



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du

**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

**Discipline ou spécialité :**

*Mathématiques Appliquées et Applications des Mathématiques*

---

---

Présentée et soutenue le 6 Octobre 2014 par :

**LAURELINE GUYS**

**Planification de Trajectoires d'Avions sans Conflit :  
Fonctions Biharmoniques et Fonction de Navigation Harmonique**

---

---

## JURY

FRANCK CAZAURANG	Université Bordeaux 1	Examineur
ÉRIC FÉRON	Georgia Institute of Technology	Rapporteur
JEAN-BAPTISTE HIRIART-URRUTY	Université Toulouse III	Examineur
PIERRE MARÉCHAL	Université de Toulouse - ISAE	Co-Directeur
MARCO PAVONE	Stanford University	Rapporteur
STÉPHANE PUECHMOREL	École Nationale de l'Aviation Civile	Co-Directeur

---

**École doctorale et spécialité :**

*MITT : Domaine Mathématiques : Mathématiques appliquées*

**Unité de Recherche :**

*MAIAA : Mathématiques Appliquées, Informatique et Automatique pour l'Aérien  
(École Nationale de l'Aviation Civile)*

**Directeur(s) de Thèse :**

*Pierre MARÉCHAL et Stéphane PUECHMOREL*

**Rapporteurs :**

*Éric FERON et Marco PAVONE*



# Remerciements

---

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué, d'une façon ou d'une autre, à la réussite de cette thèse. Et mes premiers remerciements vont à trois personnes sans qui cette thèse n'aurait jamais abouti : Laurent Lapasset, Stéphane Puechmorel et Brunilde Girardet.

Laurent merci pour ton soutien, tes encouragements et ton investissement. C'est grâce à toi que j'ai eu l'opportunité, puis la motivation de faire ces travaux.

Stéphane, tu as toujours été disponible pour répondre à mes questions, même lorsque tu n'avais pas le temps. Merci d'avoir eu la patience de m'expliquer, encore et encore, certains concepts et de m'avoir fait partager ton immense culture des mathématiques et des sciences en général.

Merci à Brunilde, ma binôme de toujours. Nous avons commencé l'aventure qu'est la thèse ensemble, et c'est avec un pincement au cœur que je la termine avant toi. Les questions que tu pouvais me poser étaient aussi précieuses que les réponses que tu me donnais. Et tu restes le meilleur canard en plastique jaune avec lequel j'ai pu travailler. Tes exploits en course à pied et vélo m'ont motivée et inspirée tout au long de ces trois années.

Je tiens également à exprimer ma gratitude envers Daniel Delahaye qui m'a mise en contact avec Capgemini alors qu'ils cherchaient des candidats pour lancer une thèse CIFRE et à remercier Capgemini d'avoir financé ces travaux.

Merci à Pierre Maréchal qui a accepté d'encadrer cette thèse, ainsi qu'à Éric Féron et Marco Pavone qui ont accepté de lire ce mémoire durant l'été.

Mes remerciements vont vers Clément Peyronne, le "grand frère" qui a ouvert la voie des thèses à Capgemini et m'a prodigué ses bons conseils. Merci aussi à Romaric Breil, le "petit frère" avec qui il est possible de parler Java, livres, musiques et jeux vidéos en une seule conversation.

Merci à Marie Boissonade-Azaïs pour les travaux réalisés durant son stage, mais surtout pour avoir animé l'open-space et m'avoir fait découvrir la magie du distributeur de M&M's.

Je souhaite également remercier toute l'équipe du laboratoire MAIAA pour l'accueil chaleureux et les conseils avisés (scientifiques ou non). Merci à Marcel pour ses précieuses relectures d'article, à Mohammed pour sa bonne humeur, à Pascal pour les conseils que je n'ai jamais

suivis, à Ludo pour avoir fait descendre le stock de M&M's et à Florence pour avoir partagé ses anecdotes d'enseignante et de mère.

Un grand merci à toute l'équipe PII qui m'a "hébergée" avant même l'installation officielle du laboratoire MAIAA dans le bâtiment Z. Grâce à vous j'ai vu la lumière (au sens propre du terme). Merci pour les batailles de sucre, les blagues et les discussions plus sérieuses autour du contrôle aérien. Votre bonne humeur m'a encouragée à persévérer dans mes efforts. Caroline, François, Bob, Gwen, Éric, Nicolas, Gérard, Christophe, Jean-Paul, Serge et tous ceux de la DTI, le bâtiment Z est devenu bien calme depuis qu'une partie d'entre vous est partie.

Merci à Emmanuel Bigeon pour les discussions (presque) interminables sans aucun rapport avec la thèse. Elles sont arrivées à un moment où j'avais bien besoin de me changer les idées et à chaque fois je reprenais la rédaction de ce mémoire avec un esprit (presque) reposé. Merci aussi pour la relecture, les reformulations, les corrections de fautes d'orthographe et toutes les remarques qui ont permis d'améliorer ce manuscrit.

Enfin, je remercie ma famille, qui m'a supportée et supportée durant ces trois années. Vous avez toujours été là pour moi et je n'y serais jamais arrivée sans vous. Merci à Maïlis qui a partagé le sprint d'avant bouclage et d'impression avec moi. Le dernier tome de Be-twin est sorti quelques semaines avant ce manuscrit et les aventures de Baba et d'Amychou m'ont redonné le sourire un nombre incalculable de fois.

# Table des matières

---

Introduction	9
<b>Trafic Aérien, Problématique et État de l'Art</b>	<b>11</b>
<b>Chapitre 1</b>	
<b>Deux Conceptions de la Gestion du Trafic Aérien</b>	<b>13</b>
<b>1 Opérations basées sur l'Espace Aérien</b>	<b>13</b>
1.1 Une Structuration de l'Espace pour le Contrôleur	13
1.2 Les Points Faibles de cette Structuration	15
<b>2 Opérations basées sur la Trajectoire</b>	<b>17</b>
2.1 Le Concept de Trajectoire 4D (WP4)	18
2.2 Le Concept de Free-Route Airspace (WP7)	18
<b>3 Une Automatisation du Système Nécessaire</b>	<b>19</b>
<b>Chapitre 2</b>	
<b>La Problématique de la Thèse</b>	<b>21</b>
<b>1 Cadre Opérationnel</b>	<b>21</b>
1.1 Les Trois Phases de Régulation du Trafic	21
1.2 Un Vol Contrôlé de la Porte de Départ à la Porte d'Arrivée	22
1.3 Les Techniques de Contrôle En-Route	23
<b>2 La Planification de Trajectoires : Hypothèses et Objectifs</b>	<b>26</b>
2.1 Hypothèses	26
2.2 Objectifs	27
<b>Chapitre 3</b>	
<b>Méthodes de Planification de Trajectoires</b>	<b>29</b>
<b>1 Terminologie</b>	<b>29</b>
1.1 Planification de Chemin ou de Trajectoire ?	29
1.2 Complétude des Planifications de Trajectoire	30
1.3 Espace de Travail, Espace de Configuration et Espace Libre	31
<b>2 Planification d'une Trajectoire pour un Mobile</b>	<b>32</b>
2.1 Décomposition Chemin-Vitesse	32
2.2 Méthodes Géométriques	33
2.3 Contrôle Optimal	37

2.4	Champ de Potentiel . . . . .	39
2.5	Conclusion . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Planification pour Plusieurs Mobiles . . . . .</b>	<b>42</b>
3.1	Séquencement . . . . .	42
3.2	Méthodes Itératives . . . . .	43
3.3	Système Multi-Agents (SMA) . . . . .	44
3.4	Mouvement Coordonné . . . . .	45
3.5	Conclusion . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Choix de la Méthode de Planification de Trajectoires . . . . .</b>	<b>49</b>

## Champs de potentiel 51

### Chapitre 4

#### Planification d'une Trajectoire :

#### Champs de Potentiel et Fonctions Harmoniques 53

<b>1</b>	<b>Les Champs de Potentiel . . . . .</b>	<b>53</b>
1.1	Champ de Potentiel Proposé par Khatib . . . . .	54
1.2	Développement des Champs de Potentiel et Applications . . . . .	58
1.3	Défauts des Champs de Potentiel . . . . .	58
1.4	Méthodes de Résolution du Problème des Minima Locaux . . . . .	61
<b>2</b>	<b>Solution pour les Minima Locaux : les Fonctions Harmoniques . . . . .</b>	<b>61</b>
2.1	Les Champs de Potentiel Harmoniques . . . . .	62
2.2	Avantages et Inconvénients des Champs de Potentiel Harmoniques . . . . .	69
<b>3</b>	<b>Pistes de Recherche pour la Planification de Trajectoires d'Avions . . . . .</b>	<b>71</b>
3.1	Deux Méthodes pour la Construction de Champs de Potentiel Harmoniques . . . . .	71
3.2	Solution au Problème du Coût en Temps de Calcul . . . . .	72
3.3	Solution au Problème de la Forme des Trajectoires . . . . .	72

### Chapitre 5

#### Planification d'une Trajectoire :

#### Fonctions Biharmoniques 73

<b>1</b>	<b>Les Fonctions Biharmoniques pour la Planification d'une Trajectoire . . . . .</b>	<b>73</b>
1.1	Principe de la Méthode : Analogie avec la Mécanique du Solide . . . . .	73
1.2	Théorie de l'Élasticité, Équation Biharmonique et Champ de Contraintes . . . . .	74
1.3	Discussion sur la Méthode de Masoud <i>et al.</i> . . . . .	78
<b>2</b>	<b>Nouvelle Méthode . . . . .</b>	<b>79</b>
2.1	Nouveau Système et Méthode de Résolution . . . . .	79
2.2	Redressement du Champ de Vecteurs Propres . . . . .	82
2.3	Garanties Théoriques . . . . .	84
<b>3</b>	<b>Étude du Champ de Navigation Biharmonique . . . . .</b>	<b>86</b>
3.1	Lignes de Discontinuité dans le Champ . . . . .	87
3.2	Zones de Convergence . . . . .	88
3.3	Influence de la Taille de l'Espace Libre . . . . .	88
<b>4</b>	<b>Étude des Trajectoires Biharmoniques . . . . .</b>	<b>88</b>
4.1	Impact des Lignes de Discontinuité et des Zones de Convergence . . . . .	89
4.2	Trajectoires de Dirichlet, de Neumann et Biharmonique . . . . .	92

<b>5</b>	<b>Conclusions et Perspectives sur la Méthode Biharmonique</b> . . . . .	97
5.1	Conclusions . . . . .	97
5.2	Perspectives . . . . .	97
<b>Chapitre 6</b>		
	<b>Planification de Plusieurs Trajectoires Coordonnées</b>	<b>101</b>
<b>1</b>	<b>Espace de Configuration</b> . . . . .	101
<b>2</b>	<b>Method of Fundamental Solutions (MFS)</b> . . . . .	102
2.1	Principe de la MFS et Calcul d'une Trajectoire pour un Mobile . . . . .	102
2.2	Solutions Fondamentales Harmoniques et Biharmoniques . . . . .	104
<b>3</b>	<b>Mouvement Coordonné de Plusieurs Avions</b> . . . . .	105
3.1	Solution Fondamentale Harmonique en 4D . . . . .	105
3.2	Produit Tensoriel de Deux Fonctions Harmoniques 2D . . . . .	106
3.3	Produit Tensoriel de Trois Fonctions Harmoniques 2D . . . . .	111
<b>4</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	112
<b>Fonctions de Navigation</b>		<b>115</b>
<b>Chapitre 7</b>		
	<b>Naissance et Développement des Fonctions de Navigation</b>	<b>117</b>
<b>1</b>	<b>Naissance des Fonctions de Navigation</b> . . . . .	117
<b>2</b>	<b>Définition et Propriétés d'une Fonction de Navigation</b> . . . . .	118
2.1	Espace de Travail et Espace Libre . . . . .	118
2.2	Fonction de Morse . . . . .	119
2.3	Fonction de Navigation . . . . .	119
<b>3</b>	<b>Fonction de Navigation de Rimon et Koditschek</b> . . . . .	121
<b>4</b>	<b>Espaces de Configuration pour des Disques</b> . . . . .	123
<b>5</b>	<b>Fonction de Navigation de Kyriakopoulos <i>et al.</i></b> . . . . .	124
5.1	Forme Centralisée . . . . .	124
5.2	Fonction de Navigation Décentralisée pour l'ATM . . . . .	125
<b>6</b>	<b>Fonction de Navigation de Loizou</b> . . . . .	126
<b>7</b>	<b>Conclusion sur les Fonctions de Navigation</b> . . . . .	127
<b>Chapitre 8</b>		
	<b>Fonction de Navigation Harmonique</b>	<b>129</b>
<b>1</b>	<b>Fonction de Navigation Harmonique : Définition et Résultats</b> . . . . .	129
1.1	Définition de la Fonction de Navigation Harmonique . . . . .	130
1.2	Preuve de l'Arrivée des Avions à leur Destination . . . . .	133
1.3	Résultats . . . . .	136
<b>2</b>	<b>Ajout de Zones Interdites dans l'Espace</b> . . . . .	139
2.1	Nouvelle Formulation . . . . .	139
2.2	Nouvelle Fonction de Lyapunov . . . . .	140
2.3	Résultats . . . . .	141
<b>3</b>	<b>Propriétés de la Fonction de Navigation Harmonique</b> . . . . .	142
3.1	Caractère Morse de $\phi_H$ . . . . .	142
3.2	Impossibilité de l'Évitement de Conflits . . . . .	146

<b>4</b>	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>147</b>
4.1	Conclusion	147
4.2	Perspectives	147
	<b>Conclusion</b>	<b>151</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>155</b>
	<b>Annexe : Le Trafic Aérien en Détail</b>	<b>163</b>
<b>1</b>	<b>La Structure Actuelle de l'Espace Aérien</b>	<b>163</b>
1.1	Niveaux de Vol	163
1.2	Balises et Routes	164
1.3	Plans de Vol	165
1.4	Secteurs	166
<b>2</b>	<b>Une Organisation Centrée autour du Network Manager</b>	<b>168</b>
2.1	Un Système, de Multiples Acteurs, de Multiples Niveaux	168
2.2	Network Manager	168
<b>3</b>	<b>Single European Sky ATM Research (SESAR)</b>	<b>170</b>
	<b>Liste des Acronymes</b>	<b>171</b>
	<b>Index</b>	<b>173</b>
	<b>Productions de la Thèse</b>	<b>175</b>



# *Introduction*

---

D'après les prévisions d'Eurocontrol, le trafic aérien en Europe pourrait représenter jusqu'à 2,7 fois le trafic actuel d'ici à 2050. Or le système de contrôle aérien atteint déjà ses limites en terme de capacité : il ne peut pas gérer plus d'avions en toute sécurité. Cette limite de capacité est déjà une source récurrente de retards et une augmentation du trafic ne ferait qu'accentuer ce phénomène.

Afin de pallier ce problème, deux grands projets, Single European Sky ATM Research (SESAR) en Europe et NextGen aux États-Unis, étudient diverses pistes de réforme du système de contrôle aérien. Des technologies comme le Global Positioning System (GPS) ou les communications par satellite, qui font maintenant partie de notre vie quotidienne, sont à l'étude afin de les appliquer au contrôle aérien. Ces technologies ouvrent de nombreuses perspectives d'amélioration du matériel, mais aussi des procédures de contrôle actuelles.

Parmi les pistes proposées par SESAR et NextGen afin d'augmenter la capacité du système Air Traffic Control (ATC) se trouve la suppression du réseau de routes aériennes que les avions doivent actuellement suivre. Ce sont ces routes qui permettent aux contrôleurs d'anticiper et de résoudre les conflits aériens (deux avions qui volent plus près l'un de l'autre que la distance de sécurité) en limitant les incertitudes sur les positions des avions. Mais cette structuration du trafic le condense également dans certaines zones de l'espace aérien.

En supprimant ce réseau de routes (on parle alors de Free-Route), la totalité de l'espace aérien pourrait être utilisée et sa capacité en serait ainsi augmentée. Mais une telle modification de la structure de l'espace aérien ne peut se faire sans introduire de nouveaux outils d'aide à la décision pour assister les contrôleurs dans leur travail.

L'objectif de cette thèse est de présenter une méthode permettant de planifier des trajectoires sans conflit pour un grand nombre d'avions. Cette planification serait réalisée plusieurs jours avant le décollage des avions, afin d'organiser le trafic et d'offrir aux contrôleurs une situation plus simple à gérer.

## **Comment Lire cette Thèse**

Ce manuscrit a été construit en trois parties distinctes que nous avons essayé de rendre les plus indépendantes possibles. Le but est de permettre à un lecteur averti d'ignorer les parties (ou les chapitres) dont il n'aurait pas besoin. De nombreux renvois permettent tout au long du

manuscrit d'aller chercher les éléments nécessaires qui auraient pu être sautés dans une première lecture.

La première partie regroupe le chapitre exposant le contexte du trafic aérien (Chapitre 1), celui détaillant le problème abordé durant cette thèse (Chapitre 2), ainsi qu'un état de l'art sur les méthodes de planification de trajectoires déjà proposées par la communauté scientifique (Chapitre 3).

La deuxième partie contient tous les travaux effectués sur la planification de trajectoires à partir de champs de potentiel obtenus par résolution d'Équation aux Dérivées Partielles (EDP). Elle regroupe une bibliographie sur les champs de potentiel (Chapitre 4), l'étude des champs biharmoniques pour la construction d'une trajectoire (Chapitre 5) et la planification coordonnée de plusieurs trajectoires à partir de champs de potentiel (Chapitre 6).

La troisième partie présente les études réalisées sur les fonctions de navigation, qui sont des champs de potentiel particuliers. Après une brève bibliographie (Chapitre 7), une nouvelle fonction de navigation adaptée à la planification de trajectoires d'avions est présentée (Chapitre 8).

### Contributions

Les travaux réalisés durant cette thèse peuvent être séparés en deux parties distinctes, qui correspondent respectivement aux deuxième et troisième parties de ce manuscrit. Chacune comporte un chapitre d'état de l'art, suivi de la présentation de nos travaux.

Les contributions de cette thèse peuvent donc être trouvées :

- Chapitre 5 pour la planification d'une trajectoire en utilisant des fonctions biharmoniques.
- Chapitre 6 pour le mouvement coordonné de plusieurs mobiles à partir d'espaces de configuration et de champs de potentiel basés sur la résolution d'EDP.
- Chapitre 8 pour la création d'une nouvelle fonction de navigation harmonique permettant la planification de trajectoires d'un grand nombre d'avions. **C'est cette méthode qui offre le plus de perspectives pour la résolution du problème étudié durant cette thèse.**

Chacun de ces chapitres possède ses propres résultats et sa propre conclusion, qui sont ensuite résumés dans la conclusion générale de ce mémoire.

*Première partie*

**Gestion du Trafic Aérien,  
Problématique et État de l'Art**



# Chapitre 1

## Deux Conceptions de la Gestion du Trafic Aérien

Le système de contrôle aérien actuel est basé sur un réseau de routes et un découpage de l'espace aérien en secteurs. Cette structuration de l'espace est indispensable pour que les contrôleurs aériens puissent garantir la sûreté du système. Elle amène néanmoins des contraintes qui réduisent aujourd'hui les performances du système d'Air Traffic Management (ATM).

Nous présentons dans ce chapitre les grandes lignes de la gestion du trafic aérien. Une explication plus détaillée du système peut être trouvée en Annexe de ce mémoire.

### 1 Opérations basées sur l'Espace Aérien

Dans le système basé sur l'espace aérien, les éléments de base autour desquels s'organise le système sont les *secteurs* et les *routes aériennes* (voir Figure 1.1). Tous les outils et les procédures de l'Air Traffic Control (ATC) ont été développés autour de ces deux éléments de base afin de garantir la sûreté du système.

#### 1.1 Une Structuration de l'Espace pour le Contrôleur

Si les outils de contrôle se sont améliorés au fil du temps, le contrôleur reste au cœur du système ATC. La structure de l'espace aérien a donc été adaptée afin de tenir compte des capacités de visualisation et de décision d'un être humain.

Un contrôleur aérien ne peut pas surveiller seul le trafic sur un espace trop vaste tout en garantissant un certain niveau de sûreté pour tous les avions qui le traverse. Afin de répartir la charge de travail entre plusieurs contrôleurs, l'espace aérien est découpé en secteurs.

Afin de suivre les avions traversant leur secteur, les contrôleurs disposent d'une image radar à laquelle est ajoutée, pour chaque avion, une étiquette contenant des informations telles que son altitude et sa vitesse. Les contrôleurs ne disposent donc que d'une image 2D pour visualiser un espace 3D. Une telle représentation rend les changements d'altitude des avions difficiles à percevoir. Pour limiter les risques de collisions liées aux changements d'altitude, les avions sont maintenus sur des *niveaux de vol* séparés d'une distance de sécurité de 1000 pieds (ft).



FIGURE 1.1 – La carte des routes aériennes supérieures au-dessus de la France. ©SIA

Tous les avions volant sur un même niveau de vol doivent être surveillés afin de prévenir tout risque de collision. Leur évolution dans l'espace est facile à suivre puisqu'elle correspond à leur trace radar.

Mais prédire les trajectoires des avions afin de prévenir les collisions serait impossible sans le système de routes aériennes. Elles organisent le trafic en flux, limitant l'espace dans lequel les avions peuvent voler : il suffit ainsi aux contrôleurs de surveiller ces routes et leurs intersections.

La prédictibilité du trafic est améliorée par l'utilisation de *plans de vol*, que les compagnies aériennes s'engagent à respecter. Ils permettent aux contrôleurs d'anticiper le trafic qui traversera leur secteur.

## 1.2 Les Points Faibles de cette Structuration

D'après les prévisions d'Eurocontrol, le trafic aérien en 2050 devrait représenter entre 1,1 et 2,7 fois le trafic actuel. Or le système actuel atteint déjà ses limites, en terme de capacité (nombre d'avions pouvant voler dans une zone donnée), de fiabilité (retards), mais aussi de coûts.

### Capacité Limitée et Retards

La ponctualité des avions à l'atterrissage en Europe est présentée Figure 1.2, pour les années 2012 et 2013.

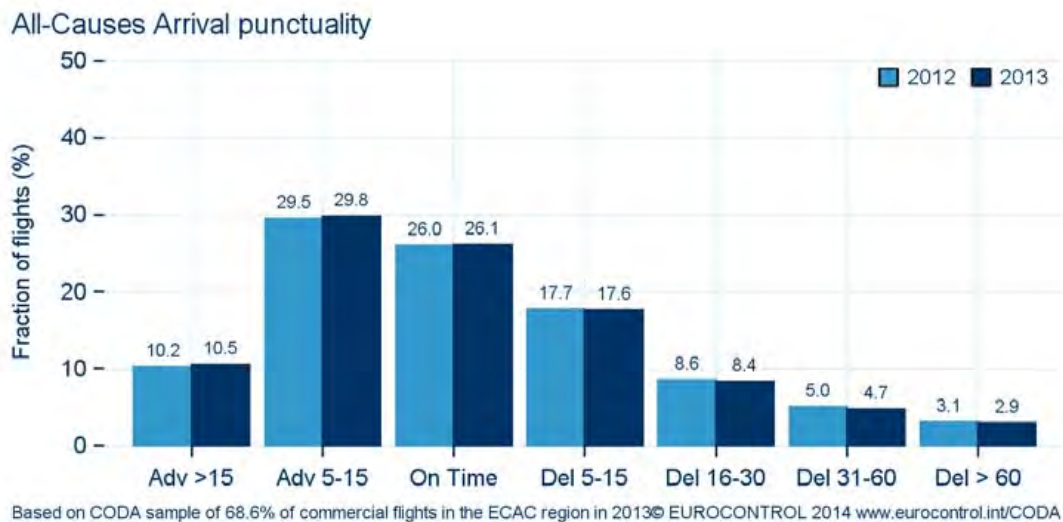


FIGURE 1.2 – Ponctualité des vols en Europe en 2012 et 2013. [Eurocontrol 2013a]

Près de 35% des vols en Europe arrivent à destination avec plus de cinq minutes de retard. Certains d'entre eux semblent inévitables : même avec le meilleur des systèmes, une tempête de neige induira forcément des retards, voire des annulations de vol. Mais les mauvaises conditions météorologiques ne représentent pas plus d'un quart des retards en Europe (voir Figure 1.3). Les autres ne sont pas dus à des imprévus, mais à l'incapacité du système à absorber le trafic. Les méthodes et outils actuels de gestion des compagnies aériennes, des aéroports et du contrôle en-route (*Airline*, *Airport* et *En-Route* de la Figure 1.3) ne permettent pas une utilisation optimale de l'espace aérien. Autant de points sur lesquels le système peut être amélioré.

Mais le pire ennemi du système ATM est l'effet "boule de neige". Tous les retards cités précédemment en entraînent d'autres : un avion ne peut pas décoller avec ses nouveaux passagers tant qu'il n'a pas atterri et débarqué les anciens. Un équipage arrivant plus tard que prévu peut avoir dépassé son quota horaire de travail et devoir être remplacé. Tous ces retards "induits" (*Reactionary delays* de la Figure 1.3) peuvent représenter à eux seuls jusqu'à de 50% des retards du système ATM européen.

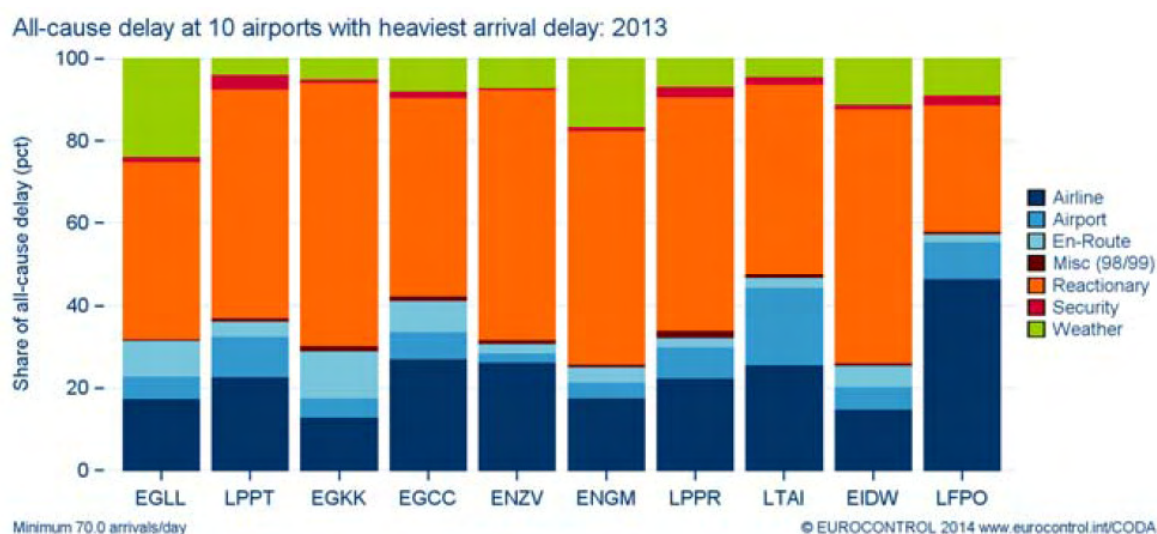


FIGURE 1.3 – Causes des retards dans les dix aéroports ayant enregistré le plus de retard en Europe en 2013. [Eurocontrol 2013a]

### Coûts Opérationnels

Les coûts opérationnels du système ATM européen excèdent largement ceux du système des États-Unis, comme le montre la Table 1.1. Avec une densité relative (heures de vol par km<sup>2</sup>) presque deux fois supérieure à celle en Europe, les coûts opérationnels du système américain sont néanmoins de 12% plus faibles que les coûts en Europe.

Année 2012	Europe	USA	USA vs. Europe
Surface (million km <sup>2</sup> )	11,5	10,4	-10%
Nombre d'ANSP	37	1	
Nombre de contrôleurs	17 200	13 300	-23%
Personnel total	58 000	35 500	-39%
Vols contrôlés (million)	9,5	15,2	+59%
Densité relative (heures de vol par km <sup>2</sup> )	1,2	2,2	×1,8
Centres en-route	63	20	-42
Coûts ATM (en million en 2011)	8,4	7,8	-12%

TABLE 1.1 – Comparaison entre les systèmes ATM en Europe et aux USA pour l'année 2012. [Eurocontrol 2013b]

Cette différence s'explique en partie par l'organisation du système ATM en Europe. Alors que la totalité du ciel américain est gérée par une entité unique, le ciel européen reste morcelé au niveau national et géré par les 37 Air Navigation Service Provider (ANSP) qui sont en communication permanente avec Eurocontrol. Une telle organisation entraîne des surcoûts qui limitent les performances du système ATM actuel.



Une autre explication de la meilleure performance du système américain vient de la grande structuration Est-Ouest du trafic, qui facilite le travail des contrôleurs dans la partie centrale des États-Unis.

### Vers une Amélioration du Système

Les nouvelles technologies permettent aujourd'hui d'envisager une réforme de la gestion du trafic aérien. Deux grands projets, SESAR en Europe et NextGen aux États-Unis explorent toutes les pistes d'amélioration possibles. Parmi les propositions avancées, on trouve l'utilisation de l'Automatic Dependent Surveillance-Broadcast (ADS-B) exploitant les données GPS pour le suivi des avions (à la place des systèmes radars), ce qui permettrait notamment une localisation en survol océanique. La mise en place de communications numériques (data-link) permettra à terme un meilleur échange de données de vol et météorologiques.

Parmi les nombreux concepts développés par SESAR, nous nous intéressons plus particulièrement à ceux étudiés dans le cadre du Work Package (WP)4 (En-route Operations) et du WP7 (Network Operations).

## 2 Opérations basées sur la Trajectoire

Le Trajectory Based Operations (TBO) est une des idées majeures proposées par SESAR consistant à mettre la trajectoire au cœur du système ATC. La trajectoire d'un avion ne serait ainsi plus gérée morceau par morceau (secteur par secteur), mais dans sa globalité, depuis le décollage de l'avion jusqu'à son atterrissage.

L'objectif du TBO est de réduire le temps de vol, et d'améliorer les performances ainsi que la prédictibilité du trafic. Certains problèmes pourront ainsi être détectés plus tôt et leur impact sur le système global réduit. Il sera également possible d'augmenter la capacité du système, que ce soit sur la phase en-route ou dans les aéroports, tout en maintenant le niveau de sûreté actuel.

Du point de vue des compagnies aériennes, le TBO permettra d'optimiser leurs opérations. Les avions pourront en effet suivre leur route préférentielle au niveau de vol souhaité, réduisant ainsi la consommation de carburant et le temps de vol. Le TBO évitera le plus souvent l'envoi en circuit d'attente (hippodromes) pour l'atterrissage. Il en résultera naturellement une diminution des émissions polluantes.

Le TBO repose sur plusieurs éléments clés :

- ✈ Reference Business Trajectory (RBT) : Trajectoire 4D (voir Section 2.1) négociée entre les différents acteurs du système. Les utilisateurs de l'espace aérien acceptent de la suivre avec précision et les ANSP et aéroports s'engagent à la faciliter.
- ✈ Merging point : Point situé à proximité d'un aéroport vers lequel convergent tous les avions souhaitant atterrir sur une piste donnée. Le merging point doit permettre de séquencer le trafic afin d'assurer une durée optimale entre deux atterrissages.
- ✈ Controlled Time of Arrival (CTA) : Contrainte temporelle imposée à un avion à son arrivée et associée au merging point de sa piste d'atterrissage.

Le processus de négociation de la RBT permettra de réduire considérablement le nombre de conflits avant même que les avions ne décollent. Ces RBT peuvent être planifiées de manière coordonnée afin de réduire au maximum le nombre de conflits susceptibles d'avoir lieu, à condition que les avions suivent ces RBT avec précision. La tâche de contrôle des contrôleurs sera donc facilitée puisque le nombre de conflits sera réduit et qu'ils auront accès à plus d'informations sur les vols.

### 2.1 Le Concept de Trajectoire 4D (WP4)

Le but de la *trajectoire 4D* est de permettre à un avion de s'affranchir du réseau de routes aériennes, et ainsi de suivre une trajectoire optimale. En échange, l'avion s'engage à respecter des heures de passage (de manière très précise) à des points donnés de la trajectoire. Le terme trajectoire 4D vient donc de l'idée que la trajectoire est connue en 3D (niveau de vol et position dans le plan) et qu'une quatrième dimension est ajoutée pour représenter le temps (heure de passage précise à certains points de la trajectoire). Ainsi un retard déformera la trajectoire de la même façon qu'un changement de vol ou un changement de cap.

#### Mise en Œuvre Opérationnelle

La mise en œuvre opérationnelle de la trajectoire 4D est prévue en deux étapes. La première est appelée initial 4D (i4D) et la deuxième Full 4D. La i4D consiste simplement à imposer un CTA aux merging points pour tous les avions, afin d'assurer le meilleur séquençage possible du trafic à l'arrivée. Cette première phase ne pose aucun réel défi technique, puisqu'elle peut être implémentée dans tous les aéroports et pour tous les avions disposant de l'équipement adéquat. La deuxième, Full 4D, représentera le véritable challenge puisqu'elle nécessite la mise en place du concept de secteurs free-route que nous présentons dans la Section 2.2 de ce chapitre.

Une première expérience de trajectoire i4D a été menée le 10 février 2012, entre Toulouse, Copenhague et Stockholm. Ce test a permis de vérifier la viabilité de l'échange automatique de données entre l'avion et le sol par data-link et de valider la façon dont les informations partagées entre le sol et le bord apparaissent sur les écrans des contrôleurs et des pilotes.

Dans le cadre de la Full 4D, les avions ne seront plus astreints à suivre les routes aériennes. Les conflits qui apparaissent auparavant aux intersections des routes pourront ainsi avoir lieu n'importe où dans le secteur. Et même si leur nombre sera réduit par une planification coordonnée des trajectoires et par l'utilisation de la totalité de l'espace aérien disponible, leur détection et leur résolution seront moins aisées pour les contrôleurs. Des procédures et outils adéquats de détection, visualisation et proposition de résolution devront donc être mis en place pour les aider dans leur travail.

### 2.2 Le Concept de Free-Route Airspace (WP7)

Un free-route airspace, ou secteur free-route, est un secteur en-route dans lequel les utilisateurs peuvent définir librement leur route entre le point d'entrée et le point de sortie du secteur. Cette route "libre" est définie à l'aide de points intermédiaires indépendants du réseau de routes actuel, tout en tenant compte de la disponibilité de l'espace. Ces secteurs restent contrôlés par des contrôleurs aériens et soumis à des restrictions (zones d'exclusion militaire par exemple).

### Objectifs des Secteurs Free-Route

Les objectifs du concept de secteur free-route sont assez similaires aux objectifs de la trajectoire 4D. Il s'agit d'améliorer la prédictibilité du trafic, d'augmenter la capacité du système ATM, de diminuer les consommations de carburant et donc de réduire l'impact environnemental du trafic aérien. Le concept de secteur free-route doit aider à atteindre un équilibre entre performances pour les vols et demande en terme de capacité, tout en maintenant, voire en améliorant le niveau de sûreté actuel.

Les bénéfices attendus par la généralisation des secteurs free-route sur un quart de l'espace aérien européen représentent par an [Eurocontrol 2012] :

- 7,5 millions de milles marins ; soit 13,9 millions de kilomètres,
- 45 000 tonnes de carburant économisées,
- 150 000 tonnes de CO<sub>2</sub> en moins rejetées dans l'atmosphère,
- 37 millions d'euros économisés.

### Mise en Pratique : l'Espace de Maastricht

Depuis plusieurs d'années maintenant les contrôleurs aériens de Maastricht donnent la possibilité aux avions de suivre des directes (lignes droites) vers leur destination lorsque c'est possible. Mais ces directes n'apparaissent pas sur les plans de vol qui s'en tiennent au réseau de routes existant. En mars 2011, 142 nouvelles routes directes ont été introduites dans l'espace aérien de Maastricht (voir Figure 1.4).

Le programme Free Route Airspace Maastricht (FRAM) a permis de valider d'un point de vue opérationnel le concept de secteur free-route, mais aussi d'en montrer les limites. Un secteur free-route sans contraintes ne semble pas envisageable à Maastricht du fait de la complexité du secteur, ainsi que de la nature et de la densité du trafic qui le traverse.

## 3 Une Automatisation du Système Nécessaire

Le concept de secteur free-route est en fait limité par les outils et techniques de contrôle actuels. Il semble en effet impossible de demander aux contrôleurs aériens de visualiser des trajectoires courbes et d'anticiper les risques de conflit dans des situations où les avions changeraient de direction en permanence. Sans des outils de planification, de visualisation et d'aide à la décision adaptés, le plein potentiel du concept de TBO et des espaces free-route ne pourra jamais être exploité. Ces nouveaux outils ne pourront apparaître que dans le cadre d'une automatisation partielle du système.

Le travail de cette thèse repose sur ces concepts de TBO et de secteur free-route. Notre but est de construire une méthode de planification de trajectoires 4D sans conflit, dans le cadre d'espaces free-route.

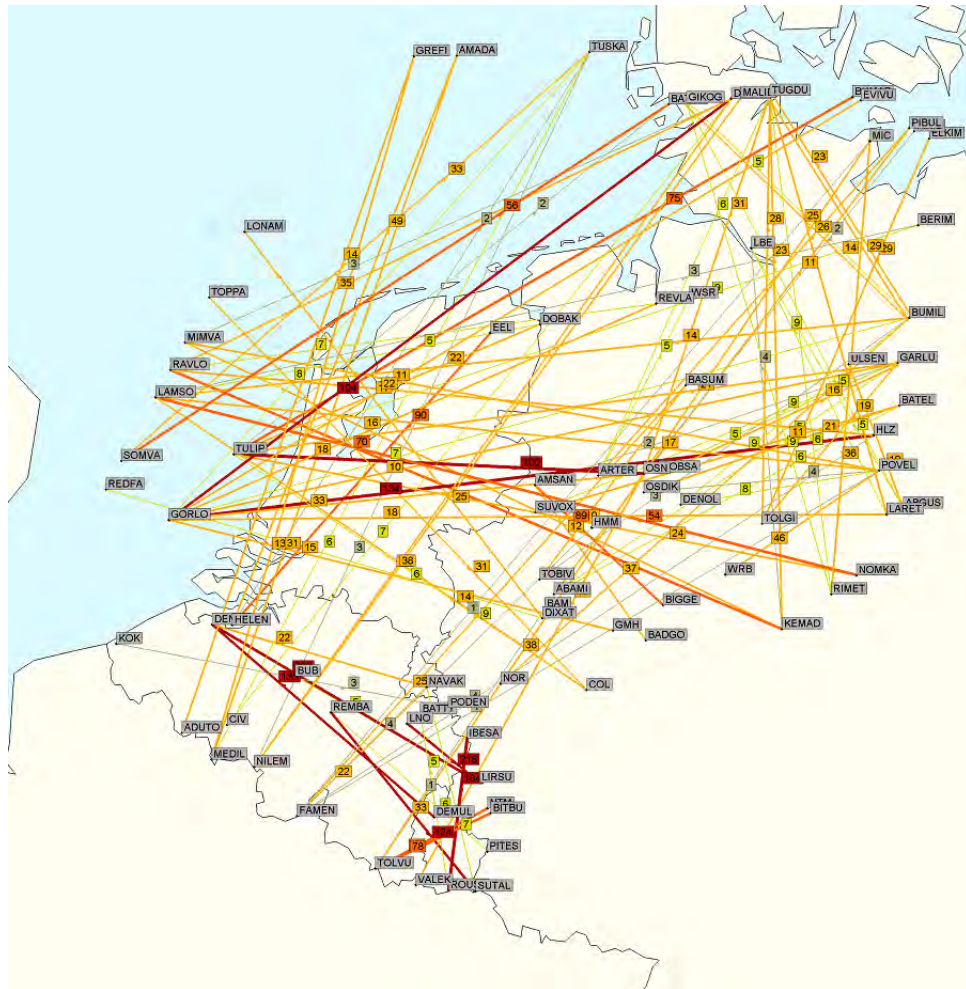


FIGURE 1.4 – Free-route dans l'espace de Maastricht : les 142 nouvelles routes ajoutées par le programme FRAM. ©Eurocontrol 2013-2014.

## Chapitre 2

# La Problématique de la Thèse

L'objectif de cette thèse est de développer une méthode de planification de trajectoires d'avions dans un contexte de secteurs free-route plusieurs jours, voire semaines à l'avance. Ce chapitre présente le cadre opérationnel dans lequel serait effectuée cette planification de trajectoires. Nous déduisons ensuite de ce cadre opérationnel des hypothèses de travail et des objectifs à atteindre.

## 1 Cadre Opérationnel

Tout au long du processus de régulation du trafic aérien, les trajectoires des avions sont planifiées, puis modifiées, afin de tenir compte des demandes des compagnies aériennes et de la capacité des secteurs. Nous présentons ici les trois phases de régulation du trafic, ainsi que les différentes planifications de trajectoires qui leur sont associées.

### 1.1 Les Trois Phases de Régulation du Trafic

Du point de vue de l'Air Traffic Flow and Capacity Management (ATFCM), la préparation d'un vol commence avec le dépôt d'un plan de vol, dépôt qui peut être effectué jusqu'à un an avant le décollage de l'avion. Le plan de vol déposé contient la première trajectoire de l'avion. Le processus de régulation dure ensuite jusqu'au jour du décollage.

L'objectif de ce processus de régulation est d'assurer la fluidité du trafic, ainsi que de minimiser les retards et les coûts du système ATM. Ce processus de régulation ATFCM est mené par le Network Manager Operations Center (NMOC), présenté en Annexe, Section 2.2.

#### La Phase Stratégique (de 1 an à J-7)

Cette phase s'étend de l'année qui précède le vol à environ une semaine avant le début du vol. Durant cette phase, le NMOC analyse les prévisions de demande et de capacité du système ATM, basées sur les plans de vol déposés. C'est durant cette phase que des objectifs de capacité sont fixés à tous les secteurs de contrôle en fonction du trafic devant les traverser. Le réseau de routes aériennes est également adapté pour optimiser les flux et maximiser la capacité de l'espace aérien. Enfin, les événements majeurs (entraînements militaires, événements sportifs) et leur impact sur le trafic sont pris en compte dès la phase de régulation stratégique.

Les plans de vol des avions peuvent être modifiés plusieurs fois durant cette phase, pour tenir compte des changements du réseau de routes ou pour éviter des secteurs congestionnés (secteur où la prévision de trafic est supérieure à la capacité du secteur). Dans le cadre actuel où les trajectoires suivent les routes aériennes, cette replanification de route peut être traitée comme une recherche de plus court chemin dans un graphe.

Dans le cas de secteurs free-route (disparition des routes aériennes), la planification de trajectoire ne s'apparente plus au parcours d'un graphe, mais à la recherche d'une trajectoire 4D continue. **Notre objectif est de remplacer les routes aériennes présentées dans les plans de vol déposés durant la phase stratégique de régulation par des trajectoires 4D en free-route.**

### La Phase Pré-tactique (J-6 à J-1)

La phase pré-tactique comprend les six jours avant le vol. C'est durant cette phase que des mesures globales de gestion de flux (reroutements, retards sur les décollages) sont prises et diffusées à l'ensemble des acteurs du système ATM, en fonction des prévisions de trafic, des prévisions météorologiques, mais aussi de données statistiques issues des années précédentes.

### La Phase Tactique (jour J)

Le jour du vol, le processus de régulation vise à optimiser la capacité du système en temps réel et à offrir des alternatives aux avions pour minimiser les retards : allocation de créneaux de décollage, modification de trajectoires pour éviter les zones congestionnées, etc.

La phase de régulation tactique s'arrête environ deux heures avant l'heure prévue à l'origine pour le décollage de l'avion. Les pilotes connaissent alors toutes les régulations qui impacteront leur vol (changement de route, nouvelle heure de décollage).

Dès que l'avion quitte sa place de parking, il rentre dans la phase de contrôle.

## 1.2 Un Vol Contrôlé de la Porte de Départ à la Porte d'Arrivée

Les principales étapes d'un vol sont représentées Figure 2.1. Selon la taille de l'aéroport, les phases de roulage et décollage peuvent être contrôlées par un ou plusieurs contrôleurs d'aérodrome. Après le décollage, l'avion est pris en charge par un autre contrôleur, qui gère les phases de montée. L'avion passera ensuite entre les mains de plusieurs équipes de contrôleurs en-route durant sa phase de croisière (une équipe par secteur traversé). À l'approche de son aéroport de destination, l'avion est pris en charge par un contrôleur d'approche, gérant les phases de descente dans la Terminal Manoeuvring Area (TMA). Les contrôleurs d'aérodrome prennent ensuite le relais pour l'atterrissage et le roulage à l'aéroport de destination.

Le concept de secteurs free-route auquel nous nous intéressons n'est applicable qu'à la phase de croisière du vol, et ce pour plusieurs raisons. La première est la densité des avions. Les secteurs d'approche des aéroports (dans lesquels se déroulent les phases de montée et de descente) sont beaucoup plus chargés que les secteurs en-route. L'avantage du free-route repose sur l'utilisation de l'espace laissé vide par le réseau de routes pour "étaler" les trajectoires des avions.

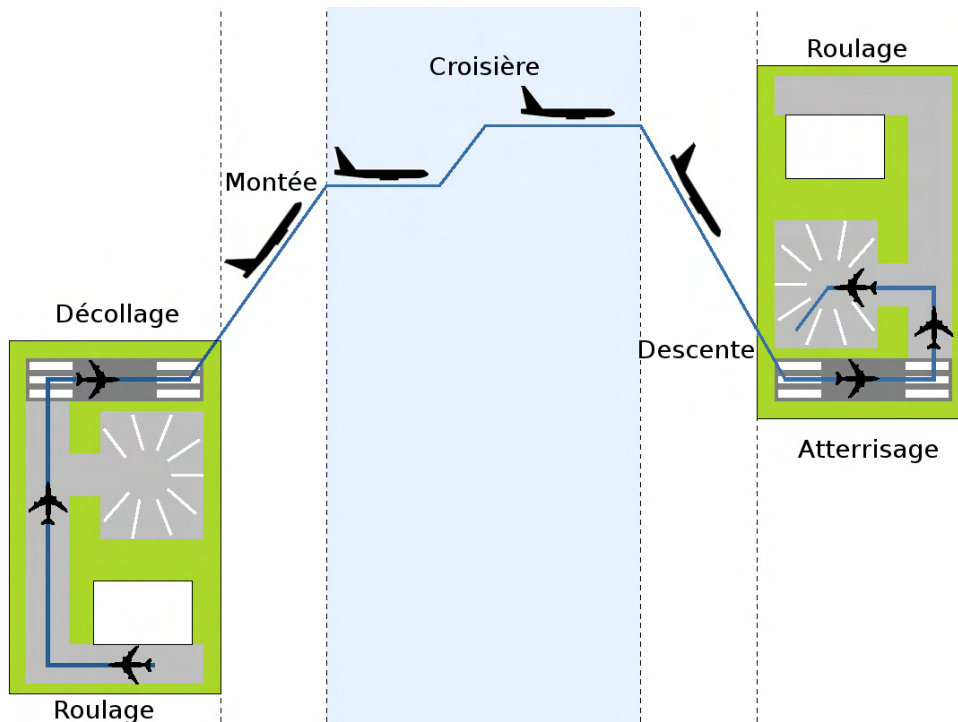


FIGURE 2.1 – Les différentes étapes d’un vol, du décollage à l’atterrissage.

Dans les secteurs d’approche, ces espaces vides sont presque inexistants. De plus, lors de la phase de croisière, les avions ne changent que ponctuellement d’altitude (à chaque changement de niveau de vol). Pour détecter la majorité des conflits il suffit donc de surveiller les avions volant sur un même niveau de vol. Dans les secteurs d’approche, les avions changent en permanence d’altitude. Introduire du free-route dans les secteurs d’approche reviendrait à demander aux contrôleurs de surveiller des avions évoluant en 3D, ce qui est impossible en pratique.

**Dans cette thèse nous nous intéressons donc uniquement à la phase de croisière du vol, qui peut durer de quelques minutes à plusieurs heures selon la distance à parcourir.**

### 1.3 Les Techniques de Contrôle En-Route

Comme nous venons de le voir, chaque phase d’un vol est gérée par des contrôleurs différents. À chaque étape du vol correspondent des techniques de contrôle et des règles particulières. Nous nous intéressons ici aux règles et techniques propres à la phase de croisière. Le principal objectif des contrôleurs en-route est d’éviter les conflits. Cette résolution de conflit n’amène pas une re planification complète, mais seulement une modification d’une petite partie de la trajectoire. En règle générale, le service ATC cherche à minimiser l’impact de la manœuvre, sauf lors des phases à forte densité de trafic.

## Normes de Séparation

À cause de l'imprécision des radars utilisés pour la surveillance du trafic, certaines distances de sécurité doivent être conservées entre les avions afin de garantir qu'aucune collision ne se produise. Les règles imposées actuellement tiennent compte des moyens techniques mis à la disposition des contrôleurs, afin de garantir la sûreté du système aérien.

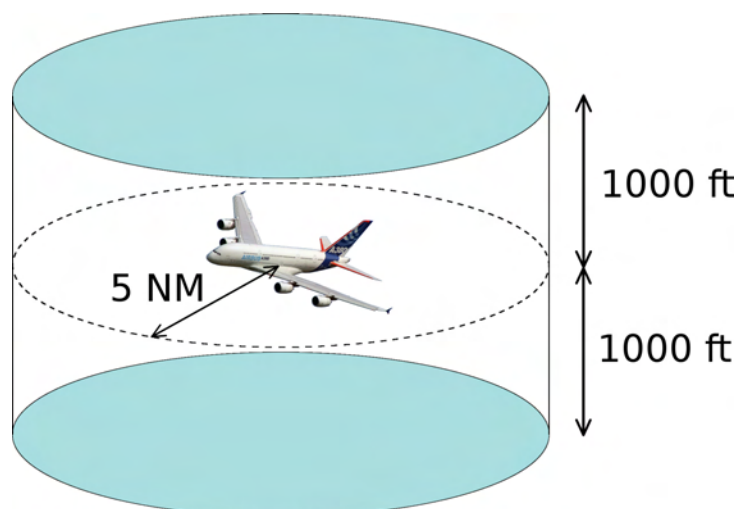


FIGURE 2.2 – Cylindre de sécurité autour d'un avion.

La distance de sécurité verticale a été fixée à 1000ft (environ 300m). Elle correspond en fait aux niveaux de vol utilisés pour organiser le trafic. La distance de sécurité horizontale (dans le plan) est de 5 Nautic Miles (NM), soit environ 10km.

Ces deux distances (horizontale et verticale) définissent un cylindre d'exclusion autour d'un avion, comme représenté Figure 2.2. Si un autre avion pénètre dans ce cylindre, on dit alors que les deux avions sont en *conflit*.

Il est important de bien comprendre la différence entre un conflit et une collision. Un conflit est une situation où, compte tenu des incertitudes sur leur position, plusieurs avions risqueraient d'entrer en collision, mais sans que la collision se produise réellement. C'est une situation où leur sécurité est compromise, sans pour autant qu'il y ait d'accident. Le travail des contrôleurs est d'éviter les conflits entre avions, afin de garantir l'absence collision.

Grâce à la structuration du trafic, les contrôleurs connaissent les points potentiels de conflit de leur secteur. Mais même avec les plans de vol, ils ne peuvent connaître la position d'un avion que pour les 20 prochaines minutes. Au-delà, les imprécisions sur les données dont ils disposent induisent un aléa sur la réalisation ou non d'un conflit. Ce n'est que lorsqu'un conflit semble inévitable que les contrôleurs interviennent. Leur travail consiste donc à trouver le bon compromis entre sûreté et efficacité.



### Moyens d'Action des Contrôleurs

Pour résoudre les conflits détectés, les contrôleurs en-route disposent de trois moyens d'action :

- le changement de cap (off-set et point tournant),
- le changement de vitesse,
- le changement de niveau de vol.

**Changement de cap :** Le changement de cap est un moyen de contrôle fréquemment utilisé par les contrôleurs. Dans le cas où deux avions entreraient en conflit s'ils suivaient leur plan de vol, le contrôleur choisit l'un des deux avions et le fait dévier temporairement de sa route. Le contrôleur peut imposer un *off-set* à l'avion (voir Figure 2.3), qui quitte sa trajectoire initiale, suit une parallèle à son plan de vol, pour finalement rejoindre sa route d'origine. Le contrôleur peut également imposer un *point tournant* (voir Figure 2.4) où l'avion change de cap, puis rejoint sa trajectoire initiale directement. Les changements de cap des avions sont bien sûr limités par la manœuvrabilité de l'avion en question.

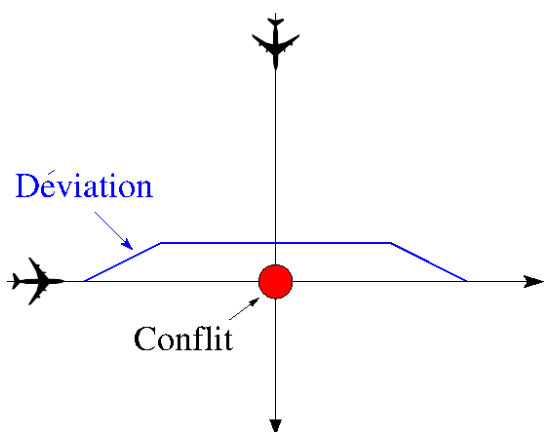


FIGURE 2.3 – Offset.

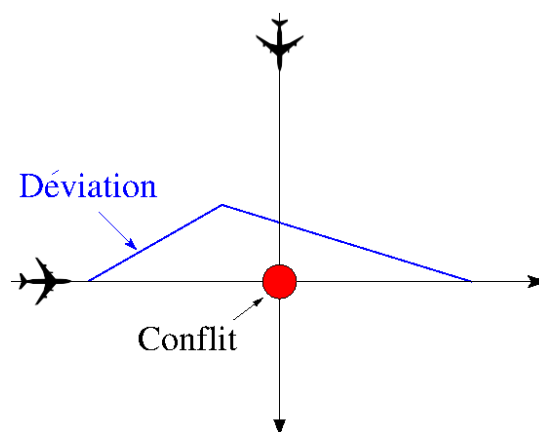


FIGURE 2.4 – Point tournant.

Les contrôleurs en-route disposent d'écrans radars représentant une "vue du dessus" du trafic. Le niveau de vol et la vitesse d'un avion n'apparaissent que sous forme de nombres associés à son écho radar. Ainsi la technique de changement de cap est la plus intuitive pour les contrôleurs, qui voient l'avion changer de trajectoire sur leurs écrans. Cette technique de contrôle est également celle permettant d'exploiter au mieux les capacités des secteurs free-route, puisqu'elle permet de diriger les avions vers des zones vides de l'espace.

**Pour ces deux raisons, nous nous intéresserons exclusivement à la déconfliction par changement de cap dans cette thèse.**

**Changement de vitesse :** Pour éviter les conflits, les contrôleurs peuvent également imposer des changements de vitesse aux avions. Cette méthode de déconfliction présente l'inconvénient de ne pas être représentée sur l'écran radar : seuls des chiffres changent sur les étiquettes associées aux avions. Cette technique requiert de plus une action sur les moteurs de la part des pilotes, ce qui en fait une manœuvre plus lente et plus coûteuse à mettre en œuvre que le changement de cap.

**Changement de niveau de vol :** Le changement de niveau de vol n'est que très rarement utilisé par les contrôleurs. Cette méthode comporte plusieurs inconvénients : le contrôleur doit d'abord s'assurer que l'avion qu'il fait changer de niveau n'entrera pas en conflit avec le trafic du niveau en question. De plus, les avions volent de manière optimale (et donc consomment moins de carburant) à un niveau de vol qui dépend, entre autres, de leur masse et de leur vitesse. Demander à un avion de changer de niveau de vol revient donc à lui demander de voler à un niveau où il consommera plus de carburant. Enfin, la montée vers un niveau de vol supérieur requiert une action sur les moteurs par les pilotes, une action qui n'est pas instantanée et très coûteuse en terme de carburant.

Pour toutes ces raisons, les changements de niveau de vol ne sont utilisés que dans des cas d'urgence, par les contrôleurs ou par le dernier filet de sauvegarde anticollision : le Traffic alert and Collision Avoidance System (TCAS). Il s'agit d'un instrument monté à bord des avions et destiné à éviter les collisions en vol. Ce système est conçu pour proposer une résolution coordonnée à deux avions en conflit. Dans la plupart des cas, l'un des avions monte, tandis que l'autre descend, ce qui permet d'augmenter rapidement la distance qui les sépare.

## 2 La Planification de Trajectoires : Hypothèses et Objectifs

Comme l'expérience du secteur de Maastricht l'a montré, un secteur en free-route complet n'est réalisable qu'avec des outils de planification de trajectoires, de détection et résolution de conflits adéquats. L'objectif de cette thèse est de créer une méthode permettant de calculer des trajectoires 4D qui remplaceraient les trajectoires actuelles (succession de balises) dans le dépôt des plans de vol. Une telle méthode permettrait alors d'organiser le trafic des jours à l'avance et de tenir compte des capacités des secteurs et des desiderata des compagnies aériennes dans la planification des trajectoires de leurs avions. En planifiant ces trajectoires de manière à éviter les conflits, la tâche des contrôleurs serait considérablement allégée et la capacité des secteurs améliorée.

### 2.1 Hypothèses

Nous nous plaçons dans le cadre de la planification de **trajectoires 4D en free-route au niveau stratégique**. Nous considérons donc qu'un avion peut choisir librement sa route entre un point de départ et un point d'arrivée, sans avoir à suivre le réseau de routes prédéfini ni à passer au-dessus des balises de l'espace.

Puisque nous considérons la planification au niveau stratégique, il nous faut prendre en compte la totalité du trafic aérien. Sur l'Europe, une journée de trafic compte environ 28 000 vols. Notre but est donc de trouver une méthode permettant de planifier les trajectoires pour un **très grand nombre d'avions**.

Nous ne considérons que la **phase de croisière** d'un vol. Les trajectoires calculées auront donc comme points de départ et d'arrivée le début et la fin de la phase de croisière. Les trajectoires 4D calculées devront évidemment respecter les normes de séparations de 1000ft en vertical et 5NM dans le plan horizontal.

