



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

Présentée et soutenue par :

Alban Portello

Le 10 Décembre 2013

Titre :

Localisation Binaurale Active de Sources Sonores en Robotique Humanoïde

EDSYS : Automatique 4200046

Unité de recherche :

Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS

Directeur(s) de Thèse :

Patrick DANÈS, Professeur des Universités, Université Toulouse 3 Paul Sabatier
Sylvain ARGENTIERI, Maître de Conférences, Université Pierre et Marie Curie

Rapporteurs :

Laurent GIRIN, Professeur des Universités, INP Grenoble
Emmanuel VINCENT, Chargé de Recherche HdR, LORIA-INRIA Nancy

Autre(s) membre(s) du jury :

Éric MOREAU, Professeur des Universités, Université de Toulon
Radu HORAUD, Directeur de Recherche, INRIA Grenoble
Philippe SOUERES, Directeur de Recherche, LAAS-CNRS
Yannick DEVILLE, Professeur des Universités, Université Toulouse 3 Paul Sabatier (Président)

Remerciements

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont été effectués au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS) du CNRS. Je remercie les directeurs successifs du LAAS, Raja Chatila, Jean-Louis Sanchez et Jean Arlat de m'avoir accueilli au sein de leur laboratoire.

Je tiens à exprimer mes remerciements à Laurent Girin, Professeur des Universités à l'Institut Polytechnique de Grenoble, et Emmanuel Vincent, Chargé de Recherche à l'INRIA Nancy, pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse, ainsi que pour leurs retours pertinents et encourageants sur le manuscrit.

Merci également à Éric Moreau, Professeur des Universités à l'Université de Toulon, Radu Horaud, Directeur de Recherche à l'INRIA Grenoble, Philippe Soueres, Directeur de Recherche au LAAS-CNRS, d'avoir accepté d'être membres du jury, et à Yannick Deville, Professeur des Universités à l'Université Paul Sabatier de Toulouse, d'avoir accepté de le présider.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Patrick Danès, Professeur des Universités à l'Université Paul Sabatier de Toulouse et responsable du groupe Robotique, Action et Perception (RAP) du LAAS-CNRS, ainsi qu'à Sylvain Argentieri, Maître de Conférence à l'Université Pierre et Marie Curie de Paris, pour avoir encadré ces travaux. Je les remercie tous deux pour leur soutien scientifique et moral, et leur disponibilité.

Merci à tous les permanents, doctorants et stagiaires du groupe RAP, aux enseignants de l'Université Paul Sabatier, et autres personnes m'ayant apporté leur aide durant ces trois années de thèse.

Je remercie finalement ma famille et amis, qui m'ont soutenu et encouragé pendant cette thèse. Merci Christine de m'avoir supporté au quotidien.

Table des matières

Table des matières	1
1 Introduction	5
1.1 Présentation du contexte	5
1.1.1 L'audition en robotique	5
1.1.2 Le paradigme binaural	6
1.1.3 L'audition active	7
1.1.4 Filtrage stochastique en audition	8
1.2 Modélisation du problème et mise en équation	9
1.2.1 Notations	10
1.2.2 Modélisation du problème	10
1.2.3 Équation d'état à temps continu	11
1.2.4 Équation d'observation	14
A Quelques rappels d'acoustique théorique	14
B Indices acoustiques utilisables pour la localisation	16
1.2.5 Cas d'étude	19
1.3 Organisation de la thèse	21
2 Estimation court terme de spectres et de temps de retard	23
2.1 Estimation spectrale	23
2.1.1 Estimation de la fonction d'autocorrélation d'un signal	24
A Théorèmes préliminaires	24
B Estimateurs de l'autocorrélation et statistiques	25
2.1.2 Estimation non paramétrique de la densité spectrale de puissance	27
A Le périodogramme	27
B Lissage par moyenne empirique de périodogrammes court terme	28
B-1 Définition générale de l'estimateur	28
B-2 Théorèmes préliminaires	29
B-3 Statistiques de l'estimateur	31
B-4 Interprétation des résultats	33
B-5 Statistiques de l'estimateur en terme d'amplitude et de phase	34
C Lissage par modulation de l'autocorrélation	36
C-1 Définition de l'estimateur	36
C-2 Théorème préliminaire	37
C-3 Statistiques de l'estimateur	38

	C-4	interprétation des résultats	40
	D	Discussions	40
2.1.3		Estimation paramétrique	40
	A	Modèle Auto Régressif	41
	B	Modèle à Moyenne Ajustée	43
	C	Modèle Auto Régressif à Moyenne Ajustée	44
2.2		Estimation de temps de retard	46
2.2.1		Modélisation «instantanée» des signaux perçus	46
2.2.2		Méthode de la corrélation croisée	47
2.2.3		Méthode de la corrélation croisée généralisée	48
	A	Le processeur Roth	49
	B	Le processeur SCoT	51
	C	Le processeur PhaT	52
	D	Le processeur HT	52
	E	Estimation des spectres et du module au carré de la cohérence	56
2.2.4		Estimation de temps de retard basée sur une régression linéaire du déphasage	58
2.2.5		Bornes théoriques associées au problème d'ETR	59
	A	Tests d'hypothèses binaires, rapport de vraisemblances, risque d'erreur	60
	B	Risque minimal d'erreur pour le problème d'estimation du temps de retard	62
	C	Borne inférieure de Ziv-Zakai	64
	D	Borne inférieure de Ziv-Zakai pour les signaux faible bande	65
2.3		Discussion	66
3		Estimation court terme d'azimut, détection d'activité	69
3.1		Diffusion de l'onde incidente par une tête, estimation d'azimut	69
3.1.1		Localisation binaurale par estimation conjointe d'ILD et d'ITD et pré-tabulation d'ITF	70
3.1.2		Localisation binaurale par identification de signatures dans le plan ILD-IPD	71
3.1.3		Méthode par maximum de vraisemblance	72
	A	Hypothèse d'une source aléatoire gaussienne	72
	A-1	Construction du vecteur de données et définition du modèle d'observation	72
	A-2	Estimation des paramètres spatiaux et spectraux du problème	74
	B	Source déterministe inconnue	79
	B-1	Définition du modèle d'observation	79
	B-2	Estimation des paramètres spatiaux et spectraux du problème	81
	C	Discussions	82
	D	Résultats de simulation et interprétation	83
	D-1	Propagation en champ libre	83
	D-2	Diffusion sur une tête sphérique rigide	84
3.2		Détection instantanée d'activité de la source	85
3.2.1		Test de Rapport de Vraisemblances basé sur la linéarité de la phase	85
3.2.2		Test du Rapport de Vraisemblance Généralisé basé sur des vraisemblances monaurales	88
3.2.3		Détection basée sur la théorie de l'information	90
	A	Une brève introduction à l'identification statistique	90

	B	Application à la détection d'activité de source large-bande	90
4		Filtrage Bayésien	93
4.1		Discrétisation de l'équation d'état à temps continu	93
4.2		Stratégies de filtrage	94
	4.2.1	Conventions et notations	94
	4.2.2	Cadre de travail	94
	4.2.3	Hypothèses de travail	95
	4.2.4	Le filtrage Bayésien optimal et sa solution récursive exacte	95
	4.2.5	Le filtre de Kalman	97
	4.2.6	Extensions non linéaires du filtre de Kalman	98
	A	Transformée unscented et filtre de Kalman unscented	98
	B	Implémentation du filtre de Kalman unscented	99
4.3		Stratégies multi-hypothèses pour pallier les problèmes d'initialisation et de propa- gation de distributions étalées	101
	4.3.1	Distribution initiale multi-hypothèses	102
	4.3.2	Distributions des bruits multi-hypothèses	103
4.4		Analyse de résultats de simulation	105
4.5		Liens avec le problème du <i>Bearings-Only Tracking</i>	115
4.6		Gestion de fausses mesures	119
	A	Modèle à une mesure	120
	B	Modèle à mesures multiples	124
4.7		Détection et localisation conjointes	129
	A	Une approche basée sur le TRVG	131
	A-1	Détection d'un saut $\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$	131
	A-2	Détection d'un saut $\mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_1$	132
	A-3	Considérations importantes	132
	B	Une approche basée sur les MMI	135
4.8		Évaluation expérimentale de l'approche proposée	140
	4.8.1	Description du protocole expérimental	140
	4.8.2	Résultats de la localisation	142
4.9		Stratégie pour une tête	148
5		Prospectives pour la localisation multi-cibles	157
5.1		Détection instantanée d'azimuts de plusieurs sources	157
	5.1.1	L'algorithme Espérance-Maximisation en bref	160
	5.1.2	Hypothèse de parcimonie des sources dans le domaine temps-fréquence	162
	5.1.3	Échantillons des sources comme données latentes	167
	5.1.4	Sources Indépendantes	171
	5.1.5	Discussions	175
5.2		Filtrage multi-sources	175
6		Conclusion	181
7		Annexes	183
7.1		Probabilités	183
	7.1.1	Généralités sur les ensembles	183
	7.1.2	Axiomatique de Kolmogorov	183
	7.1.3	Probabilité conditionnelle, théorème de Bayes	184
7.2		Variable aléatoire réelle	185
	7.2.1	Définition d'une variable aléatoire réelle	185

7.2.2	Description d'une variable aléatoire	186
7.3	Vecteur aléatoire réels	188
7.4	Signaux aléatoires réels monodimensionnels	190
7.4.1	Définition et description d'un signal aléatoire	190
A	Description à un instant	190
B	Description à deux instants	190
C	Description à n instants	191
7.4.2	Stationarité, ergodicité, densité spectrale	192
7.5	Caractéristiques des estimateurs	194
7.6	Preuve du théorème 4.1.1	195

Bibliographie**201**

Introduction

1.1 PRÉSENTATION DU CONTEXTE

1.1.1 L’audition en robotique

Au début des années 70, le terme *robot* désignait principalement un bras manipulateur placé dans un atelier et réalisant des tâches simples et répétitives (pick and place, assemblage, peinture). Son environnement, dépourvu de toute présence humaine, était complètement contrôlé, et ses actions étaient complètement programmées à l’avance. Depuis, la robotique n’a cessé d’évoluer de sorte que de nos jours, un robot est généralement muni de facultés avancées de perception, de décision et d’action, de façon à pouvoir s’adapter de manière autonome à des environnements non contrôlés et évoluant dynamiquement. De plus, de par les fonctions de plus en plus variées qu’il doit réaliser (assistance, surveillance, exploration, secours, nettoyage, etc.), celui-ci est désormais en interaction constante avec son environnement et avec les humains.

Aussi la perception est-elle devenue un point essentiel à l’autonomie et l’adaptation des robots à leur environnement, ainsi qu’à leur interaction avec l’Homme. Au sein des différentes modalités de perception, on peut distinguer deux catégories : la proprioception, *i.e.* la capacité du robot à obtenir de l’information sur son état interne (position/vitesse angulaire des roues, angles des articulations, odométrie, etc.), et l’extéroception, qui renseigne le robot sur son environnement (télémètres ultrasons/infrarouge/laser, caméras visible/infrarouge/multispectrale, microphones, capteurs d’efforts, etc.). Parmi les modalités extéroceptives, la vision est certainement celle qui a reçu le plus grand intérêt en robotique, en raison de la richesse de l’information apportée par les images, mais également grâce aux grandes performances, au bas coût et à l’embarquabilité des capteurs visuels. Tout comme la vision, l’audition est un sens très important chez les humains, et joue un rôle fondamental dans le langage, l’apprentissage et la communication. Mais assez curieusement, l’audition en robotique n’a été identifiée comme un sujet scientifique à part entière que récemment. Une raison possible est la difficulté pour un système auditif artificiel de remplir certaines contraintes soulevées par la robotique, comme par exemple l’embarquabilité, la performance de l’acquisition ou les contraintes temps réel. Ainsi, bien que des résultats fussent développés depuis longtemps dans les domaines de l’acoustique et du traitement du signal, la littérature sur l’audition en robotique est longtemps restée relativement éparse.

À ses débuts, l’audition en robotique a bénéficié de nombreux développements effectués en analyse computationnelle de scène auditive (*Computational Auditory Scene Analysis–CASA*) [Rosenthal et Okuno, 1997]. Les auteurs de [Okuno *et al.*, 2004] ont ensuite défini l’audition en robotique comme la faculté artificielle de reconnaître et comprendre un environnement auditif, et ont listé les fonctionnalités nécessaires à l’accomplissement de cette tâche :

- la localisation de source, qui peut inclure un système de suivi ;

- la séparation de flux audio, ou l'extraction de sources ;
- la reconnaissance de sources, qui inclut la reconnaissance automatique de parole, la reconnaissance de locuteur, etc. et qui peut être étendue à l'interprétation de scènes auditives.

Dans cette thèse, on s'intéresse exclusivement à la définition de primitives auditives pour la localisation de source. Il s'agit certainement du problème le plus ancien abordé en audition en robotique, du fait que la localisation de source est généralement un pré-requis à la mise en place de fonctionnalités plus haut-niveau, telles que la reconnaissance de locuteur ou de parole.

1.1.2 Le paradigme binaural

On peut voir deux paradigmes à l'audition en robotique. Certaines approches sont fondées sur le *traitement d'antenne* [Van Trees, 2002]. La redondance de l'information apportée par un réseau de microphones permet alors d'obtenir une bonne performance de l'analyse acoustique et une certaine robustesse vis-à-vis des contraintes liées à la robotique : sources multiples ; large-bande ; non-stationnaires ; environnements bruités ; réverbérants ; évolutifs ; incertitudes de modélisation ; etc. D'autre part, les approches *binaurales* reposent sur une seule paire de microphones, qui peuvent être placés en champ libre, à l'intérieur de pavillons artificiels et/ou sur une tête. D'un point de vue ingénierie, l'utilisation de systèmes commerciaux d'acquisition synchrone stéréo bon marché facilite la mise en œuvre matérielle de solutions binaurales. Cependant, cette simplification s'accompagne généralement d'une plus grande complexité des algorithmes d'analyse de la scène.

Historiquement, les premières contributions à l'audition en robotique reposaient sur le paradigme binaural, et concernaient principalement la localisation de source. Les résultats demeuraient mitigés en raison des diverses difficultés soulevées par la robotique. Les approches binaurales furent alors quelque peu abandonnées en faveur du traitement d'antenne, jugé plus performant. Cependant, ces dernières années ont donné lieu à un regain d'intérêt pour les approches binaurales. Les raisons sont multiples. Premièrement, même s'il n'est pas nécessaire de restreindre un capteur auditif à seulement deux microphones (des systèmes d'acquisition et de traitement multivoies adaptés à la robotique sont disponibles, telle la solution open-source *ManyEars* [Michaud. *et al.*, 2007]), l'audition binaurale peut être considérée comme un contexte privilégié pour l'étude de certains aspects de la perception humaine ou animale, et des liens bidirectionnels intéressants peuvent être établis entre la robotique et les neurosciences : techniques robotiques bioinspirées, que ce soit sur des aspects morphologiques ou physiologiques ; exploitation de la robotique comme banc d'essai pour valider ou réfuter des théories de psychologie de la perception chez l'humain (structures sensorielles, fonctions cognitives, etc.). De plus, on assiste à un besoin croissant d'une interaction symbiotique entre humains et robots (plateformes robotiques humanoïdes dotées d'une perception bioinspirée). En outre, il est globalement reconnu que le manque de robustesse des approches binaurales peut être compensé par l'exploitation conjointe de l'audition et d'autres modalités extéroceptives et/ou proprioceptives. En particulier, le contexte de la robotique *mobile* donne lieu à de nouvelles techniques dites *actives* : fusion de l'information auditive et de la proprioception du robot, exploitation de la mobilité du capteur. Enfin, de récentes théories cognitives suggèrent de nouveaux paradigmes à la perception en ingénierie [O'Regan, 2011]–[Lafquière *et al.*, 2010].

Ainsi, de nombreux projets de recherche et plateformes (hardware et software) dédiés à l'audition binaurale ont vu le jour ces dernières années (robot humanoïde Cog du MIT, projet SIG/HARK de Kitano Symbiotic Systems en collaboration avec l'Université de Kyoto et l'Institut de Recherche Honda au Japon, plateforme open-source iCub, projets POP et HUMAVIPS financés par l'Europe, etc.). Cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet franco-japonais BINAAHR (*BINAural Active Audition for Humanoid Robotics*), financé conjointement par l'Agence Nationale de la Recherche et la Japan Science and Technology society. Ce projet implique le Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS-CNRS, Toulouse), l'Institut des Systèmes Intelligents et de la Robotique (ISIR, Paris), le Laboratoire de Psychologie de la Perception (LPP,

Paris), et, au Japon, l'Université de Kyoto, le Tokyo Institute of Technology, et l'Université de Kumamoto.

1.1.3 L'audition active

La plupart des contributions à l'audition binaurale sont fondées sur l'hypothèse d'un monde statique. Une telle vision facilite grandement le problème, mais il est pourtant clair que l'audition et la communication prennent place dans un monde où l'hypothèse d'un monde figé n'est pas valable [Cooke *et al.*, 2007]. Cependant, la perception active, exploitant les divers degrés de liberté que possède un robot mobile, peut grandement aider au processus d'analyse de la scène auditive. Des contributions ont déjà proposé des solutions à la perception auditive active. Dans [Nakadai *et al.*, 2000], un système intègre l'audition, la vision et les ordres moteurs du robot SIG pour suivre une source sonore. Un système adaptatif d'annulation du bruit des actionneurs du robot est également implémenté. Une extension de ce travail à la reconnaissance active de parole est proposée dans [Nakadai *et al.*, 2003b]. Le travail présenté dans [Toshima et Aoki, 2009] concerne un robot actif de téléprésence acoustique, dont les mouvements de tête sont synchronisés avec ceux d'un utilisateur situé à distance et écoutant en temps réel les signaux binauraux perçus par le robot. L'étude montre que dans le cas statique, la Fonction de Transfert liée à la Tête—*Head-Related Transfer Function (HRTF)*—du robot (caractérisée par la forme de la tête et du torse, leur impédance acoustique, les propriétés du milieu acoustique, etc.) doit coïncider fortement avec celle de l'utilisateur pour que celui-ci puisse localiser précisément la source sonore. En revanche, lorsque la mobilité du robot est exploitée, une localisation précise est possible même avec une *HRTF* générique simplifiée (tête du robot en forme d'œuf avec ou sans pavillons artificiels).

Dans [Berglund et Sitte, 2005], le lien entre la position relative d'un locuteur par rapport à un capteur binaural et un certain nombre d'indices binauraux—Différences Interaurales en Temps, Phase et Amplitude (*Interaural Time Difference (ITD)*, *Interaural Phase Difference (IPD)*, *Interaural Level Difference (ILD)* respectivement)—, indépendants du contenu spectral de la source et concaténés dans un vecteur de grande dimension, est appris hors-ligne à l'aide d'une carte auto-organisée sans paramètres (*Parameter-Less Self Organising Map-PLSOM*). Une fois cet apprentissage réalisé, les indices binauraux sont extraits en ligne puis utilisés comme entrée de la carte auto-organisée afin de déterminer la direction de la source et d'orienter le capteur vers celle-ci.

Dans [Deleforge et Horaud, 2011], une méthode alternative d'apprentissage non-supervisé est proposée pour localiser en milieu réverbérant une source sonore statique à partir d'une tête anthropomorphe binaurale munie de deux degrés de liberté en rotation (angles *pan* et *tilt*). L'émetteur est placé dans une position de référence fixe dans la pièce et différentes directions d'arrivée sont «simulées» en inclinant et tournant la tête du robot (en dépit du fait qu'il n'y a pas réciprocité au sens acoustique entre tourner la tête binaurale et déplacer l'émetteur, de par l'effet de réverbération de la pièce). La méthode utilise comme *entrée acoustique* les énergies—en décibels—perçues selon chaque bande de fréquence en chaque microphone. Elle repose sur l'extraction d'un vecteur d'indices binauraux statiques (*ILD*), ou d'indices monauraux dynamiques (dérivée temporelle des entrées acoustiques). Le but de l'apprentissage est donc de retrouver une paramétrisation en basse dimension (deux dimensions associées aux deux degrés de liberté de la tête) à partir d'une représentation spectrale exprimée dans un espace de haute dimension, appelé espace sensoriel. L'idée est qu'en dépit de la grande dimension de l'espace sensoriel, le vecteur d'indices vit en fait dans une variété de dimension réduite paramétrée par l'orientation de la tête. Dans l'idéal, cette variété doit être suffisamment lisse pour que l'ensemble des échantillons de l'espace sensoriel—ou «distribution»—la décrive correctement. Les auteurs proposent de construire une représentation interne basse dimension de manière non-supervisée en

projetant la distribution dans un espace de dimension inférieure, tout en conservant si possible sa topologie (en particulier sa métrique). Dans le cas linéaire, une analyse en composantes principales (*Principal Component Analysis-PCA*) suffirait à réaliser cette réduction de dimensionnalité, mais du fait que la variété n'est pas linéaire, une méthode d'alignement d'espace localement tangent (*Local Tangent Space Alignment-LTSA*) est proposée. Si l'espace d'état (*i.e.* l'espace des orientations possibles de la tête) et la représentation basse dimension de la variété dans l'espace sensoriel sont homéomorphes (ce qui est généralement difficile à prouver, mais que les auteurs ont validé expérimentalement *via* la construction de *cartes audio-motrices*), alors on s'assure de certaines propriétés topologiques communes entre ces deux espaces ; en particulier, à deux points proches dans l'espace d'état correspondent deux points proches dans la représentation sensorielle basse dimension et inversement. Il existe des connections étroites entre cette approche et les travaux développés dans [Laflaquière *et al.*, 2010], où un *agent naïf* muni de deux modalités extéroceptives—vision et audition—apprend par lui-même la structure de ses interactions avec l'environnement sans modèle théorique *a priori*, en exploitant uniquement son *flux sensorimoteur*. En particulier, l'agent apprend par lui-même la dimension de la variété de son espace sensoriel à partir de son expérience sensorimotrice.

Dans [Kneip et Baumann, 2008], un modèle mathématique est proposé pour la localisation d'une source sonore à partir d'un capteur binaural muni d'au moins deux degrés de liberté. L'approche repose sur le calcul d'intersections de cônes de confusion associés à des mesures successives de *ITD* à mesure que le capteur se déplace. Il est montré qu'une combinaison de mouvements de rotation et de translation permet de résoudre complètement le problème de localisation, *i.e.* lever complètement l'ambiguïté associée au cône de confusion dans le cas statique. Enfin, dans [Bernard *et al.*, 2010], une boucle sensorimotrice basée sur la perception auditive est implémentée sur le robot rat Psikharpax en vue de mimer un comportement de phonotaxie chez l'animal (réaction d'attraction ou de répulsion par source sonore).

Cette thèse diffère des approches citées précédemment au sens où l'information auditive et l'information apportée par le mouvement seront fusionnées dans le cadre de l'*estimation Bayésienne*, à l'intérieur d'un schéma de filtrage stochastique.

1.1.4 Filtrage stochastique en audition

La fusion de l'information auditive et du mouvement *via* le filtrage stochastique figure également dans [Ward *et al.*, 2003]—hors de tout contexte robotique—et dans [Valin *et al.*, 2006]. La référence [Valin *et al.*, 2006] considère une antenne circulaire de huit microphones. La sortie d'une *formation de voie* (*steered beamforming*) basée sur une transformée de phase pondérée par la fiabilité (*Reliability-Weighted PHASE Transform-RWPHAT*) est exploitée dans une stratégie de filtrage particulière avec *rééchantillonnage d'importance séquentiel* (*Sequential Importance Resampling-SIR*). Jusqu'à trois sources, dont les mouvements sont supposés générés par un processus de Langevin (*excitation-damping model*), sont localisées simultanément. Dans la même veine, [Marković et Petrović, 2010] proposent une stratégie de filtrage particulière pour un problème plan à partir d'une antenne de quatre microphones et diverses géométries d'antenne. La construction d'une fonction de vraisemblance est basée sur une procédure en deux étapes. D'abord, une corrélation croisée généralisée est effectuée sur chaque paire de microphones. La différence de temps d'arrivée ainsi estimée pour chaque paire est ensuite transformée en couple d'azimuts en exploitant un modèle de propagation acoustique en champ libre et la géométrie de l'antenne. Ce *couple* d'azimuts exprime le fait qu'avec le modèle considéré, deux sources placées en deux azimuts distincts conduisent à une même différence en temps d'arrivée. La fonction de vraisemblance est ensuite construite sur la base d'un mélange de *distributions de Von Mises*, dont les paramètres sont calculés à partir des azimuts estimés et de la sensibilité de l'antenne en leur voisinage. Le choix des distributions de Von Mises pour modéliser la fonction de vraisemblance est

naturellement lié au fait que les azimuts extraits sont des variables aléatoires de nature *circulaire*. Des résultats expérimentaux sont donnés pour une antenne statique et un locuteur mobile, ainsi que pour un locuteur immobile et une antenne en mouvement. Cependant, pour une antenne en mouvement, l'odométrie de la plateforme robotique portant l'antenne, ainsi qu'un modèle décrivant la façon dont le mouvement du robot affecte les variables de position du problème, ne semblent pas exploités.

Les deux contributions ci-dessus n'entrent pas à proprement parler dans le cadre de cette thèse, du fait qu'elles sont basées sur une antenne de microphones et que soit le capteur est immobile, soit sa mobilité n'est pas pleinement exploitée. Le filtrage stochastique dans un contexte binaural actif a été proposée récemment dans [Lu et Cooke, 2010] et testé en contexte de simulation. La ITD est estimée en passant les signaux binauraux dans une banque de filtres Gammatones (mimant le rôle de la cochlée chez l'humain) de fréquences centrales linéairement espacées entre 50Hz et 8Hz sur une échelle ERB (*Equivalent Rectangular Bandwidth*). Une Corrélation Croisée (CC) est effectuée sur les signaux en sortie de chaque filtre, et les fonctions de CC associées à chaque filtre (*i.e.* chaque bande de fréquence) sont ensuite sommées en une unique fonction dont l'argmax est l'ITD estimée. Le modèle d'observation liant l'ITD à l'état du système est appris hors ligne. Une stratégie de filtrage particulière avec *échantillonnage d'importance auxiliaire* (*Auxiliary Sampling Importance Resampling-ASIR*) est proposée pour effectuer la localisation à partir d'une tête mobile. L'influence de divers types de mouvement de la tête binaurale (marche aléatoire, marche aléatoire lissée, déplacement vers la source, etc.) sur les performances de la localisation est ensuite étudié. En revanche, la stratégie repose sur une connaissance en temps réel de la situation (position et orientation) de la tête dans le repère monde. En situation réelle, ceci nécessite de doter le robot mobile d'un système de localisation absolue (capture de mouvement, etc.) synchronisé avec l'acquisition des flux audio, et donc que le robot évolue dans un environnement contrôlé. De plus, la stratégie de filtrage sélectionnée est sujette à discussion, le contexte pratique considéré étant un cas typique de mise en échec de l'ASIR.

Dans cette thèse, on se propose d'établir une représentation d'état décrivant précisément la façon dont les ordres moteurs du robot affectent les variables de position et d'orientation de l'émetteur par rapport au capteur, de manière à exploiter pleinement la connaissance de ces ordres moteurs. Fondamentalement, dans notre position du problème, le robot n'est pas doté d'un système de localisation absolue, et n'a accès qu'à ses ordres moteurs et aux flux binaural perçu. On se focalise également sur les données que l'on peut construire à partir des flux audio, et sur la modélisation du lien existant entre ces observations et les variables de position et d'orientation entrant en jeu dans le problème. Sur la base de ces modèles de dynamique et d'observation, on définit des stratégies de filtrage adaptées à notre problème et *consistantes*. À la différence de [Deleforge et Horaud, 2011]–[Lafraquière *et al.*, 2010], notre approche repose sur des modèles *a priori* et non sur l'apprentissage d'une représentation interne des interactions du robot avec son environnement. La section suivante concerne la définition des modèles sous-jacents aux stratégies de localisation par filtrage stochastique proposées.

1.2 MODÉLISATION DU PROBLÈME ET MISE EN ÉQUATION

On modélise le problème de localisation par une représentation d'état de la forme

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1.2.1}$$

$$z = h(x, u) \tag{1.2.2}$$

où : x (resp. \dot{x}) désigne un vecteur d'état minimal (resp. sa dérivée temporelle) à définir, encapsulant—entre autres—des variables de position et d'orientation relatives de l'émetteur par rapport au capteur ; u désigne le torseur cinématique du capteur, supposé connu et déduit des

ordres moteurs du robot ; z désigne un vecteur d'observation construit à partir des flux audio perçus en les microphones. Au §1.2.2 on définit les variables de notre problème. L'équation d'état (1.2.1) est mise en place au §1.2.3 à partir des équations de la *cinématique du solide*. Au §1.2.4, un modèle relatif aux données élaborées sur la base des signaux perçus en présence de mouvement est déduit de considérations acoustiques. On montre que des approximations sont nécessaires en vue de permettre la définition d'observations compatibles avec l'équation (1.2.2), et on définit celle utilisée dans le manuscrit.

