X) = X^9 - X^8 + \frac{P_\phi^8}{\lambda_a^4} = X^8(X - 1) + \frac{P_\phi^8}{\lambda_a^4} \quad (\text{III.140})$$

pour  $X$  entre 0 et 1 à cause du  $\sin^2 \theta$ .

Nous remarquons que  $P(0) = P(1)$  donc d'après le théorème de Rolle, il existe  $a \in ]0, 1[$  tel que  $P'(a) = 0$ .  $a$  (qui vaut  $8/9$ ) est donc un extremum local.  $P''(8/9) = 9(8/9)^7 > 0$ , il s'agit donc d'un minimum local. Notre polynôme n'admettra des racines sur  $[0, 1]$  qu'à condition que  $P(8/9) < 0$  (par application du théorème des valeurs intermédiaires sur  $]0, 8/9[$  et  $]8/9, 1[$  puisque  $P(0) = P(1) = P_\phi^8/\lambda_a^4 > 0$ ), condition équivalente à :

$$P\left(\frac{8}{9}\right) = \left(\frac{8}{9}\right)^8 \left(\frac{8}{9} - 1\right) + \frac{P_\phi^8}{\lambda_a^4} = -\left(\frac{8}{9}\right)^8 \left(\frac{1}{9}\right) + \frac{P_\phi^8}{\lambda_a^4} < 0 \quad (\text{III.141})$$

$$|P_\phi| < \frac{8\sqrt{\lambda_a}}{9\sqrt[4]{3}} \approx 0.675409498\sqrt{\lambda_a} \quad (\text{III.142})$$

Si la particule ne vérifie pas cette inégalité, la condition III.139 n'existe pas et la particule ne peut plus être piégée. Ce critère peut être utilisé dans nos calculs comme une condition supplémentaire pour identifier le type de particule lors de l'intégration numérique. Nous avons ce même type de condition, implicite, pour le cas purement gravitationnel. Pour obtenir des particules balistiques ou satellites, il faut en effet nécessairement la condition d'énergie mécanique négative. Ceci impose que toute particule avec un moment  $L$  grand, tel que  $L > \sqrt{2GMm^2r}$ , sera forcément en échappement quelle que soit sa vitesse.

Mais finalement pourquoi s'intéresser aux particules satellites alors que nous considérons un cas non-collisionnel dans ce chapitre ? J'ai montré précédemment et dans notre article (Beth et al. (2014)) l'importance de prendre en compte les particules satellites dans la modélisation des exosphères, mais il n'était pas possible de tenir compte de la pression de radiation dans l'approche alors utilisée. Le formalisme utilisé ici, qui inclut l'effet de la pression de radiation, permet de contraindre les zones potentielles où les particules satellites peuvent exister : dans le cas purement gravitationnel, celles-ci peuvent se retrouver en tout point (pour des énergies mécaniques négatives, toutes les trajectoires se referment donc sont stables, il faut juste éviter qu'elles ne croisent l'exobase) alors qu'en présence de pression de radiation, il y a incompatibilité entre certaines zones de l'espace et certains types de particules (l'étude montre par exemple que les balistiques ne peuvent être présentes qu'à une distance inférieure à  $R_{\text{pression}}$  de la planète).

Même si, à l'heure actuelle, je n'ai pu le prouver rigoureusement (c.-à-d. mathématiquement), à la vue des différents cas de figures et de la topologie des équipotentielles, je peux déjà affirmer que les orbites des particules satellites vont se situer, en fonction de leur énergie et de leur moment  $p_\phi$ ,

à proximité de ces points de stabilité définis plus haut : au cœur des équipotentielles refermées pour ne pas pouvoir s'échapper et près des points de stabilité pour ne pas non plus croiser l'exobase. En coordonnées polaires, la position maximale de ce point d'équilibre sera donnée par :

$$\theta = \pi - \arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \approx 1,911 \text{ rad} \quad (\text{III.143})$$

et une distance

$$R = \sqrt{-\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,578 \quad (\text{III.144})$$

en unité de  $R_{pressure}$ .

Bien évidemment, en se référant à nos conclusions dans notre article (Beth et al. (2014)), la production des particules satellites se fait principalement près de l'exobase. Il est donc improbable de produire des particules satellites en quantité significative près des zones de stabilité (p.ex. 0,578  $R_{pressure}$  correspond à 126 000 km d'altitude pour la Terre, cf. table II.2). Seule une modélisation du type Monte-Carlo pourrait apporter une réponse plus complète, une approche similaire à celle de Richter et al. (1979) n'est pas faisable (notamment) car elle nécessite une périodicité des orbites qui n'existe pas en présence de la pression de radiation. Cependant, la taille de la boîte de simulation à considérer (plusieurs dizaines de rayons planétaires, puisque  $R_{pressure}$  impose la taille minimale de la boîte) est une contrainte forte pour un modèle Monte Carlo, d'autant plus si les collisions à l'origine des particules satellites doivent être prises en compte à toutes les altitudes.

## G.2 Calcul des densités des particules satellites

Théoriquement, dans notre approche non-collisionnelle, les particules satellites ne peuvent être produites. Il faut donc, comme réalisé dans la première partie de la thèse, utiliser l'équation de Boltzmann pour déterminer leur densité. Cependant, cette dernière approche n'est pas applicable en présence de la pression de radiation, qui nous empêche de connaître précisément la trajectoire des particules (trajectoire qui n'est d'ailleurs pas périodique). Par contre, il est possible d'étudier certaines propriétés des populations satellites comme le volume d'espace des phases dans lequel elles évoluent.

Nous pouvons en effet chercher à répondre à la question suivante : si les particules satellites sont effectivement produites, dans quelles zones de l'espace pourraient-elles contribuer le plus en terme de densités ? Nous avons à partir du même programme évalué une quantité spécifique, le volume d'espace des phases des particules satellites. Le volume d'espaces de phases de chaque type de particule est calculé de la manière suivante : nous n'intégrons pas la fonction de distribution sur l'espace des vitesses (cf. équation III.90) mais  $\int \mathbf{1}_{\text{type}} d^3\vec{v}$ . Il n'y a pas de pondération au travers de la fonction de distribution. C'est comme si nous supposions toutes nos vitesses équiprobables (ce qui est faux). Il suffit de reprendre le même principe que pour le calcul des densités de particules balistiques en posant une fonction de distribution des vitesses égale à 1. La différence entre les calculs des volumes pour les particules balistiques et satellites se fait sur un seul critère : le croisement de l'exobase ou

non. En plus de changer la fonction de distribution, il faut donc pour les particules balistiques vérifier  $U_- + W_- < 2r_{exo}/R_{pression}$  alors que pour les particules satellites, il faut :  $U_- + W_- > 2r_{exo}/R_{pression}$ .

La valeur d'un volume d'espace des phases n'a pas vraiment de sens physique, elle correspond, pour une position donnée, au volume de l'ensemble des vitesses que peut emprunter une particule. Mais elle peut fournir des informations intéressantes si l'on effectue une comparaison du volume d'espace des phases des particules satellites avec celui des particules balistiques. Cela nous permettra de mieux comprendre la répartition en termes de zones spatiales entre ces deux types de populations, et l'évolution de cette répartition en fonction de la pression de radiation.

La figure III.36, où nous avons représenté le ratio entre les deux volumes d'espace des phases, montre clairement les endroits de l'espace les plus propices à contenir des particules satellites, là où le volume d'espace des phases des particules satellites sera maximal.

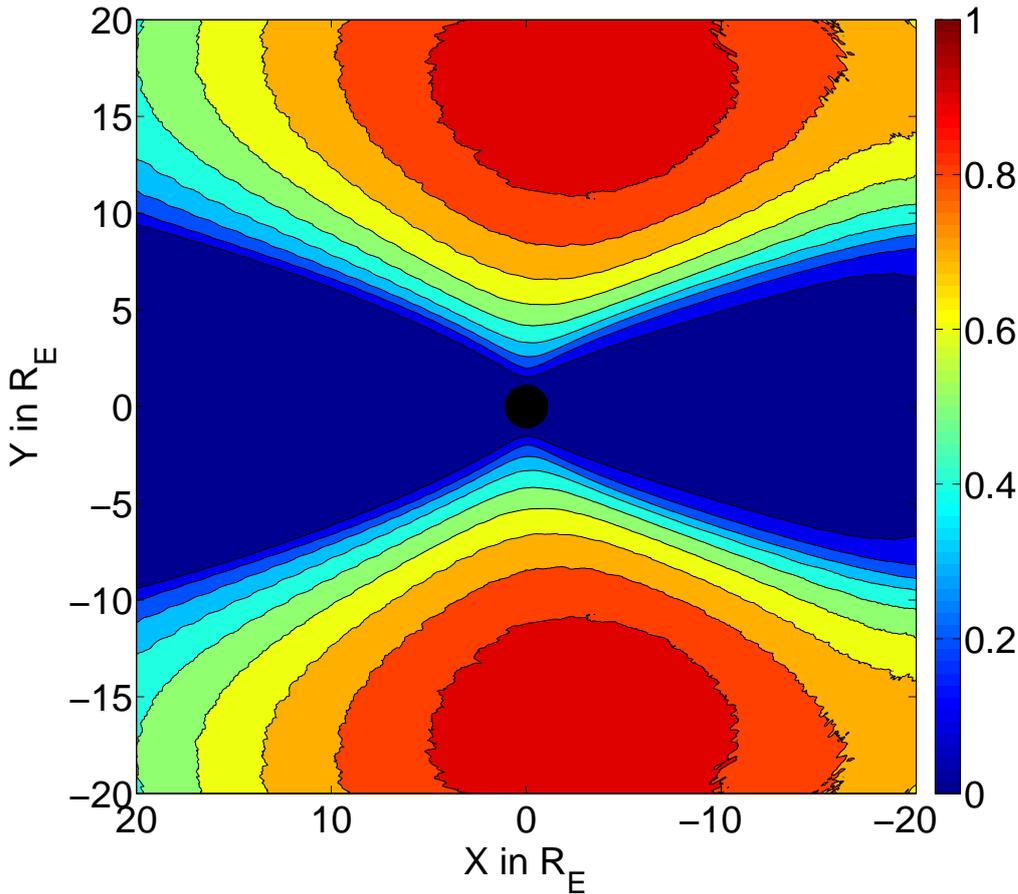


FIGURE III.36 – Ratios entre les volumes d'espace des phases occupés respectivement par les particules satellites et par les particules balistiques pour le cas terrestre à 800 K dans le plan équatorial ( $Z = 0$ ; mais il y a invariance par rotation). Pour évaluer l'impact réel de la pression de radiation, nous avons appliquée une accélération typique de  $7,5 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-2}$ . Les couleurs donnent la valeur du ratio : le rouge pour des ratios voisins de 1 et le bleu pour un ratio nul. Au centre de la figure est représentée la Terre.

Dans l'axe Terre-Soleil ( $Y = 0$ ), les particules ne peuvent être satellites. Comme déjà montré

dans l'article de Bishop (1991), les particules avec  $P_\phi = 0$ , croisant l'axe, vont inévitablement passer suffisamment près de la planète pour retomber sur l'exobase. Toutes les particules satellites sont « converties » en particules balistiques dans ce plan. Les particules satellites et balistiques partagent en effet la même gamme d'énergie mécanique mais la différence ne se fait que sur leur périapse (au-dessus ou en-dessous de l'exobase). Or la pression de radiation va tendre à réduire l'altitude du périapse au cours du temps, principalement pour les particules à faible inclinaison par rapport à l'axe Terre-Soleil.

La figure III.36 est très similaire à la figure III.6 représentant les équipotentielles à  $P_\phi$  non nul. Nous retrouvons donc les formes des équipotentielles fermées, avec des zones de stabilité situées dans le plan perpendiculaire à l'axe Soleil-planète et situées légèrement derrière la planète (là où la pression de radiation et la gravité de la planète s'équilibrent). Les particules satellites seront donc essentiellement présentes dans ces régions.

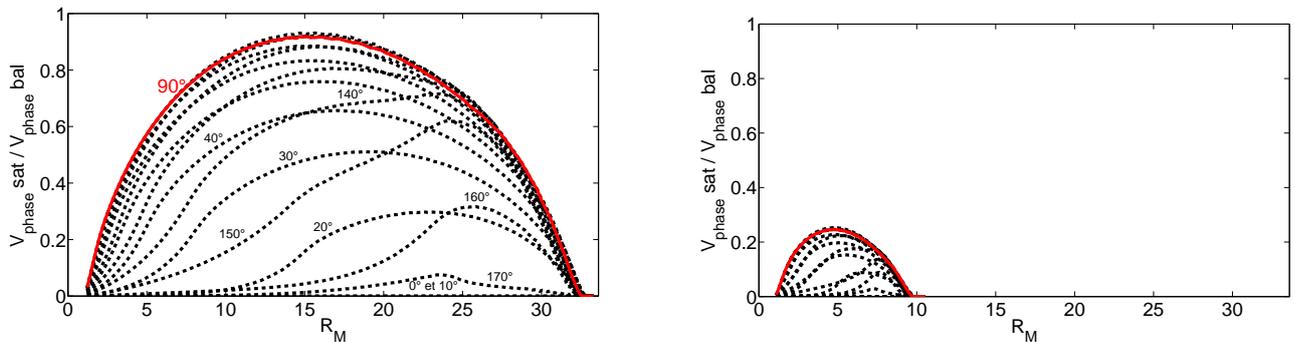


FIGURE III.37 – Ratios entre les volumes d'espace des phases occupés respectivement par les particules satellites et par les particules balistiques pour le cas martien à 200 K dans le plan équatorial ( $Z = 0$ ; mais il y a invariance par rotation). L'angle vaut 0 degré le long de l'axe Soleil-planète côté jour, 90 degrés dans le plan perpendiculaire, 180 degrés le long du même axe côté nuit. La distance  $R_{pressure}$  est située là où le ratio de volumes retombe à 0. Pour évaluer l'impact de la pression de radiation, nous avons appliquée une accélération typique de  $3,3 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-2}$  à gauche et une pression dix fois plus importante à droite.

La figure III.37 permet de mettre en avant les zones les plus propices à la présence de particules satellites en fonction de la direction d'observation par rapport à l'axe Soleil-planète et pour deux valeurs très différentes de la pression de radiation. Comme je l'ai montré dans la partie G.1 et comme prédit par Bishop (1991), les orbites liées passant au-dessus de l'exobase se retrouvent majoritairement dans le plan tangent à l'orbite de la planète (cf. les courbes rouges de la figure III.37). De plus, le maximum pour chaque orientation est atteint pour des distances au-delà de  $R_{pressure}/2$ , avec le maximum absolu situé, comme prévu par l'équation III.144, à environ  $0,58 R_{pressure}$ . Par ailleurs, l'influence de la pression est clairement visible par la comparaison entre les deux panneaux de la figure III.36. L'augmentation de la pression de radiation va diminuer l'importance relative de la population de particules satellites quelle que soit la direction puisque le volume d'intégration dans l'espace des phases se retrouve réduit par rapport à celui des particules balistiques. Les particules satellites sont en effet partiellement transformées en balistiques par la pression de radiation au travers d'un freinage

et donc d'une baisse du périapse. Enfin, la pression de radiation va confiner l'exosphère, réduisant ainsi la distance  $R_{\text{pression}}$  (à laquelle le ratio devient toujours nul) ce qui implique une translation du pic des courbes vers des distances plus faibles.

## H Conclusions

Dans ce chapitre, j'ai poursuivi l'approche présentée dans l'article de Bishop and Chamberlain (1989) afin de tenir compte de la pression de radiation dans la modélisation des densités et du flux d'échappement dans une exosphère non-collisionnelle.

Dans la première partie de ce chapitre, sur la base de la mécanique hamiltonienne, j'ai modélisé les profils de densité des particules balistiques - composante majoritaire près de la planète - dans toute l'exosphère, avec une application aux cas de l'hydrogène sur la Terre, Mars et Titan. À l'origine, Bishop and Chamberlain (1989) s'étaient limités à un cas 1D (le long de la direction Soleil-planète), nous avons donc généralisé leurs travaux à l'ensemble de l'exosphère sans restriction sur le mouvement des particules. Nous avons pu mettre en évidence des profils de densité souvent très supérieurs à ceux donnés par le formalisme de Chamberlain (1963) pour la même composante. Ce dernier, ne tenant pas compte de la pression de radiation, néglige l'influence de la pression de radiation sur la répartition des densités dans l'exosphère, ce qui amène le plus souvent à une sous-estimation significative des densités exosphériques (jusqu'à un facteur 7, cf. figure III.27). Cela est d'autant plus important pour l'hydrogène qui est l'une des espèces les plus sensibles à cet effet par diffusion résonnante des photons aux énergies proches de la raie Lyman- $\alpha$ . Il est important de rappeler que le modèle de Chamberlain reste le modèle analytique le plus utilisé pour une modélisation facile et rapide de la composante neutre exosphérique. Dans cette partie, nous avons donc montré qu'il pouvait être important de tenir compte de la pression de radiation et qu'il était possible par notre formalisme semi-analytique de pouvoir la prendre compte de manière rapide et simple.

Par ailleurs, il est intéressant de noter que la présence d'une pression de radiation crée naturellement une exopause, une limite externe pour l'exosphère. Les profils de densité balistiques issus de notre modèle révèlent en effet une chute brutale des densités aux plus hautes altitudes. Cette limite apparaît dans tous les cas aux alentours de  $R_{\text{pression}}$ , définie comme la distance où l'accélération due à la pression de radiation domine celle due à la gravité (introduite par Bishop (1991)). Les particules encore présentes sont donc forcément en échappement à partir de cette limite et ne sont donc plus gravitationnellement liées à la planète. Cette exopause apparaît naturellement dans le modèle, au contraire des modèles présents dans la littérature qui introduisent cette limite de manière artificielle.

De plus, nous avons montré que la pression de radiation est à l'origine d'asymétries à haute altitude dans les exosphères. En particulier, elle permet d'expliquer l'asymétrie jour/nuit/aube/-crépuscule observée dans la couronne terrestre, avec des variations très similaires à celles fournies par notre modèle. À très hautes altitudes, à plusieurs rayons planétaires, la densité d'hydrogène est ainsi plus importante côté nuit que côté jour. Par contre, ces deux côtés présentent des densités plus

importantes que dans la direction perpendiculaire Nord/Sud/aube/crépuscule. L'exosphère présente alors une forme allongée, ellipsoïdale dans la direction Soleil-planète, effectivement observée et reproduite par d'autres modèles mais Monte-Carlo.

Les asymétries, tout comme l'augmentation des densités balistiques par la pression de radiation, s'expliquent par la direction de la pression de radiation et par les transferts entre populations balistiques, satellites et d'échappement. Une faible pression de radiation transformera par exemple facilement les particules satellites en particules balistiques, et une pression de radiation plus intense transformera ensuite les balistiques en populations en échappement.

Enfin, dans la dernière partie, j'ai calculé analytiquement le flux d'échappement thermique au point subsolaire, en tenant compte de la pression de radiation. Ce flux d'échappement peut s'écarter significativement - jusque +30/40% pour la Terre et Mars - de l'échappement de Jeans (qui néglige la pression de radiation) et croître rapidement en fonction de la pression de radiation. Nous avons pu mettre aussi en avant, pour des fortes valeurs de la pression de radiation, l'établissement d'un régime du type « blow-off », c'est-à-dire mécanisme d'érosion fort et rapide de l'atmosphère de la planète. Ce mécanisme est d'autant plus important à prendre en compte dans la formation des planètes et de leur atmosphère car les étoiles émettent pendant leurs premières années un flux lumineux beaucoup plus intense dans l'ultraviolet, impliquant une pression de radiation plus forte qu'actuellement et donc un échappement plus fort.



# Chapitre IV

## À l’assaut des exoplanètes

### Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Le contexte scientifique . . . . .</b>	<b>173</b>
A.1	La détection des exoplanètes . . . . .	173
A.2	Une grande diversité . . . . .	175
A.3	Les Jupiter chauds . . . . .	176
<b>B</b>	<b>La pression de radiation et le problème à trois corps . . . . .</b>	<b>177</b>
B.1	Le problème à trois corps . . . . .	177
B.2	L’influence de la pression de radiation . . . . .	178
B.3	L’effet d’une forte pression de radiation . . . . .	186
B.4	L’échappement atmosphérique de HD 209458b . . . . .	186
B.5	Un autre scénario pour HD 209458b ? . . . . .	189
<b>C</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>190</b>

---

Ce chapitre constitue une ouverture vers l’étude des exoplanètes. De par leur nombre (1713 à la mi-mai 2014) et leur diversité, elles constituent un magnifique sujet de curiosité et d’études en complément des corps déjà présents au sein du Système Solaire. Nous allons voir, entre autres, que le panel de situations dans lesquelles se trouvent ces planètes me permet d’appliquer le modèle développé dans la partie précédente pour étudier l’influence de la pression de radiation sur l’atmosphère des Jupiters chauds. Nous montrerons également l’effet de la pression de radiation sur le problème à corps des exoplanètes proches de leur étoile.

## A Le contexte scientifique

### A.1 La détection des exoplanètes

La première exoplanète, appelée pour l’occasion « Bellérophon », une Géante, fut découverte autour de l’étoile de type solaire, 51 Peg (Mayor and Queloz (1995)). Précédemment, la présence d’une planète extrasolaire n’avait été mise en évidence qu’autour d’un pulsar (Wolszczan and Frail (1992)).

Depuis, le catalogue d'exoplanètes n'arrête pas de s'enrichir au fil des mois notamment grâce aux spectrographes au sol comme ELODIE, CORALIE ou bien encore HARPS. Les missions spatiales comme COROT et surtout KEPLER, cette dernière étant dédiée uniquement à la détection d'exoplanètes, enrichissent considérablement ce catalogue, disponible à l'adresse <http://www.exoplanet.eu/>.

Les exoplanètes peuvent être détectées par différentes méthodes. Il existe deux grandes familles de détection, les méthodes dites directes et indirectes. Parmi les méthodes indirectes, les premières mises en place pour la détection d'exoplanètes, nous avons deux méthodes principales qui ont mis à jour la majorité des exoplanètes :

**La méthode des vitesses radiales** : Dans le cas où un système extrasolaire abrite une voire plusieurs planètes en plus de l'étoile, l'étoile va légèrement osciller autour du centre de masse. En effet, même dans le problème à deux corps, le corps le plus massif, l'étoile se situe à une distance  $\mu d_{star-planet} = M_1 M_2 / (M_1 + M_2) \times d_{star-planet} \approx M_2 / M_1 \times d_{star-planet}$  du centre de masse du système ( $M_1$  et  $M_2$  étant respectivement les masses de l'étoile et de la planète et  $d_{star-planet}$  la distance séparant les deux corps). L'étoile va donc tourner autour du centre de masse ce qui induira un mouvement relatif de l'étoile de va et vient le long de la ligne de visée. Le mouvement de l'étoile va alors entraîner un déplacement des raies autour d'une position moyenne connue. Mais seule une bonne résolution  $\lambda/\Delta\lambda$  du spectrographe va permettre de percevoir ces oscillations subtiles. À l'heure actuelle, les spectrographes peuvent identifier des variations de vitesses radiales inférieures à  $1 \text{ m.s}^{-1}$ . Le seul inconvénient vient de l'inclinaison de ou des orbites des planètes. Si le plan orbital est perpendiculaire à la ligne de visée, aucune variation de vitesses radiales ne sera détectée.