Nous avons choisi de nous concentrer exclusivement sur l'évitement de conflit par changement de cap. Nous considérerons donc que durant toute la phase de croisière, les avions volent à **vitesse et à niveau de vol constants**. Le problème de planification de trajectoires pour l'ensemble du trafic peut ainsi être divisé en plusieurs sous-problèmes indépendants : un pour chaque niveau de vol. Les trajectoires calculées sont donc des **trajectoires 2D** (dans le plan du niveau de vol), auxquelles est ajouté le niveau de vol, ainsi que l'heure de passage en certains points de la trajectoire 2D afin d'obtenir une trajectoire 4D.

Nous partons également du principe que les Flight Management System (FMS) permettront aux avions de suivre une trajectoire courbe avec une grande précision, tout en respectant des horaires de passage imposés à certains points de la trajectoire. Cette technologie est en cours d'étude dans le contexte de SESAR et de NextGen.

## 2.2 Objectifs

L'objectif de cette thèse est de planifier des trajectoires 4D (2D + niveau de vol + temps) pour plusieurs avions avec les garanties théoriques suivantes.

Nous souhaitons garantir l'**arrivée de l'avion à sa destination**, qui peut être formulée de la façon suivante : si une trajectoire existe entre le point de départ et le point d'arrivée, notre méthode devra la trouver en temps fini. Si aucune trajectoire acceptable n'existe, la méthode devra être capable de le détecter plutôt que de chercher indéfiniment une solution.

Les trajectoires construites devront être **garanties sans conflit**. Le but de la planification stratégique est d'organiser le trafic afin d'utiliser au mieux l'espace disponible tout en réduisant les risques de conflit entre avions. Ainsi seuls les rapprochements dangereux liés aux incertitudes sur le trafic devront être pris en charge par les contrôleurs.

La planification de trajectoire se fera à **vitesse constante**. Mais chaque avion pourra voler à sa vitesse de croisière (vitesse de vol optimale en terme de consommation de carburant). La méthode devra donc être capable de planifier des trajectoires pour des **avions volant à des vitesses différentes**.

Une autre contrainte opérationnelle concerne le rayon de courbure des trajectoires obtenues par la planification. Chaque type d'avion possède un rayon de braquage différent. Les **virages** imposés par les trajectoires calculées devront donc être **compatibles avec les capacités des appareils**.

Nous cherchons également à ce que la méthode utilisée permette d'effectuer la planification de trajectoires en un **temps compatible avec le processus de négociation** des trajectoires entre les compagnies aériennes et le Network Manager (de l'ordre de quelques minutes à quelques heures).



# Chapitre 3

## Méthodes de Planification de Trajectoires

Le problème de la génération de trajectoires existe depuis des dizaines d'années. Posé à l'origine dans le cadre de la robotique, il est aujourd'hui présent dans un grand nombre de domaines : robotique (robots manipulateurs et mobiles), automobile, aéronautique (avions et hélicoptères), spatial, Unmanned Aerial Vehicle (UAV), bateaux. Chacun de ces domaines impose de nouvelles contraintes techniques et demande donc une adaptation des méthodes existantes. Les algorithmes que nous présentons ici n'ont pas été créés exclusivement pour la planification de trajectoire d'avions. Nous nous intéressons à un vaste éventail de méthodes, quel que soit leur domaine d'application, et étudions leurs avantages et leurs inconvénients.

### 1 Terminologie

#### 1.1 Planification de Chemin ou de Trajectoire ?

La *planification de chemin* (path planning) consiste à chercher une courbe permettant de relier le point de départ d'un mobile à sa destination. La planification de chemin ne se préoccupe ni de la vitesse à laquelle le mobile doit suivre ce chemin, ni des lois de contrôle qui lui permettront de le suivre.

La *planification de trajectoire* (trajectory planning) consiste à chercher une courbe permettant de relier le point de départ d'un mobile à sa destination ET la vitesse à laquelle le mobile doit suivre ce chemin. La planification de trajectoire revient donc à chercher une loi de contrôle (simple ou complexe) permettant au mobile de rejoindre sa destination, en respectant éventuellement des contraintes de vitesse.

Dans un environnement *statique*, où les obstacles à contourner sont fixes, la planification de chemin et de trajectoire sont des problèmes équivalents. Il est toujours possible de construire un chemin, puis de décider à quelle vitesse le suivre pour obtenir une trajectoire ; ou, à l'inverse, d'extraire un chemin d'une trajectoire en ignorant le profil de vitesse obtenu par la planification de trajectoire. Dans les deux cas, le mobile atteindra sa destination tout en évitant les obstacles présents dans l'espace.

Dans le cas d'un environnement *dynamique*, où les obstacles à éviter se déplacent dans l'espace, cette relation entre planification de chemin et de trajectoire n'est généralement plus vraie. Alors que dans l'espace statique l'évitement d'obstacles ne pouvait se faire qu'à travers des déplacements (*résolution spatiale*), l'aspect dynamique de l'espace permet d'éviter les obstacles en modifiant la vitesse du mobile (*résolution en vitesse*).

Considérons que nous avons déjà planifié un chemin pour un mobile qui lui permet de contourner un obstacle statique. Imaginons maintenant que cet obstacle devienne mobile et vienne couper le chemin obtenu dans le cas statique. Puisqu'un chemin ne contient aucune information sur la vitesse du mobile, il est impossible de savoir à quel moment le mobile sera à l'endroit où l'obstacle coupe son chemin. En revanche, en ajoutant un profil de vitesse adapté à ce chemin, et donc en le transformant en trajectoire, on peut garantir que le mobile évitera l'obstacle mobile (en s'arrêtant pour le laisser passer par exemple).

Dans notre application, les avions constituent des obstacles les uns pour les autres : il s'agit donc de **planification de trajectoire**.

## 1.2 Complétude des Planifications de Trajectoire

Les méthodes de planification de trajectoire peuvent être séparées en deux grandes catégories : les méthodes exactes et les méthodes heuristiques.

Une *méthode exacte* trouvera toujours une solution au problème de planification, si une solution existe. Si aucune solution n'existe (si le mobile ne peut pas atteindre sa destination), une méthode exacte est capable de montrer qu'il n'existe aucune planification possible. Les méthodes exactes sont souvent très coûteuses en temps et en ressources, rendant leur application à des situations réelles difficiles.

Une *méthode heuristique* peut échouer dans sa recherche de trajectoire, même lorsqu'il existe une solution réalisable. Une méthode heuristique peut également fournir une solution peu intéressante (conduire le mobile à faire trois fois le tour d'un obstacle avant de le mener à sa destination). Et si aucune solution n'existe, une méthode heuristique risque de ne pas le détecter et de chercher une solution aussi longtemps qu'il lui est permis. Si les méthodes heuristiques ne donnent aucune garantie quant à la solution trouvée, elles présentent néanmoins l'avantage d'être très rapides (souvent beaucoup plus que les méthodes exactes) et de pouvoir résoudre de très grandes instances de problèmes.

Les méthodes exactes sont également dites *complètes*, alors que les méthodes heuristiques sont dites *incomplètes*. Il existe deux types de complétude : la *complétude liée à la résolution* et la *complétude probabiliste*.

La **complétude liée à la résolution** est, comme son nom l'indique, liée à la discrétisation des variables continues du problème. Un algorithme de complétude liée à la résolution permet d'obtenir des solutions dont la précision augmente avec la résolution ( finesse) de la discrétisation.

Dans le cas d'un algorithme dont **la complétude est probabiliste**, il y a une garantie de trouver une solution avec probabilité 1 si aucune restriction n'est imposée sur le temps de calcul.

Comme présenté plus haut, un **algorithme incomplet** peut, en théorie, ne pas trouver de planification alors qu'une solution existe. En pratique, certains algorithmes incomplets fonctionnent pour la majorité des problèmes qui leur sont soumis. Ils sont donc utilisés pour leur rapidité.

Un des objectifs que nous nous sommes fixés est de trouver une planification de trajectoires en temps fini si une solution existe. Notre méthode doit également être capable de détecter si aucune planification viable n'existe (au lieu de chercher indéfiniment une solution). Cela veut dire que notre méthode devra être de **complétude liée à la résolution**.

### 1.3 Espace de Travail, Espace de Configuration et Espace Libre

#### Espace de Travail

L'*espace de travail* représente l'espace dans lequel le mobile peut évoluer. Il s'agit donc d'espaces 2D (robots mobiles, voitures, bateaux) ou 3D (robots manipulateurs, UAV, avions).

#### Espace de Configuration

Le concept d'*espace de configuration* est apparu pour la première fois dans [Lozano-Pérez 1979] afin de tenir compte des multiples mouvements réalisables par les robots manipulateurs. La planification de trajectoire pour un robot manipulateur consiste à trouver une série de mouvements permettant au robot de rejoindre une configuration finale à partir d'une configuration initiale. Un robot manipulateur possède plusieurs degrés de liberté, dont certains peuvent être redondants. Se pose alors la question suivante : sur quel degré de liberté jouer pour atteindre la configuration finale tout en évitant des obstacles (fixes ou mobiles) ? L'espace de travail n'est pas l'espace le plus adapté pour répondre à cette question. La seule solution serait de planifier plusieurs trajectoires pour plusieurs points de référence du robot (jointures par exemple), mais sans garantie que le mouvement complet est effectivement réalisable par le robot.

Un espace de configuration est un espace dont chaque dimension représente un degré de liberté du robot. Ainsi, pour un robot à six degrés de liberté, l'espace de configuration correspondant est de dimension 6. Les configurations initiales et finales du robot sont représentées par un point dans l'espace de configuration. Une trajectoire planifiée en espace de configuration représente le mouvement coordonné sur l'ensemble des degrés de liberté.

Les obstacles sont alors représentés en interdisant tous les points de l'espace de configuration correspondant à une configuration où le robot entre en collision avec un obstacle. L'inconvénient majeur des espaces de configuration est leur dimension qui augmente exponentiellement avec le nombre de degré de liberté du robot. Une méthode développée pour planifier une trajectoire sur un espace 2D ou 3D peut ne plus fonctionner pour des espaces de dimension supérieure.

La notion d'espace de configuration n'est pas réservée aux robots manipulateurs. Les espaces de configuration peuvent être utilisés pour tout type de mobiles et même pour représenter les positions de plusieurs mobiles en un seul point (voir Section 3.4 de ce chapitre).

### Espace Libre

La notion d'*espace libre* est applicable aussi bien aux espaces de travail qu'aux espaces de configuration. L'espace libre est constitué de l'espace de résolution, privé des obstacles. Planifier une trajectoire dans l'espace libre permet donc de planifier une trajectoire évitant les obstacles présents dans l'espace (de travail ou de configuration).

## 2 Planification d'une Trajectoire pour un Mobile

Avant de chercher à planifier des trajectoires pour plusieurs mobiles, il semble naturel de chercher comment planifier une trajectoire pour un mobile évoluant dans un espace rempli d'**obstacles mobiles**.

La classification des méthodes utilisée ici est directement inspirée des classifications utilisées dans [Hwang 1992], [Goerzen 2010] et [Souissi 2013].

À la fin de cette section, un tableau récapitulatif, Table 3.1, regroupe les principales caractéristiques des méthodes présentées dans la suite.

### 2.1 Décomposition Chemin-Vitesse

La méthode de décomposition chemin-vitesse (Path-Velocity Decomposition) [Kant 1986] propose une approche heuristique, mais naturelle, du problème de planification de trajectoire pour un robot mobile évoluant dans un environnement dynamique. Elle consiste à décomposer la planification de trajectoire en deux sous-problèmes :

- planification d'un chemin évitant les obstacles statiques,
- planification de la vitesse du mobile pour éviter les obstacles dynamiques.

Kant et Zucker montrent dans [Kant 1986] que cette décomposition est valable, à condition que les déplacements des obstacles soient indépendants des déplacements du mobile. Si les obstacles suivent le mobile, arrivent face à lui ou encore s'arrêtent sur son chemin, la décomposition chemin-vitesse ne permet pas de trouver de solutions au problème de planification de trajectoire.

L'avantage de cette méthode est de ramener un problème complexe (planification de trajectoire) à deux sous-problèmes plus simples (planification du chemin, puis de la vitesse le long de ce chemin). Au moment où les auteurs ont présenté cette méthode (1986), de nombreuses méthodes de planification de chemin avaient déjà été étudiées (graphe de visibilité, ou encore décomposition en cellules présentés plus loin), alors que les méthodes de planification de trajectoire étaient encore rares. La décomposition chemin-vitesse permettait alors de réaliser des planifications de trajectoire en s'appuyant sur les méthodes de planification de chemin déjà développées.



Afin de résoudre le problème des obstacles mobiles pouvant s'arrêter sur le chemin planifié, Fraichard et Laugier ont amélioré le principe de la décomposition chemin-vitesse en planifiant non pas un, mais plusieurs chemins parallèles [Fraichard 1993]. En fonction du mouvement des obstacles mobiles, le mobile passe d'un chemin à l'autre (comme un changement de file sur l'autoroute) afin de continuer à avancer tout en évitant les obstacles mobiles.

La méthode de décomposition chemin-vitesse a été réutilisée plus récemment afin de faire traverser un espace rempli d'obstacles fixes à une équipe de robots mobiles en imposant un contact visuel entre les robots [Lindhe 2011]. Les auteurs définissent le contact visuel comme une absence d'obstacle sur la ligne droite reliant deux robots. Tous les robots ne peuvent évidemment pas rester en contact visuel en permanence, mais le but de Lindhe *et al.* est d'assurer que tous les robots restent, directement ou indirectement (en utilisant d'autres robots comme intermédiaires), en contact avec tous les autres robots. La solution proposée dans [Lindhe 2011] consiste à planifier un chemin pour chaque robot, chemins plus ou moins parallèles et évitant les obstacles fixes présents dans l'espace. Le contact visuel est ensuite maintenu en permanence grâce au contrôle de la vitesse des robots.

**Avantage :**

- ✓ Simplification du problème de planification de trajectoires en deux sous-problèmes (planification de chemin, puis de vitesse).

**Inconvénient :**

- × Méthode heuristique : aucune garantie sur le fait de trouver une solution, si une solution existe.

**Application à la planification de trajectoire d'avions :** La méthode de décomposition chemin-vitesse évite les obstacles mobiles grâce à un changement de vitesse du mobile. Or notre but est de planifier des trajectoires d'avions volant à vitesse constante. Cette méthode n'est donc pas utilisable pour le problème que nous cherchons à résoudre.

## 2.2 Méthodes Géométriques

Les méthodes géométriques ont toutes été créées afin de planifier des chemins et non des trajectoires. Elles peuvent néanmoins servir de base à la planification de trajectoire, soit en utilisant la décomposition chemin-vitesse, soit en s'adaptant aux déplacements des obstacles mobiles par des replanifications successives.

Les méthodes géométriques consistent à discrétiser l'espace libre afin de ramener le problème de planification de chemin à un problème de parcours de graphe (qui peut être résolu en utilisant un algorithme  $A^*$ ).

### Décomposition en Cellules

La décomposition en cellules (Cell Decomposition) consiste à décomposer l'espace de configuration libre du robot en une collection de régions sans recouvrement (cellules), dont l'union représente exactement l'espace de configuration libre. Un graphe de connexité est ensuite construit pour représenter les relations d'adjacence entre les cellules. Une méthode de parcours de graphe peut alors être utilisée pour chercher une succession de cellules reliant la cellule initiale (contenant le point de départ) à la cellule finale (contenant le point d'arrivée). Un chemin peut ensuite

être calculé simplement (succession de lignes droites par exemple) à l'intérieur de ces cellules sans crainte de rencontrer un obstacle (en environnement statique).

La décomposition de l'espace en cellules, puis la construction du graphe de connexité des cellules sont des opérations qui peuvent être coûteuses en temps et en ressources. La décomposition la plus fréquemment utilisée est de complexité exponentielle en  $n$ , avec  $n$  le nombre de dimensions de l'espace de configuration [Lingelbach 2004]. Mais la décomposition en cellules présente l'avantage de permettre la planification de plusieurs chemins (avec des points de départ et de destination différents) sans avoir à discrétiser à nouveau l'espace libre.

Mise en place à l'origine pour un robot manipulateur évoluant dans un espace statique [Brooks 1982], la méthode de décomposition en cellules a récemment été adaptée à l'évitement d'obstacles mobiles dans le jeu vidéo Pacman [Foderaro 2011]. La méthode s'applique bien au jeu de Pacman puisque l'espace libre à découper est restreint (labyrinthe), que les obstacles mobiles sont peu nombreux (ennemis) et que leur comportement peut être anticipé.

**Avantages :**

- ✓ De complétude liée à la résolution [Brooks 1982].
- ✓ Permet d'effectuer rapidement plusieurs planifications différentes tant que l'espace n'évolue pas.

**Inconvénient :**

- ✗ Complexité exponentielle en  $n$ , avec  $n$  la dimension de l'espace de configuration.

**Application à la planification de trajectoire d'avions :** La méthode de décomposition en cellules s'adapte très bien aux espaces restreints contenant quelques obstacles mobiles. Dans notre cas, l'espace aérien est vaste et présente beaucoup d'obstacles mobiles (les autres avions). Les étapes de discrétisation de l'espace et la construction du graphe de connexité rendent cette méthode trop coûteuse pour qu'elle puisse être appliquée à notre problème.

**Probabilistic Roadmap**

La méthode probabilistic roadmap [Overmars 1992] repose sur un tirage aléatoire de points dans l'espace de configuration du mobile. À chaque tirage, un test est effectué pour vérifier si le point de l'espace de configuration appartient ou non à l'espace libre. Si le point appartient bien à l'espace libre, une méthode de planification locale est utilisée pour essayer de le relier à d'autres points déjà tirés. En partant d'un graphe contenant deux sommets non reliés : le point de départ et le point de destination, un graphe est construit au fur et à mesure des tirages aléatoires. Une fois le graphe construit, il suffit d'appliquer une recherche de chemin dans le graphe pour obtenir un chemin reliant les configurations initiales et finales du mobile.

La méthode probabilistic roadmap est une méthode à la fois locale et globale. La méthode de planification locale utilisée pour relier deux points de l'espace de configuration doit être simple puisqu'elle est calculée à chaque tirage aléatoire. Elle peut échouer à relier deux points de l'espace de configuration, mais doit toujours donner une décision rapide sur le fait que deux points peuvent être, ou non, reliés entre eux. La recherche de chemin dans le graphe est une méthode globale. Elle cherche à résoudre le problème de planification dans son intégralité après qu'il a été divisé en sous-problèmes locaux.

Un grand nombre de variations de la méthode probabilistic roadmap peut être trouvé dans [Svestka 1993] pour l'application à la navigation de robots similaires à des voitures. Une étude comparative de plusieurs méthodes probabilistic roadmap peut être trouvée dans [Geraerts 2004]. Cette méthode a également été appliquée à la planification de chemin d'UAV [Pettersson 2004].

**Avantages :**

- ✓ De complétude probabiliste [Carpin 2006].
- ✓ Permet d'effectuer rapidement plusieurs planifications différentes tant que l'espace n'évo-  
lue pas.
- ✓ Bien adaptée au calcul parallèle [Amato 1999].

**Inconvénients :**

- ✗ Sa rapidité dépend de la méthode de planification locale choisie. La méthode doit être répétée à chaque tirage aléatoire et doit donc être simple et rapide. Il n'est pas possible d'utiliser des méthodes de planification locales trop complexes (robot non-holonyme par exemple).
- ✗ Le graphe construit n'est pas utilisable dans un environnement dynamique.

**Application à la planification de trajectoire d'avions :** Comme la méthode de décomposition en cellules, la méthode probabilistic roadmap permet d'éviter des obstacles statiques. Quelques obstacles dynamiques supplémentaires peuvent être évités en jouant sur la vitesse à laquelle le mobile suit le chemin planifié. Mais cette méthode ne permet pas d'éviter des obstacles mobiles tout en conservant une vitesse constante.

**Rapidly exploring Random Tree (RRT)**

La méthode RRT, [LaValle 1998], est inspirée de la méthode probabilistic roadmap et a été construite afin de résoudre le problème de planification dans des espaces dynamiques ou pour des mobiles non-holonomes. Elle permet également de travailler dans de grands espaces non convexes.

La méthode RRT a la particularité de considérer qu'aucune représentation explicite des obstacles n'est disponible et que la seule information disponible est l'appartenance d'un point à l'espace libre.

À partir de la configuration initiale, des tirages aléatoires de mouvement sont effectués, toujours dans la direction des zones les plus vides de l'espace. Ces tirages de mouvements peuvent facilement prendre en compte les contraintes spécifiques de déplacement du mobile : une voiture ne peut par exemple qu'avancer, reculer ou tourner. Elle ne peut pas "glisser" sur le côté. À chaque mouvement est associé un coût utilisé pour construire un arbre recouvrant peu à peu tout l'espace, jusqu'à atteindre la destination.

Afin d'accélérer la méthode, Kuffner et LaValle proposent de propager deux arbres, un à partir de la configuration initiale et un à partir de la configuration finale, les deux arbres explorant l'espace tout en avançant l'un vers l'autre [Kuffner 2000]. Strandberg propose de paralléliser l'exploration de l'espace en utilisant des arbres locaux [Strandberg 2004]. La méthode RRT a plus récemment été utilisée pour planifier le chemin d'UAV [Kwangjin 2008].

### Avantages :

- ✓ De complétude probabiliste [Carpin 2006].
- ✓ Ne nécessite aucune représentation explicite des obstacles.
- ✓ Parallélisable grâce à l'utilisation d'arbres locaux [Strandberg 2004].

### Inconvénients :

- × N'exploite pas la représentation explicite des obstacles si elle est disponible.
- × L'exploration de l'espace dépend beaucoup de la métrique utilisée pour associer un coût à chaque mouvement [Cheng 2001].

**Application à la planification de trajectoire d'avions :** La méthode RRT ne permet pas d'utiliser la représentation explicite des obstacles. Une de nos hypothèses de travail est la connaissance des positions exactes des autres avions. Cette connaissance ne pouvant pas être pleinement exploitée avec la méthode RRT, cette dernière est inadaptée à la résolution de notre problème.

### Graphe de Visibilité

La méthode du graphe de visibilité (Visibility Graph) est une des premières méthodes de planification de chemin créée [Hart 1968]. Elle permet de trouver le chemin le plus court reliant un point de départ et un point d'arrivée dans un espace 2D rempli d'obstacles polygonaux. Le mobile est représenté par un point.

La méthode se décompose en deux étapes successives : la première consiste à construire un graphe reliant par des lignes droites tous les sommets des obstacles, ainsi que le point de départ et d'arrivée. Seules les lignes droites ne traversant pas des obstacles sont conservées lors de la création du graphe. La deuxième étape consiste à rechercher dans ce graphe le plus court chemin menant du point de départ au point d'arrivée (grâce à un algorithme de Dijkstra par exemple).

Cette méthode a vite été adaptée pour tenir compte de l'espace occupé par le robot dans l'évitement des obstacles fixes [Lozano-Pérez 1979]. Une autre adaptation permet de prendre en compte des obstacles mobiles en contrôlant la vitesse à laquelle le chemin est suivi [Large 2002].

### Avantage :

- ✓ De complétude liée à résolution.

### Inconvénient :

- × Le chemin calculé touche le plus souvent la frontière des obstacles, mais sans pour autant la traverser.

**Application à la planification de trajectoire d'avions :** Comme pour les méthodes de décomposition en cellules et probabilistic roadmap, la méthode du graphe de visibilité ne permet l'évitement d'obstacles mobiles que par des changements de vitesse, ce qui la rend inadaptée à la résolution de notre problème.

### Diagramme de Voronoï

De nombreuses méthodes de planification de chemin utilisent des diagrammes de Voronoï (Voronoi Diagram) [Aurenhammer 1991]. Dans un espace rempli d'obstacles représentés par des points, un diagramme de Voronoï est obtenu en reliant les obstacles proches par des segments de

droite, puis en traçant les perpendiculaires passant par le milieu de ces segments. Ces perpendiculaires sont tracées jusqu'à ce qu'elles rencontrent d'autres perpendiculaires, formant ainsi un graphe délimitant des cellules au centre desquelles se trouvent les obstacles.

Une technique simple de planification de trajectoire consiste à rajouter le point de départ et d'arrivée au graphe ainsi obtenu et à appliquer un algorithme de recherche de plus court chemin sur ce graphe. Pour améliorer la forme du chemin obtenu, McLain *et al.* utilisent l'analogie avec une chaîne [McLain 2000]. Une force est appliquée au chemin trouvé pour l'attirer vers la ligne droite afin d'en réduire les virages. Une force de répulsion est exercée par chaque obstacle sur la chaîne, afin de s'assurer que le chemin ne se rapproche pas trop près des obstacles.

**Avantages :**

- ✓ De complétude liée à résolution.
- ✓ Le diagramme de Voronoi est réutilisable tant que les obstacles ne bougent pas.
- ✓ Le chemin calculé passe entre les obstacles, mais sans les approcher de trop près.

**Inconvénient :**

- ✗ Ne permet pas de prendre en compte des obstacles dynamiques puisque le diagramme de Voronoi devrait être recalculé à chaque fois.

**Application à la planification de trajectoire d'avions :** Cette méthode ne permet pas de prendre en compte des obstacles mobiles sans avoir à reconstruire le diagramme de Voronoi à chaque pas de temps. Dans notre cas d'application, cette opération serait trop coûteuse.

### 2.3 Contrôle Optimal

Une grande partie des méthodes de planification de trajectoire repose sur des lois de commande, plus ou moins complexes, définissant les mouvements possibles du mobile. Le but du contrôle optimal est de déterminer la commande d'un système qui minimise (ou maximise) un critère de performance, avec ou sans contraintes imposées au système.

Une fois le problème de minimisation posé, il existe trois méthodes de résolution différentes, plus ou moins adaptées selon les cas : la méthode directe, la méthode indirecte et l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman. Plus de détails sur les problèmes de commande optimale peuvent être trouvés dans [Hiriart-Urruty 2008] et un résumé des trois méthodes de résolution pour la planification de trajectoire dans [Betts 1998].

#### Méthode directe

La méthode directe consiste à discrétiser la commande ou l'état du système, afin de transformer le problème de commande optimale en un problème de programmation non linéaire avec contraintes en dimension finie. Le problème ainsi obtenu peut alors être résolu à l'aide des méthodes classiques de l'optimisation.

Le principal avantage des méthodes directes est leur relative insensibilité à la condition initiale imposée au système. Ainsi, même sans connaître à priori la solution du problème, il est possible d'obtenir une bonne solution. Si les méthodes directes offrent de bonnes solutions, elles ne garantissent pas en revanche de trouver la meilleure solution au problème posé.

La méthode directe a été utilisée dans les problèmes de planification de trajectoire d'avions [Betts 1995], mais aussi d'UAV [Borrelli 2006].

### Avantage :

- ✓ Ne nécessite pas de connaissance à priori de la solution.
- ✓ Prend facilement en compte les contraintes sur l'état du système.
- ✓ Il existe un vaste ensemble de méthodes pour résoudre les problèmes non linéaires avec contraintes en dimension finie.

### Inconvénient :

- × Coût important en temps de calcul et en mémoire : la méthode directe ne permet de traiter que des problèmes de petite dimension.
- × Existence de minima locaux.

**Application à la planification de trajectoire d'avions :** Cette méthode ne permet pas de résoudre des problèmes de taille suffisante. Elle serait utilisable pour gérer l'évitement de conflit entre deux ou trois avions, mais pas pour la planification d'un très grand nombre de trajectoires.

### Méthode indirecte

La méthode indirecte repose sur le principe du maximum de Pontryagin qui donne des conditions nécessaires d'optimalité pour le problème considéré. Le principe du maximum de Pontryagin permet de ramener le problème à un système différentiel à deux équations et à deux conditions : une initiale et l'autre terminale. Le problème de commande optimale est ainsi ramené à un problème sous contraintes.

L'écriture du principe du maximum de Pontryagin est malheureusement difficile pour des problèmes de commande optimale avec contrainte sur l'état du système. Et sa résolution peut elle aussi poser problème, obligeant la plupart du temps à se tourner vers des méthodes de tir, simple ou multiple. Elle présente néanmoins l'avantage de ne pas nécessiter une discrétisation du problème et donc de permettre de traiter des problèmes de grande taille.

La méthode indirecte suppose qu'une solution au problème est déjà connue et qu'une solution optimale est cherchée autour de cette solution. Développée à l'origine pour optimiser des trajectoires de fusée ou de rentrée dans l'atmosphère de navettes spatiales, la méthode indirecte a depuis été étudiée afin d'optimiser des trajectoires d'avions : [Sridhar 2011], [Ng 2011].

### Avantage :

- ✓ Permet de résoudre des problèmes de grande dimension.
- ✓ Très grande précision numérique sur la solution obtenue.

### Inconvénient :

- × Nécessite une connaissance à priori de la structure de la trajectoire recherchée.
- × Sensibilité à la condition initiale.
- × Difficultés théoriques pour la prise en compte de contraintes sur l'état du système à cause du principe du maximum de Pontryagin.
- × Ne permet d'effectuer qu'une optimisation locale du problème.

**Application à la planification de trajectoire d'avions :** Cette méthode suppose la connaissance à priori d'une bonne trajectoire, ce qui n'est pas le cas dans notre problème.

### Équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

Au lieu de chercher à résoudre directement un problème de commande optimale, ce dernier peut être réécrit sous la forme d'une équation : l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman. La solution de cette équation donne alors le coût optimal permettant d'atteindre un point donné de l'espace à partir d'un point de départ.

La réécriture du problème de commande optimale sous la forme d'une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman permet de travailler aussi bien avec des problèmes discrets que des problèmes continus. Dans le cas discret, on parle alors de l'équation de Bellman, qui peut être résolue par programmation dynamique. Dans le cas continu, on parle de l'équation d'Hamilton-Jacobi qui est une équation aux dérivées partielles.

Que ce soit en temps discret ou en temps continu, le passage par l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman permet de chercher un optimum global sur tout l'espace. Si cette recherche sur tout l'espace offre l'avantage de trouver l'optimum global, elle rend néanmoins la méthode très dépendante de la taille de l'espace étudié.

Cette méthode a été utilisée dans [Girardet 2013] où une analogie avec la propagation de front d'onde permet de calculer une trajectoire d'avion optimale en free-route en fonction du vent.

#### Avantage :

- ✓ Optimum global.

#### Inconvénient :

- × Méthode sensible à la dimension de l'espace.

**Application à la planification de trajectoire d'avions :** Cette méthode semble efficace pour planifier une trajectoire dans un espace empli d'obstacles fixes. Mais aucune extension ne semble pouvoir permettre de planifier les trajectoires de plusieurs avions de manière coordonnée (voir Section 3.4 de ce chapitre) en raison d'une explosion de la complexité de calcul avec la dimension de l'espace d'état.

## 2.4 Champ de Potentiel

Un champ de potentiel peut être vu comme un champ de forces dans lequel serait plongé le mobile. La destination exerce une force attractive, tandis que les obstacles génèrent des forces répulsives. En suivant ce champ de forces, le mobile rejoint ainsi sa destination tout en évitant les obstacles.

Construit sur l'espace de configuration du mobile, une fonction potentielle est la somme d'une fonction d'attraction attirant le robot à sa destination et de fonctions de répulsion repoussant le robot loin des obstacles [Khatib 1985]. La trajectoire du mobile est alors obtenue en suivant le champ de potentiel associé : moins le gradient de la fonction potentielle. Cela revient à suivre les valeurs décroissantes de la fonction potentielle.

Un des inconvénients majeurs des champs de potentiel est la présence d'autres minima locaux que la destination. Le mobile peut, en suivant les valeurs décroissantes de la fonction potentielle, atteindre un de ces minima locaux et y rester bloqué.

**Avantages :**

- ✓ Rapide à calculer.
- ✓ Permet de calculer plusieurs trajectoires tant que l'espace n'évolue pas.

**Inconvénients :**

- × Méthode incomplète : le mobile peut rester bloqué dans un minimum local de la carte de valeur construite sur l'espace de configuration.
- × Nécessite une discrétisation de l'espace qui peut être une opération coûteuse.

**Application à la planification de trajectoire d'avions :**

Cette méthode est utilisable à condition de résoudre le problème des minima locaux (la méthode devient alors de complétude liée à la résolution). Un état de l'art plus détaillé sur les champs de potentiel, ainsi qu'une piste de résolution du problème des minima locaux basée sur les **fonctions harmoniques**, sont présentés dans le Chapitre 4.

Nous exploitons ensuite cette piste pour la planification de **plusieurs trajectoires** dans le Chapitre 6 de cette thèse.

**Vector Field Histogram (VFH)**

La méthode VFH, [Borenstein 1991], a été développée afin d'améliorer la prise en compte des obstacles mobiles par les champs de potentiel, ainsi que l'incertitude sur la position de ces obstacles.

La nouveauté de cette méthode vient de l'utilisation de grilles histogrammes pour représenter statistiquement la position des obstacles. Ainsi, chaque cellule de la grille contient la probabilité de présence d'un obstacle. La grille est constamment remise à jour en fonction des informations disponibles sur les obstacles. Cette grille est ensuite utilisée pour construire un champ de potentiel qui guide le mobile depuis le point de départ jusqu'à sa destination.

Considérée comme une méthode de planification locale, VFH présente l'inconvénient de ne pas garantir l'obtention d'une trajectoire optimale pour atteindre la destination. Cet inconvénient a par la suite été résolu en utilisant un algorithme A\* et la méthode a été renommée VFH\* [Ulrich 2000].

**Avantage :**

- ✓ Permet de prendre en compte les incertitudes sur la position des obstacles.

**Inconvénient :**

- × Aucune information sur la complétude de la méthode.

**Application à la planification de trajectoire d'avions :** Sans information sur la complétude de la méthode, l'arrivée à destination ne peut malheureusement pas être garantie, rendant cette méthode inutilisable pour la résolution de notre problème.



## Fonction de Navigation

Une fonction de navigation est un champ de potentiel particulier, construit afin de garantir l'absence de minima locaux dans l'espace de configuration [Rimon 1988]. Cette garantie dépend d'un paramètre libre devant être ajusté pour chaque cas. La méthode des fonctions de navigation n'est donc de complétude liée à la résolution qu'à condition que ce paramètre soit bien choisi.

Une fonction de navigation est analytique. Son gradient peut donc être obtenu sans avoir à passer par une discrétisation de l'espace de configuration, ce qui en réduit grandement le temps de calcul. De plus, les obstacles sont directement pris en compte dans la fonction de navigation, ce qui lui permet de travailler aussi bien dans un espace statique que dans un espace dynamique.

### Avantages :

- ✓ Résout le problème des minima locaux des champs de potentiel.
- ✓ Pas de discrétisation de l'espace de configuration.
- ✓ Bien adaptée à la prise en compte d'obstacles mobiles.

### Inconvénients :

- × Vitesse du mobile non bornée.
- × Paramètre libre à ajuster manuellement pour garantir la complétude liée à la résolution.

### Application à la planification de trajectoire d'avions :

La méthode des **fonctions de navigation** semble être l'une des plus **prometteuses** pour la planification de trajectoire d'avions. Elle s'adapte très bien au mouvement coordonné présenté dans la Section 3.4. Les deux points qui peuvent poser problème concernent la vitesse du mobile (que nous voulons constante) et la complétude liée à la résolution qui dépend d'un paramètre. Un état de l'art plus détaillé sur les fonctions de navigation est disponible dans le Chapitre 7 de cette thèse.

Nous proposons dans le Chapitre 8 une nouvelle fonction de navigation pour la planification de trajectoires d'avions, inspirée de nos recherches sur les champs de potentiels construits à partir de fonctions harmoniques.

## 2.5 Conclusion

De toutes les méthodes étudiées durant cet état de l'art, ce sont les méthodes des **champs de potentiel** et des **fonctions de navigation**, deux méthodes cousines, qui ont retenu notre attention. Les champs de potentiel pour leur simplicité de mise en œuvre et le contrôle qu'ils offrent sur la forme des trajectoires. Les fonctions de navigation pour leur extension à la navigation de plusieurs mobiles et les garanties théoriques qu'elles offrent sur les trajectoires obtenues.

Cette section a été rédigée afin de présenter les méthodes permettant de planifier une seule trajectoire. Dans l'étude de ces méthodes, nous avons néanmoins gardé à l'esprit notre but premier, qui est la planification de trajectoires pour un grand nombre d'avions. Ainsi, même si certaines méthodes semblaient prometteuses, nous les avons tout de même écartées au vu des difficultés que semblait poser le passage à la planification de trajectoire pour plusieurs mobiles que nous allons étudier maintenant.

Méthode	Planification	Complétude	Continue ou Discrète	Type d'évitement
Décomposition Chemin-Vitesse	T	I	C-D	S-V
<b>Méthodes Géométriques</b>				
Décomposition en Cellules	C	CR	C	S
Probabilistic Roadmap	C	CP	D	S
RRT	T	CP	D	S-V
Graphe de Visibilité	C	CR	D	S
Diagramme de Voronoï	C	CR	D	S
<b>Contrôle Optimal</b>				
Méthode Directe	T	CR	D	S-V
Méthode Indirecte	T	CR	C	S-V
Hamilton-Jabobi-Bellman	T	CR	C-D	S-V
<b>Champs de Potentiel</b>				
Champs de Potentiel	T	I	C	S-V
Vector Field Histogram	T	?	C	S-V
Fonction de Navigation	T	CR	C	S-V

TABLE 3.1 – Tableau récapitulant les principales propriétés des différentes méthodes de planification de chemin ou de trajectoire présentées dans cette section.

**Planification** : C=Chemin ; T=Trajectoire.

**Complétude** : CR=Complétude liée à la Résolution ; CP=Complétude Probabiliste ; I=méthode Incomplète ; ?=complétude non spécifiée.

**Type d'évitement des obstacles** : S=Spatial ; S-V=Spatial et/ou Vitesse

### 3 Planification pour Plusieurs Mobiles

Les méthodes permettant de générer des trajectoires pour plusieurs mobiles peuvent être divisées en quatre grandes catégories. Chaque catégorie présente ses propres avantages et ses propres inconvénients et est donc plus adaptée à certains domaines d'applications.

#### 3.1 Séquencement

Dans le cas de la planification de trajectoires pour deux mobiles, le séquencement consiste à affecter une trajectoire au premier mobile (souvent la ligne droite), puis à calculer la trajectoire du second mobile en tenant compte des positions du premier mobile. Chaque position du premier mobile devient un obstacle à un instant donné, que le deuxième mobile doit éviter. Si un troisième mobile est ajouté à la planification, il tiendra compte des trajectoires des deux premiers mobiles pour calculer sa trajectoire.

Le séquencement est la méthode de gestion de plusieurs mobiles la plus simple à appliquer. Elle ne requiert en effet qu'un algorithme permettant de calculer une trajectoire pour un mobile en tenant compte d'obstacles dynamiques. Pour chaque mobile, l'espace libre est défini en fonction des trajectoires déjà planifiées, puis une méthode de planification de trajectoire pour un mobile est appliquée à cet espace libre. Grâce à sa simplicité, le séquencement est souvent

utilisé comme méthode de "secours" lorsque les trois autres méthodes que nous présentons plus loin ne permettent pas de gérer la complexité du problème étudié.

Le séquençement présente néanmoins l'inconvénient d'être une méthode **incomplète** : il ne garantit pas qu'une solution sera trouvée si elle existe. Les résultats obtenus par séquençement sont en effet extrêmement dépendants de l'ordre dans lequel les trajectoires ont été planifiées. Il est possible qu'en autorisant un mobile à suivre sa ligne droite, on crée une situation de blocage dans laquelle cette trajectoire empêche d'autres mobiles de rejoindre leur destination à vitesse constante.

En plus d'être une méthode incomplète, le séquençement est également une méthode **inéquitable**. Dans le cas de deux mobiles, les déviations par rapport à la ligne droite sont restreintes. Mais dans le cas de plusieurs dizaines de mobiles souhaitant naviguer dans le même espace, le mobile dont la trajectoire est planifiée en dernier devra contourner la totalité des autres mobiles, alors que les premiers pourront rejoindre directement leur destination. Le séquençement fait que certains mobiles supportent plus que d'autres les déviations nécessaires à l'évitement de conflit. Utiliser le séquençement en ATM poserait alors la question de l'ordre dans lequel sont planifiées les trajectoires : à quel avion, ou à quelle compagnie, donner la priorité? Comment garantir que toutes les compagnies subiront équitablement les déviations sur le long terme?

Le séquençement est néanmoins la méthode utilisée par les contrôleurs aériens lors de la résolution de conflit à l'horizon tactique. Il est en effet bien plus simple pour un contrôleur de dévier un seul avion lorsqu'un risque de conflit se présente. Une modification des trajectoires de plusieurs avions demanderait un travail prédictif trop important au contrôleur qui ne peut pas rester concentré sur le conflit potentiel en permanence. Le choix de l'avion à dévier est souvent pris de manière arbitraire, mais peut aussi découler naturellement du trafic environnant. Mieux vaut dévier un avion qui ne risque pas d'entrer en conflit avec d'autres avions que d'envoyer un avion dans une zone déjà fortement congestionnée.

Pour résumer, le séquençement est une méthode simple de planification de trajectoires pour plusieurs mobiles. Il s'adapte très bien à des situations d'urgence où une décision doit être prise rapidement en tenant compte uniquement de l'environnement local du conflit. Le séquençement produit néanmoins des solutions inéquitables, un inconvénient majeur pour une planification à horizon stratégique qui autorise un temps de calcul plus long et impose un processus de collaboration avec les compagnies aériennes.

Parmi les méthodes utilisant le séquençement, on notera : [Zheng 2006], [Dougui 2011], [Dougui 2013].

### 3.2 Méthodes Itératives

Ce que nous appelons méthodes itératives est des méthodes combinant une méthode de planification de trajectoire pour un mobile, une méthode de détection de conflit et une méthode d'optimisation (recuit simulé ou algorithmes génétiques par exemple). L'idée générale consiste à calculer les trajectoires pour tous les mobiles indépendamment les uns des autres, puis à détecter les conflits ainsi générés. La planification proposée est alors évaluée par un critère (qui dépend la plupart du temps du nombre de conflits et de la longueur des trajectoires). Les zones

de conflits sont ensuite "interdites" et les trajectoires des mobiles sont recalculées pour tenir compte de ces zones interdites. Le processus est alors répété jusqu'à obtenir une solution satisfaisante (critère satisfaisant).

Si les méthodes itératives permettent de répartir les déviations entre les mobiles concernés par un conflit, elles présentent néanmoins l'inconvénient d'être **incomplètes**. Il est en effet possible que la méthode d'optimisation oscille entre plusieurs solutions non pertinentes au lieu de converger vers une solution satisfaisante.

Les méthodes itératives semblent peu adaptées pour garantir l'évitement de conflit pour la totalité des trajectoires calculées. Elles peuvent néanmoins permettre d'améliorer l'état global de la planification en réduisant le nombre de conflit, ou simplement en "étalant" les trajectoires dans l'espace, réduisant ainsi les risques de conflit. Les méthodes itératives sont par exemple utilisées dans [Girardet 2013] pour diminuer la congestion (limiter le nombre d'avions dans une zone donnée) une fois la planification de trajectoires optimales en fonction du vent effectuée.

### 3.3 Système Multi-Agents (SMA)

Les SMA offrent des solutions pour la simulation de phénomènes complexes (sociologie, chimie, biologie cellulaire) et la résolution de problèmes complexes. Les SMA sont de plus en plus étudiés dans de nombreux domaines : physique, chimie, robotique, informatique, sociologie, finance, jeux vidéo et animation.

Un SMA est un système composé d'un ensemble d'agents autonomes interagissant dans un environnement donné. Chaque agent présente un comportement simple, représenté par une série de règles. Dans le cas de la planification de trajectoire, les deux règles simples d'un agent pourraient être : avancer vers la destination, éviter les obstacles. Chaque agent dispose de moyens de perception, grâce auxquels il actualise sa représentation interne de l'environnement. Selon ses moyens de perception, un agent peut ainsi avoir une connaissance seulement locale, ou globale de son environnement. Dans certains SMA, les agents peuvent également communiquer, ce qui leur permet de coopérer afin d'atteindre leur objectif.

L'intérêt des SMA vient de leur capacité à résoudre des problèmes complexes à partir d'agents au comportement simple. Ce sont en effet les interactions entre ces agents et entre les agents et l'environnement qui permettent l'émergence d'un comportement complexe pour le système. En optimisation, les SMA permettent ainsi de résoudre un problème sans en connaître explicitement la fonction objectif globale. La représentation d'un problème sous forme d'une multitude d'agents se prête de plus très bien à la parallélisation des calculs.

Dans le domaine de la robotique ou des UAV, les SMA sont très utilisés afin de faire coopérer des mobiles dans l'accomplissement de certaines missions. Chaque mobile est alors représenté par un agent. Des obstacles dynamiques peuvent eux aussi être représentés par des agents possédant des règles internes différentes. Parmi les missions étudiées, on trouve : le suivi d'une trajectoire en maintenant une formation [Egerstedt 2001], la recherche d'une cible dans un environnement inconnu [Sujit 2005], le recouvrement d'une zone géographique donnée [Zhai 2013], ou encore la planification de trajectoires d'avions sans conflit [Oikonomopoulos 2009].

Si les SMA offrent un cadre très adapté à la gestion de plusieurs mobiles dans un environnement dynamique, ils présentent néanmoins l'inconvénient de n'offrir **aucune garantie théorique sur l'émergence du comportement complexe souhaité** à partir des règles simples imposées aux agents. Les SMA sont donc une méthode **incomplète** pour la planification de trajectoires de plusieurs mobiles.

### 3.4 Mouvement Coordonné

Le mouvement coordonné tient compte de la totalité des mobiles dans le processus de planification de trajectoires, ce qui en fait la méthode la plus complexe pour la planification de trajectoires de plusieurs mobiles. La littérature offre deux approches différentes pour le mouvement coordonné : l'approche décentralisée et l'approche centralisée.

#### Approche Décentralisée ou Centralisée ?

Dans l'*approche décentralisée*, chaque mobile est responsable de la planification de sa trajectoire, en tenant compte uniquement des informations disponibles sur les positions des autres mobiles. Ainsi, si un mobile en voit un autre arriver face à lui, les deux mobiles feront en sorte de s'éviter. L'approche décentralisée est souvent associée à l'idée d'une planification locale qui ne tient compte que des mobiles les plus proches.

Puisque chaque mobile est responsable de sa propre planification, l'approche décentralisée pose néanmoins le problème du partage d'informations avec les autres mobiles. Deux mobiles ne peuvent pas s'éviter s'ils ne perçoivent pas la présence de l'un de l'autre. Sans des outils de détection et de communication efficaces, une planification décentralisée est irréalisable.

L'approche décentralisée est bien adaptée à une planification en temps réel. Puisque chaque mobile est responsable du calcul de sa propre trajectoire, le problème de planification est en fait réparti entre les mobiles, offrant ainsi un temps de calcul plus court. L'approche décentralisée permet également de tenir compte des aléas possibles : imprécision sur la position d'un mobile, panne d'un mobile qui s'arrête au milieu de l'espace...

En conclusion, l'approche décentralisée serait très adaptée à la résolution de conflit à l'horizon tactique, où des décisions doivent être prises rapidement et où il n'est pas nécessaire de tenir compte de l'état global du trafic. Il est important de souligner qu'une approche décentralisée pour la résolution de conflits aériens à l'horizon tactique demande néanmoins des moyens de communication performants et robustes.

Dans l'*approche centralisée*, une entité "omnisciente" planifie les trajectoires pour la totalité des mobiles à partir de leurs points de départ et d'arrivée. C'est donc cette entité qui peut détecter un conflit potentiel et répartir les déviations entre les mobiles impliqués dans le conflit.

**L'approche centralisée est particulièrement adaptée à notre problème**, puisque dans notre cas la planification n'est pas effectuée en temps réel, mais plusieurs jours à l'avance. La planification peut ainsi être effectuée en tenant compte de toutes les données disponibles. Il faut néanmoins noter qu'une telle planification centralisée ne permet pas de faire face aux aléas d'une situation en temps réel, ce qui limite son intérêt en tactique.

## Méthodes Heuristiques ou Déterministes ?

Dans le cadre de la planification centralisée de trajectoires, on peut distinguer deux grands types de méthodes : les méthodes heuristiques et les méthodes déterministes.

Les *méthodes heuristiques* tirent aléatoirement un ensemble de manœuvres réalisables par le mobile et sélectionnent le meilleur ensemble pour construire une trajectoire. Ainsi les trajectoires obtenues sont sûres d'être réalisables par le mobile. La capacité des méthodes heuristiques à tenir compte des contraintes de déplacement du mobile en fait des méthodes très étudiées pour la planification de trajectoires. Parmi les méthodes heuristiques fréquemment utilisées, on trouve les algorithmes génétiques utilisés pour la planification de trajectoires de robots [Yun 2010], d'UAV [de la Cruz 2008] ou d'avions [Peyronne 2012]. Les méthodes heuristiques sont malheureusement de complétude probabiliste dans le meilleur des cas. Elles ne permettent donc pas de garantir qu'une solution sera trouvée en temps fini.

Les *méthodes déterministes* sont de complétude liée à la résolution. Elles garantissent que si une solution existe, elle serait trouvée en temps fini. Elles offrent également des garanties théoriques sur l'évitement de collision. La méthode de planification de trajectoires déterministe la plus connue est une extension des fonctions de navigation pour plusieurs mobiles [Dimarogonas 2003], adaptée par la suite pour la planification de trajectoires d'avions [Roussos 2009]. Les méthodes déterministes ne permettent malheureusement pas de garantir que les trajectoires produites seront réalisables par le mobile puisqu'elles ne permettent d'imposer aucune contrainte sur les virages ou la vitesse du mobile.

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux **méthodes déterministes** puisqu'elles sont les seules à être de complétude liée à la résolution. Notre objectif est de développer une nouvelle méthode déterministe permettant de planifier des trajectoires d'avions à **vitesse constante**. Sans chercher à imposer une contrainte dure sur les virages des trajectoires, nous gardons à l'esprit que cette nouvelle méthode devra également produire des trajectoires les plus lisses possible. Pour cela, nous nous sommes inspirés des travaux réalisés sur les fonctions de navigation pour plusieurs mobiles et plus particulièrement aux espaces sur lesquels ces fonctions de navigation sont construites : les espaces de configuration.

## Espaces de Configuration

Comme nous l'avons vu dans la Section 1.3 de ce chapitre, les espaces de configuration permettent de représenter l'ensemble des degrés de liberté d'un robot. Une planification dans un espace de configuration permet ainsi de tenir compte de la totalité des mouvements possibles du robot.

Les espaces de configuration peuvent également se révéler utiles dans la planification de trajectoires de plusieurs mobiles. Au lieu de considérer l'espace de travail de chaque robot et de discrétiser leur trajectoire dans le temps pour garantir l'évitement de conflit, les espaces de configuration permettent de représenter l'ensemble des trajectoires des mobiles dans un seul espace de dimension plus élevée. Un point dans l'espace de configuration représente ainsi les positions de tous les mobiles. Il n'est alors plus utile de discrétiser les trajectoires dans le temps puisque les situations où deux mobiles sont au même endroit au même moment sont

représentées par des points de l'espace de configuration. En construisant une trajectoire dans l'espace de configuration privé de tous les points où deux mobiles sont au même endroit, on garantit de planifier des trajectoires sans collision pour l'ensemble des mobiles.

**Exemple Discret :** Un exemple simple d'espace de configuration discret peut être construit de la manière suivante. Considérons deux mobiles évoluant dans un espace discret  $E = \{0, 1, 2\}^2$  représenté Figure 3.1.

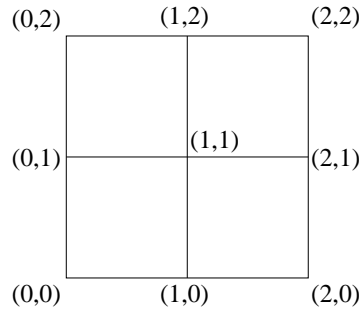


FIGURE 3.1 – Espace discret  $E$ .

L'espace de configuration pour deux mobiles évoluant dans  $E$  est alors donné par :

$$\mathcal{E}_d = E^2 - D_d \text{ avec } D_d = \{(p, p), p \in E\}.$$

$D_d$  représente l'ensemble des points de l'espace de configuration où les deux mobiles se trouvent au même endroit. Ici  $D_d$  est réduit au sous-ensemble diagonal de  $E^2$  puisqu'il n'y a que deux mobiles. L'espace  $\mathcal{E}_d$  est alors un espace de dimension 4 constitué de 72 points.

Imaginons maintenant que le Mobile 1 veuille aller de (1,2) à (1,0) et que le Mobile 2 veuille aller de (0,1) à (2,1). La route directe (en rouge Figure 3.2) pour chaque mobile est alors donnée par : (1,2)→(1,1)→(1,0) et (0,1)→(1,1)→(2,1). Si les deux mobiles partent en même temps et suivent leur route directe, ils entreraient en collision en (1,1). Une manœuvre d'évitement possible est présentée en vert Figure 3.2 : le Mobile 1 suit (1,2)→(0,2)→(0,1)→(0,0)→(1,0) alors que le Mobile 2 suit (0,1)→(0,0)→(1,0)→(2,0)→(2,1).

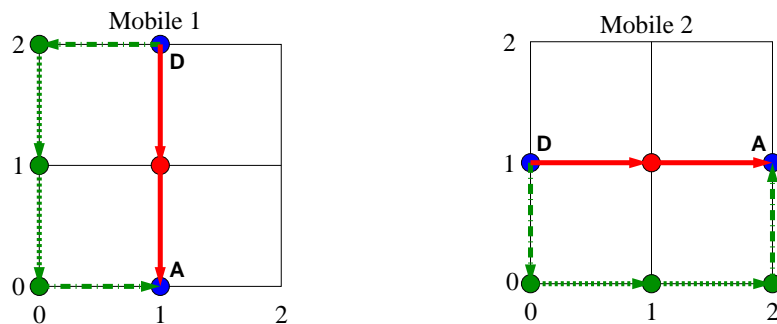


FIGURE 3.2 – Trajectoires de chaque mobile dans l'espace  $E$ . Trajectoires avec collision (traits pleins) et Trajectoires sans collision (pointillés).

Dans l'espace de configuration  $\mathcal{E}_d$ , les trajectoires du Mobile 1 et du Mobile 2 deviennent une seule et unique trajectoire. La trajectoire avec collision est alors donnée par :

$$(1, 2, 0, 1) \rightarrow (1, 1, 1, 1) \rightarrow (1, 0, 2, 1)$$

et la trajectoire sans collision par :

$$(1, 2, 0, 1) \rightarrow (0, 2, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 1, 0) \rightarrow (0, 0, 2, 0) \rightarrow (1, 0, 2, 1).$$

L'espace de configuration  $\mathcal{E}_d$  peut être représenté comme dans la Figure 3.3 en plaçant la position du Mobile 1 en abscisse et la position du Mobile 2 en ordonnée. Cette représentation de l'espace de configuration est en fait une projection choisie de manière à ce que l'ensemble des positions interdites de l'espace de configuration apparaisse sur une ligne diagonale. La trajectoire avec collision (rouge) traverse la diagonale de l'espace de configuration en passant par le point  $(1,1,1,1)$ . La trajectoire sans collision (vert) évite la diagonale en utilisant les quatre dimensions disponibles.

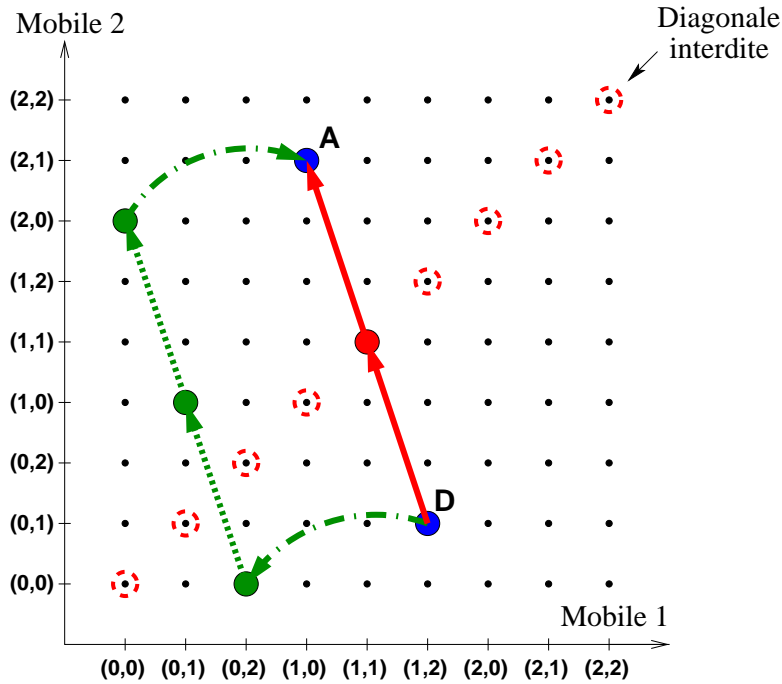


FIGURE 3.3 – Espace de configuration  $\mathcal{E}_d$ . Trajectoire avec collision (trait plein) et Trajectoire sans collision (pointillés). La diagonale interdite est représentée par les points cerclés de pointillés rouges.

**Application à la Planification de Trajectoires d'Avions :** Considérons  $n$  avions volant à un niveau de vol donné. On note  $X_i = (x_i, y_i)$  la position de l'avion  $i$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Deux avions,  $i$  et  $j$  entrent en collision s'ils sont au même endroit au même moment, autrement dit si  $X_i = X_j$ . On note  $D_c$  l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^{2n}$  où deux avions entrent en collision :

$$D_c = \{(X_1, \dots, X_n), \exists i \neq j, X_i = X_j\}.$$



L'espace de configuration dans lequel on cherche à construire nos trajectoires est alors :

$$\mathcal{E}_c = \mathbb{R}^{2n} - D_c.$$

N'importe quelle trajectoire construite dans  $\mathcal{E}_c$  garantira l'évitement de collision. Notre but est donc de trouver une méthode permettant de construire des trajectoires à **vitesse constante et garantissant l'arrivée des mobiles à leur destination** sur cet espace de configuration.