1.2.1 Notations

Les expressions d'un vecteur \vec{v} ou d'un tenseur \vec{T} dans une base \mathcal{B} sont notées $(\vec{v})_{(\mathcal{B})}$ et $(\vec{T})_{(\mathcal{B})}$ respectivement. On les notes par abus de langage $(\vec{v})_{(\mathcal{F})}$ et $(\vec{T})_{(\mathcal{F})}$, où \mathcal{F} est la base \mathcal{B} munie d'une origine (*i.e.* un repère). Les dérivées d'un vecteur \vec{v} et d'un tenseur \vec{T} par rapport au temps et par rapport à un repère \mathcal{F} —*i.e.* considérant \mathcal{F} constant durant le processus de dérivation—sont notées $\left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{\mathcal{F}}$ et $\left[\frac{d\vec{T}}{dt}\right]_{\mathcal{F}}$ respectivement. Le tenseur pré-produit vectoriel $\widehat{\vec{v}}$ associé au vecteur \vec{v} est un tenseur tel que si $(\vec{v})_{(\mathcal{F})} = [v_x, v_y, v_z]'$, alors

$$\left(\widehat{\vec{v}}\right)_{(\mathcal{F})} = \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.2.3)$$

Avec cette définition, le produit vectoriel $\vec{v} \times \vec{w}$ est égal à $\widehat{\vec{v}}\vec{w}$. Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, et $|\vec{u}|$ désigne la norme euclidienne de \vec{u} . \dot{f} représente la dérivée d'une fonction f par rapport au temps et $'$ désigne l'opérateur de transposition d'un vecteur ou d'une matrice.

1.2.2 Modélisation du problème

Un émetteur omnidirectionnel E et un capteur binaural constitué de deux récepteurs R_1, R_2 omnidirectionnels en champ libre, rigidement liés et espacés d'une distance $2a$ se déplacent de manière indépendante dans l'espace. On définit les trois repères orthonormés directs $\mathcal{F}_O : (O, \vec{x}_O, \vec{y}_O, \vec{z}_O)$, $\mathcal{F}_R : (R, \vec{x}_R, \vec{y}_R, \vec{z}_R)$ et $\mathcal{F}_E : (E, \vec{x}_E, \vec{y}_E, \vec{z}_E)$ rigidement liés au monde, au capteur binaural et à l'émetteur respectivement. \mathcal{F}_R est défini de sorte que R coïncide avec le point milieu du segment $[R_1, R_2]$ et que $\vec{R}R_1 = a\vec{y}_R$. L'émetteur étant ponctuel et omnidirectionnel, l'orientation du repère \mathcal{F}_E est complètement arbitraire et on choisit par convention \mathcal{F}_E parallèle à \mathcal{F}_O . La position relative de \mathcal{F}_E par rapport à \mathcal{F}_R peut être paramétrée par les trois composantes $e_x \triangleq \vec{R}\vec{E} \cdot \vec{x}_R$, $e_y \triangleq \vec{R}\vec{E} \cdot \vec{y}_R$ et $e_z \triangleq \vec{R}\vec{E} \cdot \vec{z}_R$ de $(\vec{R}\vec{E})_{\mathcal{F}_R}$. On définit également les paramètres (r, φ, ϑ) du système de coordonnées sphériques (*cf* Fig. 1.1) de sorte que $(\vec{R}\vec{E})_{\mathcal{F}_R}$ s'écrit en fonction de ces paramètres

$$\left(\vec{R}\vec{E}\right)_{\mathcal{F}_R} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{bmatrix}. \quad (1.2.4)$$

Pour paramétrer l'orientation de \mathcal{F}_E par rapport à \mathcal{F}_R , on utilise les angles de Bryant (λ, μ, ν) , de sorte que la transformation permettant d'aligner \mathcal{F}_R avec \mathcal{F}_E se décompose en les trois rotations successives suivantes (*cf* Fig. 1.1) :

- $\mathcal{F}_R \rightarrow \mathcal{F}_1$: rotation d'angle λ autour de \vec{x}_R

- $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$: rotation d'angle μ autour de \vec{y}_1
- $\mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_E$: rotation d'angle ν autour de \vec{z}_2 .

Le tenseur rotation $\vec{\mathcal{R}}_{\mathcal{F}_E/\mathcal{F}_R}$ décrivant la rotation permettant d'aligner \mathcal{F}_R avec \mathcal{F}_E a pour expression dans \mathcal{F}_R , en fonction des angles de Bryant,

$$\begin{aligned} \left(\vec{\mathcal{R}}_{\mathcal{F}_E/\mathcal{F}_R} \right)_{(\mathcal{F}_R)} &= \mathcal{R}_{\mathcal{F}_E/\mathcal{F}_R} = \begin{bmatrix} (\vec{x}_E)_{\mathcal{F}_R} & (\vec{y}_E)_{\mathcal{F}_R} & (\vec{z}_E)_{\mathcal{F}_R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left((\vec{x}_R)_{\mathcal{F}_E} \right)' \\ \left((\vec{y}_R)_{\mathcal{F}_E} \right)' \\ \left((\vec{z}_R)_{\mathcal{F}_E} \right)' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \mu \cos \nu & -\cos \mu \sin \nu & \sin \mu \\ \sin \lambda \sin \mu \cos \nu + \cos \lambda \sin \nu & -\sin \lambda \sin \mu \sin \nu + \cos \lambda \cos \nu & -\sin \lambda \cos \mu \\ -\cos \lambda \sin \mu \cos \nu + \sin \lambda \sin \nu & \cos \lambda \sin \mu \sin \nu + \sin \lambda \cos \nu & \cos \lambda \cos \mu \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

On note $\vec{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}_E/\mathcal{F}_O}$ et $\vec{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}_R/\mathcal{F}_O}$ les torseurs cinématiques—*i.e.* les vecteurs composés des vitesses de translation et de rotation—de \mathcal{F}_E et \mathcal{F}_R par rapport à \mathcal{F}_O . Pour $M \in \{R, E\}$, les composantes

$$\left(\vec{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}_M/\mathcal{F}_O} \right)_{(\mathcal{F}_M)} = \left[\left(\left[\frac{d\vec{OM}}{dt} \right]_{\mathcal{F}_O} \right)'_{(\mathcal{F}_M)}, \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{F}_M/\mathcal{F}_O} \right)'_{(\mathcal{F}_M)} \right]' \quad (1.2.6)$$

de $\vec{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}_M/\mathcal{F}_O}$ dans le repère \mathcal{F}_M sont notées

$$\left(\vec{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}_R/\mathcal{F}_O} \right)_{(\mathcal{F}_R)} = \left[\begin{bmatrix} v_{Rx} \\ v_{Ry} \\ v_{Rz} \end{bmatrix}' , \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}' \right]', \quad \left(\vec{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}_E/\mathcal{F}_O} \right)_{(\mathcal{F}_E)} = \left[\begin{bmatrix} v_{Ex} \\ v_{Ey} \\ v_{Ez} \end{bmatrix}' , \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}' \right]'. \quad (1.2.7)$$

Une représentation géométrique de ces torseurs et de leurs composantes dans \mathcal{F}_R et \mathcal{F}_E est donnée Fig. 1.2. Le torseur cinématique du capteur binaural est supposé connu. Concernant l'émetteur, son torseur cinématique n'est pas connu mais une connaissance partielle sur sa dynamique est supposée donnée *a priori*. Le but est d'estimer la situation relative de l'émetteur par rapport au capteur sur la base des signaux acoustiques mesurés en R_1 et R_2 et des connaissances disponibles sur $\vec{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}_R/\mathcal{F}_O}$ et $\vec{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}_E/\mathcal{F}_O}$. Notons que la situation absolue du capteur binaural par rapport au monde n'est pas connue.

Ces notations constituent le support des équations d'état permettant de décrire l'évolution temporelle de la situation relative de \mathcal{F}_E par rapport à \mathcal{F}_R en fonction des torseurs cinématiques du capteur et de l'émetteur.

1.2.3 Équation d'état à temps continu

Une première équation traduisant les effet des torseurs cinématiques du capteur et de l'émetteur sur la position relative de \mathcal{F}_E par rapport à \mathcal{F}_R est d'abord mise en place. L'application de la *loi de composition des vitesses de translation* et de la *formule de la base mobile* donne

$$\left[\frac{d\vec{RE}}{dt} \right]_{\mathcal{F}_R} = \left[\frac{d\vec{OE}}{dt} \right]_{\mathcal{F}_O} - \left[\frac{d\vec{OR}}{dt} \right]_{\mathcal{F}_O} + \vec{RE} \times \vec{\Omega}_{\mathcal{F}_R/\mathcal{F}_O}. \quad (1.2.8)$$

Lorsque les vecteurs intervenant dans (1.2.8) sont exprimés dans \mathcal{F}_R il vient

$$\left(\left[\frac{d\vec{RE}}{dt} \right]_{\mathcal{F}_R} \right)_{(\mathcal{F}_R)} = \left[-\mathbb{I}_3 \quad , \quad \left(\vec{RE} \right)_{(\mathcal{F}_R)} \right] \left(\vec{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}_R/\mathcal{F}_O} \right)_{(\mathcal{F}_R)} + \left(\left[\frac{d\vec{OE}}{dt} \right]_{\mathcal{F}_O} \right)_{(\mathcal{F}_R)}, \quad (1.2.9)$$

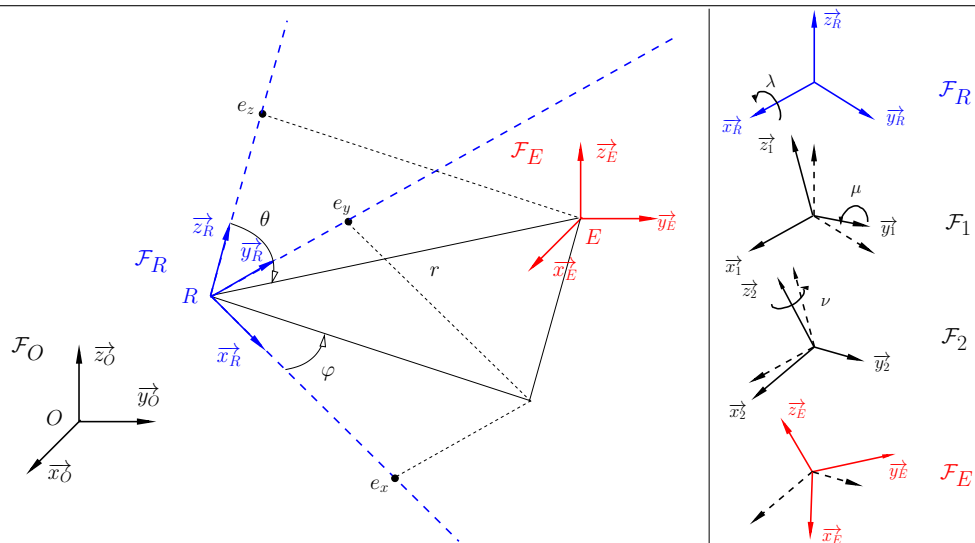


FIGURE 1.1: Définition des repères et des variables de position du problème. (Gauche) Représentation des coordonnées cartésiennes (e_x, e_y, e_z) et sphériques (r, φ, θ) de E dans \mathcal{F}_R . (Droite) Définition des angles de Bryant (λ, μ, ν) décrivant la transformation alignant \mathcal{F}_R avec \mathcal{F}_E .

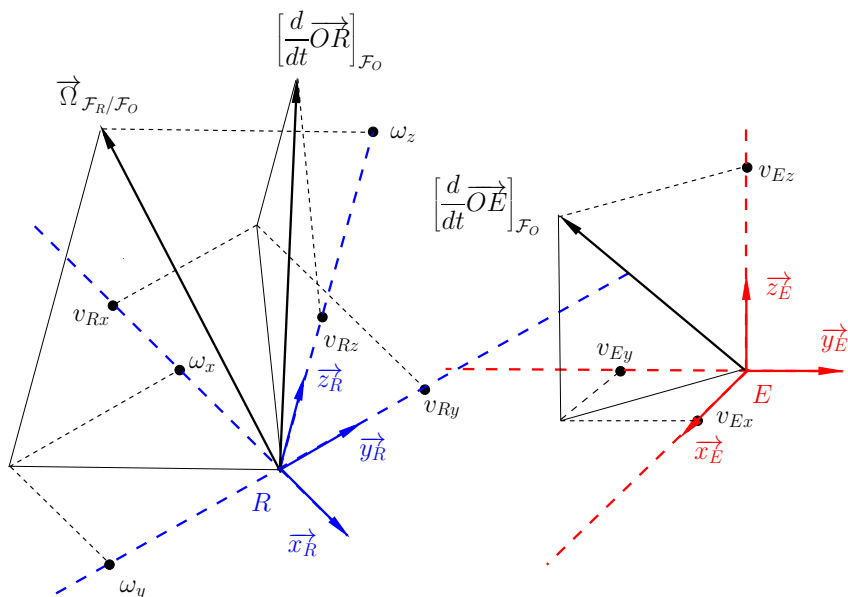


FIGURE 1.2: Représentation géométrique des torseurs cinématiques $\mathcal{T}_{\mathcal{F}_R/\mathcal{F}_O}$ et $\mathcal{T}_{\mathcal{F}_E/\mathcal{F}_O}$ de \mathcal{F}_R et \mathcal{F}_E par rapport à \mathcal{F}_O , et de leurs composantes dans \mathcal{F}_R et \mathcal{F}_E respectivement.

avec

$$\left(\left[\frac{d\overrightarrow{RE}}{dt} \right]_{\mathcal{F}_R} \right)_{(\mathcal{F}_R)} = \begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix}. \quad (1.2.10)$$

La *formule de changement de base* nous permet par ailleurs de relier les expressions de $\left[\frac{d\overrightarrow{OE}}{dt} \right]_{\mathcal{F}_O}$ dans \mathcal{F}_R et \mathcal{F}_E via

$$\left(\left[\frac{d\overrightarrow{OE}}{dt} \right]_{\mathcal{F}_O} \right)_{(\mathcal{F}_R)} = \mathcal{R}_{\mathcal{F}_E/\mathcal{F}_R} \left(\left[\frac{d\overrightarrow{OE}}{dt} \right]_{\mathcal{F}_O} \right)_{(\mathcal{F}_E)}. \quad (1.2.11)$$

En combinant les équations (1.2.9)–(1.2.10)–(1.2.11) on obtient finalement

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbb{I}_3 & \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -e_z & e_y & & & \\ e_z & 0 & -e_x & & & \\ -e_y & e_x & 0 & & & \end{array} \end{bmatrix} \mathcal{R}_{\mathcal{F}_E/\mathcal{F}_R} \begin{bmatrix} v_{Rx} \\ v_{Ry} \\ v_{Rz} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ v_{Ex} \\ v_{Ey} \\ v_{Ez} \end{bmatrix}, \quad (1.2.12)$$

où l'expression de $\mathcal{R}_{\mathcal{F}_E/\mathcal{F}_R}$ en fonction des angles de Bryant est donnée Eq. (1.2.5). Une seconde équation est mise en place, représentant les effets du vecteur vitesse de rotation du capteur sur l'orientation relative de \mathcal{F}_E par rapport à \mathcal{F}_R . En appliquant la *loi de composition des vitesses de rotation* et la *loi de dérivation des tenseurs de rotation* on obtient

$$\left[\frac{d\overrightarrow{\mathcal{R}}_{\mathcal{F}_E/\mathcal{F}_R}}{dt} \right]_{\mathcal{F}_R} = -\overrightarrow{\widehat{\Omega}}_{\mathcal{F}_R/\mathcal{F}_O} \overrightarrow{\mathcal{R}}_{\mathcal{F}_E/\mathcal{F}_R}. \quad (1.2.13)$$

L'expression de $\left(\overrightarrow{\mathcal{R}}_{\mathcal{F}_E/\mathcal{F}_R} \right)_{\mathcal{F}_R}$ en fonction des angles de Bryant via (1.2.5) permet d'obtenir, après quelques manipulations, l'équation suivante

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\mu} \\ \dot{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\sin \lambda \tan \mu & \cos \lambda \tan \mu \\ 0 & -\cos \lambda & -\sin \lambda \\ 0 & \frac{\sin \lambda}{\cos \mu} & \frac{-\cos \lambda}{\cos \mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \quad (1.2.14)$$

En combinant (1.2.12)–(1.2.14) on obtient finalement

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \\ \dot{\lambda} \\ \dot{\mu} \\ \dot{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbb{I}_3 & \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -e_z & e_y & c_\mu c_\nu & -c_\mu s_\nu & s_\mu \\ e_z & 0 & -e_x & s_\lambda s_\mu c_\nu + c_\lambda s_\nu & -s_\lambda s_\mu s_\nu + c_\lambda c_\nu & -s_\lambda c_\mu \\ -e_y & e_x & 0 & -c_\lambda s_\mu c_\nu + s_\lambda s_\nu & c_\lambda s_\mu s_\nu + s_\lambda c_\nu & -c_\lambda c_\mu \\ \hline \mathbb{O}_3 & \begin{array}{ccc} -1 & -s_\lambda t_\mu & c_\lambda t_\mu \\ 0 & -c_\lambda & -s_\lambda \\ 0 & \frac{s_\lambda}{c_\mu} & \frac{-c_\lambda}{c_\mu} \end{array} & \mathbb{O}_3 \end{array} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Rx} \\ v_{Ry} \\ v_{Rz} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ v_{Ex} \\ v_{Ey} \\ v_{Ez} \end{bmatrix}. \quad (1.2.15)$$

Dans notre problème, les vitesses de translation de l'émetteur sont inconnues, mais on considère que son type de mouvement dans le repère monde est connu, *e.g.* en introduisant un système dynamique secondaire (ou «processus générateur») dont le vecteur d'état caractérise l'évolution temporelle de v_{Ex}, v_{Ey}, v_{Ez} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_1 = \dot{p}_2 = \dots = \dot{p}_m = 0 \\ \dot{v}_{Ex} = v_{Ex}^{[1]} \\ \dot{v}_{Ey} = v_{Ey}^{[1]} \\ \dot{v}_{Ez} = v_{Ez}^{[1]} \\ \vdots \\ \dot{v}_{Ex}^{[n]} = f_n(p_1, \dots, p_m, v_{Ex}, v_{Ey}, v_{Ez}, \dots, v_{Ex}^{[n]}, v_{Ey}^{[n]}, v_{Ez}^{[n]}) \\ \dot{v}_{Ey}^{[n]} = g_n(p_1, \dots, p_m, v_{Ex}, v_{Ey}, v_{Ez}, \dots, v_{Ex}^{[n]}, v_{Ey}^{[n]}, v_{Ez}^{[n]}) \\ \dot{v}_{Ez}^{[n]} = h_n(p_1, \dots, p_m, v_{Ex}, v_{Ey}, v_{Ez}, \dots, v_{Ex}^{[n]}, v_{Ey}^{[n]}, v_{Ez}^{[n]}) \end{array} \right. \quad (1.2.16)$$

Les équations (1.2.15)–(1.2.16) sont alors combinées en une équation d'état unique où les vecteurs d'état et de commande sont respectivement

$$x \triangleq [e_x, e_y, e_z, \lambda, \mu, \nu, p_1, \dots, p_m, v_{Ex}, v_{Ey}, v_{Ez}, \dots, v_{Ex}^{[n]}, v_{Ey}^{[n]}, v_{Ez}^{[n]}]' \quad (1.2.17)$$

$$u \triangleq [v_{Rx}, v_{Ry}, v_{Rz}, \omega_x, \omega_y, \omega_z]' \quad (1.2.18)$$

Par exemple, pour traiter un émetteur sur une trajectoire rectiligne à une vitesse constante inconnue, on pose $m=0, n=1, f_0=0, g_0=0, h_0=0$ dans (1.2.16).

1.2.4 Équation d'observation

A Quelques rappels d'acoustique théorique

Dans un milieu linéaire homogène sans perte à trois dimensions, le potentiel vitesse $\phi(\vec{r}, t)$ en \vec{r} à l'instant t est lié à la distribution de source $q(\vec{r}, t)$, *i.e.* le taux de flux volumique par unité de volume de fluide généré par la source en \vec{r} à l'instant t , via l'équation d'onde inhomogène [Ziomek, 1995]

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\vec{r}, t) = q(\vec{r}, t). \quad (1.2.19)$$

Une approche pour résoudre cette équation est d'identifier la distribution de source (resp. le potentiel vitesse) comme l'entrée (resp. la sortie) d'un filtre linéaire dont la relation entrée-sortie s'écrit

$$\phi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{\mathbb{R}^3} q(\vec{r}_0, t_0) g(\vec{r}, t | \vec{r}_0, t_0) d\vec{r}_0 dt_0. \quad (1.2.20)$$

Le potentiel vitesse apparaît donc comme le résultat d'une convolution spatio-temporelle de la distribution de source avec la réponse impulsionnelle du milieu $g(\vec{r}, t | \vec{r}_0, t_0)$. Lorsque le milieu est illimité, g est appelée *la fonction de Green temporelle en champ libre à trois dimensions* et s'écrit

$$g(\vec{r}, t | \vec{r}_0, t_0) = \frac{\delta\left(t - t_0 - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}\right)}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_0|}, \quad (1.2.21)$$

avec c la célérité du son dans le milieu. L'interprétation de l'équation (1.2.21) est immédiate. Une impulsion d'amplitude unitaire appliquée en \vec{r}_0 à l'instant t_0 est perçue par un observateur placé en \vec{r} à l'instant $t_0 + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}$ avec une atténuation proportionnelle à $|\vec{r} - \vec{r}_0|$. Notons que g est causale et satisfait au principe de réciprocité, *i.e.* est inchangée lorsque \vec{r} and \vec{r}_0 sont permutés. D'un point de vue fréquentiel, la fonction de Green fréquentielle en champ libre à trois dimensions est définie comme la transformée de Fourier de g par rapport à $t - t_0$ et s'écrit

$$G_f(\vec{r}|\vec{r}_0) = \frac{e^{-\frac{2i\pi f}{c}|\vec{r} - \vec{r}_0|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \quad (1.2.22)$$

Notons que l'amplitude de G_f est indépendante de la fréquence, et sa phase est linéaire par rapport à f .

On se focalise sur le développement de (1.2.20) lorsque la source est un émetteur ponctuel omnidirectionnel E dont les coordonnées dans l'espace $\vec{r}_E(t) \triangleq \vec{OE}(t)$ sont paramétrées par le temps. La distribution de la source $q(\cdot, \cdot)$ peut alors être factorisée comme suit

$$q(\vec{r}, t) = q_E(t)\delta(\vec{r} - \vec{r}_E(t)), \quad (1.2.23)$$

où $q_E(\cdot)$ est une fonction du temps uniquement. Grâce à la propriété de translation de l'impulsion de Dirac, l'intégrale volumique $\mathcal{I}(\vec{r}, t|t_0)$ dans (1.2.20), définie par

$$\mathcal{I}(\vec{r}, t|t_0) \triangleq \iiint_{\mathbb{R}^3} q(\vec{r}_0, t_0)g(\vec{r}, t|\vec{r}_0, t_0)d\vec{r}_0, \quad (1.2.24)$$

peut être simplifiée pour obtenir

$$\mathcal{I}(\vec{r}, t|t_0) = q_E(t_0)g(\vec{r}, t|\vec{r}_E(t_0), t_0). \quad (1.2.25)$$

Pour aller plus loin dans le développement de (1.2.20) dans le cas d'une source mobile, un changement de variable $t_0 \rightarrow \tau$ dans l'intégrale temporelle est nécessaire, avec

$$\tau = t - t_0 - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_E(t_0)|}{c}. \quad (1.2.26)$$

Pour réaliser ce changement de variable, la valeur absolue du Jacobien $|\frac{\partial \tau}{\partial t_0}|$ de la transformation $t_0 \mapsto \tau$ doit être calculée. Après quelques manipulations il vient

$$\left| \frac{\partial \tau}{\partial t_0} \right| = \left| 1 - \frac{\vec{r} - \vec{r}_E(t_0) \cdot \vec{v}_E(t_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_E(t_0)|c} \right| \triangleq |1 - M_r(t_0)|. \quad (1.2.27)$$

Dans (1.2.27), $\vec{v}_E(t_0) \triangleq \left[\frac{d\vec{r}_E(t_0)}{dt} \right]_{\mathcal{F}_O}$ est la vitesse de l'émetteur par rapport au monde à l'instant d'émission t_0 et $M_r(t_0)$ est la projection du vecteur Mach

$$\vec{M}(t_0) \triangleq \frac{\vec{v}_E(t_0)}{c} \quad (1.2.28)$$

de l'émetteur à l'instant d'émission t_0 sur la direction émetteur-observateur. Pour un mouvement subsonique, $|1 - M_r(t_0)| = 1 - M_r(t_0)$ et $\forall t_0, \frac{\partial \tau}{\partial t_0} > 0$, ce qui implique que l'application $t_0 \mapsto \tau$ est monotone, donc admet une bijection réciproque. En combinant les équations (1.2.20)–(1.2.25)–(1.2.26)–(1.2.27), on obtient pour le potentiel vitesse

$$\phi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_E(t_0)\delta(\tau)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_E(t_0)|(1 - M_r(t_0))} d\tau. \quad (1.2.29)$$

Ci dessus, t_0 est en fait une fonction de τ (la bijection réciproque de $t_0 \mapsto \tau$), et devrait en toute rigueur être notée $t_0(\tau)$. Par les propriétés de l'impulsion de Dirac, le potentiel vitesse peut être simplifié en

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q_E(t_0^*)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_E(t_0^*)|(1 - M_r(t_0^*))}, \quad (1.2.30)$$

$$\text{avec } c(t - t_0^*) = |\vec{r} - \vec{r}_E(t_0^*)|. \quad (1.2.31)$$

Notons que, bien que la dépendance ne soit pas écrite explicitement, t_0^* est une fonction du temps, *i.e.* l'équation (1.2.31) doit être résolue à chaque instant t . La variation de pression $p(\vec{r}, t)$ —par rapport à la pression d'équilibre p_0 —en \vec{r} à t est liée au potentiel vitesse via l'équation d'Euler

$$p(\vec{r}, t) = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t), \quad (1.2.32)$$

avec ρ_0 la masse volumique du fluide à l'équilibre. Le champ de pression peut donc être déduit et s'écrit, après quelques manipulations

$$p(\vec{r}, t) = \frac{\rho_0 \dot{q}_E(t_0^*)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_E(t_0^*)|(1 - M_r^2(t_0^*))} + \frac{c\rho_0 q_E(t_0^*) \cdot (M_r(t_0^*) - |\vec{M}(t_0^*)|^2)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_E(t_0^*)|^2(1 - M_r(t_0^*))^3}. \quad (1.2.33)$$

Notons que les équations (1.2.30)–(1.2.31)–(1.2.33) peuvent être étendues au cas d'un observateur mobile en paramétrant la position de l'observateur $\vec{r}(t)$ par le temps. Le premier des deux termes dans (1.2.33) représente la radiation champ lointain dont la pression décroît en $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_E|}$, tandis que le second terme représente la radiation champ proche dont la pression décroît en $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_E|^2}$ [Morse et Ingard, 1968].

L'équation (1.2.31) met en avant un problème lié à la mobilité de la source : du fait de la vitesse finie des ondes sonores, *le signal perçu par un microphone en \vec{r} à t dépend du signal émis par la source en $\vec{r}_E(t_0^*)$ à t_0^* , avec $t - t_0^*$ le temps requis par la propagation acoustique ; mais $t - t_0^*$ lui même dépend de la distance spatiale entre l'émetteur à t_0^* et l'observateur à t* . De ce fait, il n'y a pas d'équation « explicite » entre la source et le champ de pression, à part pour des mouvements de l'émetteur très simples (émetteur immobile, en mouvement rectiligne et uniforme, etc.). Une représentation géométrique de ce problème est présentée en figure 1.3. Des approximations sont donc nécessaires pour rendre le problème tractable. Bien entendu, du fait que dans le problème que l'on considère $|\vec{M}| \ll 1$, l'équation (1.2.33) peut être simplifiée sans induire d'erreur significative en

$$p(\vec{r}, t) \approx \frac{\rho_0 \dot{q}_E \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_E(t)|}{c} \right)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_E(t)|}. \quad (1.2.34)$$

Cette approximation « quasi-statique » peut être interprétée comme suit : à chaque instant t , la variation de pression perçue en \vec{r} due à un émetteur mobile E est approximée par la variation perçue due à un émetteur immobile coïncidant spatialement avec E à l'instant t .