**La méthode des transits** : Lorsqu'une planète passe devant l'étoile, la planète va occulter partiellement l'étoile. Le flux lumineux va décroître en fonction du rapport entre les carrés du rayon de la planète et de l'étoile. Plus la planète sera petite, moins le flux lumineux sera affecté. Seule une grande sensibilité sur le flux permet la détection par transit. Il existe aussi quelques cas où il est possible de détecter la planète quand elle repasse derrière l'étoile car la planète nous montre alors sa face visible et le flux lumineux s'accroît légèrement : nous observons à la fois le flux émis par l'étoile et celui réfléchi par la planète.

Grâce à la mission KEPLER, le nombre de détections par la méthode des transits a considérablement augmenté et notamment mis en évidence des systèmes composés de plusieurs exoplanètes comme par exemple Kepler-11, composé d'une étoile similaire au Soleil et de 6 exoplanètes dont 5 à des distances inférieures à celle de Mercure par rapport au Soleil.

Quant à l'imagerie directe, les techniques sont en cours de mise au point mais nous pouvons déjà expliquer les principes physiques sur lesquels elles se basent :

**La coronographie** : le but sera d'occulter artificiellement l'étoile hôte pour révéler éventuellement tous les corps gravitant autour, même proches. Néanmoins, l'occultation présente un problème d'optique de taille : la diffraction. Le masque engendre de la diffraction car pour la détection d'exoplanète, il doit nécessairement être très petit.

**L'étude spectrale** : l'étoile émet un rayonnement principalement du type corps noir et non polarisé. Par contre, la planète, diffusant la lumière émise par l'étoile, présente un spectre d'absorption à cause des différentes espèces présentes dans l'atmosphère et diffuse la lumière de manière polarisée. En comparant le spectre polarisé et non polarisé, il est alors possible de mettre en évidence la présence d'une atmosphère et donc d'une planète. Il faut donc que la planète soit suffisamment grande et présente une importante quantité de gaz.

## A.2 Une grande diversité

Les 1713 exoplanètes découvertes à ce jour (mi-mai 2014) présentent une grande variété dans leurs caractéristiques. Cette variété ouvre un champ d'investigation énorme du point de vue de la modélisation des atmosphères. Voici une revue des principales caractéristiques du catalogue d'exoplanètes connues à ce jour :

**La masse** : la masse supposée de la planète va dépendre fortement de l'inclinaison entre l'axe de révolution de la planète et la ligne de visée. En se basant sur la méthode des vitesses radiales, qui utilisent les variations en vitesse le long de la ligne de visée qui sont observées, les estimations sur les masses sont données par la quantité  $M \sin i$ . Les masses identifiées se situent entre  $10^{-3}$  et 47 masses joviennes environ, avec une incertitude liée à la valeur de l'angle  $i$ .

**Le rayon** : le rayon varie entre  $2,8 \cdot 10^{-2}$  et 2,2 rayons joviens.

**La période de révolution** : elle est comprise entre 0,1 jour et 2000 ans.

**Le demi-grand axe** : il est compris entre  $4,4 \cdot 10^{-3}$  et 3200 unités astronomiques, avec une majorité de cas autour de quelques voire quelques dizaines d'unités astronomiques.

Vu le nombre important de cas dans le catalogue d'exoplanètes, chaque exoplanète présentera ainsi des spécificités notables tant sur le plan de la composition de son atmosphère, que de sa température, sa gravité, sa distance à l'étoile, etc ... Cependant, peu d'exoplanètes sont suffisamment bien caractérisées vis-à-vis de l'ensemble de ces grandeurs. Les cas les mieux connus sont généralement des Jupiters chauds.

## A.3 Les Jupiter chauds

### A.3.a Caractéristiques

Le terme « Jupiters chauds » englobe une catégorie de planètes présentant une taille de l'ordre de celle de Jupiter mais orbitant extrêmement près de leur étoile hôte à des distances inférieures à 0,5 unité astronomique. L'origine de leur proximité à l'étoile est un mécanisme encore mal compris ; a priori, vu les conditions régnant dans cette région, la planète n'a pu se former aussi près, la piste la plus probable étant qu'elle a migré au cours du temps vers l'étoile.

Par conséquent, les Jupiters chauds présentent à la fois une forte gravité de surface mais aussi des températures élevées. Ils sont aussi soumis à de fortes contraintes de marée par leur proximité à l'étoile. De plus, dans le cas où ces mêmes planètes orbitent autour d'étoiles de type solaire, elles sont soumises à un fort rayonnement dans l'ultraviolet et le gaz présent est alors très vite à la fois chauffé et ionisé. Tout porte à croire que l'échappement atmosphérique est relativement important et amène à une évaporation rapide de l'atmosphère sous l'action du vent stellaire, du chauffage intense et du flux ionisant.

### A.3.b Le cas de HD 209458b

« Osiris », au nom fortement controversé mais plus communément connue sous le doux nom de HD 209458b, est une planète avec les caractéristiques orbitales suivantes : une masse de 0,69 masse jovienne, un rayon de 1,38 rayons joviens, un demi-grand axe de 0,47 unité astronomique et une période de révolution de 3,57 jours (ces caractéristiques sont issues du catalogue d'exoplanètes). C'est un formidable candidat pour étudier la possibilité d'utiliser mon modèle exosphérique incluant la pression de radiation, car elle se trouve très près de son étoile et fait l'objet d'un grand nombre d'observations et d'articles portant sur son atmosphère.

Elle présente une grande quantité d'hydrogène mais sa proximité à l'étoile (à l'origine d'une érosion atmosphérique intense) semble contradictoire avec une atmosphère étendue en hydrogène. Il nous semble logique d'avoir des géantes gazeuses loin de leur étoile comme dans notre Système Solaire avec Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune. L'hydrogène est largement présent dans ces planètes lointaines, car la faible température qui y règne (combinée à la forte gravité) limite son échappement de Jeans (qui reste le mécanisme principal d'échappement des espèces légères) grâce à une faible valeur du paramètre  $\lambda_c$  à l'exobase. À moins d'une migration de la planète depuis des régions plus externes, ou à moins d'être dans la période de formation de HD 209458b et que son atmosphère ne se soit pas encore évaporée sous l'effet notamment du chauffage et de l'ionisation intense de son étoile-hôte, il semble peu probable que la présence d'une atmosphère étendue d'hydrogène encore de nos jours soit le fruit du hasard. Nous verrons plus loin (partie B.5) que notre analyse de l'influence de la pression de radiation sur le problème à trois corps de HD209458b permet d'imaginer un autre scénario pour ce Jupiter chaud.

## B La pression de radiation et le problème à trois corps

L'objet de cette partie est de montrer que la pression de radiation stellaire influence significativement le problème à trois corps, en transformant la topologie des équipotentielles, et que le cas de HD 209458b soumise à une pression de radiation intense nous permet d'utiliser notre modèle du chapitre III.

### B.1 Le problème à trois corps

En voulant m'intéresser au cas des exoplanètes, j'ai découvert qu'il existait un paramètre que j'avais jusqu'ici ignoré : la gravité stellaire. J'ai été particulièrement interpellé par le cas de la planète HD 209458b : étant proche de son étoile, le lobe de Roche est également proche de la planète. Les atomes d'hydrogène situés dans l'environnement de la planète ne sont-ils pas finalement plus soumis à la dynamique imposée par le problème à trois corps que par la pression de radiation ?

Je tiens à faire tout d'abord un petit rappel sur le problème à trois corps. Ce problème (et oui, comme il n'a pas de solution exacte, sauf dans de rares cas, il reste un problème) repose sur la dynamique d'une particule de masse infiniment petite devant les deux autres dans le repère tournant. Soient deux corps massifs de masses  $M_1$  et  $M_2$ , séparée d'une distance  $d_{12}$  en rotation uniforme (ce qui correspond, en anglais, au problème référencé par l'abréviation CR3BP, « Circular Restricted Three Body Problem »). La masse infiniment petite est donc soumise au potentiel effectif adimensionné  $-\Omega(x, y, z)$  dans le repère tournant à la vitesse angulaire  $\sqrt{G(M_1 + M_2)/d_{12}^3}$  avec :

$$\Omega(x, y, z) = \underbrace{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}_{\text{potentiel centrifuge}} + \underbrace{\frac{\mu}{\sqrt{(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2}}}_{\text{gravité du corps 1}} + \underbrace{\frac{1 - \mu}{\sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2}}}_{\text{gravité du corps 2}} \quad (\text{IV.1})$$

où  $\mu = M_1/(M_1 + M_2)$ ,  $(-\mu, 0, 0)$  et  $(1 - \mu, 0, 0)$  sont les positions fixes dans le repère tournant des deux masses et  $(x, y, z)$  celles de la particule sans masse en unités de la distance entre les deux corps. Le repère tourne à la vitesse  $\omega = \sqrt{G(M_1 + M_2)/a^3}$  avec  $a$  la distance entre les deux corps. L'un des invariants de ce problème est appelé constante de Jacobi et est défini par :

$$C_J = 2\Omega - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (\text{IV.2})$$

qui n'est autre que le double de l'opposé de l'énergie mécanique de la particule divisé par la masse de la particule.

Ce problème n'a pas de solution analytique sauf cas particuliers, car il ne possède pas assez d'invariants, et il faut de plus prendre compte un effet dynamique : la force de Coriolis (elle n'apparaît pas dans le potentiel effectif).

Nous allons nous intéresser au cas où  $\mu$  est petit c'est-à-dire que l'une des masses est grande devant l'autre (cas classique d'un système avec une étoile et une planète). La plus petite sera proche

de la position  $(1, 0, 0)$  et la grande de  $(0, 0, 0)$ . Ce problème présente quelques caractéristiques spécifiques : le potentiel présente alors des points d'équilibre, stables ou non, qui sont les points de Lagrange et sont au nombre de 5. Nous allons nous intéresser à deux points de ces points,  $L_1$  et  $L_2$ , qui sont situés sur l'axe reliant les deux corps.  $L_1$  est situé entre les deux corps et définit la position du lobe de Roche, tandis que  $L_2$  est quasiment le symétrique de  $L_1$  par rapport à la position du corps de faible masse. La position de ces points et leur énergie potentielle vont jouer un rôle prépondérant sur la dynamique de l'exosphère des Jupiters chauds et en règle générale sur les exoplanètes proches de leurs étoiles.

Lecavelier des Etangs et al. (2004), Erkaev et al. (2007) et Lammer et al. (2013) tentèrent avec leurs modèles de prendre en compte l'effet du lobe de Roche sur la dynamique du gaz et en particulier de l'hydrogène présent dans l'atmosphère de HD 209458b. Lecavelier des Etangs et al. (2004) montrent l'évolution de la hauteur de l'exobase en fonction de la température à celle-ci. Lorsque la température augmente, la thermosphère est en effet en expansion suite au chauffage par les rayons des ultra-violets, si bien que l'exobase tend à se rapprocher du lobe de Roche. Dans le cas de planètes proches de leur étoile, l'exobase ne peut en revanche dépasser la limite du lobe de Roche : c'est un point d'équilibre col, instable dans la direction étoile-planète. Si un atome dépasse ce point, il tombera irrémédiablement vers l'étoile. Le lobe de Roche et donc l'équipotentielle passant par le point  $L_1$  jouent en réalité le rôle d'exopause. Lorsque des particules franchissent cette limite, elles se retrouvent inévitablement en échappement.

Sur la figure IV.1, extraite de la thèse de Lufkin (2004), nous pouvons observer l'évolution des lignes d'équipotentielles en fonction de leur énergie, et en déduire des informations importantes sur l'échappement atmosphérique. Pour des énergies mécaniques décroissantes, donc pour des valeurs de  $C_J$  croissantes ( $C_J = -2\Omega$ ), les lignes se referment, d'abord sur  $L_2$  puis sur  $L_1$ . Si l'échappement des particules est tout d'abord (pour une énergie de la particule grande) possible à la fois devant et derrière la planète, une énergie moindre ne permettra plus qu'un échappement vers l'étoile (point sub-stellaire), pour finalement ne plus permettre l'échappement du tout aux plus faibles énergies. L'échappement sera par ailleurs moindre dans le plan perpendiculaire à l'axe Soleil-planète (cf. Lecavelier des Etangs et al. (2004), figure 2) et encore plus faible dans la direction  $z$ , perpendiculaire au plan de la figure IV.1. La topologie des équipotentielles dans le problème à trois corps joue donc un rôle essentiel sur la structure de l'exosphère et sur l'échappement exosphérique, tout comme la pression de radiation présentée dans le chapitre précédent.

## B.2 L'influence de la pression de radiation

Bourrier and Lecavelier des Etangs (2013) tiennent compte de la pression de radiation et des forces inertielles sur la dynamique des atomes d'hydrogène en échappement dans l'exosphère de HD 209458b et HD 189733b. Plusieurs auteurs (García Muñoz (2007), Koskinen et al. (2013)) se sont quant à eux intéressés au problème à trois corps pour l'étude de l'échappement atmosphérique de HD 209458b. Cependant, une question n'a pas été traitée jusqu'ici : quel est l'effet de la pression de

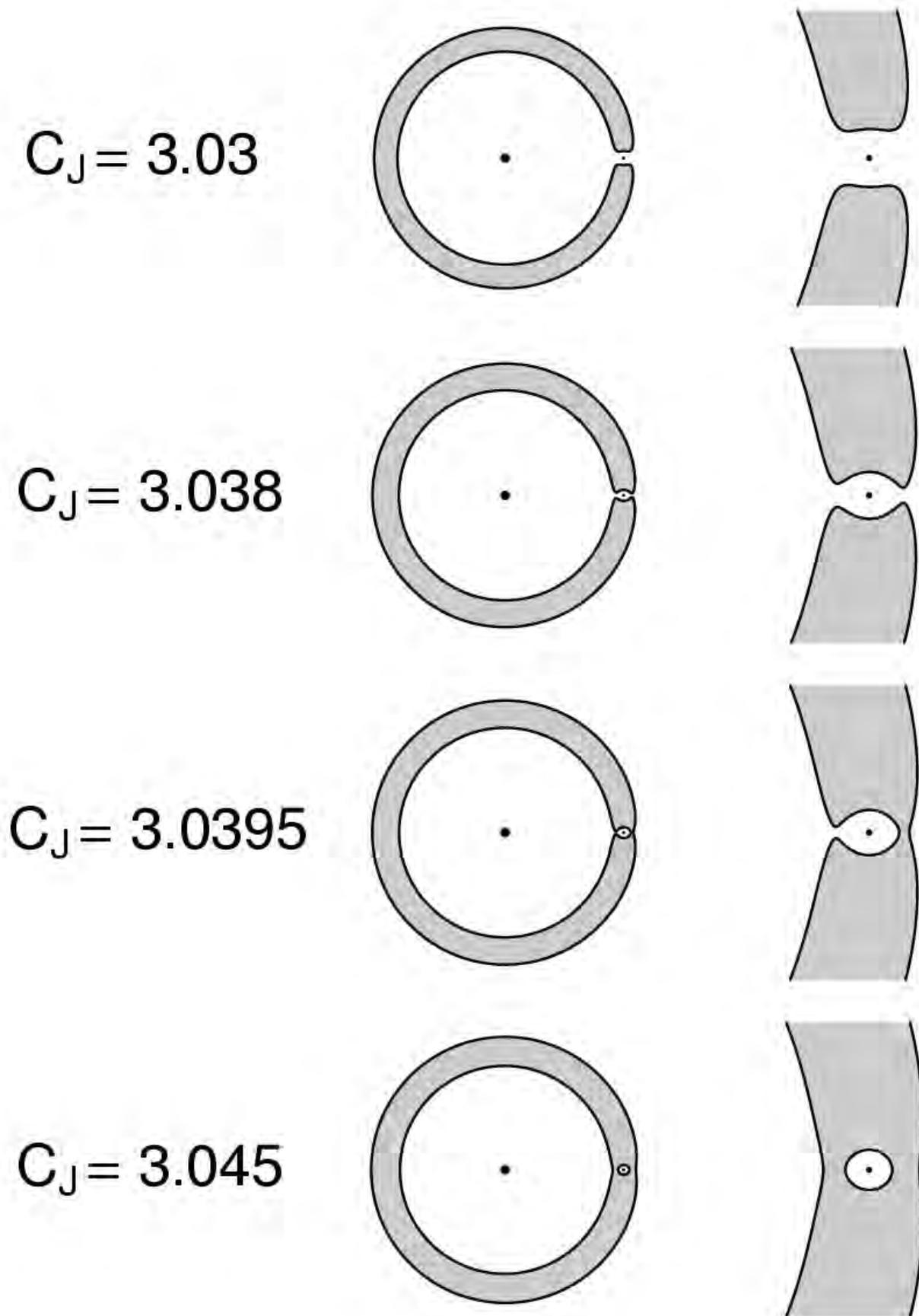


FIGURE IV.1 – Figure extraite de la thèse de Lufkin (2004) montrant les lignes d'équipotentielles dans le problème à trois corps pour le système Soleil-Jupiter (c.-à-d.  $\mu = 0.001$ ), pour différentes valeurs du potentiel effectif.  $C_j = -2\Omega(x, y, 0)$ . Les dessins de gauche montrent le système complet (avec l'étoile au centre et la planète à droite), tandis que Les dessins de droite représentent un zoom des équipotentielles autour de la planète.

radiation sur le problème à trois corps ?

Nous avons mené une petite enquête. Il n'existe pas, a priori, d'article traitant de l'effet de la pression de radiation sur le problème à trois corps sauf dans le cas d'étoiles binaires (Dermine et al. (2009)). Mais dans ce cas, les deux corps en rotation présentent des masses du même ordre de grandeur. Or dans le cas de HD 209458b, le rapport est de 1/2000 : le centre de masse du système est proche de celui de l'étoile, pour les binaires non. De plus, la pression de radiation provient de l'étoile de faible masse dans l'article. Au final, dans le cas d'un Jupiter chaud proche de son étoile, la topologie des équipotentielles sera très différente du cas d'étoiles binaires. Par contre, le lecteur est invité à regarder les tracés d'équipotentielles de Dermine et al. (2009) en fonction de la pression de radiation pour apprécier son effet.

Il n'est en revanche pas possible, du moins pour l'instant (cf. plus bas), d'appliquer le même type d'approche que celle utilisée dans le chapitre précédent, basée sur le formalisme hamiltonien, au cas à trois corps : il n'existe pas assez d'invariants du mouvement pour caractériser suffisamment bien et simplement les trajectoires, nous étions déjà à la limite d'une telle approche avec notre étude de l'influence de la pression de radiation sans la présence d'un troisième corps. De plus, il serait nécessaire de prendre en compte les effets dynamiques de la force de Coriolis.

Comme la pression de radiation est une force proportionnelle au flux solaire, sa variation est en  $1/r^2$  où  $r$  représente la distance à l'étoile. Si l'on néglige l'effet Doppler (selon la vitesse de l'atome d'hydrogène par rapport à l'étoile, celui-ci va diffuser plus ou moins efficacement les photons de la raie Lyman- $\alpha$ , voir Bourrier and Lecavelier des Etangs (2013)), la pression de radiation, dans le repère galiléen lié à l'étoile, s'oppose à la gravité stellaire :

$$\vec{F} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_{rad} = -\frac{GM(1-\beta)}{r^2}\vec{e}_r \quad (\text{IV.3})$$

où  $\beta$  est l'amplitude relative de la pression de radiation par rapport à la gravité stellaire.  $\beta$  est bien sûr positif mais il peut aussi excéder 1 si la pression de radiation est plus forte que la gravité stellaire. La pression de radiation va simplement réduire de manière fictive la masse de l'étoile pour des valeurs de  $\beta$  comprises entre 0 et 1. Par contre, nous allons montrer (cf. figures IV.2, IV.3 et IV.4) que la situation est plus complexe si  $\beta$  devient supérieur à 1 comme c'est le cas dans le Système Solaire pour l'hydrogène.

La résolution du problème à trois corps se fait dans le repère tournant ; c'est la dynamique des atomes d'hydrogène en rotation avec la planète qui nous importe. Or, la vitesse de rotation du repère tournant est donnée par :

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{d_{pl}^3}} \quad (\text{IV.4})$$

où  $d_{pl}$  représente la distance de la planète à l'étoile. Nous sommes dans le cas circulaire bien sûr.

Le champ de force auquel est soumis l'hydrogène dans le repère tournant est donc :

$$\vec{F} = -\frac{GM_S m(1-\beta)}{r_S^2} \vec{e}_{r_S} - \frac{GM_{pl} m}{r_{pl}^2} \vec{e}_{r_{pl}} - 2m\omega(\vec{e}_z \wedge \vec{v}) + m\omega^2 \rho \vec{e}_\rho \quad (\text{IV.5})$$

avec  $\rho$  la distance à l'axe de rotation,  $\vec{e}_\rho$  le vecteur associé,  $r_S$  la distance à l'étoile,  $r_{pl}$  la distance à la planète,  $\vec{e}_{r_{pl}}$  le vecteur orienté de la planète vers l'atome,  $\vec{e}_{r_S}$  le vecteur orienté de l'étoile vers l'atome. De gauche à droite, les forces en jeu sont la gravité stellaire combinée à la pression de radiation, la gravité de la planète et les forces d'inertie de Coriolis et centrifuge. Comme la force de Coriolis est un effet dynamique (elle dépend de la vitesse), cette force  $\vec{F}$  décrite ci-dessus ne dérive pas complètement d'une énergie potentielle.

Nous avons représenté, sur les figures IV.2, IV.3 et IV.4, les lignes d'équipotentielles pour lesquelles  $\Omega$  est constant (pour le cas de HD 209458b). Les différentes figures correspondent à différentes valeurs fictives de  $\beta$ , donc à différentes valeurs fictives de la pression de radiation stellaire (qui va impacter la planète, supposée être ici HD 209458b). Le problème classique à trois corps correspond à  $\beta = 0$  (panneaux du haut de la figure IV.2). Dans ce cas, près de la planète, la force centrifuge compense localement la gravité stellaire. La dynamique est donc dominée, en négligeant la force de Coriolis, par la gravité de la planète mais évolue très vite avec des distances croissantes à la planète (cf. les nombreux cas de trajectoires autour de  $L_1$  et  $L_2$ ).