### 3.5 Conclusion

Afin d'obtenir une méthode équitable et dont la complétude est liée à la résolution, nous planifions les trajectoires des avions de **manière coordonnée**. Pour exploiter au mieux les informations disponibles sur l'état du trafic, nous utilisons une **approche centralisée**. Pour cela nous cherchons à construire nos trajectoires sur des **espaces de configuration**.

## 4 Choix de la Méthode de Planification de Trajectoires

Dans cette section nous avons en premier lieu étudié les méthodes de planification de trajectoire pour un avion et en avons sélectionné deux : les **champs de potentiel** et les **fonctions de navigation**. Afin de planifier les trajectoires de plusieurs avions de manière coordonnée, nous prévoyons de construire ces champs de potentiel et fonctions de navigation sur des **espaces de configuration**.

L'étude de la méthode des champs de potentiels et de leur construction sur des espaces de configuration est présentée dans la deuxième partie de cette thèse.

La troisième partie de cette thèse se consacre aux fonctions de navigation et à leur application à la planification de trajectoires d'avions.



*Deuxième partie*

Planification de Trajectoires :  
Champs de Potentiel



## Chapitre 4

# Planification d'une Trajectoire : Champs de Potentiel et Fonctions Harmoniques

Dès son apparition dans les années quatre-vingt, la méthode des champs de potentiel a attiré l'attention. Sa simplicité, à la fois théorique et de mise en œuvre, en a fait une méthode très étudiée, d'abord en robotique, puis pour la navigation d'UAV. Les méthodes de construction, ainsi que les idées d'application des champs de potentiel se sont multipliées durant les vingt dernières années, à tel point qu'il est aujourd'hui difficile de réaliser une synthèse exhaustive de tous les travaux réalisés sur les champs de potentiel.

Le but de ce chapitre est donc de résumer les grandes lignes de la méthode des champs de potentiel, ses possibilités, ainsi que ses limites. Nous montrons ensuite les bénéfices que peuvent apporter les fonctions harmoniques dans la construction des champs de potentiel et résumons les travaux déjà réalisés sur le sujet.

### 1 Les Champs de Potentiel

La méthode des champs de potentiel (*Artificial potential fields*) apparaît pour la première fois dans la thèse [Khatib 1980] (en français). Le principe de cette méthode est simple : l'espace libre du mobile est recouvert d'un champ de force construit en superposant un champ de force attirant le mobile à sa destination et des champs de force repoussant le mobile loin des obstacles. En suivant le champ de force ainsi obtenu, le mobile rejoint la destination tout en évitant les obstacles.

En physique, un champ de potentiel est un champ continu irrotationnel. Il dérive d'une fonction potentielle  $U$  et est obtenu à partir du gradient de  $U$  :  $-\nabla U$ . Le principe est le même dans le cadre de la planification de trajectoires. Une fonction potentielle  $U$  est construite sur l'espace libre du mobile de manière à être maximale sur les frontières de l'espace libre et minimale à la destination (voir Figure 4.1). Une trajectoire pour le mobile est ensuite obtenue en calculant  $-\nabla U$ , i.e. en suivant les valeurs décroissantes de la fonction potentielle.

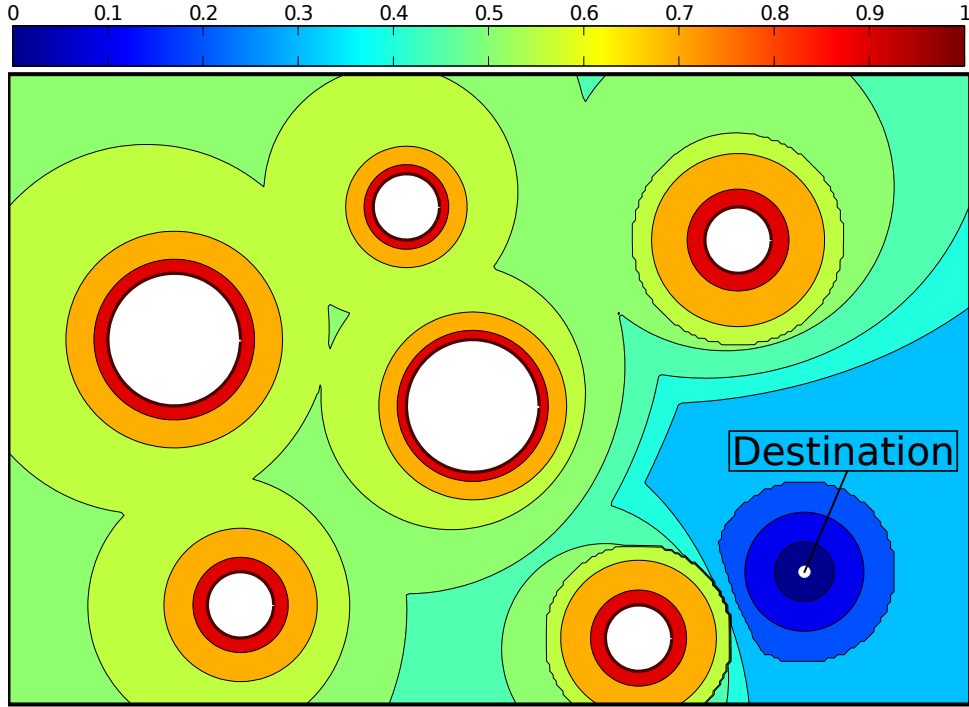


FIGURE 4.1 – Exemple de fonction potentielle. Cercles blancs=Obstacles; Point blanc=Destination.

### 1.1 Champ de Potentiel Proposé par Khatib

Dans sa thèse [Khatib 1980], Khatib propose plusieurs champs de potentiel différents pour la navigation d'un robot manipulateur dans un espace contenant un obstacle. Nous présentons ici l'un de ces champs, détaillé dans [Khatib 1985].

Pour un mobile souhaitant naviguer dans un espace 2D contenant un obstacle fixe, le champ de potentiel est construit à partir d'une fonction potentielle :

$$U_K(x, y) = U_{dest}(x, y) + U_O(x, y),$$

où  $U_{dest}$  représente la contribution de la destination et  $U_O(x, y)$  la contribution de l'obstacle à la construction du champ de potentiel. Le champ de potentiel est ensuite obtenu en calculant :

$$-\nabla U_K(x, y) = \underbrace{-\nabla U_{dest}(x, y)}_{\text{champ attractif}} \quad \underbrace{-\nabla U_O(x, y)}_{\text{champ répulsif}}.$$

En notant  $q = (x, y)$  la position du mobile,  $q_d = (x_d, y_d)$  la position de la destination et  $k$  un gain positif, la fonction  $U_{dest}$  proposée par Khatib s'écrit :

$$U_{dest}(q) = \frac{k}{2} \|q - q_d\|^2.$$

La partie répulsion générée par l'obstacle peut, quant à elle, être exprimée en fonction de la distance entre le mobile et le point le plus proche de l'obstacle  $\rho(q)$ , de la zone d'influence de

l'obstacle  $\rho_0$  et d'un gain positif  $\eta$  :

$$U_O(q) = \begin{cases} \frac{\eta}{2} \left( \frac{1}{\rho(q)} - \frac{1}{\rho_0} \right)^2, & \text{si } \rho \leq \rho_0 ; \\ 0, & \text{si } \rho > \rho_0. \end{cases}$$

La fonction  $\rho(q)$  peut être compliquée à calculer selon la géométrie de l'obstacle présent dans l'espace de travail. Mais dans le cas où l'obstacle à éviter est un disque de centre  $q_O$  et de rayon  $r$ , elle s'écrit comme :

$$\rho(q) = \|q - q_O\| - r.$$

Considérons maintenant un espace rempli de  $m$  obstacles, tous des disques de centre  $q_{O_j} = (x_{O_j}, y_{O_j})$  et de rayon  $r_j$ . La fonction potentielle s'écrit comme :

$$U_K(q) = U_{dest}(q) + \sum_{j=1}^m U_{O_j}(q), \quad (4.1)$$

avec :

$$U_{O_j}(q) = \begin{cases} \frac{\eta}{2} \left( \frac{1}{\|q - q_{O_j}\| - r_j} - \frac{1}{\rho_0} \right)^2, & \text{si } \rho \leq \rho_0 ; \\ 0, & \text{si } \rho > \rho_0. \end{cases}$$

En appliquant cette méthode à un espace contenant six obstacles circulaires et en choisissant  $k = 1$ ,  $\eta = 1$  et  $\rho_0 = 1$ , on obtient la fonction potentielle présentée Figure 4.2. Cette fonction potentielle décroît bien lorsque le mobile s'approche de la destination et prend des valeurs élevées autour des obstacles.

Le champ de potentiel correspondant est obtenu en dérivant (4.1) :

$$-\nabla U_K(q) = -\nabla U_{dest}(q) - \sum_{j=1}^m \nabla U_{O_j}(q),$$

avec :

$$-\nabla U_{dest}(q) = \begin{bmatrix} -(x - x_d) \\ -(y - y_d) \end{bmatrix},$$

et :

$$-\nabla U_{O_j}(q) = \left( \frac{1}{\rho_j(q)} - \frac{1}{\rho_0} \right) \frac{1}{\|q - q_{O_j}\| \rho_j(q)^2} \begin{bmatrix} x - x_{O_j} \\ y - y_{O_j} \end{bmatrix}.$$

La loi de contrôle associée au champ de potentiel est donnée par :

$$\dot{q} = -\nabla U_K(q).$$

La norme du champ de potentiel contrôle la vitesse de navigation du mobile. Afin d'obtenir des **trajectoires à vitesse constante**, c'est donc le **champ de potentiel normé** qui est utilisé comme loi de contrôle :

$$\dot{q} = -\frac{\nabla U_K(q)}{\|\nabla U_K(q)\|}. \quad (4.2)$$

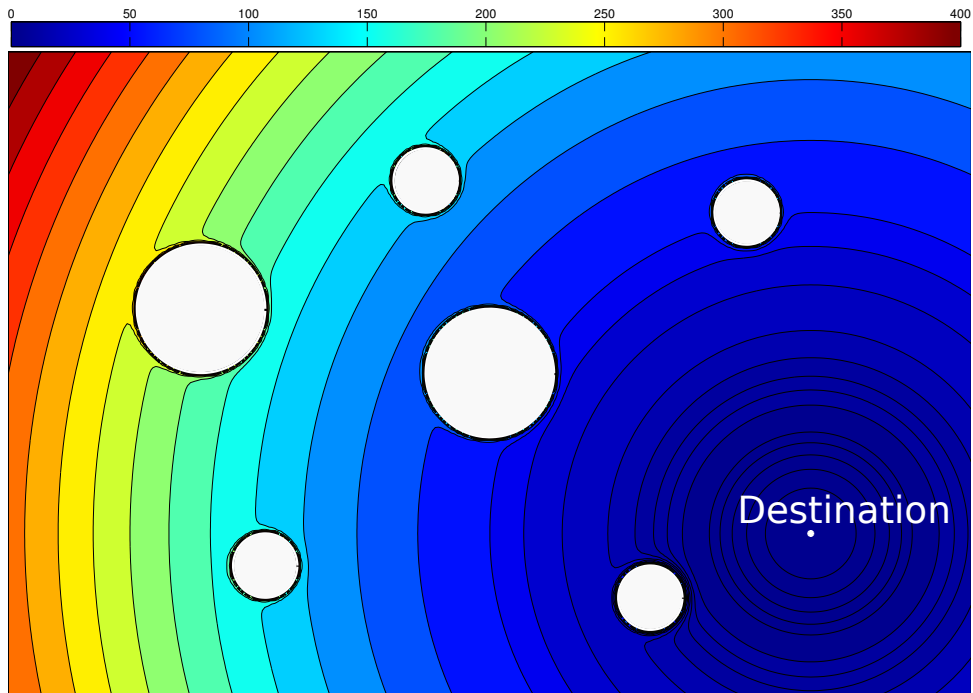


FIGURE 4.2 – Fonction potentielle de Khatib (4.1) avec  $k = 1$ ,  $\eta = 1$  et  $\rho_0 = 1$ . Cercles blancs=Obstacles; Point blanc=Destination.

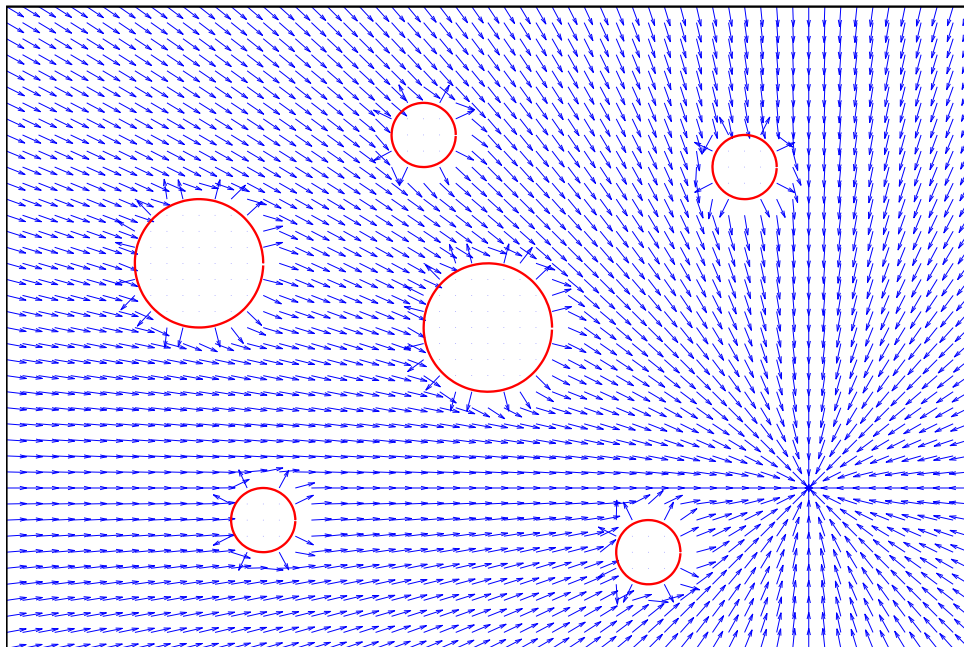


FIGURE 4.3 – Champ de potentiel de Khatib normé (4.2). Cercles rouges=Obstacles.



Dans le cas du champ de potentiel de Khatib normé présenté Figure 4.3, les champs répulsifs apparaissent nettement autour des obstacles, tandis que le reste de l'espace libre est recouvert d'un champ pointant vers la destination.

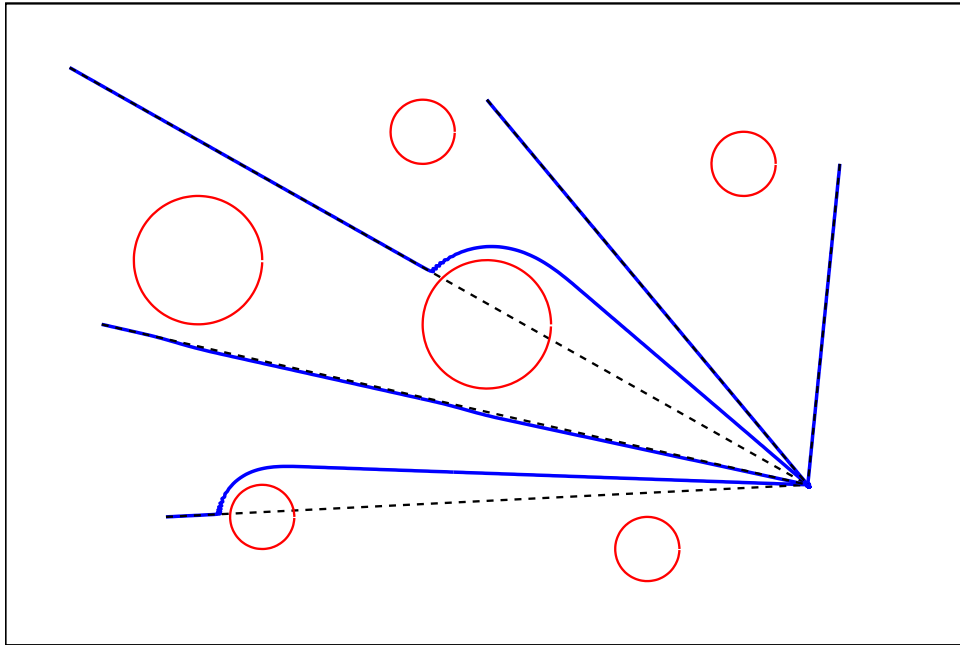


FIGURE 4.4 – Trajectoires obtenues en suivant le champ de potentiel de Khatib de la Figure 4.3 depuis cinq points de départ (traits pleins bleus). Cercles rouges=Obstacles ; Pointillés noirs=Lignes droites entre départs et destination.

Les trajectoires suivant la loi de contrôle (4.2) peuvent être calculées de la manière suivante :

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{Initialisation} : q_{t=0} = q_s \\
 \mathbf{Tant\ que} : \|q_t - q_d\| > \epsilon \\
 \left| \begin{array}{l} q_{t+1} = q_t - dt * \nabla U_K(q_t) \\ t = t + 1 \end{array} \right.
 \end{array}$$

avec  $q_s$  le point de départ de la trajectoire,  $dt$  le pas de discrétisation de la trajectoire et  $\epsilon$  la précision voulue pour l'arrivée à destination.

Les trajectoires calculées en suivant le champ de potentiel (4.2) atteignent toutes la destination tout en évitant les obstacles (voir Figure 4.4). La forme des trajectoires dépend du champ de potentiel utilisé. Dans le cas présent, un champ répulsif n'apparaît que dans une petite zone autour de chaque obstacle. Le mobile vient donc "taper" l'obstacle, avant de le contourner.

Des trajectoires plus lisses peuvent être obtenues en utilisant d'autres fonctions potentielles pour construire le champ de potentiel. La forme des trajectoires, ainsi que la distance à laquelle les trajectoires évitent les obstacles dépendent entièrement de la fonction potentielle choisie.

## 1.2 Développement des Champs de Potentiel et Applications

Si la formulation présentée dans la Section 1.1 de ce chapitre est faite pour la navigation d'un mobile dans un environnement statique, les champs de potentiel ont très vite été adaptés à la navigation de mobiles en environnement dynamique. Parmi les premiers travaux sur le sujet, on trouve l'utilisation des champs de potentiel pour le contrôle d'un mobile appliquant différents schémas de navigation en fonction de l'environnement qui l'entoure [Arkin 1989]. Le caractère dynamique de l'espace peut également être pris en compte en construisant un champ de potentiel fonction de la distance aux obstacles, mais également de la vitesse relative entre le mobile et les obstacles [Ge 2002].

Certaines méthodes de construction de champs de potentiel sont directement inspirées des équations rencontrées dans certains problèmes de physique. Un champ de potentiel peut ainsi être créé par analogie à un champ électrostatique [Shahidi 1991] ou à un champ hydrodynamique [Akishita 1990]. Plus récemment, une méthode de construction par apprentissage a été proposée [Winn 2012]. Le champ de potentiel y "apprend" comment éviter des obstacles et rejoindre la destination à partir de quelques trajectoires de référence fournies par un "expert".

Les champs de potentiel ont également été exploités dans la navigation de plusieurs mobiles en formation [Kim 2006] ou encore le transport d'un objet par deux robots [Wada 2013]. Plusieurs mobiles peuvent également être maintenus en formation en créant une fonction potentielle qui atteint son maximum lorsque la formation désirée est atteinte [Tsankova 2012].

Parmi les applications peu ordinaires des champs de potentiel, on notera la planification de trajectoire pour un voilier en tenant compte du vent [Petres 2011], ainsi que l'exploration d'un environnement statique inconnu [Trevisan 2006].

### Applications à l'ATM

La première application des champs de potentiel à la planification de trajectoires d'avions apparaît dans la thèse [Zeghal 1994] (en français). Depuis, peu de travaux ont été réalisés sur le sujet. Les champs de potentiel ont été utilisés pour éviter les conflits entre des avions suivant leur plan de vol [Duong 1997]. Une planification de trajectoires sans conflit pour deux ou trois avions a été réalisée à partir de champs de potentiel dans [Ghosh 2000]. Chaque avion y possède son propre champ de potentiel, constitué d'un puits attracteur à sa destination et d'une force répulsive et d'un vortex local autour des autres avions pour éviter les conflits. Les auteurs concluent néanmoins que la construction du champ de potentiel est trop coûteuse en temps et la méthode n'a jamais été développée pour plus de trois avions.

De tous les travaux réalisés sur le sujet, il ressort que la méthode des champs de potentiel comporte plusieurs défauts. Certains de ces défauts doivent être résolus avant que les champs de potentiel puissent être utilisés pour la planification de trajectoires d'avions.

## 1.3 Défauts des Champs de Potentiel

Les principaux défauts des champs de potentiel ont été relevés très tôt par Koren et Borstein [Koren 1991]. Trois des défauts cités dépendent beaucoup de la méthode utilisée pour construire le champ de potentiel, ainsi que de la précision numérique avec laquelle le champ est

calculé. Les auteurs reprochent ainsi aux champs de potentiel de ne pas permettre le passage entre des obstacles proches, de générer des oscillations dans les passages étroits et de générer des oscillations en présence d'obstacles.

Ce dernier problème apparaît effectivement dans le champ de potentiel proposé par Khatib : lorsque le mobile arrive devant un obstacle, sa trajectoire oscille lorsqu'il commence à contourner l'obstacle avant de redevenir lisse. En reprenant l'exemple présenté Figure 4.4 et en zoomant sur le petit obstacle en bas à gauche, on remarque des oscillations dans la trajectoire (voir Figure 4.5).

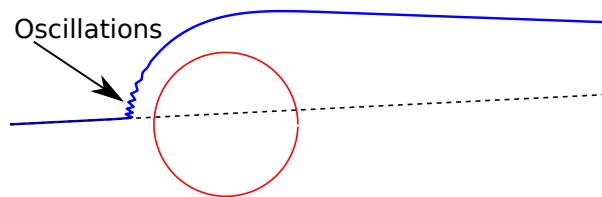


FIGURE 4.5 – Oscillations d'une trajectoire obtenue avec le champ de potentiel de Khatib (trait plein bleu). Cercle rouge=Obstacle ; Pointillés noirs=Ligne droite entre départ et destination.

Mais le plus gros défaut des champs de potentiel reste l'existence de minima locaux dans la fonction potentielle utilisée pour construire le champ de potentiel. Ces minima locaux deviennent alors des puits attrapeurs locaux dans lesquels le mobile peut se retrouver bloqué. La fonction potentielle proposée par Khatib n'échappe pas à ce problème comme le montre la Figure 4.6. La zone entre les obstacles devient un puits attrapeur (voir Figure 4.7) dans lequel le mobile peut aller se bloquer pour certains points de départ (voir Figure 4.8).

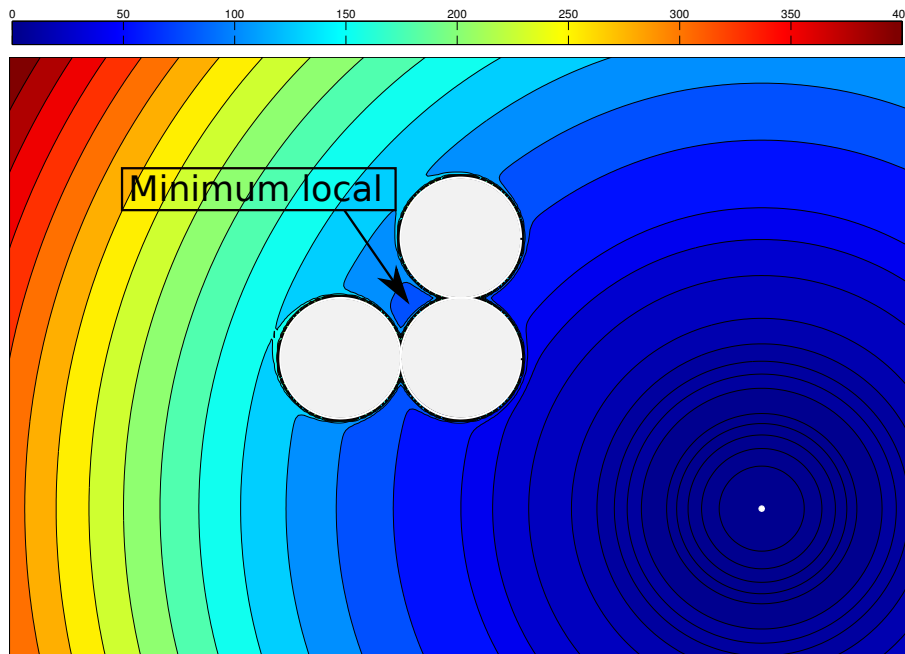


FIGURE 4.6 – Fonction potentielle de Khatib avec un minimum local. Cercles blancs=Obstacles ; Point blanc=Destination.

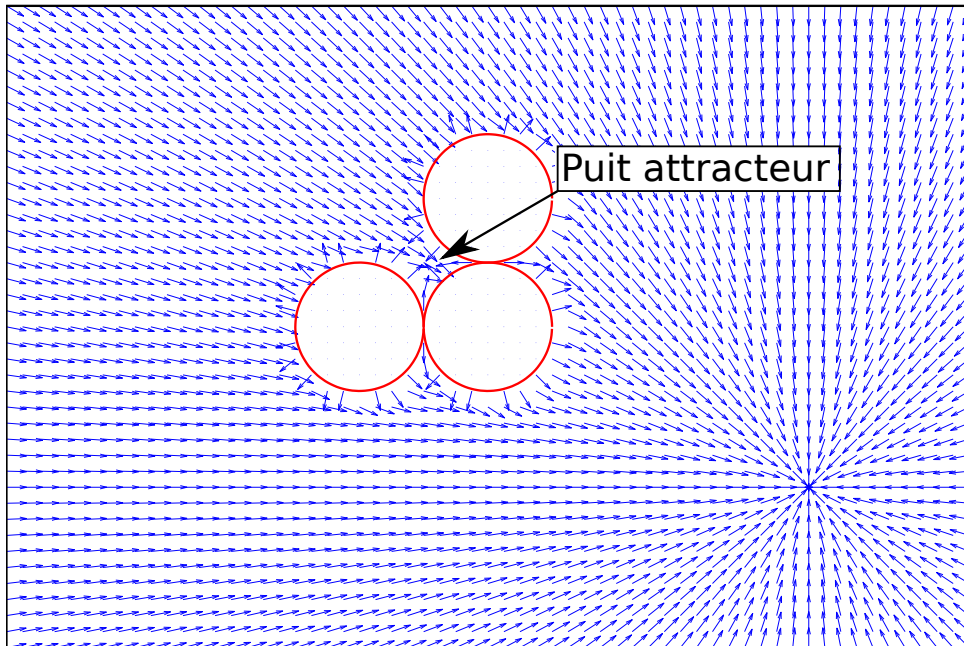


FIGURE 4.7 – Champ de potentiel de Khatib normé avec un puits attracteur entre les obstacles. Cercles rouges=Obstacles.

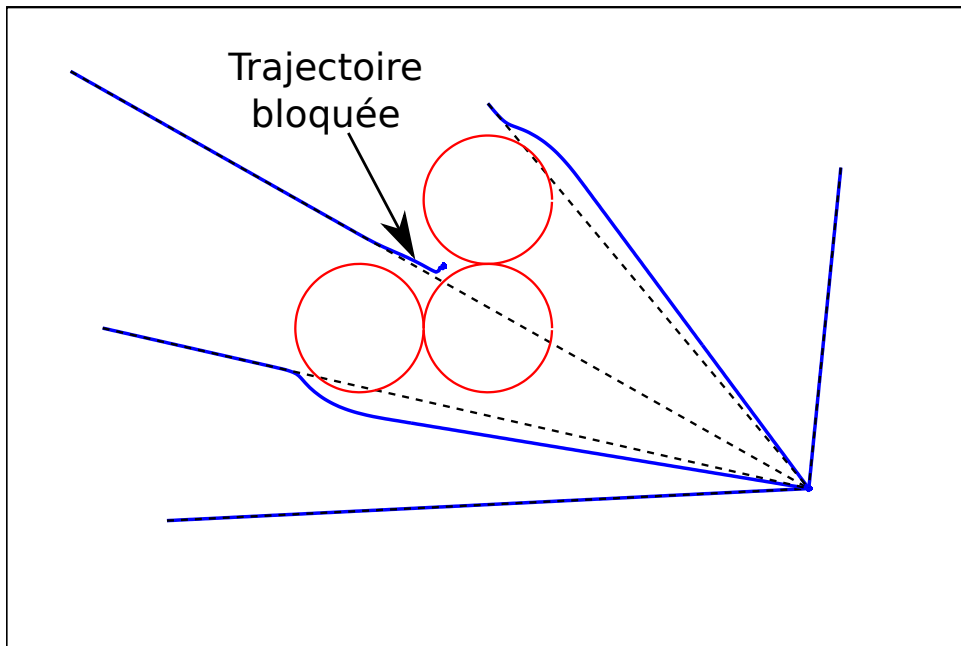


FIGURE 4.8 – Trajectoires obtenues en suivant le champ de potentiel de Khatib de la Figure 4.7 depuis cinq points de départ (traits pleins bleus). Une des trajectoires reste bloquée entre les obstacles. Cercles rouges=Obstacles; Pointillés noirs=Lignes droites entre départs et destination.

## 1.4 Méthodes de Résolution du Problème des Minima Locaux

La présence de minima locaux dans les fonctions potentielles servant à construire les champs de potentiel rend cette méthode incomplète. En effet, la méthode des champs de potentiel ne peut pas garantir qu'une trajectoire reliant le point de départ à la destination pourra être trouvée en temps fini, puisque les trajectoires qu'elle produit peuvent rester bloquées dans un minimum local de la fonction potentielle. Résoudre le problème des minima locaux est donc indispensable pour rendre la méthode des champs de potentiel de complétude liée à la résolution.

Une première idée proposée pour contourner le problème des minima locaux est de construire un graphe reliant les minima locaux aux points de départ et d'arrivée [Barraquand 1992]. Une recherche de plus court chemin peut alors être effectuée sur ce graphe. La trajectoire est ensuite construite en suivant ce chemin et le champ de potentiel. Cette méthode nécessite néanmoins la recherche de tous les minima locaux de l'espace, puis la construction et la recherche du plus court chemin sur ce graphe, ce qui augmente le temps de calcul de la méthode.

Une autre idée consiste à coupler la méthode des champs de potentiel à une méthode stochastique. Le mobile suit la trajectoire fournie par le champ de potentiel, jusqu'à atteindre un minimum local. La méthode stochastique est alors utilisée pour sortir le mobile de ce minimum local, qui peut de nouveau suivre le champ de potentiel jusqu'à atteindre un nouveau minimum local ou la destination. Les méthodes stochastiques utilisées peuvent être une méthode de *Monte-Carlo* [Barraquand 1991], un *recuit simulé* [Janabi-Sharifi 1993] ou un *algorithme de colonie de fourmis* [Zhao 2006]. La méthode ainsi obtenue est néanmoins de complétude probabiliste et non de complétude liée à la résolution.

Plus récemment, une méthode pour transformer les minima locaux (qui sont des points d'équilibre stable) en équilibres instables a été proposée [Mabrouk 2008]. Un *état interne de l'agent* est affecté au mobile. Il dépend de l'interaction du mobile avec son environnement et déforme localement le champ de potentiel. Lorsque le mobile n'évolue plus dans l'environnement, l'état interne de l'agent déforme le champ de potentiel, ce qui fait sortir le mobile du minimum local. Cette méthode permet de faire sortir un mobile d'un minimum local, mais les trajectoires produites présentent des manœuvres irréalisables par des avions. Ainsi si cette méthode semble être une bonne solution en robotique, elle est inutilisable dans le cadre de l'ATM.

La dernière méthode utilisée dans la littérature consiste à utiliser des fonctions harmoniques pour la construction des champs de potentiel.

## 2 Résolution du Problème des Minima Locaux : les Fonctions Harmoniques

**Définition 4.1.** Une fonction réelle  $f$  définie sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est dite *harmonique* si elle satisfait l'équation de Laplace :

$$\Delta f(x_1, \dots, x_n) = \nabla^2 f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0.$$

Les fonctions harmoniques sont utiles dans la résolution du problème des minima locaux des champs de potentiel grâce au *principe du maximum* :

**Proposition 4.1.** *Soit  $\Omega$  borné et  $f$  une fonction continue à valeurs réelles dans  $\bar{\Omega}$  et harmonique sur  $\Omega$ . Alors  $f$  atteint ses extremums en  $\partial\Omega$ .*

Le principe du maximum garantit que toute fonction harmonique atteint ses valeurs maximales et minimales sur les frontières du domaine sur lequel elle est définie. Une fonction harmonique possédant un minimum local à l'intérieur de son domaine de définition est nécessairement constante.

Le principe du maximum fait des fonctions harmoniques des candidates idéales pour la construction de champs de potentiel sans minima locaux. Il est important de noter que pour pouvoir utiliser une fonction harmonique dans la construction d'un champ de potentiel, la destination (qui est un minimum de la fonction potentielle) doit être un point frontière de l'espace libre. À cause du principe du maximum, il est impossible de construire une fonction harmonique (non constante) atteignant sa valeur minimale en un point à l'intérieur de son domaine de définition.

## 2.1 Les Champs de Potentiel Harmoniques

La méthode la plus intuitive pour construire une fonction harmonique maximum sur les frontières des obstacles et minimum sur la destination est sans doute de résoudre l'équation de Laplace soumise à des conditions aux limites de *Dirichlet*.

### Champs de Potentiel Harmoniques avec Conditions de Dirichlet

Supposons que l'on cherche à planifier la trajectoire d'un mobile évoluant dans un espace rempli de  $m$  obstacles  $O_j$  et cherchant à atteindre sa destination  $q_d$ . Les frontières de l'espace libre  $\mathcal{F}$  sont alors données par les frontières des obstacles et la destination :

$$\partial\mathcal{F} = \bigcup_{j=1}^m \partial O_j \cup q_d.$$

On cherche à construire une fonction harmonique prenant la valeur 1 sur les frontières des obstacles et la valeur 0 à la destination. L'équation de Laplace soumise à des conditions aux limites de Dirichlet s'écrit alors :

$$\begin{cases} \Delta f = 0 \text{ sur } \mathcal{F} - \partial\mathcal{F} \\ f = 1 \text{ sur } \partial\mathcal{F} - q_d . \\ f = 0 \text{ sur } q_d \end{cases} \quad (4.3)$$

La méthode des *différences finies* s'adapte très bien à la résolution de l'équation de Laplace soumise à des conditions aux limites de Dirichlet. Le laplacien de la fonction harmonique peut être discrétisé sur une grille régulière de pas  $h$  suivant le schéma suivant :

$$\Delta f(x, y) = \frac{f(x, y - h) + f(x - h, y) - 4f(x, y) + f(x + h, y) + f(x, y + h)}{h^2}. \quad (4.4)$$

En utilisant (4.4) et en imposant les conditions aux limites sur les frontières et la destination, un système linéaire à  $N$  équations et  $N$  inconnues est construit, avec  $N$  le nombre de sommets de la grille. La résolution de ce système linéaire donne la fonction potentielle associée au problème (4.3) et présentée Figure 4.9.

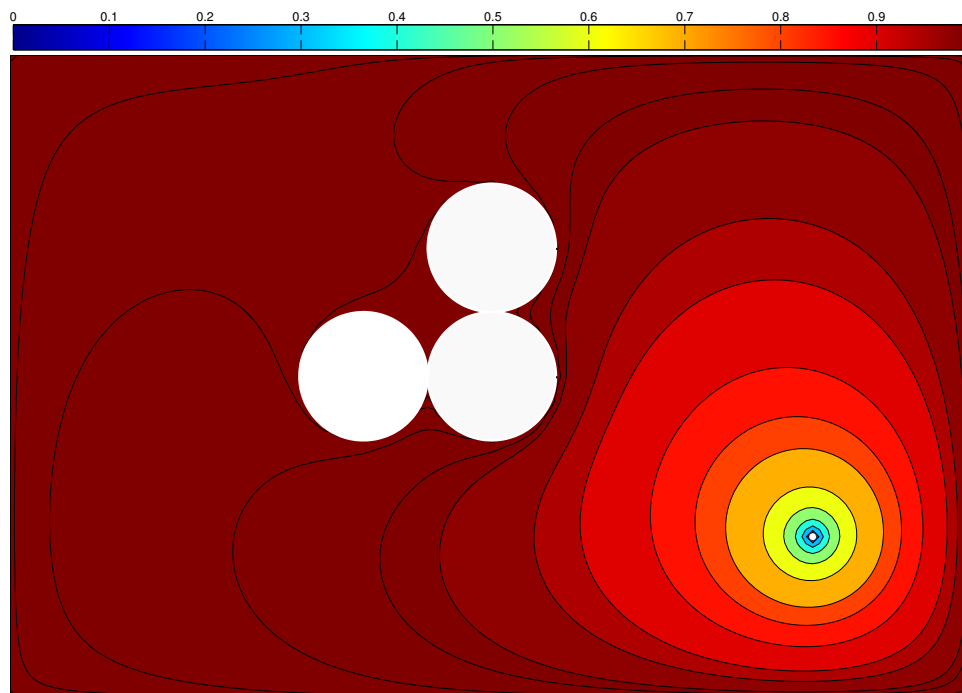


FIGURE 4.9 – Fonction potentielle harmonique avec conditions de Dirichlet. Cercles blancs=Obstacles; Point blanc = Destination.

Le champ de potentiel est ensuite obtenu par dérivation numérique de la fonction potentielle par un schéma centré :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{f(x + h, y) - f(x - h, y)}{2h},$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{f(x, y + h) - f(x, y - h)}{2h}.$$

Il apparaît sur le champ de potentiel normé présenté Figure 4.10 que la zone entre les trois obstacles n'est pas un minimum local de la fonction potentielle. À cet endroit, le champ de potentiel repousse le mobile loin des obstacles.

Les trajectoires obtenues grâce à ce champ (voir Figure 4.11) atteignent toutes la destination puisqu'il n'y a pas de minimum local entre les trois obstacles. Elles sont également beaucoup plus lisses que les trajectoires obtenues à partir du champ de potentiel de Khatib.

Appliquons un champ de potentiel harmonique avec conditions de Dirichlet sur le cas d'un espace contenant six obstacles. Le champ de potentiel normé et les trajectoires obtenues sont présentés Figure 4.12 et Figure 4.13.

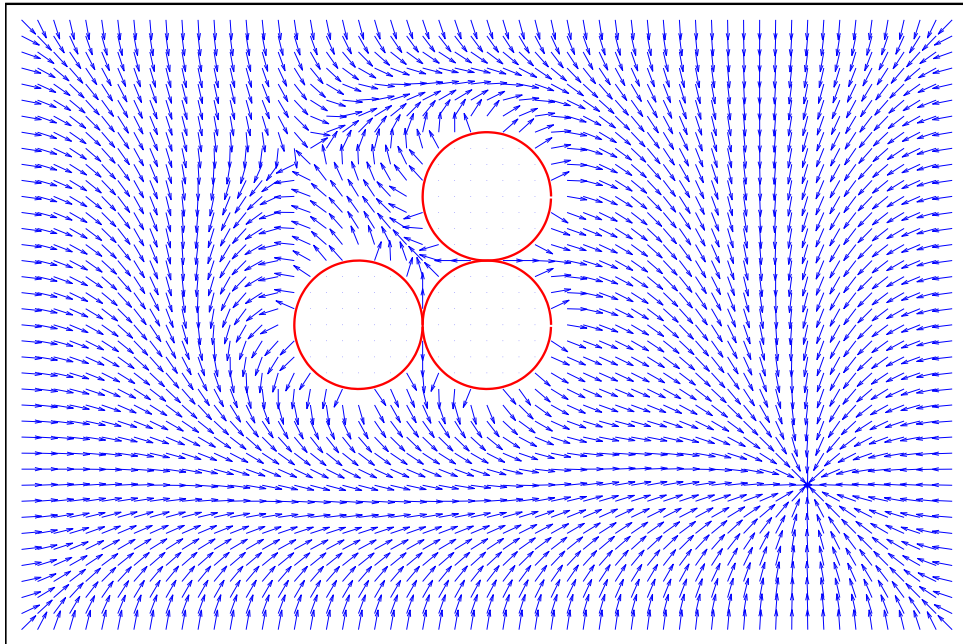


FIGURE 4.10 – Champ de potentiel harmonique avec conditions de Dirichlet normé. Cercles rouges=Obstacles.

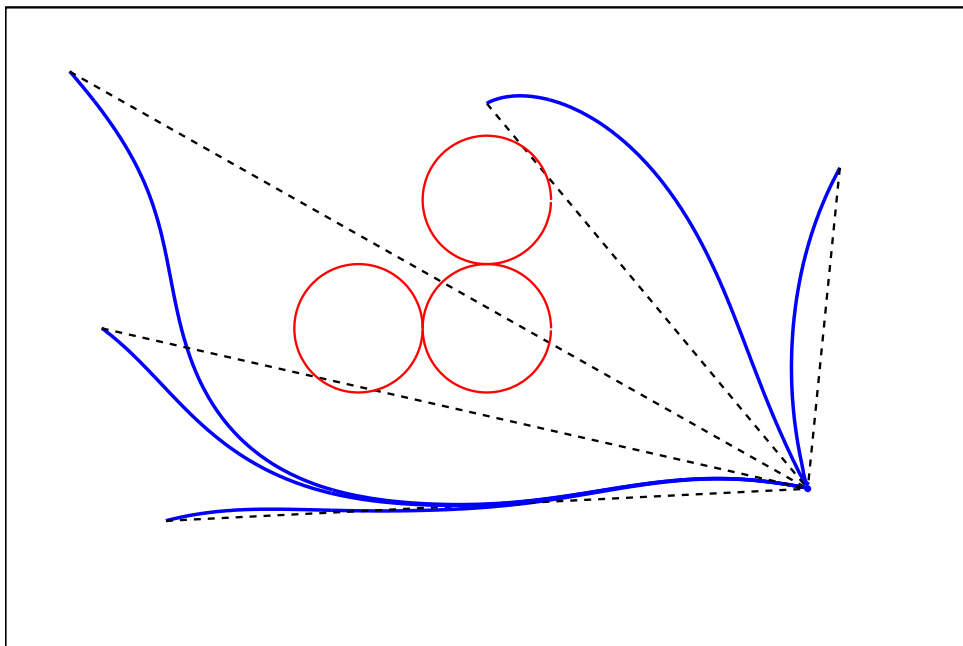


FIGURE 4.11 – Trajectoires obtenues en suivant le champ de potentiel harmonique de la Figure 4.10 depuis cinq points de départ (traits pleins bleus). Cercles rouges=Obstacles; Poin-tillés noirs=Lignes droites entre départs et destination.



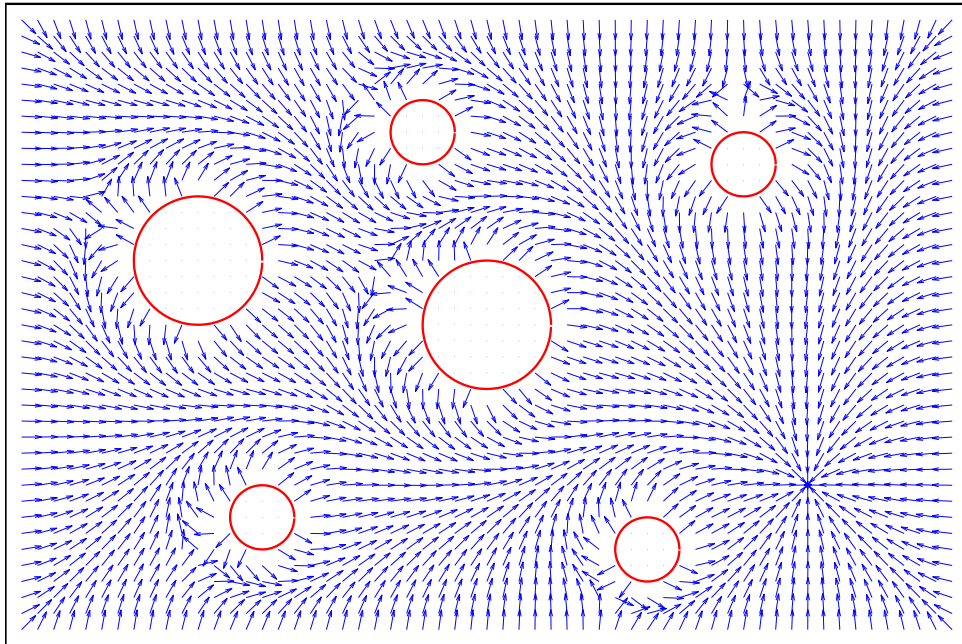


FIGURE 4.12 – Champ de potentiel harmonique avec conditions de Dirichlet normé. Cercles rouges=Obstacles.

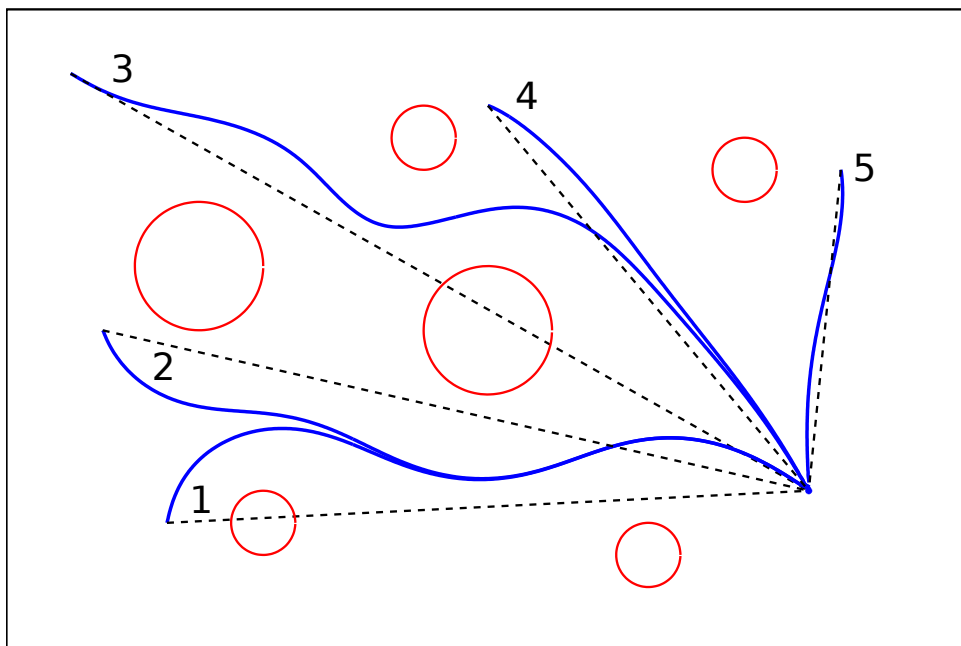


FIGURE 4.13 – Trajectoires obtenues en suivant le champ de potentiel harmonique Dirichlet de la Figure 4.12 depuis cinq points de départ (traits pleins bleus). Cercles rouges=Obstacles ; Pointillés noirs=Lignes droites entre départs et destination.

Les trajectoires atteignent bien toutes la destination tout en contournant les obstacles. Les trajectoires sont lisses, mais également très déviées. Les trajectoires 2, 4 et 5 s'écartent inutilement de la ligne droite. Les trajectoires 1 et 3 dévient de la ligne droite pour éviter des obstacles sur leur chemin, mais également pour contourner des obstacles qu'elles n'auraient pas traversés.

Ces déviations rallongent certes les trajectoires, mais elles permettent également de garder une certaine marge de sécurité dans l'évitement des obstacles. Ainsi, si la position d'un obstacle a été évaluée de manière imprécise, la trajectoire calculée a de grandes chances d'éviter tout de même l'obstacle.

Si les champs de potentiel harmoniques avec condition de Dirichlet semblent remplir toutes les conditions requises pour planifier la trajectoire d'un avion cherchant à éviter des obstacles fixes, ils présentent néanmoins un inconvénient majeur : ils sont évanescents. La norme d'un champ de potentiel harmonique avec conditions de Dirichlet décroît très vite au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la destination, comme le montre la Figure 4.14.

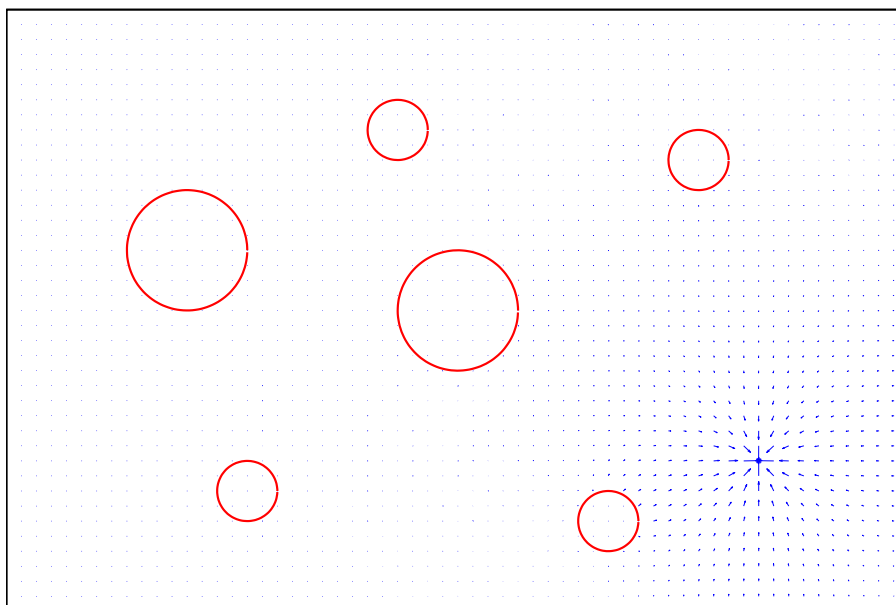


FIGURE 4.14 – Champ de potentiel harmonique avec conditions de Dirichlet NON normé. Cercles rouges=Obstacles.

Dans les cas présentés précédemment, le problème de l'évanescence a été contourné en normant le champ de potentiel. Mais une telle opération n'est possible que si le champ de potentiel est calculé avec une précision numérique suffisante. Prenons le cas d'un espace plus complexe : un labyrinthe. Le champ de potentiel harmonique avec conditions aux limites de Dirichlet normé calculé sur un labyrinthe est présenté Figure 4.15.

Le champ normé ne peut être calculé que sur une petite partie du labyrinthe, la norme du champ évolue alors entre 1 et  $10^{-6}$  au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la destination. Dans le reste de l'espace libre, la norme du champ est inférieure à  $10^{-6}$ . La précision du calcul n'est pas suffisante pour permettre d'obtenir un champ de navigation viable.

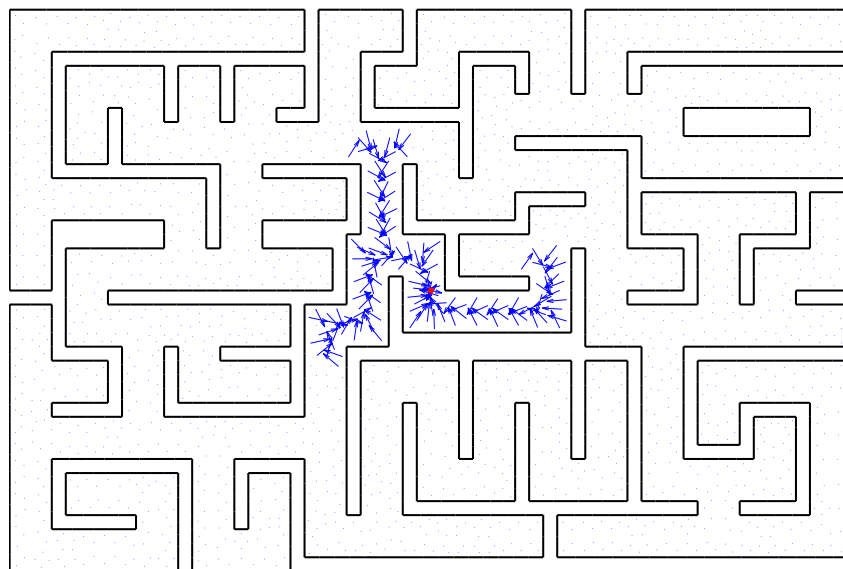


FIGURE 4.15 – Champ de potentiel harmonique avec conditions de Dirichlet normé dans un labyrinthe. Point rouge=Destination.

### Champs de Potentiel Harmoniques avec Conditions de Neumann

Le problème de l'évanescence des champs de potentiel harmoniques avec conditions de Dirichlet a été détecté très tôt. Une des solutions envisagées pour résoudre ce problème d'évanescence est l'utilisation de conditions aux limites de Neumann au lieu de conditions aux limites de Dirichlet [Tarassenko 1991],[Connolly 1993] et [Karnik 2004].

**Conditions de Neumann homogène :** Une condition de Neumann homogène consiste à imposer que le flux traversant les frontières soit nul. L'équation de Laplace soumise à des conditions aux limites de Neumann homogène s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta f = 0 \text{ sur } \mathcal{F} - \partial\mathcal{F} \\ \frac{\partial f}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{F} - q_d, \\ f = 0 \text{ sur } q_d \end{cases}$$

où  $\frac{\partial}{\partial n}$  désigne la dérivée normale aux frontières.

La résolution de ce système donne une fonction potentielle constante nulle. Afin d'obtenir une solution non triviale, il faut rajouter un point "source" au point de départ de la trajectoire :

$$\begin{cases} \Delta f = 0 \text{ sur } \mathcal{F} - \partial\mathcal{F} - q_s \\ \frac{\partial f}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{F} - q_d \\ f = 0 \text{ sur } q_d \\ f = 1 \text{ sur } q_s \end{cases}, \quad (4.5)$$

avec  $q_s$  le point de départ de la trajectoire.

Malheureusement, le système (4.5) oblige à recalculer la totalité du champ de potentiel pour chaque trajectoire que l'on souhaite calculer. Les conditions aux limites de Neumann homogène font donc perdre un certain avantage à la méthode des champs de potentiel : un champ de potentiel ne permet plus de calculer plusieurs trajectoires souhaitant rejoindre la même destination.

**Conditions de Neumann non homogène :** Une condition de Neumann non homogène consiste à imposer qu'un flux traverse les frontières depuis l'extérieur du domaine vers l'intérieur du domaine. Elle permet de ne pas avoir à imposer de point "source" au point de départ de la trajectoire et donc de calculer plusieurs trajectoires avec un seul champ de potentiel.

L'équation de Laplace soumise à des conditions aux limites de Neumann non homogène s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta f = 0 \text{ sur } \mathcal{F} - \partial\mathcal{F} \\ \frac{\partial f}{\partial n} = -1 \text{ sur } \partial\mathcal{F} - q_d \\ f = 0 \text{ sur } q_d \end{cases} \quad (4.6)$$

L'équation (4.6) est plus facile à résoudre sur un espace de forme complexe par une méthode d'*éléments finis linéaires* plutôt que par différences finies (surtout pour un espace rempli d'obstacles circulaires). L'espace est alors discrétisé, par un *maillage triangulaire de Delaunay* par exemple. L'équation de Laplace et la condition de Neumann sont ensuite discrétisées en approchant  $f$  par des fonctions linéaires  $f^e$  évaluées aux sommets de chaque triangle  $e$  :

$$\begin{bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0^e \\ \alpha_x^e \\ \alpha_y^e \end{bmatrix}.$$

La méthode des éléments finis permet de construire un système linéaire à  $N$  équations et  $N$  inconnues (avec  $N$  le nombre de sommets du maillage). La résolution de ce système linéaire donne les coefficients  $(\alpha_0^e, \alpha_x^e, \alpha_y^e)$  sur chaque triangle, coefficients qui permettent ensuite de calculer une approximation de  $f$  ou de ses dérivées. La méthode des éléments finis présente donc l'avantage de permettre le calcul direct du champ de potentiel sans avoir à calculer la fonction potentielle, puis à la dériver numériquement.

En résolvant l'équation (4.6) sur le labyrinthe par la méthode d'éléments finis, on obtient le champ de potentiel normé présenté Figure 4.16.

Des conditions aux limites de Neumann permettent effectivement de résoudre le problème d'évanescence. Le champ de potentiel ainsi calculé est tangent aux obstacles, rendant la méthode peu robuste. L'équation (4.6) appliquée au cas d'un espace rempli de six obstacles donne le champ de potentiel normé et les trajectoires présentés Figure 4.17 et Figure 4.18.

Les trajectoires obtenues à partir d'un champ de potentiel harmonique avec conditions de Neumann non homogène passent effectivement plus près des obstacles qu'avec un champ de potentiel harmonique avec conditions de Dirichlet. La trajectoire 1 vient presque toucher l'obstacle avant de le contourner, comme le faisait le champ de potentiel de Khatib. La trajectoire 2 est plus lisse que celle obtenue avec des conditions de Dirichlet et reste à bonne distance des

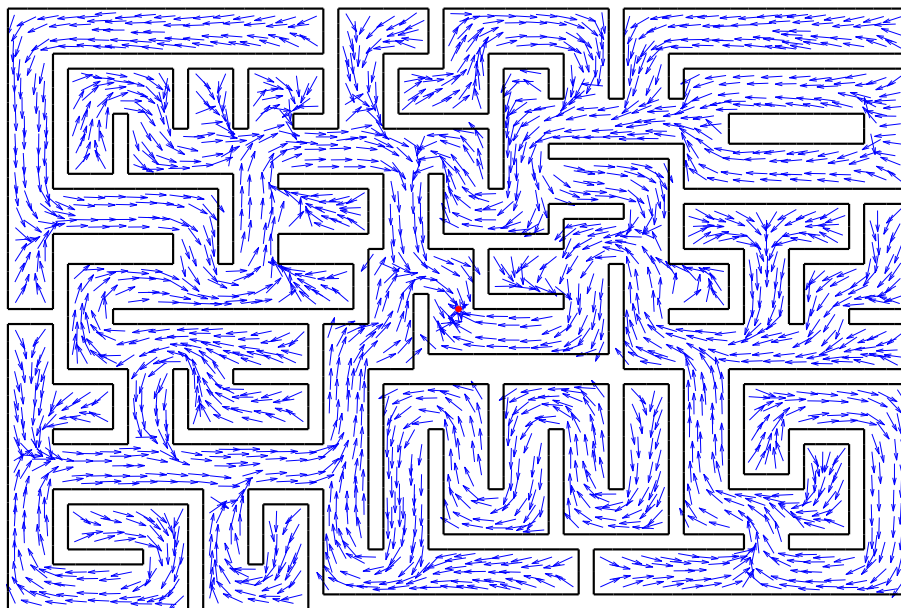


FIGURE 4.16 – Champ de potentiel harmonique avec conditions de Neumann non homogène normé dans un labyrinthe. Point rouge=Destination.

obstacles. La trajectoire 3 est elle aussi plus lisse, mais elle a tendance à se rapprocher du petit obstacle pour éviter le plus gros. Les trajectoires 4 et 5 sont plus déviées que les trajectoires obtenues avec conditions de Dirichlet alors qu'une telle déviation est inutile.