Bien que les simplification menant à (1.2.34) puissent paraître évidentes lorsque l'émetteur se déplace lentement comparativement à la propagation du son, nous avons jugé important de rappeler d'où elles viennent. Dans toute la suite de la thèse, on suppose que l'approximation « quasi-statique » est valide.

B Indices acoustiques utilisables pour la localisation

D'après les considérations précédentes, la variation de pression perçue en un microphone R_i , $i = 1, 2$ s'écrit

$$p_{R_i}(t) = \frac{\rho_0 \dot{q}_E \left(t - \frac{|R_i \vec{E}(t)|}{c} \right)}{4\pi|R_i \vec{E}(t)|}. \quad (1.2.35)$$

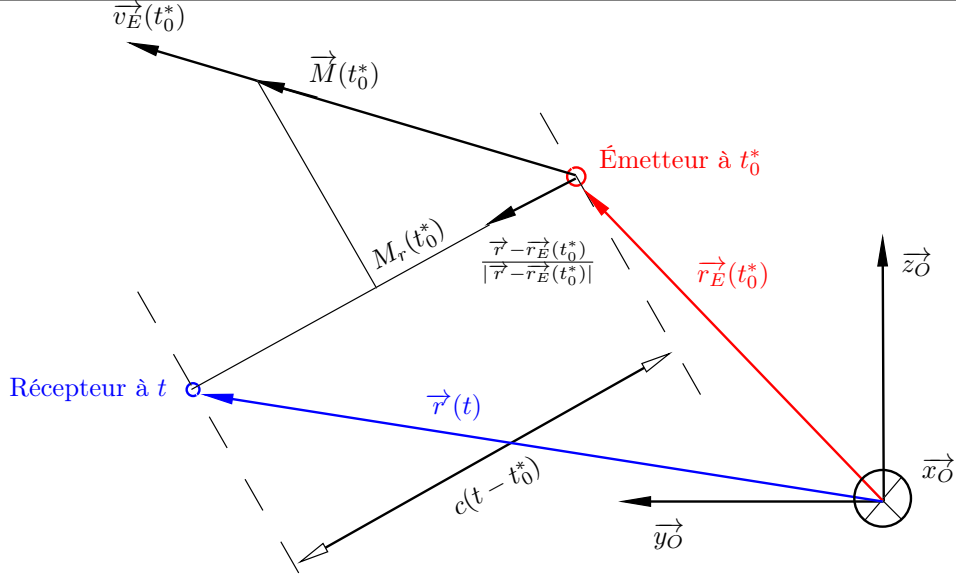


FIGURE 1.3: Géométrie de la propagation acoustique dans le cas d'un émetteur dynamique.

De cette expression on voit clairement apparaître des quantités à extraire pouvant servir à la localisation. On a d'une part des quantités—ou indices—«statiques» : le retard entre le signal émis et le signal perçu

$$\tau_i \triangleq \frac{|\overrightarrow{R_i E}|}{c}, \quad (1.2.36)$$

et son facteur d'atténuation

$$a_i \triangleq \frac{1}{|\overrightarrow{R_i E}|} = \frac{1}{c\tau_i}, \quad (1.2.37)$$

et d'autre part des indices «dynamiques», *e.g.* les facteurs Doppler définis par

$$d_i \triangleq \frac{d}{dt} \left(t - \frac{|\overrightarrow{R_i E}|}{c} \right) = \frac{1 - M_{R_i}}{1 - M_{E_i}}, \quad (1.2.38)$$

avec pour $i = 1, 2$

$$M_{R_i} = \frac{\overrightarrow{ER_i} \cdot \overrightarrow{v_{R_i}}}{|\overrightarrow{ER_i}| c}, \quad (1.2.39)$$

et

$$M_{E_i} = \frac{\overrightarrow{ER_i} \cdot \overrightarrow{v_E}}{|\overrightarrow{ER_i}| c}. \quad (1.2.40)$$

La question qui se pose est alors de savoir comment extraire tout ou partie de ces indices sans connaissance *a priori* sur la source $q_E(t)$. Pour résoudre ce problème, on se propose dans cette thèse d'exploiter uniquement des indices statiques binauraux, *i.e.* les quantités ITD $\triangleq \tau_1 - \tau_2$, et ILD $\triangleq 20 \log_{10}(a_1/a_2)$, qui peuvent être extraites des signaux perçus sans connaissance *a priori* sur la source. Ces indices s'expriment en fonction des coordonnées cartésiennes de l'émetteur dans le repère du capteur—définies au §1.2.2—par

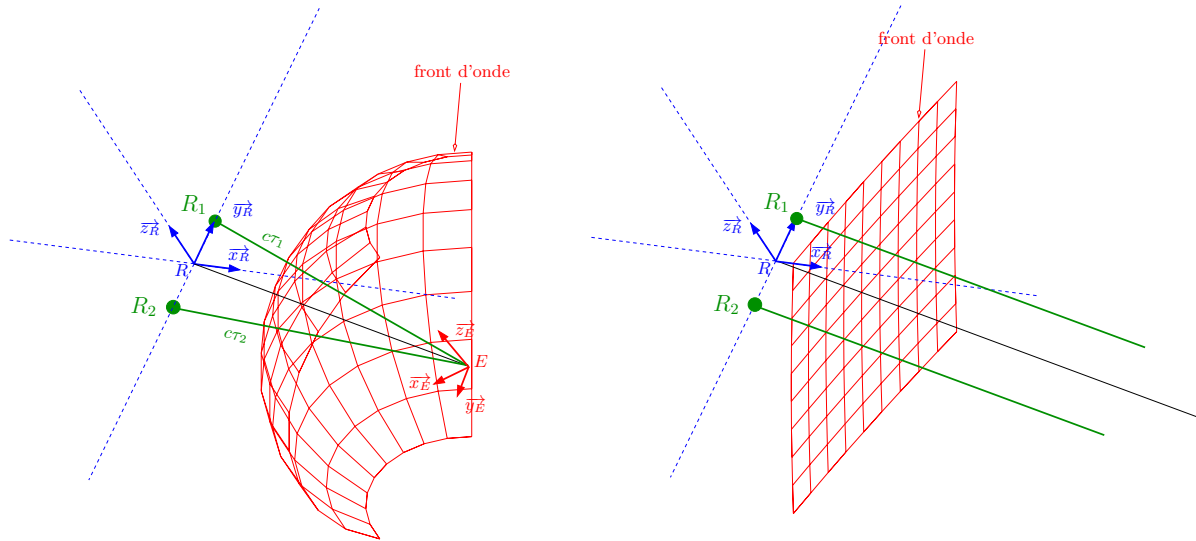


FIGURE 1.4: Géométrie de la propagation acoustique dans le cas statique. (Gauche) Source en champ proche—fronts d'onde sphériques. (Droite) Source en champ lointain—fronts d'onde approximativement plans au voisinage des récepteurs.

$$\begin{aligned} \text{ITD} &= \tau_1 - \tau_2 = \frac{1}{c} \left(|\overrightarrow{R_1 E}| - |\overrightarrow{R_2 E}| \right) \\ &= \frac{1}{c} \left(\sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 + a^2 - 2ae_y} - \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 + a^2 + 2ae_y} \right) \end{aligned} \quad (1.2.41)$$

$$\text{ILD} = 10 \log_{10} \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 + a^2 + 2ae_y}{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 + a^2 - 2ae_y} \right). \quad (1.2.42)$$

On peut aussi exprimer ces indices en terme de coordonnées polaires comme suit

$$\text{ITD} = \frac{r}{c} \left(\sqrt{1 - 2 \sin \varphi \sin \vartheta \left(\frac{a}{r} \right) + \left(\frac{a}{r} \right)^2} - \sqrt{1 + 2 \sin \varphi \sin \vartheta \left(\frac{a}{r} \right) + \left(\frac{a}{r} \right)^2} \right) \quad (1.2.43)$$

$$\text{ILD} = 10 \log_{10} \left(\frac{1 + 2 \sin \varphi \sin \vartheta \left(\frac{a}{r} \right) + \left(\frac{a}{r} \right)^2}{1 - 2 \sin \varphi \sin \vartheta \left(\frac{a}{r} \right) + \left(\frac{a}{r} \right)^2} \right). \quad (1.2.44)$$

Notons que l'expression de ces indices en champ lointain, notés ITD_∞ et ILD_∞ , sont obtenus en faisant un développement limité à l'ordre 1 de

$$\sqrt{1 \pm 2 \sin \varphi \sin \vartheta \left(\frac{a}{r} \right) + \left(\frac{a}{r} \right)^2} \quad (1.2.45)$$

autour de la valeur 1 en posant $a/r \ll 1$. On obtient respectivement

$$\text{ITD}_\infty = -\frac{2a}{c} \sin \varphi \sin \vartheta \quad (1.2.46)$$

$$\text{ILD}_\infty = 0. \quad (1.2.47)$$

Une interprétation géométrique des conditions champ-proche champ-lointain est donnée en figure 1.4. Dans notre problème où l'espacement inter-microphones est faible ($2a \approx 16\text{cm}$), l'information spatiale portée par l'ILD devient rapidement minime pour les distances capteur-source raisonnables, et se trouve noyée dans l'erreur de son estimation à partir des flux audio. On

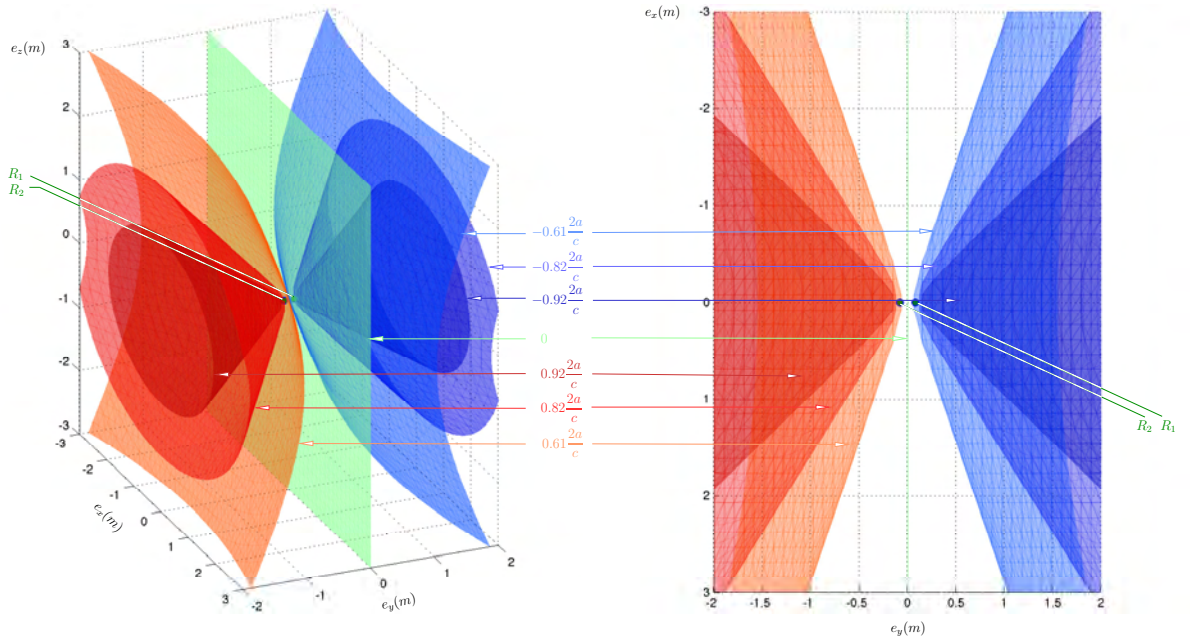


FIGURE 1.5: Isosurfaces de la fonction d'observation. Les isosurfaces sont des nappes d'hyperboloïdes de révolution à deux nappes, l'axe de révolution étant (Oy_R) . Sous l'approximation champ lointain, ces surfaces sont assimilables à leurs cônes asymptotes.

ne cherchera donc pas à exploiter l'ILD dans notre stratégie de filtrage (du moins dans le cas champ libre ; on verra plus tard que l'ILD informe effectivement sur les variables de position, y compris en champ lointain, lorsque les microphones sont placés sur un élément diffusant).

En figure 1.5 sont tracées quelques isosurfaces de l'ITD dans le système de coordonnées cartésien (*i.e.* les lieux géométriques des points de l'espace vérifiant $\text{ITD}(e_x, e_y, e_z) = C$ pour différentes valeurs de la constante C). Il est montré que ces surfaces sont des nappes d'hyperboloïdes de révolution à deux nappes. Ces nappes sont assimilables à des cônes en champ lointain, souvent appelés cônes «de confusion» dans la littérature. Ces cônes expriment le fait que les indices binauraux ne donnent instantanément qu'une information partielle ou ambiguë sur les variables de position. L'ambiguïté sera levée en exploitant conjointement le mouvement du capteur et/ou de l'émetteur.

1.2.5 Cas d'étude

On se propose dans cette thèse—comme de nombreuses contributions à la localisation binaurale active—de restreindre le problème considéré jusqu'ici à un problème plan, dans lequel le capteur et l'émetteur se déplacent dans le plan commun (\vec{y}_O, \vec{z}_O) , avec \vec{x}_O vertical descendant. Une description géométrique de ce problème est présentée en figure 1.6. On impose donc

$$\vec{x}_E = \vec{x}_O = \vec{x}_R ; \quad (1.2.48)$$

$$e_x = 0 ; \varphi = \pi/2 ; \quad (1.2.49)$$

$$v_{R_x} = 0 ; v_{E_x} = 0 ; \omega_y = 0 ; \omega_z = 0, \quad (1.2.50)$$

de sorte que l'équation (1.2.15) se réduit à

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & e_z \\ 0 & -1 & -e_y \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Ry} \\ v_{Rz} \\ \omega_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda \\ \sin \lambda & \cos \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Ey} \\ v_{Ez} \end{bmatrix}. \quad (1.2.51)$$

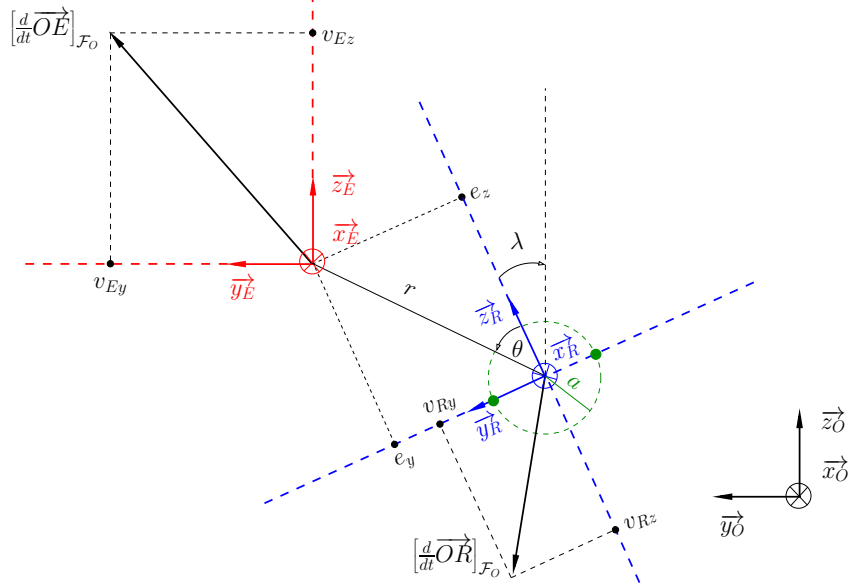


FIGURE 1.6: Représentation géométrique du problème lorsque le capteur et l'émetteur sont contraints à se déplacer dans le plan (y_O, z_O) .

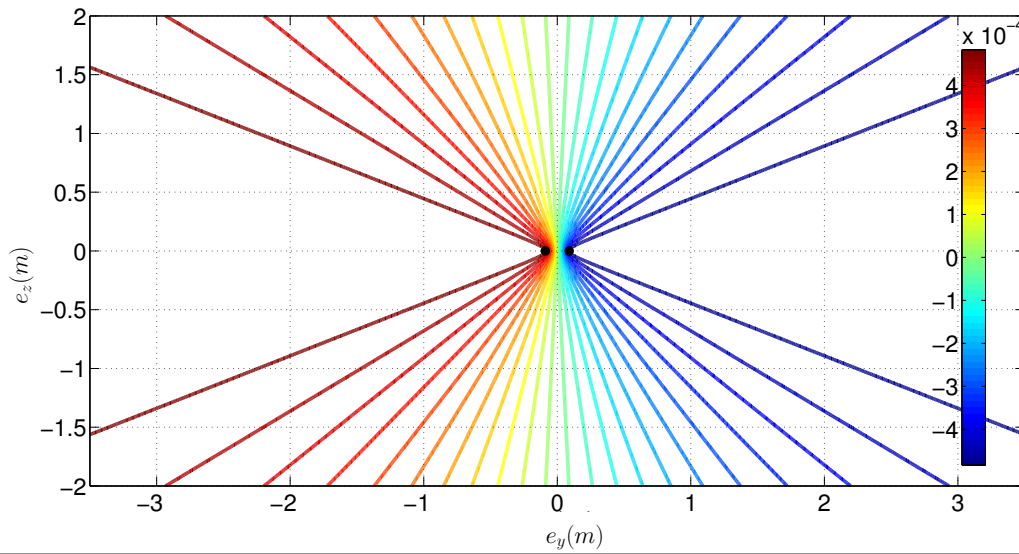


FIGURE 1.7: Isolignes de la fonction d'observation dans le cas d'étude considéré. Les isolignes sont des branches d'hyperboles, résultant de l'intersection des nappes d'hyperboloïdes avec le plan (y_R, z_R) .

De même, (1.2.41) se réduit à

$$\text{ITD} = \frac{1}{c} \left(\sqrt{e_y^2 + e_z^2 + a^2 - 2ae_y} - \sqrt{e_y^2 + e_z^2 + a^2 + 2ae_y} \right). \quad (1.2.52)$$

Les isolignes de la fonction d'observation sont tracées en figure 1.7, et décrivent cette fois-ci des branches d'hyperboles.

1.3 ORGANISATION DE LA THÈSE

Le but de cette thèse est de mettre en place un cadre de travail générique pour la localisation active binaurale de sources sonores en robotique à travers une stratégie de filtrage stochastique. La méthode proposée se décompose en deux étapes :

1. à chaque instant, détection d'activité des sources et estimation des paramètres spatiaux relatifs à celle-ci à partir des flux audio observés sur des fenêtres temporelles court terme ;
2. assimilation de ces paramètres instantanés en tant qu'observations dans un schéma de filtrage stochastique exploitant le torseur cinématique du capteur binaural (vitesses de translation et de rotation par rapport au monde, lesquelles peuvent être déduites des ordres moteurs du robot) ; si la source est mobile, le modèle de dynamique *a priori* exploité dans l'algorithme de filtrage est alors augmenté par un processus générateur du mouvement de celle-ci.

Le chapitre 2 est consacré à l'estimation instantanée de ITD lorsque le signal de l'émetteur se propage en champ libre. Ce problème étant très étroitement lié au problème d'analyse et d'estimation spectrale de signaux aléatoires, on se propose donc dans un premier volet du chapitre de dresser un état de l'art détaillé des méthodes d'estimation spectrale. Le lecteur de ce manuscrit appartenant à la communauté du Traitement du Signal est très probablement familiarisé avec les méthodes qui y sont présentées. Le lecteur non spécialiste—*e.g.* davantage tourné vers la Robotique—y trouvera certainement un plus grand intérêt. Pour certaines méthodes, nous analysons en détail les statistiques de l'estimateur sous diverses hypothèses. L'intérêt de cette analyse est double. Premièrement, elle permet de donner des pistes quant au choix de la méthode à utiliser, en fonction du problème considéré. En second lieu, cette analyse permet de définir—et justifier—des modèles statistiques pour les données utilisées dans des méthodes d'estimation de paramètres spatiaux. Un état de l'art des méthodes d'estimation de ITD est ensuite proposé. Les méthodes qui y sont présentées font très régulièrement référence aux méthodes d'estimation spectrale précédentes. Aussi les §2.1 et §2.2 présentent une synthèse des méthodes sus-mentionnées, synthèse qui servira par ailleurs de base aux chapitres 3 et 5. Nous justifions en outre notre choix de la méthode d'estimation de ITD que nous exploitons dans notre stratégie.

Le chapitre 3 propose des solutions à l'estimation instantanée de paramètres spatiaux lorsque l'hypothèse de propagation en champ libre ne tient plus, *e.g.* lorsque les microphones sont montés sur une tête. Un aperçu des méthodes existantes les plus répandues en robotique est d'abord donné. Puis une contribution originale détaillée, et son intérêt comparativement à l'état de l'art est discuté. La méthode est testée en simulation, permettant ainsi d'étudier les effets de la tête sur les performance de localisation, et notamment l'intérêt que peut apporter un élément diffusant en comparaison à une paire de microphones en champ libre. Note approche est également testée dans un environnement réel contrôlé. Un second volet du chapitre est dédié à la détection instantanée d'activité de la source, qui peut avoir son utilité dans une stratégie de filtrage, par exemple pour affecter un degré de confiance aux observations à assimiler dans le filtre. Là encore, les méthodes les plus courantes sont passées en revue, et notre méthode est ensuite présentée et discutée.

Le chapitre 4 concerne la stratégie de filtrage en elle-même. Les difficultés liées à la définition d'une telle stratégie sont passées en revue : discrétisation de la représentation d'état, non-linéarité du modèle, liens avec le problème du *Bearings-Only Tracking-BOT*, présence d'outliers dans les observations, difficulté de réglage des paramètres du filtre, etc. Pour chacune d'elles, des solutions sont proposées et argumentées. Des résultats de simulation sont donnés pour illustrer le propos et mettre en avant certains points de la discussion. Deux solutions originales sont en outre proposées pour détecter l'apparition/la disparition d'une source en exploitant à la fois les flux audio et la proprioception du capteur. Les méthodes sont testées et validées en environnement réel et contrôlé. En particulier, on montre que l'exploitation de la mobilité du capteur/d'un processus

générateur du mouvement de l'émetteur permet de localiser précisément une source sonore—en terme d'azimuth *et* de distance—en dépit des fausses observations qui apparaissent dans un milieu réel.

Puis, le chapitre 5, plus prospectif, propose des pistes pour étendre les deux points de notre stratégie au cas de la localisation active de plusieurs sources. L'accent est principalement mis sur la détection/localisation instantanée de plusieurs sources avec seulement deux microphones. Un bref état de l'art des différentes approches envisageables est présentée, puis nous détaillons l'approche qui nous semble la plus prometteuse. En particulier, on propose une extension de notre méthode d'estimation instantanée de paramètres spatiaux présentée au chapitre 3 au cas de plusieurs sources, en considérant trois variantes différentes (basées sur des hypothèses différentes).

Finalement, ce manuscrit se termine par une conclusion et quelques prospectives à court et moyen terme.

Estimation court terme de spectres et de temps de retard

Nous avons montré dans le chapitre précédent, sur la base de considérations acoustiques et au prix de certaines hypothèses (propagation en champ libre d'ondes planes, approximation quasi-statique de la propagation), comment l'**ITD** est relié aux paramètres spatiaux que nous allons chercher, plus tard, à estimer. Néanmoins, nous n'avons pas encore présenté comment l'**ITD** peut être à son tour estimé sur la base des signaux reçus par le capteur binaural. Comme précisé précédemment, cette problématique est très étroitement liée au problème d'analyse et d'estimation spectrale de signaux aléatoires, qui seront donc abordés dans une première section de ce chapitre. Puis, un état de l'art des méthodes d'estimation d'**ITD**, s'appuyant pour la plupart sur les résultats d'estimation spectrale introduits précédemment, sera ensuite proposé. Notre objectif est d'effectuer un survol suffisamment large des techniques ayant trait à ce problème, qui puisse constituer une base de discussion, voire de remise en question, de certains choix effectués—parfois trop systématiquement—dans la thématique de l'audition en robotique. Ce chapitre se termine par une discussion comparative des différentes approches mentionnées.

2.1 ESTIMATION SPECTRALE

Dans cette section, on fait appel à des notions et termes techniques relatifs aux signaux aléatoires : ergodisme, stationnarité au sens large, Gaussianité, autocorrélation, corrélation croisée, Densité Spectrale de Puissance (**DSP**)¹, convergences presque sûre et en probabilité, etc. Ceux-ci sont pour la plupart définis en annexe chapitre 7. On considère deux signaux aléatoires x, y à temps continu, à valeurs réelles, individuellement et conjointement Stationnaires au Sens Large (**SSL**)² et ergodiques vis-à-vis de leurs autocorrélation et corrélation croisée.

On peut distinguer deux catégories d'estimateurs de **DSP** et **DSP** croisée des signaux x et y . Ceux qui ne font appel à aucune hypothèse sur les signaux autre que les hypothèses de stationnarité et d'ergodisme sont qualifiés d'estimateurs non paramétriques. Les autres entrent dans la catégorie des estimateurs paramétriques. Quelle que soit la catégorie à laquelle elle appartient, une méthode repose toujours—d'un point de vue théorique ou pratique—sur des estimateurs de corrélation et corrélation croisée des signaux. On commence donc par présenter ces estimateurs.

1. *Power Spectral Density-PSD*
2. *Wide Sense Stationary-WSS*

2.1.1 Estimation de la fonction d'autocorrélation d'un signal

Dans cette partie, on définit deux estimateurs de la fonction d'autocorrélation (Définition 7.4.7) d'un signal Stationnaire au Sens Large (SSL) (Définition 7.4.15) ergodique vis-à-vis de son autocorrélation (Définition 7.4.18). On s'intéresse au biais et à la variance de ces estimateurs ainsi qu'aux conditions de leur convergence. On se restreint ici à l'autocorrélation d'un signal pour rendre les calculs plus simples, mais les résultats s'étendent sans difficulté au cas de l'estimation de la corrélation croisée de deux signaux conjointement SSL et ergodiques vis-à-vis de leur corrélation croisée.

A Théorèmes préliminaires

Quelques théorèmes préliminaires sont d'abord donnés. Le lecteur intéressé peut consulter [Papoulis, 1977]–[Papoulis, 1984] pour plus de détails.

THÉORÈME 2.1.1 Espérance et variance de la moyenne temporelle d'un signal aléatoire.

Soit \mathbf{z} un signal aléatoire à valeurs réelles et à temps continu, $T \in \mathbb{R}^+$ et \mathcal{I}_T la moyenne temporelle de \mathbf{z} sur l'intervalle $I_T \triangleq [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ définie par

$$\mathcal{I}_T \triangleq \frac{1}{T} \int_{I_T} \mathbf{z}(t) dt.$$

Si \mathbf{z} est SSL alors, en notant $C_{\mathbf{z}}(\alpha) \triangleq \text{cov}\{\mathbf{z}(t), \mathbf{z}(t + \alpha)\}$, on a

$$\mathbb{E}\{\mathcal{I}_T\} = \mathbb{E}\{\mathbf{z}(t)\}, \quad \text{var}\{\mathcal{I}_T\} = \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} C_{\mathbf{z}}(\alpha) \left(1 - \frac{|\alpha|}{T}\right) d\alpha.$$

PREUVE Par linéarité de l'espérance mathématique,

$$\mathbb{E}\{\mathcal{I}_T\} = \frac{1}{T} \int_{I_T} \mathbb{E}\{\mathbf{z}(t)\} dt, \quad \text{var}\{\mathcal{I}_T\} = \frac{1}{T^2} \iint_{I_T \times I_T} \text{cov}\{\mathbf{z}(t_1), \mathbf{z}(t_2)\} dt_1 dt_2. \quad (2.1.1)$$

Or pour un signal \mathbf{z} SSL, $\mathbb{E}\{\mathbf{z}(t)\}$ est indépendant de t et $\text{cov}\{\mathbf{z}(t_1), \mathbf{z}(t_2)\} = C_{\mathbf{z}}(t_2 - t_1)$ ne dépend que de $t_2 - t_1$. D'après [Papoulis, 1977] pp354-355, on peut alors montrer que

$$\frac{1}{T^2} \iint_{I_T \times I_T} C_{\mathbf{z}}(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 = \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} C_{\mathbf{z}}(\alpha) \left(1 - \frac{|\alpha|}{T}\right) d\alpha,$$

ce qui donne le résultat. ■

THÉORÈME 2.1.2 Condition nécessaire et suffisante d'ergodisme.