Cependant, s'il existe une force due à la pression de radiation ( $\beta$  non nul), qu'obtient-on ? La position du lobe est-elle changée ? Sommes-nous dans certaines conditions en droit de ramener ce problème à celui étudié dans le chapitre précédent en supposant, près de la planète, une pression de radiation constante, venant de l'infini, et seulement le champ de gravité de la planète ?

Pris par le temps, j'ai mené une étude simple et rapide, en prenant toujours l'exemple de HD 209458b soumis à une pression de radiation fictive choisie. J'ai d'abord identifié la position des points  $L_1$  et  $L_2$  pour différentes valeurs de la pression de radiation (cf. figure IV.5). Puis j'ai analysé la topologie des lignes d'équipotentielles (figures IV.2, IV.3, IV.4, et la figure récapitulative IV.6) afin de voir l'évolution de la position du lobe de Roche, et de voir si, pour telle ou telle valeur de  $\beta$ , je m'approche ou non de la topologie des lignes équipotentielles de mon précédent travail (avec pression de radiation et sans troisième corps).

Il est étonnant de voir que même pour une faible valeur de  $\beta$  (0,01), la topologie des lignes se modifie de façon importante : les équipotentielles se referment d'abord sur  $L_1$  puis sur  $L_2$  pour des énergies croissantes (figure IV.2). Il faudra plus d'énergie cinétique aux particules pour s'échapper côté jour que côté nuit (partiellement compensé par des températures plus élevées côté jour) en contradiction avec l'article de Lecavelier des Etangs et al. (2004). Dès que  $\beta$  croît (figure IV.3), les points  $L_1$ ,  $L_3$ ,  $L_4$  et  $L_5$  (tous placés à la même distance de l'étoile) entament une dérive vers l'étoile. Il en va de même pour le point  $L_2$  mais celui-ci doit rester au-delà de la position de la planète sur l'axe planète-étoile. Pour des  $\beta > 1$ , il est clair que les points de Lagrange  $L_1$ ,  $L_3$ ,  $L_4$  et  $L_5$  tombent dans

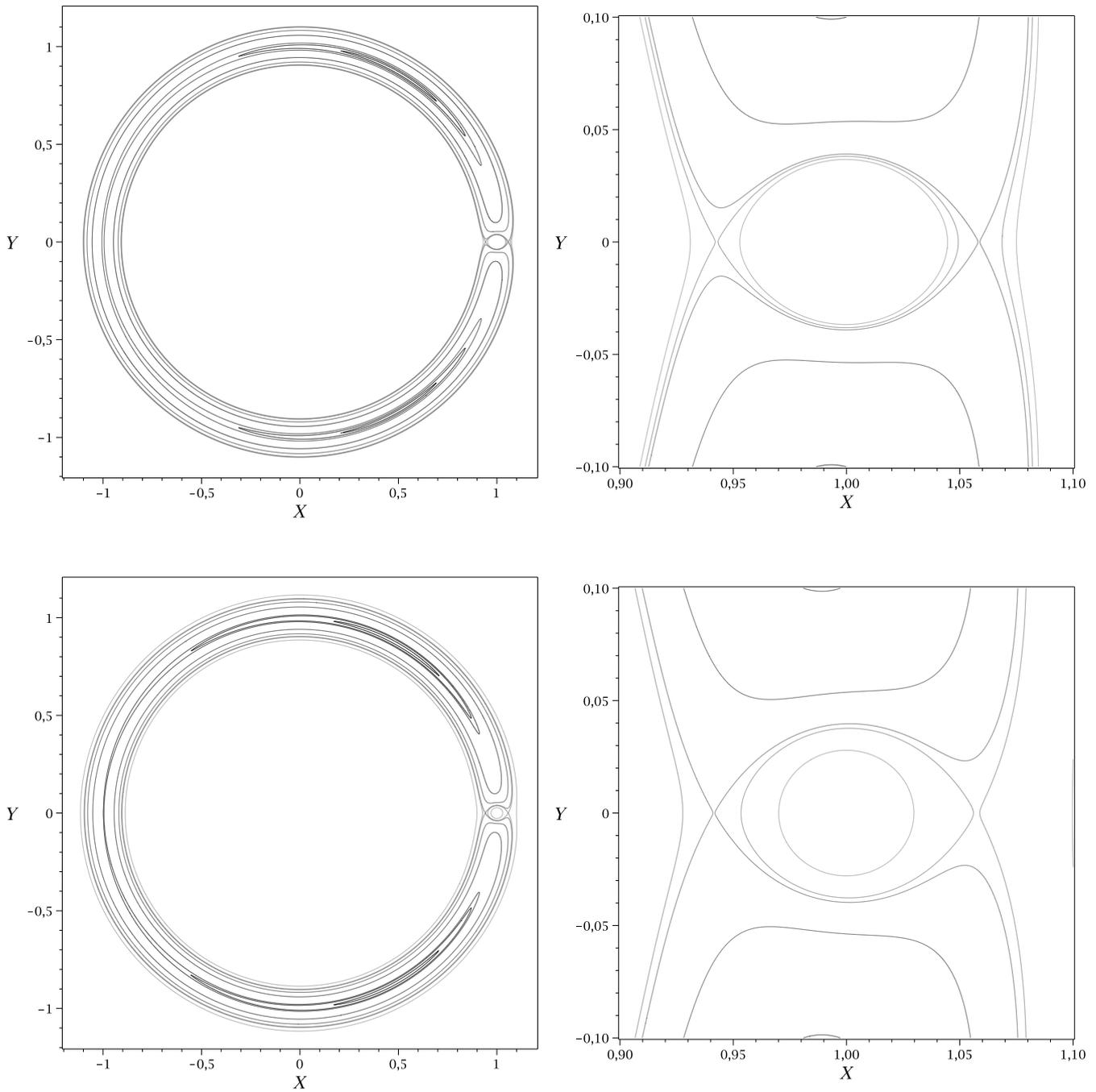


FIGURE IV.2 – Tracés d'équipotentiels (dans le plan de révolution  $(x, y)$  de la planète, supposée être HD 209458b) pour le potentiel d'où dérive la force IV.5 avec  $\beta = 0$  (CR3BP ; panneau du haut) et  $\beta = 0.01$  (panneau du bas). Les panneaux de gauche montrent le système étoile-planète entier, tandis que les panneaux de droite montrent un zoom dans l'environnement de la planète. Le gradient de gris est lié à l'énergie potentielle de chaque courbe : le noir indique une énergie élevée (une constante de Jacobi petite) comme c'est le cas autour des points  $L_4$  et  $L_5$ .

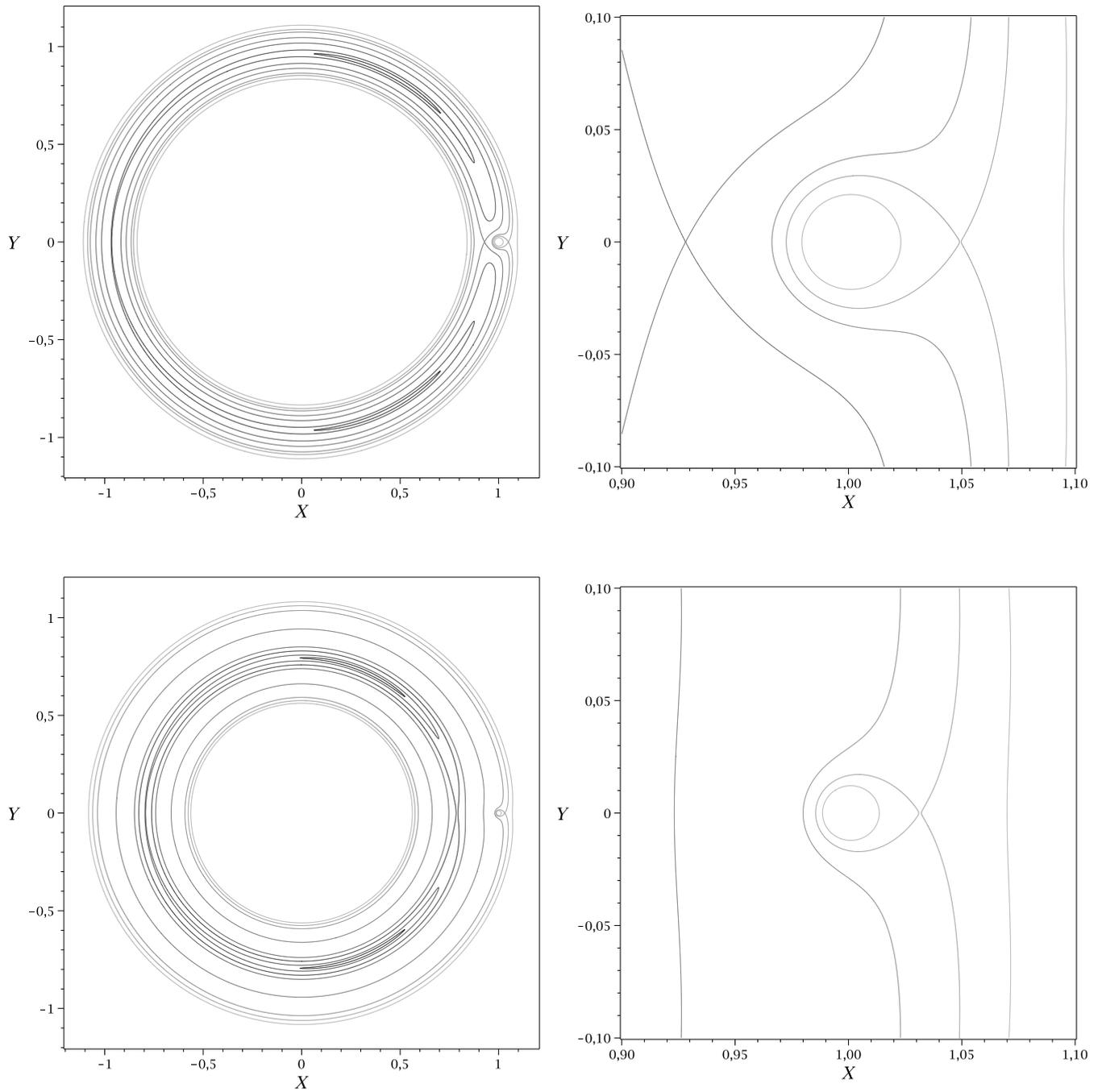


FIGURE IV.3 – Tracés d'équipotentiels (dans le plan de révolution  $(x, y)$  de la planète, supposée être HD 209458b) pour le potentiel d'où dérive la force IV.5 avec  $\beta = 0.1$  (CR3BP ; panneau du haut) et  $\beta = 0.5$  (panneau du bas). Les panneaux de gauche montrent le système étoile-planète entier, tandis que les panneaux de droite montrent un zoom dans l'environnement de la planète. Le gradient de gris est lié à l'énergie potentielle de chaque courbe : le noir indique une énergie élevée (une constante de Jacobi petite) comme c'est le cas autour des points  $L_4$  et  $L_5$ .

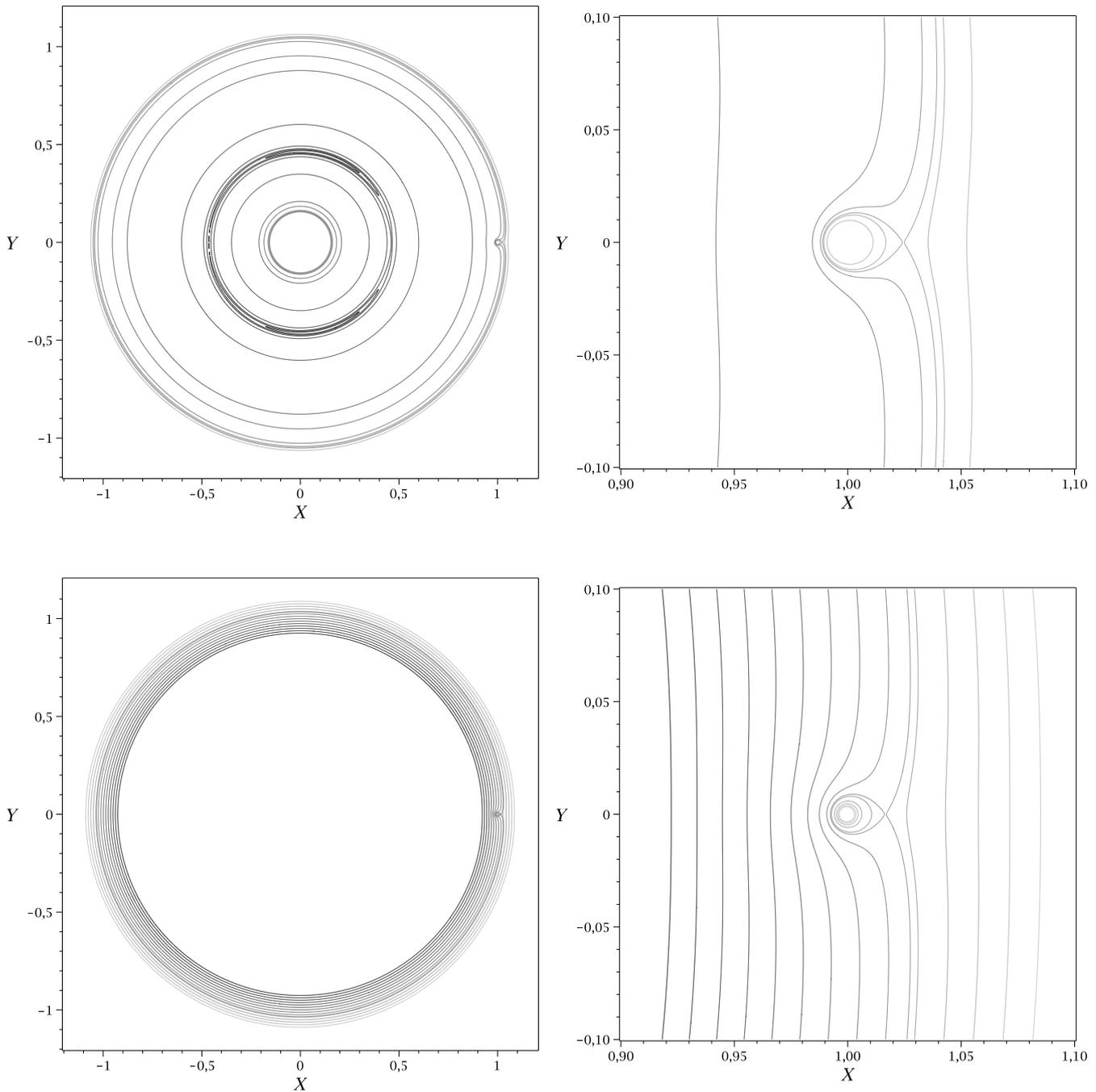


FIGURE IV.4 – Tracés d'équipotentielles (dans le plan de révolution  $(x, y)$  de la planète, supposée être HD 209458b) pour le potentiel d'où dérive la force IV.5 avec  $\beta = 0.9$  (CR3BP ; panneau du haut) et  $\beta = 2$  (panneau du bas). Les panneaux de gauche montrent le système étoile-planète entier, tandis que les panneaux de droite montrent un zoom dans l'environnement de la planète. Le gradient de gris est lié à l'énergie potentielle de chaque courbe : le noir indique une énergie élevée (une constante de Jacobi petite) comme c'est le cas autour des points  $L_4$  et  $L_5$ .

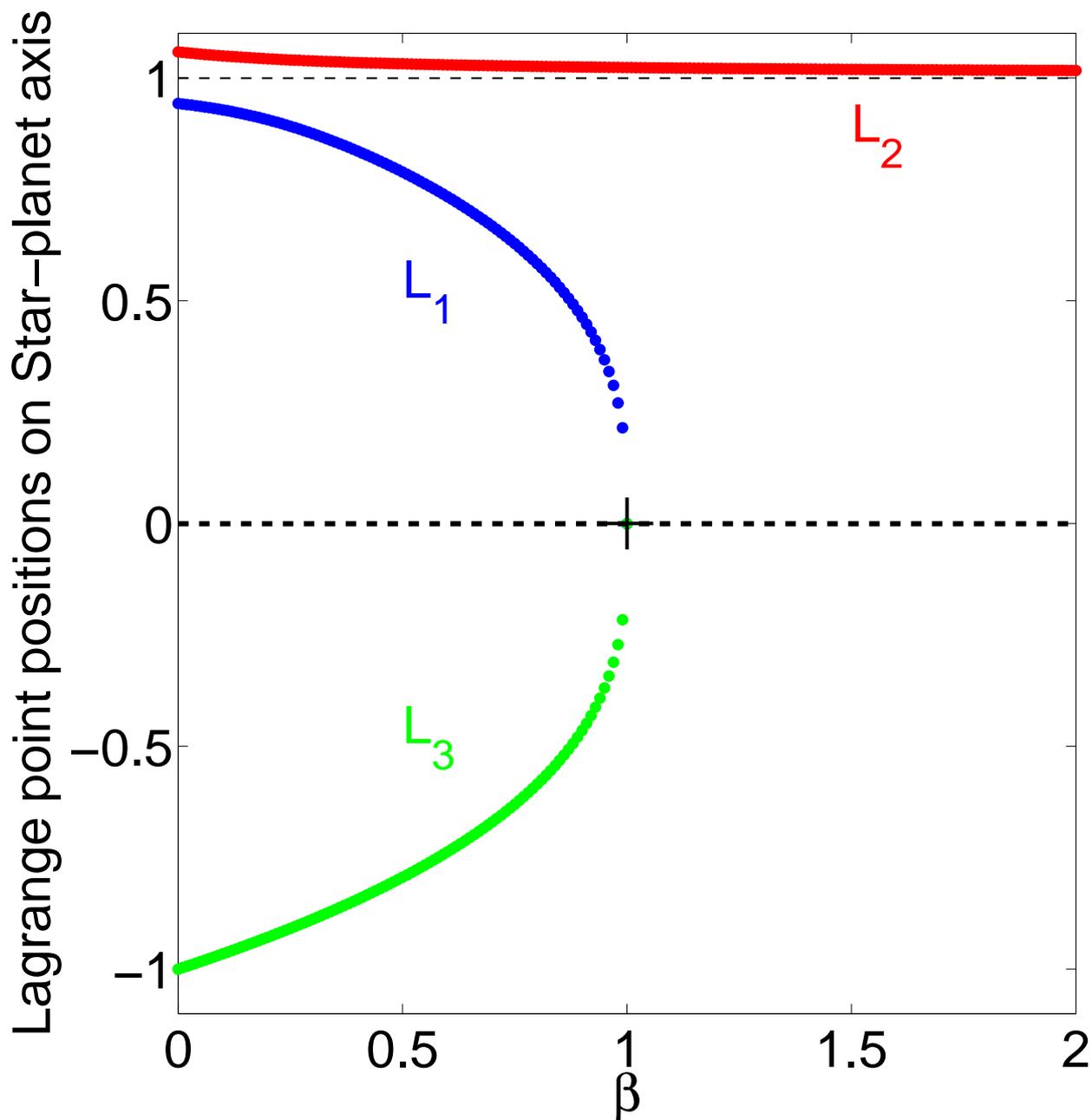


FIGURE IV.5 – Évolution de la position des points de Lagrange  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  placés sur l'axe planète-étoile en fonction de l'intensité relative  $\beta$  de la pression de radiation par rapport à la gravité stellaire. Les ordonnées sont positives côté planète. Nous avons représenté le cas de HD 209458b et de son étoile. Les positions de l'étoile et de la planète sont représentées en trait tireté épais pour l'étoile, fin pour la planète.

l'étoile : seul  $L_2$  subsiste près de la planète. Il devient alors notre fameux point placé à  $R_{pressure}$  côté nuit (cf. figure IV.5).

### B.3 L'effet d'une forte pression de radiation

Il existe donc un lien important entre pression de radiation stellaire et topologie des équipotentiels (cf. la figure IV.6 résumant cette influence). La pression de radiation repousse en particulier au loin la position du lobe de Roche, situé en  $L_1$ , et les points de Lagrange se déplacent.

En particulier, lorsque  $\beta$  devient supérieur à 1 (cf. fig. IV.4), comme c'est le cas pour HD 209458b (dont le  $\beta$  vaut environ 3-4, cf. Bourrier and Lecavelier des Etangs (2013)), la topologie des équipotentiels au voisinage de la planète devient identique à celle étudiée dans le chapitre III. Au voisinage de la planète, le champ de force est tel que l'on se ramène au cas où seules subsistent les effets de la pression de radiation et de la gravité planétaire (les effets du champ de pesanteur stellaire ne rentrent en compte qu'à grande distance). Cela est visible au travers de la forme des équipotentiels - cf. figure IV.6, où les courbes rouge et magenta se superposent très bien près de la planète - et au travers de la position du point  $L_2$ . Lorsque la pression de radiation devient suffisante ( $\beta > 1$ ), ce point se rapproche asymptotiquement (cf. fig. IV.6) de la fameuse distance  $R_{pressure}$  utilisée dans le chapitre précédent (définie comme la distance d'équilibre entre les accélérations induites par la pression de radiation et par la gravité planétaire). On retrouve donc la situation du chapitre précédent : la dernière équipotentielle fermée passe par  $R_{pressure}$  (et donc par  $L_2$ ), si bien que  $R_{pressure}$  correspond à nouveau à l'exopause, au-delà de laquelle les particules sont nécessairement en échappement.

### B.4 L'échappement atmosphérique de HD 209458b

Nous avons donc montré que la présence d'une pression de radiation importante ( $\beta > 1$ ) nous ramène à la topologie des équipotentiels du chapitre précédent. Cela nous permet donc d'appliquer notre modèle pour le calcul du flux d'échappement (partie II). Il nous faut tout d'abord connaître le régime d'échappement en vigueur (« blow-off » ou non), avant de pouvoir calculer ce flux.