## 2.2 Avantages et Inconvénients des Champs de Potentiel Harmoniques

Les fonctions harmoniques semblent être une bonne solution pour la résolution du problème des minima locaux des champs de potentiel. Les champs de potentiel harmoniques sont plus coûteux à calculer [Faria 2004], mais ils permettent de réaliser les mêmes tâches que les champs de potentiel (exploration d'un espace inconnu [Prestes 2002], prise en compte d'incertitudes sur la position des obstacles [Masoud 2009]), tout en garantissant la complétude de la méthode.

Les deux types de conditions aux limites utilisées (Dirichlet et Neumann) présentent chacun leurs inconvénients. Les conditions de Dirichlet génèrent un champ de potentiel évanescent. Dans des espaces très grands, ou dans des espaces de géométrie complexe, la précision numérique de la résolution de l'EDP peut ne pas permettre de calculer un champ de potentiel harmonique pour la totalité du domaine. Il est possible que la méthode ne fournisse aucune trajectoire pour des points de départ très éloignés de la destination.

Les conditions de Neumann permettent de résoudre le problème de l'évanescence du champ de potentiel rencontré avec les conditions de Dirichlet. Mais les trajectoires calculées avec un champ de potentiel harmonique avec conditions de Neumann ont tendance à tangenter les obstacles, induisant un manque de robustesse de la méthode. Dans certains cas, les trajectoires peuvent également venir toucher l'obstacle avant de le contourner. Les virages de ces trajectoires sont alors irréalisables pour des avions.

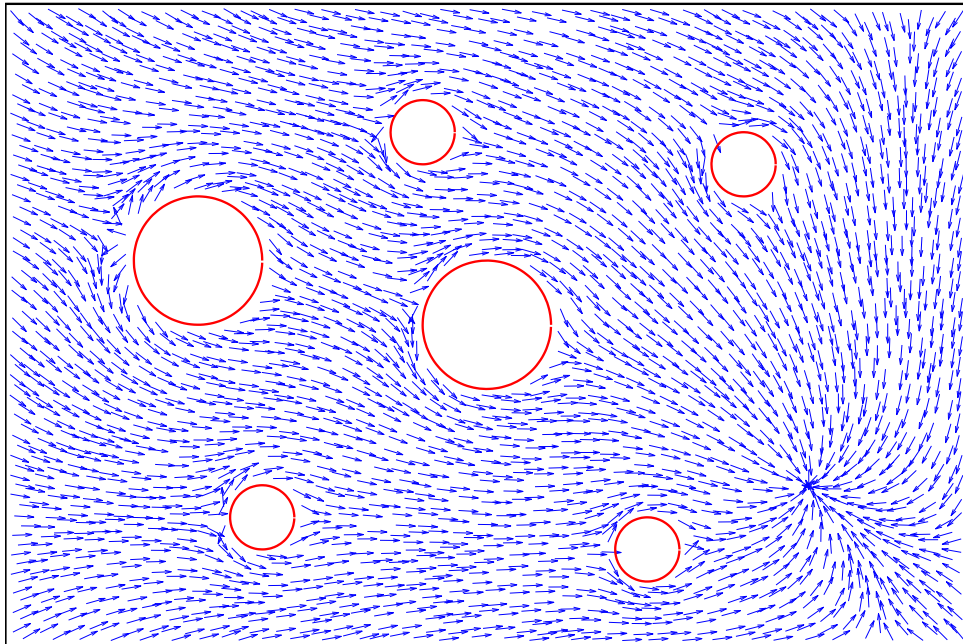


FIGURE 4.17 – Champ de potentiel harmonique avec conditions de Neumann non homogène normé. Cercles rouges=Obstacles.

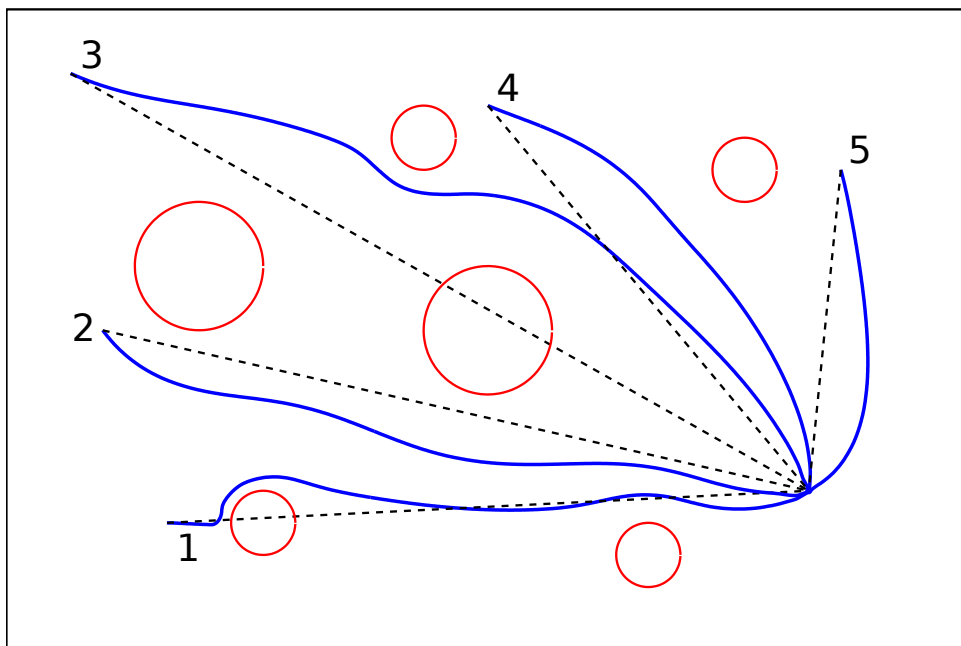


FIGURE 4.18 – Trajectoires obtenues en suivant le champ de potentiel harmonique Neumann de la Figure 4.17 depuis cinq points de départ (traits pleins bleus). Cercles rouges=Obstacles; Pointillés noirs=Lignes droites entre départs et destination.

### 3 Pistes de Recherche pour la Planification de Trajectoires d'Avions

Les deux inconvénients majeurs des champs de potentiel harmoniques sont leur coût en terme de temps de calcul et la forme des trajectoires obtenues (nous considérons que le problème d'évanescence des conditions de Dirichlet rentre également dans cette catégorie). Comme les champs de potentiel, les champs de potentiel harmoniques peuvent être calculés en suivant deux méthodes différentes.

#### 3.1 Deux Classes de Méthodes pour la Construction de Champs de Potentiel Harmoniques

Une fonction potentielle (harmonique ou non) peut être construite suivant deux approches différentes :

- *L'approche implicite* : la fonction potentielle est alors décrite par une EDP, ainsi que par des conditions aux limites imposées sur les frontières de l'espace libre et à la destination. C'est l'approche utilisée pour le calcul des champs de potentiel harmoniques de la Section 2.1.
- *L'approche explicite* : la fonction potentielle possède une forme analytique connue. C'est l'approche utilisée pour le calcul du champ de potentiel de Khatib dans la Section 1.1.

##### Approche implicite

Dans le cas de l'approche implicite, la fonction potentielle est obtenue de manière **numérique** en résolvant l'EDP qui la décrit. Le champ de potentiel est calculé en dérivant numériquement cette fonction.

Les méthodes les plus classiques de résolution d'EDP sont les différences finies et les éléments finis. Ces deux méthodes requièrent la construction d'un maillage sur l'espace libre afin de résoudre l'EDP sur les sommets du maillage. Cette opération de maillage peut devenir coûteuse lorsque l'espace libre est de grande taille ou qu'une grande précision dans la résolution de l'EDP est souhaitée.

La triangulation de Delaunay est la méthode de maillage la plus fréquemment utilisée avec les éléments finis. Cette triangulation se fait en  $\mathcal{O}(N^{d/2})$  avec  $N$  le nombre de sommets du maillage et  $d$  la dimension de l'espace. Dans le cas d'un espace 2D, le maillage de l'espace coûte donc  $N$  opérations.

##### Approche explicite

Dans le cas de l'approche explicite, la dérivée de la fonction potentielle peut être calculée directement puisque la fonction potentielle, et donc ses dérivées, possèdent une forme analytique. Si l'approche explicite présente l'avantage de permettre de se passer de maillage, elle n'est que très peu adaptée pour décrire des espaces libres compliqués. La forme complexe des obstacles doit en effet être intégrée directement dans la fonction potentielle. Il est également difficile de trouver des formes analytiques permettant de construire des champs de potentiel adaptés au problème de navigation posé.

### 3.2 Solution au Problème du Coût en Temps de Calcul

Les champs de potentiel harmoniques sont coûteux à calculer à cause des opérations de maillage de l'espace, puis de la résolution de l'EDP sur ce maillage. Plus l'espace est large, plus le maillage est précis et plus la taille du système linéaire à résoudre pour obtenir la fonction potentielle est importante. Ce problème du coût en temps de calcul peut être résolu en passant par une approche explicite. Cette idée a été explorée suivant plusieurs méthodes.

La première, [Connolly 1990], consiste à superposer des fonctions harmoniques analytiques pour induire le caractère répulsif des obstacles. Connolly *et al.* précisent néanmoins que l'évitement d'obstacles ne peut être garanti que pour des points et que rien ne permet de garantir que le mobile ne cherchera pas à franchir un mur constitué d'une multitude de ces points. Sachant que dans cette méthode le mobile est représenté par un point et que les obstacles ne peuvent eux aussi être représentés que par des points, il semble impossible d'utiliser ces fonctions harmoniques analytiques dans le cadre de la planification de trajectoires d'avions tout en garantissant l'évitement de conflit.

Feder et Slotine [Feder 1997] proposent une autre fonction harmonique, basée sur une analogie avec la mécanique des fluides. Cette formulation n'est malheureusement utilisable que dans le cas d'un espace 2D, interdisant ainsi toute extension aux espaces de configuration (voir Chapitre 3, Section 3.4) pour la planification de plusieurs trajectoires.

### 3.3 Solution au Problème de la Forme des Trajectoires

La forme des trajectoires obtenues avec un champ de potentiel harmonique est très dépendante des conditions aux limites imposées sur les frontières du domaine. Or les conditions de Dirichlet et les conditions de Neumann (ou un mélange des deux) sont les seules conditions aux limites disponibles pour la résolution d'EDP.

Puisque les fonctions harmoniques ont atteint leurs limites pour la construction des champs de potentiel, une nouvelle piste à explorer consiste à utiliser des fonctions biharmoniques (satisfaisant  $\Delta^2 F = 0$ ) pour construire un champ de vecteurs permettant de faire naviguer un mobile depuis son point de départ jusqu'à sa destination [Masoud 1994]. Le champ de vecteurs ainsi construit n'est plus un champ de potentiel puisqu'il n'est pas obtenu en calculant le gradient d'une fonction. Il présente néanmoins des propriétés intéressantes, qui en font un bon candidat pour la planification de trajectoires d'avions. C'est cette **méthode basée sur les fonctions biharmoniques** que nous étudions **dans la suite**.



## Chapitre 5

# Planification d'une Trajectoire : Fonctions Biharmoniques

Une fonction biharmonique  $F$  est une fonction satisfaisant l'équation :

$$\Delta^2(F(x, y)) = \frac{\partial^4 F(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F(x, y)}{\partial y^4} = 0.$$

Cette équation se rencontre à l'origine dans la théorie de l'élasticité en mécanique des solides [Timoshenko 1961]. L'idée de l'utiliser pour la navigation d'un mobile apparaît pour la première fois dans [Masoud 1994]. Les auteurs y présentent une nouvelle méthode pour construire un champ de navigation à partir de l'équation biharmonique, puis comparent le champ ainsi obtenu à des champs harmoniques avec conditions de Dirichlet et de Neumann.

## 1 Les Fonctions Biharmoniques pour la Planification d'une Trajectoire dans la Littérature

Nous présentons ici la méthode de planification d'une trajectoire dans un environnement statique 2D, basée sur la fonction biharmonique et présentée dans [Masoud 1994].

### 1.1 Principe de la Méthode : Analogie avec la Mécanique du Solide

La méthode proposée par Masoud *et al.* utilise une analogie avec la mécanique du solide pour le calcul d'un champ de vecteurs permettant de mener un mobile de n'importe quel point de l'espace vers sa destination. Ce champ de vecteur est obtenu en suivant la propagation d'un champ de contraintes dans un matériau homogène.

L'espace de travail 2D est représenté par une plaque dans laquelle des trous sont percés pour représenter les obstacles, ainsi que la destination. La destination n'est donc pas un point  $q_d$  mais un disque  $\mathcal{D}$  centré en  $q_d$ . Une pression est exercée sur la plaque en  $\mathcal{D}$  et dirigée vers l'intérieur de la plaque. Cette pression génère des contraintes qui se propagent dans le matériau. On obtient ainsi un champ de contraintes sur tout l'espace libre du mobile, noté  $\mathcal{F}$ . En remontant ce champ de contraintes depuis n'importe quel point de l'espace libre, le mobile rejoint la destination (la seule pression à l'origine du champ de contraintes se trouve à la destination) tout

en évitant les obstacles (le champ de contraintes évite les trous dans la plaque, i.e. les obstacles).

Un exemple de champ de contraintes propagé dans une plaque contenant sept trous (six obstacles et la destination) peut être trouvé Figure 5.1.

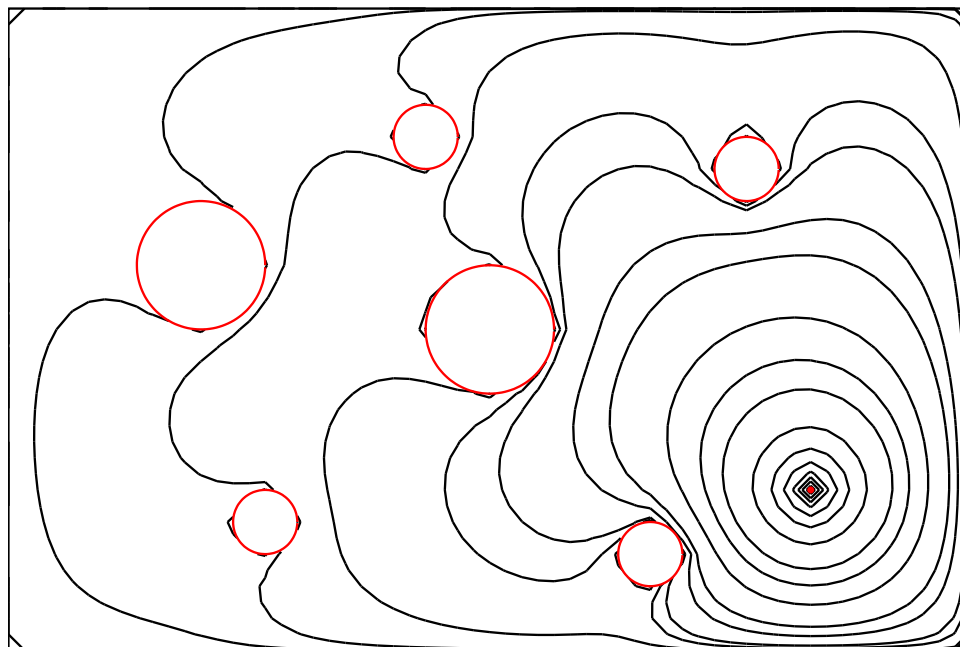


FIGURE 5.1 – Champ de contraintes propagé dans une plaque d'un matériau homogène. Cercles rouges=Trous représentant les obstacles. Point rouge=Trou représentant la destination depuis laquelle les contraintes sont propagées.

La propagation de contraintes dans un matériau homogène est un phénomène décrit par la théorie de l'élasticité en mécanique du solide.

## 1.2 Théorie de l'Élasticité, Équation Biharmonique et Champ de Contraintes

Pour un matériau solide, on parle d'*élasticité* lorsque le matériau se déforme de manière réversible sous l'effet des forces qui lui sont imposées. Lorsque ces forces sont enlevées, le matériau retrouve alors sa forme d'origine.

Ce comportement peut être étudié en observant les déformations  $(\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy})$  ainsi que les contraintes normales  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy})$  et les contraintes de cisaillement  $(\sigma_{xy}, \sigma_{yx})$  subies localement par le matériau. Les contraintes normales et de cisaillement appliquées à un élément rigide infinitésimal sont présentées Figure 5.2.

Ces contraintes permettent d'exprimer deux lois d'équilibre pour un élément infinitésimal.

**Équilibre des Moments :** Pour un élément infinitésimal, l'équilibre des moments impose :

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}. \quad (5.1)$$

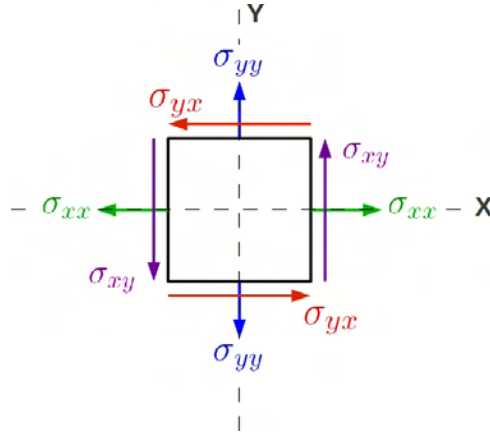


FIGURE 5.2 – Contraintes s'appliquant sur un élément rigide infinitésimal.

**Équilibre des Forces :** Dans le cas d'un élément soumis à une force volumique  $(F_x, F_y)$ , les équations d'équilibre des forces s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + F_x &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y &= 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Le poids est une force volumique dont il faut tenir compte dans la résolution de problèmes physiques. Dans le cas abstrait présenté ici, il est plus simple de considérer qu'aucune force volumique n'est exercée sur l'élément infinitésimal. En considérant  $(F_x, F_y) = (0, 0)$  et en introduisant (5.1) dans (5.2), les équations d'équilibre des forces deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

En théorie de l'élasticité, la *loi de Hooke* permet de relier les contraintes aux déformations subies par le matériau.

**Loi de Hooke :**

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) + 2G\epsilon_{xx}, \\ \sigma_{yy} &= \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) + 2G\epsilon_{yy}, \\ \sigma_{xy} &= G(\epsilon_{xy}), \end{aligned}$$

où  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  et  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  avec  $E$  le module de Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson du matériau.

Les déformations  $(\epsilon_{xx}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yy})$  subies par la plaque en un point  $(x, y)$  peuvent être reliées au déplacement  $Q = (u, v)$  de ce point par :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5.4)$$

On choisit d'exprimer la loi de Hooke en fonction des déplacements  $(u, v)$  plutôt que des déformations en utilisant (5.4). La loi de Hooke s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2G \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \sigma_{yy} &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2G \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \sigma_{xy} &= G \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).\end{aligned}\tag{5.5}$$

La continuité du champ de contraintes dans la plaque, ainsi que l'unicité du vecteur des déplacements  $Q$ , sont garanties par l'équation de compatibilité.

**Équation de Compatibilité :**

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0.\tag{5.6}$$

Ainsi, la propagation de contraintes dans un matériau homogène satisfait six équations : les deux équations d'équilibre des forces (5.3), les trois équations de la loi de Hooke (5.5) et l'équation de compatibilité (5.6). Afin de simplifier l'écriture de ces équations, les contraintes  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$  sont exprimées en fonction de la fonction d'Airy  $F_A$ .

**Fonction d'Airy :**

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F_A}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F_A}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F_A}{\partial x \partial y}.\tag{5.7}$$

La fonction d'Airy satisfait les deux équations d'équilibre des forces (5.3).

En introduisant (5.7) dans (5.6), on obtient l'équation biharmonique :

$$\Delta \left( \frac{\partial^2 F_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_A}{\partial x^2} \right) = \Delta^2(F_A) = 0.$$

**Système Régissant la Propagation de Contraintes :** Le système complet d'équations régissant la propagation de contraintes dans un matériau homogène s'exprime en fonction de la fonction d'Airy  $F_A$  et des déplacements  $(u, v)$  comme :

$$\begin{aligned}\Delta^2(F_A) &= 0, \\ \frac{\partial^2 F_A}{\partial x^2} &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2G \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 F_A}{\partial y^2} &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2G \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 F_A}{\partial x \partial y} &= -G \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).\end{aligned}\tag{5.8}$$

**Conditions aux limites :** La pression exercée à la destination peut s'exprimer en fonction des contraintes de la manière suivante :

$$\sigma_{xx}|_{\mathcal{D}} = \frac{\partial^2 F_A(x, y)}{\partial y^2} \Big|_{\mathcal{D}} = P.n_x, \quad \sigma_{yy}|_{\mathcal{D}} = \frac{\partial^2 F_A(x, y)}{\partial x^2} \Big|_{\mathcal{D}} = P.n_y, \quad \sigma_{xy}|_{\mathcal{D}} = -\frac{\partial^2 F_A(x, y)}{\partial x \partial y} \Big|_{\mathcal{D}} = 0. \quad (5.9)$$

Au lieu d'exprimer l'absence de pression sur les obstacles, Masoud *et al.* proposent d'interdire le déplacement et la rotation des éléments frontière des obstacles :

$$Q|_{\partial\mathcal{F}-\partial\mathcal{D}} = 0, \quad \nabla \wedge Q|_{\partial\mathcal{F}-\partial\mathcal{D}} = 0. \quad (5.10)$$

Le système (5.8) avec les conditions (5.9) et (5.10) peut être résolu grâce à un logiciel de conception assistée par ordinateur et de résolution par éléments finis. Les auteurs utilisent I-DEAS pour cette résolution et obtiennent le tenseur des contraintes :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}.$$

Puisque la pression exercée à la destination est normale aux frontières du domaine, les contraintes de cisaillement dans la plaque devraient être nulles. Pour annuler les contraintes de cisaillement obtenues par la résolution de (5.8) avec les conditions (5.9) et (5.10), les *contraintes principales*  $\sigma_{min}$  et  $\sigma_{max}$  sont calculées :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{min} & 0 \\ 0 & \sigma_{max} \end{bmatrix} = T^T \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} T,$$

avec  $T$  une matrice orthonormée contenant les vecteurs propres représentant les axes des contraintes principales.

Le calcul de  $\sigma_{min}$  et de  $\sigma_{max}$  se ramène donc à un calcul de valeurs propres d'une matrice (2×2) :

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \sigma_{xy}^2},$$

$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \sigma_{xy}^2}.$$

La pression imposée à la destination cause une compression de la plaque, ce qui se traduit par une **contrainte négative**. Des deux valeurs propres calculées, seule  $\sigma_{min}$  est toujours négative. C'est donc le champ de contraintes (vecteur propre) associé à  $\sigma_{min}$  qu'il faut suivre pour rejoindre la destination :

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{min} - \sigma_{xx} \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Si la direction à suivre est donnée par  $\vec{v}$ , reste la question du sens dans lequel ce champ de contraintes doit être suivi. En effet, un vecteur propre est défini à une constante multiplicative près. Il est donc impossible de déterminer dans quel sens suivre le champ de contraintes à partir du vecteur propre. Les auteurs n'ont pas trouvé de solution rapide à ce problème et calculent les deux trajectoires associées au vecteur propre. Sur les deux trajectoires ainsi obtenues, l'une s'arrête sur une frontière, tandis que l'autre rejoint la destination. Les auteurs ne conservent alors que celle atteignant la destination pour la navigation du mobile.

### 1.3 Discussion sur la Méthode de Masoud *et al.*

Les trajectoires présentées dans [Masoud 1994] sont très encourageantes. La fonction biharmonique résout le problème de l'évanescence du champ harmonique avec conditions de Dirichlet, sans pour autant tangenter les obstacles comme le fait la fonction harmonique avec conditions de Neumann. Le champ de vecteurs propres utilisé pour la navigation peut évidemment être normé, produisant ainsi des trajectoires à vitesse constante.

L'analogie avec la propagation de contraintes en mécanique du solide apporte plusieurs garanties sur les trajectoires produites. L'équation de compatibilité (5.6) garantit la continuité du champ de contraintes, et donc de la trajectoire produite à partir de ce champ de contraintes. L'arrivée à destination est également garantie, une fois que le sens dans lequel le champ de vecteurs propres doit être suivi a été trouvé. En effet, le champ de contraintes a pour unique source la pression imposée à la destination. Donc en suivant le champ de contraintes dans le bon sens, on remonte forcément vers la destination. Enfin, le champ de contraintes contourne les obstacles afin de se propager dans toute la plaque. La trajectoire construite en remontant ce champ de contraintes évitera donc elle aussi les obstacles.

À nos yeux, cette méthode présente néanmoins deux inconvénients majeurs. Le premier est qu'il est difficilement concevable de résoudre le système d'équations (5.8) par une autre méthode que la méthode des éléments finis, ce qui pourrait poser problème pour la planification de plusieurs trajectoires comme nous le verrons dans le Chapitre 6.

Le deuxième inconvénient de cette méthode est l'indétermination sur le sens dans lequel le champ de contraintes doit être suivi. Une solution serait de suivre le champ dans le sens faisant croître  $|\sigma_{min}|$  (la contrainte est la plus forte à la destination), mais loin de la destination  $|\sigma_{min}|$  peut être extrêmement faible, à tel point que la précision numérique des calculs ne permet plus de déterminer dans quel sens aller pour faire croître  $|\sigma_{min}|$ . On revient donc à un problème similaire à celui de l'évanescence pour les fonctions harmoniques de Dirichlet.

La solution proposée par les auteurs, qui consiste à ne garder que la trajectoire atteignant la destination fonctionne, à condition que le champ de vecteurs propres calculé soit continu. L'équation de compatibilité garantit effectivement la continuité du champ de contraintes, mais la résolution numérique ne permet pas nécessairement de créer un champ de vecteurs propres continu. Avant de pouvoir calculer les trajectoires, il faut donc "redresser" le champ de vecteurs par continuité.

Si l'étape de redressement du champ de vecteurs propres semble inévitable, le problème de la complexité du système à résoudre peut être contourné. Nous présentons ici les travaux réalisés durant le début de cette thèse : le développement d'une nouvelle méthode permettant de calculer des trajectoires à partir de fonctions biharmoniques.

## 2 Nouvelle Méthode pour la Construction d'une Trajectoire à partir de Fonctions Biharmoniques

Lorsque nous avons développé cette nouvelle méthode basée sur la fonction biharmonique, notre objectif principal était d'obtenir un système plus simple à résoudre que le système (5.8). L'idée était de pouvoir, par la suite, utiliser d'autres méthodes de résolution d'EDP que les différences finies ou les éléments finis.

### 2.1 Nouveau Système et Méthode de Résolution

Au lieu de construire un système en fonction des contraintes  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$  et des déplacements  $(u, v)$ , le nouveau système proposé est exprimé uniquement en fonction de la fonction d'Airy  $F_A$ .

La méthode que nous proposons s'inspire de la méthode présentée dans la Section 1 de ce chapitre, notamment par l'utilisation d'une équation biharmonique, ainsi que par la façon dont le champ de navigation est construit. Nous ne cherchons néanmoins plus à décrire le phénomène de propagation de contraintes dans un matériau homogène et ne faisons que nous en inspirer.

Nous gardons uniquement l'équation de compatibilité ( $\Delta^2 F_A = 0$ ) et ignorons les équations imposées par la loi de Hooke. Puisque nous sortons du cadre de la mécanique du solide, nous notons  $F$  la fonction biharmonique afin d'alléger les notations.

Pour simplifier les conditions aux limites sur la destination, nous imposons une condition de Dirichlet sur  $\Delta F$  pour représenter la pression exercée à la destination :

$$\Delta F = P, \quad P < 0. \quad (5.12)$$

Dans le cadre de la mécanique du solide, la pression imposée à la destination devait être négative, nous gardons ici cette contrainte.

L'absence de pression sur les obstacles s'écrit simplement :

$$\Delta F = 0. \quad (5.13)$$

Les conditions aux limites (5.12) et (5.13) ne permettent néanmoins pas de déterminer  $F$  de manière unique. Nous imposons donc également des conditions de Dirichlet sur  $F$  :

$$\begin{cases} F_1 = S, & S > 10 & \text{sur } q_d \\ F_1 = 0 & & \text{sur } \partial\mathcal{F} - q_d \end{cases}.$$

Le choix de la valeur de  $S$  est empirique. Un  $S$  négatif induit une rotation du champ de navigation autour de la destination, empêchant ainsi de l'atteindre (voir Figure 5.3). Pour un  $S$  positif, mais faible, cette rotation ne disparaît pas complètement, créant des oscillations dans les trajectoires calculées. Sur la totalité des cas que nous avons pu tester,  $S = 10$  fait disparaître ce phénomène de rotation.

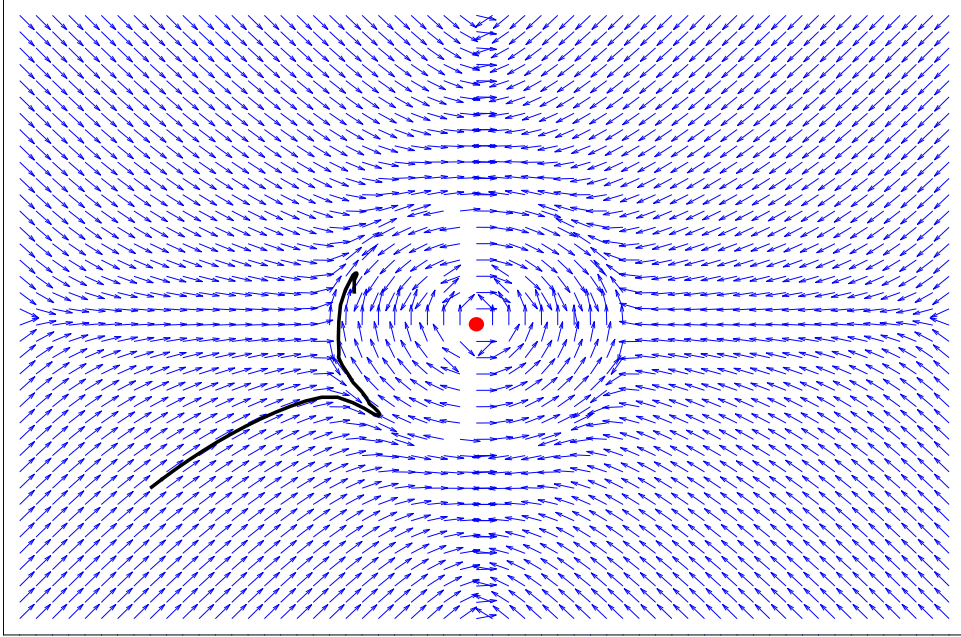


FIGURE 5.3 – Champ biharmonique avec  $S < 0$ . Le champ de navigation tourne autour de la destination (point rouge). Trait plein noir=Trajectoire.

Le système à résoudre est donc donné par :

$$\begin{cases} \Delta^2 F = 0 \\ \Delta F = 0 \text{ et } F = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{F} - q_d . \\ \Delta F = P \text{ et } F = S \text{ en } q_d \end{cases} \quad (5.14)$$

En posant  $LF = \Delta F$ , (5.14) peut être réécrit sous la forme de deux systèmes couplés :

$$\begin{cases} \Delta LF = 0 \\ LF = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{F} - q_d \\ LF = P, \quad P < 0 \text{ en } q_d \end{cases} \quad (5.15)$$

et

$$\begin{cases} \Delta F = LF \\ F = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{F} - q_d \\ F = S, \quad S > 10 \text{ en } q_d \end{cases} \quad (5.16)$$

Il est en effet plus simple de résoudre deux systèmes de Poisson, plutôt que l'équation biharmonique directement.

Le premier système peut être résolu par une méthode d'éléments finis, puis la solution du système (5.15) peut être injectée dans (5.16). Une fois le deuxième système résolu, on peut alors calculer les dérivées secondes de  $F$ , qui permettront de calculer le champ de vecteurs propres.

Une résolution de (5.16) par une méthode d'éléments finis linéaires n'offre néanmoins pas une précision suffisante pour ensuite pouvoir calculer les dérivées secondes de  $F$ , il faut utiliser



une méthode d'éléments finis quadratiques.

Dans une méthode d'éléments finis quadratiques sur un maillage triangulaire, les milieux des arêtes des triangles sont également utilisés comme points de discrétisation. La fonction  $F$  est alors approchée par des fonctions quadratiques  $F^e$  sur les trois sommets du triangle, ainsi qu'aux milieux des trois arêtes :

$$\begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \\ F_5^e \\ F_6^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & y_1^2 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & y_2^2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & y_3^2 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & y_4^2 & x_4 y_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & y_5^2 & x_5 y_5 \\ 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & y_6^2 & x_6 y_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0^e \\ \alpha_x^e \\ \alpha_y^e \\ \alpha_{xx}^e \\ \alpha_{yy}^e \\ \alpha_{xy}^e \end{bmatrix}.$$

Une fois le système (5.16) résolu par une méthode d'éléments finis quadratiques et les dérivées secondes de  $F$  obtenues, le champ de vecteurs propres peut être calculé suivant (5.11). Pour le cas d'un espace rempli de six obstacles, on obtient le champ présenté Figure 5.4.

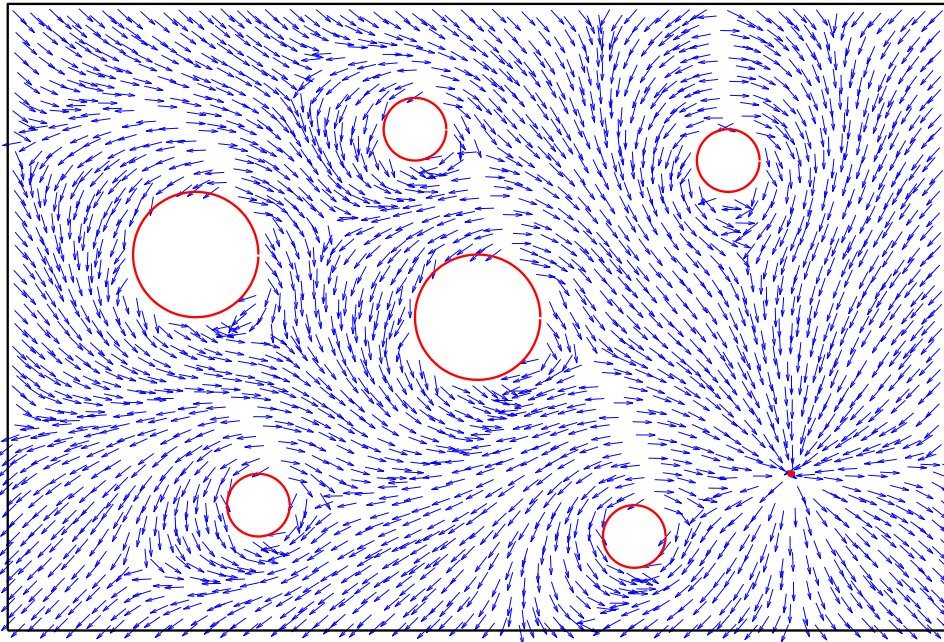


FIGURE 5.4 – Champ de vecteurs propres associé à  $\sigma_{min}$ . Cercles rouges=Obstacles. Point rouge=Destination.

Le problème du sens du champ de vecteurs propres apparaît nettement sur la Figure 5.4. Si certaines flèches pointent bien vers la destination, d'autres pointent à l'opposé de la destination. Le champ ainsi calculé n'est même pas continu, ce qui montre bien qu'une étape de redressement est nécessaire avant que ce champ de vecteurs puisse être utilisé pour la navigation d'un mobile.

## 2.2 Redressement du Champ de Vecteurs Propres

En passant par un logiciel de conception assistée par ordinateur et de résolution par éléments finis pour la résolution de leur système, Masoud *et al.* obtiennent un champ de contraintes continu. Dans notre cas, la continuité du champ doit être garantie par l'étape de redressement du champ de vecteurs propres.

### Redressement par Continuité

Le redressement du champ par continuité peut être effectué à partir des obstacles, ou de la destination ; i.e. des points pour lesquels le sens du champ est connu. Une fois le champ redressé en ces points "repères", le champ peut être redressé pour leurs plus proches voisins afin de conserver une continuité dans le champ. Le processus est alors répété de manière itérative, jusqu'à ce que la totalité du champ ait été redressée.

Si le principe de ce redressement par continuité est simple à comprendre, il devient néanmoins difficile à appliquer au fur et à mesure que la complexité de l'espace augmente. Une autre solution consiste à utiliser  $-\nabla(\Delta F)$  pour le redressement.

### Redressement en Utilisant $-\nabla(\Delta F)$

Par construction,  $\Delta F$  est harmonique. Le système (5.15) qui permet de calculer  $\Delta F$  est en fait un système harmonique avec des conditions aux limites de Dirichlet. Ainsi  $-\nabla(\Delta F)$  donne un champ de navigation harmonique de Dirichlet. Ce champ peut alors être utilisé pour redresser le champ de vecteurs propres calculé après résolution de l'équation biharmonique. Il suffit de s'assurer que le champ de vecteurs propres suit le champ  $-\nabla(\Delta F)$ .

Cette méthode de redressement présente néanmoins deux inconvénients. Puisque  $-\nabla(\Delta F)$  donne un champ de navigation harmonique de Dirichlet, ce champ peut être évanescent loin de la destination. Il ne permet donc pas de redresser le champ de vecteurs propres pour de grands espaces et loin de la destination.

De plus, à proximité des obstacles, le champ de vecteurs propres à redresser et le champ donné par  $-\nabla(\Delta F)$  peuvent être perpendiculaires, comme le montre Figure 5.5.  $-\nabla(\Delta F)$  ne permet donc pas de redresser le champ de vecteurs propres à proximité des obstacles.

**Remarque :** Les champs de navigation harmonique de Dirichlet et biharmonique sont presque identiques loin des obstacles. C'est leur comportement autour des obstacles qui distingue ces deux méthodes.

### Un Redressement en Deux Étapes

Puisqu'aucune des deux méthodes de redressement du champ ne donne entière satisfaction, nous avons décidé de les coupler. Nous utilisons  $-\nabla(\Delta F)$  pour redresser le champ de vecteurs propres presque partout, sauf à proximité des obstacles ou dans le cas où  $-\nabla(\Delta F)$  est évanescent. Cette méthode permet de redresser rapidement la quasi-totalité des vecteurs propres. Les quelques vecteurs qui n'ont pas été redressés le sont alors par continuité. Cette opération ne demande que peu de temps puisque le nombre de vecteurs à traiter est faible.

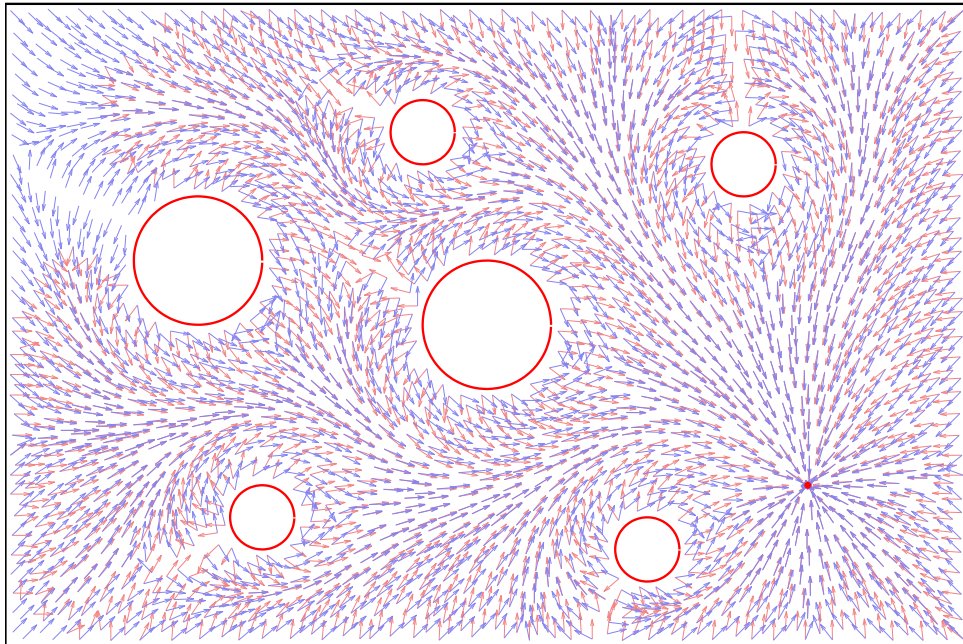


FIGURE 5.5 – Champ harmonique de Dirichlet (rouge) et champ de vecteurs propres associé à  $\sigma_{min}$  (bleu). Cercles rouges=Obstacles. Point rouge=Destination.

Nous avons appliqué cette méthode pour redresser le champ Figure 5.4. Le champ de navigation ainsi obtenu est présenté Figure 5.6.

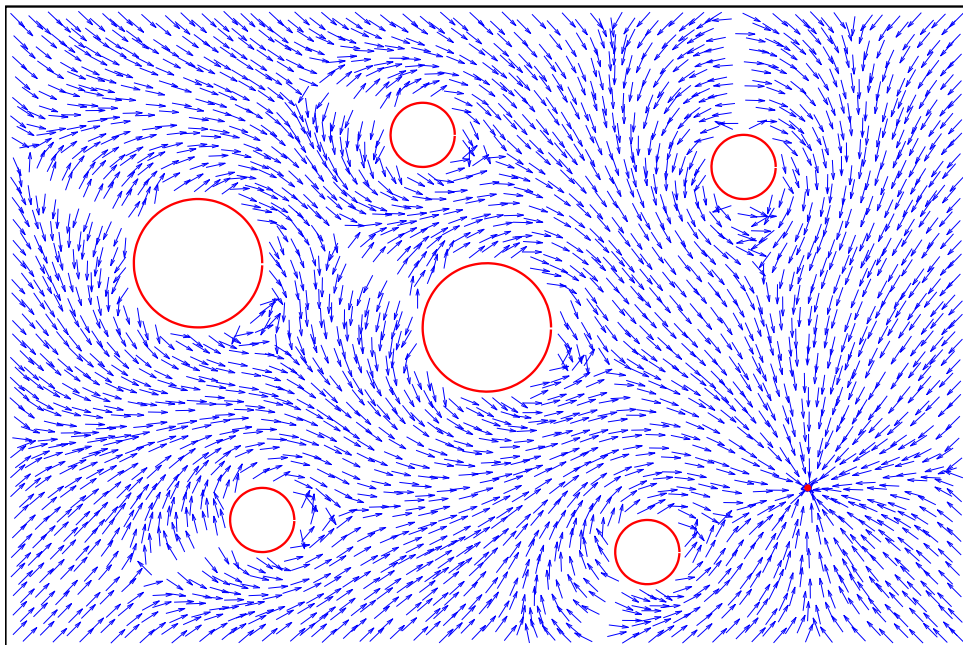


FIGURE 5.6 – Champ de vecteurs propres associé à  $\sigma_{min}$  redressé=Champ de navigation biharmonique. Cercles rouges=Obstacles. Point rouge=Destination.

### 2.3 Garanties Théoriques

Dans le cas du système biharmonique utilisé par Masoud *et al.*, les garanties théoriques d'existence d'une solution, d'arrivée à destination et d'évitement d'obstacles sont données par la validité du modèle biharmonique utilisé pour décrire la propagation de contraintes [Masoud 1994]. Le système (5.14) ne représente aucun phénomène physique particulier, il nous faut donc démontrer les garanties théoriques offertes par notre méthode.

#### Existence d'un Champ de Navigation Biharmonique

Il suffit de montrer qu'il est toujours possible de construire un champ de vecteurs propres afin de garantir l'existence d'un champ de navigation biharmonique.

Le seul cas pour lequel le champ de vecteurs propres ne pourrait pas être construit est le cas où sa valeur propre associée est nulle, i.e. lorsque  $\sigma_{min} = 0$ . Pour montrer que  $\sigma_{min}$  ne s'annule jamais, nous reprenons la matrice des contraintes :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}.$$

Par construction :

$$Tr(\Sigma) = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \Delta F.$$

D'après le principe du maximum et les conditions aux limites imposées sur le système (5.15), on sait que :

$$\begin{aligned} P < \Delta F = Tr(\Sigma) < 0 \\ \implies \sigma_{min} + \sigma_{max} < 0 \\ \implies \sigma_{min} < -\sigma_{max}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Or par construction :

$$\sigma_{min} \leq \sigma_{max} \iff \begin{cases} \sigma_{min} = \sigma_{max} \\ \text{ou} \\ \sigma_{min} < \sigma_{max} \end{cases} \implies \begin{cases} \sigma_{min} = Tr(\Sigma)/2 < 0 \\ \text{ou} \\ \sigma_{min} < \sigma_{max} \end{cases}. \quad (5.18)$$

En utilisant (5.17) et (5.18), on obtient donc  $\sigma_{min} < -|\sigma_{max}| \leq 0$ , ce qui prouve l'existence d'un champ de navigation biharmonique pour n'importe quel espace de travail valide.

#### Arrivée à la Destination

La fonction  $\Delta F$  est analytique en vertu des théorèmes généraux de régularité des solutions d'équations harmoniques. Elle ne peut donc s'annuler qu'en des points isolés, sauf si elle est identiquement nulle dans le domaine  $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ . Dans ce dernier cas, la fonction biharmonique  $F$  est aussi harmonique et on se ramène au cas d'un champ de navigation harmonique, ce qui ne présente pas d'intérêt particulier. On supposera donc que  $\Delta F \neq 0$ .

$\Delta F$  étant harmonique, elle possède en tout point une direction de plus forte pente donnée par  $-\nabla \Delta F$ , hormis aux points critiques de  $\Delta F$ . Aux points critiques (où  $-\nabla \Delta F = 0$ ), la direction de plus forte pente est donnée par la valeur propre minimale de la Hessienne de  $\Delta F$ . On notera dans la suite  $-\nabla \Delta F$  cette direction de plus forte pente, y compris aux points critiques de  $\Delta F$ .

$F$  s'obtient à partir de  $\Delta F$  en résolvant une équation de Poisson, et est elle-même analytique. Le produit scalaire utilisé pour le redressement est soit identiquement nul, soit il ne s'annule qu'en des points isolés. On peut alors assurer que le vecteur propre associé à  $\sigma_{min}$  choisi est presque partout une direction de descente stricte pour  $\Delta F$ . On note dans la suite  $X$  le champ de vecteurs propres de  $\Sigma$  obtenu après redressement.

Nous cherchons à montrer que les trajectoires obtenues ne peuvent être que de deux types :

- Une trajectoire qui admet pour limite un point où  $X$  et  $\nabla \Delta F$  sont orthogonaux et qui n'atteint donc pas la destination. Cette situation ne peut se produire que sur un ensemble de mesure nulle de conditions initiales.
- Une trajectoire qui converge vers un point annulant  $\nabla \Delta F$ , ce qui ne peut se produire qu'à destination en vertu du principe du maximum et des conditions aux limites imposées. Cette trajectoire atteint donc la destination.

Pour cela, montrons que toutes les trajectoires atteignent un point où  $\langle \nabla \Delta F, X \rangle = 0$ .

**Proposition 5.1.** *Soit  $\phi$  le flot de  $X$ . Pour tout point  $x$  du domaine  $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(x, t)$  est un point annulant l'application  $\Theta: y \mapsto \langle \nabla \Delta F(y), X(y) \rangle$ .*

*Démonstration.* On a :

$$\frac{\partial \Delta F \circ \phi(x, t)}{\partial t} = \langle \nabla \Delta F, X(\phi(x, t)) \rangle$$

Comme  $\langle \nabla \Delta F, X(\phi(x, t)) \rangle < 0$  pour presque toute valeur de  $t$ , on en déduit que pour tout  $t$  et  $\epsilon > 0$  :

$$\Delta F \circ \phi(x, t + \epsilon) < \Delta F \circ \phi(x, t)$$

Soit  $t_n$  une suite de réels tendant vers  $+\infty$  et posons  $x_n = \phi(x, t_n)$ . Supposons l'existence d'une limite  $x_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ . On a, par décroissance de  $\Delta F$  le long du flot :

$$\forall t \geq 0, \Delta F(x_0) < \Delta F \circ \phi(x, t_n)$$

Supposons que  $x_0$  n'est pas un point d'annulation de  $\Theta$ . Il existe un réel  $\epsilon > 0$  tel que

$$\Delta F(x_0) > \Delta F(\phi(x_0, \epsilon)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta F(\phi(x_n, \epsilon))$$

. Par ailleurs :

$$\phi(x_n, \epsilon) = \phi(\phi(x, t_n), \epsilon) = \phi(x, t_n + \epsilon)$$

il existe donc un rang  $p$  tel que :

$$\Delta F(x_0) > \Delta F(\phi(x_p, t_p))$$

ce qui est une contradiction.

L'application  $\Delta F$  est bornée sur le domaine considéré en vertu du principe du maximum et des conditions aux limites choisies. Pour tout  $x$  dans  $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ , et toujours en posant  $x_n = \phi(x, t_n)$ , la suite  $x_n$  admet des valeurs d'accumulation. Supposons l'existence de deux telles valeurs distinctes  $x_0$  et  $x_1$ . Il s'agit de points d'annulation de  $\Theta$  qui sont donc isolés. Soit  $B(x_0, r)$  une boule centrée en  $x_0$  et ne contenant aucun autre point d'annulation (et donc pas  $x_1$  en particulier). Le flot  $\phi(x, t)$  a une infinité d'intersections avec la boule  $B(x_0, r/2)$ , la suite des points en question a donc une valeur d'accumulation qui est un point d'annulation de  $\Theta$ , conduisant à une contradiction. On en déduit que toute suite  $x_n = \phi(x, t_n)$  obtenue à partir d'un point initial  $x$  a une limite qui annule  $\Theta$ .  $\square$

### Évitement d'obstacles

La propriété d'évitement d'obstacles vient en fait de la technique utilisée pour redresser le champ de vecteurs propres. Puisque le champ de vecteurs propres est redressé en suivant  $-\nabla(\Delta F)$ , qui est un champ de navigation harmonique de Dirichlet pour lequel l'évitement d'obstacles est garanti, l'évitement d'obstacles est également garanti pour presque tout le champ de navigation. Pour les quelques vecteurs redressés par continuité, en effectuant le redressement à partir des obstacles (et donc en s'assurant que le champ pointe à l'opposé des obstacles), l'évitement d'obstacles est lui aussi garanti.

## 3 Étude du Champ de Navigation Biharmonique

Le champ de navigation Figure 5.6 semble présenter des "lignes de discontinuité" et des "zones de convergence" derrière et devant les obstacles (voir Figure 5.7). Les flèches représentant le champ s'écartent pour contourner un obstacle, puis convergent devant l'obstacle, avant de se diriger vers la destination. Cette forme particulière du champ pourrait avoir un impact sur la forme des trajectoires calculées à partir du champ de navigation biharmonique.

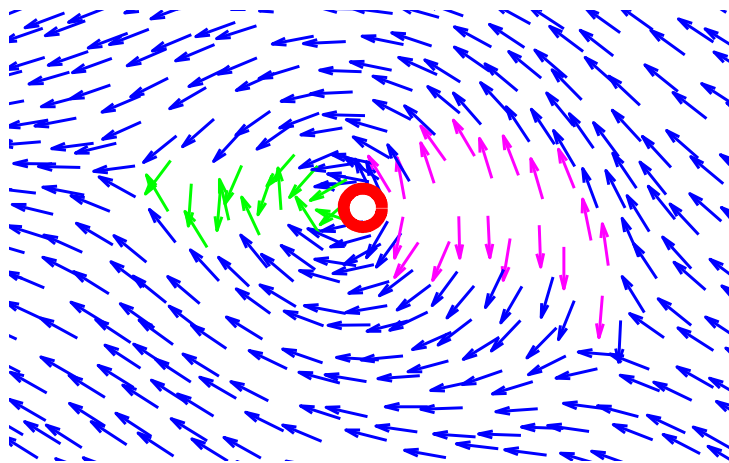


FIGURE 5.7 – Ligne de discontinuité (rose) et zone de convergence (vert) autour d'un obstacle (cercle rouge) pour un champ de navigation biharmonique.

### 3.1 Lignes de Discontinuité dans le Champ

Le phénomène des "lignes de discontinuité" peut être expliqué par l'analogie avec la propagation de contraintes dans un matériau homogène sur laquelle est basée cette méthode. La propagation de contraintes dans un matériau (voir Figure 5.1) peut en effet être vue comme la propagation d'un front d'onde dans ce matériau. Lorsque le front arrive sur un obstacle, il se divise en deux "sous-fronts" qui se propagent de chaque côté de l'obstacle. Une fois l'obstacle contourné, les deux "sous-fronts" fusionnent pour ne former plus qu'un seul front qui continue alors à se propager dans le matériau.

Lorsqu'on cherche à remonter le champ de contraintes jusqu'à la destination, il faut donc, au moment de contourner un obstacle, choisir quel "sous-front" suivre. Les "lignes de discontinuité" matérialisent le choix qui est fait sur la limite à partir de laquelle chaque "sous-front" est suivi. Ce choix se fait au travers du redressement effectué sur le champ de vecteurs propres. En modifiant la façon dont le champ est redressé autour de ces "lignes de discontinuité" (en garantissant la continuité du champ en dehors de la "ligne de discontinuité"), il est ainsi possible d'imposer qu'un obstacle soit contourné plutôt par la gauche ou plutôt par la droite comme présenté en vert sur la Figure 5.8.

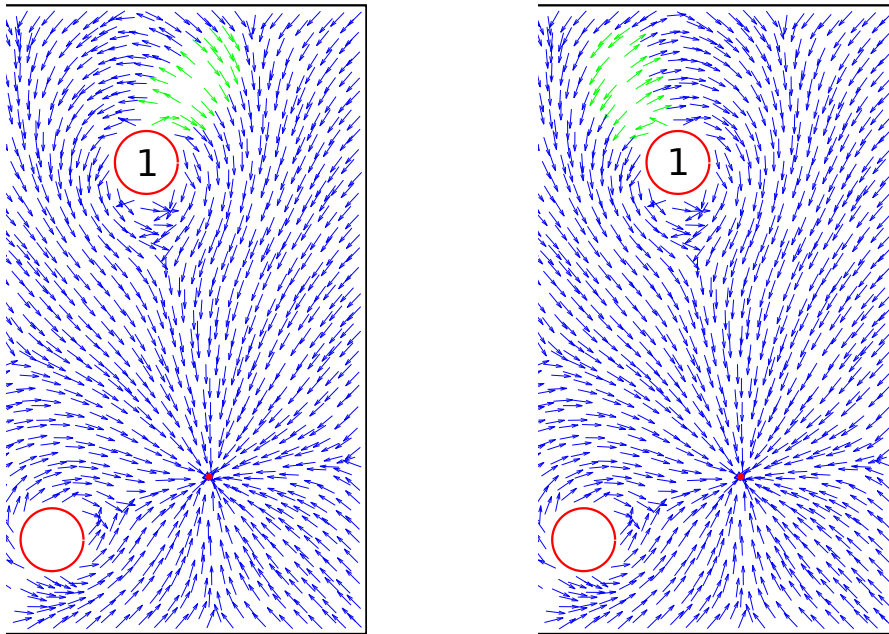


FIGURE 5.8 – Différents redressements pour un même champ de vecteurs propres afin de contourner l'obstacle 1. Cercles rouges=Obstacles. Point rouge=Destination.

Ainsi, si certaines trajectoires obtenues avec le champ de navigation biharmonique sont peu satisfaisantes, il est possible de modifier le redressement du champ afin de déplacer ces "lignes de discontinuité" et ainsi d'obliger les trajectoires à contourner les obstacles différemment.

### 3.2 Zones de Convergence

Le phénomène des "zones de convergence" n'est que peu visible dans la Figure 5.6, mais apparaît nettement dans la Figure 5.7. Du point de vue de la propagation de contraintes, cette "zone de convergence" correspond à la zone où le front d'onde se divise en deux "sous-fronts" qui partent dans deux directions opposées pour contourner l'obstacle. Lorsqu'on remonte le front d'onde dans ces "zones de convergence", on remonte en fait les deux "sous-fronts" jusqu'à rejoindre le point où le front principal s'est divisé en deux. Ce n'est qu'une fois ce point de division atteint que le champ de contraintes peut être remonté jusqu'à la destination.

Ces zones de convergence risquent de poser problème lors de la planification de trajectoires. En effet, une trajectoire prise dans cette "zone de convergence" risque d'osciller avant de chercher à rejoindre la destination.

### 3.3 Influence de la Taille de l'Espace Libre sur la Forme du Champ de Navigation Biharmonique

Par l'analogie avec la propagation de contraintes, on sait qu'une "ligne de discontinuité" et qu'une "zone de convergence" apparaîtront pour chaque obstacle ajouté à l'espace. Le cas présenté Figure 5.6 représente un espace plutôt restreint. Comment les "lignes de discontinuité" et les "zones de convergence" se comporteraient-elles dans un espace plus large ?

Pour essayer de répondre à cette question, nous avons calculé le champ de navigation biharmonique sur des espaces plus larges contenant dix ou vingt obstacles de petites dimensions. Les champs de navigation ainsi obtenus sont présentés Figure 5.9 pour le cas avec dix obstacles et Figure 5.10 pour le cas avec vingt obstacles.