Soit \mathbf{z} un signal aléatoire à valeurs réelles, à temps continu, et SSL. On note $\phi_{\tau}(t) \triangleq \mathbf{z}(t)\mathbf{z}(t + \tau)$. \mathbf{z} est ergodique vis-à-vis de son autocorrélation ssi $\forall \tau$

- $\text{cov}\{\phi_{\tau}(t_1), \phi_{\tau}(t_2)\}$ ne dépend que de $t_2 - t_1$,
- $\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} C_{\phi_{\tau}}(\alpha) \left(1 - \frac{|\alpha|}{T}\right) d\alpha \right\} = 0$,

avec $C_{\phi_{\tau}}(\alpha) \triangleq \text{cov}\{\phi_{\tau}(t), \phi_{\tau}(t + \alpha)\}$.

PREUVE On cherche une condition nécessaire et suffisante pour que $\forall \tau$ la variable aléatoire définie par

$$R_T(\tau) \triangleq \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \mathbf{z}(t)\mathbf{z}(t+\tau)dt \quad (2.1.2)$$

converge en moyenne quadratique vers $R_{\mathbf{z}\mathbf{z}}(\tau)$ lorsque T tend vers l'infini. Par linéarité de l'espérance, il vient immédiatement que $\mathbb{E}\{R_T(\tau)\} = R_{\mathbf{z}\mathbf{z}}(\tau)$. Il suffit donc de trouver une condition pour que la variance de $R_T(\tau)$ tende vers zéro. En notant $\phi_\tau(t) = \mathbf{z}(t)\mathbf{z}(t+\tau)$, on a

$$R_T(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \phi_\tau(t)dt,$$

dont la variance se déduit du théorème 2.1.1, sous hypothèse que $\phi_\tau(t)$ est SSL (vrai dans le cas centré gaussien), en posant $z(t) = \phi_\tau(t)$. D'où le résultat du théorème. ■

REMARQUE 2.1.1 La condition porte sur un moment d'ordre 4 du signal. Lorsque \mathbf{z} est de plus centré Gaussien, on peut montrer que [Papoulis, 1977] la première condition du théorème est vérifiée et que

$$C_{\phi_\tau}(\alpha) = R_{\mathbf{z}\mathbf{z}}(\alpha)^2 + R_{\mathbf{z}\mathbf{z}}(\tau + \alpha)R_{\mathbf{z}\mathbf{z}}(\tau - \alpha). \quad (2.1.3)$$

La seconde condition du théorème devient donc

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} \left[R_{\mathbf{z}\mathbf{z}}(\alpha)^2 + R_{\mathbf{z}\mathbf{z}}(\tau + \alpha)R_{\mathbf{z}\mathbf{z}}(\tau - \alpha) \right] \left(1 - \frac{|\alpha|}{T} \right) d\alpha \right\} = 0. \quad (2.1.4)$$

B Estimateurs de l'autocorrélation et statistiques

Soit \mathbf{x} un signal SSL ergodique vis-à-vis de son autocorrélation $R_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau) \triangleq \mathbb{E}\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+\tau)\}$. On cherche à estimer $R_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau)$ sur la base d'une réalisation de \mathbf{x} sur une fenêtre temporelle $I_T = [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. On note $\mathbf{x}_T(t) \triangleq \mathbf{x}(t)\pi_T(t)$ la version fenêtrée de $\mathbf{x}(t)$, avec $\pi_T(t)$ la fenêtre rectangulaire—symétrique par rapport à l'origine des temps—définie par

$$\pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{sur } [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (2.1.5)$$

On définit sur $\mathbb{R} \setminus \{-T, T\}$ un premier estimateur de l'autocorrélation de \mathbf{x} par

$$\mathring{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau) = \frac{1}{T - |\tau|} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}_T(t)\mathbf{x}_T(t+\tau)dt. \quad (2.1.6)$$

Remarquons que $\mathbf{x}_T(t)\mathbf{x}_T(t+\tau)$ est non nul et vaut $\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+\tau)$ sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} - \tau]$ pour $\tau > 0$ et sur $[-\frac{T}{2} - \tau, \frac{T}{2}]$ pour $\tau \leq 0$. Pour $\tau \in I_{2T} \triangleq]-T, T[$, l'estimateur s'écrit donc, après quelques manipulations,

$$\mathring{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau) = \frac{1}{T - |\tau|} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-|\tau|} \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+|\tau|)dt. \quad (2.1.7)$$

Cet estimateur est sans biais.

THÉORÈME 2.1.3 Moyenne et variance de l'estimateur non biaisé de l'autocorrélation.

Soit $\phi_\tau(t) = \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+\tau)$. Pour $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{-T, T\}$, la moyenne de $\mathring{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau)$ vaut

$$\mathbb{E}\{\mathring{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau)\} = R_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau)\pi_{2T}(\tau),$$

et si $\text{cov}\{\phi_\tau(t_1), \phi_\tau(t_2)\}$ ne dépend que de $t_2 - t_1$ alors pour $\tau \in I_{2T}$ la variance de $\mathring{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau)$ vaut

$$\text{var}\{\mathring{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau)\} = \frac{1}{T - |\tau|} \int_{-T+|\tau|}^{+T-|\tau|} C_{\phi_\tau}(\alpha) \left(1 - \frac{|\alpha|}{T - |\tau|} \right) d\alpha,$$

avec $C_{\phi_\tau}(\alpha) = \text{cov}\{\phi_\tau(t), \phi_\tau(t+\alpha)\}$.

PREUVE Par linéarité de l'espérance mathématique et en utilisant le fait que \mathbf{x} est [SSL](#), la moyenne de $\hat{R}_{\mathbf{xx}}(\tau)$ vient de manière immédiate

$$\mathbb{E}\{\hat{R}_{\mathbf{xx}}(\tau)\} = R_{\mathbf{xx}}(\tau) \frac{R_{\pi_T \pi_T}(\tau)}{T - |\tau|}. \quad (2.1.8)$$

Du fait que $R_{\pi_T \pi_T}(\tau) = (T - |\tau|)\pi_{2T}(\tau)$, on obtient le résultat. Concernant la variance, commençons par remarquer qu'un changement de variable adéquat permet d'obtenir une formulation symétrique de l'estimateur sur $\underline{I}_{2T} =]-T, T[$:

$$\hat{R}_{\mathbf{xx}}(\tau) = \frac{1}{T - |\tau|} \int_{-\frac{T-|\tau|}{2}}^{+\frac{T-|\tau|}{2}} \mathbf{x}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \mathbf{x}\left(t + \frac{\tau}{2}\right) dt. \quad (2.1.9)$$

Pour la suite on note $\phi_\tau(t) = \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t + \tau)$ et $\gamma_\tau(t) = \mathbf{x}(t - \frac{\tau}{2})\mathbf{x}(t + \frac{\tau}{2}) = \phi_\tau(t - \frac{\tau}{2})$. Il vient, pour $\tau \in \underline{I}_{2T}$,

$$\hat{R}_{\mathbf{xx}}(\tau) = \frac{1}{T - |\tau|} \int_{-\frac{T-|\tau|}{2}}^{+\frac{T-|\tau|}{2}} \gamma_\tau(t) dt. \quad (2.1.10)$$

Si $\text{cov}\{\phi_\tau(t_1), \phi_\tau(t_2)\}$ ne dépend que de $t_2 - t_1$ alors $C_{\phi_\tau}(t_2 - t_1) = C_{\gamma_\tau}(t_2 - t_1)$. En utilisant le théorème [2.1.1](#) on obtient le résultat. ■

REMARQUE 2.1.2 À τ fixé, $\text{var}\{\hat{R}_{\mathbf{xx}}(\tau)\}$ tend vers $\text{var}\{R_T(\tau)\}$ lorsque T tend vers l'infini. Par conséquent, $\text{var}\{\hat{R}_{\mathbf{xx}}(\tau)\}$ tend vers zéro si \mathbf{x} est ergodique conditionnellement à son autocorrélation (cf théorème [2.1.2](#)), et l'estimateur est alors consistant (Définition [7.5.2](#)). On note cependant que la convergence n'est pas uniforme en τ , car quel que soit T fixé, la variance $\text{var}\{\hat{R}_{\mathbf{xx}}(\tau)\}$ est d'autant plus importante que $|\tau|$ est proche de T . Comme nous le verrons aux [§2.1.2A](#) et [§2.1.3](#), ceci pose particulièrement problème lorsqu'on cherche à estimer la [DSP](#) d'un signal aléatoire à partir de l'estimée de son autocorrélation.

On définit maintenant un autre estimateur sur \mathbb{R} de l'autocorrélation d'un signal \mathbf{x} donné, par

$$\hat{R}_{\mathbf{xx}}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}_T(t)\mathbf{x}_T(t + \tau) dt, \quad (2.1.11)$$

ainsi que

$$\lambda_T = \left(1 - \frac{2|\tau|}{T}\right) \pi_T(\tau). \quad (2.1.12)$$

Les propriétés de $\hat{R}_{\mathbf{xx}}(\tau)$ sont résumées dans le théorème suivant.

THÉORÈME 2.1.4 Moyenne et variance de l'estimateur biaisé de l'autocorrélation.

Soit $\phi_\tau(t) = \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t + \tau)$. Pour $\tau \in \mathbb{R}$, la moyenne de $\hat{R}_{\mathbf{xx}}(\tau)$ vaut

$$\mathbb{E}\{\hat{R}_{\mathbf{xx}}(\tau)\} = R_{\mathbf{xx}}(\tau)\lambda_{2T}(\tau),$$

et si $\text{cov}\{\phi_\tau(t_1), \phi_\tau(t_2)\}$ ne dépend que de $t_2 - t_1$ alors pour $\tau \in \underline{I}_{2T}$ la variance de $\hat{R}_{\mathbf{xx}}(\tau)$ vaut

$$\text{var}\{\hat{R}_{\mathbf{xx}}(\tau)\} = \frac{1}{T} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \int_{-T+|\tau|}^{+T-|\tau|} C_{\phi_\tau}(\alpha) \left(1 - \frac{|\alpha|}{T - |\tau|}\right) d\alpha,$$

avec $C_{\phi_\tau}(\alpha) = \text{cov}\{\phi_\tau(t), \phi_\tau(t + \alpha)\}$.

PREUVE Par linéarité de l'espérance mathématique et en utilisant le fait que \mathbf{x} est **SSL**, la moyenne de $\hat{R}_{\mathbf{xx}}$ vient de manière immédiate

$$\mathbb{E}\{\hat{R}_{\mathbf{xx}}(\tau)\} = R_{\mathbf{xx}}(\tau) \frac{R_{\pi_T \pi_T}(\tau)}{T}. \quad (2.1.13)$$

Du fait que $R_{\pi_T \pi_T}(\tau) = (T - |\tau|)\pi_{2T}(\tau)$, on obtient le résultat. En outre, on peut remarquer que (pour $|\tau| \neq T$)

$$\hat{R}_{\mathbf{xx}}(\tau) = \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \mathring{R}_{\mathbf{xx}}(\tau), \quad (2.1.14)$$

dont on déduit que pour $\tau \in \underline{I}_{2T}$,

$$\text{var}\{\hat{R}_{\mathbf{xx}}(\tau)\} = \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right)^2 \text{var}\{\mathring{R}_{\mathbf{xx}}(\tau)\}, \quad (2.1.15)$$

ce qui donne le résultat (*cf* théorème 2.1.3). ■

Il convient de noter que l'estimateur biaisé souffre également du problème de convergence non uniforme évoqué précédemment, *i.e.* sa variance est grande pour $|\tau| \approx T$. Dans la pratique, si l'on souhaite étudier l'autocorrélation d'un signal sur un intervalle $[-a, a]$ tel que $a \in \mathbb{R}^+$, il faut donc fixer T tel que $T \gg a$.

2.1.2 Estimation non paramétrique de la densité spectrale de puissance

A Le périodogramme

La **DSP** croisée de deux signaux **SSL** \mathbf{x}, \mathbf{y} est par définition la transformée de Fourier de leur corrélation croisée. Il paraît alors naturel de définir comme estimateur de leur **DSP** croisée la transformée de Fourier d'un estimateur de leur corrélation croisée. On considère l'estimateur biaisé de la corrélation croisée de \mathbf{x}, \mathbf{y} , défini par

$$\hat{R}_{\mathbf{xy}}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}_T(t) \mathbf{y}_T(t - \tau) dt. \quad (2.1.16)$$

Remarquons qu'on peut réécrire (2.1.16) sous la forme

$$\hat{R}_{\mathbf{xy}}(\tau) = \frac{1}{T} \mathbf{x}_T(\tau) * \mathbf{y}_T(-\tau) \quad (2.1.17)$$

D'après le théorème de convolution, la transformée de Fourier de $\hat{R}_{\mathbf{xy}}(\tau)$, notée $\hat{S}_{\mathbf{xy}}(f)$ s'écrit

$$\hat{S}_{\mathbf{xy}}(f) = \mathcal{F} \left[\hat{R}_{\mathbf{xy}}(\tau) \right] = \frac{1}{T} X_T(f) Y_T^*(f) \quad (2.1.18)$$

où, pour $\mathbf{z} \in \mathbf{x}, \mathbf{y}$

$$Z_T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{z}_T(t) e^{-2i\pi f t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \mathbf{z}(t) e^{-2i\pi f t} dt \quad (2.1.19)$$

est la transformée de Fourier de $\mathbf{z}_T(t)$. $\hat{S}_{\mathbf{xy}}$ est un estimateur de $S_{\mathbf{xy}}$, communément appelé le *périodogramme* croisé de \mathbf{x}, \mathbf{y} .

On aurait également pu prendre comme estimateur de **DSP** la transformée de Fourier de $\mathring{R}_{\mathbf{xy}}$, mais on préfère en général utiliser l'estimateur biaisé de la corrélation croisée. En effet, cela garantit la positivité de la **DSP** estimée lorsque $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, et sa mise en œuvre pratique est moins coûteuse en temps de calcul. Comme indiqué dans la suite, cet estimateur n'est pas consistant du fait que prendre un temps d'observation infiniment long ne suffit pas à réduire sa variance

à zéro. Cette tare provient de la contribution des instants τ proches de $\pm T$ (pour lesquels la variance de $\hat{R}_{xy}(\tau)$ est grande) dans l'intégration temporelle de $\hat{R}_{xy}(\tau)\exp(-2i\pi f\tau)$. Plusieurs méthodes seront évoquées afin de réduire la contribution de ces instants et rendre l'estimateur consistant, et on étudiera la moyenne et variance des estimateurs proposés ainsi que leurs propriétés asymptotiques. Le calcul des statistiques d'ordre 2 de ces estimateurs nécessite la connaissance de moments croisés d'ordre 4 des signaux, qui pour deux signaux centrés gaussiens dans leur ensemble, peuvent s'exprimer en fonction de moments d'ordre 2. d'après [Papoulis, 1984] p445, l'hypothèse de signaux centrés gaussiens dans leur ensemble n'induit pas de perte de généralité pour les propriétés asymptotiques des estimateurs. On se focalisera donc sur de tels signaux.

Par la suite, considérant deux signaux aléatoires SSL u, v et une fenêtre w réelle symétrique à support fini, on notera par convention $B_{uv}T_w \gg 1$ pour signifier que les variations de la DSP croisée de u, v , notée S_{uv} , sont faibles sur tout intervalle fréquentiel de largeur de l'ordre de celle du lobe principal de $W = \mathcal{F}\{w\}$ (i.e. S_{xy} est suffisamment «lisse» de sorte que W s'apparente à une impulsion de Dirac au regard de S_{xy}). On désigne par B_w la largeur du lobe principal de W .

B Lissage par moyenne empirique de périodogrammes court terme

B-1 Définition générale de l'estimateur Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux aléatoires SSL réels et $w(t)$ une fenêtre réelle à support fini de longueur L et symétrique par rapport à l'origine des temps. On définit $W(f) \triangleq \mathcal{F}\{w(t)\}$ et on note

$$R_{ww}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} W^2(\nu)e^{2i\pi\nu\tau} d\nu = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} w(t)w(t-\tau)dt \quad (2.1.20)$$

la fonction d'autocorrélation de la fenêtre w ³. En particulier, $R_{ww}(0)$ désigne l'énergie totale de la fenêtre.

On construit P fenêtres temporelles de même longueur L par décalage temporel de $w(t)$ de la manière suivante

$$w_k(t) = w(t - \tau_k), \quad k = 1, \dots, P, \quad (2.1.21)$$

où

$$\tau_k = \frac{L}{2} + (k-1)S, \quad (2.1.22)$$

et où $S \leq L$ est le décalage temporel entre deux fenêtres successives w_k, w_{k+1} . En d'autres termes, pour $k \in \{1, \dots, P\}$, w_k a pour support $I_k \triangleq [(k-1)S, (k-1)S + L]$. La construction de ces fenêtres est décrite en figure 2.1. L'intervalle temporel sur lequel x et y sont observés est défini par $I_T = \cup_{k=1}^P I_k = [0, T]$ ⁴. Dans le domaine fréquentiel, la transformée de Fourier de $w_k(t)$ s'écrit

$$W_k(f) = W(f)e^{-2i\pi f\tau_k}. \quad (2.1.23)$$

On construit P périodogrammes croisés⁵ de x, y de la façon suivante : pour $z \in \{x, y\}$, on calcule la transformée de Fourier de $z(t)$ fenêtré par $w_k(t)$

$$Z_k(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)w_k(t)e^{-2i\pi ft}dt, \quad k = 1, \dots, P \quad (2.1.24)$$

puis on construit le périodogramme croisé de x, y sur la $k^{\text{ième}}$ fenêtre en calculant

$$\hat{S}_{xy,k}(f) = \frac{1}{R_{ww}(0)} X_k(f)Y_k^*(f), \quad k = 1, \dots, P. \quad (2.1.25)$$

3. On exploite la parité de $w(t)$, qui implique que $W(f)$ est réel.

4. L'intervalle d'observation est ici défini par $I_T = [0, T]$ (i.e. I_T n'est pas symétrique par rapport à l'origine des temps) pour des raisons pratiques, mais ce choix est sans conséquence sur les résultats et n'induit pas de perte de généralité.

5. Lorsque la fenêtre w n'est pas une fenêtre rectangulaire, on parle de périodogramme croisé modifié.

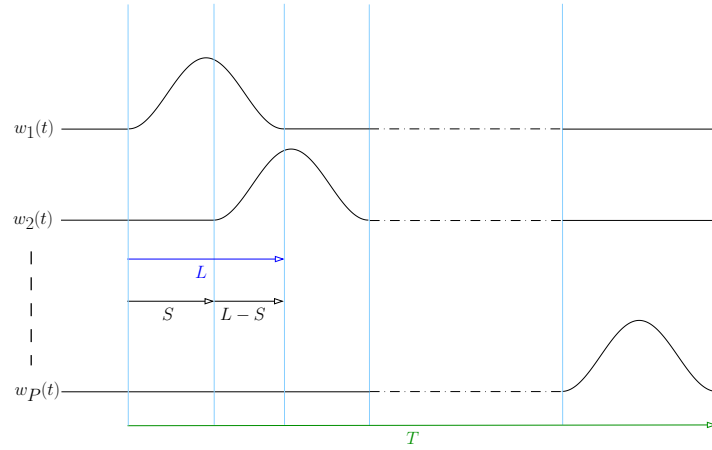


FIGURE 2.1: Définition des fenêtres utilisées pour la construction de l'estimateur de DSP

L'estimateur proposé, dénommé périodogramme moyenné, est alors défini par

$$\bar{S}_{xy}(f) = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^P \hat{S}_{xy,k}(f). \quad (2.1.26)$$

On caractérise ci-après les statistiques aux ordres 1 et 2 du périodogramme moyenné dans le cas où \mathbf{x} et \mathbf{y} sont centrés gaussiens dans leur ensemble. Notons que les résultats obtenus pour l'estimateur de DSP d'un signal ne s'étendent pas de manière triviale au cas de l'estimateur de DSP croisée de deux signaux. En effet, Une DSP croisée est complexe, alors qu'une DSP est réelle. La densité de probabilité (ddp) d'un vecteur complexe \mathbf{z} gaussien de dimension d s'écrit dans le cas général

$$p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}; \mu, C, R) = \frac{1}{\pi^d \sqrt{\det C \det (C^* - R^\dagger C^{-1} R)}} e^{-\frac{1}{2} [(z - \mu)^\dagger, (z - \mu)'] \begin{bmatrix} C & R \\ R^\dagger & C^* \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z - \mu \\ z^* - \mu^* \end{bmatrix}},$$

où $\mu \triangleq \mathbb{E}\{\mathbf{z}\}$, $C \triangleq \mathbb{E}\{(\mathbf{z} - \mu)(\mathbf{z} - \mu)^\dagger\}$, $R \triangleq \mathbb{E}\{(\mathbf{z} - \mu)(\mathbf{z} - \mu)'\}$ désignent respectivement la *moyenne*, la *matrice de covariance* et la *matrice de relation* de \mathbf{z} .

Si U désigne un vecteur aléatoire complexe gaussien, alors sa moyenne $m_U \triangleq \mathbb{E}\{U\}$ et sa matrice de covariance $\mathbb{E}\{(U - m_U)(U - m_U)^\dagger\}$ —où \dagger désigne l'opérateur de transposée Hermitienne—ne suffisent pas dans le cas général à le caractériser entièrement. Il faut également spécifier la matrice $\mathbb{E}\{(U - m_U)(U - m_U)'\}$, appelée *matrice de relation* du vecteur dans certaines références. Dans le cas scalaire on utilisera le terme de «relation», faute d'avoir trouvé une dénomination plus appropriée et plus employée.

Voilà pourquoi on ne se restreint pas ici uniquement à l'estimation de DSP d'un signal.

B-2 Théorèmes préliminaires On énonce les deux théorèmes suivants, utiles pour la suite.

THÉORÈME 2.1.5 Moments croisés d'ordre 2 de transformées de Fourier court terme.

Soient \mathbf{u}, \mathbf{v} deux signaux SSL, et pour $n, p \in \{1, \dots, P\}$, $U_n(f), V_p(f)$ leurs transformées telles que définies dans (2.1.24). Pour tous $f_1, f_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}\{U_n(f_1)V_p^*(f_2)\} = \int S_{\mathbf{uv}}(f_2 - \nu)W(f_1 - f_2 + \nu)W(\nu)e^{-2i\pi\nu(\tau_n - \tau_p)}d\nu e^{-2i\pi(f_1 - f_2)\tau_n},$$

où $S_{\mathbf{uv}}$ est la DSP croisée de \mathbf{u}, \mathbf{v} et où W et $\{\tau_k\}_{k=1, \dots, P}$ sont définis au §2.1B-1.

PREUVE En remplaçant U_n et V_p par leurs expressions données dans (2.1.24) et en utilisant la linéarité de l'espérance, il vient

$$\mathbb{E}\{U_n(f_1)V_p^*(f_2)\} = \iint \mathbb{E}\{\mathbf{u}(t_1)\mathbf{v}(t_2)\}w_n(t_1)w_p(t_2)e^{-2i\pi(f_1t_1-f_2t_2)}dt_1dt_2. \quad (2.1.27)$$

En effectuant un changement de variable $\tau = t_1 - t_2$ dans l'intégrale sur t_1 on obtient

$$\mathbb{E}\{U_n(f_1)V_p^*(f_2)\} = \iint \mathbb{E}\{\mathbf{u}(t_2)\mathbf{v}(t_2 - \tau)\}w_p(t_2)w_n(t_2 + \tau)e^{-2i\pi f_1\tau}e^{-2i\pi(f_1-f_2)t_2}d\tau dt_2. \quad (2.1.28)$$

En utilisant le fait que $\mathbb{E}\{\mathbf{u}(t_2)\mathbf{v}(t_2 - \tau)\} = R_{\mathbf{uv}}(\tau)$ ne dépend pas de t_2 et en changeant l'ordre des bornes d'intégration il vient

$$\mathbb{E}\{U_n(f_1)V_p^*(f_2)\} = \int R_{\mathbf{uv}}(\tau) \left(\int w_p(t_2)w_n(t_2 + \tau)e^{-2i\pi(f_1-f_2)t_2}dt_2 \right) e^{-2i\pi f_1\tau}d\tau. \quad (2.1.29)$$

En utilisant le théorème de convolution sur l'intégrale sur t_2 on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{U_n(f_1)V_p^*(f_2)\} &= \int R_{\mathbf{uv}}(\tau) \left(\int W_p(\mu)W_n(f_1 - f_2 - \mu)e^{2i\pi(f_1-f_2-\mu)\tau}d\mu \right) e^{-2i\pi f_1\tau}d\tau \\ &= \int \left(\int R_{\mathbf{uv}}(\tau)e^{-2i\pi(f_2+\mu)\tau}d\tau \right) W_p(\mu)W_n(f_1 - f_2 - \mu)d\mu \\ &= \int S_{\mathbf{uv}}(f_2 + \mu)W_p(\mu)W_n(f_1 - f_2 - \mu)d\mu. \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

En effectuant le changement de variable $\nu = -\mu$ il vient

$$\mathbb{E}\{U_n(f_1)V_p^*(f_2)\} = \int S_{\mathbf{uv}}(f_2 - \nu)W_n(f_1 - f_2 + \nu)W_p^*(\nu)d\nu. \quad (2.1.31)$$

De (2.1.23) on déduit

$$W_n(f_1 - f_2 + \nu)W_p^*(\nu) = W(f_1 - f_2 + \nu)W(\nu)\exp(-2i\pi([f_1 - f_2 + \nu]\tau_n - \nu\tau_p)), \quad (2.1.32) \quad \blacksquare$$

THÉORÈME 2.1.6 Moments croisés d'ordre 2 de périodogrammes court terme.

Si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. \mathbf{x} et \mathbf{y} sont centrés gaussiens dans leur ensemble,
2. $B_{\mathbf{xy}}T_w \gg 1, B_{\mathbf{xx}}T_w \gg 1, B_{\mathbf{yy}}T_w \gg 1,$

alors pour $k, m \in \{1, \dots, P\}$ et $f \gg B_w/2,$

$$\begin{aligned} \text{cov}\{\hat{S}_{\mathbf{xy},k}(f), \hat{S}_{\mathbf{xy},m}(f)\} &= S_{\mathbf{xx}}(f)S_{\mathbf{yy}}(f) \frac{R_{ww}^2([m-k]S)}{R_{ww}^2(0)}, \\ \text{rel}\{\hat{S}_{\mathbf{xy},k}(f), \hat{S}_{\mathbf{xy},m}(f)\} &= S_{\mathbf{xy}}^2(f) \frac{R_{ww}^2([m-k]S)}{R_{ww}^2(0)}. \end{aligned}$$

PREUVE Par construction de $\hat{S}_{xy,k}(f)$, on a (en omettant la dépendance en f)

$$R_{ww}^2(0)\text{cov}\{\hat{S}_{xy,k}, \hat{S}_{xy,m}\} = \mathbb{E}\{X_k Y_k^* X_m^* Y_m\} - \mathbb{E}\{X_k Y_k^*\}\mathbb{E}\{X_m^* Y_m\}. \quad (2.1.33)$$

Or, par propriété des signaux complexes centrés gaussiens dans leur ensemble,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{X_k Y_k^* X_m^* Y_m\} &= \mathbb{E}\{X_k Y_k^*\}\mathbb{E}\{X_m^* Y_m\} \\ &\quad + \mathbb{E}\{X_k X_m^*\}\mathbb{E}\{Y_k^* Y_m\} + \mathbb{E}\{X_k Y_m\}\mathbb{E}\{Y_k^* X_m^*\}, \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

d'où

$$R_{ww}^2(0)\text{cov}\{\hat{S}_{xy,k}, \hat{S}_{xy,m}\} = \mathbb{E}\{X_k X_m^*\}\mathbb{E}\{Y_k^* Y_m\} + \mathbb{E}\{X_k Y_m\}\mathbb{E}\{Y_k^* X_m^*\}, \quad (2.1.35)$$

avec, en appliquant le théorème 2.1.5,

$$\mathbb{E}\{X_k(f)X_m^*(f)\} = \int S_{xx}(f-\nu)W^2(\nu)e^{-2i\pi\nu(\tau_k-\tau_m)}d\nu, \quad (2.1.36)$$

$$\mathbb{E}\{Y_k^*(f)Y_m(f)\} = \int S_{yy}(-f-\nu)W^2(\nu)e^{-2i\pi\nu(\tau_k-\tau_m)}d\nu, \quad (2.1.37)$$

$$\mathbb{E}\{X_k(f)Y_m(f)\} = \int S_{xy}(-f-\nu)W(2f+\nu)W(\nu)e^{-2i\pi\nu(\tau_k-\tau_m)}d\nu e^{-2i\pi 2f\tau_k}, \quad (2.1.38)$$

$$\mathbb{E}\{Y_k^*(f)X_m^*(f)\} = \int S_{xy}(f-\nu)W(-2f+\nu)W(\nu)e^{2i\pi\nu(\tau_k-\tau_m)}d\nu e^{2i\pi 2f\tau_m}. \quad (2.1.39)$$

Or, lorsque $B_{xx}T_w \gg 1, B_{yy}T_w \gg 1$, (2.1.36)–(2.1.37) donnent

$$\mathbb{E}\{X_m(f)X_m^*(f)\} = S_{xx}(f)R_{ww}([m-k]S), \quad \mathbb{E}\{Y_m^*(f)Y_m(f)\} = S_{yy}(f)R_{ww}([m-k]S). \quad (2.1.40)$$

Concernant les équations (2.1.38)–(2.1.39), remarquons que $\forall f, \nu \mapsto W(\nu)W(2f+\nu)$ est à peu près identiquement nulle si $f \gg B_w/2$. Sous cette condition, le deuxième terme de (2.1.35) est donc voisin de zéro, ce qui donne le résultat pour la covariance. Le résultat pour la relation est obtenu d'une manière similaire. ■

B-3 Statistiques de l'estimateur Les théorèmes du §2.1.2B-2 permettent d'établir les statistiques de l'estimateur. Celles-ci sont résumées dans les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME 2.1.7 Moyenne de l'estimateur par moyenne empirique de périodogrammes.