#### B.4.a Un échappement de type « blow-off »

En supposant  $\beta$  constant, nous pouvons tenter d'estimer le paramètre  $\lambda_a/\lambda_c = r_{exo}/R_{pressure}$  pour déterminer la hauteur de l'exopause  $R_{pressure}$  par la pression de radiation. Près de la planète, l'accélération de la pression de radiation est donnée par :

$$\vec{a} = \frac{GM_S\beta}{d_{pl}^2} \vec{e}_{r_{pl}} \quad (\text{IV.6})$$

Pour rappel,

$$R_{pressure} = \sqrt{\frac{GM_{pl}}{a}} = \sqrt{\frac{M_{pl}}{M_S\beta}} d_{pl} \quad (\text{IV.7})$$

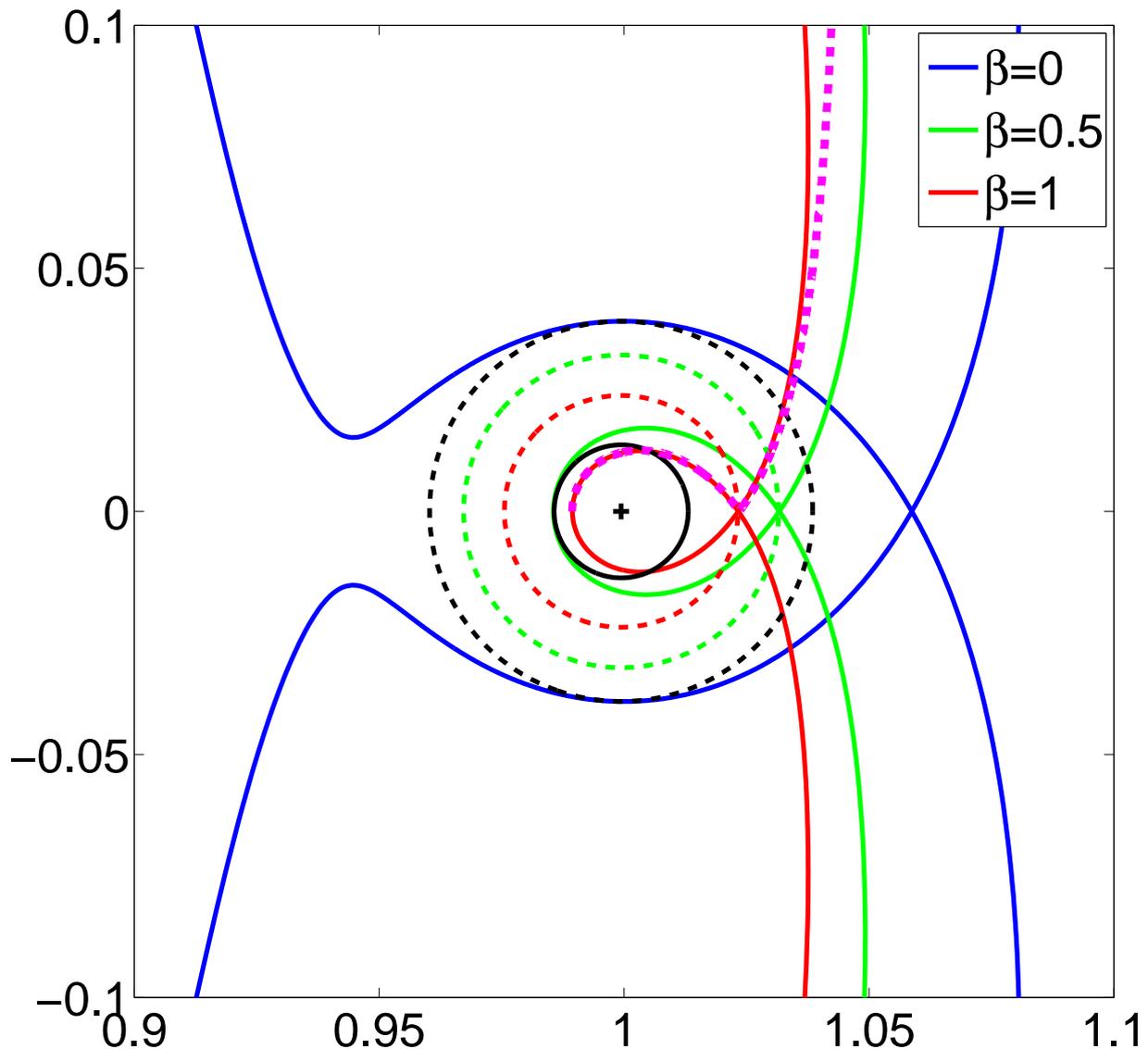


FIGURE IV.6 – Tracés des équipotentielles passant par le point de Lagrange  $L_2$  dans le plan orbital de la planète  $(x, y)$  dans le cadre du problème à trois corps avec prise en compte de la pression de radiation au voisinage de HD 209458b.  $\beta$  représente le rapport entre l'accélération due à la pression de radiation et la gravité stellaire. Nous avons superposé en magenta l'équipotentielle verte de la figure III.5, c.-à-d. pour une pression de radiation constante correspondant au cas  $\beta = 1$ . Pour la lisibilité, je n'ai représenté que la partie supérieure, l'autre pouvant être obtenue par symétrie. Le cercle tireté noir représente la limite supposée de l'exobase dans la limite où  $\beta = 0$ . Les cercles de couleur rouge et vert représentent l'exopause telle que nous l'avons définie dans le chapitre précédent : limite haute à partir de laquelle les particules sont en échappement. Ces cercles passent par le point col correspondant. Les distances sont en unité de distance étoile-planète.

d'où

$$\frac{r_{exo}}{R_{pressure}} = \frac{r_{exo}}{d_{pl}} \sqrt{\frac{M_S}{M_{pl}}} \sqrt{\beta} \quad (\text{IV.8})$$

Dans le cas des Jupiters chauds, nous obtenons :

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_c} = 1,55 \cdot 10^{-2} \frac{r_{exo}/R_J}{d_{pl}/1\text{U.A.}} \sqrt{\frac{M_S/M_\odot}{M_{pl}/M_J}} \sqrt{\beta} \quad (\text{IV.9})$$

pour des quantités planétaires exprimées en quantités joviennes, des quantités stellaires en quantités solaires et la distance planète-étoile en unité astronomique.

Sinon, pour des planètes similaires à la Terre :

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_c} = 2,46 \cdot 10^{-2} \frac{r_{exo}/R_E}{d_{pl}/1\text{U.A.}} \sqrt{\frac{M_S/M_\odot}{M_{pl}/M_E}} \sqrt{\beta} \quad (\text{IV.10})$$

Le résultat sur HD 209458b donne :

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_c} = 1,55 \cdot 10^{-2} \frac{1,32 \times 2,7}{0,045} \sqrt{\frac{1,13}{0,7}} \sqrt{\beta} = 1,56 \sqrt{\beta} \quad (\text{IV.11})$$

Pour des valeurs de  $\beta$  supérieures à 1 (ce qui est notre cas, cf. Bourrier and Lecavelier des Etangs (2013)), le ratio ( $\lambda_a/\lambda_c$  ou  $r_{exo}/R_{pressure}$ ) est au-dessus de 1 donc l'exobase est toujours au-delà de la limite définie par la pression de radiation. Nous sommes donc techniquement en condition de « blow-off » pour l'hydrogène à ces altitudes (cf. figure IV.6) avec un échappement de toutes les particules dès l'exobase (supposée être à 2,8 rayons planétaires d'après Lecavelier des Etangs et al. (2004)).

Notons par ailleurs que divers travaux prédisent déjà un régime de « blow-off » pour la planète HD 209458b. En revanche, ces travaux prédisent un régime de « blow-off géométrique » dû à la proximité du lobe de Roche, alors que notre étude montre que le blow-off est dû à l'effet de la pression de radiation, puisque le lobe de Roche est repoussé très loin par la pression de radiation.

#### B.4.b Calcul du flux d'échappement

Dans l'exosphère de HD 209458b, il n'y a donc que des particules en échappement puisque l'exopause (due à la pression de radiation) est en-dessous de l'exobase (le rapport  $\lambda_a/\lambda_c$  calculé précédemment est au-dessus de 1). Si l'on suppose que le régime de « blow-off » est atteint en tout point de l'exobase (puisque la dernière équipotentielle se referme sous l'exobase), il est possible de calculer la perte de masse d'hydrogène à partir du flux d'échappement en « blow-off »  $\mathcal{F}$  (donné par l'équation III.122) :

$$\dot{M} = 4\pi R_{exo}^2 \mathcal{F} m_H = n_{exo} R_{exo}^2 \sqrt{8\pi m_H k_B T_{exo}} \approx 5 \cdot 10^{10} \text{g.s}^{-1}$$

pour une température de 8000 K, une exobase à 2,8 rayons planétaires de distance au centre et une densité à l'exobase de l'ordre de  $10^{13} \text{m}^{-3}$  (Lecavelier des Etangs et al. (2004), Bourrier and Lecavelier

des Etangs (2013)).

La perte de masse prédite par les modèles existants est comprise entre  $10^9$  et  $10^{11}$  g.s<sup>-1</sup> (Koskinen et al. (2013)) et la perte de masse nécessaire à l'adéquation avec les observations est  $\geq 10^{10}$  g.s<sup>-1</sup> (Vidal-Madjar and Lecavelier des Etangs (2004)).

L'hypothèse de l'échappement atmosphérique en régime « blow-off » induit par la pression de radiation est donc tout à fait en accord avec les contraintes issues des observations, ainsi qu'avec les flux d'échappement des autres modèles, qui se fondent quant à eux en revanche sur un échappement dû à la proximité du lobe de Roche.

## B.5 Un autre scénario pour HD 209458b ?

Plusieurs études précédentes ont interprété les observations de HD 209458b de la manière suivante : l'atmosphère de la planète est composée essentiellement d'hydrogène, qui se trouve être en échappement continu de type « blow-off » géométrique en raison d'un lobe de Roche situé très bas, au niveau de l'exobase elle-même (à 2,8 rayons planétaires).

Pourtant, j'ai montré dans ce chapitre que si l'hydrogène est bien en échappement continu de type « blow-off » dès l'exobase, ce n'est pas en raison de la proximité du lobe de Roche mais plutôt en raison de la pression de radiation qui induit la présence d'une exopause située sous l'exobase (et qui repousse très loin le lobe de Roche). Il est également possible de proposer un autre scénario pour HD 209458b. En effet, comment se fait-il qu'une atmosphère d'hydrogène soit en « blow-off », tout en étant bien présente encore aujourd'hui (et collisionnelle) jusque 3 rayons planétaires ? Le flux d'échappement est certes trop faible pour amener à une perte significative de masse aujourd'hui (quelques % de la masse d'hydrogène seulement a été perdue dans son histoire, cf. l'ouvrage « Formation planétaire et exoplanètes » 2006), mais comment la planète a-t-elle pu accréter progressivement autant d'hydrogène sans que la pression de radiation (qui était probablement au moins aussi intense au début de la formation de la planète) n'ait soufflé cette atmosphère naissante ?

S'il s'avère qu'une telle atmosphère d'hydrogène n'a pu apparaître sans être soufflée (hypothèse à vérifier par des analyses ultérieures), quel scénario pourrait expliquer les observations actuelles ? Imaginons qu'il existe, en plus de l'hydrogène bien présent, un autre gaz, pas ou peu sensible à la pression de radiation, qui domine l'atmosphère de la planète. Ce gaz, de fait plus lourd que l'hydrogène, suffisamment dense, serait sensible uniquement au problème à trois corps (et peu ou pas à la pression de radiation) et retiendrait l'hydrogène par collisions (l'hydrogène qui aurait, seul, tendance à s'échapper à cause de la pression de radiation à laquelle il est sensible). L'hydrogène serait alors retenu par le gaz plus lourd jusqu'aux limites du lobe de Roche (situé à 2,8 rayons planétaires pour le gaz lourd en l'absence d'influence de la pression de radiation). Ce scénario permettrait d'expliquer comment une atmosphère dense d'hydrogène peut encore exister (et s'étendre jusque 3 rayons planétaires), bien qu'elle soit en échappement de type « blow-off » depuis sa formation. Pour accréditer ce scénario, il faudrait effectuer une simulation de l'atmosphère à l'aide d'un modèle de photochimie

avec une abondance en hélium plus importante et tenant compte de la pression de radiation en tant que force pour l'hydrogène. Une autre possibilité pourrait expliquer l'état actuel : la migration planétaire. HD 209458b s'est sans doute formé à plus grande distance, dans une région plus froide et avec une pression de radiation plus faible, permettant à l'atmosphère d'être dans un état plus stable avant de se retrouver très proche de son étoile.

Quelle espèce pourrait correspondre ? L'une des espèces s'y prêtant le mieux est l'hélium. Ce gaz est le second élément le plus abondant dans les nébuleuses proto-planétaires, et étant un gaz noble peu réactif, il est a priori peu sensible à la pression de radiation stellaire. Néanmoins, les observations n'ont pas permis d'obtenir de contrainte satisfaisante sur la quantité d'hélium présente dans l'atmosphère de HD209458b (Moutou et al. (2003)) bien qu'en théorie, la raie d'absorption de l'hélium à 1083 nm est l'une des plus intenses raies observables (Seager and Sasselov (2000)).

## C Conclusion

Ce chapitre a pour but d'étendre notre réflexion, d'étudier les possibilités d'appliquer notre modèle de pression de radiation à d'autres planètes, de type extra-solaires. En menant notre réflexion sur le cas de Jupiters chauds, et en particulier sur HD 209458b, j'ai mis en évidence une influence forte de la pression de radiation sur la dynamique même de l'exosphère.

À l'heure actuelle, les modèles de photochimie d'exoplanètes ne tiennent pas compte de la pression de radiation de l'étoile en tant que force externe en plus de gravité stellaire. Or, si l'hydrogène domine la thermosphère supposée optiquement mince, la dynamique des atomes d'hydrogène est en partie contrainte, influencée par la pression de radiation. Il faudrait donc étudier cet effet en tenant compte de cette force externe dans les équations du mouvement permettant la résolution des modèles de photochimie.

D'autre part, les modèles tenant compte de tous ces effets dans la modélisation de l'échappement (généralement des modèles Monte-Carlo pour l'exosphère) n'ont toujours pas identifié ni compris l'intime lien qui existe entre la pression de radiation et le problème à trois corps. Au travers de ce chapitre, j'ai pu montrer que la pression exercée par les photons solaires induit un changement très significatif de la topologie du champ de force dans lequel se trouve l'exosphère. Ainsi, la forme de l'exosphère n'est pas seulement influencée par le problème à trois corps (Lecavelier des Etangs et al. (2004)) mais aussi par la pression de radiation. La pression de radiation va repousser au loin le lobe de Roche, et créer une exopause due à cette pression.

De plus, pour des valeurs de  $\beta$  supérieures à 1 (pression de radiation plus forte que la gravité stellaire), nous retrouvons très vite et asymptotiquement la même topologie que dans le cas présenté dans le chapitre III. Il est alors possible, dans ce cas, d'utiliser le formalisme du chapitre III. Nous avons ainsi appliqué notre modèle de flux d'échappement à l'exoplanète HD 209458b, et montré que l'hydrogène était en échappement intense de type « blow-off », en raison d'une exopause située sous

l'exobase. Les études précédentes concernant cette exoplanète obtiennent un flux d'échappement similaire, mais en supposant que le « blow-off » est dû à un lobe de Roche très bas (alors qu'il est repoussé au loin par la pression de radiation). Par ailleurs, je me suis interrogé sur la possibilité réelle d'avoir une atmosphère d'hydrogène aussi étendue (jusque l'exobase située à 3 rayons planétaires) malgré un échappement de type « blow-off » depuis sa formation, et propose un autre scénario impliquant l'influence d'une seconde espèce plus lourde et peu sensible à la pression de radiation pour expliquer la situation observée.

Le cas de HD 209458b n'est sans doute pas le mieux adapté puisque l'atmosphère s'échappe entièrement au-delà de l'exobase, il ne nous est donc pas possible d'utiliser le formalisme pour le calcul des profils de balistiques par exemple. Cependant, à la vue du nombre considérable d'exoplanètes, le champ d'investigation est très grand, et nous devrions sans doute pouvoir trouver une planète soumise à une pression de radiation suffisamment grande, mais avec une exopause (définie par la pression de radiation) au-dessus de l'exobase, pour laquelle je pourrais appliquer mon modèle de densité.



# Chapitre V

## Conclusions et perspectives

Durant ce travail de thèse, nous avons exploré les exosphères planétaires au moyen d'une approche qui est originale de nos jours, c'est-à-dire une approche de modélisation analytique ou semi-analytique. Cela nous a permis d'étudier des problématiques variées et fondamentales des couronnes planétaires, et ce sur plusieurs corps du Système Solaire (Terre, Mars, Titan) ou encore les Jupiters chauds. Nous avons ainsi pu analyser l'importance des rares collisions dans l'exosphère, l'effet de la pression de radiation ou encore le problème à trois corps.

Dans la première partie de notre thèse, nous avons modélisé la composante dite satellite des exosphères planétaires, au travers d'une approche analytique basée sur la résolution de l'équation de Boltzmann. Cette population ne peut être produite qu'à partir de rares collisions près de l'exobase, et peut contribuer à plus haute altitude par simple transport gravitationnel, le long de trajectoires elliptiques. Cette population est le plus souvent négligée dans les modèles exosphériques, qui sont essentiellement non-collisionnels (tel que le modèle de Chamberlain). Notre modèle a montré que les populations satellites d'hydrogène étaient négligeables dans la géo-couronne. En revanche, la modélisation de ces populations dans les exosphères de Titan (pour l'espèce  $H_2$ ), et de Mars (espèce  $H$ ) en testant différentes conditions d'activité solaire et de densités à l'exobase, a révélé des contributions significatives. La densité de particules satellites peut ainsi atteindre plus de 30% voire 50% des contributions combinées des populations balistique et d'échappement (modélisées à partir du formalisme non collisionnel de Chamberlain). Cette étude montre donc l'importance des collisions dans la basse exosphère, qui peuvent contribuer à l'existence de populations satellites importantes dans la couronne étendue. Dans certains cas (notamment Mars et Titan), les modèles exosphériques non collisionnels (notamment du type Chamberlain) sous-estiment donc les densités de particules, en particulier pour les espèces légères.

Il nous est ensuite apparu nécessaire d'étudier l'influence de la pression de radiation solaire, qui constitue une force externe pouvant impacter les profils de densité à haute altitude (où la gravité planétaire devient faible), et que nous n'avions prise en compte que de manière très simplifiée dans ce premier modèle.

Dans la deuxième partie de notre thèse, nous avons poursuivi le travail originel entrepris par

Bishop and Chamberlain (1989) permettant de prendre en compte la pression de radiation stellaire dans une exosphère non collisionnelle. Cette démarche basée sur la mécanique hamiltonienne et le théorème de Liouville, leur a permis de modéliser la densité de particules balistiques le long de l'axe planète-Soleil (cas 1D). Nous avons généralisé cette approche à toute l'exosphère et l'avons donc étendue au cas 2D (en ne considérant que l'hydrogène atomique). Nous avons pu mettre en évidence plusieurs effets de la pression de radiation sur les profils de densité des populations balistiques, dont la contribution est le plus souvent majoritaire dans les exosphères. Premièrement, la pression de radiation va être à l'origine d'une limite supérieure pour l'exosphère : l'exopause. Au-delà de cette limite - qui apparaît naturellement dans notre modèle, et non artificiellement comme dans les autres modèles analytiques de la littérature - toute particule s'échappe vers l'infini contribuant ainsi à l'évaporation de l'atmosphère. Deuxièmement, à plusieurs rayons planétaires, la pression de radiation génère des asymétries jour/nuit/aube/crépuscule qui ont été observées sur Terre (phénomène de « geotail »), avec des densités plus importantes côté nuit que côté jour mais aussi des densités faibles dans les directions Nord/Sud/aube/crépuscule. Par ailleurs, la pression de radiation augmente significativement les densités des populations balistiques dans quasiment toutes les directions, amenant jusqu'à une augmentation d'un facteur 7 par rapport aux profils (sans pression de radiation) de Chamberlain dans le cas de Titan. Enfin, nous avons pu calculer analytiquement le flux d'échappement thermique en fonction de la pression de radiation au point subsolaire. L'écart au flux d'échappement de Jeans évolue de manière linéaire en fonction de la pression pour des conditions raisonnables. Dans notre Système Solaire actuellement soumis à de telles conditions raisonnables, la pression de radiation induit par exemple une augmentation du flux d'échappement d'hydrogène de l'ordre de 30-40% pour Mars et la Terre. Par contre, pour des valeurs intenses de la pression de radiation, l'exosphère atteint un régime critique de « blow-off » avec un flux d'échappement constant : l'atmosphère s'évapore de façon violente et rapide au niveau de l'exobase. Ce résultat est particulièrement important dans la modélisation de l'atmosphère primitive des planètes comme celle de Mars. En effet, les étoiles jeunes de type solaire produisent un flux ultraviolet beaucoup plus important et donc exercent une pression de radiation plus intense sur l'hydrogène, dont le réservoir atmosphérique évoluera alors très vite.

Dans la dernière partie de notre thèse, nous avons étendu cette étude de la pression de radiation à d'autres exosphères planétaires que celles de notre Système Solaire. Nous avons étudié en particulier les Jupiters chauds, planètes géantes orbitant extrêmement près de leur étoile, et dont l'atmosphère est fortement influencée par la gravité stellaire. Nous avons remarqué que les travaux existants ne tiennent pas compte l'influence de la pression de radiation sur le problème à trois corps de ces environnements. Notre étude montre que la pression de radiation change considérablement la topologie des équipotentielles du problème à trois corps, en repoussant largement la position du lobe de Roche. Il s'est ensuite avéré dans le cas de HD 209458b (cas très étudié dans la littérature) que la pression de radiation était si importante que la topologie des équipotentielles à proximité de la planète était identique à celle obtenue en l'absence d'un troisième corps (c'est-à-dire le cas développé dans le chapitre III). Cela nous a permis d'en déduire le flux d'échappement induit par la pression de radiation, et de proposer un scénario alternatif pour l'évolution de l'atmosphère de ce Jupiter chaud.

Les perspectives à la suite de ce travail de thèse sont bien sûr nombreuses, qui permettraient une meilleure prise en compte des mécanismes en jeu dans les exosphères planétaires.

Tout d'abord, en ce qui concerne la première partie de notre thèse traitant des populations satellites, il serait nécessaire d'étendre ce formalisme au cas 3D. En effet, l'exosphère est en interaction avec de nombreux environnements (vent solaire, plasmasphère, magnétogaine, cornées polaires, etc...) ne présentant pas du tout la symétrie sphérique supposée ici. Il faudrait évaluer la contribution de chacun de ces environnements dans les mécanismes de production et de perte des particules satellites, ce qui nécessite une approche 3D complète. Par ailleurs, un modèle de type Monte-Carlo prenant en compte l'ensemble des collisions dans la couronne étendue permettrait d'obtenir des profils de densité réalistes, en prenant en compte les transferts entre populations (satellites, balistiques et en échappement).