Les "lignes de discontinuité" sont d'autant plus longues et les "zones de convergence" d'autant plus larges que l'espace libre est grand. Dans le cas pour dix obstacles (Figure 5.9), au centre de l'espace, les deux obstacles génèrent une très longue "ligne de discontinuité". Cette ligne est beaucoup moins longue dans le cas pour vingt obstacles (Figure 5.10) puisqu'un autre obstacle a été ajouté au centre de l'espace. De la même façon, la "zone de convergence" pour l'obstacle en haut à gauche sur la Figure 5.9 est plus large que sur la Figure 5.10.

Il est également intéressant de noter que pour deux obstacles très proches, les "lignes de discontinuité" et les "zones de convergence" fusionnent pour donner une "ligne de discontinuité" et une "zone de convergence" plus large. Les deux obstacles proches sont alors considérés comme un unique obstacle plus important. Ainsi, aucune trajectoire ayant son point de départ à bonne distance de ces obstacles n'a de chance de passer entre eux.

## 4 Étude des Trajectoires Biharmoniques

L'étude préliminaire effectuée sur les champs de navigation biharmoniques va permettre de mieux comprendre le comportement des trajectoires calculées à partir de la fonction biharmonique.



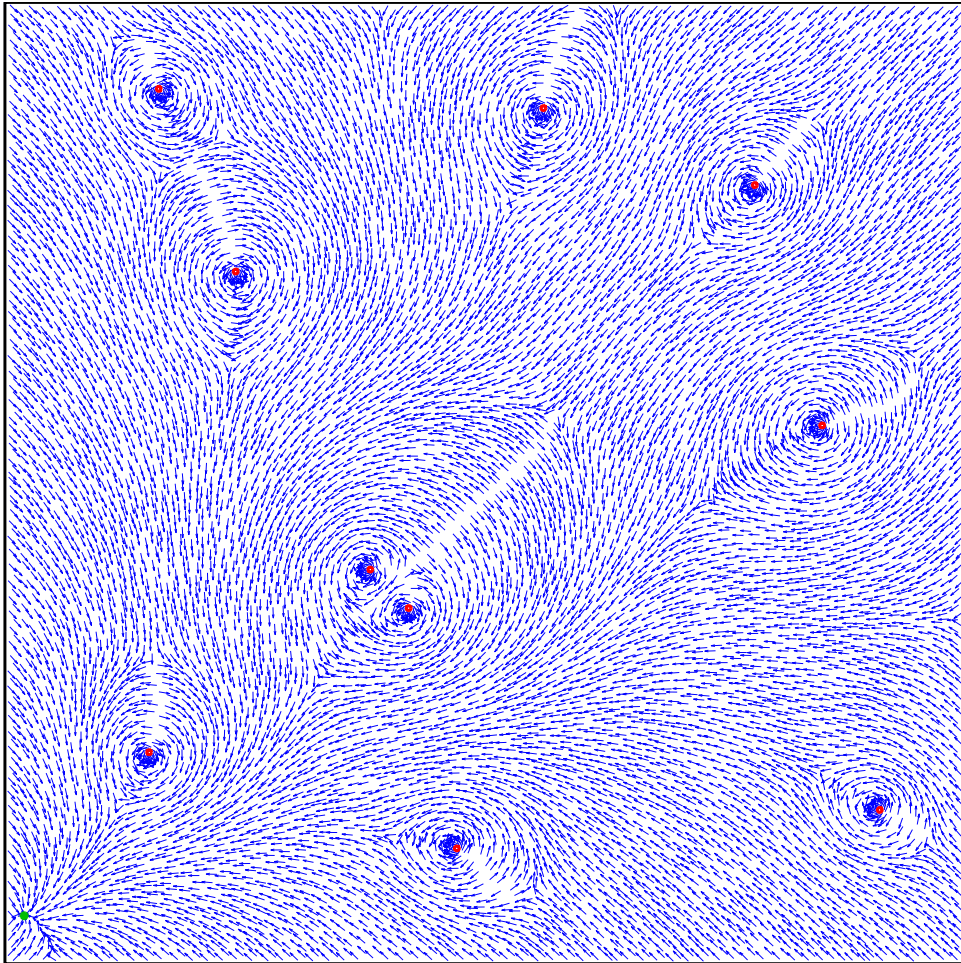


FIGURE 5.9 – Champ de navigation biharmonique pour un espace large contenant 10 obstacles. Disques rouges=Obstacles. Point vert=Destination.

#### 4.1 Impact des Lignes de Discontinuité et des Zones de Convergence sur les Trajectoires

Les "lignes de discontinuité" influencent la forme des trajectoires obtenues. Prenons le cas de deux trajectoires, dont les points de départ sont situés de chaque côté d'une "ligne de discontinuité" comme présenté Figure 5.11.

La trajectoire 2 est plus lisse et donc plus intéressante que la trajectoire 1. En modifiant le redressement effectué dans cette zone, il est possible de décaler la ligne de discontinuité pour que la trajectoire 1 contourne elle aussi l'obstacle par le bas.

Si les "lignes de discontinuité" permettent de contrôler partiellement la forme des trajectoires, les "zones de convergence" risquent de les faire osciller. Nous avons construit une trajectoire biharmonique partant d'une "zone de convergence" pour confirmer cette hypothèse (voir Figure 5.12).

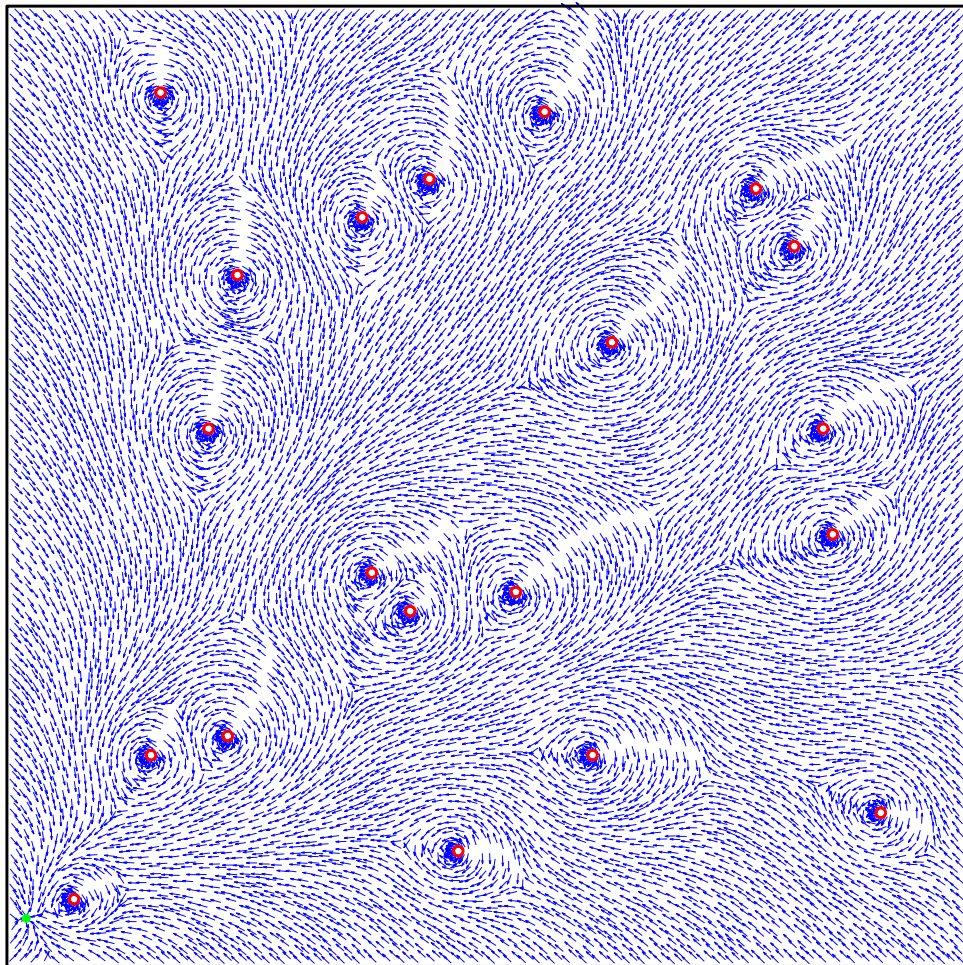


FIGURE 5.10 – Champ de navigation biharmonique pour un espace large contenant 20 obstacles. Disques rouges=Obstacles. Point vert=Destination.

Comme nous le supposions, la trajectoire connaît de multiples oscillations avant de redevenir lisse et de rejoindre la destination. Il est intéressant de noter que la trajectoire oscille d'abord dans la "zone de convergence" liée à l'obstacle le plus proche, puis dans la "zone de convergence" générée par les deux obstacles.

Au vu du comportement des trajectoires au niveau des "zones de convergence", il apparaît que la méthode basée sur les fonctions biharmoniques n'est pas adaptée au calcul d'une trajectoire dont le point de départ se situe près d'un obstacle. Malheureusement, plus l'espace libre est large (i.e. moins il y a d'obstacles dans l'espace) et plus ces "zones de convergence" sont grandes. Si un point de départ se trouve dans une "zone de convergence", il faudra alors lisser la trajectoire biharmonique qui lui est associée pour qu'elle soit volable.

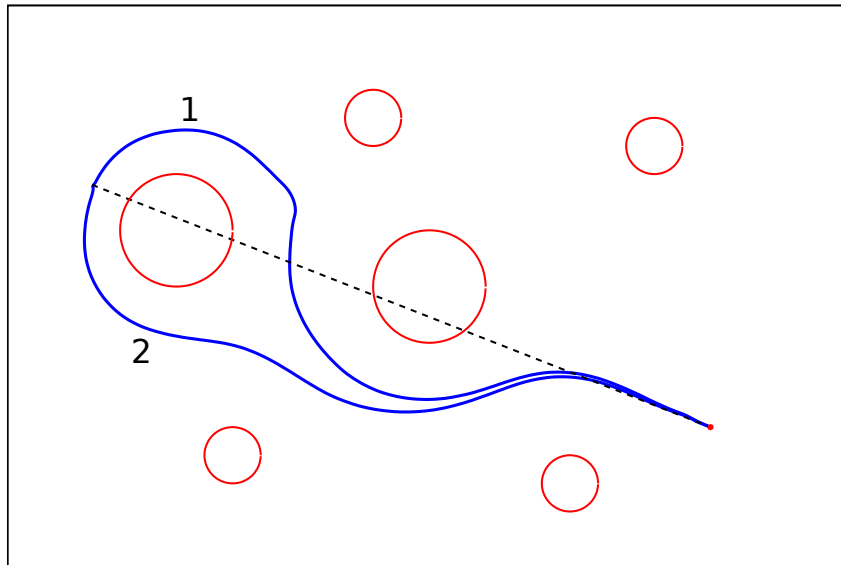


FIGURE 5.11 – Deux trajectoires biharmoniques dont les points de départ se situent de chaque côté d'une ligne de discontinuité. Cercles rouges=Obstacles. Point rouge=Destination.

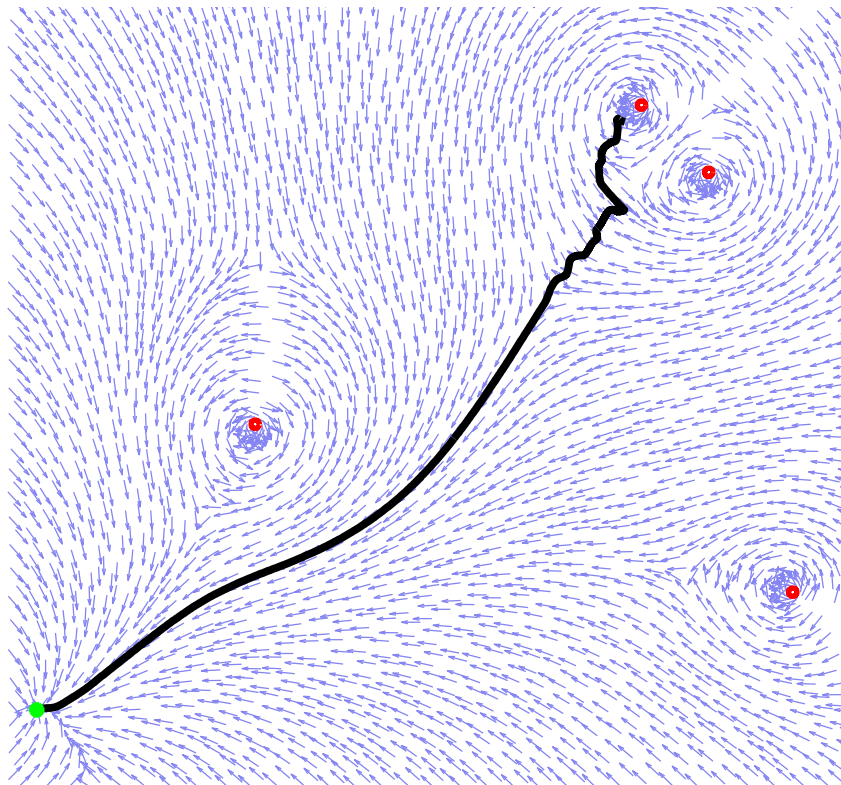


FIGURE 5.12 – Trajectoire biharmonique partant d'une "zone de convergence" et oscillant avant de rejoindre la destination. Cercles rouges=Obstacles. Point vert=Destination.

## 4.2 Trajectoires de Dirichlet, de Neumann et Biharmonique

Un des objectifs de la construction de trajectoires à partir de la fonction biharmonique était d'obtenir des trajectoires lisses qui contournent les obstacles à une distance plus raisonnable que les trajectoires obtenues avec la fonction harmonique de Neumann. Comparons donc ces trajectoires sur un espace rempli de six obstacles. Les trajectoires présentées Figure 5.13 sont notées  $N_x$  pour les trajectoires obtenues avec des conditions de Neumann et  $B_x$  pour les trajectoires obtenues avec la fonction biharmonique.

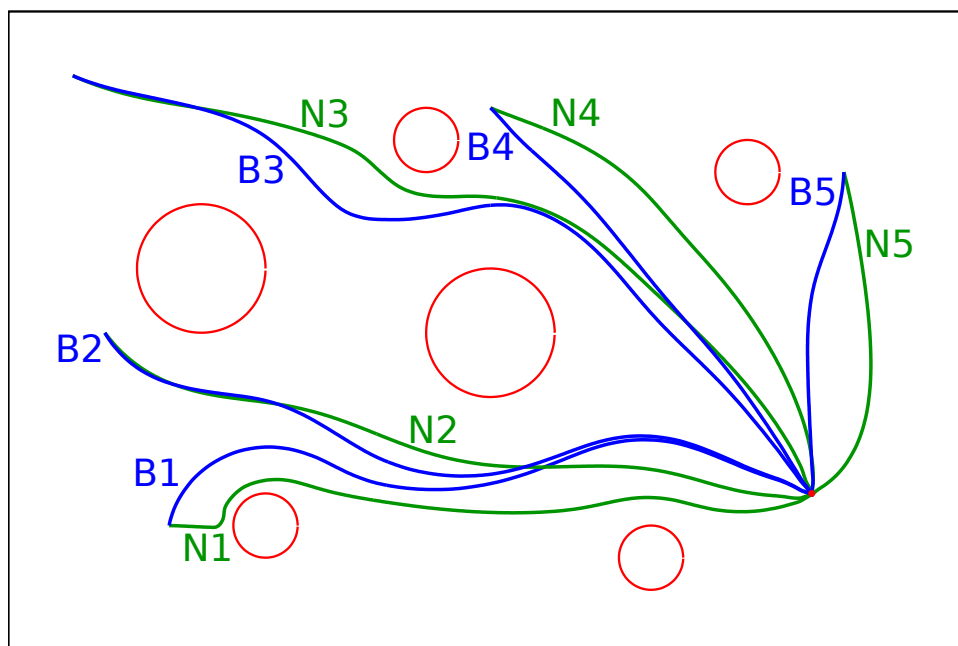


FIGURE 5.13 – Trajectoires obtenues avec une fonction harmonique avec conditions de Neumann (vert) et avec une fonction biharmonique (bleu) depuis cinq points de départ. Cercles rouges=Obstacles. Point rouge=Destination.

Comme souhaité, la fonction biharmonique permet de construire des trajectoires qui évitent les obstacles avec une distance raisonnable (B1 et B3) par rapport aux trajectoires obtenues avec conditions de Neumann (N1 et N3). Dans le cas de la trajectoire 2, la trajectoire obtenue avec condition de Neumann est plus intéressante que celle obtenue avec la fonction biharmonique : elle subit moins de déviations sans pour autant tangenter les obstacles. Dans le cas des trajectoires 4 et 5, ce sont les trajectoires biharmoniques qui subissent le moins de déviations et sont donc les plus intéressantes.

Les trajectoires présentées Figure 5.13 montrent que la fonction biharmonique résout le problème lié aux conditions de Neumann des trajectoires qui tangent les obstacles. Mais dans le cas où les trajectoires de Neumann ne tangent pas les obstacles, rien ne permet de déterminer quelle trajectoire sera la plus intéressante : l'harmonique avec conditions de Neumann ou la biharmonique ? Les trajectoires obtenues avec une fonction harmonique avec condition de Dirichlet pourraient-elles être meilleures que celles obtenues avec conditions de Neumann ou les fonctions biharmoniques, si le champ de Dirichlet n'est pas évanescent ?

Pour essayer de répondre à cette question, nous avons calculé un grand nombre de trajectoires sur les deux espaces présentés Figure 5.9 et Figure 5.10 en utilisant :

- la fonction harmonique avec conditions de Dirichlet,
- la fonction harmonique avec conditions de Neumann,
- la fonction biharmonique.

Nous avons cherché à étudier trois critères :

- La forme des trajectoires. Cherchent-elles à se faufiler entre les obstacles ? Ou préfèrent-elles contourner un groupe d'obstacles ? À quelle distance passent-elles des obstacles ?
- L'utilisabilité des trajectoires. Une trajectoire peut être considérée comme inutilisable si elle passe trop près des obstacles, ou si elle effectue des virages trop serrés (comme des oscillations par exemple). Si une trajectoire ne peut pas être calculée à cause de l'évanescence du champ, elle est également considérée comme inutilisable.
- La longueur des trajectoires obtenues.

### **Forme des Trajectoires**

Pour se faire une idée de la forme des trajectoires produites par chacune des trois méthodes, il faut observer un certain nombre de trajectoires. Pour cette raison, nous avons représenté Figure 5.14 les trajectoires obtenues à partir de vingt points de départ différents.

On distingue deux types de comportements : les trajectoires de Neumann sont très proches de la ligne droite et ne dévient qu'au dernier moment pour éviter un obstacle (voir Figure 5.14 Trajectoire 1). Les trajectoires de Dirichlet et biharmoniques évitent les obstacles de beaucoup plus loin. Ces deux méthodes ont tendance à essayer de passer au même endroit et donnent l'impression de suivre des courants principaux entre les obstacles.

Les trajectoires de Dirichlet et biharmoniques ne présentent néanmoins pas toujours la même forme (voir Figure 5.14 Trajectoire 2). Lorsque les trajectoires harmoniques de Dirichlet et biharmoniques diffèrent, les trajectoires de Dirichlet semblent plus intéressantes (moins de virages, plus courtes) que les trajectoires biharmoniques.

Dans certains cas, il n'est néanmoins pas possible de calculer des trajectoires à partir d'une fonction harmonique avec conditions de Dirichlet à cause de l'évanescence du champ (voir Figure 5.14 Trajectoire 3).

### **Utilisabilité des Trajectoires**

Pour cette étude, nous avons considéré 106 points de départ pour chacun des espaces présentés Figure 5.9 et Figure 5.10. Pour chaque point de départ, nous avons calculé les trajectoires avec une fonction harmonique avec conditions de Dirichlet, avec conditions de Neumann et avec une fonction biharmonique. Chaque trajectoire a ensuite été évaluée en terme d'utilisabilité (virages, proximité des obstacles et possibilité de calculer une trajectoire). Les résultats ainsi obtenus ont été synthétisés dans la Table 5.1.

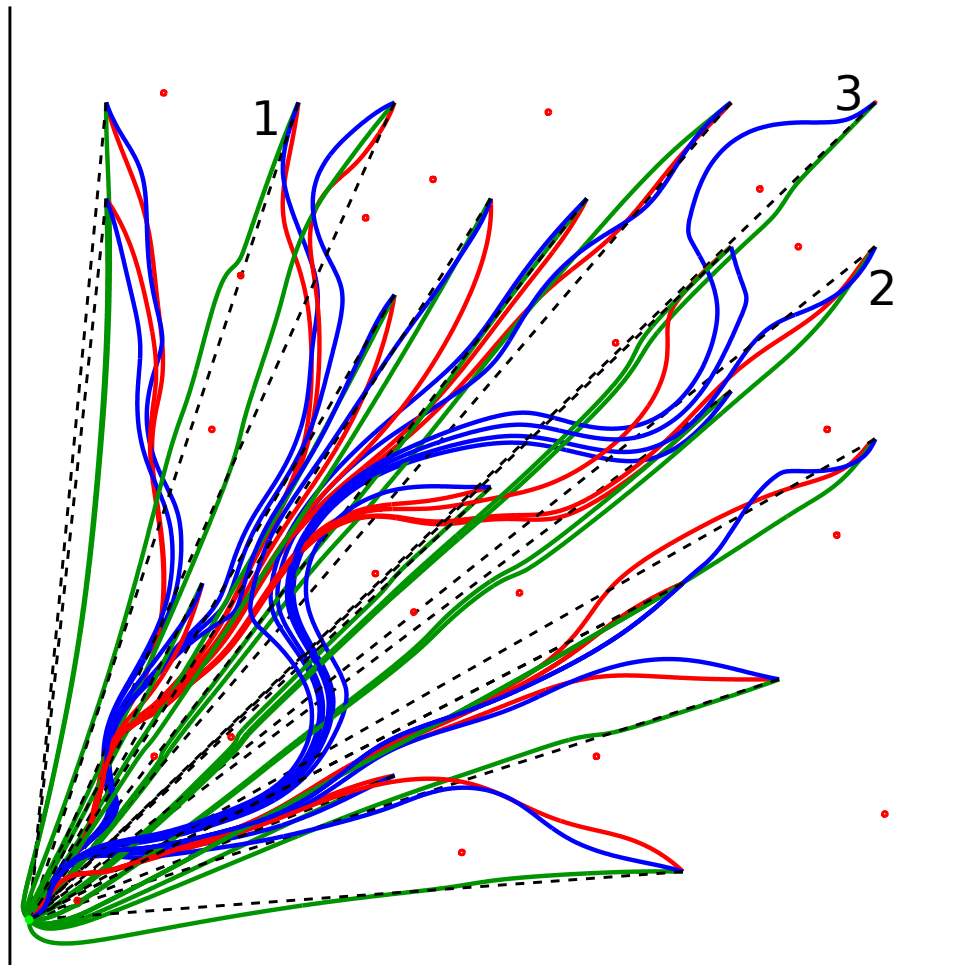


FIGURE 5.14 – Trajectoires obtenues avec une fonction harmonique avec conditions de Dirichlet (rouge), de Neumann (vert) et avec une fonction biharmonique (bleu) depuis vingt points de départ. Cercles rouges=Obstacles. Point vert=Destination. Pointillés noirs=Lignes droites.

	Dirichlet		Neumann		Biharmonique	
	10	20	10	20	10	20
<b>Obstacles</b>						
<b>Utilisable</b>	<b>97.17%</b>	<b>80.19%</b>	68.87%	48.11%	69.81%	70.75%
<b>Inutilisable</b>	2.83%	19.81%	31.13%	51.89%	30.19%	29.25%
Virage trop serré	1.89%	5.66%	-	-	30.19%	29.25%
Trop proche d'obstacles	0.94%	0.94%	31.13%	51.89%	-	-
Champ évanescent	0.94%	13.21%	-	-	-	-

TABLE 5.1 – Utilisabilité des trajectoires en fonction de la méthode utilisée pour les calculer.

Il ressort de cette étude que les trajectoires les **plus souvent utilisables** sont les trajectoires obtenues à partir d'une fonction **harmonique avec conditions de Dirichlet**, et ce pour les deux espaces étudiés.

Les trajectoires de Dirichlet peuvent être inutilisables pour diverses raisons. L'évanescence du champ, qui semblait être l'inconvénient majeur de cette méthode, ne pose que peu de problèmes dans le cas de l'espace contenant dix obstacles. Il prend néanmoins de l'ampleur dans le cas contenant vingt obstacles. Il semblerait donc que plus on ajoute d'obstacles à l'espace de travail et plus le champ de navigation devient évanescent. Cela pourrait poser de sérieux problèmes dans le cas de la navigation aérienne où les espaces considérés sont grands et le nombre d'obstacles (les autres avions) est important.

Toutes les trajectoires de Neumann inutilisables le sont parce qu'elles passent trop près des obstacles. C'est un comportement gênant pour la navigation aérienne puisqu'il n'autorise aucune incertitude sur la position des obstacles. De plus, ce comportement s'accroît lorsque le nombre d'obstacles augmente. Une nouvelle fois, cette augmentation du nombre de trajectoires inutilisables avec le nombre d'obstacles limite l'intérêt de la méthode harmonique avec conditions de Neumann pour la navigation aérienne.

Dans le cas des trajectoires biharmoniques, toutes les trajectoires inutilisables le sont à cause de virages trop serrés. Dans la grande majorité des cas, ces virages trop serrés sont en fait dus à des points de départ se situant dans les "zones de convergence" autour des obstacles. Ainsi si le nombre de trajectoires biharmoniques inutilisables est élevé (une sur trois environ), cette proportion pourrait être diminuée en choisissant soigneusement les points de départ des trajectoires. Il est également intéressant de noter que le nombre de trajectoires inutilisables n'augmente pas avec le nombre d'obstacles. Cela laisse supposer que la méthode biharmonique est plus "stable" vis-à-vis du nombre d'obstacles que les méthodes de Dirichlet et de Neumann.

### **Rallongement Relatif des Trajectoires**

L'utilisabilité des trajectoires est loin d'être le seul critère permettant d'évaluer l'intérêt des méthodes de Dirichlet, Neumann et biharmonique. Le rallongement imposé aux trajectoires pour le contournement des obstacles joue un rôle important dans l'évaluation de ces méthodes, puisque ce rallongement est directement lié au temps de vol et à la consommation en carburant des avions. Ainsi, si les déviations doivent être suffisamment importantes pour garantir l'évitement de conflit, elles doivent néanmoins être réduites au minimum.

Afin de pouvoir comparer le rallongement imposé par chacune des méthodes, nous calculons un rallongement relatif de la trajectoire par rapport à la ligne droite. Le rallongement relatif est calculé de la manière suivante :

$$\text{Rallongement} = \frac{\text{Longueur trajectoire} - \text{Longueur ligne droite}}{\text{Longueur ligne droite}}.$$

L'utilisation de la ligne droite comme mesure de référence n'a que peu de sens d'un point de vue pratique, puisque très souvent la ligne droite traverse au moins un obstacle. La ligne droite permet néanmoins d'offrir une référence commune pour la comparaison des trajectoires obtenues par les méthodes de Dirichlet, de Neumann et biharmonique. Le calcul du rallongement relatif permet de comparer les rallongements pour des trajectoires de longueurs (de la ligne droite) différentes.

Pour chaque point de départ, nous déterminons quelle méthode permet d'obtenir la trajectoire la plus courte (voir Table 5.2).

	10 obstacles	20 obstacles
Dirichlet	34,9%	39,6%
Neumann	58,5%	42,5%
Biharmonique	6,6%	17,9%

TABLE 5.2 – Nombre de fois où chaque méthode permet d'obtenir la trajectoire la plus courte sur les deux espaces remplis de dix ou vingt obstacles.

Comme on pouvait s'y attendre, c'est la méthode de Neumann qui donne le plus souvent la trajectoire la plus courte. Ce pourcentage tombe néanmoins lorsque le nombre d'obstacles augmente. Le pourcentage de fois où la méthode biharmonique a fourni la trajectoire la plus courte augmente avec le nombre d'obstacles, même s'il reste relativement faible comparé à celui des méthodes de Dirichlet et Neumann.

Hierarchiser les méthodes pour savoir laquelle fournit les trajectoires les plus courtes ne donne néanmoins aucune idée de l'écart entre les rallongements imposés par ces trois méthodes. Nous calculons donc le rallongement relatif moyen des trajectoires de chaque méthode, **en tenant compte uniquement des trajectoires utilisables** (voir Table 5.3).

Obstacles	Dirichlet		Neumann		Biharmonique	
	10	20	10	20	10	20
<b>Rallongement moyen</b>	7.85%	6.11%	1.83%	2.81%	8.82%	10.79%

TABLE 5.3 – Rallongement relatif moyen des trajectoires en fonction de la méthode utilisée pour les calculer. La moyenne n'a été effectuée que sur les trajectoires utilisables.

En moyenne, les trajectoires les plus courtes sont données par la méthode de Neumann. Les trajectoires de Dirichlet et biharmoniques sont beaucoup plus longues que les trajectoires de Neumann.

## Conclusion

Selon les cas, il peut être difficile de déterminer quelle méthode permet d'obtenir la meilleure trajectoire dans le cadre d'une application à la navigation aérienne. Certains critères sont parfois contradictoires : on cherche à obtenir les trajectoires les plus courtes possible, mais sans passer trop près des obstacles par exemple.

Il ressort néanmoins des études réalisées dans ce chapitre qu'aucune des trois méthodes proposées ne permet de calculer la meilleure trajectoire dans tous les cas. Chaque méthode a ses forces et ses faiblesses.

La méthode de Dirichlet donne des trajectoires plutôt longues, mais qui évitent les obstacles de loin. L'évanescence du champ de navigation peut néanmoins empêcher le calcul de trajectoires pour des points de départ situés loin de la destination.



La méthode harmonique avec conditions de Neumann permet de calculer des trajectoires très courtes (qui dévient peu de la ligne droite). Ces trajectoires sont néanmoins peu robustes.

La méthode biharmonique fournit des trajectoires plus longues que la méthode de Dirichlet. Ces trajectoires risquent également d'osciller si elles traversent une "zone de convergence" du champ de navigation. Ce problème n'apparaît néanmoins que lorsque le point de départ de la trajectoire se trouve près d'un obstacle. Les trajectoires biharmoniques ont l'avantage d'être toujours calculables et de passer à bonne distance des obstacles.

Afin de pouvoir planifier la meilleure trajectoire dans tous les cas, la procédure la plus logique serait alors la suivante :

- Calculer la trajectoire de Neumann.
- Si la trajectoire de Neumann passe trop près des obstacles, alors calculer la trajectoire de Dirichlet.
- Si la trajectoire de Dirichlet est inutilisable, alors calculer la trajectoire biharmonique.

Sur les 212 cas étudiés (106 trajectoires pour chaque espace), nous n'avons jamais trouvé de situations où les trajectoires calculées par ces trois méthodes sont toutes les trois inutilisables.

## 5 Conclusions et Perspectives sur la Méthode Biharmonique

### 5.1 Conclusions

La méthode biharmonique permet de résoudre le problème de l'évanescence du champ de navigation de la méthode de Dirichlet et celui des trajectoires qui tangentent les obstacles de la méthode de Neumann. Quel que soit l'espace de travail étudié, il est toujours possible de construire un champ de navigation, et donc des trajectoires sur cet espace. Ces trajectoires sont de plus garanties d'arriver à destination tout en évitant les obstacles, tout en conservant une vitesse constante.

La méthode basée sur les fonctions biharmoniques présente néanmoins des inconvénients qui peuvent rendre son utilisation dans le cadre de la navigation aérienne difficile :

- Il est nécessaire de redresser le champ de vecteurs propres pour obtenir un champ de navigation garantissant l'arrivée à destination et l'évitement d'obstacles.
- La forme des trajectoires dépend du redressement effectué sur le champ (ceci peut être vu à la fois comme un avantage et comme un inconvénient).
- La trajectoire connaît des oscillations lorsqu'elle traverse une "zone de convergence".
- Elle produit des trajectoires plus longues que les méthodes de Dirichlet ou Neumann.

### 5.2 Perspectives

Nous avons développé une méthode de planification de trajectoires à partir de la fonction biharmonique parce qu'elle permettait d'obtenir des trajectoires à vitesse constante exemptes des défauts des méthodes harmoniques (Dirichlet et Neumann). Cette méthode permet de planifier une trajectoire pour un mobile évoluant dans un espace connu.

Afin d'être utilisable dans le cadre de la navigation aérienne, la méthode biharmonique devrait être étendue à la planification coordonnée de plusieurs trajectoires. **C'est donc à ce problème de planification coordonnée de plusieurs trajectoires que nous allons nous intéresser dans la suite de cette thèse.**

Il nous semble néanmoins important de noter ici des pistes de développement de la méthode basée sur la fonction biharmonique que nous n'explorerons pas puisqu'elles sortent du cadre de la planification de trajectoires d'avions de cette thèse.

### Autres Applications de la Méthode

Puisque la fonction biharmonique semble mieux se comporter sur des espaces contenant beaucoup d'obstacles, nous avons voulu la tester sur un espace complexe constitué de passages étroits. Nous avons donc calculé le champ de navigation biharmonique sur un labyrinthe présenté Figure 5.15.

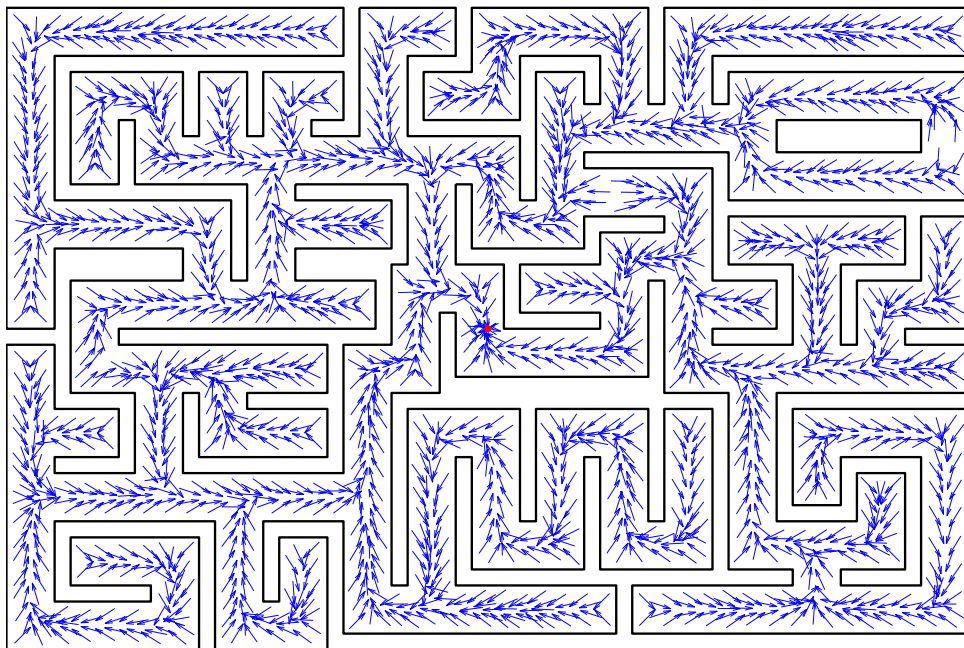


FIGURE 5.15 – Champ de navigation biharmonique dans un labyrinthe. Point rouge=Destination.

La méthode biharmonique a l'avantage d'éviter que le mobile ne passe trop près des murs du labyrinthe (comme c'est le cas pour la méthode de Neumann). Elle permet également de calculer une trajectoire à partir de n'importe quel point du labyrinthe.

Nous pensons que la méthode biharmonique peut permettre de résoudre les problèmes d'oscillations qui apparaissent avec les méthodes harmoniques dans les espaces restreints, ou encore le problème de mobiles refusant de franchir des passages étroits (goulot d'étranglement).

### Amélioration de la Méthode

Durant les travaux réalisés sur la méthode biharmonique, deux idées majeures de développement ont été envisagées.

La première consiste à travailler avec une équation biharmonique soumise à des conditions aux limites de Neumann. La méthode biharmonique présentée dans la Section 2 consiste à utiliser des conditions de Dirichlet pour se rapprocher du comportement d'une propagation de contraintes dans un matériau homogène. Une équation biharmonique soumise à des conditions de Neumann reviendrait à suivre un écoulement de Stokes. Cette piste n'a pas été explorée à cause de la complexité de résolution d'un tel système. La condition de Neumann interdit un découplage du système biharmonique en deux systèmes de Poisson et impose donc une résolution directe du système biharmonique. Malheureusement, la condition de Neumann ne s'intègre pas aussi facilement dans la formulation variationnelle de l'équation biharmonique que dans celle de l'équation harmonique. Nous n'avons donc pas trouvé de façon simple de résoudre un système biharmonique soumis à des conditions de Neumann par une méthode d'éléments finis.

La deuxième idée avancée consiste à utiliser une condition biharmonique mixte :

$$\Delta^2 F + \mu \Delta F = 0.$$

L'ajustement du paramètre  $\mu$  permettrait ainsi de passer de manière continue de l'équation harmonique à l'équation biharmonique. Mais se pose alors la question du choix des conditions aux limites, ainsi que de la construction du champ de navigation une fois l'équation mixte résolue.

### Propriétés Théoriques

Puisque la méthode biharmonique est basée sur une analogie avec la propagation de contraintes en mécanique du solide, nous pensons que le champ de navigation biharmonique pourrait présenter une propriété de minimisation de l'énergie pour le parcours de l'espace. Du point de vue des trajectoires, cela pourrait se traduire par une minimisation de la courbure totale des trajectoires [Sandwell 1987].



## Chapitre 6

# Planification de Plusieurs Trajectoires Coordonnées

L'objectif de ce chapitre est d'étudier la possibilité de planifier plusieurs trajectoires d'avions de manière coordonnée en utilisant les méthodes harmoniques présentées dans le Chapitre 4 et la méthode biharmonique présentée dans le Chapitre 5.

Comme nous en avons déjà discuté dans le Chapitre 3, Section 3.4, le mouvement coordonné de plusieurs trajectoires peut être obtenu en utilisant un espace de configuration pour représenter l'espace libre de l'ensemble des avions.

### 1 Rappel : Espaces de Configuration

Considérons  $n$  avions volant à un niveau de vol donné. On note  $X_i = (x_i, y_i)$  la position de l'avion  $i$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Deux avions,  $i$  et  $j$  entrent en collision s'ils sont au même endroit au même moment, autrement dit si  $X_i = X_j$ . On note  $D_c$  l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^{2n}$  où deux avions entrent en collision :

$$D_c = \{(X_1, \dots, X_n), \exists i \neq j, X_i = X_j\}.$$

L'espace de configuration dans lequel on cherche à construire nos trajectoires est alors :

$$\mathcal{E}_c = \mathbb{R}^{2n} - D_c.$$

N'importe quelle trajectoire construite dans  $\mathcal{E}_c$  garantira l'évitement de collision. Notre but est donc de construire un champ de navigation harmonique (ou biharmonique) sur  $\mathcal{E}_c$ .

**Remarque :** On commence par traiter le problème de l'évitement de collision, qui s'exprime plus simplement que le problème de l'évitement de conflit. Une fois une méthode adaptée trouvée pour gérer l'évitement de collision, nous pourrions essayer de l'étendre pour garantir l'évitement de conflit.

La première difficulté d'une telle construction vient de la méthode utilisée pour la résolution d'une EDP sur  $\mathcal{E}_c \subset \mathbb{R}^{2n}$ . En augmentant la dimension de l'espace libre, on augmente également le nombre de sommets nécessaires pour mailler tout l'espace libre. Ainsi, la triangulation de Delaunay qui se fait en  $\mathcal{O}(N^{d/2})$  avec  $N$  le nombre de sommets du maillage et  $d$  la dimension

de l'espace, passe de  $\mathcal{O}(N_{2D})$  pour un espace 2D à  $\mathcal{O}(N_{4D}^2)$  pour un espace 4D (espace de configuration pour deux avions) avec  $N_{4D} \approx N_{2D}^2$ . La méthode de triangulation devient donc rapidement inutilisable, le cas 4D étant la limite pratique.

Puisqu'il semble impossible d'utiliser une méthode de résolution par éléments finis pour résoudre les équations harmoniques et biharmoniques sur des espaces de dimension  $2n$ , nous avons cherché une autre méthode de résolution d'EDP. Nous nous sommes tournés vers les méthodes de résolution sans grille, qui permettent de résoudre une EDP sans avoir à mailler la totalité de l'espace sur laquelle l'EDP est résolue. En nous passant de l'étape de maillage de l'espace, nous espérons ainsi gagner en temps de calcul.

## 2 Method of Fundamental Solutions (MFS)

Les méthodes de résolution d'EDP sans grille ont été largement étudiées dans les vingt-cinq dernières années. De nombreuses méthodes ont vu le jour, chacune possédant ses propres avantages et inconvénients. Un résumé des méthodes sans grille peut être trouvé dans [Viana 2007].

Pour résoudre nos équations sur un espace de configuration, nous avons choisi la Method of Fundamental Solutions (MFS).

### 2.1 Principe de la MFS et Calcul d'une Trajectoire pour un Mobile

La MFS est une méthode de résolution numérique pour les problèmes elliptiques. Elle rentre dans la catégorie des Boundary Element Method (BEM) qui discrétisent non pas l'espace, mais les frontières de l'espace sur lequel l'EDP doit être résolue. Elle présente donc l'avantage de réduire la complexité de résolution par rapport aux méthodes nécessitant une discrétisation de l'espace complet (différences finies ou éléments finis par exemple). Comme pour les BEM, la MFS s'applique lorsqu'une *solution fondamentale* de l'EDP à résoudre est connue. Mais contrairement aux autres BEM, elle ne nécessite pas l'intégration numérique de la solution fondamentale.

Nous n'expliquerons ici que les grandes lignes de la méthode. Plus de détails au sujet de la résolution d'équations harmoniques et biharmoniques par la MFS peuvent être trouvés dans [Fairweather 1998] et [Poulikkas 1998].

#### Points Sources et Points de Collocation

La MFS nécessite la définition de deux types de points : les points sources et les points de collocation. Les *points sources* portent les fonctions de base utilisées pour approximer la solution de l'EDP. Dans le cas de la MFS, ces fonctions de base sont des solutions fondamentales de l'EDP. Pour cette raison, les points sources doivent être situés à l'extérieur du domaine de résolution puisque la solution fondamentale sera singulière en ces points.

Les *points de collocation* sont placés sur les frontières du domaine et servent à évaluer l'approximation faite à partir des solutions fondamentales. Un exemple de discrétisation d'un espace peut être trouvé Figure 6.1.

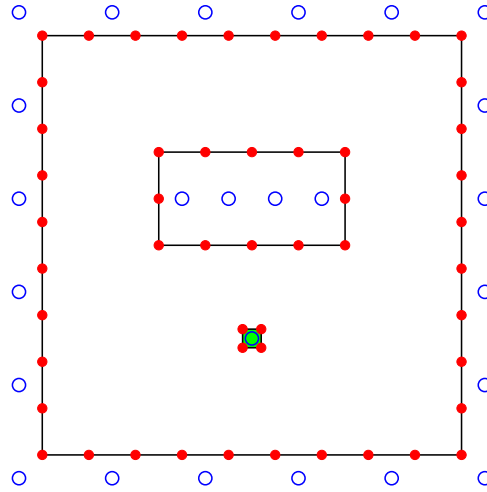


FIGURE 6.1 – Discretisation d'un espace 2D pour la MFS. Traits noirs=Frontières. Point vert=Destination. Cercles bleus=Points sources. Points rouges=Points frontières.

Dans le cadre de la résolution par la MFS d'une équation (harmonique ou biharmonique) pour le calcul de la trajectoire d'un mobile dans un espace 2D, la destination du mobile ne peut pas être représentée par un point. En effet, afin de pouvoir imposer une condition aux limites à la destination, il faut également y placer un point source afin d'obtenir une solution viable. Un point source est donc placé sur la destination du mobile  $q_d$  et des points de collocation sont placés sur un disque  $\mathcal{D}$  centré en  $q_d$ .

### Approximation de la Solution d'une EDP par la MFS

Considérons le problème harmonique avec conditions de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \Delta f = 0 \text{ sur } \mathcal{F} - \partial\mathcal{F} \\ f = 1 \text{ sur } \partial\mathcal{F} - \mathcal{D} . \\ f = 0 \text{ sur } \mathcal{D} \end{cases} \quad (6.1)$$

On place  $N_S$  points sources : un à la destination et les autres à l'extérieur du domaine, ainsi que dans les obstacles. On discrétise ensuite les frontières par  $N_C$  points frontières. Notons  $(x_{S_i}, y_{S_i})$  le  $i^{\text{ème}}$  point source et  $\psi(x, y)$  la solution fondamentale de l'équation harmonique en 2D. L'approximation de  $f$ ,  $f^*$  est alors donnée par :

$$f^*(x, y) = \sum_{i=1}^{N_S} \alpha_i \psi(x - x_{S_i}, y - y_{S_i}) + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3. \quad (6.2)$$

L'évaluation de (6.2) sur les points de collocation permet d'obtenir les coefficients  $\alpha_i$  et  $\beta_j$ ,  $1 \leq j \leq 3$ , à partir desquels  $f^*$  et sa dérivée peuvent être calculées.

En coordonnées cartésiennes, la solution fondamentale de l'équation harmonique en 2D s'écrit :

$$\psi(x, y) = \log(x^2 + y^2). \quad (6.3)$$

En utilisant (6.3) comme solution fondamentale pour la résolution du problème (6.1) par la MFS, on obtient le champ de navigation harmonique de Dirichlet présenté Figure 6.2.

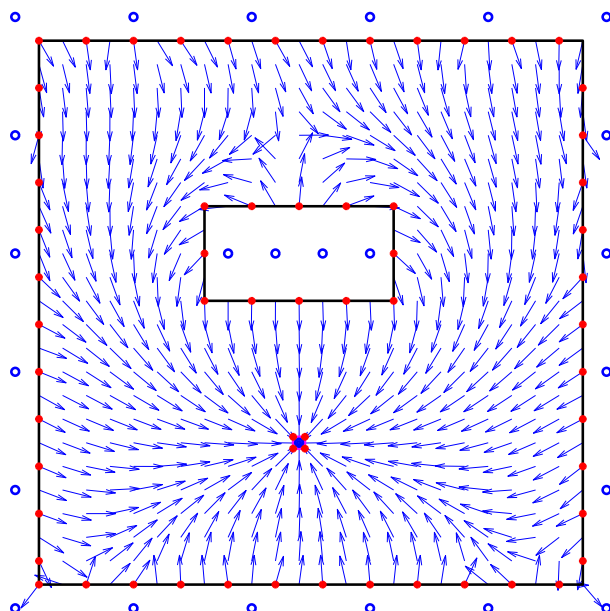


FIGURE 6.2 – Champ de navigation harmonique normé avec condition de Dirichlet calculé par la MFS. Traits noirs=Frontières. Cercles bleus=Points sources. Points rouges=Points frontières.

On remarque quelques imperfections dans le champ de navigation de la Figure 6.2. La qualité de la solution obtenue par la MFS est très dépendante de la façon dont les points sources sont placés sur une "frontière fictive" à l'extérieur du domaine. Le placement proposé Figure 6.1 est celui qui a donné les meilleurs résultats.

## 2.2 Solutions Fondamentales Harmoniques et Biharmoniques

La fonction (6.3) n'est harmonique qu'en 2D. Pour résoudre l'équation harmonique en 4D (pour deux avions), il faut donc utiliser une autre solution fondamentale, qui est harmonique en 4D. La Table 6.1 résume les solutions fondamentales en 2D et en 4D pour les équations harmoniques et biharmoniques.

Équation - Espace	2D $(x, y)$	4D $(x, y, z, w)$
Harmonique	$\log(x^2 + y^2)$	$\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$
Biharmonique	$(x^2 + y^2)\log(x^2 + y^2)$	$\log(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)$

TABLE 6.1 – Solutions fondamentales harmoniques et biharmoniques en 2D et 4D.



### 3 Mouvement Coordonné de Plusieurs Avions

Pour des raisons pratiques, nous avons commencé cette étude de la planification coordonnée de trajectoires pour **deux avions** en utilisant un **champ de potentiel harmonique de Dirichlet**.

Avec un champ biharmonique se pose en effet la question du calcul du champ de vecteurs propres en 4D (ou plus pour plus de deux avions). Cela aurait-il encore un sens de calculer le champ de vecteurs propres associé à la valeur propre minimale (sachant qu'il n'y plus deux, mais quatre valeurs propres) ? Puisque la méthode biharmonique se base sur une analogie avec la mécanique du solide, qui pour des raisons évidentes n'a jamais été développée pour des espaces de dimension supérieure à trois, une vraie réflexion doit être menée sur la façon de construire un champ de navigation biharmonique en espace de dimension quatre ou plus.

Nous travaillons donc ici avec un champ de potentiel harmonique de Dirichlet pour deux avions (espace 4D).

#### 3.1 Solution Fondamentale Harmonique en 4D

Notre première idée a été de résoudre l'équation harmonique avec conditions de Dirichlet en utilisant la solution fondamentale harmonique en 4D (voir Table 6.1). Mais le problème du calcul du champ de navigation se pose une nouvelle fois.

En effet, il est simple de calculer le gradient de la fonction harmonique sur l'espace 4D. Ce champ permet bien de relier n'importe quel point de l'espace 4D à la destination par une trajectoire en 4D. Mais rien ne dit que la projection de cette trajectoire 4D sur les espaces 2D dans lesquels volent les avions donnera des trajectoires 2D viables. En normant le champ 4D, on obtiendra bien une trajectoire à vitesse constante, mais dans l'espace de configuration seulement. La projection de la trajectoire 4D sur des espaces 2D ne donnera certainement pas des trajectoires 2D à vitesse constante. Dans la trajectoire 4D, un des deux avions peut en effet s'arrêter pour en laisser passer un autre, alors même que le champ 4D a été normé.

De plus, la fonction harmonique 4D projetée sur chaque espace 2D ne donne pas des fonctions harmoniques. Ainsi, si toutes les bonnes propriétés des fonctions harmoniques sont vérifiées en 4D, elles ne le sont pas nécessairement en 2D, c'est-à-dire dans l'espace dans lequel évoluent réellement les trajectoires.

Un dernier problème apparaît dans l'utilisation de la solution fondamentale harmonique en 4D. Comment faire pour planifier les trajectoires coordonnées pour trois avions ? L'espace de résolution de l'équation harmonique est alors de dimension six. Il faudrait donc utiliser une nouvelle solution fondamentale harmonique en 6D. Ainsi pour chaque nombre d'avions différents, il faudrait une solution fondamentale harmonique différente. Ce procédé n'est pas viable dans le cas d'application qui nous intéresse.

Une autre solution consiste à utiliser plusieurs solutions fondamentales harmoniques en 2D afin de résoudre l'équation harmonique sur l'espace de configuration.

### 3.2 Produit Tensoriel de Deux Fonctions Harmoniques 2D

Puisque les espaces de configuration sont construits comme des produits tensoriels d'espaces 2D, il semble naturel de faire la même chose avec les solutions fondamentales harmoniques 2D afin de résoudre l'équation harmonique avec conditions de Dirichlet.

#### Fonction de Base

**Théorème 6.1.** *Le produit tensoriel de plusieurs fonctions harmoniques (6.3) est harmonique.*

*Démonstration.* Considérons  $f$  le produit tensoriel de  $n$  fonctions (6.3) :

$$f(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = \prod_{i=1}^n \log(x_i^2 + y_i^2).$$

Le gradient de  $f$  est alors donné par :

$$\nabla_i f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f}{\partial y_i} \end{bmatrix} = \frac{2}{x_i^2 + y_i^2} \prod_{j \neq i} \log(x_j^2 + y_j^2) \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}.$$

Les dérivées secondes de  $f$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} &= \frac{2(x_i^2 + y_i^2) - 4x_i^2}{(x_i^2 + y_i^2)^2} \prod_{j \neq i} \log(x_j^2 + y_j^2), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2} &= \frac{2(x_i^2 + y_i^2) - 4y_i^2}{(x_i^2 + y_i^2)^2} \prod_{j \neq i} \log(x_j^2 + y_j^2). \end{aligned}$$

On obtient enfin le laplacien de  $f$  :

$$\Delta f(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2} = 0.$$

□

L'utilisation d'un produit tensoriel de fonctions harmoniques permet donc de construire une fonction harmonique dans un espace de dimension  $2n$ , tout en s'assurant que les projections de cette fonction harmonique sur les espaces 2D seront elles aussi harmoniques.

Pour reprendre le cas de deux avions dont les coordonnées sont données par  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$ , l'approximation  $f^*$  de  $f(x_1, y_1, x_2, y_2) = \log(x_1^2 + y_1^2)\log(x_2^2 + y_2^2)$  par la méthode MFS est donnée par :

$$\begin{aligned} f^*(x_1, y_1, x_2, y_2) &= \sum_{i=1}^{N_S} \alpha_i \psi(x_1 - x_{S_i}, y_1 - y_{S_i}) \psi(x_2 - x_{S_i}, y_2 - y_{S_i}) \\ &+ \beta_1 x_1 x_2 + \beta_2 y_1 y_2 + \beta_3 x_1 + \beta_4 y_1 + \beta_5 x_2 + \beta_6 y_2 + \beta_7. \end{aligned} \quad (6.4)$$

#### Interdiction de la Diagonale de l'Espace de Configuration

Maintenant que nous savons comment calculer notre fonction harmonique sur l'espace 4D se pose la question de l'interdiction de la diagonale de l'espace de configuration (qui assure l'évitement de collision entre les deux avions).

**Discretisation de la Diagonale :** Normalement dans la MFS, les frontières du domaine sont discrétisées par les points frontières. Des points sources doivent également être ajoutés à l'extérieur du domaine, sur une frontière "fictive", proche de la frontière discrétisée. Mais dans le cas de la diagonale de l'espace de configuration 4D, la frontière à discrétiser n'est pas un espace 1D, mais un espace 2D, c'est-à-dire un plan. Il nous faut donc discrétiser le plan tel que  $X_1 = X_2$  par des points sources, puis entourer ces points sources de points frontières. On comprend vite que le nombre de points nécessaires pour représenter le plan diagonal va exploser puisque pour chaque point source ajouté, il faudra ajouter au moins seize points frontières pour l'entourer dans l'espace 4D.

Les résultats obtenus en discrétisant la diagonale de l'espace de configuration ont été très peu concluants. La sensibilité de la méthode à la frontière "fictive" sur laquelle sont placés les points sources s'accroît avec la dimension. Les quelques irrégularités constatées sur le champ présenté Figure 6.2 prennent de l'ampleur en dimension supérieure, rendant ainsi les champs harmoniques 2D inutilisables pour la navigation.

**Inclusion de l'Interdiction de la Diagonale dans la Solution Fondamentale :** En modifiant la solution fondamentale harmonique utilisée pour résoudre le système (6.1), il serait possible d'interdire la diagonale sans avoir à la discrétiser (ce qui permettrait de réduire le temps de calcul et réduirait la sensibilité de la solution obtenue à la frontière "fictive" sur laquelle sont placés les points sources).

Pour cela, il faudrait trouver une fonction harmonique qui prend la valeur 1 sur la diagonale de l'espace de configuration (lorsque  $X_1 = X_2$ ). Une telle fonction harmonique est malheureusement difficile à trouver. En effet, le plan diagonal de l'espace de configuration n'est pas défini par un produit tensoriel d'espaces 2D. Donc contrairement à la fonction (6.4), la fonction permettant d'interdire la diagonale ne peut pas être construite à partir d'un produit tensoriel de fonctions harmoniques 2D.

Afin de mener des tests préliminaires, nous avons utilisé la fonction suivante pour interdire la diagonale :

$$f_D(x_1, y_1, x_2, y_2) = \log \left( (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \right). \quad (6.5)$$

Cette fonction est bien harmonique et elle tend vers  $-\infty$  lorsque  $X_1 = X_2$ . Pour créer une barrière infranchissable sur la diagonale de l'espace de configuration, il suffit donc d'injecter  $-f_D(x_1, y_1, x_2, y_2)$  dans (6.4) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} f^*(x_1, y_1, x_2, y_2) = & \sum_{i=1}^{N_S} \alpha_i \psi(x_1 - x_{S_i}, y_1 - y_{S_i}) \psi(x_2 - x_{S_i}, y_2 - y_{S_i}) \\ & + \beta_1 x_1 x_2 + \beta_2 y_1 y_2 + \beta_3 x_1 + \beta_4 y_1 + \beta_5 x_2 + \beta_6 y_2 + \beta_7, \\ & - \gamma \psi(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \end{aligned} \quad (6.6)$$

où  $\gamma$  est une constante fixée qui détermine la force de répulsion de la diagonale de l'espace de configuration.

**Inconvénients de (6.5) :** L'utilisation de la fonction harmonique (6.5) qui tend vers  $+\infty$  lorsque deux avions entrent en collision peut poser deux problèmes.

**En théorie,** l'avion peut chercher à rejoindre la frontière de l'espace et y rester bloqué. En effet, puisque la fonction potentielle  $f$  prend la valeur 1 sur la frontière délimitant l'espace, cette frontière est en fait un minimum local de  $f$ . En suivant les valeurs décroissantes de la fonction potentielle, l'avion peut donc atteindre la frontière délimitant l'espace, ou la destination. Pour éliminer ce risque, il faudrait soit que la fonction potentielle prenne la valeur 1 sur la diagonale, soit que la frontière de l'espace soit mise à  $+\infty$ .

**En pratique,** il est possible de choisir un  $\gamma$  qui réduit la force de répulsion générée par la diagonale de l'espace de configuration et qui guide l'avion vers la destination plutôt que vers la frontière de l'espace.

Le deuxième défaut de la fonction barrière (6.5) vient du fait qu'elle ne permet d'éviter que les collisions et non les conflits. En effet, pour interdire les conflits, il faudrait avoir une fonction barrière de la forme :

$$f_D(x_1, y_1, x_2, y_2) = \log \left( (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - r \right), \quad (6.7)$$

avec  $r$  la distance de sécurité entre deux avions (5NM en phase de croisière). La fonction (6.7) n'étant pas harmonique, il est impossible de l'utiliser sans perdre la garantie de l'absence de minima locaux dans l'espace libre. La garantie d'absence de conflit ne peut donc être obtenue qu'à travers l'ajustement du coefficient  $\gamma$  qui contrôle la force de répulsion de la diagonale de l'espace de configuration.