La moyenne du périodogramme croisé moyenné de \mathbf{x}, \mathbf{y} vaut

$$\mathbb{E}\{\bar{S}_{xy}(f)\} = \frac{1}{R_{ww}(0)}(S_{xy} * W^2)(f).$$

En particulier, lorsque $B_{xy}T_w \gg 1$ alors

$$\mathbb{E}\{\bar{S}_{xy}(f)\} = S_{xy}(f),$$

i.e. l'estimateur est sans biais.

PREUVE Par construction de $\hat{S}_{xy,k}$ et par linéarité de l'espérance mathématique,

$$\mathbb{E}\{\bar{S}_{xy}(f)\} = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^P \frac{\mathbb{E}\{X_k(f)Y_k^*(f)\}}{R_{ww}(0)}, \quad (2.1.41)$$

avec, en appliquant le théorème 2.1.5,

$$\mathbb{E}\{X_k(f)Y_k^*(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(f - \nu)W^2(\nu)d\nu, \quad (2.1.42)$$

qui est indépendant de k , ce qui donne le résultat. Si de plus $B_{xy}T_w \gg 1$, alors

$$\mathbb{E}\{X_k(f)Y_k^*(f)\} = S_{xy}(f) \int_{-\infty}^{+\infty} W^2(\nu)d\nu = S_{xy}(f)R_{ww}(0). \quad (2.1.43)$$

■

THÉORÈME 2.1.8 Variance et relation de l'estimateur par moyenne empirique de périodogrammes.

Si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. x et y sont centrés gaussiens dans leur ensemble,
2. $B_{xy}T_w \gg 1, B_{xx}T_w \gg 1, B_{yy}T_w \gg 1$,

alors pour $f \gg B_w/2$, on a

$$\text{var}\{\bar{S}_{xy}(f)\} = \frac{S_{xx}(f)S_{yy}(f)}{K/2}, \quad \text{rel}\{\bar{S}_{xy}(f), \bar{S}_{xy}(f)\} = \frac{S_{xy}^2(f)}{K/2},$$

avec $K = 2$ pour $P = 1$ et

$$K = \frac{2P}{1 + 2 \sum_{k=1}^{P-1} \left(1 - \frac{k}{P}\right) \frac{R_{ww}^2(kS)}{R_{ww}^2(0)}}$$

pour $P > 1$.

PREUVE Pour plus de lisibilité, on omet la dépendance en f dans les équations et on note $a_{km} \triangleq \text{cov}\{\hat{S}_{xy,k}, \hat{S}_{xy,m}\}$.

$$\mathbb{E}\{\bar{S}_{xy}\bar{S}_{xy}^*\} - \mathbb{E}\{\bar{S}_{xy}\}\mathbb{E}\{\bar{S}_{xy}^*\} = \frac{1}{P^2} \sum_{k=1}^P \sum_{m=1}^P a_{km} \quad (2.1.44)$$

En séparant les termes pour lesquels $k = m$ de ceux pour lesquels $k \neq m$ dans la somme et en remarquant que $a_{km} = a_{mk}$ (cf théorème 2.1.6 et sa preuve), on peut réécrire l'équation (2.1.44) sous la forme

$$\text{var}\{\bar{S}_{xy}\} = \frac{1}{P^2} \sum_{k=1}^P a_{kk} + \frac{2}{P^2} \sum_{k=1}^{P-1} \sum_{m=k+1}^P a_{km}. \quad (2.1.45)$$

Un changement de variable $m = k + m'$ dans la somme indexée par m donne

$$\text{var}\{\bar{S}_{xy}\} = \frac{1}{P^2} \sum_{k=1}^P a_{kk} + \frac{2}{P^2} \sum_{k=1}^{P-1} \sum_{m'=1}^{P-k} a_{k(k+m')} \quad (2.1.46)$$

En remarquant que $a_{k(k+m')} \triangleq a_{m'}$ ne dépend que de m' (cf théorème 2.1.6), il vient

$$\text{var}\{\bar{S}_{xy}\} = \frac{a_0}{P} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{P-1} \left(1 - \frac{k}{P}\right) \frac{a_k}{a_0} \right], \quad (2.1.47)$$

avec (cf théorème 2.1.6)

$$a_k = S_{xx} S_{yy} \frac{R_{ww}^2(kS)}{R_{ww}^2(0)}, \quad (2.1.48)$$

d'où le résultat. Un raisonnement analogue permet de déduire $\text{rel}\{\bar{S}_{xy}(f), \bar{S}_{xy}(f)\}$. ■

B-4 Interprétation des résultats Pour $w(t) = \pi_T(t)$ et $P = 1$, $\bar{S}_{xy}(f)$ est tout simplement le périodogramme croisé de \mathbf{x}, \mathbf{y} calculé à partir de signaux observés sur une fenêtre de taille T . La variance et la relation de l'estimateur dans ce cas (lorsque S_{xy} est lisse sur la bande passante de l'estimateur) valent

$$\text{cov}\{\bar{S}_{xy}(f)\} = S_{xx}(f)S_{yy}(f), \quad \text{rel}\{\bar{S}_{xy}(f)\} = S_{xy}^2(f), \quad (2.1.49)$$

ce qui signifie que prendre T infiniment grand ne suffit pas à réduire les moments centrés d'ordre 2 de l'estimateur à zéro. Le périodogramme n'est donc pas consistant, pour la raison évoquée au début du §2.1.2A. En outre, toujours dans le cas $P = 1$, utiliser une fenêtre $w(t)$ non rectangulaire n'a aucune influence sur la variance de l'estimateur lorsque $B_{xy}T_w \gg 1$. L'influence de la fenêtre de pondération dans ce cas se trouve uniquement dans l'expression du biais. Du fait que

$$\mathbb{E}\{\bar{S}_{xy}(f)\} = \frac{1}{R_{ww}(0)} (S_{xy} * W^2)(f), \quad (2.1.50)$$

le choix de la fenêtre permet d'établir un compromis entre fuite du spectre (hauteur des lobes secondaires de W) et résolution fréquentielle (largeur du lobe principal de W)⁶.

A contrario, une moyenne de périodogrammes calculés sur des fenêtres de taille $L < T$, si elle résulte en une augmentation du biais par rapport au périodogramme (du fait que le support de w passe de T à $L < T$), a pour effet de réduire la variance et la relation de l'estimation d'un facteur $K/2$ sous les conditions du théorème 2.1.8. En particulier, pour L fixé, à mesure que T augmente, le nombre P de segments augmente et les moments centrés d'ordre 2 de $\bar{S}_{xy}(f)$ tendent vers zéro, *i.e.* l'estimateur est consistant.

Il reste à analyser l'influence du choix du taux de recouvrement $(L - S)/L$ des intervalles. Pour P fixé, le théorème indique que la variance minimale de l'estimateur est atteinte pour $S = L$, *i.e.* pour des segments disjoints. Par conséquent, si T est suffisamment grand, la meilleure procédure pour atteindre une valeur de variance désirée est de sélectionner des segments disjoints, *i.e.* imposer $K = P$ [Welch, 1967]. Cependant, si T ne peut être choisi arbitrairement grand, et que l'on souhaite atteindre une réduction maximale de la variance, alors une procédure avec recouvrement des segments est nécessaire. À T fixé, deux effets du recouvrement sont en opposition. D'une part, diminuer S a pour effet d'augmenter le nombre P de segments dans la procédure, ce qui a une tendance à réduire la variance. D'autre part, un recouvrement croissant induit une augmentation de la corrélation entre les fenêtres, ayant une tendance à augmenter la variance de l'estimateur. Lorsque des fenêtres rectangulaires sont utilisées, ces deux effets se contrecarrent et l'influence du recouvrement sur la variance est négligeable. En revanche, lorsque des fenêtres de type Hann sont utilisées, l'augmentation du nombre de segments prend le pas sur l'augmentation de la corrélation entre les fenêtres (jusqu'à une certaine limite du taux de

6. La fenêtre rectangulaire donnant la meilleure résolution fréquentielle et la plus grande fuite du spectre, et toute autre fenêtre donnant un compromis entre ces deux quantités.

Méthode	fenêtre	$\frac{(S-L)}{L}$	moyenne	variance
Périodogramme	$\pi_T(t)$	—	$S_{xy}(f) * \frac{\sin^2(\pi f T)}{T(\pi f)^2}$	$S_{xx}(f)S_{yy}(f)$
Périodogramme modifié	$w_T(t)$	—	$S_{xy}(f) * W_T^2(f)$	$S_{xx}(f)S_{yy}(f)$
Bartlett	$\pi_L(t)$	0	$S_{xy}(f) * \frac{\sin^2(\pi f L)}{L(\pi f)^2}$	$\frac{S_{xx}(f)S_{yy}(f)}{T/L}$
Welch	$\text{hann}(t)$	0.5	$S_{xy}(f) * W_{\text{hann}}^2 \frac{T}{L}(f)$	$\frac{S_{xx}(f)S_{yy}(f)}{\frac{18}{11}T/L}$

TABLE 2.1: Nom, moyenne et variance asymptotique de l'estimateur en fonction du taux de recouvrement et du type de fenêtre utilisés.

recouvrement), réduisant ainsi la variance de l'estimation. En particulier, les valeurs de K pour un taux de recouvrement nul et un taux de recouvrement de 50% avec une fenêtre de Hann valent respectivement [Welch, 1967]

$$K_1 = \frac{T}{L}, \quad K_2 = \frac{18 T}{11 L}. \quad (2.1.51)$$

La variance de l'estimateur est donc quasiment divisée par deux dans le deuxième cas. La table 2.1 synthétise les moyenne et variance de l'estimateur en fonction des paramètres de réglage évoqués.

B-5 Statistiques de l'estimateur en terme d'amplitude et de phase On définit l'amplitude et la phase de $S_{xy}(f)$ et $\bar{S}_{xy}(f)$ par

$$A_{xy}(f) = |S_{xy}(f)|, \quad \varphi_{xy}(f) = \arg\{S_{xy}(f)\}, \quad (2.1.52)$$

et

$$\bar{A}_{xy}(f) = |\bar{S}_{xy}(f)|, \quad \bar{\varphi}_{xy}(f) = \arg\{\bar{S}_{xy}(f)\}, \quad (2.1.53)$$

respectivement. Il peut être intéressant d'étudier les statistiques de $\bar{S}_{xy}(f)$ en terme d'amplitude et de phase, *i.e.* de calculer la moyenne et variance de $\bar{r}(f) \triangleq [\bar{A}_{xy}(f), \bar{\varphi}_{xy}(f)]'$. On définit d'abord une variable appropriée pour caractériser le degré de stabilité d'une variable aléatoire (en l'occurrence $\bar{S}_{xy}(f)$)

$$\text{NDE}(f) = 2 \frac{\mathbb{E}\{\bar{S}_{xy}(f)\}\mathbb{E}\{\bar{S}_{xy}^*(f)\}}{\text{var}\{\bar{S}_{xy}(f)\}}. \quad (2.1.54)$$

Lorsque \bar{S}_{xy} est réel (*i.e.* lorsque $\mathbf{x} = \mathbf{y}$), cette variable représente le Nombre de Degrés de liberté Équivalent (NDE) de la loi de χ^2 approximant la loi de \bar{S}_{xy} . D'après les théorèmes 2.1.7—2.1.8, si $B_{xy}T_w \gg 1$ et $f \gg B_w/2$, alors

$$\text{NDE}(f) = K|\gamma_{xy}(f)|^2, \quad (2.1.55)$$

où

$$|\gamma_{xy}(f)|^2 \triangleq \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_{xx}(f)S_{yy}(f)} \quad (2.1.56)$$

est le module au carré de la cohérence⁷ des signaux \mathbf{x}, \mathbf{y} . Le Nombre de Degrés de liberté Équivalent apparaît donc comme le produit de deux quantités : le facteur K dépendant uniquement de

7. *Magnitude Squared Coherence-MS*

la procédure d'estimation de la DSP croisée (nombre de segments sur lesquels on moyenne les périodogrammes, type de fenêtre utilisée, pourcentage de recouvrement) et sur lequel on peut agir, et le facteur $|\gamma_{xy}(f)|^2$ dépendant uniquement des signaux et sur lequel on n'a pas d'emprise⁸.

THÉORÈME 2.1.9 Statistiques de l'estimateur par moyenne empirique de périodogrammes en terme d'amplitude et de phase.

Si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. \mathbf{x} et \mathbf{y} sont centrés gaussiens dans leur ensemble,
2. $B_{xy}T_w \gg 1, B_{xx}T_w \gg 1, B_{yy}T_w \gg 1,$
3. $NDE(f) \gg 1,$

alors pour $f \gg B_w/2$ on a $\mathbb{E}\{\bar{r}(f)\} = [A_{xy}(f), \varphi_{xy}(f)]'$ et

$$\text{cov}\{\bar{r}(f)\} = \begin{bmatrix} \frac{1 + |\gamma_{xy}(f)|^2}{K|\gamma_{xy}(f)|^2} |S_{xy}(f)|^2 & 0 \\ 0 & \frac{1 - |\gamma_{xy}(f)|^2}{K|\gamma_{xy}(f)|^2} \end{bmatrix}.$$

PREUVE On omet la dépendance en f pour plus de lisibilité. D'après le théorème 2.1.8, l'erreur d'estimation

$$\bar{e} = \bar{S}_{xy} - S_{xy} \quad (2.1.57)$$

est centrée et a pour moments d'ordre 2

$$\mathbb{E}\{|\bar{e}|^2\} = \frac{S_{xx}S_{yy}}{K/2}, \quad \mathbb{E}\{\bar{e}^2\} = \frac{S_{xy}^2}{K/2}. \quad (2.1.58)$$

On construit un repère orthonormé dans le plan complexe dont l'origine est en $(\text{Re}\{S_{xy}\}, \text{Im}\{S_{xy}\})$ et dont le premier vecteur de la base associée est aligné avec la direction donnée par φ_{xy} . Soient \bar{a}, \bar{b} les projections de \bar{e} dans ce repère, de sorte que l'erreur s'exprime par

$$\bar{e}.e^{-i\varphi_{xy}} = \bar{a} + i\bar{b}. \quad (2.1.59)$$

Posons $\bar{u} = [\bar{a}, \bar{b}]'$. De (2.1.59) on déduit que $\mathbb{E}\{\bar{u}\} = 0$, et en utilisant (2.1.59)–(2.1.58) il vient

$$\begin{cases} \frac{S_{xx}S_{yy}}{K/2} &= \mathbb{E}\{\bar{a}^2\} + \mathbb{E}\{\bar{b}^2\} \\ \frac{|S_{xy}|^2}{K/2} &= \mathbb{E}\{\bar{a}^2\} - \mathbb{E}\{\bar{b}^2\} + 2i\mathbb{E}\{\bar{a}\bar{b}\}. \end{cases} \quad (2.1.60)$$

Dans la seconde équation du système (2.1.60), le terme de gauche est réel. Il en découle que \bar{a} et \bar{b} ne sont pas corrélés. Du système d'équations on déduit ensuite les expressions de $\mathbb{E}\{\bar{a}^2\}$ et $\mathbb{E}\{\bar{b}^2\}$, ce qui nous donne l'expression suivante de la matrice de covariance de $\bar{u} = [\bar{a}, \bar{b}]'$

$$\mathbb{E}\{\bar{u}\bar{u}'\} = \frac{1}{K|\gamma_{xy}|^2} \begin{bmatrix} 1 + |\gamma_{xy}|^2 & 0 \\ 0 & 1 - |\gamma_{xy}|^2 \end{bmatrix} |S_{xy}|^2. \quad (2.1.61)$$

8. Un filtrage linéaire de \mathbf{x} et/ou \mathbf{y} tel qu'un pré-blanchiment ne modifie pas le module au carré de la cohérence [Nuttall et Chief Of Naval Development Washington DC., 1975]

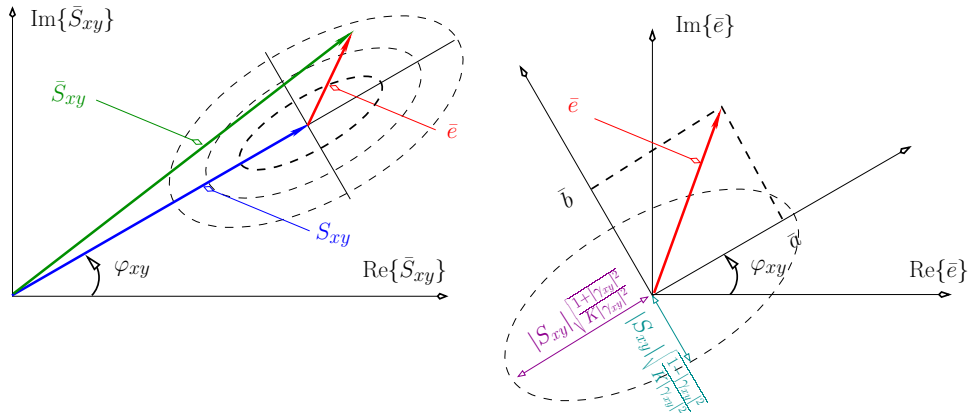


FIGURE 2.2: Distribution de l'erreur d'estimation de la DSP croisée $S_{xy}(f)$ dans le plan complexe sous les conditions du théorème 2.1.9. (Gauche) Représentation de la DSP croisée, de son estimée et de l'erreur d'estimation dans le plan complexe. Les ellipses en pointillé représentent les isolignes de la densité de probabilité de l'erreur. (Droite) Définition des variables \bar{a} et \bar{b} définies à l'équation (2.1.59) et interprétation géométrique de l'équation (2.1.61). Les deux demi-axes de l'ellipse en pointillé correspondent aux racines carrées des termes diagonaux de $\mathbb{E}\{(\bar{u} - \mathbb{E}\{\bar{u}\})(\bar{u} - \mathbb{E}\{\bar{u}\})'\}$.

Une interprétation géométrique de (2.1.61) se trouve en figure 2.2. Si NDE est suffisamment grand (condition du théorème), l'amplitude et la phase de l'estimateur de DSP croisée s'expriment, en fonction de $|S_{xy}|, \bar{a}, \bar{b}$, par [Nuttall et Chief Of Naval Development Washington DC., 1975]

$$\begin{cases} \bar{A}_{xy} &= | |S_{xy}| + \bar{a} + i\bar{b} | \approx |S_{xy}| + \bar{a} \\ \bar{\varphi}_{xy} &= \varphi_{xy} + \arg\{|S_{xy}| + \bar{a} + i\bar{b}\} \approx \varphi_{xy} + \frac{\bar{b}}{|S_{xy}|}. \end{cases} \quad (2.1.62)$$

Les statistiques de $\bar{A}_{xy}, \bar{\varphi}_{xy}$ peuvent donc être déduites directement des statistiques de \bar{a}, \bar{b} calculées précédemment. $\bar{A}_{xy}, \bar{\varphi}_{xy}$ sont non-biaisés, du fait que \bar{a}, \bar{b} sont centrés, et

$$\mathbb{E}\{(\bar{r} - \mathbb{E}\{\bar{r}\})(\bar{r} - \mathbb{E}\{\bar{r}\})'\} = \begin{bmatrix} \frac{1 + |\gamma_{xy}|^2}{K|\gamma_{xy}|^2} |S_{xy}|^2 & 0 \\ 0 & \frac{1 - |\gamma_{xy}|^2}{K|\gamma_{xy}|^2} \end{bmatrix}. \quad (2.1.63) \quad \blacksquare$$

Le théorème 2.1.9 trouvera son utilité dans la méthode d'estimation de temps de retard proposée au §2.2.4, où un modèle statistique de l'erreur d'estimation du déphasage des signaux est exploité.

C Lissage par modulation de l'autocorrélation

C-1 Définition de l'estimateur Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux aléatoires SSL réels et $w(t)$ une fenêtre telle que définie au §2.1.2B. On définit également une fenêtre $\ell(t)$ symétrique de support $I_{2T} = [-T, T]$. On note $L(f) \triangleq \mathcal{F}\{\ell(t)\}$ et

$$R_{\ell\ell}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} L^2(\nu) e^{2i\pi\nu\tau} d\nu = \int_{-T}^{+T} \ell(t)\ell(t - \tau) dt \quad (2.1.64)$$

désigne la fonction d'autocorrélation de la fenêtre ℓ . On note également $R_L(\nu)$ et $R_W(\nu)$ les fonctions d'autocorrélation de $L(f)$ et $W(f)$ respectivement. On construit l'estimateur de la corrélation croisée de \mathbf{x}, \mathbf{y} à partir des signaux observés sur $I_T = [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$

$$\hat{R}_{\mathbf{xy}}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}_w(t) \mathbf{y}_w(t - \tau) dt, \quad (2.1.65)$$

avec, pour $\mathbf{z} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, $\mathbf{z}_w(t) \triangleq \mathbf{z}(t)w(t)$. Le périodogramme lissé [Blackman et Tukey, 1958], aussi appelé «méthode de Blackman-Tukey» est défini par⁹

$$\tilde{S}_{\mathbf{xy}}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}_{\mathbf{xy}}(\tau) \ell(\tau) e^{-2i\pi f\tau} d\tau. \quad (2.1.66)$$

La logique de l'estimateur se comprend aisément au vu des considérations du début du §2.1.2A. Du fait que les instants τ proches de $\pm T$, pour lesquels la variance de $\hat{R}_{\mathbf{xy}}(\tau)$ est grande, participent à rendre l'estimateur de DSP croisée non consistant, on cherche à en réduire la contribution dans l'intégrale de $\hat{R}_{\mathbf{xy}}(\tau) \exp(-2i\pi f\tau)$ en modulant $\hat{R}_{\mathbf{xy}}(\tau)$ par une fenêtre $\ell(\tau)$ dont l'énergie est concentrée autour de zéro.

Pour $\mathbf{z} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, on note

$$\mathbf{z}_w(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{z}_w(t) e^{-2i\pi ft} dt \quad (2.1.67)$$

la transformée de Fourier de \mathbf{z} fenêtré par w . Comme on va le voir, les moments du périodogramme modifié de \mathbf{x}, \mathbf{y} (déjà calculés au §2.1.2B-3), défini par

$$\hat{S}_{\mathbf{xy}}(f) = \mathbf{X}_w(f) \mathbf{Y}_w^*(f), \quad (2.1.68)$$

vont servir à calculer les moments du périodogramme lissé.

C-2 Théorème préliminaire

THÉORÈME 2.1.10.

Si les propriétés suivantes sont vérifiées

1. x et y sont gaussiens dans leur ensemble et centrés,
2. $B_{\mathbf{xy}}T_w \gg 1, B_{\mathbf{xx}}T_w \gg 1, B_{\mathbf{yy}}T_w \gg 1,$

alors, en notant $R_W(\nu)$ la fonction d'autocorrélation de $W(f)$, on a

$$\begin{aligned} \text{cov}\{\hat{S}_{\mathbf{xy}}(f_1), \hat{S}_{\mathbf{xy}}(f_2)\} &= S_{\mathbf{xx}}(f_2) S_{\mathbf{yy}}(f_2) \left[R_W^2(f_1 - f_2) + R_W^2(f_1 + f_2) \right], \\ \text{rel}\{\hat{S}_{\mathbf{xy}}(f_1), \hat{S}_{\mathbf{xy}}(f_2)\} &= S_{\mathbf{xy}}^2(f_2) \left[R_W^2(f_1 - f_2) + R_W^2(f_1 + f_2) \right]. \end{aligned}$$

PREUVE On a

$$\begin{aligned} \text{cov}\{\hat{S}_{\mathbf{xy}}(f_1), \hat{S}_{\mathbf{xy}}(f_2)\} &= \mathbb{E}\{\mathbf{X}_w(f_1) \mathbf{X}_w^*(f_2)\} \mathbb{E}\{\mathbf{Y}_w^*(f_2) \mathbf{Y}_w(f_2)\} \\ &\quad + \mathbb{E}\{\mathbf{X}_w(f_1) \mathbf{Y}_w(f_2)\} \mathbb{E}\{\mathbf{Y}_w^*(f_1) \mathbf{X}_w^*(f_2)\}, \quad (2.1.69) \end{aligned}$$

9. Notons que la fenêtre w sert à moduler les signaux x et y directement, alors que la fenêtre ℓ sert à moduler leur fonction d'intercorrélacion empirique. Les dénominations anglo-saxonnes de ces deux types de fenêtre sont «data window» et «lag window» respectivement. Comme on va le voir, leurs effets sur les statistiques de l'estimateur de DSP croisée sont très différents.

avec, en appliquant le théorème 2.1.5,

$$\mathbb{E}\{\mathbf{X}_w(f_1)\mathbf{X}_w^*(f_2)\} = \int S_{\mathbf{xx}}(f_2 - \nu)W(f_1 - f_2 + \nu)W(\nu)d\nu, \quad (2.1.70)$$

$$\mathbb{E}\{\mathbf{Y}_w^*(f_1)\mathbf{Y}_w(f_2)\} = \int S_{\mathbf{yy}}(-f_2 - \nu)W(f_2 - f_1 + \nu)W(\nu)d\nu, \quad (2.1.71)$$

$$\mathbb{E}\{\mathbf{X}_w(f_1)\mathbf{Y}_w(f_2)\} = \int S_{\mathbf{xy}}(-f_2 - \nu)W(f_1 + f_2 + \nu)W(\nu)d\nu, \quad (2.1.72)$$

$$\mathbb{E}\{\mathbf{Y}_w^*(f_1)\mathbf{X}_w^*(f_2)\} = \int S_{\mathbf{yx}}(f_2 - \nu)W(-f_1 - f_2 + \nu)W(\nu)d\nu. \quad (2.1.73)$$

Lorsque $B_{\mathbf{xy}}T_w \gg 1$, $B_{\mathbf{xx}}T_w \gg 1$, $B_{\mathbf{yy}}T_w \gg 1$, on obtient le résultat. Un raisonnement analogue permet de déduire $\text{rel}\{\hat{S}_{\mathbf{xy}}(f_1), \hat{S}_{\mathbf{xy}}(f_2)\}$. ■

C-3 Statistiques de l'estimateur

THÉORÈME 2.1.11.

L'espérance mathématique du périodogramme lissé vaut

$$\mathbb{E}\{\tilde{S}_{\mathbf{xy}}(f)\} = (S_{\mathbf{xy}} * W^2 * L)(f)$$

En particulier, si $w(t)$ et $\ell(t)$ sont normalisées de sorte que $R_{ww}(0) = 1$ et $\ell(0) = 1$, alors l'estimateur est asymptotiquement sans biais.

PREUVE L'application du théorème de convolution dans (2.1.66) permet d'exprimer l'espérance du périodogramme lissé en fonction de celle du périodogramme modifié

$$\mathbb{E}\{\tilde{S}_{\mathbf{xy}}(f)\} = \left(\mathbb{E}\{\hat{S}_{\mathbf{xy}}\} * L\right)(f), \quad (2.1.74)$$

avec

$$\mathbb{E}\{\hat{S}_{\mathbf{xy}}(f)\} = \text{cov}\{\mathbf{X}_w(f)\mathbf{Y}_w^*(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\mathbf{xy}}(f - \nu)W^2(\nu)d\nu, \quad (2.1.75)$$

ce qui donne le résultat. Si $S_{\mathbf{xy}}$ à peu près constant sur la largeur du lobe principal de W^2 , alors $\mathbb{E}\{\hat{S}_{\mathbf{xy}}(f)\} = S_{\mathbf{xy}}(f)R_{ww}(0)$, et

$$\mathbb{E}\{\tilde{S}_{\mathbf{xy}}(f)\} = (S_{\mathbf{xy}} * L)(f). \quad (2.1.76)$$

Pour que l'estimateur soit asymptotiquement non biaisé, il faut que $L(f)$ tende vers une distribution de Dirac de poids unitaire lorsque T tend vers l'infini. Ceci implique que quel que soit T ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} L(f)df = 1, \quad (2.1.77)$$

ou de manière équivalente que $\ell(0) = 1$. ■

THÉORÈME 2.1.12.