Ensuite, comme expliqué dans le chapitre III, nous n'avons pas pu finaliser le calcul des densités de particules en échappement sous l'influence de la pression de radiation. Cette composante est essentielle à la modélisation complète de l'exosphère car celle-ci domine à grandes distances à l'approche de l'exopause. La modélisation de cette composante, combinée aux profils balistiques déjà calculés, permettrait d'obtenir un modèle complet des densités exosphériques, et permettrait également d'obtenir un meilleur accord entre nos profils modélisés et les observations terrestres à haute altitude, en particulier côté nuit. Dans le même ordre d'idées, il faudrait modéliser aussi le flux d'échappement à l'exobase en tout point de l'exosphère (et pas seulement au point subsolaire) et pour d'autres espèces que l'hydrogène pour quantifier plus précisément l'évaporation globale de l'atmosphère. Il serait également très intéressant d'utiliser notre formalisme pour étudier l'influence de la pression de radiation sur l'échappement des planètes du Système Solaire de manière cumulée depuis leur période de formation.

Enfin, il serait nécessaire d'approfondir, au moyen d'une Monte-Carlo par exemple, l'étude du problème à trois corps perturbé par la pression de radiation. Dans le chapitre III, nous avons montré que même une pression de radiation faible peut générer de fortes variations dans la répartition de l'hydrogène, et de manière générale des espèces sensibles à la pression de radiation. Dans le chapitre IV, nous avons ensuite mis en évidence l'effet très significatif de la pression de radiation sur le problème à trois corps, avec une transformation des équipotentielles d'énergie. Il est donc naturel de s'intéresser à l'impact de la pression de radiation sur les profils de densité exosphériques en présence d'un troisième corps massif qui vient perturber le système. Cela est particulièrement important pour les Jupiters chauds ou bien les satellites naturels en rotation autour de planètes massives comme Titan autour de Saturne.



# Annexe A

## L'équation de Boltzmann

L'équation de Boltzmann (1872) est une des bases de la théorie cinétique des gaz. Elle consiste à déterminer l'évolution macroscopique d'un ensemble de particules en fonction du comportement de chaque constituant microscopique avec une approche statistique. Cette équation se prête particulièrement bien aux gaz dilués, proches d'un gaz parfait <sup>1</sup>, où les interactions sont peu intenses.

Cette équation décrit l'évolution de la fonction de distribution de ce gaz. La fonction de distribution d'un gaz représente le nombre de particules  $dN$  présent dans un volume infinitésimal de l'espace des phases  $dV$  à un instant donné  $t$ . Ce volume est à six dimensions. Dans la théorie cinétique des gaz, la position d'une particule et son évolution sont complètement découplées de sa vitesse. Il n'y a pas, en théorie cinétique des gaz, de corrélation entre  $\vec{r}$  et  $\vec{v}$ . Ces deux quantités sont prises comme deux variables indépendantes du système. La relation entre  $dN$ ,  $f$  et  $dV$  pour une position  $\vec{r}_0$  et  $\vec{v}_0$  donnée, est :

$$dN(\vec{r}_0, \vec{v}_0, t) = f(\vec{r}_0, \vec{v}_0, t) dV = f(\vec{r}_0, \vec{v}_0, t) d^3\vec{r} d^3\vec{v} \quad (\text{A.1})$$

$f$  dépend de trois paramètres, nous écrivons alors sa différentielle  $df$  :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} d\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} d\vec{v} + \frac{\partial f}{\partial t} dt \quad (\text{A.2})$$

avec  $\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \vec{\nabla}_{\vec{r}} f$  et  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \vec{\nabla}_{\vec{v}} f$ , l'indice sous le signe  $\vec{\nabla}$  indique la variable par rapport à laquelle le gradient est appliquée. Or,  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$  et  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{a}$ , l'accélération donnée par la relation fondamentale de la dynamique en fonction des forces externes. L'équation (A.2) devient :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} f + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} f \quad (\text{A.3})$$

L'équation montre le rapport entre l'approche lagrangienne à gauche - nous suivons la particule au cours du temps - et l'approche eulérienne à droite - nous restons en un point fixe de l'espace des phases -. L'évolution en fonction du temps de la fonction de distribution le long d'une trajectoire dépend :

---

<sup>1</sup>Gaz parfait : gaz au sein duquel il n'y a aucune interaction entre ses constituants si ce n'est les collisions entre eux et dont la distance entre constituants (assimilable au libre parcours moyen) est grande devant leurs tailles

- de la variation temporelle  $\frac{\partial f}{\partial t}$  de cette fonction pour une position  $\vec{r}_0$  et  $\vec{v}_0$  fixée
- du flux de particules dans l'espace des positions  $\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} f$  dans le volume  $d^3\vec{r}$  autour de  $\vec{r}_0$
- du flux de particules dans l'espace des vitesses  $\frac{\vec{F}(\vec{r}_0)}{m} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} f$  dans le volume  $d^3\vec{v}$  autour de  $\vec{v}_0$

Et nous obtenons alors l'équation de Boltzmann :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} f + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} f = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{collisions}} \quad (\text{A.4})$$

où  $\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{collisions}}$  est un terme appelé intégrale de collisions. Il est souvent mis sous la forme  $P^+ + P^-$ , l'équilibre entre le terme de production  $P^+(\vec{r}, \vec{v}, t)$  et le terme de perte  $P^-(\vec{r}, \vec{v}, t)$ . Il représente les échanges de particules entre des zones de l'espace des phases grâce aux collisions. Par exemple, une particule à la vitesse  $\vec{v}$  subit une collision à la position  $\vec{r}$ . Son vecteur vitesse devient  $\vec{v}'$ . Cette collision contribuera à  $P^+(\vec{r}, \vec{v}', t)$  mais aussi à  $P^-(\vec{r}, \vec{v}, t)$ . Cette intégrale de collisions prend en compte aussi la probabilité de passer de la vitesse  $\vec{v}$  à  $\vec{v}'$  lors d'une collision.

L'expression du terme de gauche se fait sans aucune hypothèse ou approximation. Pour l'estimation du terme de collisions, il n'en sera pas de même.

Le but n'est pas de redémontrer toute la théorie. Par contre, il est important de rappeler les hypothèses pour évaluer cette intégrale de collisions.

Première hypothèse : seules les collisions binaires sont prises en compte : pour des nombres de Knudsen grands, le temps durant lequel la molécule est impliquée dans une collision est très petit devant son temps de vol entre deux collisions. Il est alors d'autant moins probable d'avoir des collisions à trois corps.

Seconde hypothèse : une collision n'a lieu que si deux molécules se trouvent exactement à la même position, la portée des forces intermoléculaires est négligée.

Troisième hypothèse dite du chaos moléculaire, formulée par Boltzmann en 1872 : il n'existe pas de corrélation entre deux molécules qui entrent en collisions. Les deux molécules ont effectué des distances grandes devant la portée des forces intermoléculaires.

L'intégrale de collisions s'écrit alors :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{collisions}} = \int \int |\vec{v} - \vec{v}_1| \sigma(|\vec{v} - \vec{v}_1|/2, \theta) (f(\vec{r}, \vec{v}', t) f(\vec{r}, \vec{v}'_1, t) - f(\vec{r}, \vec{v}, t) f(\vec{r}, \vec{v}_1, t)) d^3 \vec{v}_1 d\Omega \quad (\text{A.5})$$

où

$$\begin{aligned} \vec{v}' &= \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{v}_1) + \vec{v}_r \\ \vec{v}'_1 &= \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{v}_1) - \vec{v}_r \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} |\vec{v}_r| &= \frac{1}{2}|\vec{v} - \vec{v}_1| \\ (\widehat{\vec{v} - \vec{v}_1}, \vec{v}_r) &= \theta \end{aligned}$$

L'apostrophe sur une quantité signifie qu'il s'agit de sa valeur après collision. Nous remarquons qu'il s'agit d'une équation très générale impossible à résoudre sans hypothèses supplémentaires.

À partir de l'équation de Boltzmann, il est très facile de retrouver le théorème de Liouville. Supposons l'absence de collisions, l'équation de Boltzmann est réduite à :

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad (\text{A.6})$$

En description lagrangienne, le  $d$  droit correspond au suivi d'une ou d'un ensemble de particules sur une trajectoire imposée par les forces externes. D'après l'équation (A.6), le long d'une trajectoire dynamique, la fonction de distribution ne varie pas au cours du temps. Il s'agit de la démonstration du théorème de Liouville dans le cadre de la physique statistique.



# Annexe B

## Le formalisme de Chamberlain

Chamberlain (1963) fut le premier à proposer une approche complète et rigoureuse pour estimer les densités de neutres exosphériques. Pour ce faire, il utilise l'équation de Liouville (B.1) dans sa forme hamiltonienne :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial}{\partial q_i} (f \dot{q}_i) + \frac{\partial}{\partial p_i} (f \dot{p}_i) \right) = 0 \quad (\text{B.1})$$

où  $f(q_i, p_i, t)$  représente la densité de particules dans l'espace des phases.

En nous plaçant dans le formalisme hamiltonien, nous avons les relations :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad (\text{B.2})$$

où  $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$  est l'hamiltonien du système, son énergie totale dans le cas où il est indépendant du temps. De l'égalité (B.2), il vient tout naturellement la relation :

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} = -\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \quad (\text{B.3})$$

En la réinjectant dans l'équation B.1, il advient :

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0 \quad (\text{B.4})$$

L'élément de gauche représente la conservation de la fonction de distribution au cours du temps pour un ensemble de particules suivant les équations du mouvement. Nous devons remarquer au passage que si la fonction de distribution dépend uniquement de l'énergie du système  $f \equiv f(\mathcal{H})$  dans le cadre d'un système conservatif alors elle vérifie l'équation (B.4).

Pour le cas gravitationnel, le problème est plan, à deux dimensions ( $i = 1, 2$ ). À partir du Lagrangien, nous avons :

$$\begin{aligned} q_1 &= r \\ q_2 &= \theta \\ p_r &= m \frac{dr}{dt} \\ p_\theta &= mr^2 \frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Pour un état stationnaire ( $\partial f/\partial t = 0$ ) et un problème à symétrie sphérique, l'équation B.4 se résume à :

$$\frac{\partial f}{\partial r} \frac{dr}{dt} = - \frac{\partial f}{\partial p_r} \frac{dp_r}{dt} \quad (\text{B.6})$$

Dans le cas d'une particule soumise uniquement au champ de pesanteur de la planète, son hamiltonien  $\mathcal{H}$  s'écrit :

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \quad (\text{B.7})$$

où  $M$  est la masse de la planète,  $m$  la masse de notre particule en mouvement,  $G$  la constante gravitationnelle et  $p_\theta$  la composante angulaire du moment cinétique. Notre hamiltonien doit évidemment vérifier le système donné par l'égalité (B.2) :

$$\frac{dp_r}{dt} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{GMm}{r^2} \quad \frac{dp_\theta}{dt} = 0 \quad (\text{B.8})$$

Plaçons nous à l'exobase : une distance  $r_c$  du centre de la planète, une température  $T_c$  constante, et une densité de particules  $N_c$ . En supposant la fonction de distribution maxwellienne,

$$f(r_c, p_r, p_\theta) = \frac{N_c e^{-\frac{p_r^2}{2mk_B T_c}} e^{-\frac{p_\theta^2}{2mk_B T_c r_c^2}}}{(2\pi mk_B T_c)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{B.9})$$

il advient

$$\frac{\partial f}{\partial p_r} = - \frac{p_r}{mk_B T_c} f \quad (\text{B.10})$$

En réinjectant dans l'équation (B.6),

$$\frac{d \ln f}{dr} = - \left( \frac{GMm}{k_B T_c r^2} - \frac{p_\theta^2}{2mk_B T_c r^3} \right) \quad (\text{B.11})$$

$$\ln(f(r, p_r, p_\theta)) - \ln(f(r_c, p_r, p_\theta)) = \frac{GMm}{k_B T_c r} - \frac{p_\theta^2}{2mk_B T_c r^2} - \frac{GMm}{k_B T_c r_c} + \frac{p_\theta^2}{2mk_B T_c r_c^2}$$

En posant

$$\lambda(r) = \frac{GMm}{k_B T_c r} = \frac{v_{esc}^2(r)}{U^2} \quad (\text{B.12})$$

où  $U$  est la vitesse thermique de notre particule et  $v_{esc}(r)$  la vitesse d'échappement à la distance  $r$ . Ce paramètre  $\lambda$  est plus connu sous le nom de paramètre de Jeans. Nous obtenons la fonction de distribution  $\forall r$  :

$$f(r, p_r, p_\theta) = N_c e^{\lambda(r) - \lambda(r_c)} \frac{e^{-\frac{p_r^2}{2mk_B T_c}} e^{-\frac{p_\theta^2}{2mk_B T_c r^2}}}{(2\pi mk_B T_c)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{B.13})$$

Nous remarquerons que la fonction de distribution résulte du produit entre une loi barométrique et une distribution des vitesses maxwellienne.

En intégrant sur l'ensemble de tous les moments, nous obtenons la densité de particules à la

distance  $r$ .

$$n(r) = \int f(q_i, p_i) d^3p_i = N_c e^{\lambda(r) - \lambda(r_c)} \quad (\text{B.14})$$

Il s'agit tout simplement de l'évolution de la densité à température constante, dans le cadre de l'équilibre hydrostatique. Bien sûr, cette équation n'est pas valable à grande distance ( $r \rightarrow +\infty, \lambda \rightarrow 0$ ), la densité tendant vers une constante non nulle afin de maintenir une température constante à l'infini.

Comme l'accélération due à la pesanteur est indépendante de la masse du corps à laquelle elle s'applique, les atomes, les molécules décrivent les mêmes trajectoires autour d'une planète que les comètes autour du Soleil.

L'ensemble des trajectoires peut d'abord être décomposé en trois catégories, en négligeant au passage la pression de radiation solaire :

- les trajectoires elliptiques : la trajectoire décrite est une ellipse dont la planète ou le satellite est l'un des foyers (cf. première loi de Képler). Dans ce cas, l'énergie mécanique du corps en révolution est strictement négative.
- les trajectoires hyperboliques : la trajectoire est une branche d'hyperboles. L'énergie mécanique est strictement positive.
- les trajectoires paraboliques : cas limite des deux précédents où l'énergie mécanique est nulle (cas improbable de par sa singularité).

En supposant qu'au-dessus de l'exobase, les particules ne sont soumises qu'au champ de pesanteur et qu'en-dessous, celles-ci sont « perdues » par collisions, nous pouvons définir des catégories de particules.

D'une part, les trajectoires elliptiques engendrent deux types de particules :

- les particules dites balistiques : elles décrivent des ellipses, leur périapse se situe sous l'exobase, leur trajectoire ne décrit alors qu'un morceau d'ellipse,
- les particules dites satellites : elles décrivent aussi des ellipses mais leur périapse se situe sous l'exobase et leur trajectoire décrit entièrement une ellipse.

D'autre part, les trajectoires hyperboliques engendrent trois types de particules :

- les particules dites d'échappement : elles partent de l'exobase et possèdent une vitesse supérieure à la vitesse d'échappement, elles sont à l'origine de l'échappement de Jeans,
- les particules hyperboliques venant de l'infini et ne croisant pas l'exobase,
- les particules hyperboliques venant de l'infini et croisant l'exobase.

Les deux derniers types de particules sus-cités sont négligés : on suppose qu'il n'y a pas d'apport extérieur en particules.

Chaque population voit sa densité s'écrire :

$$n_i(r) = N_c e^{\lambda - \lambda_c} \zeta_i(\lambda) \quad (\text{B.15})$$

$\zeta_i$  est la fonction de partition des particules de catégorie  $i$  et s'écrit :

$$\zeta_i(\lambda) = \frac{2\pi}{r^2 (2\pi m k_B T_c)^{\frac{3}{2}}} \iint e^{-\frac{p_r^2}{2m k_B T_c}} e^{-\frac{p_\theta^2}{2m k_B T_c r^2}} p_\theta dp_\theta dp_r \quad (\text{B.16})$$

dont les bornes d'intégration vont dépendre du type de population  $i$ .

En posant

$$\nu(r) = \frac{p_\theta^2}{2m k_B T_c r^2} = \frac{v_\theta^2}{U^2} \quad \xi(r) = \frac{p_r}{(2m k_B T_c)^{\frac{1}{2}}} = \frac{v_r}{U} \quad (\text{B.17})$$

La formule (B.16) se réécrit :

$$\zeta_i(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \iint e^{-\xi^2 - \nu} d\nu d\xi \quad (\text{B.18})$$

Par la même occasion, nous définissons deux autres quantités :

$$\psi(r) = \frac{mv^2}{2k_B T_c} = \xi^2(r) + \nu(r) \quad h = \frac{\mathcal{H}}{k_B T_c} = \psi(r) - \lambda(r) \quad (\text{B.19})$$

## Les particules balistiques

Leur énergie totale doit être négative et elles doivent intersecter l'exobase. Rappelons que les trois composantes du moment cinétique sont des constantes du mouvement.

$$\nu(r) = h + \lambda - \xi^2 = \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} \nu(r_c) = \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} (h + \lambda_c - \xi_c^2) \quad (\text{B.20})$$

En substituant  $h$ ,

$$\nu = \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2 - \lambda^2} (\lambda_c - \lambda + \xi^2 - \xi_c^2) \quad (\text{B.21})$$

Pour intersecter l'exobase, il faut nécessairement que  $\xi_c^2$  existe et soit réel, d'où

$$\nu \leq \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2 - \lambda^2} (\lambda_c - \lambda + \xi^2 - \xi_c^2) \equiv \nu_1(\xi) \quad (\text{B.22})$$

L'énergie totale négative impose une autre condition :

$$\nu < \lambda - \xi^2 \equiv \nu_2(\xi) \quad (\text{B.23})$$

Pour un  $\xi$  donné,  $\nu_1$  est plus grand que  $\nu_2$  ou l'inverse. Nous décidons de fixer  $\nu_1 < \nu_2$  ce qui implique

$$\xi^2 < \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_c}\right) \equiv \xi_1^2 \quad (\text{B.24})$$

Pour les particules balistiques, il vient

$$\begin{aligned} \zeta_{bal}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\xi_1}^{\xi_1} \int_0^{\nu_1(\xi)} e^{-\xi^2 - \nu} d\nu d\xi + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi_1}^{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\nu_2(\xi)} e^{-\xi^2 - \nu} d\nu d\xi + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{-\xi_1} \int_0^{\nu_2(\xi)} e^{-\xi^2 - \nu} d\nu d\xi \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \gamma\left(\frac{3}{2}, \lambda\right) - \frac{\sqrt{\lambda_c^2 - \lambda^2}}{\lambda_c} e^{-\psi_1} \gamma\left(\frac{3}{2}, \lambda - \psi_1\right) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

avec

$$\psi_1 = \frac{\lambda^2}{\lambda + \lambda_c} \quad (\text{B.26})$$

et  $\gamma$  la fonction  $\Gamma$  incomplète

$$\gamma(\alpha, x) \equiv \int_0^x y^{\alpha-1} e^{-y} dy \quad (\text{B.27})$$

## Les particules satellites

Par définition, ces particules gravitent autour de la planète sans jamais croiser l'exobase. De la même manière que pour les particules balistiques, Chamberlain estima leur densité en basant toujours son calcul sur le théorème de Liouville et la propagation d'une distribution maxwellienne de l'exobase à la distance radiale  $r$  dans l'exosphère. Mais la caractéristique même des satellites de ne jamais croiser l'exobase est en désaccord avec la propagation de la fonction de distribution depuis l'exobase. Le calcul ci-dessous n'est donc qu'une approximation car il n'est pas rigoureux vis-à-vis des hypothèses.

Pour cette population, déterminons d'abord la densité de particules avec  $h < 0$

$$\begin{aligned} \xi_{h<0}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\lambda - \xi^2} e^{-\xi^2 - \nu} d\nu d\xi \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \lambda\right) \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Or, par définition

$$\eta_{h<0} \equiv \xi_{sat} + \xi_{bal} \quad (\text{B.29})$$

d'où

$$\zeta_{sat}(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\lambda_c^2 - \lambda^2}}{\lambda_c} e^{-\psi_1} \gamma\left(\frac{3}{2}, \lambda - \psi_1\right) \quad (\text{B.30})$$

## Les particules s'échappant de l'exobase

Tout d'abord, ces particules ont forcément  $h > 0$  ce qui implique que  $\nu > \nu_2$ . Comme elles intersectent l'exobase et qu'elles s'en échappent,  $\xi_c$  doit non seulement être réel mais positif aussi pour ne pas prendre en compte les particules qui sont attirées par le champ gravitationnel. Nous avons donc encore  $\nu < \nu_1$ . Du coup, comme  $\nu_1 > \nu_2$ , cela impose  $\xi > \xi_1$ . De plus,  $\nu$  est une grandeur positive donc pour conserver  $\nu_2$  positif, il faut  $\xi < \sqrt{\lambda}$ , mais dans le cas où  $\nu_2 = 0$ , il faut  $\xi > \sqrt{\lambda}$ . Cela se traduit par :

$$\begin{aligned} \zeta_{esc}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi_1}^{\sqrt{\lambda}} \int_{\nu_2}^{\nu_1} e^{-\xi^2 - \nu} d\nu d\xi + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\lambda}}^{+\infty} \int_0^{\nu_1} e^{-\xi^2 - \nu} d\nu d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \gamma\left(\frac{3}{2}, \lambda\right) - \frac{\sqrt{\lambda_c^2 - \lambda^2}}{\lambda_c} e^{-\psi_1} \left[ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \gamma\left(\frac{3}{2}, \lambda - \psi_1\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

# Annexe C

## Rappels de mécanique céleste et lois de Kepler

Pour étudier les particules satellites, leurs caractéristiques, évaluer correctement les bornes d'intégration de la fonction de distribution ou encore établir des changements de coordonnées corrects, il est nécessaire d'être familier avec l'ensemble des propriétés et grandeurs en rapport avec les coniques et en particulier les ellipses.

### Trajectoire d'une particule massive soumise à un champ de pesanteur

Pour une particule de masse  $m$  soumise au champ de pesanteur d'une planète de masse  $M \gg m$ , la relation fondamentale de la dynamique donne :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r \quad (\text{C.1})$$

où  $\vec{e}_r$  est un vecteur normalisé dirigé du corps de masse  $M$  vers le corps de masse  $m$ .