### Trajectoires pour Deux Avions

Nous avons testé l'expression (6.6) pour calculer de manière coordonnée les trajectoires de deux avions qui seraient entrés en conflit s'ils avaient suivi la ligne droite pour rejoindre leur destination. Ces avions volent dans un espace de 200NM par 200NM.

Un unique point source est placé en  $X_d = (x_{d_1}, y_{d_1}, x_{d_2}, y_{d_2})$  avec  $(x_{d_1}, y_{d_1})$  la destination du premier avion et  $(x_{d_2}, y_{d_2})$  la destination du deuxième avion. Ce point source est ensuite entouré de 16 points frontières.

Afin d'obtenir des trajectoires à vitesse constante, nous calculons et normons le gradient de  $f$  pour chaque avion. Notons  $X = (X_1, X_2)$  la position des deux avions dans l'espace de configuration, les trajectoires de ces avions sont alors données par :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -\nabla_1 f(X) \\ \|\nabla_1 f(X)\| \\ -\nabla_2 f(X) \\ \|\nabla_2 f(X)\| \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

Nous présentons ici des trajectoires obtenues à partir de (6.1), (6.6) et (6.8) pour différents  $\gamma$ , choisis empiriquement. Les zones de protection autour des avions sont représentées par des cercles afin de pouvoir vérifier si le conflit est évité. Si les zones de protection autour des avions s'intersectent, alors les deux avions sont en conflit.

Les trajectoires présentées Figure 6.3 illustrent le problème posé par une fonction barrière qui tend vers  $+\infty$ . Au lieu de chercher à rejoindre leur destination, les avions se dirigent vers la frontière de l'espace. Pour que les avions rejoignent bien leur destination, il faut diminuer le  $\gamma$ .

Dans le cas présenté Figure 6.4, les avions se dirigent bien vers leur destination tout en s'évitant. Les déviations subies par les deux avions sont néanmoins très importantes et un  $\gamma$  plus faible permettrait de les réduire.

Le  $\gamma$  utilisé Figure 6.5 est trop faible et les deux avions entrent en conflit. Il faut augmenter le  $\gamma$  pour augmenter la distance à laquelle les deux avions s'évitent.

Les trajectoires obtenues avec  $\gamma = 2 \times 10^{-4}$  (voir Figure 6.6) sont très proches des trajectoires obtenues avec  $\gamma = 10^{-4}$  (voir Figure 6.5). Pourtant, dans le cas présenté Figure 6.6, le conflit est évité entre les deux avions, sans faire subir trop de déviations aux trajectoires.

**Ces résultats montrent l'importance que prend le choix du  $\gamma$  dans la planification de trajectoires.** La forme des trajectoires, mais aussi l'arrivée à destination dépendent de  $\gamma$ . Nous n'avons néanmoins trouvé aucune "règle" permettant de choisir un  $\gamma$  adéquat. Le paramétrage du  $\gamma$  doit donc passer par un processus essai-erreur (manuel ou automatisé).

Dans le cas de deux avions, **un calcul des deux trajectoires prend entre dix à vingt secondes.** Le calcul des trajectoires peut donc être répété quelques fois, jusqu'à obtenir un  $\gamma$  produisant des trajectoires satisfaisantes.

Puisque la méthode basée sur la résolution de l'équation harmonique sur un espace de configuration donne des résultats encourageants pour deux avions, étudions maintenant le cas de la planification de trajectoires coordonnées pour trois avions.

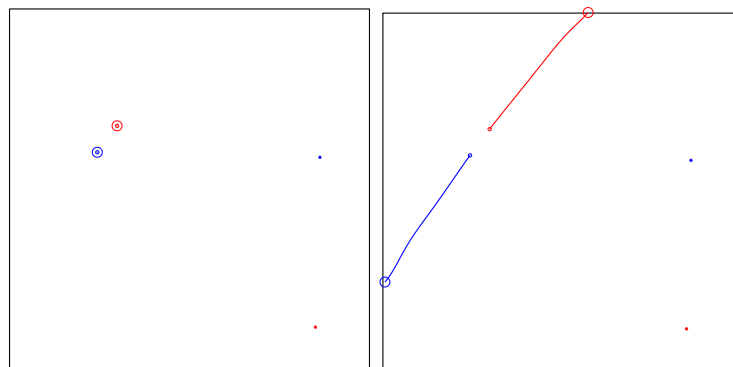


FIGURE 6.3 – Trajectoires calculées pour deux avions en utilisant (6.6) avec  $\gamma = 10^{-2}$ . Cercles=Zones de protection autour des avions. Points=Destinations des avions.

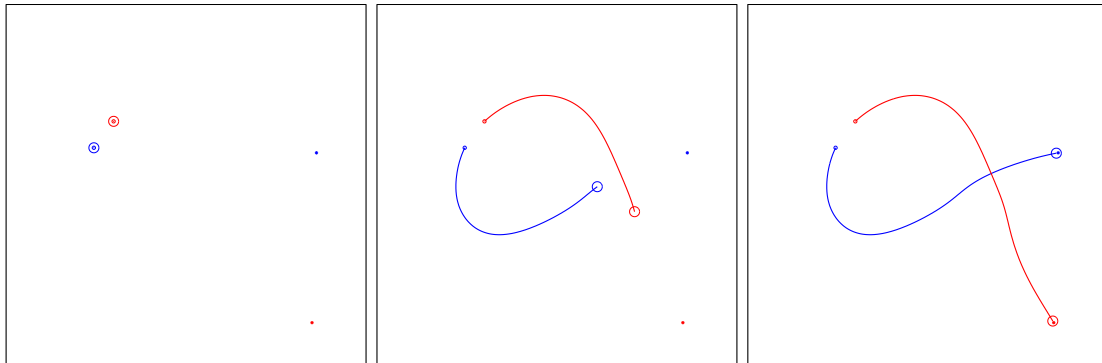


FIGURE 6.4 – Trajectoires calculées pour deux avions en utilisant (6.6) avec  $\gamma = 10^{-3}$ . Cercles=Zones de protection autour des avions. Points=Destinations des avions.

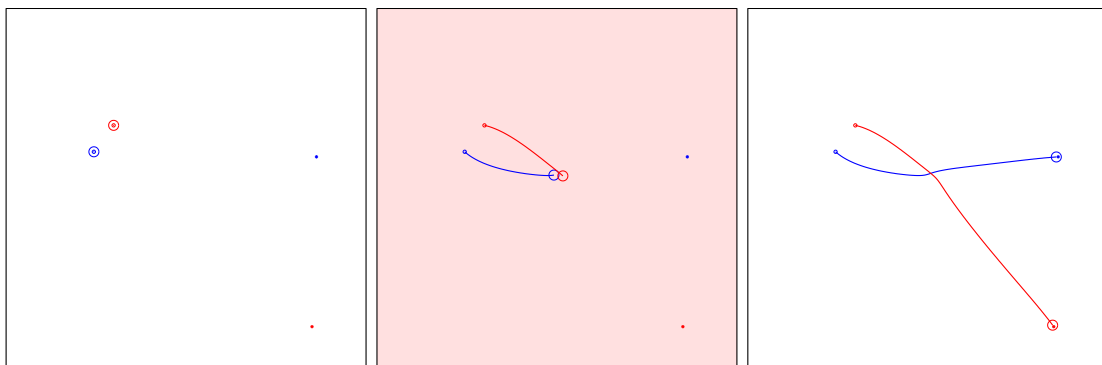


FIGURE 6.5 – Trajectoires calculées pour deux avions en utilisant (6.6) avec  $\gamma = 10^{-4}$ . Les deux avions entrent en conflit (image avec un fond rouge). Cercles=Zones de protection autour des avions. Points=Destinations des avions.

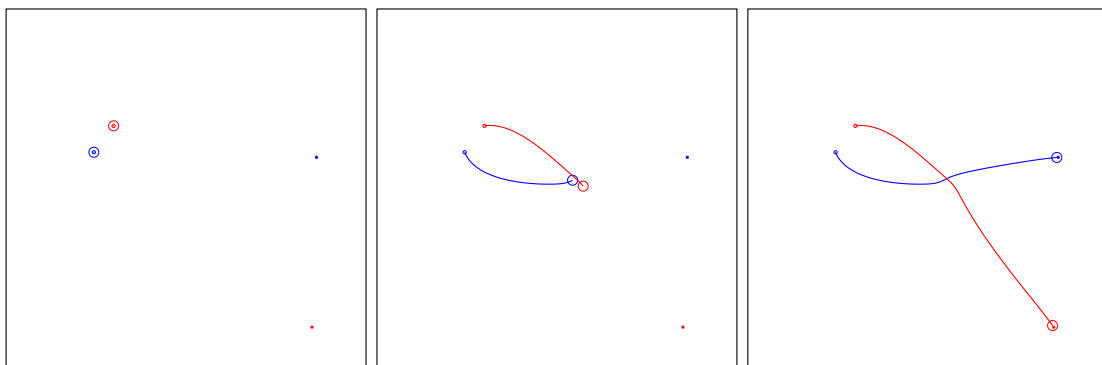


FIGURE 6.6 – Trajectoires calculées pour deux avions en utilisant (6.6) avec  $\gamma = 2 \times 10^{-4}$ . Cercles=Zones de protection autour des avions. Points=Destinations des avions.

### 3.3 Produit Tensoriel de Trois Fonctions Harmoniques 2D

La méthode utilisée pour le calcul de trajectoires de deux avions peut être facilement étendue au cas de trois avions. L'espace de configuration dans lequel les trajectoires sont calculées n'est plus 4D, mais 6D, ce qui augmente le nombre de points sources et de points frontières nécessaires pour représenter l'espace.

La fonction utilisée pour approximer la solution de (6.1) doit être modifiée pour tenir compte du troisième avion :

$$\begin{aligned}
 f^*(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = & \sum_{i=1}^{N_S} \alpha_i \psi(x_1 - x_{S_i}, y_1 - y_{S_i}) \psi(x_2 - x_{S_i}, y_2 - y_{S_i}) \psi(x_3 - x_{S_i}, y_3 - y_{S_i}) \\
 & + \beta_1 x_1 x_2 x_3 + \beta_2 y_1 y_2 y_3 + \beta_3 x_1 x_2 + \beta_4 x_1 x_3 + \beta_5 x_2 x_3 \\
 & + \beta_6 y_1 y_2 + \beta_7 y_1 y_3 + \beta_8 y_2 y_3 + \beta_9 x_1 + \beta_{10} x_2 + \beta_{11} x_3 \\
 & + \beta_{12} y_1 + \beta_{13} y_2 + \beta_{14} y_3 + \beta_{15} \\
 & - \gamma [\psi(x_1 - x_2, y_1 - y_2) + \psi(x_1 - x_3, y_1 - y_3) + \psi(x_2 - x_3, y_2 - y_3)].
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Nous avons choisi d'interdire toutes les collisions entre deux avions, ce qui permet automatiquement d'interdire les collisions entre les trois avions. La diagonale de l'espace est représentée par une somme de  $\psi$  et non par un produit puisque le produit

$$\psi(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \psi(x_1 - x_3, y_1 - y_3) \psi(x_2 - x_3, y_2 - y_3)$$

n'est pas harmonique, alors que la somme

$$\psi(x_1 - x_2, y_1 - y_2) + \psi(x_1 - x_3, y_1 - y_3) + \psi(x_2 - x_3, y_2 - y_3)$$

l'est (comme toute somme de fonctions harmoniques).

Nous avons utilisé (6.9) pour résoudre l'équation (6.1) sur un problème de planification pour trois avions. Les trajectoires obtenues sont représentées Figure 6.7.

Nous avons choisi  $\gamma = 2 \times 10^{-4}$  en nous basant sur les résultats obtenus pour deux avions. Les trajectoires présentées Figure 6.7 sont sans conflit, mais les zones de protection sont à la limite de l'intersection. Avec  $\gamma = 2.5 \times 10^{-4}$ , les avions divergent et se dirigent vers les frontières de l'espace plutôt que leur destination. L'arrivée à destination dans le cas pour trois avions est donc extrêmement sensible au paramètre  $\gamma$ .

Le processus essai-erreur proposé dans le cas de deux avions pour trouver une valeur adéquate pour  $\gamma$  est inutilisable dans le cas pour trois avions puisque le calcul des trajectoires présentées Figure 6.7 a demandé environ trente minutes. En ajoutant un seul avion, le temps de calcul a déjà été multiplié par 100. Gérer plus de trois avions avec cette méthode est illusoire.

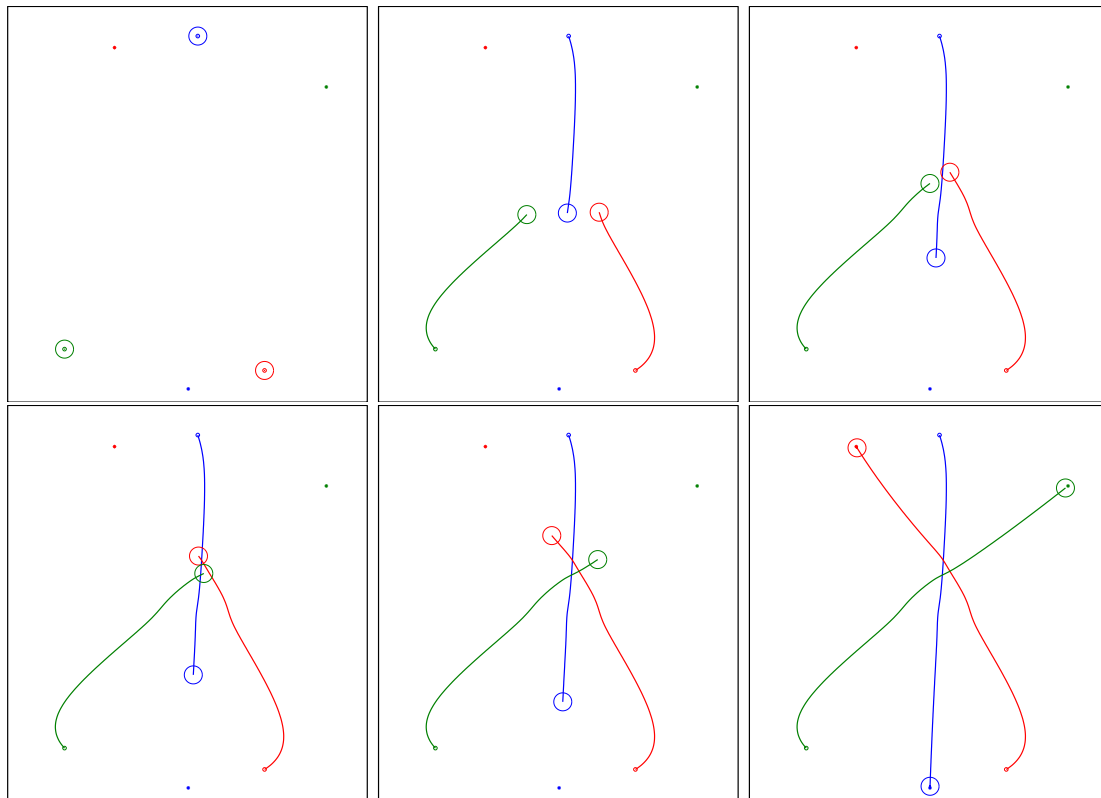


FIGURE 6.7 – Trajectoires calculées pour trois avions en utilisant (6.9) avec  $\gamma = 2 \times 10^{-4}$ . Cercles=Zones de protection autour des avions. Points=Destinations des avions.

## 4 Conclusion sur les Champs de Potentiels pour la Planification Coordonnée de Trajectoires

La méthode basée sur la résolution d'une EDP présentée dans ce chapitre n'est pas adaptée au problème que nous cherchons à résoudre. Le temps de calcul pour seulement trois avions dépasse déjà les trente minutes. Avec une multiplication par 100 du temps de calcul pour l'ajout d'un avion à la simulation, il semble impossible d'utiliser cette méthode pour planifier les trajectoires de plus de quatre ou cinq avions. Notre objectif étant de planifier les trajectoires au niveau stratégique pour un très grand nombre d'avions (autour de 28 000 vols idéalement), la méthode basée sur la résolution d'EDP ne permet pas de résoudre notre problème.

Le coût en temps de calcul de cette méthode n'est pas son seul défaut. La qualité des solutions obtenues est très dépendante de la "frontière fictive" utilisée pour porter les points sources de la MFS. Or plus la dimension de l'espace de configuration augmente, plus le placement de ces points sources devient difficile. Nous pensons donc que la qualité de la solution pourrait se dégrader avec l'augmentation du nombre d'avions et ainsi rendre les champs de potentiel calculés inutilisables pour la navigation.



Enfin l'impact du coefficient  $\gamma$  sur l'atteinte ou non des destinations par les avions pose problème. Rien ne permet de définir une valeur minimale ou maximale pour  $\gamma$  qui permet de garantir que les avions atteignent leur destination. Si le calcul des trajectoires était rapide, il serait possible de tester plusieurs valeurs pour  $\gamma$ , jusqu'à obtenir des trajectoires satisfaisantes. Mais comme nous l'avons expliqué plus haut, le temps de calcul des trajectoires pose déjà problème pour cette méthode et l'indétermination sur le choix de  $\gamma$  ne fait que l'aggraver.

Au vu des résultats obtenus dans ce chapitre, il semble évident que la résolution d'une EDP (harmonique ou biharmonique) pour le calcul de champs de potentiel ne permettra jamais d'obtenir des résultats avec un temps de calcul satisfaisant. Nous avons, dans cette partie, exploré l'approche implicite (voir Chapitre 4, Section 3.1) pour la construction de champs de potentiel. Il semble donc naturel de se tourner vers l'approche explicite afin de résoudre le problème du temps de calcul des trajectoires.

Pour rappel, le problème des champs de potentiel construit à partir de fonctions analytiques résidait dans la présence de minima locaux sur l'espace. Nous nous sommes tournés vers les fonctions harmoniques pour la construction de champs de potentiel parce qu'elles résolvaient ce problème. Une classe particulière de fonctions potentielles analytiques, nommée *fonctions de navigation*, permet elle aussi de résoudre le problème des minima locaux. C'est à ces **fonctions de navigation** que nous allons nous intéresser dans la prochaine partie de cette thèse.



## *Troisième partie*

# Planification de Trajectoires : Fonctions de Navigation



## Chapitre 7

# Naissance et Développement des Fonctions de Navigation

Les fonctions de navigation sont des fonctions potentielles particulières, qui sont uniformément maximales sur les frontières des obstacles et admettent un unique minimum à la destination du mobile. En suivant les valeurs décroissantes d'une fonction de navigation, un mobile peut, de n'importe quel point de l'espace, atteindre sa destination tout en évitant les obstacles.

La plupart des fonctions potentielles présentent des minima locaux à l'intérieur de leur domaine de définition, minima dans lesquels le mobile peut rester bloqué (voir Chapitre 4, Section 1.3). Les fonctions de navigation sont construites de façon à ne présenter aucun minimum local dans leur domaine de définition, garantissant ainsi que le mobile atteindra sa destination.

Ce chapitre présente une synthèse des travaux réalisés sur les fonctions de navigation, en partant de leur définition jusqu'à leur application à l'ATM.

### 1 Naissance des Fonctions de Navigation

En 1987, Koditschek décide d'étudier la méthode des champs de potentiel d'un point de vue topologique. Il réalise son étude sur une simplification du problème de navigation : il considère un robot mobile représenté par un point et évoluant sur un espace sphérique (l'espace ainsi que les obstacles sont représentés par des sphères). Il démontre alors un certain nombre de propriétés sur les champs de potentiel [Koditschek 1987] :

- Aucun champ de potentiel analytique ne peut être construit de manière à garantir à la fois l'évitement d'obstacles et l'arrivée à destination à partir de n'importe quel point de l'espace libre.
- Il n'y a aucune obstruction topologique à la construction d'un champ de potentiel garantissant l'évitement d'obstacle et l'arrivée à destination à partir de **presque** tous les points de l'espace libre. Les points pour lesquels l'arrivée à destination n'est pas garantie forment alors un **ensemble de mesure nulle**.
- Pour un espace de travail donné, il est possible d'établir l'infaisabilité d'une navigation par champ de potentiel.

- La preuve de l'existence d'un champ de potentiel analytique sur un espace donné ne peut être obtenue que pour un champ dont on connaît la méthode de construction.

À la suite de cette étude, Koditschek propose un champ de potentiel analytique dans [Koditschek 1987]. Mais c'est aux travaux qu'il a effectués par la suite avec Elon Rimon sur les *fonctions de navigation* que nous allons nous intéresser dans ce chapitre.

## 2 Définition et Propriétés d'une Fonction de Navigation

Avant de pouvoir donner la définition d'une fonction de navigation, il nous faut détailler l'espace sur lequel cette fonction de navigation est construite.

### 2.1 Espace de Travail et Espace Libre

Une fonction de navigation est définie sur un espace de travail sphérique construit de la manière suivante [Rimon 1988] :

**Définition 7.1.** *L'espace de travail  $\mathcal{W}$  du robot est une boule fermée, de rayon  $\rho_0$  et centrée à l'origine de  $E^n$ , avec  $E^n$  un espace euclidien de dimension  $n$  :*

$$\mathcal{W} = \{q \in E^n : \|q\|^2 \leq \rho_0^2\}.$$

**Définition 7.2.** *Un obstacle sphérique  $\mathcal{O}_j$ , centré en  $q_j$  et de rayon  $\rho_j$  est défini comme :*

$$\mathcal{O}_j = \{q \in E^n : \|q - q_j\|^2 < \rho_j^2\}.$$

**Définition 7.3.** *Pour un espace de travail contenant  $m$  obstacles sphériques, l'espace libre  $\mathcal{F}$ , i.e. l'espace dans lequel le mobile peut naviguer, est alors donné par :*

$$\mathcal{F} = \mathcal{W} - \bigcup_{j=1}^m \mathcal{O}_j.$$

La frontière de l'espace libre s'écrit :

$$\partial\mathcal{F} = \partial\mathcal{W} \cup \bigcup_{j=1}^m \partial\mathcal{O}_j.$$

Enfin, on note  $q_d$  la destination du mobile.

**Définition 7.4.** *Un espace de travail valide pour la construction d'une fonction de navigation est un espace pour lequel :*

- la destination  $q_d$  est à l'intérieur de  $\mathcal{F}$ ,
- tous les obstacles  $\mathcal{O}_j$ ,  $j = [1, m]$  sont à l'intérieur de  $\mathcal{W}$ ,
- les obstacles ne s'intersectent pas :  $\forall i \in [1, m], \forall j \in [1, m], j \neq i, \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \emptyset$ .

Les propriétés des fonctions de navigation reposent essentiellement sur le fait qu'elles sont des fonctions de Morse.

## 2.2 Fonction de Morse

Nous ne présentons ici qu'une petite partie de la théorie des fonctions de Morse, développée par John Milnor [Milnor 1963].

**Définition 7.5.** Soit  $\mathcal{W}_n$  une variété lisse de dimension  $n$  et  $f : \mathcal{W}_n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse. Un point  $q \in \mathcal{W}_n$  est un **point critique** de  $f$  si son gradient s'annule en  $q$  ( $\nabla f(q) = 0$ ).

**Définition 7.6.** Un point critique  $q$  de  $f$  est dit **non-dégénéré** si le déterminant de la hessienne de  $f$  en  $q$  (notée  $Hess(f(q))$ ) est non nul.

**Définition 7.7.**  $(\mathcal{W}_n; V_0, V_1)$  est un **triplet de variété lisse** si  $\mathcal{W}_n$  est une variété compacte lisse de dimension  $n$  et le bord de  $\mathcal{W}_n$  (noté  $\partial\mathcal{W}_n$ ) est l'union disjointe de deux sous-variétés ouvertes et fermées  $V_0$  et  $V_1$ .

Il découle de cette définition que  $(\mathcal{F}; \partial\mathcal{F}, q_d)$  forme un triplet de variété lisse.

**Définition 7.8.** Soit  $f$  une fonction  $\mathcal{W}_n \rightarrow [a, b]$  lisse sur un triplet de variété lisse.  $f$  est une **fonction de Morse** si :

1.  $f^{-1}(a) = V_0, \quad f^{-1}(b) = V_1,$
2. tous les points critiques de  $f$  appartiennent à  $\mathcal{W}_n - \partial\mathcal{W}_n$  et sont non-dégénérés.

**Théorème 7.1.** Chaque triplet de variété lisse  $(\mathcal{W}_n; V_0, V_1)$  possède une fonction de Morse.

*Démonstration.* La démonstration de ce théorème peut être trouvée dans [Milnor 1963]. □

Puisque  $(\mathcal{F}; \partial\mathcal{F}, q_d)$  forme un triplet de variété lisse, une fonction de Morse peut toujours être définie sur  $\mathcal{F}$  d'après le Théorème 7.1.

## 2.3 Fonction de Navigation

En plus de la définition d'une fonction de Morse, la définition d'une fonction de navigation fait appel à trois autres notions [Rimon 1988].

**Définition 7.9.** Une fonction est dite **analytique** sur un ouvert connexe si elle y est égale à son développement en série entière.

**Définition 7.10.** Une fonction est dite **polaire** sur  $\mathcal{F}$  en  $q_d$  lorsqu'elle admet un seul minimum sur  $\mathcal{F}$  en  $q_d$ .

**Définition 7.11.** Une fonction  $f$  est dite **admissible** sur  $\mathcal{F}$  si elle est uniformément maximale sur les frontières de  $\mathcal{F}$ , i.e. :

$$f(q) = \begin{cases} = c & \text{pour } q \in \partial\mathcal{F} \\ < c & \text{pour } q \in \mathcal{F} - \partial\mathcal{F} \end{cases},$$

avec  $c$  une constante.

### Définition d'une Fonction de Navigation

**Définition 7.12.** Une application  $\phi : E^n \rightarrow [0, 1]$  est une **fonction de navigation** sur un espace lisse, connexe et compact  $\mathcal{F} \in E^n$  si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. elle est analytique sur l'intérieur de  $\mathcal{F}$  et prolongeable aux bords,
2. elle est polaire en  $q_d \in \mathcal{F}$ ,
3. elle est admissible sur  $\mathcal{F}$ ,
4. elle est Morse sur  $\mathcal{F}$ .

On retrouve dans la définition d'une fonction de navigation les mêmes conditions que pour la construction de champs de potentiel à partir d'EDP : la fonction potentielle doit prendre sa valeur minimale à la destination et sa valeur maximale sur les frontières du domaine.

C'est le caractère Morse d'une fonction de navigation qui permet d'obtenir des propriétés intéressantes, telles que l'existence d'une fonction de navigation pour tout espace de travail valide.

### Propriétés d'une Fonction de Navigation

La première propriété intéressante des fonctions de navigation est l'**existence d'une fonction de navigation** pour tout espace de travail valide.

**Théorème 7.2.** Pour tout espace  $\mathcal{W}$  connexe, compact et régulier et pour tout point intérieur  $q_d \in \mathcal{W}$ , il existe une fonction de navigation régulière avec un unique minimum en  $q_d$ .

*Démonstration.* Le Théorème 7.1 garantit l'existence d'une fonction de Morse sur  $\mathcal{F}$ . Il reste donc à montrer que cette fonction vérifie les propriétés 1. à 3. de la Définition 7.12 afin de prouver qu'elle est une fonction de navigation. La démonstration complète de ce théorème peut être trouvée dans l'article [Koditschek 1990].  $\square$

Le caractère Morse de la fonction de navigation permet non seulement de garantir son existence pour n'importe quel espace de travail valide, mais le gradient d'une fonction Morse possède également les propriétés suivantes :

**Théorème 7.3.** Soit  $f$  une fonction de Morse définie sur un ensemble compact  $\mathcal{F}$ . On suppose que le gradient de  $f$  est dirigé vers l'extérieur de  $\mathcal{F}$  sur ses frontières. Alors  $-\nabla f$  possède les propriétés suivantes :

1. toute trajectoire originaire de  $\mathcal{F}$  reste dans  $\mathcal{F}$ ,
2. toute trajectoire approche un extremum de  $f$  de manière stable,
3. il existe un sous-espace dense de  $\mathcal{F}$  à partir duquel toutes les trajectoires tendent asymptotiquement vers les minima locaux de  $f$ .

*Démonstration.* Une démonstration complète de ce théorème est proposée dans [Koditschek 1990].  $\square$

Ainsi il est garanti qu'une trajectoire obtenue à partir d'une fonction de navigation  $\phi$  restera dans l'espace libre  $\mathcal{F}$  (Théorème 7.3, propriété 1.). De plus la **convergence vers la destination** est donnée par le Théorème 7.3, propriété 3. et la polarité de  $\phi$  ( $q_d$  est l'unique minimum de  $\phi$  sur  $\mathcal{F}$ ). Enfin toute trajectoire atteignant la destination y restera (Théorème 7.3, propriété 2.).



L'utilisation de  $-\nabla\phi$  pour la navigation **garantit l'évitement d'obstacle** puisque  $\phi$  est uniformément maximale sur  $\partial\mathcal{F}$ .

La **vitesse constante** que nous cherchons à imposer peut être obtenue en utilisant le gradient normé pour la navigation du mobile :

$$\dot{q} = -\nabla\phi / \|\nabla\phi\|.$$

**Remarque :** Dans toute cette section, les fonctions de navigation n'ont été définies que sur des espaces sphériques. Elles peuvent cependant être transformées par difféomorphisme tout en conservant les propriétés citées plus haut, et ainsi évoluer dans des espaces géométriquement plus complexes (voir [Koditschek 1990]). Dans la suite, nous continuons à travailler sur des espaces sphériques, puisqu'ils suffisent pour décrire le problème de planification de trajectoires d'avions que nous souhaitons étudier.

### 3 Fonction de Navigation de Rimon et Koditschek

La fonction de navigation proposée dans [Rimon 1988] est construite sur un espace sphérique. Elle permet de calculer la trajectoire pour un mobile représenté par un point et cherchant à rejoindre sa destination tout en évitant des obstacles fixes. Elle est construite comme la composition de plusieurs fonctions :

**Définition 7.13.** *La fonction distance à la destination est définie par :*

$$\gamma(q) = \|q - q_d\|^2. \quad (7.1)$$

Cette fonction distance au but ne s'annule qu'en  $q_d$ , la destination.

**Définition 7.14.** *La fonction obstacle doit permettre de représenter la frontière de l'espace de travail, ainsi que la frontière des obstacles à l'intérieur du domaine. Elle est construite comme :*

$$\beta(q) = \prod_{j=0}^m \beta_j(q), \quad (7.2)$$

avec :

$$\begin{aligned} \beta_0(q) &= \rho_0^2 - \|q\|^2, \\ \beta_j(q) &= \|q - q_{O_j}\|^2 - \rho_j^2, \quad 1 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

(7.1) et (7.2) permettent de construire une fonction  $\hat{\phi} : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$  :

$$\hat{\phi}(q) = \frac{\gamma^k(q)}{\beta(q)}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (7.3)$$

La fonction  $\hat{\phi} : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$  prend sa valeur minimum 0 lorsque  $q = q_d$ , i.e. que le robot est arrivé à destination et la valeur  $+\infty$  lorsque le robot atteint la frontière de l'espace de travail ou la frontière d'un obstacle.  $\hat{\phi}$  est analytique, polaire et Morse presque partout. Afin de la rendre admissible, elle doit être ramenée dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

**Définition 7.15.** On note  $\sigma$  la **fonction de conditionnement** :

$$\sigma(x) = \frac{x}{1+x}, \quad x \in \overline{\mathbb{R}^+}. \quad (7.4)$$

La composition de (7.3) et (7.4) donne une fonction analytique, polaire, admissible et Morse presque partout, sauf à la destination  $q_d$ . Ce problème est réglé par la fonction  $\sigma_d : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  qui transforme la destination en un point critique non-dégénéré :

$$\sigma_d(x) = x^{\frac{1}{k}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Théorème 7.4.** Si l'espace de travail est valide au sens de la Définition 7.4, alors il existe un  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $k > N$  :

$$\phi_R(q) = \sigma_d \circ \sigma \circ \hat{\phi}(q) = \frac{\gamma(q)}{(\gamma^k(q) + \beta(q))^{\frac{1}{k}}}$$

est une **fonction de navigation** sur  $\mathcal{F}$ .

*Démonstration.* La preuve complète du Théorème 7.4 peut être trouvée dans [Rimon 1988] et, de manière plus détaillée, dans [Koditschek 1990]. Nous nous contentons ici d'en citer les grandes lignes. Supposons tout au long de cette démonstration que la fonction de navigation est construite sur un espace de travail valide. Rimon et Koditschek montrent alors que :

1. la destination  $q_d$  est un minimum local non-dégénéré de  $\phi_R$  en calculant  $\nabla\phi_R(q_d)$  et  $Hess(\phi_R(q_d))$  ;
2. tous les points critiques de  $\phi_R$  sont à l'intérieur de l'espace libre ;
3. l'intérieur de  $\mathcal{F}$  ne contient aucun autre minimum que la destination  $q_d$ , garantissant ainsi la polarité de  $\phi_R$  ;
4. tous les points critiques à l'intérieur de  $\mathcal{F}$  sont non-dégénérés, assurant ainsi que  $\phi_R$  est Morse.

□

**Remarque :** Les points 3. et 4. de la preuve du Théorème 7.4 dépendent du paramètre  $k$  choisi pour la construction de la fonction de navigation  $\phi_R$ . Ainsi, si le paramètre  $k$  est mal choisi,  $\phi_R$  peut :

- présenter des minima locaux à l'intérieur de  $\mathcal{F}$  (voir Figure 7.1) ; on retrouve alors le problème des minima locaux détecté pour les champs de potentiel ;
- posséder des points critiques dégénérés à l'intérieur de  $\mathcal{F}$ .

En un point critique dégénéré, le mobile ne possède plus aucune indication sur la direction à suivre pour rejoindre la destination. En effet, le mobile suit normalement le gradient de  $\phi_R$  pour naviguer dans l'espace libre. Lorsque le mobile atteint un point critique,  $\nabla\phi_R = 0$ . Le gradient ne peut donc plus servir à la navigation. Mais si le point critique n'est pas dégénéré, alors  $Hess(\phi_R)$  possède des valeurs propres non nulles. Il est donc possible de calculer les vecteurs propres de  $Hess(\phi_R)$  que le mobile peut suivre afin de quitter le point critique. En revanche, si le point critique est dégénéré, alors il n'est pas possible de construire ces vecteurs propres et plus aucune indication de navigation ne peut être fournie au mobile.

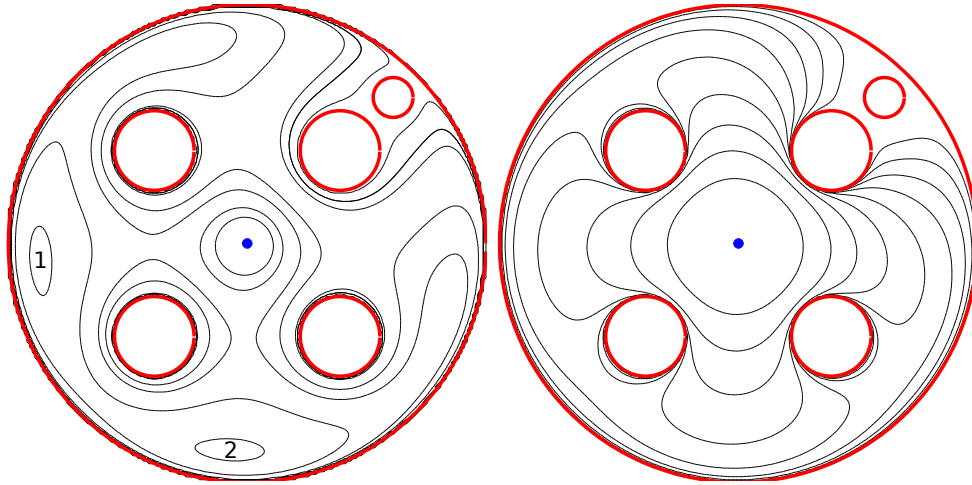


FIGURE 7.1 – Fonction de navigation de Rimon et Koditschek calculée pour  $k = 1$  (à gauche) et  $k = 5$  (à droite). Des minima locaux apparaissent à l’intérieur de l’espace libre pour  $k = 1$  (zones 1 et 2). Cercles rouges=Frontières de l’espace libre. Point bleu=Destination.

Ainsi la preuve de la convergence de  $\phi_R$  vers sa destination dépend entièrement du paramètre  $k$  choisi. Rimon et Koditschek donnent une borne inférieure pour  $k$  dans [Koditschek 1990] afin de garantir la preuve du Théorème 7.4. Filippidis et Kyriakopoulos ont ensuite développé un algorithme pour ajuster  $k$  [Filippidis 2011], obtenant de meilleurs résultats de convergence qu’avec les coefficients choisis empiriquement. Aucune étude n’a néanmoins été menée pour déterminer l’influence de ce paramètre  $k$  sur la forme des trajectoires obtenues à partir de la fonction de navigation  $\phi_R$ .

La fonction de navigation proposée par Rimon et Koditschek ne permet de planifier qu’une trajectoire pour un mobile dans un espace sphérique. En construisant cette fonction de navigation sur un espace de configuration, il est possible de l’utiliser pour planifier de manière coordonnée les trajectoires de plusieurs mobiles.

## 4 Espaces de Configuration pour des Disques

Considérons  $n$  mobiles naviguant dans un espace sans obstacles. On note  $q_i = (x_i, y_i)$  (respectivement  $q_i = (x_i, y_i, z_i)$ ) la position du mobile  $i$  dans  $\mathbb{R}^2$  (respectivement  $\mathbb{R}^3$ ). Chaque mobile est représenté par une sphère de rayon  $\rho_i$  centrée en  $q_i$ . Deux mobiles,  $i$  et  $j$  entrent alors en collision si :  $\|q_i - q_j\|^2 - (r_i + r_j)^2 \leq 0$ . On note  $D_K$  l’ensemble des points de  $\mathbb{R}^{2n}$  (ou  $\mathbb{R}^{3n}$ ) où au moins deux mobiles entrent en collision :

$$D_K = \{(q_1, \dots, q_n), \exists i \neq j, \|q_i - q_j\|^2 - (r_i + r_j)^2 \leq 0\}.$$

L’espace de configuration dans lequel on cherche à construire les trajectoires des mobiles est alors donné par :

$$\mathcal{E}_K = \mathbb{R}^{2n} - D_K \text{ (ou } \mathcal{E}_K = \mathbb{R}^{3n} - D_K).$$

N’importe quelle trajectoire construite dans  $\mathcal{E}_K$  garantira l’évitement de collision entre les mobiles.

## 5 Fonction de Navigation de Kyriakopoulos *et al.*

Les travaux de Rimon et Koditschek ont été étendus par Loizou et Kyriakopoulos pour la navigation de plusieurs mobiles avec évitement de collision. Au lieu d'être effectuée sur l'espace libre de chaque mobile, la construction de la fonction de navigation est faite sur l'espace de configuration  $\mathcal{E}_K$ . La première extension proposée par Loizou et Kyriakopoulos consiste en une planification centralisée des trajectoires de plusieurs mobiles : une seule fonction de navigation contrôle le mouvement de tous les mobiles [Loizou 2002].

### 5.1 Forme Centralisée

Pour la planification de trajectoires de  $n$  mobiles, on note  $p = (q_1, \dots, q_n)$  la position des  $n$  mobiles dans  $\mathbb{R}^{2n}$  (ou  $\mathbb{R}^{3n}$ ) et  $p_d = (q_{d_1}, \dots, q_{d_n})$  la destination dans l'espace de configuration. La fonction de navigation de Kyriakopoulos *et al.* est construite de la même façon que la fonction de navigation de Rimon et Koditschek, mais avec une fonction obstacle différente.

#### Fonction Obstacle

La fonction obstacle  $G$  proposée par Loizou et Kyriakopoulos ne se contente pas d'interdire les collisions entre deux mobiles, mais tient compte de tous les schémas de collision possibles entre tous les mobiles présents dans l'espace.

Les auteurs appellent *relation*, notée  $\mathcal{R}$ , un schéma de collision. Les *relations binaires* sont les collisions entre deux mobiles et l'*ensemble des relations binaires* d'une relation  $\mathcal{R}$  est noté  $B_{\mathcal{R}}$ . Le nombre de relations binaires dans une relation est appelé *niveau de relation*.

Pour une relation  $\mathcal{R}$ , une fonction mesurant la distance à la collision peut alors être calculée suivant :

$$b_{\mathcal{R}} = \sum_{(i,j) \in B_{\mathcal{R}}} \|q_i - q_j\|^2 - (r_i + r_j)^2.$$

En prenant  $\mathcal{R}_j^C$  l'ensemble des relations d'un même niveau privé de la relation  $\mathcal{R}_j$ , la *fonction de vérification de relation* peut être définie comme :

$$g_{\mathcal{R}_j} = b_{\mathcal{R}_j} + \frac{\lambda b_{\mathcal{R}_j}}{b_{\mathcal{R}_j} + \left( \prod_{k \in \mathcal{R}_j^C} b_{\mathcal{R}_k} \right)^{\frac{1}{h}}},$$

avec  $\lambda > 0$  et  $h > 0$ . Cette fonction de vérification de relation prend la valeur 0 lorsque la relation  $\mathcal{R}_j$  est vérifiée et qu'aucune autre relation incluant les mêmes mobiles n'est vérifiée. Elle permet donc de connaître le schéma de collision exact des mobiles.

En notant  $n_L$  le nombre de niveaux de relations possibles et  $n_{\mathcal{R},L}$  le nombre de relations de niveaux  $L \in [1, n_L]$ , on peut écrire la fonction d'obstacle  $G$  comme :

$$G = \prod_{L=1}^{n_L} \prod_{j=1}^{n_{\mathcal{R},L}} (g_{\mathcal{R}_j})_L.$$

### Fonction de Navigation

La fonction de navigation centralisée est ensuite donnée par :

$$\phi_K(p) = \frac{\gamma(p)}{(\gamma^k(p) + G)^{\frac{1}{k}}}. \quad (7.5)$$

Loizou et Kyriakopoulos vérifient les bonnes propriétés de cette fonction de navigation en suivant la même démarche que celle utilisée par Rimon et Koditschek [Loizou 2002].

### Application à la Résolution de Conflit en ATM

Kyriakopoulos *et al.* se sont penchés sur le problème de la résolution de conflit en ATM. Ils ne cherchent pas à planifier les trajectoires d'un grand nombre d'avions plusieurs heures à l'avance, mais à résoudre les conflits alors que les avions ont déjà décollé. Pour une résolution de conflit à horizon tactique, une approche décentralisée est plus adaptée qu'une approche centralisée. La suite des travaux de Kyriakopoulos *et al.* a donc consisté à construire une fonction de navigation décentralisée à partir de (7.5).

### 5.2 Fonction de Navigation Décentralisée pour l'ATM

La fonction de navigation décentralisée de Kyriakopoulos *et al.* apparaît pour la première fois dans [Dimarogonas 2003] et est à l'origine destinée à la navigation de mobiles. Elle n'a été adaptée pour la résolution de conflits aériens que plus tard dans [Roussos 2009]. Nous présentons ici les grandes lignes de la fonction de navigation décentralisée pour la résolution de conflits aériens. Tous les détails sur la construction de la fonction de navigation et les lois de contrôle associées peuvent être trouvés dans [Dimarogonas 2005] et [Roussos 2009].

Puisque la planification de trajectoire sans conflit se fait cette fois sous forme décentralisée, chaque avion possède sa propre fonction de navigation afin de calculer sa trajectoire. Pour un avion  $i$  représenté par une sphère centrée en  $q$  et volant dans un espace contenant  $n$  obstacles mobiles (les autres avions), la fonction de navigation décentralisée dipolaire est donnée par [Roussos 2009] :

$$\phi_i(q) = \frac{\gamma(q) + f_i(G_i)}{((\gamma(q) + f_i(G_i))^k + H_{nh_i}(q)G_i(q)\beta_{0_i}(q))^{\frac{1}{k}}}. \quad (7.6)$$

$G_i$  garantit l'évitement de conflit avec les obstacles mobiles. Elle est construite de la même façon que la fonction  $G$  de la forme centralisée, en ne tenant compte que des conflits dans lesquels l'avion  $i$  peut être impliqué.  $\gamma$  représente la distance de l'avion  $i$  à sa destination.  $f_i$  introduit une collaboration avec les autres avions. Cette fonction éloigne l'avion  $i$  de sa destination pour améliorer la convergence des autres avions vers leur destination.  $H_{nh_i}$  représente un obstacle fictif qui oblige l'avion à atteindre sa destination en suivant une certaine direction. Enfin  $\beta_{0_i}$  borne l'espace dans lequel l'avion a le droit de voler.

Comme pour la fonction de navigation de Rimon et Koditschek, la convergence de la fonction de navigation de Kyriakopoulos *et al.* dépend du coefficient  $k$ . A notre connaissance, aucun algorithme ne permet de choisir automatiquement le coefficient  $k$  afin de garantir la convergence de (7.6).

L'inconvénient majeur de la fonction de navigation (7.6) est qu'elle ne permet pas d'obtenir des trajectoires à vitesse constante. De récents travaux ont été menés à ce sujet et Kyriakopoulos *et al.* parviennent à imposer une borne inférieure à la vitesse des avions en modifiant les lois de commandes utilisées pour définir la trajectoire de l'avion à partir de la fonction de navigation [Maniatopoulos 2012]. Les auteurs montrent néanmoins qu'ils ne peuvent pas obtenir des trajectoires à vitesse constante sans perdre la preuve de convergence des avions vers leur destination.

## 6 Fonction de Navigation de Loizou

Lorsqu'il a construit sa nouvelle fonction de navigation [Loizou 2011a], le but de Loizou était de contourner le problème du paramétrage de  $k$  rencontré par la fonction de navigation de Kyriakopoulos *et al.*.

Pour un mobile navigant dans un domaine contenant  $m$  obstacles, il a construit une nouvelle fonction de navigation à partir de la fonction harmonique :

$$\Phi(q) = a_d \log(\|q - q_d\|) - \sum_{j=1}^m a_j \log(\|q - q_j\|), \quad (7.7)$$

avec  $a_d > 0$ ,  $a_j > 0$  et  $a_d = 1 + \sum_{j=1}^m a_j$ . Aucune étude de l'impact de ces coefficients  $a_d$  et  $a_j$  (sur la forme de trajectoires obtenues par exemple) n'est proposée dans [Loizou 2011a].

La fonction harmonique (7.7) tend vers  $-\infty$  lorsque le mobile s'approche de sa destination et vers  $+\infty$  lorsqu'il s'approche des obstacles. Et puisque la fonction est harmonique, elle ne possède aucun minimum local à l'intérieur de son domaine de définition. Elle possède donc des propriétés qui en font une bonne candidate pour la construction d'une fonction de navigation.

Mais Loizou explique dans son article qu'une fonction de navigation harmonique ne peut pas exister à cause du principe du maximum. Une fonction harmonique atteint en effet ses valeurs extrêmes sur les frontières de son domaine. Si le point de destination est considéré comme appartenant à l'intérieur du domaine de navigation, alors toute fonction de navigation harmonique devrait être constante. De plus, le domaine de (7.7) est non-borné, alors qu'en pratique les robots opèrent généralement dans des espaces bornés. Pour ces deux raisons, Loizou a créé une nouvelle fonction de navigation basée sur (7.7) en utilisant ce qu'il appelle une *transformation de navigation* [Loizou 2011b], en plus d'autres transformations.

La fonction harmonique (7.7) ne peut effectivement pas être considérée comme une fonction de navigation au sens de la Définition 7.12. Nous pensons néanmoins que les bonnes propriétés des fonctions de navigation, garanties pour toute fonction vérifiant la Définition 7.12, peuvent être obtenues et garanties par d'autres moyens pour (7.7).

## 7 Conclusion sur les Fonctions de Navigation

Les travaux réalisés par Kyriakopoulos *et al.* montrent que les fonctions de navigation sont des outils très adaptés à la planification de trajectoires pour un grand nombre de mobiles. Elles sont rapides à calculer et peuvent être construites de manière à éviter le problème des minima locaux qui peut apparaître dans la méthode des champs de potentiel.

La fonction de navigation de Kyriakopoulos *et al.* présente néanmoins deux inconvénients majeurs : le paramétrage d'une constante  $k$  et l'impossibilité de produire des trajectoires à vitesse constante tout en garantissant l'arrivée des avions à destination.

Le problème du paramétrage de  $k$  a été attaqué et résolu sous deux angles différents. Kyriakopoulos *et al.* ont développé un algorithme permettant d'ajuster  $k$  automatiquement. De son côté, Loizou a cherché à construire une nouvelle fonction de navigation, en se basant sur des fonctions harmoniques. Si la convergence de cette nouvelle fonction de navigation est garantie, elle dépend néanmoins de constantes dont l'impact sur la forme des trajectoires n'a pas été développé.

L'impossibilité de produire des trajectoires à vitesse constante avec la fonction de navigation de Kyriakopoulos *et al.* montre qu'il est nécessaire de chercher à créer de nouvelles fonctions de navigation. Or presque tous les travaux réalisés sur le sujet ont consisté à adapter la fonction de navigation de Kyriakopoulos *et al.*, ainsi que les lois de contrôle associées pour des applications diverses. Loizou a été le seul à chercher à construire une nouvelle fonction de navigation et celle qu'il a développée ne permet la navigation que d'un seul mobile.

Au vu des résultats obtenus pour la planification de trajectoires coordonnées à l'aide de fonctions harmoniques (voir Chapitre 6, Section 3.3), nous pensons que les fonctions harmoniques sont une solution viable pour la planification de plusieurs trajectoires. Les fonctions de navigation offrent quant à elles un cadre permettant de résoudre le problème du temps de calcul des trajectoires rencontré lors de la construction de champs de navigation harmoniques à partir d'EDP.

L'objectif du prochain chapitre consiste donc à exploiter au mieux les forces des champs de potentiel harmoniques et des fonctions de navigation afin de construire une fonction de navigation centralisée harmonique, qui permet de calculer des trajectoires à vitesse constante pour un grand nombre d'avions.





# Chapitre 8

## Fonction de Navigation Harmonique

Nous présentons ici une nouvelle fonction de navigation : la *fonction de navigation harmonique* pour la planification centralisée d'un grand nombre de trajectoires d'avions. Nous reprenons les hypothèses et objectifs formulés dans le Chapitre 2, Section 2.

Notre objectif en créant cette fonction de navigation harmonique est de planifier des trajectoires offrant des garanties théoriques sur les points suivants :

- arrivée de l'avion à sa destination,
- trajectoires sans conflit,
- trajectoires à vitesse constante,
- virages compatibles avec les capacités des avions,
- temps de calcul compatible avec une planification stratégique.

### 1 Fonction de Navigation Harmonique : Définition et Résultats

Nous supposons que les avions volent à niveau de vol constant, ils évoluent donc dans un espace 2D. Notre but étant de planifier leur trajectoire de manière centralisée, nous considérons tous les avions présents à un niveau de vol donné lors du calcul des trajectoires : une fonction de navigation harmonique est utilisée pour la planification sur chaque niveau de vol.

Chacune de ces fonctions de navigation harmoniques est construite sur un espace de configuration, qui permet de représenter les positions des  $n$  avions présents sur le niveau de vol considéré. Nous notons :

- $X_i = (x_i, y_i)$  la position de l'avion  $i$  ;
- $X_{d_i} = (x_{d_i}, y_{d_i})$  la destination de l'avion  $i$  ;
- $X = (X_1, \dots, X_n)$  la position de tous les avions dans  $\mathbb{R}^{2n}$  ;
- $X_d = (X_{d_1}, \dots, X_{d_n})$  les destinations de tous les avions dans  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Soit  $D_H$  l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^{2n}$  où au moins deux avions entrent en collision :

$$D_H = \{(X_1, \dots, X_n), \exists i \neq j, \|X_i - X_j\| = 0\}.$$

L'espace de configuration dans lequel on cherche à construire les trajectoires des avions est alors donné par :

$$\mathcal{E}_H = \mathbb{R}^{2n} - D_H.$$

**Évitement de Collision et Évitement de Conflit :** L'espace de configuration  $\mathcal{E}_H$  ne permet d'interdire que les collisions entre avions et non les conflits. Nous avons choisi de travailler d'abord avec  $\mathcal{E}_H$  pour des raisons de simplicité. Une discussion plus détaillée autour de l'évitement de collision et de conflit est proposée dans la prochaine section.

### 1.1 Définition de la Fonction de Navigation Harmonique

Notons  $X^*$  l'ensemble des points où au moins un avion a atteint sa destination :

$$X^* = \{X \in \mathcal{E}_H, \exists i \in \{1, \dots, n\}, X_i = X_{d_i}\}.$$

Nous cherchons à construire une fonction harmonique sur  $\mathcal{E}_H$  qui soit maximale sur  $D_H$  et minimale sur  $X^*$ . Loizou avait soulevé l'impossibilité de la construction d'une telle fonction dans [Loizou 2011a].

Selon le principe du maximum, une fonction harmonique atteint ses extremums sur les frontières de son domaine de définition. Toute fonction harmonique possédant un minimum (ou un maximum) à l'intérieur de son domaine de définition est forcément constante. Il est donc effectivement impossible de construire une fonction harmonique qui est minimale sur  $X^*$  si  $X^*$  est inclus dans l'intérieur du domaine libre. Mais en considérant les destinations des avions comme des points situés sur la frontière de l'espace libre, la construction d'une fonction harmonique sur cet espace devient possible.

L'espace libre (i.e. les positions autorisées pour les avions) est donc donné par :

$$\mathcal{F}_H = \mathcal{E}_H - X^*.$$

La fonction de navigation harmonique est alors construite sur  $\mathcal{F}_H$  comme une superposition de champs harmoniques attractifs et de champs harmoniques répulsifs :

$$\phi_H(X) = \underbrace{\sum_{i=1}^n a_i \log(\|X_i - X_{d_i}\|^2)}_{\text{attraction aux destinations}} - \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n b_{ij} \log(\|X_i - X_j\|^2)}_{\text{évitement de collision}}, \quad (8.1)$$

avec  $a_i > 0$  et  $b_{ij} > 0$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$  et  $\forall j \in \{i+1, \dots, n\}$ .

Comme pour n'importe quelle fonction de navigation, les trajectoires des avions peuvent être obtenues en suivant le système dynamique :  $\dot{X} = -\nabla\phi_H$ . Mais pour obtenir des trajectoires à vitesse constante, il nous faut normer ce champ de navigation avion par avion :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} v_1 \times \frac{-\nabla_1\phi_H(X)}{\|\nabla_1\phi_H(X)\|} \\ \dots \\ v_n \times \frac{-\nabla_n\phi_H(X)}{\|\nabla_n\phi_H(X)\|} \end{bmatrix}, \quad (8.2)$$

avec  $v_i > 0$  la vitesse (constante) de l'avion  $i$  et :

$$\nabla_i \phi_H(X) = \left[ \frac{\partial \phi_H(X)}{\partial x_i} \quad \frac{\partial \phi_H(X)}{\partial y_i} \right]^T.$$

La **complexité** du calcul de trajectoires en utilisant la fonction de navigation harmonique est alors  $\mathcal{O}(n^2)$  avec  $n$  le nombre d'avions sur un niveau de vol donné.

### $\phi_H$ est elle une fonction de navigation ?

La fonction  $\phi_H$  n'est pas bornée. Elle tend vers  $+\infty$  lorsque deux avions s'approchent de la collision et vers  $-\infty$  lorsqu'un avion se rapproche de sa destination. Puisque  $\phi_H$  n'est pas bornée, **elle ne peut pas être considérée comme une fonction de navigation** au sens de la Définition 7.12 donnée dans le Chapitre 7. Nous montrons néanmoins dans la suite que la fonction  $\phi_H$  offre les mêmes garanties que les fonctions de navigation, même si elle n'en respecte pas strictement la définition.

### Importance de l'harmonicité de $\phi_H$

Puisque  $\phi_H$  n'est pas vraiment une fonction de navigation, il nous faut prouver les mêmes points que ceux garantis par les fonctions de navigation, à savoir :

- attraction des avions vers leur destination,
- évitement d'obstacles (de collision ou de conflit).

L'évitement de collision est garanti par la forme même de  $\phi_H$ . En effet, la partie évitement de collision de (8.1) construit une barrière infranchissable sur  $D_H$ .

La preuve de convergence des avions vers leur destination repose entièrement sur l'harmonicité de  $\phi_H$ . Cette démonstration est détaillée dans la Section 1.2.

### Pourquoi utiliser $X^*$ et non $X_d$ comme destination ?

La fonction présentée (8.1) tend vers  $-\infty$  dès qu'un avion se rapproche de sa destination. Pour obtenir un seul point de destination  $X_d$  dans l'espace de configuration, il aurait fallu utiliser la fonction allant à  $-\infty$  lorsque tous les avions se rapprochent de leur destination :

$$f(X) = \log \left( \sum_{i=1}^n a_i \|X_i - X_d\|^2 \right).$$

Mais  $f(X)$  n'est pas harmonique. L'harmonicité de  $\phi_H$  jouant un rôle primordial dans la preuve de convergence des avions vers leur destination, il est impossible d'utiliser  $X_d$  comme destination.

### Coefficients $a_i$ et $b_{ij}$

**Attraction à la Destination :** Pour assurer l'attraction des avions vers leur point de destination, il faut garantir que  $\phi_H$  tende bien vers  $+\infty$  lorsque les avions s'éloignent de  $X^*$ . Pour cela il suffit de choisir les  $a_i$  et  $b_{ij}$  tels que :

$$\sum_{i=1}^n a_i > \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n b_{ij}. \quad (8.3)$$

Cette condition correspond à celle que Loizou a imposée sur les coefficients de sa fonction harmonique dans [Loizou 2011a]. Il est important de noter que la convergence du système ne garantit pas que tous les avions convergeront vers leur destination dès le début. Dans certains cas, le système (8.2) peut être amené à éloigner temporairement un avion de sa destination pour permettre à d'autres avions de rejoindre la leur.