Si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. x et y sont gaussiens dans leur ensemble et centrés,
2. $B_{xy}T_\ell \gg 1, B_{xx}T_\ell \gg 1, B_{yy}T_\ell \gg 1,$
3. w est une fenêtre rectangulaire normalisée de sorte que $R_{ww}(0) = 1,$
4. L varie peu sur tout intervalle de longueur la largeur du lobe principal de $R_W,$

alors pour $f \gg B_w/2,$ on a

$$\begin{aligned} \text{var}\{\tilde{S}_{xy}(f)\} &= S_{xx}(f)S_{yy}(f)\frac{R_{\ell\ell}(0)}{T}, \\ \text{rel}\{\tilde{S}_{xy}(f), \tilde{S}_{xy}(f)\} &= S_{xy}^2(f)\frac{R_{\ell\ell}(0)}{T}. \end{aligned}$$

PREUVE L'application du théorème de convolution dans (2.1.66) donne

$$\tilde{S}_{xy}(f) = (\hat{S}_{xy} * L)(f), \quad (2.1.78)$$

i.e. $\tilde{S}_{xy}(f)$ est une version filtrée de $\hat{S}_{xy}(f)$, la réponse impulsionnelle du filtre étant $L(f)$. Or d'après [Papoulis, 1977] pp87, les autocovariances de la sortie du filtre et de son entrée sont unies par la relation

$$\text{cov}\{\tilde{S}_{xy}(f_1), \tilde{S}_{xy}(f_2)\} = \iint \text{cov}\{\hat{S}_{xy}(f_1 - \alpha), \hat{S}_{xy}(f_2 - \beta)\}L(\alpha)L(\beta)d\alpha d\beta, \quad (2.1.79)$$

avec, d'après le théorème 2.1.10,

$$\begin{aligned} \text{cov}\{\hat{S}_{xy}(f_1 - \alpha), \hat{S}_{xy}(f_2 - \beta)\} &= \\ S_{xx}(f_2 - \beta)S_{yy}(f_2 - \beta) &\left[R_W^2(f_1 - \alpha - f_2 + \beta) + R_W^2(f_1 - \alpha + f_2 - \beta) \right]. \end{aligned} \quad (2.1.80)$$

Si L varie peu sur tout intervalle de longueur la largeur du lobe principal de $R_W,$ alors

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} R_W^2(f_1 - \alpha \pm (f_2 - \beta))L(\alpha)d\alpha &= \int R_W^2(y)L(f_1 \pm (f_2 - \beta) - y)dy \\ &= AL(f_1 \pm (f_2 - \beta)). \end{aligned} \quad (2.1.81)$$

avec $A = \int R_W^2(f)df$. Il en découle que

$$\begin{aligned} \text{cov}\{\tilde{S}_{xy}(f_1), \tilde{S}_{xy}(f_2)\} &= \\ A \int S_{xx}(f_2 - \beta)S_{yy}(f_2 - \beta) &\left[L(f_1 - f_2 + \beta) + L(f_1 + f_2 - \beta) \right]L(\beta)d\beta, \end{aligned} \quad (2.1.82)$$

qui, si $B_{xx}T_\ell \gg 1, B_{yy}T_\ell \gg 1,$ et en posant $f_1 = -f_2 = f,$ se simplifie en

$$\text{var}\{\tilde{S}_{xy}(f)\} = AS_{xx}(f)S_{yy}(f)\left[R_L(0) + R_L(2f) \right]. \quad (2.1.83)$$

Lorsque, $f \gg B_l/2,$ on a en outre $R_L(2f) = 0.$ En particulier, lorsque $w(t) = T^{-1}\pi_T(t)$ est une fenêtre rectangulaire normalisée de sorte que $R_{ww}(0) = 1,$ il vient

$$A = \frac{1}{T^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi T y)}{(\pi y)^2} dy = \frac{1}{T}, \quad (2.1.84)$$

ce qui donne le résultat. $\text{rel}\{\hat{S}_{xy}(f), \hat{S}_{xy}(f)\}$ se déduit d'une manière analogue. ■

C-4 interprétation des résultats Le théorème 2.1.12 nous montre que pour obtenir une réduction maximale de la variance, l'énergie de la fenêtre ℓ ,

$$R_{\ell\ell}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} L^2(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} \ell^2(t)dt \quad (2.1.85)$$

doit être faible devant T , avec comme contrainte $\ell(0) = 1$ pour s'assurer que l'estimateur est asymptotiquement sans biais. En d'autres termes, l'énergie de la fenêtre $\ell(\tau)$ doit être concentrée autour $\tau = 0$ pour diminuer la variance de l'estimateur. Ceci est cohérent avec l'interprétation intuitive de l'estimateur donnée au §2.1.2C-1. Or d'après le principe d'incertitude, une fenêtre très localisée temporellement admet une Transformée de Fourier très étalée dans le domaine fréquentiel. Pour un temps d'observation fini, réduire la variance implique donc nécessairement une augmentation du biais, comme on peut le constater au vu des théorèmes 2.1.12–2.1.11.

D Discussions

Globalement, on peut conclure que pour garantir la consistance de l'estimateur, il est conseillé de préférer une méthode de lissage à un simple périodogramme. Du fait que l'estimation de temps de retard repose généralement sur une estimation préliminaire de spectres des signaux perçus en les récepteurs R_1, R_2 , la consistance de l'estimateur des spectres conditionne la consistance de l'estimateur de temps de retard [Knapp et Carter, 1976]. Assez curieusement, le périodogramme est néanmoins—de loin—la méthode d'estimation spectrale est la plus employée en robotique, probablement du fait de sa plus grande simplicité en terme d'implémentation. Concernant les méthodes de lissage, la méthode de Blackman-Tuckey et les méthodes de périodogramme moyenné sont relativement similaires en terme de biais et variance.

En robotique, les signaux sont observés sur des fenêtres temporelles de courte durée (typiquement quelques dizaines de millisecondes) pour les raisons suivantes : le signal émis par la source est généralement non stationnaire, et du fait de la mobilité du capteur et/ou de l'émetteur, les «paramètres spatiaux» à estimer peuvent varier significativement avec le temps. En se restreignant à une analyse des flux audio sur des courtes durées, on peut faire l'hypothèse que les signaux perçus sont des versions tronquées de signaux individuellement et conjointement stationnaires, et que les paramètres spatiaux ne varient pas au cours des durées d'observation, ce qui simplifie grandement le problème d'estimation. Du fait que les durées d'observation sont courtes, on peut se questionner sur l'utilité pratique des propriétés asymptotiques des estimateurs : les statistiques asymptotiques sont rarement atteignables en réalité. Cependant, nous pensons que même pour des fenêtres court terme, il est préférable d'utiliser un estimateur légèrement biaisé mais stable (spectre estimé suffisamment «lisse»), plutôt qu'un estimateur de faible biais mais forte variance (spectre estimé très «bruité»).

2.1.3 Estimation paramétrique

Bien que les méthodes d'estimation paramétrique de DSP semblent ne pas être exploitées pour la localisation de source en robotique, il nous semble intéressant d'en donner une brève synthèse en raison des perspectives qu'elles peuvent ouvrir. On considère dans cette partie un signal \mathbf{x} à temps discret, et on suppose que la DSP $S_{\mathbf{xx}}$ de \mathbf{x} est rationnelle, *i.e.* qu'elle peut s'écrire

$$S_{\mathbf{xx}}(f) = \frac{\sum_{k=-N}^N \gamma_k e^{-2i\pi f k}}{\sum_{k=-Q}^Q \rho_k e^{-2i\pi f k}}. \quad (2.1.86)$$

Cette hypothèse n'est pas excessivement contraignante dans la mesure où, d'après le théorème de Weierstrass, toute DSP continue peut être approchée avec une erreur arbitrairement faible par

une DSP rationnelle de la forme (2.1.86), à condition que N et Q soient choisis suffisamment grands. On note, par abus de langage, $S_{xx}(z)$ la transformée en z de R_{xx} :

$$S_{xx}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xx}[m]z^{-m}. \quad (2.1.87)$$

Bien qu'étant deux quantités différentes, $S_{xx}(f)$ et $S_{xx}(z)$ seront souvent confondues et le terme **DSP** fera référence à l'une ou l'autre de ces quantités selon le contexte. L'équation (2.1.86) est équivalente à

$$S_{xx}(z) = \frac{\sum_{k=-N}^N \gamma_k z^{-k}}{\sum_{k=-Q}^Q \rho_k z^{-k}}. \quad (2.1.88)$$

Les méthodes paramétriques d'estimation de spectre reposent sur le théorème de factorisation spectrale, qu'on énonce juste après la définition d'un système à minimum de phase.

Définition 2.1.1 (système à minimum de phase) *une fonction rationnelle $H(z)$ est dite à minimum de phase si tous ses pôles et ses zéros se trouvent à l'intérieur du cercle unité. Il en découle que $H(z)$ et son inverse $1/H(z)$ sont tous deux causaux et stables.*

THÉORÈME 2.1.13 Factorisation spectrale.

Toute **DSP** rationnelle $S_{xx}(z)$ d'un signal aléatoire discret **x SSL** peut être factorisée en

$$S_{xx}(z) = H(z)H(z^{-1}),$$

où $H(z)$ est une fonction rationnelle à minimum de phase. On a aussi

$$S_{xx}(f) = \left| H\left(e^{2i\pi f}\right) \right|^2.$$

Il en découle que tout signal aléatoire **SSL** de **DSP** rationnelle peut être vu comme la réponse à un bruit blanc centré **SSL** d'un filtre à minimum de phase. Estimer la DSP de tels signaux revient donc à estimer les coefficients du filtre. Pour la suite, on note $u[n]$ un bruit blanc discret qu'on suppose, sans perte de généralité, de puissance moyenne unitaire : $\mathbb{E}\{u^2[n]\} = 1$ (dans le cas contraire, l'écart type du bruit peut être intégré au gain du filtre pour se ramener à une variance unitaire).

A Modèle Auto Régressif

Le filtre $H(z)$ correspondant à un modèle Auto Régressif (**AR**) s'écrit

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^P a_k z^{-k}}, \quad (2.1.89)$$

de sorte que la **DSP** de **x** s'exprime comme suit (*cf* théorème 2.1.13)

$$S_{xx}(f) = \left| \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^P a_k e^{-2i\pi k f}} \right|^2. \quad (2.1.90)$$

Les modèles **AR** et les méthodes d'estimation associées sont particulièrement adaptés pour les signaux aléatoires faible-bande et les spectres admettant des pics étroits. L'estimation par modélisation **AR** présente en outre de bons résultats pour des durées d'observation relativement

courtes [Djuric et Kay, 1998]. Estimer la DSP associée à un modèle AR revient donc à estimer le vecteur de $P + 1$ paramètres $[b_0, a_1, \dots, a_P]^T$. La relation de récurrence du filtre s'obtient en prenant la transformée inverse de $\mathbf{X}(z) = H(z)\mathbf{U}(z)$:

$$\mathbf{x}[n] + \sum_{k=1}^P a_k \mathbf{x}[n-k] = b_0 \mathbf{u}[n]. \quad (2.1.91)$$

En multipliant (2.1.91) par $\mathbf{x}[n-m]$, puis en prenant l'espérance mathématique on obtient

$$R_{\mathbf{xx}}[m] + \sum_{k=1}^P a_k R_{\mathbf{xx}}[m-k] = b_0 R_{\mathbf{ux}}[m], \quad (2.1.92)$$

avec $R_{\mathbf{ux}}[m] = \mathbb{E}\{\mathbf{u}[n]\mathbf{x}[n-m]\}$ la corrélation croisée de \mathbf{u}, \mathbf{x} . Remarquons que, du fait de la causalité du filtre $H(z)$, $\forall m \geq 0$, $R_{\mathbf{ux}}[m] = b_0 \delta_{m,0}$, avec δ_{ij} le symbole de Kronecker. Puisque l'on a $P + 1$ inconnues, il faut au minimum $P + 1$ équations pour pouvoir identifier le système. En évaluant (2.1.92) aux instants $m = 1, \dots, P$, on obtient les équations de Yule-Walker, que l'on peut écrire sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} R_{\mathbf{xx}}[0] & R_{\mathbf{xx}}[-1] & \dots & R_{\mathbf{xx}}[-P+1] \\ R_{\mathbf{xx}}[1] & R_{\mathbf{xx}}[0] & \dots & R_{\mathbf{xx}}[-P+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{\mathbf{xx}}[P-1] & R_{\mathbf{xx}}[P-2] & \dots & R_{\mathbf{xx}}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_P \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_{\mathbf{xx}}[1] \\ R_{\mathbf{xx}}[2] \\ \vdots \\ R_{\mathbf{xx}}[P] \end{bmatrix}. \quad (2.1.93)$$

Les coefficients $\{a_k\}_{k=1, \dots, P}$ sont estimés en inversant cette équation matricielle. Des algorithmes exploitant la structure de Toeplitz de la matrice d'autocorrélation $\mathcal{R}_{\mathbf{xx}}$ impliquée dans (2.1.93), comme par exemple l'algorithme de Levinson-Durbin [Ljung, 1987], peuvent être utilisés pour résoudre (2.1.93) avec un faible coût algorithmique. Le coefficient b_0 est ensuite déterminé par l'équation

$$b_0^2 = R_{\mathbf{xx}}[0] + \sum_{k=1}^P a_k R_{\mathbf{xx}}[k]. \quad (2.1.94)$$

Dans la pratique, $R_{\mathbf{xx}}$ n'est pas connu et doit être estimé à partir d'une séquence finie de \mathbf{x} , par les méthodes données au §2.1.1. Notons que pour que les valeurs $R_{\mathbf{xx}}[-P], \dots, R_{\mathbf{xx}}[P]$ soient fiables, *i.e.* présentent une faible variance, il faut que la longueur de cette séquence soit grande devant l'ordre du filtre, pour les raisons évoquées au §2.1.1. La procédure décrite ici porte le nom de méthode de l'autocorrélation. D'autres méthodes sont proposées dans la littérature, parmi lesquelles on peut citer la méthode du Maximum de Vraisemblance (MV), la méthode de la covariance, et la méthode de Burg [Marple, 1986]–[Kay, 1988]. Une des difficultés de la méthode repose sur le choix de P , qui n'est en général pas connu *a priori*. Dans la littérature [Djuric et Kay, 1998], les critères les plus utilisés pour déterminer l'ordre du modèle sont le critère *Akaike Information Criterion* (AIC) [Akaike, 1974], défini par

$$\text{AIC}[P] = 2N \ln \hat{b}_0[P] + 2P, \quad (2.1.95)$$

et le critère MDL [Rissanen, 1978], défini par

$$\text{MDL}[P] = 2N \ln \hat{b}_0[P] + P \ln N, \quad (2.1.96)$$

où N représente le nombre d'échantillons observés de \mathbf{x} et $\hat{b}_0[P]$ est l'estimée de b_0 associée au modèle d'ordre P . La détermination du meilleur modèle au sens des critères AIC et MDL nécessite donc une procédure d'estimation de paramètres pour chaque ordre envisagé.

B Modèle à Moyenne Ajustée

Pour un modèle Moyenne Ajustée (MA), le filtre $H(z)$ s'écrit

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}. \quad (2.1.97)$$

On note que $H(z)$ est dans ce cas un filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF), et la DSP de \mathbf{x} s'exprime comme

$$S_{\mathbf{xx}}(f) = \left| \sum_{k=0}^M b_k e^{-2i\pi k f} \right|^2. \quad (2.1.98)$$

Les modèles MA et les méthodes d'estimation associées sont particulièrement adaptés pour les spectres admettant des pics étalés et des creux (passages par zéro) étroits. Les modèles MA ne sont pas préconisées pour des signaux faible bande [Djuric et Kay, 1998]. Estimer la DSP revient donc à estimer le vecteur de $M + 1$ paramètres $[b_0, \dots, b_M]'$. La relation de récurrence du filtre s'écrit

$$\mathbf{x}[n] = \sum_{k=0}^M b_k \mathbf{u}[n - k], \quad (2.1.99)$$

qui, en multipliant à gauche et à droite par $\mathbf{u}[n - m]$ puis en prenant l'espérance mathématique, devient

$$R_{\mathbf{xu}}[m] = \sum_{k=0}^M b_k R_{\mathbf{uu}}[m - k]. \quad (2.1.100)$$

u étant blanc de variance unitaire, $R_{\mathbf{uu}}[m - k] = \delta_{m,k}$, avec $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker. L'équation (2.1.99) devient donc

$$R_{\mathbf{xu}}[m] = \begin{cases} b_m & \text{si } 0 \leq m \leq M \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.1.101)$$

En multipliant (2.1.99) cette fois-ci par $\mathbf{x}[n - m]$ puis en prenant l'espérance mathématique il vient

$$R_{\mathbf{xx}}[m] = \sum_{k=0}^M b_k R_{\mathbf{ux}}[m - k] = \sum_{k=0}^M b_k R_{\mathbf{xu}}[k - m]. \quad (2.1.102)$$

De (2.1.101)–(2.1.102), on déduit

$$R_{\mathbf{xx}}[m] = \begin{cases} \sum_{k=|m|}^M b_k b_{k-|m|} & \text{si } |m| \leq M \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.1.103)$$

Estimer les $\{b_k\}_{k=0,\dots,M}$ à partir de l'évaluation de (2.1.103) en $m = 0, \dots, M$ n'est pas trivial dans la mesure où les équations ne sont pas linéaires en les coefficients et peuvent admettre plus d'une solution. Durbin a proposé une solution approchée en approximant le modèle MA par un modèle AR d'ordre plus élevé. Ceci dit, estimer les $\{b_k\}_{k=0,\dots,M}$ n'est pas nécessaire pour estimer la DSP de x , puisque

$$S_{\mathbf{xx}}(f) = \sum_{m=-M}^M R_{\mathbf{xx}}[m] e^{-2i\pi m f} \quad (2.1.104)$$

est entièrement déterminé par les $2M + 1$ valeurs $R_{xx}[-M], \dots, R_{xx}[M]$ de l'autocorrélation de x . Une méthode alternative pour estimer les $\{b_k\}_{k=0, \dots, M}$, consiste à se servir du fait que $H(z)$ est à minimum de phase (cf définition 2.1.1). On a

$$S_{xx}(z) = \sum_{m=-M}^M R_{xx}[m]z^{-m} = H(z)H(z^{-1}). \quad (2.1.105)$$

Les zéros de $H(z)$ étant dans le cercle unité, les zéros de $H(z^{-1})$, qui sont leur image par l'application $x \mapsto 1/x$, sont nécessairement à l'extérieur du cercle. En calculant les zéros de $S_{xx}(z)$, *i.e.* les solutions de

$$\sum_{m=-M}^M R_{xx}[m]z^{-m} = 0 \quad (2.1.106)$$

et en déterminant ceux à l'intérieur du cercle unité, on détermine les coefficients de $H(z)$. Tout comme pour le modèle AR, R_{xx} est remplacé par une estimée à partir d'une séquence finie de x , par les méthodes données au §2.1.1.

C Modèle Auto Régressif à Moyenne Ajustée

Pour un modèle AutoRégressif à Moyenne Ajustée (ARMA), la fonction de transfert $H(z)$ s'écrit

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^P a_k z^{-k}}. \quad (2.1.107)$$

La densité spectrale de puissance de x s'exprime donc comme

$$S_{xx}(f) = \left| \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-2i\pi k f}}{1 + \sum_{k=1}^P a_k e^{-2i\pi k f}} \right|^2. \quad (2.1.108)$$

Les modèles ARMA présentent, par rapport aux modèles AR et MA, l'avantage de mieux approximer des DSP admettant à la fois des creux et des pics étroits. Cependant, les méthodes d'estimation associées sont plus difficiles à mettre en œuvre en raison de la plus grande complexité du modèle. Estimer la DSP revient donc à estimer le vecteur de $P + M + 1$ paramètres $[b_0, \dots, b_M, a_1, \dots, a_P]'$. L'estimation jointe de tous ces paramètres est en général difficile et la méthode proposée ici est sous-optimale dans le sens où les $\{b_m\}_{m=0, \dots, M}$ sont estimés sur la base d'une estimation préliminaire des $\{a_k\}_{k=1, \dots, P}$. La relation de récurrence du filtre s'écrit

$$\mathbf{x}[n] + \sum_{k=1}^P a_k \mathbf{x}[n - k] = \sum_{k=0}^M b_k \mathbf{u}[n - k]. \quad (2.1.109)$$

En multipliant (2.1.109) par $\mathbf{x}[n - m]$ puis en prenant l'espérance mathématique il vient

$$R_{xx}[m] + \sum_{k=1}^P a_k R_{xx}[m - k] = \sum_{k=0}^M b_k R_{ux}[m - k]. \quad (2.1.110)$$

En se souvenant que

$$R_{ux}[m - k] = 0 \text{ si } m > k, \quad (2.1.111)$$

il découle de (2.1.110) que

$$\forall m > M, R_{xx}[m] + \sum_{k=1}^P a_k R_{xx}[m - k] = 0. \quad (2.1.112)$$

En supposant que $P > M$, et en évaluant (2.1.112) aux instants $m = P, \dots, N$, on obtient un jeu de $N - P + 1$ équations indépendantes des $\{b_m\}_{m=0, \dots, M}$, appelées équation de Yule-Walker modifiées, qu'on peut écrire sous forme matricielle comme suit

$$\begin{bmatrix} R_{xx}[P] & R_{xx}[P-1] & \dots & R_{xx}[-2P+1] \\ R_{xx}[P+1] & R_{xx}[P] & \dots & R_{xx}[-2P+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{xx}[N] & R_{xx}[N-1] & \dots & R_{xx}[-2P+N] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_P \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_{xx}[P+1] \\ R_{xx}[P+2] \\ \vdots \\ R_{xx}[N+1] \end{bmatrix}. \quad (2.1.113)$$

Si $N = 2P - 1$, le système est déterminé et on peut le résoudre par inversion de (2.1.113). Si on prend $N > 2P - 1$, le système est surdéterminé, et on peut se servir de l'algorithme des moindres carrés pour le résoudre. En notant \mathcal{R}_{xx} la matrice de gauche dans l'équation (2.1.113) et r le vecteur de droite, la solution \hat{a} par les moindres carrés s'écrit

$$\hat{a} = (\mathcal{R}'_{xx} \mathcal{R}_{xx})^{-1} \mathcal{R}'_{xx} r \quad (2.1.114)$$

Lorsque les $\{a_k\}_{k=1, \dots, P}$ ont été évalués, il reste à estimer les $\{b_k\}_{k=0, \dots, M}$. Posons d'abord $a_0 = 1$ et appelons respectivement $N(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$ et $D(z) = \sum_{k=0}^P a_k z^{-k}$ le numérateur et le dénominateur de $H(z)$. Définissons le SA $y[n]$, réponse du filtre RIF $D(z)$ à l'entrée $x[n]$:

$$y[n] = \sum_{k=0}^P a_k x[n-k]. \quad (2.1.115)$$

De la même manière que pour les modèles AR et MA, on montre que

$$\begin{cases} R_{yy}[m] = \sum_{k=0}^P a_k R_{xy}[m-k], \\ R_{xy}[m] = \sum_{k=0}^P a_k R_{xx}[-m-k]. \end{cases} \quad (2.1.116)$$

L'autocorrélation de y s'exprime donc en fonction de l'autocorrélation de x et des coefficients $\{a_k\}_{k=1, \dots, P}$ de la manière suivante

$$R_{yy}[m] = \sum_{k=0}^P \sum_{k'=0}^P a_k a_{k'} R_{xx}[m - (k' - k)]. \quad (2.1.117)$$

Mais y est aussi la réponse du filtre RIF $N(z)$ à l'entrée $u[n]$. On a donc (cf Eq. (2.1.103))

$$R_{yy}[m] = \begin{cases} \sum_{k=|m|}^M b_k b_{k-|m|} & \text{si } |m| \leq M \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.1.118)$$

et (cf Eq. (2.1.105))

$$S_{yy}(z) = \sum_{m=-M}^M R_{yy}[m] z^{-m} = N(z)N(z^{-1}). \quad (2.1.119)$$

En ayant préalablement estimé $\{a_k\}_{k=1, \dots, P}$ en inversant (2.1.113) et $R_{yy}[-M], \dots, R_{yy}[M]$ à partir de (2.1.117), on cherche alors les racines de $S_{yy}(z)$ pour estimer les $\{b_m\}_{m=0, \dots, M}$. La procédure complète pour déterminer tous les coefficients de la DSP pour un modèle ARMA est résumée ci-après

1. Estimer $R_{xx}[-2P+1], \dots, R_{xx}[N]$ à partir d'une réalisation de x de durée finie, puis résoudre (2.1.113) pour obtenir les coefficients $\{\hat{a}_k\}_{k=1, \dots, P}$.
2. Estimer $R_{yy}[-M], \dots, R_{yy}[M]$ à partir de (2.1.117) et des coefficients $\{\hat{a}_k\}_{k=1, \dots, P}$.
3. Trouver les racines du polynôme en z dans (2.1.119) et identifier celles dont le module est inférieur à l'unité pour en déduire les coefficients $\{\hat{b}_k\}_{k=0, \dots, M}$.

2.2 ESTIMATION DE TEMPS DE RETARD

Nous venons de parcourir un certain nombre d'approches permettant l'estimation des DSP et DSP croisées de 2 signaux \mathbf{x} et \mathbf{y} . Nous utilisons maintenant ces résultats afin de procéder à l'estimation du temps de retard, *i.e.* l'ITD, entre ces deux mêmes signaux.