Soit  $\vec{L} = m\vec{r} \wedge \vec{v} = mr^2\dot{\Omega}$  le moment cinétique de la particule de masse  $m$  avec  $r$  et  $\Omega$  les coordonnées polaires de la particule. Si nous effectuons le produit vectoriel entre  $\vec{r}$  et l'équation (C.1), nous avons :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad (\text{C.2})$$

Les trois composantes du moment cinétique sont donc des constantes du mouvement. Nous pouvons alors utiliser les formules de Binet :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{L^2 u^2}{m} \left[ \frac{d^2 u}{d\Omega^2} + u \right] \vec{e}_r = -GMm u^2 \vec{e}_r \quad (\text{C.3})$$

avec  $u = 1/r$

L'équation différentielle est réduite à :

$$\frac{d^2 u}{d\Omega^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2} \quad (\text{C.4})$$

La solution est de la forme  $u = A \cos(\Omega - \Omega_0) + GMm^2/L^2$  d'où :

$$r(\Omega) = \frac{1}{A \cos(\Omega - \Omega_0) + \frac{GMm^2}{L^2}} \quad (\text{C.5})$$

Par convention,  $\Omega_0$  correspond généralement à la position du périapse avec  $A$  positif (si  $A$  est négatif,  $\Omega_0$  correspondrait à l'apoapse) et  $\Omega - \Omega_0 = \Omega'$  à l'anomalie vraie. Nous réécrivons de manière plus commode :

$$r(\Omega') = \frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{\frac{AL^2}{GMm^2} \cos(\Omega') + 1} = \frac{p}{e \cos(\Omega') + 1} \quad (\text{C.6})$$

Il s'agit de l'équation d'une conique en coordonnées polaires.  $p$  est le paramètre de l'ellipse et  $e$  son excentricité. Supposons que nous avons comme conditions initiales sa position  $\vec{r}$  et sa vitesse  $\vec{v}$  alors :

$$\begin{aligned} \theta &= \widehat{(\vec{r}, \vec{v})} \\ p &= \frac{r^2 v^2 \sin^2 \theta}{GM} \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Il reste à calculer  $e$ . Exprimons d'abord  $\vec{v}$  en fonction de  $r(\Omega)$ .

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\Omega}{dt} \vec{e}_\Omega = \dot{\Omega} \frac{dr}{d\Omega} \vec{e}_r + r \dot{\Omega} \vec{e}_\Omega \\ &= e p \dot{\Omega} \frac{\sin \Omega'}{(e \cos \Omega' + 1)^2} \vec{e}_r + p \dot{\Omega} \frac{1}{e \cos \Omega' + 1} \vec{e}_\Omega \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

d'où

$$v^2 = p^2 \dot{\Omega}^2 \frac{e^2 \sin^2 \Omega' + (e \cos \Omega' + 1)^2}{(e \cos \Omega' + 1)^4} = p^2 \dot{\Omega}^2 \frac{1 + e^2 + 2e \cos \Omega'}{(e \cos \Omega' + 1)^4} \quad (\text{C.9})$$

Mais  $\dot{\Omega}^2 = L^2/m^2 r^4$  et  $L^2/m^2 = GMp$

$$v^2 = \frac{p^2 L^2}{m^2 p^4} (1 + e^2 + 2e \cos \Omega') = \frac{GM}{p} (1 + e^2 + 2e \cos \Omega') = \frac{2GM}{r} - \frac{GM}{p} (1 - e^2) \quad (\text{C.10})$$

Nous introduisons le demi-grand axe  $a$ , la mi-distance entre le périapse et l'apoapse :

$$a = \frac{1}{2} \left( \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \right) = \frac{p}{1-e^2} \quad (\text{C.11})$$

Nous pouvons remplacer dans l'équation (C.10) :

$$v^2 = GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (\text{C.12})$$

Mais aussi

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} = \sqrt{1 + \left( v^2 - \frac{2GM}{r} \right) \frac{r^2 v^2 \sin^2 \theta}{G^2 M^2}} \quad (\text{C.13})$$

## Expression de la différentielle $ds$ en fonction des constantes du mouvement

De l'équation (C.9), nous en déduisons l'élément infinitésimal  $ds$  en fonction de l'élément infinitésimal de l'anomalie vraie  $d\Omega'$  :

$$ds = p \frac{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \Omega'}}{(e \cos \Omega' + 1)^2} d\Omega' \quad (\text{C.14})$$

et

$$\frac{ds}{v} = \sqrt{\frac{p^3}{GM}} \frac{1}{(1 + e \cos \Omega')^2} d\Omega' \quad (\text{C.15})$$

Enfin, pour trouver la troisième loi de Kepler, il faut utiliser la conservation du moment cinétique. Durant un temps infinitésimal, l'aire du triangle balayé par le segment entre la planète et la particule est  $r^2 d\theta/2 = Ldt/2m$ . Au cours d'une période  $T$ , l'aire balayée est l'aire totale de l'ellipse qui est  $\pi ab$  avec  $b$  le demi-petit axe. Nous proposons de déterminer  $c$ , la distance entre le centre de l'ellipse et le foyer.

$$c = a - r_p = \frac{p}{1 - e^2} - \frac{p}{1 + e} = \frac{pe}{1 - e^2} = ae \quad (\text{C.16})$$

Par définition, sur une ellipse, la somme des distances aux foyers est constante. Donc les points équidistants de chaque foyer (ligne médiane entre les deux foyers) et coupant l'ellipse sont à une distance de  $a$  de chaque foyer. Or ces points sont à la distance  $b$  du centre de l'ellipse. Donc nous avons un triangle de côté  $b$ ,  $c$  et  $a$  rectangle au centre de l'ellipse. Le théorème de Pythagore donne alors  $b = \sqrt{a^2 - c^2} = a\sqrt{1 - e^2}$ .

Nous obtenons alors

$$\pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{LT}{2m} = \frac{\sqrt{GMpT}}{2} = \frac{\sqrt{GMT}}{2} \sqrt{a} \sqrt{1 - e^2} \quad (\text{C.17})$$

En élevant au carré, nous retrouvons la troisième loi de Kepler

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad (\text{C.18})$$



# Annexe D

## Méthodes de calcul numérique d'intégrales

Tout modélisateur s'est déjà trouvé ou se retrouvera face à une limite : celle de son ordinateur. Les problèmes les plus courants sont la précision numérique et le temps de calcul. Il est nécessaire de trouver un compromis correct entre les deux. Une meilleure précision est synonyme de temps de calcul plus important. Au cours de ma thèse, j'ai été souvent confronté à ces problèmes car les méthodes d'intégration usuelles enseignées sont souvent inadaptées ou trop imprécises pour mes calculs. Dans cette annexe, je présente les différentes manières d'approcher une intégrale numériquement et mets en évidence les plus efficaces.

Nos problèmes se ramènent souvent à l'intégration de fonctions suffisamment régulières c.-à-d.  $\mathcal{C}^\infty$  sur le domaine d'intégration  $[a, b] \in \mathbb{R}$ . Intégrer par ces méthodes une fonction seulement continue par morceaux, par exemple, est inadapté. Il faut correctement poser le problème pour identifier ses morceaux et appliquer l'intégration sur chacun.

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et tel que  $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$  (la barre au-dessus de  $\mathbb{R}$  signifie que nous prenons aussi les  $-\infty$  et  $+\infty$  en compte) alors son intégrale sur  $[a, b]$  est :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x)w(x) dx = \sum_{i=1}^N w_i g(x_i) + E_{N,M}(f, a, b) \quad (\text{D.1})$$

avec  $f(x) = g(x)w(x)$ ,  $w(x)$  une fonction « poids » dépendante de la méthode d'intégration,  $x_i$  les points  $\in [a, b]$  où la fonction est évaluée,  $w_i$  le poids associé à chaque abscisse  $x_i$  et  $E_N$  l'erreur commise sur l'intégrale que nous ne pouvons que majorer en valeur absolue (si l'erreur est connue, il n'y a plus d'erreur). Cette erreur dépend de  $f$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $N - 1$  le nombre de subdivisions pour le calcul numérique, et de l'ordre de la méthode  $M$ . Pour les méthodes à subdivisions constantes ( $x_{k+1} - x_k = h = (b - a)/(N - 1) \forall k$ ), la fonction est approchée par un polynôme d'interpolation de Lagrange sur chaque subdivision  $[x_k, x_{k+1}]$ , le nombre d'évaluations est alors  $N \times (M + 1)$ . L'erreur totale  $E_{N,M}$

est la somme des erreurs sur chaque subdivision. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} E_{N,M} &= \sum_{k=1}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{f^{(M+1)}(\xi_k)}{(M+1)!} \prod_{j=0}^M \left( t - x_k - j \frac{x_{k+1} - x_k}{M+1} \right) dt \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{f^{(M+1)}(\xi)}{(M+1)!} \int_{x_k}^{x_k+h} \prod_{j=0}^M \left( t - x_k - j \frac{h}{M+1} \right) dt \end{aligned}$$

où  $\xi_k \in ]x_k, x_{k+1}[$  et  $\xi = \{\xi_k / f(\xi) = \max_k (f^{(M)}(\xi_k))\}$ ,  $f^{(M)}$  réfère à  $\frac{d^M f}{dx^M}$ .

## Méthode des rectangles

La méthode des rectangles est une des méthodes de niveau zéro. L'intégrale est approchée à l'aide d'une succession de rectangles. Pour cette méthode,

$$w(x) = 1$$

$$w_i = \frac{b-a}{N}$$

$$|E_{N,1}| \leq \frac{\|f^{(1)}\|_{\infty} (b-a)^2}{2(N-1)}$$

où  $\|f^{(1)}\|_{\infty}$  est le maximum de la valeur absolue de la dérivée sur l'intervalle  $[a, b]$ . C'est une méthode d'ordre 0, l'erreur est majorée par un terme en  $N^{-1}$ .

## Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes est une des méthodes de base comme celle des rectangles. L'intégrale est approchée à l'aide d'une succession de trapèzes. Pour cette méthode,

$$w(x) = 1$$

$$w_i = \frac{b-a}{2N} (2 - \delta_{0,i} - \delta_{N,i})$$

$$|E_{N,2}| \leq \frac{\|f^{(2)}\|_{\infty} (b-a)^3}{12(N-1)^2}$$

C'est une méthode d'ordre 1, l'erreur est majorée par un terme en  $N^{-2}$ .

## Méthode de quadrature de Gauss

Les méthodes de quadrature de Gauss sont les plus efficaces pour l'intégration numérique, elles optimisent la précision pour un minimum d'opérations et de temps de calcul. Basées sur les polynômes orthogonaux tels que ceux de Legendre, Laguerre, Hermite et j'en passe, leur avantage repose sur leur ordre élevé et la dépendance entre précision et nombre de points. Soient  $\{p_k\}_{k=0..N}$  les polynômes

orthogonaux unitaires (le coefficient devant le terme de plus haut degré est 1) de degré  $k$  vis-à-vis de la fonction poids  $w(x)$ , caractéristique de chaque méthode, i.e :

$$\int_a^b p_n(x)p_m(x)w(x) dx = \delta_{n,m} \int_a^b p_n^2(x)w(x) dx \quad (\text{D.2})$$

avec  $[a, b]$  un intervalle fini ou non (chose impossible avec les méthodes précédentes). Les  $\{x_k\}_{k=1..N}$  sont alors les racines du polynôme d'ordre  $N$  et les  $w_k$  dans l'équation (D.1) sont données par :

$$w_k = \int_a^b \frac{p_N(x)}{(x - x_k)p'_N(x_k)} w(x) dx = \frac{\int_a^b p_{N-1}^2(x)w(x)dx}{p_{N-1}(x_k)p'_N(x_k)} \quad (\text{D.3})$$

L'erreur de ces méthodes est (Olver et al. (2010))

$$E_N(f, a, b) = \gamma_N \frac{f^{(2N)}(\xi)}{(2N)!} \quad (\text{D.4})$$

avec

$$\gamma_N = \int_a^b p_N^2(x)w(x) dx \quad (\text{D.5})$$

Ce sont toutes des méthodes d'ordre  $2N - 1$ , l'ordre dépend uniquement du nombre de points. D'habitude, l'intégration est divisée en sous-intervalles sur chacun desquels nous appliquons une méthode d'ordre  $M$ . Les méthodes de quadrature de Gauss sont si efficaces qu'il n'y a nul besoin de subdiviser les intervalles d'intégration. De plus, elles sont adaptables à tous les cas de figure avec  $a$  et  $b$  finis ou non. Toutes les routines nécessaires à ces intégrations sont à disposition le « Numerical Recipes » (Press et al. (1992)). Par contre, nous supposons la régularité de la fonction et de ces dérivées ce qu'a priori nous ignorons.

## Méthode de Gauss-Legendre

Il s'agit de la méthode de quadrature de Gauss basée sur les polynômes de Legendre. Les polynômes sont définis sur l'intervalle  $[a, b] = [-1, 1]$  et sont donnés par la formule de Rodrigues :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n) \quad (\text{D.6})$$

et

$$w(x) = 1 \quad (\text{D.7})$$

Il n'existe pas de solution analytique pour obtenir une valeur exacte des racines, toutes d'ordre 1. Il existe néanmoins des routines numériques pour approcher avec la précision voulue la valeur de ces racines. Le poids associé à chaque racine est donc :

$$w_k = \frac{2}{(1 - x_k^2)[P'_N(x_k)]^2} \quad (\text{D.8})$$

L'intégrale d'une fonction  $f$  sur un intervalle quelconque  $[a, b]$  fini est alors :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^N w_k f\left(\frac{b-a}{2}x_k + \frac{b+a}{2}\right) + E_N \quad (\text{D.9})$$

avec (cf. Kahaner et al. (1989))

$$\gamma_N = \frac{(b-a)^{2N+1}}{2N+1} \frac{(N!)^4}{((2N!))^2} \quad (\text{D.10})$$

Pour  $N = 10$ ,

$$|E_{10}| \leq 5,73 \cdot 10^{-31} (b-a)^{21} \|f^{(20)}\|_\infty$$

Pour  $N = 30$ ,

$$|E_{30}| \leq 1,41 \cdot 10^{-118} (b-a)^{61} \|f^{(60)}\|_\infty$$

Pour  $N = 80$ ,

$$|E_{80}| \leq 1,55 \cdot 10^{-381} (b-a)^{161} \|f^{(160)}\|_\infty$$

Je préfère le répéter mais nous n'avons aucune connaissance sur la régularité et la dérivabilité de la fonction obtenue numériquement. Par contre, il est fortement contre-indiqué de prendre des valeurs trop élevées de  $N$  car la précision sur les racines des polynômes de Legendre se trouvera limitée par la précision de la machine et non de la routine employée. De plus, l'erreur sur l'intégrale sera bien moindre que la précision de la machine ne le permet.

## Méthodes de Gauss-Hermite

Ces polynômes sont particulièrement bien adaptés pour les fonctions de distributions du type maxwellien. Les polynômes d'Hermite sont définis sur  $[a, b] = \mathbb{R}$  par :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (\text{D.11})$$

et

$$w(x) = \exp(-x^2) \quad (\text{D.12})$$

Nous avons alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-x^2) dx = \sum_{k=1}^N w_k f(x_k) + E_N \quad (\text{D.13})$$

avec (cf. Olver et al. (2010))

$$|E_N| \leq \frac{\sqrt{\pi} N!}{2^N (2N)!} \|f^{(2N)}\|_\infty \quad (\text{D.14})$$

Il existe une autre forme donnée par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx \approx \sum_{k=1}^N w_k g(x_k) \exp(x_k^2) \quad (\text{D.15})$$

## Méthodes plus générales

Il est, une fois le principe acquis, possible de construire sa propre base de polynômes orthogonaux avec l'assistance d'outils de calcul à la fois puissants et précis. Partant du constat que ma base de polynômes orthogonaux n'était pas adaptée à mon problème d'intégration (pour la partie E), j'ai tenté, sans grand succès, de construire d'autres bases. Néanmoins, ce n'est pas parce que le résultat n'était pas au rendez-vous que cela doit rester une voie à ne pas exploiter pour des problèmes d'intégration numérique.

Nous souhaitons évaluer l'intégrale :

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x)w(x) dx \quad (\text{D.16})$$

où  $w$  est une fonction poids. Nous avons vu que pour la méthode de Gauss-Legendre, nous avons  $a = -1$ ,  $b = 1$  et  $w(x) = 1$ . Pour la méthode de Gauss-Hermite,  $a = -\infty$ ,  $b = +\infty$  et  $w(x) = \exp(-x^2)$ . Mais il est possible de généraliser cette notion de polynômes orthogonaux pour peu que

$$\left| \int_a^b x^p w(x) dx \right| < +\infty \quad (\text{D.17})$$

quel que soit  $p$  entier. Pour  $a$  et/ou  $b$  infini, les fonctions du type exponentielle pour  $w(x)$  s'y prêtent très bien. Posons :

$$I_p = \int_a^b x^p w(x) dx \quad (\text{D.18})$$

De la même façon que les autres méthodes, nous allons construire une base de polynôme orthogonaux jusqu'au degré  $N$ , le degré de précision pour notre méthode. Soient  $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  l'ensemble de polynômes orthogonaux de degré  $k$ . Par définition,

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x) dx \propto \delta_{n,m} \quad (\text{D.19})$$

Nous souhaitons déterminer les  $N + 1$  coefficients de  $P_N$  pour ensuite évaluer les  $N$  racines,

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k \quad (\text{D.20})$$

En intégrant  $P_N(x)$ , nous obtenons :

$$\int_a^b P_N(x)w(x) dx = \int_a^b P_N(x)x^0 w(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^N a_k x^k w(x) dx = \sum_{k=0}^N a_k I_k = 0 \quad (\text{D.21})$$

puisque que  $P_N$  est orthogonal avec tout polynôme de degré inférieur à  $N$  et en particulier à tous les monômes  $x^k$  avec  $k < N$ .

De manière générale,

$$\int_a^b P_N(x) x^p w(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^N a_k x^k w(x) dx = \sum_{k=0}^N a_k I_{p+k} = 0 \quad (\text{D.22})$$

avec  $p$  allant de 0 à  $N - 1$ . Nous avons donc  $N$  équations pour  $N + 1$  inconnues. Problème! Les racines de  $P_N$  ne dépendent pas des coefficients s'ils sont définis à la même constante près. Comme  $P_N$  est de degré  $N$ ,  $a_N$  est forcément non nul. Nous pouvons donc poser  $d_k = a_k/a_N$  pour avoir :

$$\sum_{k=0}^{N-1} d_k I_{p+k} = -I_{p+N} \quad (\text{D.23})$$

Le système à résoudre prend la forme :

$$\begin{pmatrix} I_0 & \dots & I_{N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{N-1} & \dots & I_{2N-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_N \\ \vdots \\ -I_{2N-1} \end{pmatrix} \quad (\text{D.24})$$

Nous avons  $N$  inconnues ( $d_k, d_N = 1$ ) et  $N$  équations. La solution du système donne les coefficients de  $P_N$  à une constante près :

$$P_N(x) = a_N(x^N + d_{N-1}x^{N-1} + \dots + d_0) = a_N \prod_{j=1}^N (x - x_j) \quad (\text{D.25})$$

avec  $\{x_j\}_{j=1,\dots,N}$  les  $N$  racines réelles du polynôme  $P_n(x)$  : celles-ci doivent être distinctes.

Ensuite, il suffit d'estimer à l'aide de routines informatiques chaque racine. Une fois les racines déterminées, il faut trouver les poids de chaque racine. En supposant la méthode exacte pour tout polynôme de degré inférieur à  $N$ , il en découle

$$I_p = \int_a^b x^p w(x) dx = \sum_{k=1}^N x_k^p w_k \quad (\text{D.26})$$

Ceci peut se mettre sous la forme du produit de la matrice de Vandermonde, inversible, et d'un vecteur colonne contenant les poids :

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{N-1} & \dots & x_N^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} \quad (\text{D.27})$$

Voilà, nous avons les racines  $x_k$  et les poids associés  $w_k$ . Cette approche peut être particulièrement bien adaptée pour les fonctions de distribution maxwelliennes et quand nous sommes capables de connaître exactement  $I_p$ . Par exemple, les différents moments d'une fonction de distribution sont

généralement déterminés à partir d'une intégrale du type

$$\int_0^{+\infty} f(x)x^2 \exp(-x^2) dx \quad (\text{D.28})$$

Ce cas n'est pas tout à fait celui d'Hermite. Dans ce cas, il est assez facile de déterminer analytiquement les  $I_p$ . Pour  $w(x) = x^2 \exp(-x^2)$ ,  $a = 0$  et  $b = +\infty$  :

$$I_p = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3+p}{2}\right) \quad (\text{D.29})$$

Cette méthode sera sans doute plus appropriée pour calculer les moments par exemple d'une fonction de distribution isotropique, légèrement perturbée de l'équilibre donné par la distribution maxwellienne. Avec la méthode de Gauss-Hermite, les poids les plus forts se retrouvent symétriquement autour de 0 alors qu'avec cette méthode, les poids les plus forts sont autour de 1. Le lecteur pourra se reporter à l'article de Shizgal (1981) présentant une autre procédure pour ce calcul et les comparaisons entre celles-ci et celle de Laguerre ou encore à l'article de Ihsan Hascelik (2006).



# Annexe E

## Méthode de Cardan

Dans cette thèse, j'ai été confronté à des polynômes de degré 3. Il existe une méthode analytique pour calculer les racines, aussi bien réelles que complexes de ces polynômes : la méthode de Cardan.

Soit un polynôme de degré 3 sous la forme :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (\text{E.1})$$

Nous voulons connaître l'expression analytique de ses racines. Nous devons, tout d'abord, définir deux quantités :

$$p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}$$
$$q = \frac{b}{27a} \left( \frac{2b^2}{a^2} - \frac{9c}{a} \right) + \frac{d}{a} \quad (\text{E.2})$$

Le discriminant est alors :

$$\Delta = -(4p^3 + 27q^2) \quad (\text{E.3})$$

Il faut distinguer les cas suivant son signe.

### $\Delta$ négatif

Il y a une racine réelle et deux complexes conjuguées. Nous posons alors :

$$u = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\frac{-\Delta}{27}}}{2}}$$
$$v = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\frac{-\Delta}{27}}}{2}} \quad (\text{E.4})$$

$u$  et  $v$  sont distincts et réels.

À partir de  $u$  et  $v$ , nous pouvons générer les trois racines  $x_{0,1,2}$  par :

$$x_k = j^k u + \bar{j}^k v - \frac{b}{3a} = j^k u + j^{-k} v - \frac{b}{3a} \quad (\text{E.5})$$

avec  $k = 0, 1, 2$ . Pour  $k = 0$ , nous avons la racine réelle et pour  $k = 1, 2$ , nous avons les racines complexes conjuguées.