**Forme des Trajectoires :** Les coefficients  $a_i$  et  $b_{ij}$  permettent de contrôler les formes des trajectoires obtenues. Le coefficient  $a_i$  contrôle l'attraction de l'avion  $i$  à sa destination. Avec un  $a_i$  trop faible, l'avion  $i$  peut faire un détour avant de se diriger vers sa destination. Plus  $a_i$  augmente et plus l'avion  $i$  cherche à suivre la ligne droite, quitte à passer très près d'autres avions.

Il faut également noter que l'**attraction** exercée sur un avion par sa destination est **inversement proportionnelle à la distance de l'avion à sa destination**. Ainsi, plus un avion sera proche de sa destination, moins sa trajectoire sera déviée et ce quelque soit la valeur de  $a_i$ .

Le coefficient  $b_{ij}$  contrôle la force de répulsion exercée par l'avion  $i$  sur l'avion  $j$  et vice-versa. Pour éloigner les avions  $i$  et  $j$  il suffit donc d'augmenter la valeur de  $b_{ij}$ . À l'inverse, si deux avions passent très au-delà de la distance de sécurité de 5NM, réduire la valeur de  $b_{ij}$  les autorisera à se rapprocher.

La forme des trajectoires dépend donc presque entièrement des valeurs assignées aux  $a_i$  et aux  $b_{ij}$ . Ces coefficients peuvent devenir des **variables de décision afin d'optimiser la forme des trajectoires**, comme discuté dans la Section 4.2 de ce chapitre.

### Évitement de Collision et Évitement de Conflit

La fonction de navigation harmonique est construite comme une superposition de fonctions harmoniques analytiques, comme cela avait déjà été proposé pour un robot dans [Connolly 1990]. Les auteurs avaient néanmoins abandonné cette méthode parce qu'elle ne permettait de représenter les obstacles que sous la forme de points. Ils cherchaient alors à faire naviguer un robot dans un environnement complexe (succession de corridors). Une représentation des obstacles sous forme de points ne leur permettait pas de définir les murs que le robot était censé éviter.

Cette représentation des obstacles sous forme de points permet à la fonction de navigation harmonique (8.1) d'interdire les collisions entre avions en créant une barrière impénétrable sur  $D_H$ . Pour garantir l'évitement de conflit, i.e. pour garder les avions à une distance minimale de

5NM les uns des autres, il faudrait utiliser une fonction obstacle de la forme :

$$-\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n b_{ij} \log(\|X_i - X_j\|^2 - r^2), \quad (8.4)$$

avec  $r = 5\text{NM}$ . (8.4) n'est malheureusement pas harmonique et comme nous l'avons déjà précisé, l'harmonicité de  $\phi_H$  est essentielle pour la preuve de convergence formulée plus loin. Une étude plus poussée montrant qu'il est impossible de construire une fonction harmonique permettant de garantir l'évitement de conflit est présentée dans la Section 3.2.

**L'évitement de conflit peut néanmoins être obtenu en optimisant les trajectoires à travers les coefficients  $a_i$  et  $b_{ij}$  sous la contrainte d'évitement de conflit.**

## 1.2 Preuve de l'Arrivée des Avions à leur Destination

Nous devons prouver deux points pour garantir l'arrivée des avions à leur destination. Le premier est qu'en n'importe quel point de l'espace libre  $\mathcal{F}_h$ , il est possible de suivre des valeurs décroissantes de  $\phi_H$  (i.e. il existe une direction de descente). Ce point peut être démontré par l'étude des points critiques de  $\phi_H$ . Le second point consiste à montrer qu'en suivant (8.2), le système converge bien vers un point de  $X^*$ , autrement dit que  $X^*$  sont des minima localement asymptotiquement stables pour  $\phi_H$ . Ce deuxième point peut être démontré en utilisant la théorie de la stabilité de Lyapunov.

### Existence d'une Direction de Descente

Les seuls points de  $\mathcal{F}_h$  pour lesquels (8.2) ne permet pas d'obtenir une direction de descente pour  $\phi_H$  sont les points critiques de  $\phi_H$ , i.e. les points  $X_c$  pour lesquels :

$$\nabla\phi_H(X_c) = 0.$$

Dans ce cas, une direction de descente pour  $\phi_H$  peut être obtenue en suivant un vecteur propre associé à une valeur propre négative de la matrice hessienne de  $\phi_H$  :

$$Hess(\phi_H) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial x_1 \partial y_1} & \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial x_1 \partial y_n} \\ \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial y_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial y_1^2} & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial x_2 \partial x_1} & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial y_n \partial x_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial x_n \partial y_n} \end{bmatrix}. \quad (8.5)$$

Or, en notant  $Tr(Hess(\phi_H))$  la trace de  $Hess(\phi_H)$  :

$$Tr(Hess(\phi_H)) = \Delta\phi_H = 0,$$

puisque  $\phi_H$  est harmonique.

Donc  $Hess(\phi_H)$  est soit identiquement nulle, soit elle possède au moins deux valeurs propres de signes opposés (et donc une valeur propre négative qui fournit une direction de descente).

**Théorème 8.1.**  $Hess(\phi_H)$  n'est jamais identiquement nulle sur  $\mathcal{F}_H$ .

*Démonstration.* Pour que  $Hess(\phi_H) = 0$ , le système suivant doit être vérifié  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\forall j \neq i \in \{1, \dots, n\}$  et  $\forall b_{ij} > 0$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial x_i \partial x_j} = b_{ij} \frac{2 \|X_i - X_j\|^2 - 4(x_i - x_j)^2}{\|X_i - X_j\|^4} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial x_i \partial y_j} = -b_{ij} \frac{4(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{\|X_i - X_j\|^4} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial y_i \partial y_j} = b_{ij} \frac{2 \|X_i - X_j\|^2 - 4(y_i - y_j)^2}{\|X_i - X_j\|^4} = 0 \end{cases}.$$

Ce système équivaut au système suivant :

$$\begin{cases} (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \neq 0 \\ (x_i - x_j)^2 = (y_i - y_j)^2 \\ (x_i - x_j)(y_i - y_j) = 0 \\ \frac{2 \|X_i - X_j\|^2 - 4(y_i - y_j)^2}{\|X_i - X_j\|^4} = 0 \end{cases}$$

pour lequel il n'existe aucune solution. □

### Stabilité de Lyapunov

Le but de cette section est de montrer qu'en suivant (8.2), le système converge bien vers un point de destination, i.e. que  $X^*$  sont des minima localement asymptotiquement stables de  $\phi_H$ . Puisque (8.2) est un système dynamique, nous utilisons la théorie de la stabilité de Lyapunov [Khalil 2002], dont nous rappelons ici les principes de base :

**Définition 8.1.** Soit  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment dérivable définie sur un domaine  $D \subset \mathbb{R}^{2n}$  qui contient les points de destination  $X^*$  d'un système  $\Sigma$ . Si  $V(X^*) = 0$  et  $V(X) > 0$  dans  $D \setminus X^*$ , alors  $V$  est une **fonction de Lyapunov** pour le système  $\Sigma$ .

La dérivée de  $V$  le long des trajectoires du système  $\Sigma$ , notée  $\dot{V}(X)$ , est alors donnée par :

$$\dot{V}(X) = \nabla V(X) \cdot \dot{X},$$

où  $\cdot$  représente le produit scalaire.

**Théorème 8.2.** Si  $\dot{V}(X) \leq 0$  sur  $D$ , alors  $X^*$  est stable. De plus, si  $\dot{V}(X) < 0$  sur  $D \setminus X^*$ , alors  $X^*$  est localement asymptotiquement stable.

Kyriakopoulos *et al.* utilisent eux aussi la stabilité de Lyapunov afin de montrer que leur fonction de navigation dirige bien les avions vers leur destination. La fonction de navigation qu'ils ont construite est également la fonction de Lyapunov qui garantit la convergence de leur système [Dimarogonas 2003]. Mais dans notre cas :

$$\phi_H(X^*) \longrightarrow -\infty.$$

$\phi_H$  ne peut donc pas être utilisée comme fonction de Lyapunov.

En nous inspirant de la forme de la fonction de navigation de Kyriakopoulos *et al.*, nous proposons la fonction de Lyapunov suivante pour le système (8.2) :

$$V_{\phi_H}(X) = \frac{\prod_{j=1}^n \|X_j - X_{d_j}\|^{2a_j}}{\prod_{j=1}^n \|X_j - X_{d_j}\|^{2a_j} + \prod_{j=1}^n \prod_{h=j+1}^n \|X_j - X_h\|^{2b_{jh}}}. \quad (8.6)$$

Elle satisfait la Définition 8.1 puisque  $V_{\phi_H}(X^*) = 0$  et  $V_{\phi_H}(X) > 0$  pour  $X \in \mathcal{F}_H$ . La dérivée de cette fonction de Lyapunov le long de n'importe quelle trajectoire construite en utilisant (8.2) s'écrit :

$$\dot{V}_{\phi_H}(X) = -\nabla V_{\phi_H}(X) \cdot \begin{bmatrix} v_1 \times \frac{\nabla_1 \phi_H(X)}{\|\nabla_1 \phi_H(X)\|} \\ \dots \\ v_n \times \frac{\nabla_n \phi_H(X)}{\|\nabla_n \phi_H(X)\|} \end{bmatrix} = \frac{-2P_j P_{jh}}{(P_j + P_{jh})^2} \sum_{i=1}^n v_i \sqrt{S_{x_i}^2 + S_{y_i}^2},$$

avec :

$$\begin{aligned} P_j &= \prod_{j=1}^n \|X_j - X_{d_j}\|^{2a_j}; \\ P_{jh} &= \prod_{j=1}^n \prod_{h=j+1}^n \|X_j - X_h\|^{2b_{jh}}; \\ S_{x_i} &= \frac{a_i(x_i - x_{d_i})}{\|X_i - X_{d_i}\|^2} - \sum_{j \neq i} \frac{b_{ij}(x_i - x_j)}{\|X_i - X_j\|^2}; \\ S_{y_i} &= \frac{a_i(y_i - y_{d_i})}{\|X_i - X_{d_i}\|^2} - \sum_{j \neq i} \frac{b_{ij}(y_i - y_j)}{\|X_i - X_j\|^2}. \end{aligned}$$

Puisque  $\dot{V}_{\phi_H}(X) \leq 0$ , les points de destination  $X^*$  de (8.2) sont stables.

Pour que  $X^*$  soit constitué de points localement asymptotiquement stables, il faut que  $\forall X \in \mathcal{F}_H, \dot{V}_{\phi_H}(X) < 0$ . Les seuls points de  $\mathcal{F}_H$  pour lesquels  $\dot{V}_{\phi_H}(X) = 0$  sont les points critiques étudiés dans la Section 3.1. Ces points correspondent à des équilibres instables particuliers du système dynamique (8.2). En ces points, un équilibre se crée entre l'attraction exercée par les destinations et la force de répulsion générée par les autres avions. Il existe néanmoins toujours deux directions de descente possibles, mais de directions opposées. Ce problème de combinatoire peut être contourné par une légère perturbation de la situation initiale.

Pour illustrer une telle situation, nous présentons deux cas symétriques, un à deux avions Figure 8.1 et un à quatre avions Figure 8.2. Dans les deux cas, les avions restent bloqués dans un état d'équilibre instable. Une légère perturbation (décalage de  $\pm 0.001$  des points de départ) suffit à chaque fois à faire converger les avions vers leur destination.

Ces cas particuliers sont rares et à moins de choisir spécifiquement les points de départs et d'arrivées afin d'obtenir une situation symétrique, leur chance d'apparaître en situation réelle est négligeable.



FIGURE 8.1 – Deux avions, guidés de leur point de départ (D1,D2) à leur destination (A1,A2) par la fonction de navigation harmonique.

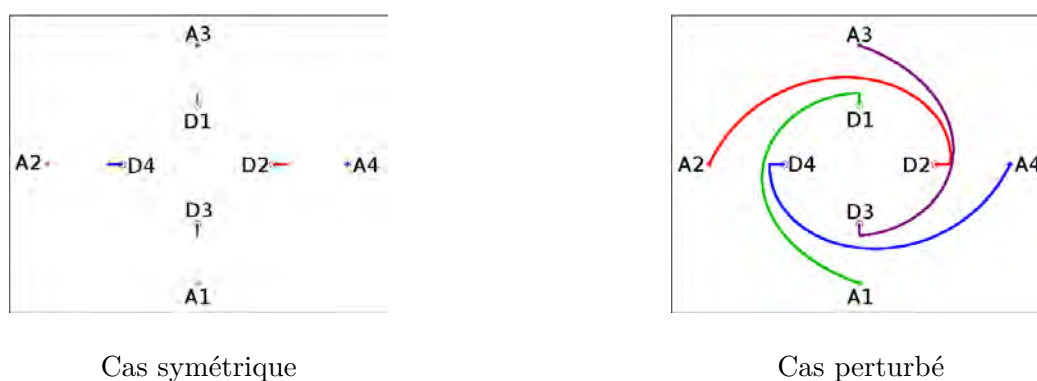


FIGURE 8.2 – Quatre avions, guidés de leur point de départ (D1,D4) à leur destination (A1,A4) par la fonction de navigation harmonique.

### 1.3 Résultats

Nous avons déjà vu dans la Section 1.2 des trajectoires obtenues avec la fonction de navigation harmonique. Mais les cas présentés, utilisés pour illustrer le problème que pouvaient poser des situations symétriques, ne sont en aucun cas représentatifs de situations réelles. Nous présentons ici des trajectoires calculées à partir de données extraites d'un trafic aérien réel.

Les points de départ et d'arrivée des avions sont soit des aéroports, soit des points d'entrée/sortie du secteur. Puisque nous considérons que les avions volent à niveau de vol constant, les avions ont déjà atteint leur niveau de vol de croisière dès qu'ils quittent l'aéroport de départ et arrivent lorsqu'ils arrivent à la verticale de l'aéroport d'arrivée. Nous prenons néanmoins les niveaux de vol en compte puisqu'une fonction de navigation harmonique est utilisée pour le calcul des trajectoires sur chaque niveau de vol.

Lorsque la simulation atteint l'heure de départ d'un avion, cet avion est ajouté à la fonction de navigation. Lorsqu'un avion atteint sa destination, il disparaît de la simulation (de la fonction de navigation) afin de libérer l'espace pour les autres avions.



Dans les deux cas présentés dans la suite, tous les  $a_i$  (respectivement  $b_{ij}$ ) de la fonction de navigation harmonique ont été choisis égaux et empiriquement afin d'éviter les conflits.

### Cas pour Trois Avions

Nous avons prouvé théoriquement que la fonction de navigation harmonique est capable de planifier le mouvement coordonné de plusieurs avions volant à des vitesses différentes. Les trajectoires présentées Figure 8.3 illustrent le comportement de la fonction de navigation harmonique lorsque la vitesse des avions joue un rôle important dans la possibilité de conflit. Les coefficients de  $\phi_H$  sont fixés à  $a_i = 3$  et  $b_{ij} = 1$ .

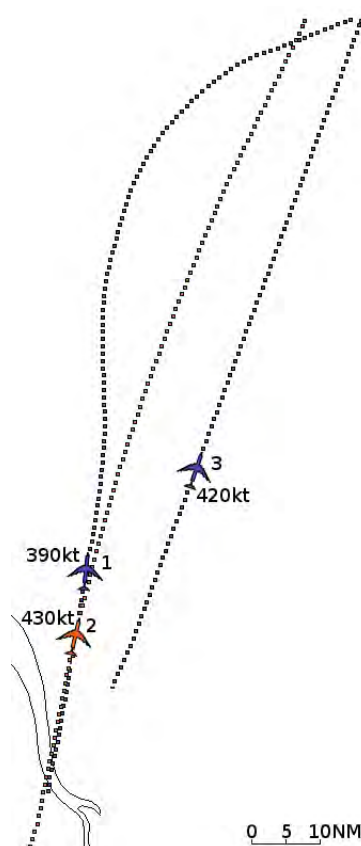


FIGURE 8.3 – Trois avions volant à des vitesses différentes (en nœuds) et leur trajectoire calculées sur un secteur français (Bordeaux, FL 310).

Deux avions (1 et 2) veulent suivre presque la même route au même moment. Si l'avion 2 avait été le premier à suivre cette route, il n'y aurait eu aucun problème puisqu'il est plus rapide que l'avion 1. Mais dans le cas présent, c'est l'avion 1, le plus lent, qui est arrivé en premier sur la route. La solution proposée par la fonction de navigation harmonique consiste à dévier l'avion 1 vers l'ouest afin de laisser passer l'avion 2, sans pour autant créer de nouveau conflit avec l'avion 3. La déviation de l'avion 1 est contrôlée essentiellement par le coefficient  $b_{12}$ . En réduisant ce coefficient, il est possible de réduire la déviation subie par l'avion 1. Mais si  $b_{12}$  est trop diminué, l'avion 1 pourrait ne pas dévier assez de sa route initiale et entrer en conflit avec l'avion 2.

Cas pour 18 Avions

Considérons maintenant le cas de 18 avions volant à des vitesses constantes, mais différentes présentées Table 8.1. Les coefficients de  $\phi_H$  sont fixés à  $a_i = 18$  et  $b_{ij} = 1$ .

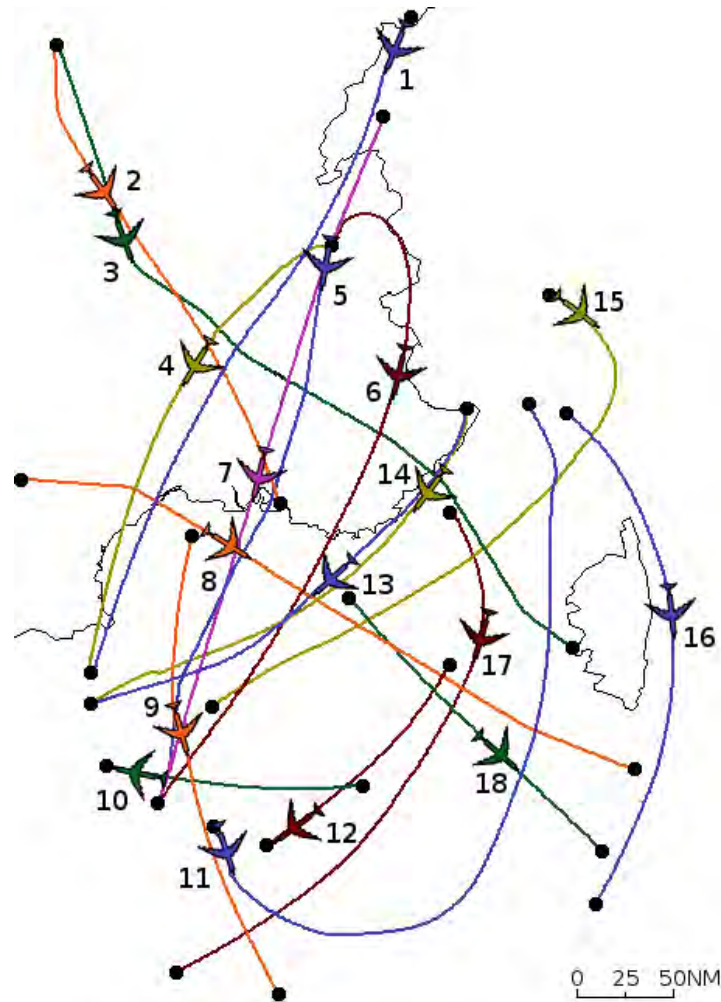


FIGURE 8.4 – 18 avions et leur trajectoire dans un secteur français (Aix-en-Provence, FL 350).

Numéro du Vol	Vitesse (kt)	Numéro du Vol	Vitesse (kt)	Numéro du Vol	Vitesse (kt)
1	460	7	450	13	450
2	460	8	460	14	420
3	410	9	440	15	420
4	400	10	460	16	480
5	410	11	460	17	460
6	450	12	450	18	450

TABLE 8.1 – Vitesse des avions pour la Figure 8.4.

Vu les résultats obtenus Figure 8.4, il semble évident que la fonction de navigation harmonique demande un paramétrage plus fin de ses coefficients. La trajectoire de l'avion 11 par exemple dévie beaucoup de la route directe, parce qu'il croise d'autres routes ou vole le long d'autres routes. En augmentant la valeur de  $a_{11}$  et en réduisant les coefficients  $b_{ij}$  associés à l'avion 11, il serait possible de proposer une trajectoire plus proche de la route directe à l'avion 11.

Un autre cas intéressant concerne les avions 13 et 14. Ils partagent le même point de départ et d'arrivée. Mais leurs trajectoires sont néanmoins légèrement différentes à cause de l'avion 7. En effet, les avions 7 et 13 volent à la même vitesse et s'ils avaient tous les deux suivi leur route directe, ils seraient entrés en conflit. Puisque l'avion 14 vole moins vite que les avions 7 et 13, il croise la route de l'avion 7 avec une marge suffisante pour éviter le conflit et n'a donc pas besoin de dévier de sa route.

Enfin prenons le cas de l'avion 6. Il commence à voler dans la direction opposée à sa destination, avant de faire demi-tour pour se diriger vers son point d'arrivée. Ce demi-tour induit un retard artificiel sur le départ de l'avion 6. Si cet avion était parti plus tard, il aurait donc pu prendre une route plus directe pour rejoindre sa destination.

## Temps de Calcul

La fonction de navigation harmonique a été implémentée en Java et exécutée sur un système Unix-64, sur un CPU Intel Core i5-2520M avec 2.5GHz et 8Go de RAM. Pour un échantillon de trafic réel de 10h au-dessus de la France, constitué de **2184 vols** répartis sur 14 niveaux de vol (14 fonctions de navigation harmonique ont été utilisées), le calcul des trajectoires a demandé **4872ms**. Ce temps de calcul est compatible non seulement avec un processus d'optimisation des coefficients de la fonction de navigation harmonique, mais également avec un processus de négociation entre les compagnies aériennes et le Network Manager.

## 2 Ajout de Zones Interdites dans l'Espace

Il n'est pas rare que certaines zones de l'espace aérien soient interdites à la navigation, pour réserver des zones d'entraînement militaires par exemple. Il est donc indispensable de pouvoir interdire des zones de l'espace aérien lors de la planification de trajectoires d'avions. Nous montrons ici comment modifier la fonction de navigation harmonique afin de tenir compte de ces zones interdites.

### 2.1 Nouvelle Formulation

La fonction de navigation harmonique peut être modifiée afin d'interdire le vol à travers certaines zones de l'espace. Ces zones ne peuvent être représentées que par des points ou l'harmonicité de la fonction de navigation serait perdue. Pour  $n$  avions naviguant dans un espace contenant  $m$  obstacles (points) fixes, la fonction de navigation harmonique peut être réécrite

comme :

$$\begin{aligned}
 \phi_{H_O}(X) = & \sum_{i=1}^n a_i \log(\|X_i - X_{d_i}\|^2) \\
 & - \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n b_{ij} \log(\|X_i - X_j\|^2) \\
 & - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} \log(\|X_i - X_{O_j}\|^2),
 \end{aligned} \tag{8.7}$$

avec  $c_{ij} > 0$  et  $X_{O_j} = (x_{O_j}, y_{O_j})$  la position de l'obstacle  $j$ . Un nouveau système dynamique peut alors être calculé en utilisant (8.7) et (8.2).

S'il est facile d'interdire certains points de l'espace, l'interdiction d'une zone complète est, elle, plus délicate. En effet, pour interdire une zone, il faut en définir le contour avec des points interdits. Les coefficients  $c_{ij}$  doivent alors être choisis avec soin pour assurer qu'aucun avion n'essaiera de passer entre deux points obstacles, mais aussi pour limiter les déviations imposées aux avions qui doivent contourner la zone interdite.

## 2.2 Nouvelle Fonction de Lyapunov

L'étude des points critiques, réalisée dans la Section 1.2, reste valable pour  $\phi_{H_O}$ . Afin de garantir l'arrivée des avions à destination, il ne reste donc plus qu'à trouver une nouvelle fonction de Lyapunov pour  $\phi_{H_O}$  qui permettra de prouver la convergence du système vers  $X^*$ .

Afin de tenir compte des obstacles fixes, la fonction de Lyapunov (8.6) est modifiée de la façon suivante :

$$V(X) = \frac{\prod_{j=1}^n \|X_j - X_{d_j}\|^{2a_j}}{\prod_{j=1}^n \|X_j - X_{d_j}\|^{2a_j} + \prod_{j=1}^n \prod_{h=j+1}^n \|X_j - X_h\|^{2b_{jh}} \prod_{j=1}^n \prod_{h=1}^m \|X_j - X_{O_h}\|^{2c_{jh}}}.$$

Sa dérivée le long de n'importe quelle trajectoire est donnée par :

$$\dot{V}(X) = \frac{-2P_j P_{jh} P_{jO_h}}{(P_j + P_{jh} P_{jO_h})^2} \sum_{i=1}^n v_i \sqrt{T_{x_i}^2 + T_{y_i}^2}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 P_{jO_h} &= \prod_{j=1}^n \prod_{h=1}^m \|X_j - X_{O_h}\|^{2c_{ij}}; \\
 T_{x_i} &= S_{x_i} - \sum_{j=1}^m \frac{c_{ij}(x_i - x_{O_j})}{\|X_i - X_{O_j}\|^2}; \\
 T_{y_i} &= S_{y_i} - \sum_{j=1}^m \frac{c_{ij}(y_i - y_{O_j})}{\|X_i - X_{O_j}\|^2}.
 \end{aligned}$$

En utilisant cette dérivée, il est possible de prouver que depuis presque n'importe quel point de départ, le nouveau système dynamique converge vers un de ses points de destination, tout en évitant la collision avec les autres avions et les points interdits.

### 2.3 Résultats

Afin de comparer des trajectoires obtenues avec et sans obstacles fixes, nous nous intéressons au cas de quatre avions. Trois de ces avions ont des trajectoires presque parallèles (2, 3 et 4), tandis que l'avion 1 vient couper les trajectoires des trois autres. Les quatre avions volent à des vitesses différentes et s'ils suivaient leur ligne droite, l'avion 1 rentrerait successivement en conflit avec les trois autres avions. Les coefficients de la fonction de navigation harmonique ont été fixés à  $a_i = 14$  et  $b_{ij} = 0.1$  afin d'éviter les conflits.

Dans le cas présenté Figure 8.5, c'est l'avion 1 qui subit le plus de déviation puisqu'il est celui rencontrant le plus de conflits potentiels. Les avions 2 et 4 peuvent alors suivre leur route directe puisque la déviation de l'avion 1 suffit pour éviter le conflit. Notons que l'avion 3 dévie inutilement de sa route directe pour éviter l'avion 1. Un paramétrage plus fin des coefficients de la fonction de navigation harmonique permettrait d'obtenir de meilleures trajectoires. Mais pour obtenir les meilleures trajectoires possible, il faudrait utiliser un processus d'optimisation pour choisir ces coefficients.

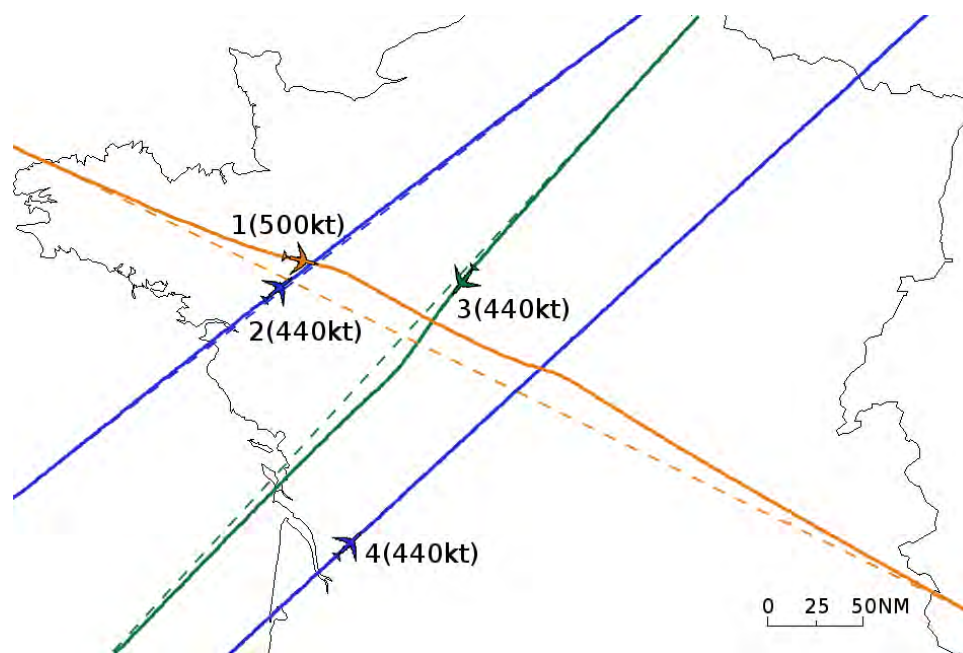


FIGURE 8.5 – Quatre avions, leur route directe (pointillés) et leur trajectoire calculée avec la fonction de navigation harmonique (traits pleins) au-dessus de la France (FL 390).

Ajoutons maintenant quatre obstacles statiques (voir Figure 8.6) dans le cas présenté Figure 8.5. Les quatre obstacles fixes sont placés autour de l'intersection des routes des avions 1 et 3 afin d'en interdire la zone. Les coefficients de la fonction de navigation harmonique restent fixés à  $a_i = 14$ ,  $b_{ij} = 0.1$  et les  $c_{ij}$  sont fixés à  $c_{ij} = 0.1$  afin d'éviter les conflits et d'interdire la zone entre les obstacles fixes.

Les avions 1 et 3 évitent bien la zone et aucun des avions ne rentre en conflit. En revanche, les avions 2 et 4 sont déviés de leur route directe par les obstacles fixes alors qu'ils ne cherchent absolument pas à traverser la zone interdite.

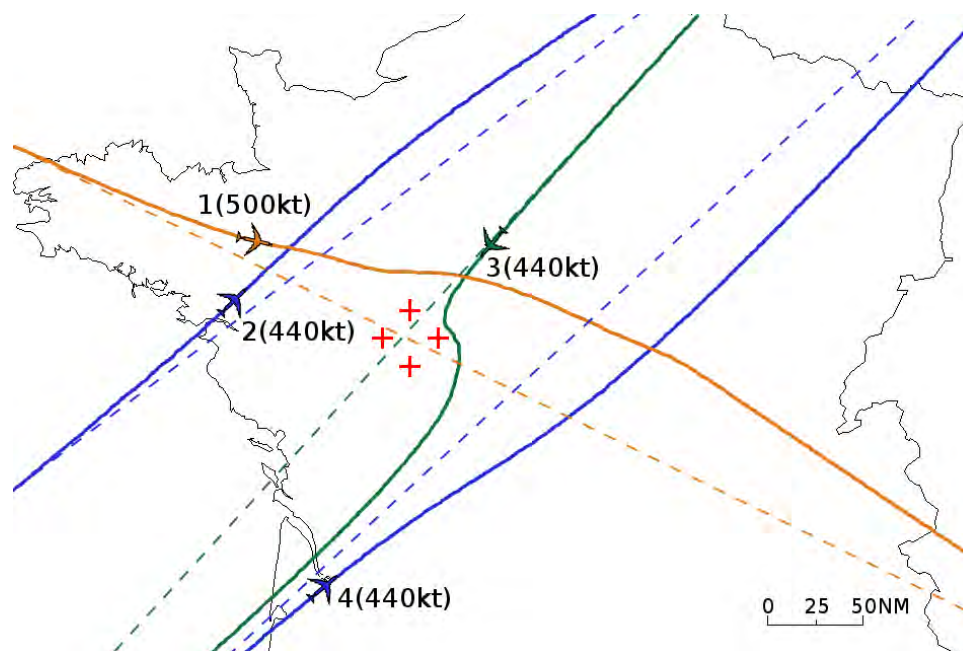


FIGURE 8.6 – Quatre avions, leur route directe (pointillés) et leur trajectoire (traits pleins) évitant quatre obstacles fixes (croix rouges) au-dessus de la France (FL 390).

Les solutions proposées par la fonction de navigation harmonique ne sont clairement pas optimales. Elle fournit néanmoins une solution admissible au problème de planification de trajectoire, et ce pour un temps de calcul très faible : 89ms de calcul pour le cas présenté Figure 8.5 et 106ms de calcul pour le cas présenté Figure 8.6.

Une fois encore, ces temps de calcul sont compatibles avec un processus d'optimisation des coefficients  $a_i$ ,  $b_{ij}$  et  $c_{ij}$ , qui permettrait de réduire les déviations subies par les trajectoires tout en garantissant l'évitement de conflit.

### 3 Propriétés de la Fonction de Navigation Harmonique

Nous nous intéressons dans cette section à deux propriétés importantes de la fonction de navigation harmonique :  $\phi_H$  est-elle Morse? Et est-il possible de construire une fonction de navigation harmonique qui permet d'interdire les conflits plutôt que les collisions?

#### 3.1 Caractère Morse de $\phi_H$

Grâce à l'harmonicité de  $\phi_H$ , nous avons pu prouver l'existence d'une direction de descente sans avoir à démontrer le caractère Morse de  $\phi_H$ . Les fonctions de Morse possèdent néanmoins des propriétés intéressantes, comme la possibilité d'approcher une fonction de Morse par une forme quadratique en ses points critiques. La question se pose alors :  $\phi_H$  est-elle Morse?

L'étude de la dégénérescence des points critiques d'une fonction se fait généralement à travers l'étude des valeurs propres de sa hessienne. Dans notre cas, la matrice hessienne (8.5) prend néanmoins une forme trop compliquée pour pouvoir en étudier les valeurs propres directement.

La position d'un avion évoluant dans  $\mathbb{R}^2$  peut être représentée facilement dans  $\mathbb{C}$ . En effet, n'importe quelle fonction  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  peut être remplacée par une fonction  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  en effectuant le changement de coordonnées suivant :

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy,$$

avec  $i^2 = -1$ .  $z, \bar{z}$  doivent alors être considérées comme des variables indépendantes.

Ce changement de variable peut être étendu aux fonctions  $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ . La fonction  $\phi_H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  peut ainsi être réécrite comme une fonction à variables complexes  $\phi_{H_c}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dont l'étude des points critiques est plus aisée.

### Dérivation d'une Fonction à Variables Complexes

Considérons une fonction réelle  $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  et appliquons lui le changement de coordonnées suivant :

$$z_k = x_k + iy_k \text{ et } \bar{z}_k = x_k - iy_k, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}.$$

Le gradient réel de la fonction  $f$  peut être obtenu à partir du gradient complexe :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k} &= \frac{\partial f}{\partial z_k} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}, \\ \frac{\partial f}{\partial y_k} &= i \left( \frac{\partial f}{\partial z_k} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \right). \end{aligned} \tag{8.8}$$

Puisque  $f$  est réelle, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial z_k} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}}.$$

En conséquence  $z_0$  est un point critique de  $f$  si et seulement si :

$$\frac{\partial f}{\partial z_k}(z_0) = 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}.$$

L'expression de la hessienne de  $f$  peut être obtenue par la dérivation de (8.8). Les détails de cette dérivation peuvent être trouvés dans [Hjørungnes 2011].

La hessienne complexe peut être réarrangée par échange de colonnes et de lignes afin d'obtenir une matrice par blocs :

$$H_f = \left( \begin{array}{c|c} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \hline \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} \end{array} \right).$$

**Définition 8.2.** Une fonction  $u: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite pluriharmonique si et seulement si :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) = 0.$$

La forme réelle de ce système s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial y_k} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial y_j} = 0.$$

Dans le cas d'une fonction pluriharmonique  $u$ , les deux blocs diagonaux de  $H_f$  sont nuls. La hessienne de  $u$  est alors non dégénérée si et seulement si le bloc  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  est non singulier.

Afin de pouvoir étudier les points critiques de la forme complexe de  $\phi_H$ , il nous faut d'abord définir la notion d'*espace de configuration complexe*.

### Espace de Configuration Complexe

Notons :

- $z_i = x_i + jy_i$  la position de l'avion  $i$  ;
- $z_{d_i} = x_{d_i} + jy_{d_i}$  la destination de l'avion  $i$  ;
- $z = (z_1, \dots, z_n)$  le vecteur des positions de tous les avions.

L'ensemble des points où deux avions entrent en collision est donné par :

$$D_C = \{(z_1, \dots, z_n), \exists i \neq j, z_i = z_j\}.$$

L'ensemble des points de destination est noté :

$$z^* = \{z \in \mathbb{C}^n - D_C, \exists i \in \{1, \dots, n\}, z_i = z_{d_i}\}.$$

L'espace de configuration pour  $n$  avions est alors donné par :

$$\mathcal{E}_C = \mathbb{C}^n - D_C - z^*.$$

### Étude des points critiques de $\phi_H$

La fonction de navigation harmonique complexe est définie sur  $\mathcal{E}_C$  par :

$$\begin{aligned} \phi_H(X) = \phi_{H_c}(z) &= \sum_{i=1}^n a_i \log(|z_i - z_{d_i}|) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n b_{ij} \log(|z_i - z_j|), \end{aligned}$$

avec  $a_i > 0$  et  $b_{ij} > 0$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$  et  $\forall j \in \{i+1, \dots, n\}$ .

Le potentiel logarithmique offre une interprétation intéressante dans le contexte des fonctions à plusieurs variables complexes puisqu'un terme de la forme  $\log(|z_i - z_j|)$  est lié au courant associé à l'hyperplan  $z_i = z_j$  par la relation de Poincaré-Lelong [Griffiths 2011].

Les points critiques de  $\phi_{H_c}$  peuvent être obtenus en satisfaisant :

$$\frac{\partial \phi_{H_c}}{\partial z} = 0.$$

On trouve alors le système  $\forall i = \{1, \dots, n\}$  :

$$\frac{\partial \phi_{H_c}}{\partial z_i} = \frac{a_i}{z_i - z_{d_i}} - \sum_{j < i} \frac{b_{ji}}{z_i - z_j} - \sum_{i < j} \frac{b_{ij}}{z_i - z_j} = 0. \quad (8.9)$$



Si on impose  $a_i = a, \forall i \in \{1, \dots, n\}, a > 0$  et  $b_{ij} = b, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{i + 1, \dots, n\}, b > 0$ , ce système peut être ramené à :

$$\frac{a}{z_i - z_{d_i}} - \sum_{j \neq i} \frac{b}{z_i - z_j} = 0, \quad (8.10)$$

et finalement à un système polynomial  $\forall i = \{1, \dots, n\}$  :

$$c \prod_{i \neq j} (z_i - z_j) - (z_i - z_{d_i}) \sum_{i \neq j} \prod_{\substack{i \neq j \\ j \neq k}} (z_i - z_k) = 0, \quad (8.11)$$

avec  $c > 0$  un unique paramètre à ajuster.

Les solutions du système (8.11) sont données par  $n - 1$  intersections entre des variétés analytiques. Les points critiques de  $\phi_{H_c}$  forment donc génériquement un ensemble de points isolés.

**Théorème 8.3.**  $\phi_{H_c}$  est pluriharmonique.

*Démonstration.*

$$(8.9) \implies \frac{\partial^2 \phi_{H_c}}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = 0.$$

□

Puisque  $\phi_{H_c}$  est pluriharmonique, pour montrer que la hessienne de  $\phi_{H_c}$  est non dégénérée, il suffit de montrer que le bloc supérieur  $\frac{\partial^2 \phi_{H_c}}{\partial z^2}$  est non singulier.

Le bloc supérieur  $\frac{\partial^2 \phi_{H_c}}{\partial z^2}$  est donné par les dérivées du système (8.10). Les termes diagonaux de ce bloc sont donnés par :

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i^2} = -\frac{c}{(z_i - z_{d_i})^2} + \sum_{i \neq j} \frac{1}{(z_i - z_j)^2},$$

tandis que les termes hors-diagonaux sont donnés par :

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} = -\frac{1}{(z_i - z_j)^2}. \quad (8.12)$$

**Remarque :** On retrouve ici la preuve d'existence d'une direction de descente pour  $\phi_{H_c}$  (voir Section 1.2) puisque le terme (8.12) ne s'annule jamais.

Ainsi, tant que :

$$c > 2|z_i - z_{d_i}|^2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{|z_i - z_j|^2},$$

le bloc supérieur est à diagonale dominante et donc inversible. Un tel choix pour  $c$  existe toujours puisque les points critiques forment un ensemble qui est inclus dans l'espace de configuration  $\mathcal{E}_C$ , qui est distinct des points de destination. En conclusion, étant donné un  $c$  assez grand, il est toujours possible d'obtenir que  $\phi_{H_c}$  (et donc  $\phi_H$ ) soit de Morse, ce qui permet d'obtenir les mêmes résultats que dans [Loizou 2011a].

### 3.2 Impossibilité de l'Évitement de Conflits

Afin de pouvoir interdire les conflits entre avions, il faudrait trouver une fonction barrière harmonique qui tend vers  $\pm\infty$  lorsque deux avions approchent du conflit. En notant  $r$  la distance de sécurité entre deux avions ( $r=5\text{NM}$  en phase de croisière), il faut donc trouver une fonction harmonique  $f_B: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$f_B(X_i, X_j) \xrightarrow{\|X_i - X_j\| \rightarrow r} \pm\infty.$$

Nous avons déjà vu que la fonction :

$$\log(\|X_i - X_j\|^2 - r^2)$$

n'est pas harmonique. Mais il semble néanmoins possible de construire une fonction barrière harmonique adéquate. Une fonction de la forme :

$$f(X_i, X_j) = \frac{g(X_i, X_j)}{\left(\|X_i - X_j\|^2 - r^2\right)^n}$$

semble être une bonne candidate pour servir de fonction barrière, à condition que le degré de  $g(X_i, X_j)$  soit inférieur à  $n$  et que  $f(X_i, X_j)$  soit harmonique. Peut-on trouver une fonction  $g(X_i, X_j)$  telle que  $f(X_i, X_j)$  soit harmonique ?

Réécrivons  $f(X_i, X_j)$  et  $g(X_i, X_j)$  comme deux fonctions à variables complexes en appliquant le changement de variables :

$$\begin{cases} u = x_i + iy_i \\ v = x_j + iy_j \end{cases}.$$

$f(X_i, X_j)$  devient alors :

$$f(u, v) = \frac{g(u, v)}{[(u - v)(\bar{u} - \bar{v}) - r^2]^n}.$$

La partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe sont toutes les deux harmoniques. Ainsi, si on arrive à trouver une fonction  $g(u, v)$  telle que  $f(u, v)$  soit holomorphe, on pourra trouver une fonction  $g(X_i, X_j)$  telle que  $f(X_i, X_j)$  est harmonique. Puisque toute fonction globalement holomorphe est holomorphe composante par composante, une condition nécessaire d'holomorphie pour  $f(u, v)$  s'écrit :

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial \bar{u}} = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(u, v)}{\partial \bar{u}} = 0 &\iff \frac{\partial g(u, v)}{\partial \bar{u}} [(u - v)(\bar{u} - \bar{v}) - r^2] = n(u - v)g(u, v) \\ &\implies g(u, v) = [(u - v)(\bar{u} - \bar{v}) - r^2]^n \\ &\implies f(u, v) = 1. \end{aligned}$$

Il est donc impossible de trouver une fonction  $g(X_i, X_j)$  telle que  $f(X_i, X_j)$  soit harmonique et non constante.

**Remarque :** Les calculs n'ont pas été menés de manière exacte puisque le but était d'obtenir une "idée" de la forme de fonction qui permettrait de construire une fonction adéquate. Les constantes d'intégration ont donc été ignorées dans ces calculs.

## 4 Conclusion et Perspectives

### 4.1 Conclusion

La fonction de navigation harmonique proposée dans ce chapitre est une méthode prometteuse pour la planification d'un grand nombre de trajectoires d'avions. Parmi les objectifs que nous nous étions fixés au début de cette thèse, certains ont été atteints, tandis que d'autres pourraient l'être avec des études complémentaires :

- ✓ **Arrivée de l'avion à sa destination** : obtenue par l'étude des points critiques de la fonction de navigation harmonique et la construction d'une fonction de Lyapunov associée au système dynamique (8.2).
- ✗ **Trajectoires sans conflit** : seul l'évitement de collision est garanti par la méthode. L'évitement de conflit peut néanmoins être obtenu par un choix judicieux des coefficients de la fonction de navigation harmonique. Ce choix peut soit reposer sur des règles précises, soit être fait en passant par un processus d'optimisation. (voir Section 4.2).
- ✓ **Trajectoires à vitesse constante** : garantie par la forme même du système dynamique utilisé et sans remettre en question la garantie d'arrivée à destination des avions.
- ✗ **Virages compatibles avec les capacités des avions** : le processus d'optimisation des coefficients de la fonction peut permettre de minimiser les virages effectués par les avions (voir Section 4.2). Il est néanmoins impossible de garantir que les trajectoires produites présenteront toujours des virages réalisables par les avions.
- ✓ **Temps de calcul compatible avec une planification stratégique** : un temps de calcul d'environ 4s pour plus de 2000 trajectoires est compatible avec une planification stratégique. Ce temps peut encore être réduit, en limitant le nombre d'avions pris en compte dans l'évitement de conflit et en parallélisant les calculs (voir Section 4.2).

En plus des idées déjà avancées ci-dessus pour atteindre les objectifs fixés au début de cette thèse, de nombreuses améliorations peuvent être apportées à la fonction de navigation harmonique.

### 4.2 Perspectives

#### Choix des Coefficients de la Fonction de Navigation Harmonique

Un des points importants de la fonction de navigation harmonique à étudier est ses coefficients. La seule règle imposée dans le choix de ces coefficients (8.3) permet de s'assurer que les avions ne partiront pas vers l'infini plutôt que d'essayer de rejoindre leur destination.

Il serait intéressant de pouvoir donner une règle sur le choix de ces coefficients qui permettrait de garantir l'évitement de conflit. Nous n'avons néanmoins aucune piste de recherche pour trouver une telle règle.

Une autre solution qui permettrait de garantir l'évitement de conflit serait d'optimiser les coefficients de la fonction de navigation harmonique sous la contrainte d'évitement de conflit. Un tel processus d'optimisation permettrait ainsi de faire tendre les trajectoires vers leur route directe et qu'elles ne soient déformées qu'en cas de conflit. Le temps de calcul relativement court de la fonction de navigation harmonique peut permettre d'utiliser un algorithme d'optimisation sans dérivées (type algorithmes génétiques ou derivative free optimization) afin de minimiser un critère permettant d'évaluer la qualité des trajectoires obtenues.

Une première idée de critère serait d'utiliser la somme des longueurs des trajectoires. Mais la somme des courbures totales des trajectoires s'avère être un critère plus intéressant : plus une trajectoire dévie de la ligne droite (et donc plus elle s'allonge) et plus sa courbure totale augmente. Un tel critère permettrait également de pénaliser les trajectoires présentant des virages serrés qui pourraient être irréalisables par les avions.

### Complexité

La complexité du calcul de trajectoires en utilisant la fonction de navigation harmonique est  $\mathcal{O}(n^2)$  avec  $n$  le nombre d'avions sur un niveau de vol donné. L'algorithme peut néanmoins être modifié pour ne tenir compte que des avions proches dans l'évitement de collision. Il existe un algorithme de recherche des  $k$  plus proches voisins de complexité  $\mathcal{O}(k \log(n))$ . La complexité du calcul de trajectoires tomberait alors à  $\mathcal{O}(kn \log(n))$ . De plus, en réduisant le nombre d'avions considérés dans l'évitement de collision, le nombre de coefficients  $b_{ij}$  à optimiser serait nettement réduit.

### Parallélisation

En considérant un trafic réel réparti sur plusieurs niveaux de vol, la planification de trajectoires à l'aide de fonctions de navigation harmoniques peut être parallélisée de deux façons. Chaque fonction de navigation permettant de construire les trajectoires sur un niveau de vol peut être calculée indépendamment puisque le trafic d'un niveau de vol n'interfère pas avec le trafic d'un autre.

De plus, pour chaque fonction de navigation, il est possible de calculer les nouvelles positions de tous les avions en parallèle puisque ces nouvelles positions ne tiennent compte que des positions précédentes des avions.

### Décentralisation

Kyriakopoulos *et al.* avaient choisi de planifier les trajectoires des avions de manière décentralisée afin qu'un avion puisse planifier sa trajectoire en tenant compte du trafic autour de lui. Puisque notre planification de trajectoires se déroule au niveau stratégique (des jours à l'avance), nous avons choisi de construire une fonction de navigation harmonique centralisée qui contrôle la totalité des vols présents sur un niveau de vol.

Ce n'est néanmoins pas la fonction de navigation harmonique (8.1) qui est utilisée pour la navigation, mais son gradient normé (8.2). Or, pour chaque avion, ce gradient normé ne dépend que de la position de l'avion, de son point d'arrivée et de la position des autres avions. Ainsi,

si la fonction de navigation harmonique est centralisée, chaque avion pourrait tout de même l'utiliser afin de calculer sa propre trajectoire en ne connaissant que la position actuelle des autres avions (à condition que les coefficients de la fonction de navigation harmonique aient été fixés et partagés entre tous les avions).

La forme centralisée de la fonction de navigation harmonique présente néanmoins ce qui peut être vu comme un défaut : le coefficient  $b_{ij}$  qui contrôle la force de répulsion entre l'avion  $i$  et l'avion  $j$  est unique ( $b_{ij} = b_{ji}$ ). Il est donc impossible d'imposer que l'avion  $i$  exerce une plus forte répulsion sur l'avion  $j$  que celle exercée par l'avion  $j$  sur l'avion  $i$ . Une forme décentralisée de la fonction de navigation harmonique permettrait néanmoins d'obtenir cette variation dans la force de répulsion générée par les avions. Une forme décentralisée pour l'avion  $i$  serait donnée par :

$$\phi_{H_i}(X) = a_i \log(\|X_i - X_{d_i}\|^2) - \sum_{j \neq i} \log(\|X_i - X_j\|^2).$$

La trajectoire de l'avion  $i$  pourrait alors être obtenue en calculant :

$$\dot{X} = v_i \frac{-\nabla_{i\phi_{H_i}}(X)}{\|\nabla_{i\phi_{H_i}}(X)\|}. \quad (8.13)$$

Dans un tel cas, toutes les démonstrations d'arrivée à destination obtenues dans la Section 1.2 doivent être refaites : les points critiques de cette fonction décentralisée doivent être étudiés à nouveau et une nouvelle fonction de Lyapunov doit être définie pour (8.13).

L'utilisation d'une telle forme décentralisée amène néanmoins des questions sur le choix des coefficients de la fonction. Il semble possible d'optimiser les coefficients de la forme décentralisée de la même façon que les coefficients de la forme centralisée (les coefficients sont juste plus nombreux dans le cas décentralisé).

Mais dans le cas où cette fonction devrait être utilisée en temps réel (application usuelle des formes décentralisées), il n'est plus possible d'utiliser un processus d'optimisation pour choisir les coefficients de la fonction. Or sans le processus d'optimisation, l'évitement de conflit ne peut être garanti. Et nous ne disposons à l'heure actuelle d'aucune règle théorique sur le choix des coefficients qui permettrait de garantir l'évitement de conflit.

### Collision à Plus de Deux Avions

La fonction de navigation (8.1) a été construite afin d'éviter l'hyperplan  $X_i = X_j$ , qui présente les collisions entre des paires d'avions. Les collisions entre plus de deux avions ne sont gérées qu'à travers les collisions entre les paires d'avions qui les composent. Afin de tenir compte spécifiquement des collisions entre plus de deux avions, un nouveau terme harmonique doit être ajouté à la fonction de navigation harmonique.

Considérons le cas d'un conflit entre  $k$  avions  $(i_1, \dots, i_k)$  et le cas de collision interdit :

$$\Delta_{i_1, \dots, i_k} = \{X, X_{i_1} = X_{i_2} = \dots = X_{i_k}\}.$$

La projection du point  $X$  de l'espace de configuration sur  $\Delta_{i_1, \dots, i_k}$  est donné par :

$$P_{i_1, \dots, i_k}(X) = (X_1, \dots, X_{i_1-1}, h, X_{i_1+1}, \dots, X_{i_2-1}, h, X_{i_2+1}, \dots),$$

où  $h = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k X_{i_j}$  est la valeur moyenne des composantes appartenant à l'ensemble interdit. Le terme à ajouter à la fonction de navigation harmonique afin de tenir compte des collisions entre  $k$  avions est alors :

$$\frac{1}{\left( \sum_{j=1}^k |X_{i_j} - h|^2 \right)^{k-2}} = \frac{1}{\|X - P_{i_1, \dots, i_k}(X)\|^{2(k-2)}}.$$

La nouvelle fonction de navigation harmonique ainsi construite reste bien harmonique, mais n'est plus pluriharmonique. L'étude des points critiques ainsi que la fonction de Lyapunov permettant de garantir l'arrivée à destination doivent donc être réexaminées.

### Application

La fonction de navigation harmonique a été construite afin de planifier le trafic aérien plusieurs jours à l'avance. Elle pourrait néanmoins être utilisée comme outil de simulation plutôt que comme outil de planification. Grâce à son temps de calcul rapide et en utilisant un algorithme de calcul de complexité [Prandini 2011], la fonction de navigation harmonique peut permettre de tester un grand nombre de scénarios de trafic afin de déterminer le plus intéressant : que se passe-t-il si un avion décolle dix minutes plus tard que prévu ? Peut-on ajouter un avion à un trafic déjà planifié sans trop le perturber ? À quel niveau vaut-il mieux faire voler un avion ?

# Conclusion

---

Nous avons présenté dans ce mémoire trois méthodes de planification de trajectoires. Notre but étant de construire un grand nombre de trajectoires à vitesse constante, nous nous sommes d'abord penchés sur le problème de la construction d'une trajectoire à vitesse constante. L'étude des *champs biharmoniques* nous a convaincus que les champs de potentiel harmoniques, déjà proposés dans la littérature pour le calcul d'une trajectoire, seraient plus adaptés pour l'extension au calcul de plusieurs trajectoires.

Nous avons de ce fait essayé de planifier le *mouvement coordonné* de plusieurs mobiles en utilisant des *champs de potentiel harmoniques* et des *espaces de configuration*. Le temps de calcul de cette méthode la rend néanmoins inutilisable pour la planification de trajectoires d'avions.

Nous nous sommes donc tournés vers les fonctions de navigation qui présentent l'avantage d'être rapides en temps de calcul. Nous avons cherché à créer une nouvelle *fonction de navigation harmonique* en nous basant sur notre expérience des champs de potentiel harmoniques afin de proposer une alternative aux fonctions de navigation existantes. **Cette fonction de navigation harmonique offre une solution prometteuse pour la planification d'un grand nombre de trajectoires d'avions.**

## Fonctions Biharmoniques

Les fonctions biharmoniques ont été étudiées afin de planifier une seule trajectoire à vitesse constante et de contourner certains des problèmes apparaissant dans les champs de potentiel. Si les fonctions biharmoniques permettent effectivement de résoudre ces problèmes, elles sont néanmoins plus difficiles à construire que les champs de potentiel. Le redressement du champ de navigation notamment est une opération coûteuse qui, si elle est mal réalisée, peut amener le mobile droit sur un obstacle.

La construction de champs biharmoniques sur des espaces de configuration (afin de pouvoir planifier les trajectoires de plusieurs mobiles) pose problème. La méthode repose en effet sur une analogie avec la mécanique du solide, pour laquelle il n'existe aucune extension au-delà de la troisième dimension. Pour deux mobiles, il nous faut déjà travailler dans un espace 4D. Dans ce cas, comment construire le champ de navigation une fois la fonction biharmonique calculée sur l'espace de configuration ? Les champs de potentiel offrent une meilleure base pour la planification de plusieurs trajectoires de manière coordonnée, comme le montrent les résultats obtenus dans le Chapitre 6.

Les champs biharmoniques permettent néanmoins de résoudre certains des problèmes connus des champs de potentiel (évanescence du champ et blocage devant des passages étroits) et sont donc très adaptés pour le calcul d'une trajectoire dans des environnements complexes (labyrinthe, succession de couloirs).

## Mouvement Coordonné à partir de Champs de Potentiel

La planification coordonnée de trajectoires basée sur les espaces de configuration et les champs de potentiel construits à partir de la résolution d'EDP offre des perspectives intéressantes dans les cas de deux à trois mobiles. L'arrivée à destination ainsi que l'évitement d'obstacle/collision entre mobiles sont garantis par l'utilisation de champs de potentiel harmoniques.

Le point fort de cette méthode est également son point faible : la représentation de l'espace. Contrairement à la fonction de navigation harmonique, l'utilisation d'une résolution d'EDP pour la construction des champs de potentiel permet de représenter des espaces de travail de formes complexes. Mais c'est justement la construction de l'espace de configuration à partir de cet espace de travail qui fait exploser le temps de calcul de la méthode lorsque le nombre de mobiles augmente.

Cette méthode n'est clairement pas adaptée à une utilisation dans le contexte de la navigation aérienne où il est inutile de pouvoir représenter des espaces complexes et où le nombre de mobiles à gérer est important. Elle pourrait néanmoins s'appliquer dans le cadre de la robotique, notamment pour la navigation dans un environnement inconnu ou la navigation en formation de quelques mobiles.

## Fonction de Navigation Harmonique

La fonction de navigation harmonique permet de calculer un très grand nombre de trajectoires en un temps très court (environ 4 secondes de calcul pour 2000 trajectoires). Elle offre les mêmes garanties d'arrivée à destination que la fonction de Kyriakopoulos *et al.*. Elle ne permet par contre de garantir que l'évitement de collision et non l'évitement de conflit. Elle présente néanmoins l'avantage de produire des trajectoires à vitesse constante, propriété intéressante dans le cadre de la navigation aérienne que Kyriakopoulos *et al.* ne peuvent obtenir avec leur fonction de navigation. Et comme pour la fonction de navigation de Kyriakopoulos *et al.*, aucune garantie ne peut être donnée sur le fait que les virages des trajectoires sont réalisables par les avions.