2.2.1 Modélisation «instantanée» des signaux perçus

On cherche maintenant à extraire une information spatiale «instantanée» sur la base des flux audio perçus en R_1, R_2 sur des courtes durées. On considère qu'au cours de la durée d'observation des signaux, les variations de la position relative de l'émetteur par rapport au capteur sont négligeables. On note $h_{r, \vartheta, \varphi}$ la réponse impulsionnelle—déterministe—entre R_1 et R_2 , paramétrée dans le cas général par le triplet (r, ϑ, φ) —les coordonnées sphériques de la source dans le repère du capteur, cf §1.2—caractérisant le milieu acoustique (célérité du son, etc.), et éventuellement la diffusion du support des microphones (*e.g.* lorsqu'ils sont montés sur une tête). Dans le cas du problème plan évoqué au §1.2, et en considérant que l'émetteur se trouve en champ lointain, (*i.e.* la distance de la source par rapport au point milieu du capteur est grande, de sorte que les fronts d'onde émis peuvent être considérés comme plans au voisinage du capteur), les paramètres de cette réponse impulsionnelle se réduisent à ϑ , et on la note simplement h_ϑ . Les signaux \mathbf{z}_1 et \mathbf{z}_2 perçus en R_1, R_2 en présence de bruits de mesure additifs peuvent être modélisés par

$$\begin{cases} \mathbf{z}_1(t) &= \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_1(t) \\ \mathbf{z}_2(t) &= (\mathbf{s} * h_\vartheta)(t) + \mathbf{n}_2(t), \end{cases} \quad (2.2.1)$$

où le signal \mathbf{s} et les bruits $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ sont réels, de moyenne nulle (sans perte de généralité), à bande limitée, individuellement et conjointement SSL, et où $*$ désigne le produit de convolution. L'hypothèse de stationnarité—posée ici pour pouvoir utiliser les outils présentés au §2.1—n'est généralement pas vérifiée en pratique (*e.g.* pour un signal de voix), mais on suppose que les signaux considérés, définis en réalité seulement sur le support de la fenêtre d'observation, sont prolongeables en des signaux SSL. Cette hypothèse a d'autant plus de chances d'être vraie que la durée d'observation est courte. Noter par ailleurs qu'on modélise ici le «lien» entre les signaux perçus en R_1 et R_2 , et non pas la propagation de l'émetteur vers les deux récepteurs. \mathbf{s} représente donc la contribution de l'émetteur en R_1 en l'absence de bruit, et non pas une quantité acoustique qui serait mesurée «en l'émetteur». On suppose de plus que $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ ne sont pas corrélés avec \mathbf{s} . Sous ces hypothèses, les fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélation de $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ s'expriment ainsi :

$$\begin{cases} R_{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_1}(\tau) &= R_{\mathbf{s} \mathbf{s}}(\tau) + R_{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_1}(\tau), \\ R_{\mathbf{z}_2 \mathbf{z}_2}(\tau) &= (R_{\mathbf{s} \mathbf{s}} * R_{h_\vartheta h_\vartheta})(\tau) + R_{\mathbf{n}_2 \mathbf{n}_2}(\tau), \\ R_{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2}(\tau) &= (R_{\mathbf{s} \mathbf{s}} * h_\vartheta)(-\tau) + R_{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2}(\tau), \\ R_{\mathbf{z}_2 \mathbf{z}_1}(\tau) &= R_{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2}(-\tau), \end{cases} \quad (2.2.2)$$

où

$$R_{h_\vartheta h_\vartheta}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_\vartheta(t) h_\vartheta(t - \tau) dt \quad (2.2.3)$$

désigne la fonction d'autocorrélation de h_ϑ . En appliquant la transformée de Fourier à (2.2.2), les DSP et DSP croisées des signaux peuvent s'écrire

$$\begin{cases} S_{z_1 z_1}(f) &= S_{ss}(f) + S_{n_1 n_1}(f), \\ S_{z_2 z_2}(f) &= |H_\vartheta(f)|^2 S_{ss}(f) + S_{n_2 n_2}(f), \\ S_{z_1 z_2}(f) &= H_\vartheta^*(f) S_{ss}(f) + S_{n_1 n_2}(f), \\ S_{z_2 z_1}(f) &= S_{z_1 z_2}^*(f), \end{cases} \quad (2.2.4)$$

avec $H_\vartheta(f) = \mathcal{F}\{h_\vartheta(t)\}$ la transformée de Fourier de $h_\vartheta(t)$. Ainsi, la matrice de DSP du couple $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, définie par

$$C_z(f) = \begin{bmatrix} S_{z_1 z_1}(f) & S_{z_1 z_2}(f) \\ S_{z_2 z_1}(f) & S_{z_2 z_2}(f) \end{bmatrix}, \quad (2.2.5)$$

s'écrit-elle sous forme matricielle

$$C_z(f) = V_\vartheta(f) S_{ss}(f) V_\vartheta(f)^\dagger + C_n(f), \quad (2.2.6)$$

avec $V_\vartheta(f) = [1, H_\vartheta(f)]'$ et où $C_n(f)$ est la matrice de DSP du couple $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$. Les signaux $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ sont observés sur un intervalle de temps $I_T \triangleq [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ de longueur finie T (choisi symétrique par rapport à l'origine des temps sans perte de généralité).

Lorsque le signal émis par la source se propage en champ libre et lorsqu'aucun élément diffractant n'est présent entre les microphones, la réponse impulsionnelle h_ϑ s'écrit

$$h_\vartheta(t) = \delta(t + D) = \delta_{-D}(t). \quad (2.2.7)$$

Le temps de retard D entre les récepteurs s'exprime en fonction de l'azimut ϑ par

$$D = -\frac{2a}{c} \sin \vartheta, \quad (2.2.8)$$

où c désigne la célérité du son dans le milieu et $2a$ l'espacement entre les microphones. L'estimation de temps de retard¹⁰ est un problème central dans un grand nombre d'applications, et a constitué, durant les dernières décennies, le sujet de recherches et développements dans des domaines variés (radar, sonar, géophysique, ultrasonique, etc.). En localisation et suivi de sources rayonnantes, l'estimation de temps de retard est généralement une fonction bas niveau intégrée dans un schéma d'estimation récursive.

Ce paragraphe se veut un aperçu des méthodes d'estimation de temps de retard de la littérature. Le problème étant étroitement lié à l'analyse et l'estimation spectrale, des contributions dans ces domaines en connexion avec l'estimation de temps de retard sont également présentées. De nombreux travaux ont en outre été dédiés à la caractérisation de l'erreur d'estimation (borne inférieure de l'erreur quadratique moyenne). Les principaux résultats sont également présentés.

2.2.2 Méthode de la corrélation croisée

Cette méthode repose sur le fait que, si $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ ne sont pas corrélés, la corrélation croisée de $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ s'écrit

$$R_{z_1 z_2}(\tau) = (R_{ss} * \delta_{-D})(-\tau) = (R_{ss} * \delta_D)(\tau) = R_{ss}(\tau - D), \quad (2.2.9)$$

i.e. $R_{z_1 z_2}$ est une version décalée de R_{ss} . Une propriété importante de l'autocorrélation d'un signal SSL \mathbf{s} est que $\forall \tau, R_{ss}(\tau) \leq R_{ss}(0)$, ce qui signifie que sous les hypothèses définies précédemment, $R_{z_1 z_2}$ possède un maximum en D (qui est global si \mathbf{s} ne possède pas de propriété de périodicité).

10. *Time Delay Estimation-TDE*

L'idée est donc de chercher la valeur pour laquelle $R_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}$ admet un maximum. Dans la pratique, on ne connaît pas $R_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}$, on a simplement accès à une unique réalisation de $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ sur l'intervalle I_T , que l'on note respectivement $\mathbf{z}_{1,T}, \mathbf{z}_{2,T}$. L'idée consiste donc à construire un estimateur $\hat{R}_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}$ de $R_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}$ sur la base d'une réalisation de $\mathbf{z}_{1,T}, \mathbf{z}_{2,T}$. Sous hypothèse d'ergodisme des signaux vis-à-vis de leur corrélation croisée, un estimateur—non-paramétrique—possible est le suivant, défini sur \mathbb{R} par (cf §2.1B)

$$\hat{R}_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{z}_{1,T}(t)\mathbf{z}_{2,T}(t-\tau)dt, \quad (2.2.10)$$

soit

$$\hat{R}_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-\tau} \mathbf{z}_1(t)\mathbf{z}_2(t-\tau)dt & \text{sur } [0, T] \\ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} \mathbf{z}_1(t)\mathbf{z}_2(t-\tau)dt & \text{sur } [-T, 0[\\ 0 & \text{sur } \mathbb{R} \setminus [-T, T]. \end{cases} \quad (2.2.11)$$

Les statistiques et propriétés asymptotiques de cet estimateur sont analogues à celles de l'estimateur biaisé d'autocorrélation, présentées au §2.1B. En pratique, on a une connaissance *a priori* sur le temps de retard, *i.e.* on sait par des considérations géométriques (cf équation (2.2.8)) que ce retard ne peut se trouver que dans un intervalle $[-D_{\max}, D_{\max}]$ avec $D_{\max} = 2a/c$. Il faut donc choisir, d'après les considérations du §2.1B, $T \gg D_{\max}$, pour s'assurer d'avoir une faible variance et un faible biais de l'estimateur d'intercorrélacion sur $[-D_{\max}, D_{\max}]$.

2.2.3 Méthode de la corrélation croisée généralisée

La corrélation croisée généralisée¹¹ consiste à estimer la corrélation croisée des signaux y_1, y_2 résultant du filtrage de $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ par deux filtres linéaires de réponses fréquentielles respectives $H_1(f), H_2(f)$. Les filtres H_1, H_2 sont choisis de manière à conférer certaines propriétés à l'estimateur de temps de retard entre \mathbf{z}_1 et \mathbf{z}_2 . La fonction d'intercorrélacion de $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ et leur DSP croisée sont unies par la relation

$$R_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(f)e^{2i\pi f\tau} df. \quad (2.2.12)$$

En notant $\psi(f) \triangleq H_1(f)H_2^*(f)$, la fonction d'intercorrélacion de y_1, y_2 s'écrit quant à elle

$$R_{y_1y_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(f)S_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(f)e^{2i\pi f\tau} df. \quad (2.2.13)$$

Étant donné un estimateur $\hat{S}_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}$ de $S_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}$, la méthode de la corrélation croisée généralisée consiste à chercher le maximum de

$$\hat{R}_{y_1y_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(f)\hat{S}_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(f)e^{2i\pi f\tau} df. \quad (2.2.14)$$

En d'autres termes, la DSP croisée de $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ (ou son estimateur) est pondérée dans le domaine fréquentiel préalablement à sa transformation de Fourier inverse et à la recherche du maximum. De nombreux auteurs ont proposé différentes pondérations fréquentielles—ou processeurs— $\psi(f)$, chaque pondération ayant un but particulier. La plupart de ces pondérations sont listées dans [Knapp et Carter, 1976]. On présente brièvement ces processeurs. Il est important de noter que tous ces processeurs reposent sur une connaissance *a priori* de $S_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_1}, S_{\mathbf{z}_2\mathbf{z}_2}, S_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}$. Ces quantités n'étant généralement pas disponible en pratique, elles doivent par conséquent elles aussi être estimées sur la base d'une unique réalisation de $\mathbf{z}_{1,T}, \mathbf{z}_{2,T}$. Ce sera le sujet du §2.2.3E. Précisons finalement que la recherche du maximum de (2.2.14) s'effectue de façon exhaustive, car l'argument maximisant cette fonction n'a généralement pas d'expression analytique.

11. *Generalized Cross-Correlation-GCC*

A Le processeur Roth

Le processeur Roth est issu d'une tentative de P.R. Roth [Roth, 1971] de donner un sens physique et intuitif aux mesures de corrélation et DSP croisées de deux signaux \mathbf{x}, \mathbf{y} (allant au-delà de la simple compréhension de leur définition mathématique) lorsque ceux-ci sont unis par une relation linéaire du type

$$\mathbf{y}(t) = (h * \mathbf{x})(t) + \mathbf{n}(t), \quad (2.2.15)$$

où \mathbf{x} et \mathbf{n} sont centrés individuellement et conjointement SSL. Notons qu'en posant $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$ et $\mathbf{y} = \mathbf{x}_2$, il s'agit du modèle (2.2.1) avec $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}$ et $\mathbf{n}_1 \equiv 0$. Plus précisément, le but de [Roth, 1971] est de définir la «nature» de ce que mesure la corrélation croisée au-delà de la définition naïve : «c'est une mesure du degré de ressemblance entre deux signaux». Il est mis en avant le fait que la corrélation croisée (où de manière équivalente, la DSP croisée) pour ce type de problème peut servir à caractériser deux quantités distinctes, l'une associée au canal de transmission $h(t)$, et l'autre au «degré de contamination» de \mathbf{y} par \mathbf{n} . Dans le premier cas, l'auteur parle de «mesure de correspondance», et dans l'autre de «mesure de causalité»¹². La DSP croisée de \mathbf{y}, \mathbf{x} s'écrit

$$S_{yx}(f) = H(f)S_{xx}(f) + S_{nx}(f), \quad (2.2.16)$$

et s'exprime comme la somme de deux termes, le terme $H(f)S_{xx}(f)$ donnant une mesure du canal de transmission, le second étant relié à la façon dont \mathbf{n} réduit la causalité de \mathbf{x} et \mathbf{y} . L'auteur précise que pour construire un estimateur \hat{S}_{yx} de S_{yx} ayant une certaine «stabilité statistique» (*i.e.* une faible variance), il est préférable de construire des périodogrammes sur des intervalles successifs pour ensuite en calculer la moyenne empirique (périodogramme moyenné, cf §2.1). Lorsque \mathbf{x} et \mathbf{n} ne sont pas corrélés, $S_{nx}(f) = 0$, et l'influence de $\mathbf{n}(t)\mathbf{x}(t - \tau)$ devient négligeable dans \hat{S}_{yx} pour peu que le nombre de périodogrammes moyennés soit suffisamment grand. \hat{S}_{yx} caractérise alors principalement la correspondance entre \mathbf{x} et \mathbf{y} . En divisant la DSP croisée de \mathbf{y}, \mathbf{x} par \hat{S}_{xx} , il est alors possible de caractériser le canal de transmission indépendamment du spectre de x . Un autre effet bénéfique de cette normalisation est le fait qu'une part de l'aléa présent dans \hat{S}_{yx} et \hat{S}_{xx} est éliminé lors du calcul de leur rapport pour peu que ces deux estimateurs soient calculés à partir d'échantillons de \mathbf{x} et \mathbf{y} obtenus aux mêmes instants. Parallèlement, il est montré dans [Carter et Knapp, 1975] que $S_{yx}(f)/S_{xx}(f)$ est la réponse fréquentielle du filtre linéaire caractérisant au mieux la correspondance entre \mathbf{x} et \mathbf{y} , dans le sens où la valeur quadratique moyenne de l'erreur

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - (h_{\text{test}} * \mathbf{x})(t), \quad (2.2.17)$$

où h_{test} désigne une valeur testée de h , est minimale pour

$$h_{\text{test}}(\tau) = h_{\text{opt}}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{yx}(f)}{S_{xx}(f)} e^{2i\pi f\tau} df. \quad (2.2.18)$$

En effet, la DSP de l'erreur peut s'écrire, d'après [Carter et Knapp, 1975],

$$\begin{aligned} S_{ee}(f) &= S_{yy}(f) + S_{xx}(f)|H_{\text{test}}(f)|^2 - H_{\text{test}}(f)S_{xy}(f) - H_{\text{test}}^*(f)S_{yx}(f) \\ &= S_{xx}(f) \left| H_{\text{test}}(f) - \frac{S_{yx}(f)}{S_{xx}(f)} \right|^2 - S_{yy}(f) \left[1 - \frac{|S_{yx}(f)|^2}{S_{xx}(f)S_{yy}(f)} \right], \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

dont l'intégrale sur toutes les fréquences atteint un minimum pour

$$H_{\text{test}}(f) = H_{\text{opt}}(f) = \frac{S_{yx}(f)}{S_{xx}(f)}. \quad (2.2.20)$$

12. Nous reprenons ici les dénominations employées par l'auteur, bien que nous pensions qu'elles puissent porter à confusion (en particulier le terme «causalité»)

Toujours d'après [Roth, 1971], si S_{yx}/S_{xx} permet de caractériser la correspondance de x et y , une autre quantité doit être définie caractérisant leur causalité, si possible indépendante du canal de transmission. Cette information est donnée par le module au carré de la cohérence, défini par (cf §2.1)

$$|\gamma_{yx}(f)|^2 = \frac{|S_{yx}(f)|^2}{S_{xx}(f)S_{yy}(f)}. \quad (2.2.21)$$

Lorsque cette grandeur est exprimée en fonction de $H(f)$ et $S_{xx}(f)$ de la manière suivante

$$|\gamma_{yx}(f)|^2 = \frac{|H(f)|^2 S_{xx}(f)}{|H(f)|^2 S_{xx}(f) + S_{nn}(f)}, \quad (2.2.22)$$

son interprétation devient immédiate : $|\gamma_{yx}(f)|^2$ est la proportion de la densité spectrale de puissance de y à la fréquence f «due» à l'entrée x . En particulier, si le bruit n est absent, alors $|\gamma|^2 \equiv 1$, indiquant que y peut être *exactement* déduit de x par un filtrage linéaire. *A contrario*, si $|H|^2 S_{xx}$ est faible devant S_{nn} , alors $|\gamma_{yx}|^2 \approx 0$. Une application possible du module au carré de la cohérence est de donner un degré de confiance à l'estimation du canal de transmission. En effet, un canal estimé à partir de signaux dont le module au carré de la cohérence est faible est peu fiable. D'autres quantités intéressantes peuvent être définies *via* le module au carré de la cohérence, comme par exemple $|\gamma(f)|^2 S_{yy}(f)$ et $(1 - |\gamma(f)|^2) S_{yy}(f)$, les composantes de la DSP de y dues à l'entrée et au bruit respectivement. De là, le Rapport Signal-à-Bruit (RSB) en sortie du filtre h peut naturellement être défini par

$$\text{RSB}(f) = \frac{|\gamma_{yx}(f)|^2}{1 - |\gamma_{yx}(f)|^2}. \quad (2.2.23)$$

Pour en revenir à l'estimation de temps de retard, [Roth, 1971] insiste sur le fait qu'estimer un temps de retard entre deux signaux est fondamentalement lié à la mesure de leur correspondance (*i.e.* du canal de transmission). En conséquence, l'utilisation de la corrélation croisée à cet effet est gênante d'un point de vue philosophique, puisque la relation

$$R_{yx}(\tau) = (h * R_{xx})(\tau) \quad (2.2.24)$$

nous indique que l'information utile que l'on cherche, contenue dans h , est en quelque sorte noyée dans la convolution avec R_{xx} , sans importance dans notre application. En fait, lorsque $h(t) = \delta_{-D}(t)$, la corrélation croisée de y, x est une image de la réponse impulsionnelle du canal, mais «étalée» du fait de la convolution avec R_{xx} —sauf cas particulier où x est blanc, auquel cas $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(0)\delta(\tau)$ et $R_{yx}(\tau) = R_{xx}(0)h(\tau)$ —. Si ce constat n'est pas gênant d'un point de vue pratique dans des conditions idéales d'un seul retard pur entre les deux signaux, il peut avoir son importance dans le cas de retards multiples, *i.e.* lorsque le lien entrée-sortie du système s'écrit

$$y(t) = \sum_j x(t + D_j) + n(t). \quad (2.2.25)$$

Pour ce modèle, la corrélation croisée de y, x s'écrit

$$R_{yx}(\tau) = R_{xx}(\tau) * \sum_j \delta_{-D_j}(\tau) = \sum_j R_{xx}(\tau + D_j), \quad (2.2.26)$$

ce qui signifie que si les $|D_i - D_j|$ sont inférieurs au temps d'autocorrélation de x (inverse de sa largeur de bande), alors les composantes $R_{xx}(\tau + D_j)$, peuvent se recouvrir et noyer de manière irréversible l'information recherchée. En revanche, en estimant directement

$$h(t) = \sum_j \delta_{-D_j}(t) \quad (2.2.27)$$

en calculant la transformée de Fourier inverse de $\hat{S}_{yx}/\hat{S}_{xx}$ (notée \hat{h}_{opt}), on s'affranchit en théorie du problème de recouvrement évoqué (sous réserve que $\hat{S}_{yx}/\hat{S}_{xx} \approx S_{yx}/S_{xx}$, et que la bande passante de \mathbf{x} soit suffisamment large) et les D_j peuvent être estimés en recherchant les pics d'un estimé de h_{opt} . Cette remarque amène à penser que de manière générale, il est préférable de construire une fonction à maximiser qui possède un pic étroit et haut plutôt qu'un pic «étalé». On dira dans ce cas que la méthode possède une bonne résolution temporelle. Comme précisé dans [Knapp et Carter, 1976], une bonne résolution temporelle est préférable pour la raison donnée précédemment. Cependant, les pics étroits sont plus sensibles aux erreurs induites par des temps d'observation courts, en particulier pour des faibles RSB (on parlera de manque de stabilité). Le choix du critère à maximiser relève donc d'un compromis entre résolution et stabilité (analogie avec le compromis résolution-précision en analyse spectrale).

Le processeur Roth a donc l'expression suivante

$$\hat{\psi}_{\text{Roth}}(f) = \frac{1}{\hat{S}_{z_1 z_1}(f)}, \quad (2.2.28)$$

ce qui donne l'expression suivante de la corrélation croisée généralisée

$$\hat{R}_{y_1 y_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{S}_{z_1 z_2}(f)}{\hat{S}_{z_1 z_1}(f)} e^{2i\pi f\tau} df, \quad (2.2.29)$$

i.e. $\hat{R}_{y_1 y_2}$ s'interprète ici comme un estimateur de la réponse impulsionnelle du filtre linéaire optimal caractérisant au mieux la correspondance entre \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 . En posant $h_\theta = \delta_{-D}$ dans (2.2.4), on peut écrire

$$\begin{aligned} R_{y_1 y_2}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{ss}(f)}{S_{ss}(f) + S_{n_1 n_1}(f)} e^{2i\pi f(\tau-D)} df \\ &= \delta_D(\tau) * \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{ss}(f)}{S_{ss}(f) + S_{n_1 n_1}(f)} e^{2i\pi f\tau} df. \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

L'effet du processeur Roth est donc d'atténuer, dans l'intégrale ci-dessus, la contribution des fréquences pour lesquelles la DSP du bruit \mathbf{n}_1 est importante, et donc où l'erreur sur $\hat{S}_{z_1 z_2}$ est grande.

B Le processeur SCoT

Le processeur précédent a été défini en considérant un système linéaire dont \mathbf{x}_1 serait l'entrée et \mathbf{x}_2 la sortie. Dans notre contexte, rien ne justifie ce choix et on pourrait tout autant prendre x_2 comme l'entrée du système à identifier (et ainsi amoindrir l'effet de $S_{n_2 n_2}$ dans le calcul de la corrélation croisée généralisée). Le processeur SCoT (Smoothed COherence Transform) [Carter *et al.*, 1973b] est une façon *ad hoc* de résoudre ce problème en accordant autant d'importance à x_1 et x_2 . Il est défini par

$$\hat{\psi}_{\text{SCoT}}(f) = \frac{1}{\sqrt{\hat{S}_{z_1 z_1}(f)\hat{S}_{z_2 z_2}(f)}} \quad (2.2.31)$$

et donne

$$\hat{R}_{y_1 y_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\gamma}_{z_1 z_2}(f) e^{2i\pi f\tau} df, \quad (2.2.32)$$

où

$$\hat{\gamma}_{z_1 z_2}(f) = \frac{\hat{S}_{z_1 z_2}(f)}{\sqrt{\hat{S}_{z_1 z_1}(f)\hat{S}_{z_2 z_2}(f)}} \quad (2.2.33)$$

est l'estimateur de la cohérence des signaux. On a

$$R_{y_1 y_2}(\tau) = \delta_D(\tau) * \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{ss}(f)}{\sqrt{(S_{ss}(f) + S_{n_1 n_1}(f))(S_{ss}(f) + S_{n_2 n_2}(f))}} e^{2i\pi f\tau} df, \quad (2.2.34)$$

ce qui signifie que le processeur SCoT atténue les fréquences pour lesquelles les DSP de \mathbf{n}_1 ou \mathbf{n}_2 sont importantes. À noter que lorsque $S_{n_1 n_1} = S_{n_2 n_2}$, les processeurs SCoT et Roth sont identiques.

C Le processeur PhaT

Le processeur PhaT (PHase Transform) est certainement le plus utilisé en robotique, et justifie donc une étude particulière. Il s'agit d'un processeur purement *ad hoc* visant à obtenir la plus grande résolution temporelle possible. Il est défini par

$$\hat{\psi}_{\text{PhaT}}(f) = \frac{1}{|\hat{S}_{z_1 z_2}(f)|}, \quad (2.2.35)$$

et donne

$$\hat{R}_{y_1 y_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{S}_{z_1 z_2}(f)}{|\hat{S}_{z_1 z_2}(f)|} e^{2i\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\hat{\phi}(f)} e^{2i\pi f\tau} df, \quad (2.2.36)$$

où $\hat{\phi}$ est la phase de $\hat{S}_{z_1 z_2}$. Dans un cas idéal où $\hat{S}_{z_1 z_2}(f) \approx S_{z_1 z_2}(f)$, $\hat{\phi}(f) \approx -2\pi fD$, et

$$\hat{R}_{y_1 y_2}(\tau) \approx \delta_D(\tau). \quad (2.2.37)$$

En pratique il existe cependant une erreur d'estimation sur la phase de $S_{z_1 z_2}$ et $\hat{R}_{y_1 y_2}$ n'est pas exactement une impulsion de Dirac. Un défaut du processeur PhaT est qu'il pondère la DSP croisée de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ par l'inverse de la DSP de s . La même importance est donc accordée à toutes les fréquences. En particulier, aux fréquences où $S_{ss}(f)$ est nulle, la phase de $S_{z_1 z_2}$ n'est pas définie et $\hat{\phi}(f)$ en ces fréquences tend à se distribuer uniformément sur $[-\pi; \pi[$. Le processeur PhaT n'est particulièrement pas recommandé pour les sources faible bande, à moins de connaître *a priori* la bande passante de ces sources et de limiter l'intégration à cette bande.

D Le processeur HT

Le processeur de Hannan-Thompson, initialement proposé dans [Hannan et Thomson, 1973] puis repris dans [Knapp et Carter, 1976], repose sur l'hypothèse supplémentaire que $\mathbf{s}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ sont centrés gaussiens dans leur ensemble. Il en découle que $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ le sont également. Pour la suite on considère que les spectres de $\mathbf{s}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ sont non nuls sur une bande de fréquence commune. Pour donner l'expression de l'estimateur, on commence par calculer la ddp conjointe des coefficients de Fourier de $\mathbf{z}_{1,T}, \mathbf{z}_{2,T}$. Pour $j = 1, 2$ on définit le signal aléatoire continu

$$\mathbf{z}_{j,T}(f) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \mathbf{z}_j(t) e^{-2i\pi ft} dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{z}_{j,T}(t) e^{-2i\pi ft} dt. \quad (2.2.38)$$

Pour une fonction continue des fréquences quelconque $g(f)$, on note $g[k]$ sa version échantillonnée à la période $1/T$, *i.e.* $g[k] \triangleq g(\frac{k}{T})$. On note $\mathbf{Z}_T[k] \triangleq [\mathbf{Z}_{1,T}[k], \mathbf{Z}_{2,T}[k]]'$, et on définit le vecteur d'observation $\mathbf{Z} \triangleq [\mathbf{Z}_T[-k_B]', \mathbf{Z}_T[-k_B + 1]', \dots, \mathbf{Z}_T[k_B]']'$, avec k_B l'indice correspondant à la fréquence maximale des signaux. Par linéarité de l'opérateur

$$z \mapsto \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} z(t) e^{-2i\pi k \frac{t}{T}} dt, \quad (2.2.39)$$

le vecteur \mathbf{Z} est (complexe) centré gaussien, et est supposé à symétrie circulaire¹³. On s'intéresse aux coefficients de la matrice de covariance de \mathbf{Z} , notée $C_{\mathbf{Z}}$. La fonction d'intercorrélacion de $Z_{j,T}, Z_{\ell,T}$ s'écrit, d'après [Macdonald et Schultheiss, 1969],¹⁴

$$\mathbb{E}\{Z_{j,T}(f_1)Z_{\ell,T}^*(f_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{z_j z_\ell}(\beta) \left[\frac{\sin(\pi T(f_1 - \beta))}{\pi(f_1 - \beta)} \right] \left[\frac{\sin(\pi T(f_2 - \beta))}{\pi(f_2 - \beta)} \right] d\beta, \quad (2.2.40)$$

avec

$$S_{z_j z_\ell}(f) = [S_{ss}(f) + S_{n_j n_\ell}(f)\delta_{j\ell}] e^{-2i\pi f \Delta_{j\ell}}. \quad (2.2.41)$$

Ci-dessus, $\delta_{j\ell}$ représente le symbole de Kronecker et $\Delta_{j\ell}$ est le temps de propagation entre R_j et R_ℓ (qui vaut $+D, -D$, ou 0 selon les valeurs de j, ℓ). Sous les conditions suffisantes suivantes [Macdonald et Schultheiss, 1969] :

- $S_{ss}(f), S_{n_1 n_1}(f)$ et $S_{n_2 n_2}(f)$ varient peu sur tout intervalle de fréquence dont la longueur est de l'ordre de $1/T$ (*i.e.* les temps d'autocorrélacion—les inverses de leur largeur de bande—du signal et des bruits sont courts devant la durée d'observation des signaux),
- $|D| \ll T$ (*i.e.* les fronts d'onde balayent le capteur en un temps court devant la durée d'observation des signaux),

$S_{z_j z_\ell}(f)$ peut être considéré constant sur tout intervalle de fréquence dont la longueur est de l'ordre de $1/T$, et (2.2.40) se simplifie en

$$\mathbb{E}\{Z_{j,T}(f_1)Z_{\ell,T}^*(f_2)\} \approx S_{z_j z_\ell}(f_1) \frac{\sin(\pi(f_1 - f_2)T)}{\pi(f_1 - f_2)T}, \quad (2.2.42)$$

ce qui donne en les multiples entiers de $1/T$

$$\mathbb{E}\{Z_{j,T}[k_1]Z_{\ell,T}^*[k_2]\} \approx S_{z_j z_\ell}[k_1] \frac{\sin(\pi(k_1 - k_2))}{\pi(k_1 - k_2)}, \quad (2.2.43)$$

d'où finalement

$$\mathbb{E}\{Z_{j,T}[k_1]Z_{\ell,T}^*[k_2]\} \approx \begin{cases} S_{z_j z_\ell}[k_1] & \text{si } k_1 = k_2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.2.44)$$

Ainsi, pour T suffisamment grand, le vecteur $Z_T[k]$ a pour matrice de covariance

$$C_{Z_T}[k] = \begin{bmatrix} S_{z_1 z_1}[k] & S_{z_1 z_2}[k] \\ S_{z_2 z_1}[k] & S_{z_2 z_2}[k] \end{bmatrix} = C_{\mathbf{z}} \left(\frac{k}{T} \right) = C_{\mathbf{z}}[k], \quad (2.2.45)$$

et sa *ddp* s'écrit

$$p_{Z_T[k]}(Z_T[k]; C_{\mathbf{z}}[k]) = \frac{1}{\pi^2 \det(C_{\mathbf{z}}[k])} e^{-Z_T[k]^\dagger (C_{\mathbf{z}}[k])^{-1} Z_T[k]}. \quad (2.2.46)$$

Les vecteurs aléatoires $Z_T[-k_B], Z_T[-k_B + 1], \dots, Z_T[k_B]$ étant décorrelés, $C_{\mathbf{z}}$ a la structure bloc-diagonale suivante

$$C_{\mathbf{z}} = \text{diag}(C_{\mathbf{z}}[-k_B], C_{\mathbf{z}}[-k_B + 1], \dots, C_{\mathbf{z}}[k_B]), \quad (2.2.47)$$

13. Si \mathbf{z} est un vecteur complexe gaussien de dimension d à *symétrie circulaire*, alors sa densité de probabilité

$$p_{\mathbf{z}}(z; C) = \frac{1}{\pi^d \det C} e^{-z^\dagger C^{-1} z}$$

est entièrement caractérisée par sa matrice de covariance $C \triangleq \mathbb{E}\{\mathbf{z}\mathbf{z}^\dagger\}$.