## $\Delta$ nul

Il existe deux racines réelles, une simple et une double. L'expression de la racine simple est :

$$x_0 = \frac{3q}{p} - \frac{b}{3a} \quad (\text{E.6})$$

et la double est :

$$x_1 = x_2 = -\frac{3q}{2p} - \frac{b}{3a} \quad (\text{E.7})$$

## $\Delta$ positif

Nous posons :

$$u = \sqrt[3]{\frac{-q + i\sqrt{\frac{-\Delta}{27}}}{2}} \quad (\text{E.8})$$

$u$  est complexe (nous ne posons pas  $v$  car nous avons  $v = \bar{u}$ ). Les trois solutions réelles sont :

$$x_k = j^k u + \bar{j}^k \bar{u} - \frac{b}{3a} = j^k u + j^{-k} \bar{u} = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{-q}{2}\sqrt{\frac{27}{-p^3}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right) - \frac{b}{3a} \quad (\text{E.9})$$

Nous nous rendons compte que nous ne sommes pas obligés de travailler dans  $\mathbb{C}$  grâce à la dernière formulation. Par contre, elle fait intervenir des divisions et si par malheur, la précision fait défaut avec par exemple un argument dans le arccos proche de 1 voire légèrement supérieur à cause de la précision, le résultat est un NaN (Not A Number). Cela se produit notamment si  $p$  et  $q$  sont grands.

J'ai récemment trouvé un remède : approcher numériquement une des racines  $x_{lim}$  par une méthode de Newton-Raphson (toujours possible car notre polynôme est de degré trois, possède au moins une racine réelle et sa dérivée est connue) et ensuite factoriser notre polynôme par le monôme  $x - x_{lim}$  pour obtenir un polynôme d'ordre 2 dont nous connaissons très vite les racines.

## Méthode de Newton-Raphson

Soit une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  (ici  $P_3(u)$  ou  $Q_3(w)$ ) possédant au moins un zéro. En utilisant le développement de Taylor au voisinage de cette racine, nous avons :

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Le but est de déterminer l'abscisse du point d'intersection entre l'axe des abscisses et la tangente à la fonction en  $x_0$  d'où

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

En réitérant la démarche, nous générons une formule de récurrence

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

convergente vers au moins l'un des zéros à condition que  $f'$  ne s'annule pas et ne change de signe surtout si  $f(x_n)$  est proche de zéro.

Pour palier cette éventualité, je teste d'abord si le polynôme admet deux extremums locaux  $x_1$  et  $x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) ou non. Comme il s'agit d'un polynôme d'ordre 3, sa dérivée, de degré 2, admet au plus 2 racines réelles distinctes. Si oui, je teste la valeur de  $f$  en  $x_1$  et  $x_2$ . Si  $f(x_2) > 0$  alors  $f(x_1) > 0$  (nous avons des polynômes d'ordre 3). Le zéro dans  $\mathbb{R}$  est unique et ne peut donc se trouver sur l'intervalle  $[x_1; +\infty[$ , j'initialise donc  $x_0$  dans l'intervalle  $] -\infty; x_1[$ . Inversement, si  $f(x_1) < 0$ ,  $f(x_2)$  aussi. Le zéro est encore unique et j'initialise cette fois-ci  $x_0$  dans l'intervalle  $]x_2; +\infty[$ . La formule converge toujours car sur ces deux types d'intervalles la dérivée ne s'annule pas, et rapidement puisque sa convergence est connue pour être quadratique.



# Annexe F

## Intégration en coordonnées paraboliques et changement de variables

Pour mon problème portant sur la pression de radiation, j'ai du travailler dans des espaces de paramètres plus adéquats à sa résolution. Comme le calcul de flux ou encore de densité repose sur de l'intégration, il a fallu pour chaque problème réécrire les éléments d'intégration infinitésimaux.

Pour rappel, l'élément infinitésimal dans l'espace des impulsions s'écrit :

$$\begin{aligned} d^3p_i &= dp_x dp_y dp_z \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} dp_r dp_\theta dp_\phi \quad \text{si } \theta \neq 0 \\ &= \frac{p_\theta}{r^2} dp_r dp_\theta d\phi \quad \text{si } \theta = 0 \end{aligned} \tag{F.1}$$

où  $\phi$  représente l'angle entre le plan du mouvement de la particule (puisque  $p_\phi = 0$ ) et l'écliptique.

### Cas $P_\phi \neq 0$

Connaissant les relations liant  $p_u$  et  $p_w$  avec  $p_r$  et  $p_\theta$ , il faut calculer la jacobienne correspondante

$$\frac{\partial(p_r, p_\theta)}{\partial(p_u, p_w)} = \begin{vmatrix} \frac{2u}{u+w} & \frac{2w}{u+w} \\ -\sqrt{uw} & \sqrt{uw} \end{vmatrix} = 2\sqrt{uw} \tag{F.2}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} d^3p_i &= \frac{4}{u+w} dp_u dp_w dp_\phi \\ &= \frac{4(mk_B T)^{3/2}}{U+W} dP_U dP_W dP_\phi \end{aligned} \tag{F.3}$$

Par contre, il est possible de passer du système de coordonnées  $(P_U, P_W, P_\phi)$  à  $(\mathcal{E}, \mathcal{A}, P_\phi)$  mais ce changement n'est pas BIJECTIF car il y a l'ambiguïté sur le signe de  $P_U$  et  $P_W$  : pour un triplet

$(\mathcal{E}\mathcal{A}, P_\phi)$  à une position  $(U, W)$  il existe deux valeurs de  $P_U$  et  $P_W$  possibles, une positive et une négative (c'est ce fameux facteur 2 auquel Bishop and Chamberlain (1989) fait référence dans son annexe). La jacobienne pour ce changement est :

$$\frac{\partial(\mathcal{E}, \mathcal{A})}{\partial(P_U, P_W)} = \begin{vmatrix} \frac{4UP_U}{U+W} & \frac{4WP_W}{U+W} \\ -8UP_U & 8WP_W \end{vmatrix} = \frac{64UWP_UP_W}{U+W} \quad (\text{F.4})$$

et

$$\begin{aligned} d^3p_i &= \frac{(mk_B T)^{3/2}}{16UWP_UP_W} d\mathcal{E} d\mathcal{A} dP_\phi \\ &= \frac{(mk_B T)^{3/2}}{4\sqrt{-P_3(U)}\sqrt{Q_3(W)}} d\mathcal{E} d\mathcal{A} dP_\phi \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

### Cas $P_\phi = 0$

Ce cas est imposé lorsque nous nous plaçons sur l'axe planète-Soleil. Sur cet axe, nous avons  $u = 0$  côté nuit et  $w = 0$  côté jour. Dans un tel cas, nous avons :

$$\begin{aligned} p_\theta &= \sqrt{uw}(p_w - p_u) \\ &= \frac{\sqrt{uw}}{2} \left( \pm \sqrt{\frac{2mwE + A + 2GMm^2 + m^2au^2}{w}} \pm \sqrt{\frac{2muE - A + 2GMm^2 - m^2au^2}{u}} \right) \\ &= \pm \frac{\sqrt{u}}{2} \sqrt{2mwE + A + 2GMm^2 + m^2au^2} \pm \frac{\sqrt{w}}{2} \sqrt{2muE - A + 2GMm^2 - m^2au^2} \\ &= \pm \frac{\sqrt{u}}{2} \sqrt{2GMm^2 + A} \quad \text{si } w = 0 \\ &= \pm \frac{\sqrt{w}}{2} \sqrt{2GMm^2 - A} \quad \text{si } u = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} p_\theta dp_\theta &= \frac{1}{2} dp_\theta^2 \\ &= \frac{u}{4} dA = mk_B T R_{pressure}^2 \frac{U}{4} dA \quad \text{si } W = 0 \\ &= -\frac{w}{4} dA = -mk_B T R_{pressure}^2 \frac{W}{4} dA \quad \text{si } U = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

et

$$dp_r = \begin{cases} 2 dp_u = 2\sqrt{mk_B T} dP_U & \text{si } w = 0 \\ 2 dp_w = 2\sqrt{mk_B T} dP_W & \text{si } u = 0 \end{cases} \quad (\text{F.8})$$

Il faut exprimer de nouveau une jacobienne :

$$\frac{\partial(p_r, p_\theta^2)}{\partial(E, A)} = \begin{cases} \begin{vmatrix} \frac{m}{2p_u} & -\frac{1}{4up_u} \\ 0 & \frac{u}{4} \end{vmatrix} = \frac{mu}{8p_u} & \text{si } w = 0 \\ \begin{vmatrix} \frac{m}{2p_w} & -\frac{1}{4wp_w} \\ 0 & -\frac{w}{4} \end{vmatrix} = -\frac{mw}{8p_w} & \text{si } u = 0 \end{cases} \quad (\text{F.9})$$

N'oublions pas que lors d'un changement de variables, c'est la valeur absolue du déterminant de la Jacobienne qu'il faut utiliser.

$$\begin{aligned} d^3p_i &= \frac{1}{2r^2} dp_r dp_\theta^2 d\phi \\ &= \frac{m}{4up_u} dE dA d\phi = \frac{(mk_B T)^{3/2}}{4UP_U} d\mathcal{E} d\mathcal{A} d\phi = \frac{(mk_B T)^{3/2}}{2\sqrt{-P_3(U)}} d\mathcal{E} d\mathcal{A} d\phi \quad \text{si } w = 0 \\ &= \frac{m}{4wp_w} dE dA d\phi = \frac{(mk_B T)^{3/2}}{4WP_W} d\mathcal{E} d\mathcal{A} d\phi = \frac{(mk_B T)^{3/2}}{2\sqrt{Q_3(W)}} d\mathcal{E} d\mathcal{A} d\phi \quad \text{si } u = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Nous garderons de préférence l'expression en  $P_U$  ou  $P_W$  car elle sera très utile pour le calcul du flux d'échappement. De plus, il sera bon de se rappeler que ce changement de variables n'est pas bijectif et qu'il faudra multiplier par un facteur 2 les éléments de volumes infinitésimaux pour prendre aussi bien en compte les valeurs d'impulsions positives que négatives. Ceci n'aura aucune implication sur le flux puisqu'il faut  $p_r > 0$ .



# Bibliographie

- Alder, B.J., Wainwright, T.E., 1957. Phase Transition for a Hard Sphere System. *Journal of Chemical Physics* 27, 1208 – 1209.
- Anderson, Jr., D.E., 1976. The Mariner 5 ultraviolet photometer experiment - Analysis of hydrogen Lyman- $\alpha$  data. *Journal of Geophysical Research* 81, 1213 – 1216.
- Bailey, J., Gruntman, M., . Experimental study of exospheric hydrogen atom distributions by lyman- $\alpha$  .
- Bailey, J.J., 2012. Three-dimensional exospheric hydrogen atom distributions obtained from observations of the geocorona in Lyman- $\alpha$ . Ph.D. thesis. University of Southern California.
- Banks, P.M., Kockarts, G., 1973. *Aeronomy*. Academic Press, New York.
- Barth, C.A., 1968. Interpretation of the Mariner 5 Lyman- $\alpha$  measurements. *Journal of Atmospheric Sciences* 25, 564 – 567.
- Barth, C.A., Pearce, J.B., Kelly, K.K., Wallace, L., Fastie, W.G., 1967. Ultraviolet Emissions Observed near Venus from Mariner V. *Science* 158, 1675 – 1678.
- Bertaux, J.L., 1978. Interpretation of OGO-5 line shape measurements of Lyman- $\alpha$  emission from terrestrial exospheric hydrogen. *Planetary and Space Science* 26, 431 – 447.
- Bertaux, J.L., Blamont, J., Marcelin, M., Kurt, V.G., Romanova, N.N., Smirnov, A.S., 1978. Lyman- $\alpha$  observations of Venera-9 and 10. I - The non-thermal hydrogen population in the exosphere of Venus. *Planetary and Space Science* 26, 817 – 831.
- Bertaux, J.L., Blamont, J.E., 1973. Interpretation of OGO-5 Lyman- $\alpha$  measurements in the upper geocorona. *Journal of Geophysical Research* 78, 80 – 91.
- Bertaux, J.L., Korablev, O., Perrier, S., Quémerais, E., Montmessin, F., Leblanc, F., Lebonnois, S., Rannou, P., Lefèvre, F., Forget, F., Fedorova, A., Dimarellis, E., Reberac, A., Fonteyn, D., Chaufray, J.Y., Guibert, S., 2006. SPICAM on Mars Express : Observing modes and overview of UV spectrometer data and scientific results. *Journal of Geophysical Research : Planets* 111.
- Bertaux, J.L., Kyrölä, E., Quémerais, E., Pellinen, R., Lallement, R., Schmidt, W., Berthé, M., Dimarellis, E., Goutail, J.P., Taulemesse, C., Bernard, C., Leppelmeier, G., Summanen, T., Hannula,

- H., Huomo, H., Kehl , V., Korpela, S., Lepp l , K., Str mmer, E., Torsti, J., Viherkanto, K., Hochedez, J.F., Chretiennot, G., Peyroux, R., Holzer, T., 1995. SWAN : A Study of Solar Wind Anisotropies on SOHO with Lyman- $\alpha$  Sky Mapping. *Solar Physics* 162, 403 – 439.
- Bertaux, J.L., Nevejans, D., Korablev, O., Villard, E., Quémerais, E., Neefs, E., Montmessin, F., Leblanc, F., Dubois, J.P., Dimarellis, E., Hauchecorne, A., Lefèvre, F., Rannou, P., Chaufray, J.Y., Cabane, M., Cernogora, G., Souchon, G., Semelin, F., Reberac, A., Van Ransbeek, E., Berkenbosch, S., Clairquin, R., Muller, C., Forget, F., Hourdin, F., Talagrand, O., Rodin, A., Fedorova, A., Stepanov, A., Vinogradov, I., Kiselev, A., Kalinnikov, Y., Durry, G., Sandel, B., Stern, A., Gérard, J.C., 2007. SPICAV on Venus Express : Three spectrometers to study the global structure and composition of the Venus atmosphere. *Planetary and Space Science* 55, 1673 – 1700.
- Beth, A., Garnier, P., Toubanc, D., Dandouras, I., Mazelle, C., Kotova, A., 2014. Modeling the satellite particle population in the planetary exospheres : Application to Earth, Titan and Mars. *Icarus* 227, 21 – 36.
- Bird, G., 1994. *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows*. Oxford science publications, Oxford University Press, Incorporated.
- Bird, G.A., 1963. Approach to translational equilibrium in a rigid sphere gas. *Physics of Fluids* (1958-1988) 6.
- Biscani, F., Izzo, D., 2014. The Stark problem in the weierstrassian formalism. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* .
- Bishop, J., 1991. Analytic exosphere models for geocoronal applications. *Planetary and Space Science* 39, 885 – 893.
- Bishop, J., Chamberlain, J.W., 1989. Radiation pressure dynamics in planetary exospheres : A "natural" framework. *Icarus* 81, 145 – 163.
- Bourrier, V., Lecavelier des Etangs, A., 2013. 3D model of hydrogen atmospheric escape from HD 209458b and HD 189733b : radiative blow-out and stellar wind interactions. *Astronomy and Astrophysics* 557, A124.
- Brandt, J.C., Chamberlain, J.W., 1960. Density of neutral gas in a planetary exosphere. *Physics of Fluids* (1958-1988) 3.
- Brandt, P.C., Dialynas, K., Dandouras, I., Mitchell, D.G., Garnier, P., Krimigis, S.M., 2012. The distribution of Titan's high-altitude (out to  $\sim 50000$  km) exosphere from energetic neutral atom (ENA) measurements by Cassini/INCA. *Planetary and Space Science* 60, 107 – 114.
- Broadfoot, A.L., Shemansky, D.E., Kumar, S., 1976. Mariner 10 : Mercury atmosphere. *Geophysical Research Letters* 3, 577 – 580.
- Bryan, G.H., 1900. The Kinetic Theory of Planetary Atmospheres. *Nature* 62, 126.

- Bryan, G.H., 1901. The Kinetic Theory of Planetary Atmospheres. Royal Society of London Philosophical Transactions Series A 196, 1 – 24.
- Burke, J.A., 1969. Evaporation from rotating planets. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 145, 487.
- Burns, J.A., Lamy, P.L., Soter, S., 1979. Radiation forces on small particles in the solar system. Icarus 40, 1 – 48.
- Chaffin, M.S., Chaufray, J.Y., Stewart, I., Montmessin, F., Schneider, N.M., Bertaux, J.L., 2014. Unexpected variability of martian hydrogen escape. Geophysical Research Letters 41, 314– – 320.
- Chamberlain, J.W., 1963. Planetary coronae and atmospheric evaporation. Planetary and Space Science 11, 901.
- Chamberlain, J.W., 1979. Depletion of satellite atoms in a collisionless exosphere by radiation pressure. Icarus 39, 286 – 294.
- Chamberlain, J.W., Bishop, J., 1993. Radiation pressure dynamics in planetary exospheres ii. closed solutions for the evolution of orbital elements. Icarus 106, 419 – 427.
- Chamberlain, T.P., Hunten, D.M., 1987. Theory of Planetary Atmospheres : An Introduction to Their Physics and Chemistry. International Geophysics, Elsevier Science.
- Chapman, S., Cowling, T., 1952. The Mathematical Theory of Non-uniform Gases : An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion in Gases. Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press. 2nd edition.
- Chaufray, J., Bertaux, J., Leblanc, F., Quémerais, E., 2008. Observation of the hydrogen corona with SPICAM on Mars express. Icarus 195, 598 – 613.
- Chaufray, J.Y., Bertaux, J.L., Quémerais, E., Villard, E., Leblanc, F., 2012. Hydrogen density in the dayside venusian exosphere derived from Lyman- $\alpha$  observations by SPICAV on venus express. Icarus 217, 767 – 778. Advances in Venus Science.
- Chaufray, J.Y., Gladstone, G., 2010. Resonance line radiative transfer for hot atom coronae using kappa distributions. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer 111, 116 – 127.
- Cipriani, F., Leblanc, F., Berthelier, J.J., 2007. Martian corona : Nonthermal sources of hot heavy species. Journal of Geophysical Research (Planets) 112, 7001.
- Cook, S.R., 1900. On the Escape of Gases from Planetary Atmospheres According to the Kinetic Theory. Astrophysical Journal 11, 36.
- Cui, J., Yelle, R.V., Volk, K., 2008. Distribution and escape of molecular hydrogen in Titan's thermosphere and exosphere. Journal of Geophysical Research 113.

- De La Haye, V., Waite Jr., J.H., Johnson, R.E., Yelle, R.V., Cravens, T.E., Luhmann, J.G., Kasprzak, W.T., Gell, D.A., Magee, B., Leblanc, F., Michael, M., Jurac, S., Robertson, I.P., 2007. Cassini ion and neutral mass spectrometer data in Titan's upper atmosphere and exosphere : Observation of a suprathermal corona. *Journal of Geophysical Research* 112.
- Dermine, T., Jorissen, A., Siess, L., Frankowski, A., 2009. Radiation pressure and pulsation effects on the Roche lobe. *Astronomy and Astrophysics* 507, 891 – 899.
- Donahue, T.M., McAfee, J.R., 1964. Influence of lateral flow on the diurnal variation in exospheric hydrogen. *Planetary and Space Science* 12, 1045 – 1054.
- Edberg, N.J.T., Eriksson, A.I., Auster, U., Barabash, S., Bößwetter, A., Carr, C.M., Cowley, S.W.H., Cupido, E., Fränz, M., Glassmeier, K.H., Goldstein, R., Lester, M., Lundin, R., Modolo, R., Nilsson, H., Richter, I., Samara, M., Trotignon, J.G., 2009. Simultaneous measurements of Martian plasma boundaries by Rosetta and Mars Express. *Planetary and Space Science* 57, 1085 – 1096.
- Erkaev, N.V., Kulikov, Y.N., Lammer, H., Selsis, F., Langmayr, D., Jaritz, G.F., Biernat, H.K., 2007. Roche lobe effects on the atmospheric loss from “Hot Jupiters”. *A&A* 472, 329 – 334.
- Fahr, H.J., 1970. Ballistical transport phenomena in a collision-free exosphere. *Planetary and Space Science* 18, 823 – 834.
- Fahr, H.J., 1971. Physics of Neutral Constituents in Planetary Exospheres, in : Verniani, F. (Ed.), *Physics of the Upper Atmosphere*, p. 348.
- Fahr, H.J., Shizgal, B., 1983. Modern exospheric theories and their observational relevance. *Reviews of Geophysics* 21, 75 – 124.
- Fahr, H.J., Weidner, B., 1977. Gas evaporation from collision-determined planetary exospheres. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 180, 593 – 612.
- Feldman, P.D., Steffl, A.J., Parker, J.W., A'Hearn, M.F., Bertaux, J.L., Stern, S.A., Weaver, H.A., Slater, D.C., Versteeg, M., Throop, H.B., Cunningham, N.J., Feaga, L.M., 2011. Rosetta-alice observations of exospheric hydrogen and oxygen on mars. *Icarus* 214, 394 – 399.
- Ferziger, J., Kaper, H., 1972. *Mathematical Theory of Transport Processes in Gases*. North-Holland Publ.
- Fuselier, S.A., Funsten, H.O., Heitzler, D., Janzen, P., Kucharek, H., McComas, D.J., Möbius, E., Moore, T.E., Petrinec, S.M., Reisenfeld, D.B., Schwadron, N.A., Trattner, K.J., Wurz, P., 2010. Energetic neutral atoms from the Earth's subsolar magnetopause. *Geophysical Research Letters* 37, 13101.
- García Muñoz, A., 2007. Physical and chemical aeronomy of HD 209458b. *Planetary and Space Science* 55, 1426 – 1455.