Si la fonction de navigation harmonique s'adapte très bien au cadre de la navigation aérienne, il semble impossible de l'utiliser pour la navigation de mobiles dans des espaces complexes. Des points de l'espace peuvent être interdits, mais utiliser une ligne de points ponctuels pour représenter un mur ne garantira pas que le mobile ne le traversera jamais.

Dans le contexte de la navigation aérienne, la fonction de navigation harmonique offre de très nombreuses perspectives d'amélioration. La première consiste en une optimisation des coefficients de la fonction, qui permettrait non seulement d'optimiser la forme des trajectoires obtenues, mais aussi de garantir l'évitement de conflit et de minimiser les virages effectués par



les avions. Une parallélisation de la méthode est également envisageable puisqu'à chaque instant, les prochaines positions des avions peuvent être calculées de manière indépendante.

Afin de calculer la trajectoire d'un avion, la fonction de navigation harmonique ne nécessite que la destination de cet avion ainsi que les positions de tous les autres avions. En supposant qu'un avion a une connaissance parfaite de son environnement (par un système ADS-B par exemple), chaque avion pourrait alors calculer sa propre trajectoire en temps réel, à condition que tous les avions partagent les mêmes coefficients pour la fonction de navigation harmonique. Ainsi, bien que cette fonction ait été construite afin de faire de la planification centralisée de trajectoires, elle peut être utilisée de manière décentralisée sans qu'aucune modification soit nécessaire.

La fonction de navigation harmonique peut être utilisée comme une méthode de planification décentralisée telle quelle, mais il est également possible de construire une forme décentralisée de cette fonction de navigation harmonique. Chaque avion aurait alors sa propre fonction de navigation harmonique. L'intérêt d'une telle modification repose dans les coefficients de la fonction. Alors que dans la forme centralisée la force de répulsion entre deux avions est contrôlée par le même coefficient, dans la forme décentralisée il serait possible de choisir des coefficients de répulsion différents, et donc d'imposer qu'un avion soit plus répulsif que l'autre en cas de conflit. Toutes les démonstrations d'arrivée à destination devraient néanmoins être reprises et la question du choix des coefficients, ainsi que de la gestion des incertitudes reste ouverte.

Enfin, couplée à un algorithme de calcul de complexité du trafic, la fonction de navigation harmonique pourrait permettre de simuler et d'étudier divers scénarios de trafic.



## Bibliographie

---

- [Akishita 1990] S. Akishita, S. Kawamura & K. Hayashi. *New navigation function utilizing hydrodynamic potential for mobile robot*. In IEEE Intelligent Motion Control Workshop, volume 2, pages 413–417, 1990. **Cité page 58**
- [Amato 1999] N. Amato & L. Dale. *Probabilistic roadmap methods are embarrassingly parallel*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, volume 1, pages 688–694, 1999. **Cité page 35**
- [Arkin 1989] R. Arkin. *Motor schema—based mobile robot navigation*. The International Journal of Robotics Research, vol. 8, no. 4, pages 92–112, 1989. **Cité page 58**
- [Aurenhammer 1991] F. Aurenhammer. *Voronoi Diagrams - A Survey of a Fundamental Geometric Data Structure*. ACM Computing Surveys, vol. 23, no. 3, pages 345–405, 1991. **Cité page 36**
- [Barraquand 1991] J. Barraquand & J.-C. Latombe. *Robot motion planning : A distributed representation approach*. The International Journal of Robotics Research, vol. 10, no. 6, pages 628–649, 1991. **Cité page 61**
- [Barraquand 1992] J. Barraquand, B. Langlois & J.-C. Latombe. *Numerical potential field techniques for robot path planning*. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, vol. 22, no. 2, pages 224–241, 1992. **Cité page 61**
- [Betts 1995] J. Betts & E. Cramer. *Application of direct transcription to commercial aircraft trajectory optimization*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 18, no. 1, pages 151–159, 1995. **Cité page 38**
- [Betts 1998] J. Betts. *Survey of numerical methods for trajectory optimization*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 21, no. 2, pages 193–207, 1998. **Cité page 37**
- [Borenstein 1991] J. Borenstein & Y. Koren. *The vector field histogram-fast obstacle avoidance for mobile robots*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 7, no. 3, pages 278–288, 1991. **Cité page 40**
- [Borrelli 2006] F. Borrelli, D. Subramanian, A. Raghunathan & L. Biegler. *MILP and NLP Techniques for centralized trajectory planning of multiple unmanned air vehicles*. In American Control Conference, pages 6 pp.–, 2006. **Cité page 38**
- [Brooks 1982] R. Brooks & T. Lozano-Perez. *A subdivision algorithm in configuration space for findpath with rotation*. 1982. **Cité page 34**

- [Carpin 2006] S. Carpin. *Randomized motion planning : A tutorial*. International Journal of Robotics and Automation, vol. 21, no. 3, pages 184–196, 2006. **Cité pages 35 et 36**
- [Cheng 2001] P. Cheng & S. LaValle. *Reducing metric sensitivity in randomized trajectory design*. In IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems, volume 1, pages 43–48, 2001. **Cité page 36**
- [Connolly 1990] C. Connolly, J. Burns & R. Weiss. *Path planning using Laplace's equation*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 2102–2106, 1990. **Cité pages 72 et 132**
- [Connolly 1993] C. Connolly & R. Grupen. *On the applications of harmonic functions to robotics*. Journal of Robotic Systems, vol. 10, pages 931–946, 1993. **Cité page 67**
- [de la Cruz 2008] J. de la Cruz, E. Besada-Portas, L. Torre-Cubillo, B. Andres-Toro & J. Lopez-Orozco. *Evolutionary Path Planner for UAVs in Realistic Environments*. In 10th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation, pages 1477–1484. ACM, 2008. **Cité page 46**
- [Dimarogonas 2003] D. Dimarogonas, M. Zavlanos, S. Loizou & K. Kyriakopoulos. *Decentralized motion control of multiple holonomic agents under input constraints*. In IEEE 42nd Conference on Decision and Control, volume 4, pages 3390–3395, 2003. **Cité pages 46, 125, et 134**
- [Dimarogonas 2005] D. Dimarogonas & K. Kyriakopoulos. *Decentralized stabilization and collision avoidance of multiple air vehicles with limited sensing capabilities*. In American Control Conference, pages 4667–4672, 2005. **Cité page 125**
- [Dougui 2011] N. Dougui. *Aircraft trajectories planning : light propagation model*. Université Toulouse III Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier), 2011. **Cité page 43**
- [Dougui 2013] N. Dougui, D. Delahaye, S. Puechmorel & M. Mongeau. *A light-propagation model for aircraft trajectory planning*. Journal of Global Optimization, vol. 56, no. 3, pages 873–895, 2013. **Cité page 43**
- [Duong 1997] V. Duong & K. Zeghal. *Conflict resolution advisory for autonomous airborne separation in low-density airspace*. In 36th IEEE Conference on Decision and Control, volume 3, pages 2429–2434, 1997. **Cité page 58**
- [Egerstedt 2001] M. Egerstedt & X. Hu. *Formation constrained multi-agent control*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 17, no. 6, pages 947–951, 2001. **Cité page 44**
- [Eurocontrol 2012] Eurocontrol. *Free Route Developments in Europe*, 2012. **Cité page 19**
- [Eurocontrol 2013a] Eurocontrol. *CODA Digest - Delays to Air Transport in Europe – Annual 2013*, 2013. **Cité pages 15 et 16**
- [Eurocontrol 2013b] Eurocontrol & FAA. *Comparison of Air Traffic Management-Related Operational Performance : U.S./Europe - 2012*, 2013. **Cité page 16**

- [Fairweather 1998] G. Fairweather & A. Karageorghis. *The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems*. Advances in Computational Mathematics, vol. 9, no. 1, pages 69–95, 1998. **Cité page 102**
- [Faria 2004] G. Faria, R. Romero, E. Prestes & M. Idiart. *Comparing harmonic functions and potential fields in the trajectory control of mobile robots*. In IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics, volume 2, pages 762–767, 2004. **Cité page 69**
- [Feder 1997] H. Feder & J.-J. Slotine. *Real-time path planning using harmonic potentials in dynamic environments*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, volume 1, pages 874–881, 1997. **Cité page 72**
- [Filippidis 2011] I. Filippidis & K. Kyriakopoulos. *Adjustable navigation functions for unknown sphere worlds*. In 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), pages 4276–4281, 2011. **Cité page 123**
- [Foderaro 2011] G. Foderaro, V. Raju & S. Ferrari. *A cell decomposition approach to online evasive path planning and the video game Ms. Pac-Man*. In IEEE International Symposium on Intelligent Control (ISIC), pages 191–197, 2011. **Cité page 34**
- [Fraichard 1993] T. Fraichard & C. Laugier. *Path-velocity decomposition revisited and applied to dynamic trajectory planning*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 40–45 vol.2, 1993. **Cité page 33**
- [Ge 2002] S. Ge & Y. Cui. *Dynamic Motion Planning for Mobile Robots Using Potential Field Method*. Autonomous Robots, vol. 13, pages 207–222, 2002. **Cité page 58**
- [Geraerts 2004] R. Geraerts & M. Overmars. *A comparative study of probabilistic road-map planners*. In Algorithmic Foundations of Robotics V, pages 43–58. Springer, 2004. **Cité page 35**
- [Ghosh 2000] R. Ghosh & C. Tomlin. *Maneuver design for multiple aircraft conflict resolution*. In American Control Conference, volume 1, pages 672–676, 2000. **Cité page 58**
- [Girardet 2013] B. Girardet, L. Lapasset, D. Delahaye, C. Rabut & Y. Brenier. *Generating optimal aircraft trajectories with respect to weather conditions*. In 2nd International Conference on Interdisciplinary Science for Innovative Air Traffic Management (ISIATM), 2013. **Cité pages 39 et 44**
- [Goerzen 2010] C. Goerzen, Z. Kong & B. Mettler. *A Survey of Motion Planning Algorithms from the Perspective of Autonomous UAV Guidance*. Journal of Intelligent and Robotic Systems, vol. 57, no. 1-4, pages 65–100, 2010. **Cité page 32**
- [Griffiths 2011] P. Griffiths & J. Harris. Principles of algebraic geometry. Wiley, 2011. **Cité page 144**
- [Hart 1968] P. Hart, N. Nilsson & B. Raphael. *A Formal Basis for the Heuristic Determination of Minimum Cost Paths*. IEEE Transactions on

- Systems Science and Cybernetics, vol. 4, no. 2, pages 100–107, 1968.  
**Cité page 36**
- [Hiriart-Urruty 2008] J.-B. Hiriart-Urruty. Les mathématiques du mieux faire, vol. 2 : La commande optimale pour les débutants, volume 176. Collection Opuscules, Editions Ellipses, 2008.  
**Cité page 37**
- [Hjørungnes 2011] A. Hjørungnes. Complex-valued matrix derivatives : With applications in signal processing and communications. Cambridge University Press, 2011.  
**Cité page 143**
- [Hwang 1992] Y. Hwang & N. Ahuja. *Gross Motion Planning / a Survey*. ACM Computing Surveys, vol. 24, no. 3, pages 219–291, 1992. **Cité page 32**
- [Janabi-Sharifi 1993] F. Janabi-Sharifi & D. Vinke. *Integration of the artificial potential field approach with simulated annealing for robot path planning*. In IEEE International Intelligent Control Symposium, pages 536–541, 1993.  
**Cité page 61**
- [Kant 1986] K. Kant & S. Zucker. *Toward efficient trajectory planning : The path-velocity decomposition*. The International Journal of Robotics Research, vol. 5, no. 3, pages 72–89, 1986.  
**Cité page 32**
- [Karnik 2004] M. Karnik, B. Dasgupta & V. Eswaran. *A comparative study of Dirichlet and Neumann conditions for path planning through harmonic functions*. Future Generation Computer Systems, vol. 20, no. 3, pages 441–452, 2004.  
**Cité page 67**
- [Khalil 2002] H. Khalil. Nonlinear systems, volume 3. Prentice hall Upper Saddle River, 2002.  
**Cité page 134**
- [Khatib 1980] O. Khatib & J. Le Maitre. *Dynamic control of manipulators operating in a complex environment*. In 3rd Symposium on Theory and Practice of Robots and Manipulators, pages 267–282, 1980. **Cité pages 53 et 54**
- [Khatib 1985] O. Khatib. *Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, volume 2, pages 500–505, 1985.  
**Cité pages 39 et 54**
- [Kim 2006] D. Kim, H. Wang & S. Shin. *Decentralized control of autonomous swarm systems using artificial potential functions : Analytical design guidelines*. Journal of Intelligent and Robotic Systems, vol. 45, no. 4, pages 369–394, 2006.  
**Cité page 58**
- [Koditschek 1987] D. Koditschek. *Exact robot navigation by means of potential functions : Some topological considerations*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, volume 4, pages 1–6, 1987.  
**Cité pages 117 et 118**
- [Koditschek 1990] D. Koditschek & E. Rimon. *Robot navigation functions on manifolds with boundary*. Advances in Applied Mathematics, vol. 11, no. 4, pages 412–442, 1990.  
**Cité pages 120, 121, 122, et 123**
- [Koren 1991] Y. Koren & J. Borenstein. *Potential field methods and their inherent limitations for mobile robot navigation*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 1398–1404, 1991.  
**Cité page 58**

- [Kuffner 2000] J. Kuffner & S. LaValle. *RRT-connect : An efficient approach to single-query path planning*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'00), volume 2, pages 995–1001 vol.2, 2000. **Cité page 35**
- [Kwangjin 2008] Y. Kwangjin & S. Sukkarieh. *3D smooth path planning for a UAV in cluttered natural environments*. In IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS'08), pages 794–800, 2008. **Cité page 35**
- [Large 2002] F. Large, S. Sekhavat, Z. Shiller & C. Laugier. *Towards real-time global motion planning in a dynamic environment using the NLVO concept*. In IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, volume 1, pages 607–612, 2002. **Cité page 36**
- [LaValle 1998] S. LaValle. *Rapidly-Exploring Random Trees : A New Tool for Path Planning*. Rapport technique, 1998. **Cité page 35**
- [Lindhe 2011] M. Lindhe, T. Keviczky & K. Johansson. *Multi-robot path following with visual connectivity*. In 45th Conference on Signals, Systems and Computers (ASILOMAR), pages 1466–1471, 2011. **Cité page 33**
- [Lingelbach 2004] F. Lingelbach. *Path planning using probabilistic cell decomposition*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'04), volume 1, pages 467–472, 2004. **Cité page 34**
- [Loizou 2002] S. Loizou & K. Kyriakopoulos. *Closed loop navigation for multiple holonomic vehicles*. In IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, volume 3, pages 2861–2866, 2002. **Cité pages 124 et 125**
- [Loizou 2011a] S. Loizou. *Closed form navigation functions based on harmonic potentials*. In 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), pages 6361–6366, 2011. **Cité pages 126, 130, 132, et 145**
- [Loizou 2011b] S. Loizou. *The navigation transformation : Point worlds, time abstractions and towards tuning-free navigation*. In 19th Mediterranean Conference on Control & Automation (MED), pages 303–308, 2011. **Cité page 126**
- [Lozano-Pérez 1979] T. Lozano-Pérez & M. Wesley. *An Algorithm for Planning Collision-free Paths Among Polyhedral Obstacles*. ACM Communications, vol. 22, no. 10, pages 560–570, 1979. **Cité pages 31 et 36**
- [Mabrouk 2008] M. Mabrouk & C. McInnes. *Solving the potential field local minimum problem using internal agent states*. Robotics and Autonomous Systems, vol. 56, no. 12, pages 1050–1060, 2008. **Cité page 61**
- [Maniatopoulos 2012] S. Maniatopoulos, D. Dimarogonas & K. Kyriakopoulos. *A decentralized event-based predictive navigation scheme for Air-Traffic Control*. In American Control Conference (ACC), pages 2503–2508, 2012. **Cité page 126**

- [Masoud 1994] A. Masoud, S. Masoud & M. Bayoumi. *Robot navigation using a pressure generated mechanical stress field : “the biharmonic potential approach”*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 124–129, 1994. **Cité pages 72, 73, 78, et 84**
- [Masoud 2009] A. Masoud. *A harmonic potential field approach with a probabilistic space descriptor for planning in non-divisible environments*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA’09), pages 3774–3779, 2009. **Cité page 69**
- [McLain 2000] T. McLain & R. Beard. *Trajectory planning for coordinated rendezvous of unmanned air vehicles*. In AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, volume 4369, pages 1–8. AIAA Reston, VA, 2000. **Cité page 37**
- [Milnor 1963] J. Milnor. *Morse theory*, volume 51. Princeton University Press, 1963. **Cité page 119**
- [Ng 2011] H. Ng, B. Sridhar, S. Grabbe & N. Chen. *Cross-polar aircraft trajectory optimization and the potential climate impact*. In IEEE/AIAA 30th Digital Avionics Systems Conference (DASC), pages 3D4–1–3D4–15, 2011. **Cité page 38**
- [Oikonomopoulos 2009] A. Oikonomopoulos, S. Loizou & K. Kyriakopoulos. *Coordination of multiple non-holonomic agents with input constraints*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA’09), pages 869–874, 2009. **Cité page 44**
- [Overmars 1992] M. Overmars. *A random approach to motion planning*. Rapport technique, 1992. **Cité page 34**
- [Petres 2011] C. Petres, M.-A. Romero-Ramirez & F. Plumet. *Reactive path planning for autonomous sailboat*. In 15th International Conference on Advanced Robotics (ICAR), pages 112 –117, 2011. **Cité page 58**
- [Pettersson 2004] P. Pettersson & P. Doherty. *Probabilistic roadmap based path planning for an autonomous unmanned aerial vehicle*. *Sensors*, vol. 200, 2004. **Cité page 35**
- [Peyronne 2012] C. Peyronne. *Modélisation mathématique et résolution automatique de conflits par algorithmes génétiques et par optimisation locale continue*. Université Paul Sabatier de Toulouse, 2012. **Cité page 46**
- [Poullikkas 1998] A. Poullikkas, A. Karageorghis & G. Georgiou. *Methods of fundamental solutions for harmonic and biharmonic boundary value problems*. *Computational Mechanics*, vol. 21, no. 4, pages 416–423, 1998. **Cité page 102**
- [Prandini 2011] M. Prandini, L. Piroddi, S. Puechmorel & S. Brazdilova. *Toward Air Traffic Complexity Assessment in New Generation Air Traffic Management Systems*. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 12, no. 3, pages 809–818, 2011. **Cité page 150**
- [Prestes 2002] E. Prestes, P. Engel, M. Trevisan & M. Idiart. *Exploration method using harmonic functions*. *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 40, no. 1, pages 25–42, 2002. **Cité page 69**



- [Rimon 1988] E. Rimon & D. Koditschek. *Exact robot navigation using cost functions : the case of distinct spherical boundaries in  $E^n$* . In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 1791–1796, 1988. **Cité pages 41, 118, 119, 121, et 122**
- [Roussos 2009] G. Roussos & K. Kyriakopoulos. *Towards constant velocity Navigation and collision avoidance for autonomous nonholonomic aircraft-like vehicles*. In 48th IEEE Conference on Decision and Control held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference (CDC/CCC), pages 5661–5666, 2009. **Cité pages 46 et 125**
- [Sandwell 1987] D. Sandwell. *Biharmonic spline interpolation of GEOS-3 and SEASAT altimeter data*. Geophysical research letters, vol. 14, no. 2, pages 139–142, 1987. **Cité page 99**
- [Shahidi 1991] R. Shahidi, M. Shayman & P. Krishnaprasad. *Mobile robot navigation using potential functions*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 2047–2053, 1991. **Cité page 58**
- [Souissi 2013] O. Souissi, R. Benatitallah, D. Duvivier, A. Artiba, N. Belanger & P. Feyzeau. *Path planning : A 2013 survey*. In International Conference on Industrial Engineering and Systems Management (IESM), pages 1–8, 2013. **Cité page 32**
- [Sridhar 2011] B. Sridhar, H. Ng & N. Chen. *Aircraft trajectory optimization and contrails avoidance in the presence of winds*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 34, no. 5, pages 1577–1584, 2011. **Cité page 38**
- [Strandberg 2004] M. Strandberg. *Augmenting RRT-planners with local trees*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'04), volume 4, pages 3258–3262, 2004. **Cité pages 35 et 36**
- [Sujit 2005] P. Sujit & D. Ghose. *Multiple UAV search using agent based negotiation scheme*. In American Control Conference, volume 5, pages 2995–3000, 2005. **Cité page 44**
- [Svestka 1993] P. Svestka. *A probabilistic approach to motion planning for car-like robots*. Rapport technique, Citeseer, 1993. **Cité page 35**
- [Tarassenko 1991] L. Tarassenko & A. Blake. *Analogue computation of collision-free paths*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 540–545, 1991. **Cité page 67**
- [Timoshenko 1961] S. Timoshenko, J. Goodier & F. Campus. *Théorie de l'élasticité*. Librairie Polytechnique Ch. Béranger Paris, 1961. **Cité page 73**
- [Trevisan 2006] M. Trevisan, M. Idiart, E. Prestes & P. Engel. *Exploratory navigation based on dynamical boundary value problems*. Journal of Intelligent and Robotic Systems, vol. 45, no. 2, pages 101–114, 2006. **Cité page 58**
- [Tsankova 2012] D. Tsankova & N. Isapov. *Potential field based formation control in trajectory tracking and obstacle avoidance tasks*. In 6th IEEE International Conference on Intelligent Systems (IS), pages 76–81, 2012. **Cité page 58**

- [Ulrich 2000] I. Ulrich & J. Borenstein. *VFH\* : local obstacle avoidance with look-ahead verification*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'00), volume 3, pages 2505–2511, 2000. **Cité page 40**
- [Viana 2007] S. Viana, D. Rodger & H. Lai. *Overview of meshless methods*. ICS Newsletter, vol. 14, no. 2, pages 3–6, 2007. **Cité page 102**
- [Wada 2013] M. Wada & R. Torii. *Cooperative transportation of a single object by omnidirectional robots using potential method*. In 16th International Conference on Advanced Robotics (ICAR), pages 1–6, 2013. **Cité page 58**
- [Winn 2012] A. Winn, G. Xuemei, S. Mishra & A. Julius. *Learning potential functions by demonstration for path planning*. In IEEE 51st Annual Conference on Decision and Control (CDC), pages 4654–4659, 2012. **Cité page 58**
- [Yun 2010] S. Yun, V. Ganapathy & L. Chong. *Improved genetic algorithms based optimum path planning for mobile robot*. In 11th International Conference on Control Automation Robotics Vision (ICARCV), pages 1565–1570, 2010. **Cité page 46**
- [Zeghal 1994] K. Zeghal. *Vers une théorie de la coordination d'actions. Application à la navigation aérienne*. Université de Paris 06, France, 1994. **Cité page 58**
- [Zhai 2013] C. Zhai & Y. Hong. *Distributed coverage control of multi-agent systems using navigation functions*. In 10th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA), pages 1691–1695, 2013. **Cité page 44**
- [Zhao 2006] D. Zhao & J. Yi. *Robot planning with artificial potential field guided ant colony optimization algorithm*. In Advances in Natural Computation, pages 222–231. Springer, 2006. **Cité page 61**
- [Zheng 2006] T. Zheng & X. Zhao. *A Novel Approach for Multiple Mobile Robot Path Planning in Dynamic Unknown Environment*. In IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics, pages 1–5, 2006. **Cité page 43**

# *Annexe*

## *Le Trafic Aérien en Détail*

---

Pour la majorité des gens, le trafic aérien se résume à des avions, des pilotes, des compagnies aériennes et des aéroports. Alors qu'arriver à faire travailler ces personnes et entités ensemble n'est pas toujours facile, elles ne sont en fait que la partie immergée de l'iceberg. Ainsi sans le personnel au sol, les passagers ne pourraient pas embarquer et sans la maintenance, aucun avion ne pourrait décoller. Et une fois en l'air, la sécurité des avions repose autant sur les contrôleurs aériens, les aiguilleurs du ciel, que sur les pilotes. Sans une structure et une organisation claire, le système de gestion du trafic aérien, ou ATM, ne pourrait jamais fonctionner. L'objectif de cette annexe est d'expliquer les bases sur lesquelles repose le système ATM européen actuel, ainsi que son organisation.

### **1 La Structure Actuelle de l'Espace Aérien**

Au tout début de l'histoire de l'aéronautique, les pilotes volaient en Visual Flight Rules (VFR) ou vol à vue. Il était de leur responsabilité d'éviter les collisions avec d'autres avions en surveillant l'espace autour d'eux. Avec l'augmentation progressive du trafic, l'amélioration des instruments autorisant un pilotage sans visibilité et l'accroissement des performances des appareils, le vol à vue ne permettait plus d'assurer la sécurité des avions.

L'espace aérien mondial a alors été découpé en "briques élémentaires" qui permettent, aujourd'hui encore, d'organiser le trafic et de maintenir les distances de sécurité entre les avions. Ainsi, même si chaque pays est responsable de son espace aérien, tous les pays partagent des règles de fonctionnement communes, définies par l'Organisation de l'Aviation Civile Internationale (OACI).

#### **1.1 Niveaux de Vol**

Un *niveau de vol* est un plan dont l'altitude est constante par rapport à une référence donnée. En aéronautique, l'altitude n'est pas mesurée directement, mais calculée à partir de la pression à l'extérieur de l'avion et d'une pression de référence. La pression réelle au niveau de la mer étant variable, c'est la pression de l'atmosphère normalisée au niveau de la mer, 1013,25 hPa, qui a été retenue comme référence. Un niveau de vol est donc un plan isobare (à pression constante) par rapport à la pression 1013,25 hPa.

L'altitude d'un avion se mesure en pieds (notés ft) et un niveau de vol se donne en centaine de pieds. Ainsi, un avion volant à 35 000 ft (environ 10 000m) vole au Flight Level (FL) 350. À basse altitude, la plupart des avions volent en VFR et utilisent des niveaux de vol multiples de 5 (FL 95, FL 105...). Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons uniquement aux avions commerciaux qui volent aux instruments (IFR). Ces avions volent sur des niveaux de vol multiples de 10 (FL 180, FL 190...).

La distance verticale de sécurité entre deux avions est de 1000 pieds (environ 300m). Le trafic est alors organisé grâce à la *règle semi-circulaire* : les avions suivant une route magnétique  $0^\circ$  à  $179^\circ$  volent sur les niveaux de vol impairs (90, 110, 130, ...) et les avions suivant une route magnétique de  $180^\circ$  à  $359^\circ$  volent sur les niveaux de vol pairs (80, 100, 120, ...) comme illustré Figure 1. Cette règle permet d'éviter à deux avions volant face à face de se retrouver sur un même niveau de vol, évitant ainsi de créer des conflits qui seraient difficiles à résoudre compte tenu des vitesses qui entrent en jeu.

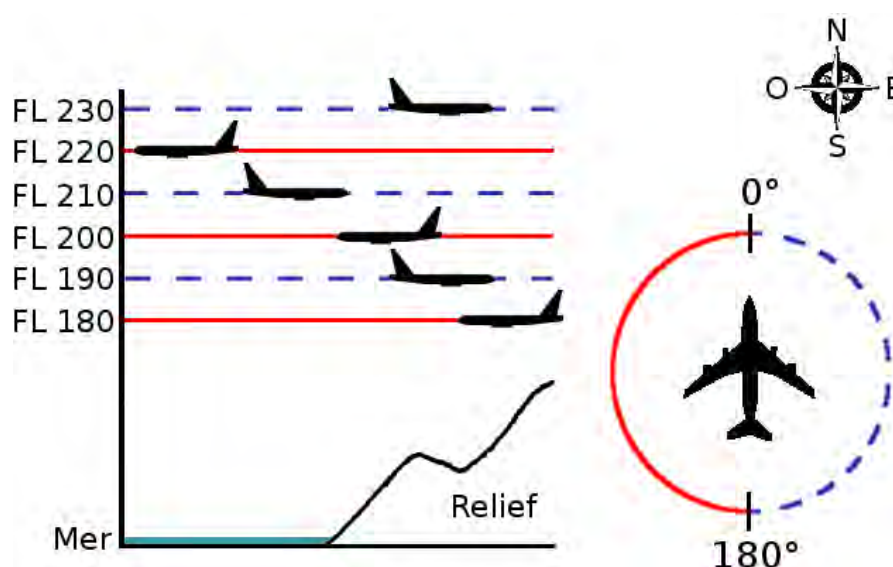


FIGURE 1 – Règle semi-circulaire appliquée aux niveaux de vol 180 à 230.

## 1.2 Balises et Routes

Les *balises* sont des points de l'espace aérien connus avec précision et diffusés par les Services de l'Information Aéronautique (SIA). Elles sont généralement associées à un moyen radioélectrique. La liste des balises est fixe, ce qui permet de les utiliser comme référence pour la définition de routes.

Une *route aérienne* est définie par une liste de balises, reliées entre elles par des segments de lignes droites. Toutes les balises du réseau ne sont pas reliées par des routes aériennes. Une balise n'est en réalité connectée qu'à quelques-unes de ses voisines. Par exemple, sur la Figure 2, la balise TOU n'est pas directement reliée à la balise GIROM. Un avion souhaitant se rendre de TOU à GIROM devra passer par la balise GONUP.

Il existe deux réseaux de routes aériennes : un réseau dit supérieur (FL 200 et plus) et un réseau inférieur (FL 190 et moins). En effet, les flux principaux sont différents à haute et basse altitude. L'utilisation de deux réseaux distincts permet d'offrir des routes aériennes plus adaptées au trafic et des points de raccord permettent de passer d'un réseau de routes à l'autre.

Cette structuration des trajectoires en routes aériennes facilite le travail des contrôleurs aériens : il leur suffit en effet de surveiller ces routes et leurs intersections pour prévenir les collisions. Les contrôleurs savent également qu'un avion suivra une route jusqu'à la prochaine balise, améliorant ainsi la prédictibilité du trafic. Ce système de route facilite aussi le travail des pilotes, qui suivent de longs segments de droites entrecoupés de virages plutôt qu'une trajectoire continûment variable.

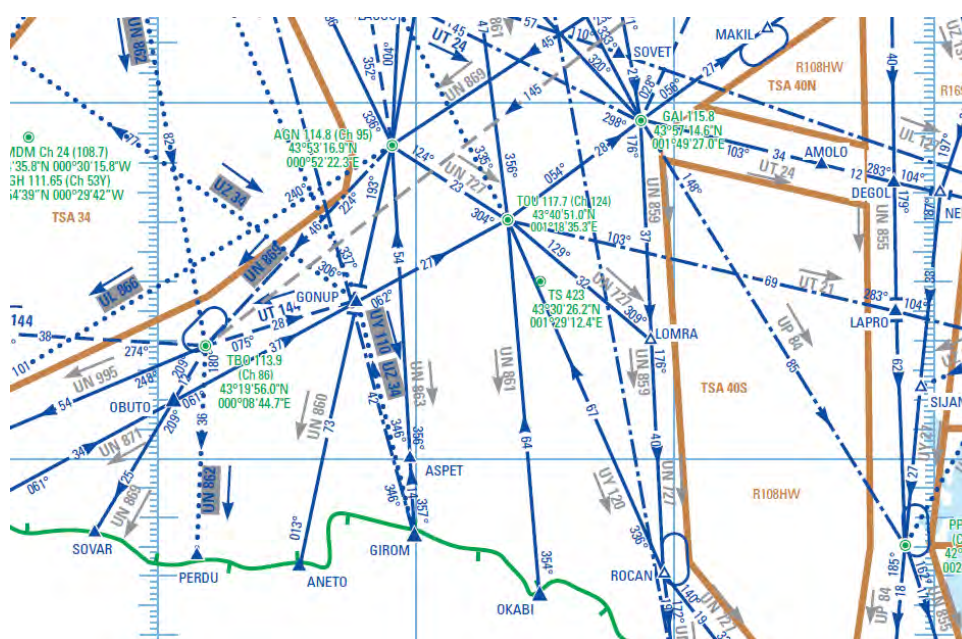


FIGURE 2 – Routes aériennes dans l'espace supérieur au-dessus de Toulouse. Les balises sont représentées par des triangles ou des cercles verts à l'intersection de plusieurs routes. ©SIA

### 1.3 Plans de Vol

Un *plan de vol* est une demande d'utilisation de l'espace aérien déposée auprès d'un organisme régulateur, en Europe il s'agit du Network Manager (présenté dans la Section 2.2 de cette annexe). Le plan de vol spécifie entre autres un numéro d'identification du vol (AF512), le type de l'avion (A320), un aéroport et une heure de départ, une vitesse de croisière (460kt ou 850km/h), un niveau de vol de croisière (FL 350), une route aérienne, un aéroport et une heure estimée d'arrivée.

Une fois le plan de vol accepté par le Network Manager, les compagnies aériennes (et donc leurs pilotes), s'engagent à le suivre et à ne s'en détourner que sur ordre express des contrôleurs aériens.

Le processus de dépôt et d'acceptation de plan de vol permet d'effectuer une première vérification sur les trajectoires que les avions souhaitent suivre : empruntent-ils bien les routes existantes ? Traversent-ils des zones interdites ? Les plans de vol permettent également de prévoir l'état du trafic et de prévenir les situations de surcharge où le nombre d'avions souhaitant traverser une zone donnée est supérieur au nombre d'avions que les contrôleurs peuvent gérer en toute sécurité. De plus, les plans de vol facilitent le travail des contrôleurs qui peuvent anticiper la route d'un avion et détecter tout changement de trajectoire imprévu.

### 1.4 Secteurs

Un contrôleur aérien ne peut pas surveiller seul le trafic sur un espace trop vaste tout en garantissant un certain niveau de sécurité. Afin de répartir la charge de travail entre les contrôleurs, l'espace aérien est découpé en *secteurs*.

Un secteur est défini par un ou plusieurs *planchers* (niveau de vol minimal), par un ou plusieurs *plafonds* (niveau de vol maximal), des limites géographiques (contour de la zone) et une fréquence radio dédiée au contrôle aérien.

Il existe deux grandes classes de secteurs :

- ✈ des *secteurs non contrôlés* pour lesquels seuls des services d'information et d'alerte sont fournis,
- ✈ des *secteurs contrôlés* où, en plus des services déjà cités, la séparation entre les avions est assurée par les contrôleurs aériens.

À basse altitude, la plupart des secteurs sont non contrôlés et les avions volent en VFR, sauf dans les zones autour des aéroports, appelées TMA. À haute altitude, la quasi totalité des secteurs de l'espace sont contrôlés, on les appelle alors *secteurs de contrôle en-route*. L'exception majeure à cette règle concerne l'espace aérien au-dessus des océans qui n'est pas couvert par des radars : la séparation entre aéronefs y est assurée par les procédures de vol.

#### **Terminal Manoeuvring Area (TMA)**

La TMA est une zone contrôlée située à proximité d'un ou plusieurs aéroports importants. Les contrôleurs responsables de la TMA gèrent alors des trajectoires de départ (phase de montée), des trajectoires d'arrivée (phase de descente) et des stacks (aussi appelés hippodromes à cause de leur forme particulière) dans lesquels sont empilés les avions lorsqu'ils sont trop nombreux à vouloir atterrir.

#### **Secteur de Contrôle En-Route**

Contrairement aux TMA, la taille et la forme des secteurs de contrôle en-route peut varier dans la journée, en fonction du nombre d'avions présents dans le ciel. La capacité d'un secteur, c'est-à-dire le nombre d'avions qu'un secteur peut accueillir en même temps est une valeur empirique définie par les équipes de contrôleurs. La forme d'un secteur dépend également de ces flux, ce qui explique la forme allongée de certains secteurs au sud de Paris (voir Figure 3), qui comportent des routes aériennes majeures reliant Paris à diverses grandes villes au sud.

Chaque secteur est contrôlé par une paire de contrôleurs, qui remplissent trois fonctions majeures :

- la surveillance des avions qui doivent suivre leur plan de vol,
- le transfert des avions de et vers les secteurs voisins (tâche de coordination),
- la détection et la résolution de conflits.

Lorsque l'intensité du trafic diminue (la nuit par exemple), des regroupements de secteurs sont effectués afin de limiter le nombre de contrôleurs en activité. Les regroupements peuvent alors être géographiques (secteurs côte à côte) ou en couches (niveaux de vol).

À l'inverse, un secteur peut être divisé lorsque le trafic qui le traverse est trop important pour être géré par une seule équipe de contrôleurs. Contrairement à ce que l'on pourrait penser, la taille des secteurs ne peut pas être réduite à l'infini pour augmenter leur capacité. Il arrive en effet un stade où la diminution de la tâche de surveillance ne compense plus la hausse de la tâche de coordination avec les autres secteurs. Pire, dans un secteur trop petit, un contrôleur n'aurait pas le temps d'anticiper et encore moins de résoudre certains conflits puisque les avions lui seraient transmis trop tard.

En France, il existe cinq Centre Régional de la Navigation Aérienne (CRNA) réunissant la totalité des contrôleurs en-route (voir Figure 4) :

- CRNA Nord d'Athis-Mons (Paris Contrôle)
- CRNA Est de Reims (Reims Contrôle)
- CRNA Sud-Est d'Aix en Provence (Marseille Contrôle)
- CRNA Sud-Ouest de Bordeaux (Bordeaux Contrôle)
- CRNA Ouest de Brest (Brest Contrôle)

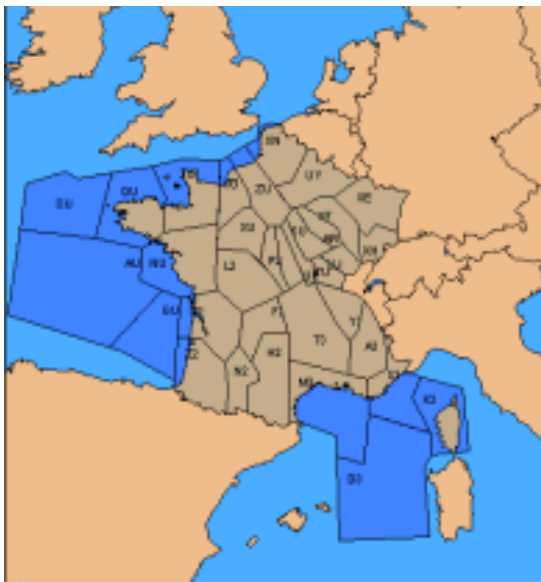


FIGURE 3 – Un découpage de l'espace aérien français en secteurs.

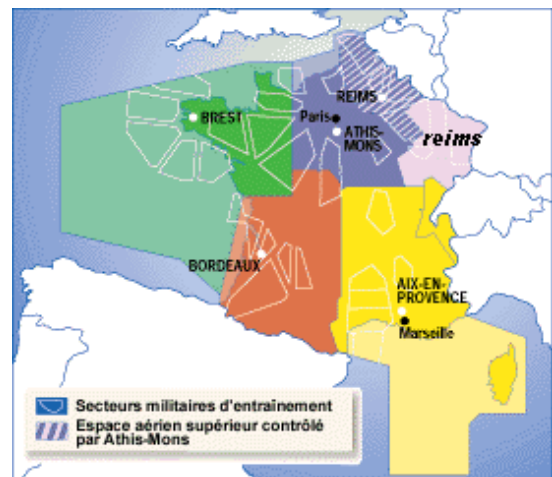


FIGURE 4 – Les cinq centres de contrôle en-route en France. Source : Wikivolitif-Aéronautique - <http://aeronautique.forumserv.com/index.php>

## 2 Une Organisation Complexe Centrée autour du Network Manager

En Europe, de très nombreux organismes collaborent afin de rendre le trafic aérien possible. La principale difficulté de cette collaboration vient de la diversité des entités impliquées, qui peuvent être locales, régionales, nationales ou internationales ; publiques, privées ou militaires.

### 2.1 Un Système, de Multiples Acteurs, de Multiples Niveaux

Parmi les principaux acteurs du système ATM européen on trouve les compagnies aériennes regroupant le personnel navigant (pilotes, mécaniciens de vol, hôtesses et stewards), ainsi que du personnel au sol dans différents aéroports (entretien et maintenance des avions, service client).

Un aéroport est une entité à part entière, qui accueille les compagnies aériennes, mais également les contrôleurs aériens gérant le roulage au sol, le décollage, l'atterrissage et les phases d'approche des avions.

La partie en-route des vols est quant à elle gérée par les centres de contrôles du trafic (voir Section 1.4) que l'on regroupe souvent sous le nom de ATC. Ces centres de contrôle en-route sont placés sous la responsabilité d'un ANSP (voir ci-après).

Aviation civile et aviation militaire partagent majoritairement le même espace aérien, même si certaines zones de l'espace peuvent être réservées spécifiquement pour les militaires en entraînement ou en manœuvre.

#### Air Navigation Service Provider (ANSP)

L'ANSP est un organisme dont le rôle est de gérer l'espace aérien d'un État ou d'une région. Ces organismes peuvent être publics, privés ou militaires. Ainsi, l'ANSP française, la Direction des Services de la Navigation Aérienne (DSNA) est un service de la Direction Générale de l'Aviation Civile (DGAC), qui dépend elle-même du Ministère de l'Écologie, du Développement durable et de l'Énergie français. En Allemagne, la Deutsche Flugsicherung (DFS) est une entreprise privée possédée à 100% par le gouvernement allemand. Au Brésil, le Departamento de Controle do Espaço Aéreo (DECEA) est un organisme militaire chargé du contrôle du trafic dans l'espace aérien brésilien. Ainsi, si les règles de la navigation aérienne sont les mêmes partout dans le monde grâce à l'OACI, l'organisation et même les missions des ANSP diffèrent dans chaque pays.

### 2.2 Network Manager

Historiquement chaque pays était responsable de son espace aérien, entraînant un découpage du ciel et une organisation de l'ATM au niveau national. Afin d'optimiser les performances globales du système en Europe, la commission européenne a créé la fonction de Network Manager afin de réunir les ANSP nationales et de réorganiser le service ATM au niveau européen. C'est Eurocontrol qui, en juillet 2011, a été choisi par la commission européenne pour remplir le rôle de Network Manager. Le mandat d'Eurocontrol prendra fin en décembre 2019, date à laquelle la commission européenne devra le confirmer dans ses fonctions ou choisir un nouveau prestataire.



## **Eurocontrol**

Eurocontrol a été fondé en 1960 et son objectif à l'époque était déjà d'uniformiser et d'organiser le trafic à l'échelle européenne. Eurocontrol réunit aujourd'hui 41 États membres et assure la liaison entre :

- ✈ 1750 secteurs de contrôle,
- ✈ 65 centres en-route,
- ✈ 520 aéroports,
- ✈ jusqu'à 32 600 vols par jour de forte affluence,
- ✈ 9 670 000 vols par an.

## **Tâches du Network Manager**

Le rôle du Network Manager consiste à optimiser la capacité et les performances du système ATM européen. D'un point de vue stratégique, il fixe des objectifs communs à l'ensemble des acteurs de l'ATM européen afin de faire converger leurs systèmes et leurs pratiques. Le Network Manager participe également à la conception des nouveaux systèmes qui permettront d'améliorer le trafic.

D'un point de vue opérationnel, le rôle du Network Manager est d'améliorer la communication et la coordination entre les différents acteurs de l'aérien. Il aide également les ANSP, les utilisateurs civils et militaires de l'espace aérien ainsi que les aéroports à améliorer leurs performances. Il gère les ressources du système : capacité des secteurs, codes transpondeur, fréquences radio, etc. Tous les services opérationnels du Network Manager sont regroupés dans le NMOC.

## **Network Manager Operations Center (NMOC)**

La première fonction du NMOC consiste à traiter les plans de vol, à travers ses unités Initial Flight Plan processing System (IFPS). Il en corrige les anomalies, puis les transmet à tous les centres de contrôles concernés. Le NMOC compte deux unités IFPS qui travaillent en parallèle : une à Bruxelles et l'autre à Brétigny en France. Chaque unité peut fonctionner comme site de secours de l'autre en cas de panne, garantissant ainsi une continuité de service.

C'est également le NMOC qui gère l'ATFCM, dont le but est d'optimiser la capacité de l'ATC pour répondre au mieux à la demande en trafic, tout en assurant la sûreté du système. Grâce aux plans de vol déposés, ainsi qu'aux statistiques des années précédentes, le NMOC prédit les besoins en terme de capacité des secteurs de contrôle. Il optimise la taille et la forme des secteurs en fonction des flux pour utiliser au mieux l'espace aérien disponible. Le NMOC anticipe également les événements qui ont un fort impact sur le trafic (événements sportifs par exemple) et prend des mesures en conséquence. Enfin, le NMOC gère de manière centralisée les imprévus (éruption volcanique de l'Eyjafjöll en 2010, tempêtes de neige) afin de limiter les propagations de retard dans le système.

Le NMOC est aussi responsable de la collecte, de la diffusion et de l'analyse des données sur l'ensemble du système à travers des bases de données centralisées.

### Vers une Évolution du Système

La désignation d'Eurocontrol comme Network Manager par la commission européenne en 2011 a été un pas majeur vers l'uniformisation du système à l'échelle européenne. Le traitement des plans de vol de manière centralisée, ainsi qu'un meilleur partage des informations entre acteurs du système ont déjà permis d'améliorer le trafic aérien en Europe.

La prochaine étape d'uniformisation consiste à réduire le nombre d'acteurs du système, à travers notamment le regroupement des ANSP sous forme de Functional Airspace Block (FAB). Chaque FAB devient une zone dont les secteurs ne sont plus fixés par les frontières entre États, mais par les contraintes opérationnelles du trafic aérien. La France a rejoint l'Allemagne, la Belgique, le Luxembourg, les Pays-Bas et la Suisse dans le Functional Airspace Block Europe Central (FABEC), qui regroupe à lui seul 55% du trafic européen.

## 3 Single European Sky ATM Research (SESAR)

Le projet SESAR se découpe en trois phases :

- ✈ La phase de définition (de 2004 à 2008) a délivré un schéma directeur définissant le contenu, le développement et le déploiement des systèmes de prochaine génération.
- ✈ La phase de développement (de 2008 à 2015) doit concevoir la nouvelle génération de systèmes définie dans la première phase.
- ✈ La phase de déploiement (de 2013 à 2020) verra la production de ces nouveaux systèmes et la mise en œuvre des nouvelles infrastructures de gestion de trafic afin d'améliorer l'efficacité du transport aérien européen.

Les objectifs globaux de SESAR se résument en quatre nombres clés :

- ✈ augmenter de 27% la capacité de l'espace aérien européen,
- ✈ réduire de 40% les risques d'accident,
- ✈ réduire de 2,8% l'impact environnemental des vols,
- ✈ réduire de 6% les coûts opérationnels du système.

Le programme SESAR est financé pour un tiers par l'Union européenne, un tiers par Eurocontrol et un tiers par les industriels. Le budget total pour sa phase de développement représente 2,1 milliards d'euros. Il regroupe aujourd'hui plus de 70 entreprises publiques ou privées (universités, organismes de contrôle aérien, industriels d'électronique, d'informatique et de défense, constructeurs et équipementiers aéronautiques et gestionnaires d'aéroports). Ses activités opérationnelles, de déploiement de systèmes et de recherche sont organisées en dix-huit Work Packages (WPs), menés par des consortiums d'entreprises.

## *Liste des Acronymes*

---

<b>i4D</b>	initial 4D trajectory
<b>ADS-B</b>	Automatic Dependent Surveillance-Broadcast
<b>ANSP</b>	Air Navigation Service Provider
<b>ATC</b>	Air Traffic Control
<b>ATM</b>	Air Traffic Management
<b>ATFCM</b>	Air Traffic Flow and Capacity Management
<b>BEM</b>	Boundary Element Method (Méthode des éléments finis de frontières ou encore Méthode des éléments frontières).
<b>CRNA</b>	Centre Régional de la Navigation Aérienne
<b>CTA</b>	Controlled Time of Arrival (ou Constrained Time of Arrival)
<b>DECEA</b>	Departamento de Controle do Espaço Aéreo
<b>DFS</b>	Deutsche Flugsicherung
<b>DGAC</b>	Direction Générale de l'Aviation Civile
<b>DSNA</b>	Direction des Services de la Navigation Aérienne
<b>EDP</b>	Équation aux Dérivées Partielles
<b>FAB</b>	Functional Airspace Block (Bloc d'espace aérien fonctionnel)
<b>FABEC</b>	Functional Airspace Block Europe Central
<b>FMS</b>	Flight Management System
<b>FL</b>	Flight Level (Niveau de Vol)
<b>FRAM</b>	Free Route Airspace Maastricht
<b>GPS</b>	Global Positioning System
<b>IFPS</b>	Initial Flight Plan processing System
<b>IFR</b>	Instrument Flight Rules (Vol aux Instruments)
<b>MFS</b>	Method of Fundamental Solutions (Méthode des solutions fondamentales)
<b>NM</b>	Nautic Mile (Mille Marin)
<b>NMOC</b>	Network Manager Operations Center
<b>OACI</b>	Organisation de l'Aviation Civile Internationale
<b>RBT</b>	Reference Business Trajectory

<b>RRT</b>	Rapidly exploring Random Tree
<b>SESAR</b>	Single European Sky ATM Research
<b>SIA</b>	Services de l'Information Aéronautique
<b>SMA</b>	Système Multi-Agents
<b>TBO</b>	Trajectory Based Operations
<b>TCAS</b>	Traffic alert and Collision Avoidance System (Système d'Alerte de Trafic et d'Évitement de Collision)
<b>TMA</b>	Terminal Manoeuvring Area
<b>UAV</b>	Unmanned Aerial Vehicle
<b>VFH</b>	Vector Field Histogram
<b>VFR</b>	Visual Flight Rules (Vol à Vue)
<b>WP</b>	Work Package

# Index

---

- A**  
Admissibilité ..... 119  
Analyticité ..... 119  
Air Navigation Service Provider (ANSP) .168  
Artificial potential field method ..... 53
- B**  
Balise ..... 164
- C**  
Cell decomposition ..... 33  
Centralisée, approche ..... 45  
Champ de potentiel ..... 39, 53  
    de Khatib ..... 54  
    harmonique ..... 62  
Complétude ..... 30  
    liée à la résolution ..... 30  
    probabiliste ..... 31  
Conflit ..... 24  
Contrôle optimal ..... 37  
    méthode directe ..... 37  
    méthode indirecte ..... 38  
Croisière ..... 22  
Controlled Time of Arrival (CTA) ..... 17  
Cylindre de sécurité ..... 24
- D**  
Décentralisée, approche ..... 45  
Décomposition chemin-vitesse ..... 32  
Décomposition en cellules ..... 33  
Diagramme de Voronoï ..... 36  
Dirichlet, condition de ..... 62
- E**  
Équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman ..... 39  
Espace de configuration ..... 31, 46, 101, 123  
    complexe ..... 144  
Espace de travail ..... 31, 118  
Espace libre ..... 32, 118  
Eurocontrol ..... 169
- F**  
Fonction biharmonique ..... 73  
Fonction d'Airy ..... 76  
Fonction de Lyapunov ..... 134  
Fonction de Morse ..... 119  
Fonction de navigation ..... 41, 120  
    de Kyriakopoulos *et al.* ..... 124  
    de Loizou ..... 126  
    de Rimon et Koditschek ..... 121  
    harmonique ..... 130  
Fonction harmonique ..... 61  
Fonction pluriharmonique ..... 143  
Free-route ..... 18
- G**  
Graphe de visibilité ..... 36
- L**  
Ligne de discontinuité ..... 87
- M**  
Merging point ..... 17  
Méthode déterministe ..... 46  
Méthode heuristique ..... 46  
Method of Fundamental Solutions (MFS) 102  
Mouvement coordonné ..... 45
- N**  
Network Manager ..... 168  
Neumann, condition de ..... 67  
Niveau de vol ..... 163

Network Manager Operations Center . . . .	169	<b>V</b>	
Normes de Séparation . . . . .	24	Vector Field Histogram (VFH) . . . . .	40
<b>P</b>		Visibility graph . . . . .	36
Path-Velocity decomposition . . . . .	32	Voronoi diagram . . . . .	36
Phase de régulation		<b>Z</b>	
pré-tactique . . . . .	22	Zone de convergence . . . . .	88
stratégique . . . . .	21		
tactique . . . . .	22		
Phases de vol . . . . .	22		
Plan de vol . . . . .	165		
Planification de chemin . . . . .	29		
Planification de trajectoire . . . . .	29		
Point critique . . . . .	119		
non-dégénéré . . . . .	119		
Point de collocation . . . . .	102		
Point source . . . . .	102		
Polarité . . . . .	119		
Potential field method . . . . .	39		
Probabilistic roadmap . . . . .	34		
Programmation dynamique . . . . .	39		
Propagation de contraintes . . . . .	74, 76		
<b>R</b>			
Règle semi-circulaire . . . . .	164		
Reference Business Trajectory (RBT) . . . .	17		
Redressement (champ biharmonique) . . . .	82		
Route aérienne . . . . .	164		
Rapidly exploring Ramdom Tree (RRT) . . .	35		
<b>S</b>			
Secteur de contrôle . . . . .	166		
En-Route . . . . .	166		
Free-route . . . . .	18		
Séquencement . . . . .	42		
SESAR . . . . .	170		
Système Multi-Agents (SMA) . . . . .	44		
Stabilité de Lyapunov . . . . .	134		
<b>T</b>			
Trajectory Based Operations (TBO) . . . .	17		
Traffic alert and Collision Avoidance System (TCAS) . . . . .	26		
Techniques de contrôle . . . . .	25		
Théorie de l'élasticité . . . . .	74		
Terminal Manoeuvring Area (TMA) . . . .	166		
Trajectoire 4D . . . . .	18		
Triplet de variété lisse . . . . .	119		

# *Productions de la Thèse*

---

## **Revue Internationale avec Comité de Relecture**

1. L. Guys, S. Puechmorel, L. Lapasset : A Centralized Approach for Aircraft Trajectory Planning : the Harmonic Navigation Function. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, soumis pour troisième lecture le 29 septembre 2014.

## **Conférence Internationale avec Actes et Comité de Relecture**

1. L. Guys, S. Puechmorel, L. Lapasset : Automatic conflict solving using biharmonic navigation functions. In *15th meeting of the EURO Working Group on Transportation (EWGT)*, Paris Septembre 2012, disponible en ligne :  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042812043145>

## **Congrès sur Résumé**

1. L. Guys, S. Puechmorel, L. Lapasset : Planification coordonnée de trajectoires d'avions : une approche par les fonctions harmoniques. In *15e congrès annuel de la Société française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision (ROADEF)*, Bordeaux Février 2014.
2. L. Guys, L. Lapasset : Harmonic and Biharmonic Navigation Functions for Conflict-free Trajectory Planning, Poster. In *2nd SESAR Innovation Days*, Braunschweig Novembre 2012.
3. L. Guys, S. Puechmorel, L. Lapasset, P. Maréchal, L. Amodéi : Génération automatique de trajectoires aériennes sans conflit à l'aide de fonctions biharmoniques. In *13e congrès annuel de la Société française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision (ROADEF)*, Angers Avril 2012.







# Planification de Trajectoires d'Avions sans Conflit : Fonctions Biharmoniques et Fonction de Navigation Harmonique

Nous nous plaçons ici dans le cadre d'une planification de trajectoires d'avion dans des secteurs free-route, c'est-à-dire des secteurs où les avions ne sont plus astreints à suivre les routes aériennes. Cette planification est réalisée plusieurs jours, voir semaines avant le décollage. Notre but n'est pas de contrôler les avions en temps réel afin de garantir l'évitement de conflit, mais d'organiser le trafic en amont afin que les seuls conflits que les contrôleurs aient à gérer soient liés à des perturbations du système (comme les aléas météorologiques). Un tel outil de planification pourrait également être utilisé comme outil de simulation, afin par exemple de prendre des décisions sur l'allocation de créneaux de décollage.

Cette thèse s'intéresse à l'utilisation de la méthode des *champs de potentiel* pour la planification de trajectoires sans conflits d'un grand nombre d'avions. L'étude des champs de potentiel harmoniques, ainsi que des champs biharmoniques montrent les limites de ces méthodes qui explosent en temps de calcul lorsque le nombre d'avions augmente. Cette conclusion nous a poussé à étudier un autre type de champs de potentiel : les *fonctions de navigation*, déjà utilisées pour la résolution de conflits aériens. Nous proposons dans la dernière partie de cette thèse une nouvelle fonction de navigation, qui s'inspire à la fois des travaux réalisés sur les champs de potentiel harmoniques et sur les fonctions de navigation. Cette *fonction de navigation harmonique* permet de planifier un très grand nombre de trajectoires en un temps très court, tout en garantissant théoriquement certaines propriétés intéressantes pour les trajectoires obtenues, comme une vitesse constante par exemple. Des pistes d'amélioration de la fonction de navigation harmonique sont également proposées, notamment pour optimiser les trajectoires obtenues lors de la planification.

**Mots-clés :** fonction de navigation, fonction biharmonique, fonction harmonique, Air Traffic Management, planification de trajectoire, évitement de conflit.

## Aircraft Trajectory Planning without Conflict : Biharmonic Functions and Harmonic Navigation Function

We consider a planning of aircraft trajectories in free-route sectors, i.e. sectors where aircraft do not have to follow air routes anymore. The planning is done several days, or even weeks before take-off. Our goal does not entail control of the aircraft in real time to avoid conflicts, but an organization of the traffic so the only conflicts the controllers have to manage come from perturbations of the system (like meteorological hazard). Such a planning tool could also be used as a simulation tool, to determine for example take-off planning.

This thesis focuses on the *potential fields method* to plan conflict-free trajectories for a large number of aircraft. The study of harmonic potential fields, as well as biharmonic fields highlights the limits of these methods: their computation time explodes with the increase of the number of flights. This conclusion brought us to study an other type of potential fields: the *navigation functions*, already used for conflict-avoidance. We propose in the last part of this thesis a new navigation function, based on previous work on harmonic functions and navigation functions. This *harmonic navigation function* is able to plan a large number of aircraft trajectories with a very small computation time. It also guarantees some good properties for the planned trajectories, like constant speed. Some leads are also given on how to improve the harmonic navigation function, especially how to optimize the trajectories it produces.

**Keywords :** navigation function, biharmonic function, harmonic function, Air Traffic Management, trajectory planning, conflict avoidance.