- Garnier, P., Dandouras, I., Toublanc, D., Brandt, P., Roelof, E., Mitchell, D., Krimigis, S., Krupp, N., Hamilton, D., Waite, H., 2007. The exosphere of Titan and its interaction with the kronian magnetosphere : MIMI observations and modeling. *Planetary and Space Science* 55, 165 – 173.
- Gignoux, C., Silvestre-Brac, B., 2002. *Mécanique : de la formulation lagrangienne au chaos hamiltonien*. Collection Grenoble sciences, EDP Sciences.
- Hagenbuch, K.M., Hartle, R.E., 1969. Simple model for a rotating neutral planetary exosphere. *Physics of Fluids (1958-1988)* 12.
- Halbwachs, J.L., Egret, D., Hameury, J.M., 2006. Formation planétaire et exoplanètes : école thématique du CNRS, Goutelas (Loire), 23 au 27 mai 2005. Observatoire astronomique de Strasbourg.
- Haldane, J., 1928. *The collected scientific papers of John James Waterston*. Oliver and Boyd.
- Hanson, W.B., Patterson, T.N.L., 1963. Diurnal variation of the hydrogen concentration in the exosphere. *Planetary and Space Science* 11, 1035 – 1052.
- Hartle, R.E., 1971. Model for rotating and nonuniform planetary exospheres. *Physics of Fluids* 14, 2592 – 2598.
- Haviland, J.K., Lavin, M.L., 1962. Application of the Monte Carlo Method to Heat Transfer in a Rarefied Gas. *Physics of Fluids* 5, 1399 – 1405.
- Hedin, A.E., 1987. MSIS-86 thermospheric model. *Journal of Geophysical Research* 92, 4649 – 4662.
- Hill, G.W., 1878. Researches in the lunar theory. *American Journal of Mathematics* 1, 5 – 26.
- Hirschfelder, J.O., Curtiss, C.F., Bird, R.B., 1954. *Molecular Theory of Gases and Liquids*. Willey, New York.
- Hodges, R.R., 1994. Monte carlo simulation of the terrestrial hydrogen exosphere. *Journal of Geophysical Research : Space Physics* 99, 23229– – 23247.
- Hodges, R.R., Tinsley, B.A., 1981. Charge exchange in the venus ionosphere as the source of the hot exospheric hydrogen. *Journal of Geophysical Research : Space Physics* 86, 7649 – 7656.
- Hodges, Jr., R.R., Johnson, F.S., 1968. Lateral transport in planetary exospheres. *Journal of Geophysical Research* 73, 7307.
- Ihsan Hascelik, A., 2006. Gauss quadrature rules for a generalized Hermite weight function . *Applied Mathematics and Computation* 180, 86 – 96.
- Ilie, R., Skoug, R., Funsten, H., Liemohn, M., Bailey, J., Gruntman, M., 2013. The impact of geocoronal density on ring current development. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics* 99, 92 – 103. *Dynamics of the Complex Geospace System*.
- Ip, W.H., 1986. The sodium exosphere and magnetosphere of mercury. *Geophysical Research Letters* 13, 423– – 426.

- Jacchia, L.G., 1977. Thermospheric Temperature, Density, and Composition : New Models. SAO Special Report 375.
- Jeans, J.H., 1916. The Dynamical Theory of Gases. Cambridge University Press (4th ed.,1925).
- Johnson, F.S., 1961. The Distribution of Hydrogen in the Telluric Hydrogen Corona. Astrophysical Journal 133, 701.
- Johnson, R.E., Combi, M.R., Fox, J.L., Ip, W.H., Leblanc, F., McGrath, M.A., Shematovich, V.I., Strobel, D.F., Waite, J.H., 2008. Exospheres and atmospheric escape. Space Science Review 139, 355 – 397.
- Jones, J.E., 1923. Transactions Cambridge Philosophical Society 22, 535 – 556.
- Kahaner, D., Moler, C., Nash, S., Forsythe, G., 1989. Numerical methods and software. Prentice-Hall series in computational mathematics, Prentice Hall.
- Killen, R., Potter, A., Morgan, T., 1990. Spatial distribution of sodium vapor in the atmosphere of mercury. Icarus 85, 145 – 167.
- Killen, R.M., Hurley, D.M., Farrell, W.M., 2012. The effect on the lunar exosphere of a coronal mass ejection passage. Journal of Geophysical Research : Planets 117.
- Killian, B.J., Cabrera-Trujillo, R., Deumens, E., Öhrn, Y., 2004. Resonant charge transfer between  $H^+$  and H from 1 to 5000 eV. Journal of Physics B Atomic Molecular Physics 37, 4733 – 4747.
- Knudsen, M., 1952. The Kinetic Theory of Gases : Some Modern Aspects. Methuen's monographs on physical subjects, Methuen.
- Koskinen, T.T., Yelle, R.V., Harris, M.J., Lavvas, P., 2013. The escape of heavy atoms from the ionosphere of HD209458b. II. Interpretation of the observations. Icarus 226, 1695– 1708.
- Krasnopolsky, V.A., 1986. Photochemistry of the Atmospheres of Mars and Venus. Physics and Chemistry in Space 13.
- Krasnopolsky, V.A., 2002. Mars' upper atmosphere and ionosphere at low, medium, and high solar activities : Implications for evolution of water. Journal of Geophysical Research 107.
- Krasnopolsky, V.A., 2009. A photochemical model of Titan's atmosphere and ionosphere. Icarus 201, 226 – 256.
- Krasnopolsky, V.A., 2010. The photochemical model of Titan's atmosphere and ionosphere : A version without hydrodynamic escape. Planetary and Space Science 58, 1507 – 1515.
- Lammer, H., Bauer, S.J., 1991. Nonthermal atmospheric escape from Mars and Titan. Journal of Geophysical Research : Space Physics 96, 1819 – 1825.

- Lammer, H., Erkaev, N.V., Odert, P., Kislyakova, K.G., Leitzinger, M., Khodachenko, M.L., 2013. Probing the blow-off criteria of hydrogen-rich ‘super-Earths’. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 430, 1247 – 1256.
- Lantoine, G., Russell, R., 2011. Complete closed-form solutions of the Stark problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 109, 333 – 366.
- Leblanc, F., Chaufray, J.Y., Bertaux, J.L., 2007. On Martian nitrogen dayglow emission observed by SPICAM UV spectrograph/Mars Express. *Geophysical Research Letters* 34.
- Lecavelier des Etangs, A., Vidal-Madjar, A., McConnell, J.C., Hébrard, G., 2004. Atmospheric escape from hot Jupiters. *Astronomy and Astrophysics* 418, L1–L4.
- Leclercq, L., Turc, L., François, L., Ronan, M., 2013. A 3D parallel model of Ganymede’s exosphere, in : EGU General Assembly Conference Abstracts, p. 9679.
- Lemaire, J., Scherer, M., 1974. Exospheric models of the topside ionosphere. *Space Science Reviews* 15, 591 – 640.
- Liwshitz, M., Singer, S., 1966. Thermal escape of neutral hydrogen and its distribution in the Earth’s thermosphere. *Planetary and Space Science* 14, 541 – 561.
- Lufkin, G., 2004. Simulations of giant planet migration in gaseous circumstellar disks. Ph.D. thesis. University of Washington.
- Mange, P., 1972. The exosphere and geocorona, in : Dyer, E. (Ed.), *Solar-Terrestrial Physics/1970*. Springer Netherlands. volume 11 of *Astrophysics and Space Science Library*, pp. 792 – 810.
- Maxwell, J.C., 1860. Illustrations of the Dynamical Theory of Gases. *Philosophical Magazine* 19, 19 – 32.
- Mayor, M., Queloz, D., 1995. A Jupiter-mass companion to a solar-type star. *Nature* 378, 355 – 359.
- McAfee, J.R., 1965. The Effect of Lateral Flow on Exospheric Densities. Ph.D. thesis. University of Pittsburgh.
- McAfee, J.R., 1967. Lateral flow in the exosphere. *Planetary and Space Science* 15, 599 – 609.
- McClintock, W.E., Bradley, E.T., Vervack, R.J., Killen, R.M., Sprague, A.L., Izenberg, N.R., Solomon, S.C., 2008. Mercury’s exosphere : Observations during messenger’s first mercury flyby. *Science* 321, 92 – 94.
- McClintock, W.E., Vervack, R.J., Bradley, E.T., Killen, R.M., Mouawad, N., Sprague, A.L., Burger, M.H., Solomon, S.C., Izenberg, N.R., 2009. Messenger observations of mercury’s exosphere : Detection of magnesium and distribution of constituents. *Science* 324, 610 – 613.
- McElroy, M.B., 1972. Mars : An Evolving Atmosphere. *Science* 175, 443 – 445.

- Meier, R.R., Mange, P., 1970. Geocoronal hydrogen : An analysis of the Lyman- $\alpha$  airglow observed from OGO-4. *Planetary and Space Science* 18, 803 – 821.
- Milne, E.A., 1923. *Transactions Cambridge Philosophical Society* 22, 483 – 517.
- Modolo, R., Chanteur, G.M., Dubinin, E., Matthews, A.P., 2005. Influence of the solar EUV flux on the Martian plasma environment. *Annales Geophysicae* 23, 433 – 444.
- Moutou, C., Coustenis, A., Schneider, J., Queloz, D., Mayor, M., 2003. Searching for helium in the exosphere of HD 209458b. *Astronomy and Astrophysics* 405, 341 – 348.
- Mura, A., 2012. Loss rates and time scales for sodium at mercury. *Planetary and Space Science* 63–64, 2 – 7. *Advances in Planetary Atmospheres and Exploration*.
- Nagy, A.F., Cravens, T.E., 1988. Hot oxygen atoms in the upper atmospheres of Venus and Mars. *Geophysical Research Letters* 15, 433– – 435.
- Nordsieck, A., Hicks, B.L., 1967. Monte Carlo Evaluation of the Boltzmann Collision Integral, in : Brundin, C.L. (Ed.), *Rarefied Gas Dynamics, Volume 1*, p. 695.
- Olver, F.W., Lozier, D.W., Boisvert, R.F., Clark, C.W., 2010. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge University Press, New York, NY, USA. 1st edition.
- Öpik, E.J., Singer, S.F., 1959. Distribution of Density in a Planetary Exosphere. *Physics of Fluids* 2, 653 – 655.
- Öpik, E.J., Singer, S.F., 1960. Distribution of Density in a Planetary Exosphere. *Physics of Fluids* 3, 486 – 488.
- Öpik, E.J., Singer, S.F., 1961. Distribution of Density in a Planetary Exosphere. II. *Physics of Fluids* 4, 221 – 233.
- Orsini, S., Livi, S., Torkar, K., Barabash, S., Milillo, A., Wurz, P., Lellis, A.D., Kallio, E., 2010. SERENA : A suite of four instruments (ELENA, STROFIO, PICAM and MIPA) on board BepiColombo-MPO for particle detection in the Hermean environment. *Planetary and Space Science* 58, 166 – 181. *Comprehensive Science Investigations of Mercury : The scientific goals of the joint ESA/JAXA mission BepiColombo*.
- Østgaard, N., Mende, S.B., Frey, H.U., Gladstone, G.R., Lauche, H., 2003. Neutral hydrogen density profiles derived from geocoronal imaging. *Journal of Geophysical Research : Space Physics* 108.
- Patterson, T.N.L., 1966. The diurnal variation of the atomic hydrogen concentration at the base of the exosphere. *Planetary and Space Science* 14, 425 – 431.
- Poppe, A.R., Halekas, J.S., Sarantos, M., Delory, G.T., 2013. The self-sputtered contribution to the lunar exosphere. *Journal of Geophysical Research : Planets* 118, 1934 – 1944.
- Potter, A., Morgan, T., 1985. Discovery of Sodium in the Atmosphere of Mercury. *Science* 229, 651 – 653.

- Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P., 1992. Numerical Recipes in C (2nd Ed.) : The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, New York, NY, USA.
- Prisco, R.A., Chamberlain, J.W., 1979. Doppler line profiles in a planetary corona - an extended approach. *Journal of Geophysical Research* 84, 4363 – 4370.
- Quessette, J.A., 1972. Atomic hydrogen densities at the exobase. *Journal of Geophysical Research* 77, 2997 – 3000.
- Rairden, R.L., Frank, L.A., Craven, J.D., 1986. Geocoronal imaging with Dynamics Explorer. *Journal of Geophysical Research* 91, 13613 – 13630.
- Raitt, W.J., Schunk, R.W., Banks, P.M., 1975. A comparison of the temperature and density structure in high and low speed thermal proton flows. *Planetary and Space Science* 23, 1103 – 1117.
- Rawer, K., Ramakrishnan, S., Bilitza, D., 1975. International reference ionosphere.
- Reid, R., Prausnitz, J., Poling, B., 1987. The properties of gases and liquids. McGraw-Hill series in chemical engineering, McGraw-Hill. 4th edition.
- Richter, E., Fahr, H.J., Nass, H.U., 1979. Satellite particle exospheres of planets : application to Earth. *Planetary Space Science* 27, 1163 – 1173.
- Sarantos, M., Hartle, R.E., Killen, R.M., Saito, Y., Slavin, J.A., Glocer, A., 2012. Flux estimates of ions from the lunar exosphere. *Geophysical Research Letters* 39.
- Schmidt, C.A., 2013. Monte Carlo modeling of north-south asymmetries in Mercury's sodium exosphere. *Journal of Geophysical Research : Space Physics* 118, 4564 – 4571.
- Seager, S., Sasselov, D.D., 2000. Theoretical Transmission Spectra during Extrasolar Giant Planet Transits. *The Astrophysical Journal* 537, 916 – 921.
- Shematovich, V.I., Johnson, R.E., Michael, M., Luhmann, J.G., 2003. Nitrogen loss from Titan. *Journal of Geophysical Research : Planets* 108.
- Shirley, J.H., Fairbridge, R.W., 1997. *Encyclopedia of Planetary Sciences*.
- Shizgal, B., 1981. A gaussian quadrature procedure for use in the solution of the boltzmann equation and related problems. *Journal of Computational Physics* 41, 309 – 328.
- Singer, S., 1960. Properties of the upper atmosphere and their relation to the radiation belts of the earth. *Planetary and Space Science* 2, 165 – 173.
- Smith, H.T., Johnson, R.E., Shematovich, V.I., 2004. Titan's atomic and molecular nitrogen tori. *Geophysical Research Letters* 31.
- Solomon, S.C., McNutt, R.L., Watters, T.R., Lawrence, D.J., Feldman, W.C., Head, J.W., Krimigis, S.M., Murchie, S.L., Phillips, R.J., Slavin, J.A., Zuber, M.T., 2008. Return to Mercury : A Global Perspective on MESSENGER's First Mercury Flyby. *Science* 321, 59 – 62.

- Sommerfeld, A., 1934. Atomic Structure and Spectral Lines. volume vol. 1. Methuen & Co.. 3rd edition.
- Spitzer, Jr., L., 1949. The terrestrial atmosphere above 300 km, in : Kuiper, G.P. (Ed.), The Atmospheres of the Earth and Planets. University of Chicago Press, 1952, 2nd edition.
- Stark, J., 1914. Beobachtungen über den effekt des elektrischen feldes auf spektrallinien. i. quereffekt. Annalen der Physik 348, 965 – 982.
- Stoney, G.J., 1868. On the physical constitution of the sun and stars. Proceedings of The Royal Society 17, 1 – 57.
- Stoney, G.J., 1898. Of Atmospheres upon Planets and Satellites. Astrophysical Journal 7, 25.
- Thomas, G.E., Bohlin, R.C., 1972. Lyman- $\alpha$  measurements of neutral hydrogen in the outer geocorona and in interplanetary space. Journal of Geophysical Research 77, 2752 – 2761.
- Tinsley, B.A., Hodges, R.R., Rohrbaugh, R.P., 1986. Monte carlo models for the terrestrial exosphere over a solar cycle. Journal of Geophysical Research : Space Physics 91, 13631 – 13647.
- Toublanc, D., Parisot, J., Brillet, J., Gautier, D., Raulin, F., McKay, C., 1995. Photochemical modeling of Titan's atmosphere. Icarus 113, 2 – 26.
- Trotignon, J.G., Mazelle, C., Bertucci, C., Acuña, M.H., 2006. Martian shock and magnetic pile-up boundary positions and shapes determined from the Phobos 2 and Mars Global Surveyor data sets. Planetary and Space Science 54, 357 – 369.
- Tucker, O.J., Johnson, R.E., Deighan, J.I., Volkov, A.N., 2013. Diffusion and thermal escape of H<sub>2</sub> from Titan's atmosphere : Monte Carlo simulations. Icarus 222, 149 – 158.
- Vaille, A., 2009. On Mars thermosphere, ionosphere and exosphere : Three-dimensional computational study of suprathermal particles. Ph.D. thesis. University of Michigan.
- Vaille, A., Combi, M.R., Bougher, S.W., Tennishev, V., Nagy, A.F., 2009a. Three-dimensional study of Mars upper thermosphere/ionosphere and hot oxygen corona : 2. Solar cycle, seasonal variations, and evolution over history. Journal of Geophysical Research (Planets) 114, 11006.
- Vaille, A., Tennishev, V., Bougher, S.W., Combi, M.R., Nagy, A.F., 2009b. Three-dimensional study of Mars upper thermosphere/ionosphere and hot oxygen corona : 1. General description and results at equinox for solar low conditions. Journal of Geophysical Research (Planets) 114, 11005.
- Vasyliunas, V.M., 1968. A survey of low-energy electrons in the evening sector of the magnetosphere with OGO 1 and OGO 3. Journal of Geophysical Research 73.
- Vidal-Madjar, A., 1975. Evolution of the solar Lyman- $\alpha$  flux during four consecutive years. Solar Physics 40, 69 – 86.
- Vidal-Madjar, A., Bertaux, J.L., 1972. A calculated hydrogen distribution in the exosphere. Planetary and Space Science 20, 1147 – 1162.

- Vidal-Madjar, A., Lecavelier des Etangs, A., 2004. “Osiris”(HD209458b), an Evaporating Planet, in : Beaulieu, J., Lecavelier Des Etangs, A., Terquem, C. (Eds.), *Extrasolar Planets : Today and Tomorrow*, p. 152.
- Waite, J., Bell, J., Lorenz, R., Achterberg, R., Flasar, F., 2013. A model of variability in Titan’s atmospheric structure. *Planetary and Space Science* 86, 45 – 56.
- Waite, J.H., Lewis, W.S., Kasprzak, W.T., Anicich, V.G., Block, B.P., Cravens, T.E., Fletcher, G.G., Ip, W.H., Luhmann, J.G., McNutt, R.L., Niemann, H.B., Parejko, J.K., Richards, J.E., Thorpe, R.L., Walter, E.M., Yelle, R.V., 2004. The Cassini Ion and Neutral Mass Spectrometer (INMS) Investigation. *Space Science Reviews* 114, 113 – 231.
- Waldrop, L., Paxton, L.J., 2013. Lyman- $\alpha$  airglow emission : Implications for atomic hydrogen geocorona variability with solar cycle. *Journal of Geophysical Research : Space Physics* 118, 5874 – 5890.
- Wallace, L., Barth, C.A., Pearce, J.B., Kelly, K.K., Anderson, D.E., Fastie, W.G., 1970. Mariner 5 measurement of the Earth’s Lyman- $\alpha$  emission. *Journal of Geophysical Research* 75, 3769 – 3777.
- Waterston, J.J., 1846. On the Physics of Media That Are Composed of Free and Perfectly Elastic Molecules in a State of Motion. *Proceedings of the Royal Society* 5, 604.
- Waterston, J.J., 1892. On the Physics of Media That Are Composed of Free and Perfectly Elastic Molecules in a State of Motion. *Philosophical Transactions of the Royal Society* , 1 – 79.
- Wisniak, J., 2007. John James Waterston : A pioneer of the kinetic theory of gases. *Educación Química* 18.
- Wolszczan, A., Frail, D.A., 1992. A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257 + 12. *nature* 355, 145 – 147.
- Yagi, M., Leblanc, F., Chaufray, J., Gonzalez-Galindo, F., Hess, S., Modolo, R., 2012. Mars exospheric thermal and non-thermal components : Seasonal and local variations. *Icarus* 221, 682 – 693.
- Yen, S., 1971. Monte carlo solutions of nonlinear boltzmann equation for problems of heat transfer in rarefied gases. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 14, 1865 – 1869.
- Zhang, P., Kharchenko, V., Jamieson, M.J., Dalgarno, A., 2009. Energy relaxation in collisions of hydrogen and deuterium with oxygen atoms. *Journal of Geophysical Research* 114.
- Zoennchen, J.H., Bailey, J.J., Nass, U., Gruntman, M., Fahr, H.J., Goldstein, J., 2011. The TWINS exospheric neutral H-density distribution under solar minimum conditions. *Annales Geophysicae* 29, 2211–2217.
- Zoennchen, J.H., Nass, U., Fahr, H.J., 2013. Exospheric hydrogen density distributions for equinox and summer solstice observed with TWINS1/2 during solar minimum. *Annales Geophysicae* 31, 513 – 527.

---

**Auteur de la thèse :** Arnaud BETH

**Titre de la thèse :** Modélisation semi-analytique des exosphères planétaires : analyse de l'influence des collisions et de la pression de radiation stellaire

**Discipline :** Astrophysique

**Directeurs de thèse :** Dominique TOUBLANC et Philippe GARNIER

**Date et lieu de soutenance :** le 21 juillet 2014 en salle de conférences de l'Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie (IRAP)

---

**Résumé :** La partie externe de l'atmosphère, l'exosphère, est une région encore mal connue. Les densités y sont trop faibles pour nombre d'instruments, et la modélisation de la dynamique des particules peut être complexe. Au cours de ma thèse, je me suis intéressé à deux problématiques : la production de particules « satellites » à partir des rares collisions dans la basse exosphère et l'influence de la pression de radiation sur la structure de l'exosphère.

Dans la première partie de ma thèse, nous avons modélisé l'impact des rares collisions près de l'exobase sur les densités à plus haute altitude pour les cas de la Terre, Titan et Mars, au travers de la production de particules « satellites », absentes des modèles non-collisionnels. Dans une seconde partie, j'ai étudié l'effet de la pression de radiation sur la structure de l'exosphère par une approche semi-analytique. La pression de radiation affecte les profils de densité des populations « balistiques » et induit de fortes asymétries à haute altitude. Elle augmente également le flux d'échappement thermique, que nous avons déterminé analytiquement au point subsolaire. Finalement, nous avons également étudié l'influence de la pression de radiation stellaire sur le problème à trois corps et son impact sur la stabilité des atmosphères, en particulier celles des exoplanètes de type Jupiters chauds.

**Mots-clés :** atmosphères, exoplanètes, Mars, Titan, modèles, exosphères

---

**Abstract :** The external part of the atmosphere, the exosphere, is not a well-known region. The densities are too low for many instruments compared with their detection capabilities, and the modeling of the particles dynamics can be complex. During my PhD thesis, I focused on two problems : the production of “satellite” particles from the scarce collisions in the lower exosphere and the influence of the radiation pressure on the exosphere structure.

In the first part of my thesis, we modeled the influence of the scarce collisions near the exobase on the density profiles at higher altitudes for the Earth, Titan and Mars, through the production of “satellite” particles, which are neglected in the collisionless models. In a second part, I studied the effect of the radiation pressure on the structure of the exosphere with a semi-analytical approach. The radiation pressure changes the ballistic particle density profiles and implies strong asymmetries at high altitudes. It increases also the thermal escaping flux, which we determined analytically at the subsolar point. Finally, we studied its influence on the Three-Body problem and on the stability of the atmospheres, in particular for hot Jupiter exoplanets.

**Keywords :** atmospheres, exoplanets, Mars, Titan, models, exospheres

---