14. la démonstration du résultat n'est pas donnée ici, mais il s'agit d'un cas particulier apparaissant dans la démonstration du théorème 3.1.1 de ce manuscrit.

et la **ddp** de \mathbf{Z} s'écrit finalement

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{Z}}(Z; C_{\mathbf{Z}}) &= \prod_{k=-k_B}^{k_B} p_{Z_T[k]}(Z_T[k]; C_{\mathbf{Z}}[k]) \\ &= \frac{1}{\pi^{2(2k_B+1)}} \left(\prod_{k=-k_B}^{k_B} \frac{1}{\det(C_{\mathbf{Z}}[k])} \right) e^{-\sum_{k=-k_B}^{k_B} Z_T[k]^\dagger (C_{\mathbf{Z}}[k])^{-1} Z_T[k]}, \end{aligned} \quad (2.2.48)$$

avec, pour mémoire,

$$C_{\mathbf{Z}}[k] = \begin{bmatrix} S_{\text{ss}}[k] + S_{\mathbf{n}_1\mathbf{n}_1}[k] & S_{\text{ss}}[k]e^{-2i\pi k \frac{D}{T}} \\ S_{\text{ss}}[k]e^{2i\pi k \frac{D}{T}} & S_{\text{ss}}[k] + S_{\mathbf{n}_2\mathbf{n}_2}[k] \end{bmatrix} = V_D[k]S_{\text{ss}}[k]V_D[k]^\dagger + C_{\mathbf{n}}[k], \quad (2.2.49)$$

et $V_D[k] \triangleq [1, \exp(2i\pi k \frac{D}{T})]'$. La structure de la matrice $C_{\mathbf{Z}}$ est connue et spécifiée par les équations (2.2.47)–(2.2.49), mais son expression dépend du vecteur de paramètres inconnu $\theta \triangleq [D, \theta'_{\text{spec}}]'$, avec

$$\theta_{\text{spec}} \triangleq [S_{\text{ss}}[0], \dots, S_{\text{ss}}[k_B], S_{\mathbf{n}_1\mathbf{n}_1}[0], \dots, S_{\mathbf{n}_1\mathbf{n}_1}[k_B], S_{\mathbf{n}_2\mathbf{n}_2}[0], \dots, S_{\mathbf{n}_2\mathbf{n}_2}[k_B]]' \quad (2.2.50)$$

vecteur des *paramètres spectraux* du problème. Du fait que θ soit l'inconnue de notre problème, nous rebaptisons $p_{\mathbf{Z}}(Z; C_{\mathbf{Z}})$ en $p_{\mathbf{Z}}(Z; \theta)$. Étant donné un échantillon Z de \mathbf{Z} , l'estimé de θ par maximum de vraisemblance est la valeur de θ maximisant sa vraisemblance $p_{\mathbf{Z}}(Z; \theta)$ par rapport à Z , ou de manière équivalente son logarithme (la log-vraisemblance) $L(\theta; Z) \triangleq \ln p_{\mathbf{Z}}(Z; \theta)$ ¹⁵. L'Estimateur par Maximum de Vraisemblance (**EMV**) de θ est donc le vecteur aléatoire

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta} (L(\theta; Z)), \quad (2.2.51)$$

avec, dans notre cas,

$$L(\theta; Z) = -2(2k_B + 1)\ln\pi - \sum_{k=-k_B}^{k_B} \left(\ln \det(C_{\mathbf{Z}}[k]) + Z_T[k]^\dagger (C_{\mathbf{Z}}[k])^{-1} Z_T[k] \right). \quad (2.2.52)$$

THÉORÈME 2.2.1 Estimateur de temps de retard par maximum de vraisemblance.

Si les conditions suivantes sont vérifiées

- $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ sont centrés gaussiens dans leur ensemble,
- $S_{\text{ss}}(f), S_{\mathbf{n}_1\mathbf{n}_1}(f)$ et $S_{\mathbf{n}_2\mathbf{n}_2}(f)$ varient peu sur tout intervalle de longueur de l'ordre de $1/T$,
- $|D| \ll T$,

alors l'**EMV** du temps de retard D sur la base de $\mathbf{z}_{1,T}, \mathbf{z}_{2,T}$ est l'argument maximisant

$$J(D) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\text{HT}}(f) \hat{S}_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(f) e^{2i\pi f D} df$$

avec $\psi_{\text{HT}}(f) \triangleq \frac{|\gamma_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(f)|^2}{|S_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(f)| (1 - |\gamma_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(f)|^2)}$, $\gamma_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(f) \triangleq \frac{S_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(f)}{\sqrt{S_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_1}(f)S_{\mathbf{z}_2\mathbf{z}_2}(f)}}$, et $\hat{S}_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(f)$ l'estimateur de $S_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(f)$ par la méthode du périodogramme (cf §2.1.2A).

15. Si on suppose aléatoire le vecteur de paramètres θ , alors la vraisemblance d'une valeur θ de θ par rapport à une réalisation Z du vecteur d'observation \mathbf{Z} est par définition $p_{\mathbf{Z}|\theta}(Z|\theta)$, la **ddp** de \mathbf{Z} conditionnelle à $\{\theta = \theta\}$ évaluée en Z .

PREUVE On se place à θ_{spec} fixé quelconque et on montre, par une série de calculs et de simplifications, que la valeur de D maximisant $L(\theta; Z)$ est indépendante de θ_{spec} . Le calcul de \hat{D} —la première composante de $\hat{\theta}$ —peut donc se faire indépendamment de celui de $\hat{\theta}_{\text{spec}}$. Notons d’abord que le module au carré de la cohérence des signaux $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ peut s’écrire, d’après le modèle (2.2.4)

$$|\gamma_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}[k]|^2 = \left| \frac{S_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}[k]}{\sqrt{S_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_1}[k]S_{\mathbf{z}_2\mathbf{z}_2}[k]}} \right|^2 = \frac{S_{\text{ss}}^2[k]}{(S_{\text{ss}}[k] + S_{\mathbf{n}_1\mathbf{n}_1}[k])(S_{\text{ss}}[k] + S_{\mathbf{n}_2\mathbf{n}_2}[k])}. \quad (2.2.53)$$

Le déterminant de la matrice de covariance $C_{\mathbf{z}}[k]$ s’exprime quant à lui par

$$\begin{aligned} \det(C_{\mathbf{z}}[k]) &= S_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_1}[k]S_{\mathbf{z}_2\mathbf{z}_2}[k] - |S_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}[k]|^2 \\ &= S_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_1}[k]S_{\mathbf{z}_2\mathbf{z}_2}[k] \left(1 - |\gamma_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}[k]|^2\right) \\ &= S_{\text{ss}}[k](S_{\mathbf{n}_1\mathbf{n}_1}[k] + S_{\mathbf{n}_2\mathbf{n}_2}[k]) + S_{\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2}[k]S_{\mathbf{n}_2\mathbf{n}_1}[k]. \end{aligned} \quad (2.2.54)$$

Celui-ci ne dépendant pas de D , maximiser $L(\theta; Z)$ par rapport à D revient à minimiser le critère quadratique

$$J_0(D; \mathbf{Z}) = \sum_{k=-k_B}^{k_B} \mathbf{z}_T[k]^\dagger (C_{\mathbf{z}}[k])^{-1} \mathbf{z}_T[k]. \quad (2.2.55)$$

Si T est suffisamment grand, (2.2.55) devient, sans induire d’erreur significative

$$J_0(D; \mathbf{Z}) \approx T \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{z}_T(f)^\dagger (C_{\mathbf{z}}(f))^{-1} \mathbf{z}_T(f) df. \quad (2.2.56)$$

L’intégrande dans (2.2.56) peut se développer ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_T(f)^\dagger (C_{\mathbf{z}}(f))^{-1} \mathbf{z}_T(f) &= \frac{S_{\mathbf{z}_2\mathbf{z}_2}(f)|\mathbf{z}_{1,T}(f)|^2 + S_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_1}(f)|\mathbf{z}_{2,T}(f)|^2}{S_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_1}(f)S_{\mathbf{z}_2\mathbf{z}_2}(f) \left(1 - |\gamma_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(f)|^2\right)} \\ &\quad - \frac{2\text{Re} \left(S_{\mathbf{z}_2\mathbf{z}_1}(f)\mathbf{z}_{1,T}(f)\mathbf{z}_{2,T}^*(f) \right)}{S_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_1}(f)S_{\mathbf{z}_2\mathbf{z}_2}(f) \left(1 - |\gamma_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(f)|^2\right)}. \end{aligned} \quad (2.2.57)$$

Le premier terme dans (2.2.57) étant indépendant de D , on cherche finalement à maximiser

$$J(D; \mathbf{Z}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (A(f) + A^*(f)) df, \quad (2.2.58)$$

avec

$$A(f) = \frac{S_{\mathbf{z}_2\mathbf{z}_1}(f)\mathbf{z}_{1,T}(f)\mathbf{z}_{2,T}^*(f)}{S_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_1}(f)S_{\mathbf{z}_2\mathbf{z}_2}(f) \left(1 - |\gamma_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(f)|^2\right)}. \quad (2.2.59)$$

Notons que comme $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ sont réels, $A^*(f) = A(-f)$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (A(f) + A^*(f)) df = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} A(f) df. \quad (2.2.60)$$

Il vient, en omettant le facteur 2 sans importance

$$J(D; \mathbf{Z}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{\mathbf{z}_2\mathbf{z}_1}(f)\mathbf{z}_{1,T}(f)\mathbf{z}_{2,T}^*(f)}{S_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_1}(f)S_{\mathbf{z}_2\mathbf{z}_2}(f) \left(1 - |\gamma_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(f)|^2\right)} df. \quad (2.2.61)$$

En se servant du fait que

$$\frac{1}{S_{z_1 z_1}(f) S_{z_2 z_2}(f)} = \frac{|\gamma_{z_1 z_2}(f)|^2}{|S_{z_1 z_2}(f)|^2}, \quad (2.2.62)$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned} J(D; Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} Z_{1,T}(f) Z_{2,T}^*(f) \frac{|\gamma_{z_1 z_2}(f)|^2}{|S_{z_1 z_2}(f)| (1 - |\gamma_{z_1 z_2}(f)|^2)} \frac{S_{z_2 z_1}(f)}{|S_{z_1 z_2}(f)|} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} Z_{1,T}(f) Z_{2,T}^*(f) \frac{|\gamma_{z_1 z_2}(f)|^2}{|S_{z_1 z_2}(f)| (1 - |\gamma_{z_1 z_2}(f)|^2)} e^{2i\pi f D} df. \end{aligned} \quad (2.2.63)$$

Notons que $Z_{1,T}(f) Z_{2,T}^*(f)$ est la transformée de Fourier de l'estimateur biaisé de la corrélation croisée $R_{z_1 z_2}(\tau)$, *i.e.* l'estimateur, noté $\hat{S}_{z_1 z_2}(f)$, de $S_{z_1 z_2}(f)$ par la méthode du périodogramme. $J(D; Z)$ a donc explicitement la forme d'une corrélation croisée généralisée, dont l'expression du processeur ψ_{HT} est précisée dans le théorème. ■

Mettre en œuvre l'estimateur précédemment défini revient, avant de corrélérer z_1, z_2 , à les filtrer par des filtres de réponses fréquentielles H_1, H_2 telles que

$$H_1(f) H_2^*(f) = \frac{\text{RSB}(f)}{|S_{z_1 z_2}(f)|}, \quad (2.2.64)$$

avec, suivant la même définition que dans [Carter *et al.*, 1973a]–[Weiss et Weinstein, 1983],

$$\text{RSB} \triangleq \frac{|\gamma_{z_1 z_2}|^2}{1 - |\gamma_{z_1 z_2}|^2} = \frac{(S_{ss}/S_{n_1 n_1})(S_{ss}/S_{n_2 n_2})}{1 + S_{ss}/S_{n_1 n_1} + S_{ss}/S_{n_2 n_2}}. \quad (2.2.65)$$

En somme, on effectue une opération de blanchiment en divisant la DSP croisée des signaux par son module (*i.e.* en ramenant l'aléatoire de cette DSP croisée des signaux principalement dans sa phase, de la même manière qu'avec le processeur PhaT) mais on valorise ensuite la contribution des fréquences pour lesquelles le RSB est élevé. Lorsque C_z est parfaitement connue, l'estimateur par la méthode HT est optimal dans le sens où l'estimateur de temps de retard est asymptotiquement efficace. Lorsque $\psi_{HT}(f)$ n'est pas connu, il doit également être estimé à partir d'une seule réalisation de durée finie des signaux.

E Estimation des spectres et du module au carré de la cohérence

Dans la pratique, le processeur $\psi(f)$ n'est pas connu, et il faut le remplacer par un estimateur $\hat{\psi}(f)$ dans (2.2.14), cet estimateur étant lui aussi basé sur une seule réalisation des processus z_1, z_2 sur l'intervalle I_T . Ceci peut être fait en formant des estimateurs $\hat{S}_{z_1 z_1}, \hat{S}_{z_2 z_2}, \hat{S}_{z_1 z_2}$ de $S_{z_1 z_1}, S_{z_2 z_2}, S_{z_1 z_2}$ par une méthode d'estimation de DSP et DSP croisée, puis à en déduire l'estimateur de la cohérence

$$\hat{\gamma}_{z_1 z_2}(f) = \frac{\hat{S}_{z_1 z_2}(f)}{\sqrt{\hat{S}_{z_1 z_1}(f) \hat{S}_{z_2 z_2}(f)}}, \quad (2.2.66)$$

son module au carré, ainsi que l'estimateur du processeur $\psi(f)$. Ces estimateurs devant être consistants pour assurer la consistance de l'estimateur du temps de retard, la méthode du périodogramme croisé n'est pas préconisée.

Dans [Carter *et al.*, 1973a], il est suggéré d'utiliser la méthode par moyenne empirique de périodogrammes décrite au §2.1.2B, et des pistes sont proposées quant au choix de ses paramètres de réglage. La première partie de [Carter *et al.*, 1973a] est consacrée au calcul théorique de la **ddp**

à l'ordre 1 (§7.4.3) de $\hat{\gamma}_{z_1 z_2}$ conditionnellement à $\gamma_{z_1 z_2}$ et au nombre de périodogrammes court terme, sous hypothèse de signaux centrés gaussiens dans leur ensemble, avec un fenêtrage «idéal» (transformée de Fourier de la fenêtre assimilable à une impulsion au regard de la cohérence) et un taux de recouvrement de 0%. En particulier, des formulations analytique de biais et de variance sont données. La seconde partie est consacrée au calcul empirique du biais et de la variance de $\hat{\gamma}_{z_1 z_2}$ en fonction du taux de recouvrement, avec une fenêtre de Hann. L'étude montre que pour une cohérence constante, le gain maximal en terme de biais et variance par rapport au cas d'un recouvrement de 0% (cas «nonoverlappé») est atteint pour un taux de recouvrement de 65%. Cependant un taux de 50% est préférable dans la mesure où au delà de 50% de recouvrement, le coût en temps de calcul croît de manière significative pour un gain en précision modéré.

Dans [Chan et Miskowicz, 1984], une approche alternative paramétrique de type ARMA est proposée pour estimer le module au carré de la cohérence. Les auteurs proposent de modéliser les rapports entre DSP croisée et DSP des signaux discrétisés par des formes rationnelles

$$\begin{cases} \frac{S_{z_1 z_2}(z)}{S_{z_1 z_1}(z)} = \frac{\sum_{k=-P}^P b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^Q a_k z^{-k}} \\ \frac{S_{z_2 z_1}(z)}{S_{z_2 z_2}(z)} = \frac{\sum_{k=-R}^R d_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^S c_k z^{-k}} \end{cases} \quad (2.2.67)$$

L'estimation du module au carré de la cohérence se réduit donc à l'estimation des jeux de paramètres $\{a_k\}_{k=1,\dots,Q}$, $\{b_k\}_{k=-P,\dots,P}$, $\{c_k\}_{k=1,\dots,S}$, $\{d_k\}_{k=-R,\dots,R}$. La première équation du système (2.2.67) donne la relation de récurrence suivante

$$R_{z_1 z_2}[m] + \sum_{k=1}^Q a_k R_{z_1 z_2}[m-k] = \sum_{k=-P}^P b_k R_{z_1 z_1}[m-k], \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad (2.2.68)$$

qui, lorsqu'évaluée aux instants $m = -P, \dots, P+Q$ conduit à l'équation matricielle

$$-G_1 b + G_2 a = -r, \quad (2.2.69)$$

avec $a = [a_1, \dots, a_Q]'$, $b = [b_{-P}, \dots, b_P]'$ les vecteurs de paramètres à estimer,

$$G_1 = \begin{bmatrix} R_{z_1 z_1}[0] & \dots & R_{z_1 z_1}[-2P] \\ R_{z_1 z_1}[1] & \dots & R_{z_1 z_1}[-2P+1] \\ \vdots & & \vdots \\ R_{z_1 z_1}[2P+Q] & \dots & R_{z_1 z_1}[Q] \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} R_{z_1 z_2}[-P] \\ \vdots \\ R_{z_1 z_2}[P+Q] \end{bmatrix}, \quad (2.2.70)$$

et

$$G_2 = \begin{bmatrix} R_{z_1 z_2}[-P-1] & \dots & R_{z_1 z_2}[-P-Q] \\ R_{z_1 z_2}[-P] & \dots & R_{z_1 z_2}[-P-Q+1] \\ \vdots & & \vdots \\ R_{z_1 z_2}[P+Q-1] & \dots & R_{z_1 z_2}[P] \end{bmatrix}. \quad (2.2.71)$$

Les estimateurs \hat{a}, \hat{b} de a, b sont ainsi donnés par

$$\begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = [\hat{G}_1 \quad -\hat{G}_2]^{-1} \hat{r}, \quad (2.2.72)$$

où $\hat{G}_1, \hat{G}_2, \hat{r}$ sont donnés par les expressions de G_1, G_2, r dans lesquelles on a remplacé les valeurs des autocorrélations et corrélations croisées par leurs estimées à partir d'une réalisation tronquée des signaux. En procédant de la même manière avec la seconde équation de (2.2.67), on estime

les vecteurs de paramètres $c = [c_1, \dots, c_S]'$, et $d = [d_{-R}, \dots, d_R]'$, de sorte que le module au carré de la cohérence estimé s'exprime finalement comme suit

$$|\hat{\gamma}_{z_1 z_2}(f)|^2 = \left| \frac{\sum_{k=-P}^P \hat{b}_k e^{-2i\pi f k}}{1 + \sum_{k=1}^Q \hat{a}_k e^{-2i\pi f k}} \right| \left| \frac{\sum_{k=-R}^R \hat{d}_k e^{-2i\pi f k}}{1 + \sum_{k=1}^S \hat{c}_k e^{-2i\pi f k}} \right|. \quad (2.2.73)$$

Les auteurs de [Chan et Miskowicz, 1984] insistent sur le fait que la matrice $[G_1 - G_2]$, qui possède autant de lignes que de colonnes, peut être mal conditionnée dans la pratique, et que le recours à sa pseudo-inverse est préférable à l'inversion matricielle directe. Une procédure *ad hoc* est également fournie pour déterminer les ordres P, Q, R, S du modèle. La méthode proposée d'estimation de module au carré de la cohérence est comparée à la méthode du périodogramme en environnement de simulation. Les résultats montrent un net avantage de la méthode proposée en terme de biais et variance. Ensuite, l'Estimation de Temps de Retard (ETR) par corrélation croisée généralisée est testé pour différents processeurs (Roth, HT), et pour différentes méthodes de module au carré de la cohérence. En particulier, l'accent est mis sur le fait que si le processeur HT donne l'EMV, dans la pratique, ses performances sont fortement conditionnées par l'estimation de la module au carré de la cohérence. Ainsi, certains résultats montrent que ARMA-Roth peut être meilleurs que ARMA-HT.

2.2.4 Estimation de temps de retard basée sur une régression linéaire du déphasage

Dans [Chan et al., 1978], les auteurs proposent une stratégie d'estimation alternative à la corrélation croisée généralisée en partant du constat que lorsque les bruits n_1, n_2 ne sont pas corrélés, la DSP croisée de x_2, x_1 s'écrit

$$S_{z_2 z_1}(f) = S_{ss}(f) e^{2i\pi f D}. \quad (2.2.74)$$

Aussi la phase $\bar{\varphi}_{z_2 z_1}[k]$ de $\bar{S}_{z_2 z_1}[k]$, où $\bar{S}_{z_2 z_1}$ est un estimateur de $S_{z_2 z_1}$ basé sur une moyenne empirique de périodogrammes court-termes (§2.1.2B), peut-elle s'écrire

$$\bar{\varphi}_{z_2 z_1}[k] = 2\pi f_k D + \epsilon[k], \quad (2.2.75)$$

la variable aléatoire $\epsilon[k]$ représentant l'erreur d'estimation de la phase de $S_{z_2 z_1}$ due à la présence des bruits n_1, n_2 et la durée finie des signaux observés. Il s'agit donc de résoudre un problème de régression linéaire sur la phase. Lorsqu'aucune information *a priori* sur ϵ n'est exploitée, la méthode des moindres carrés permet de trouver la valeur de D minimisant la somme des valeurs quadratiques des $\epsilon[k]$. Tout comme pour le processeur PhaT de la corrélation croisée généralisée, un problème inhérent à cette méthode est le fait que toutes les fréquences contribuent de la même manière au calcul du critère. Les fréquences pour lesquelles le RSB est faible (et donc pour lesquelles la phase de la DSP croisée estimée est peu fiable) peuvent donc détériorer fortement l'estimation. La méthode présentée dans [Chan et al., 1978] propose *a contrario* d'exploiter les statistiques de l'erreur dans le calcul du critère. Les auteurs se sont penchés sur la caractérisation au premier ordre de l'erreur ϵ dans le cas de signaux centrés gaussiens dans leur ensemble. Si, dans le cas général, l'expression de la ddp à l'ordre 1 de l'erreur sur l'estimation de la phase est relativement compliquée et difficilement exploitable, des simplifications sont possibles dans le cas où le nombre de degrés de liberté équivalent de $\bar{S}_{z_2 z_1}(f)$ est élevé (*cf* Eq. (2.1.55) pour la définition de cette variable), *i.e.* lorsque $\bar{S}_{z_2 z_1}(f)$ est relativement stable. Sous cette hypothèse, on peut montrer que $\epsilon[k]$ est centrée Gaussienne, de variance

$$\text{var}\{\epsilon[k]\} = \frac{1}{\text{RSB}[k]K}, \quad (2.2.76)$$

avec $\text{RSB}[k]$ défini à l'équation (2.2.65) et K défini dans le théorème 2.1.8. On rappelle que K est une variable dépendant de tous les paramètres de réglage de la méthode d'estimation de $S_{z_2 z_1}$ (*i.e.* le nombre de segments utilisés, l'autocorrélation de la fenêtre de pondération des signaux, le pourcentage de recouvrement des segments, *cf* §2.1.2B). Si de plus les coefficients de Fourier des signaux calculés sur différents segments peuvent être supposés indépendants (vrai si $BT \gg 1$), alors ϵ peut de plus être supposé blanche. Sous ces hypothèses, l'estimateur minimisant le critère quadratique pondéré

$$J(D) = \sum_k \text{RSB}[k] \left(2\pi f_k D - \bar{\varphi}_{z_2 z_1}[k] \right)^2, \quad (2.2.77)$$

dont l'expression exacte est donnée par

$$\hat{D} = \frac{\sum_k \text{RSB}[k] \bar{\varphi}_{z_2 z_1}[k] 2\pi f_k}{\sum_k \text{RSB}[k] (2\pi f_k)^2}, \quad (2.2.78)$$

est un EMV de D , équivalent à la corrélation croisée généralisée avec le processeur HT. À noter que le dénominateur de (2.2.78) correspond à l'inverse de la Borne Inférieure de Cramér-Rao associée au problème d'ETR dans le cas de signaux gaussiens dans leur ensemble et centrés (*cf* Eq. (2.2.79)). Tout comme dans la méthode de la corrélation croisée généralisée, $\text{RSB}[k]$ est en général inconnu et doit être estimé à partir des données par une des méthodes présentées dans §2.1. Un avantage de la méthode proposée sur la méthode corrélation croisée généralisée-HT est le fait que le problème est ici linéaire en le paramètre D , ce qui permet d'obtenir une solution analytique du maximum de vraisemblance (2.2.78). Il n'y a donc pas besoin d'évaluer le critère en chaque valeur admissible du temps de retard pour déterminer le maximum. Les auteurs précisent que, selon les valeurs du vrai temps de retard, la phase de $S_{z_2 z_1}$ peut sortir de l'intervalle $[-\pi, \pi[$. Ceci peut poser problème dans la mesure où le calcul $\text{atan2}\{\text{Im}\{\bar{S}_{z_2 z_1}\}, \text{Re}\{\bar{S}_{z_2 z_1}\}\}$ produit un enroulement de la phase dans l'intervalle $[-\pi, \pi[$. Un algorithme efficace de déroulement de phase doit donc être utilisé.

2.2.5 Bornes théoriques associées au problème d'ETR

Pour définir une borne sur les statistiques de l'estimation, on a généralement recours à l'inégalité de Cramér-Rao [Cramér, 1999]–[Rao, 1992].

THÉORÈME 2.2.2 inégalité de Cramér-Rao, cas scalaire.

Soit $\hat{\theta}$ un estimateur non biaisé de θ et $p_{\mathbf{x}}(x; \theta)$ la vraisemblance de θ par rapport au vecteur de données \mathbf{x} . On note $V_{\mathbf{x}}(\theta) \triangleq \ln p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}; \theta)$ la fonction score de θ . Si $V_{\mathbf{x}}(\theta)$ est deux fois continûment dérivable par rapport à θ presque partout, alors

$$\text{var}\{\hat{\theta}\} \geq \frac{-1}{\mathbb{E}\left\{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}; \theta)\right\}}.$$

Si $\hat{\theta}$ admet un biais $b(\theta)$ non nul, alors l'inégalité devient

$$\text{var}\{\hat{\theta}\} \geq \frac{-[1 + b'(\theta)]^2}{\mathbb{E}\left\{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}; \theta)\right\}},$$

où $b'(\theta)$ est la dérivée de $b(\theta)$. L'inégalité en terme d'erreur quadratique moyenne s'écrit alors

$$\mathbb{E}\{(\hat{\theta} - \theta)^2\} \geq \frac{-[1 + b'(\theta)]^2}{\mathbb{E}\left\{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}; \theta)\right\}} + b(\theta)^2.$$

La borne inférieure de Cramér-Rao¹⁶ est sans doute la borne la plus utilisée pour caractériser un problème d'estimation. Son expression associée au problème d'ETR pour des signaux gaussiens est donnée dans [Knapp et Carter, 1976]. La variance d'un estimateur sans biais \hat{D} de D est bornée inférieurement par

$$\sigma_{\hat{D}}^2 \geq \frac{-1}{\mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \ln p_{\mathbf{z}}(Z|C_{\mathbf{z}}, \tau) \right\}} \Bigg|_{\tau=D}, \quad (2.2.79)$$

où Z et $p_{\mathbf{z}}(Z|C_{\mathbf{z}}, \tau)$ sont définis au §2.2.3. L'inégalité de Cramér-Rao s'écrit [Knapp et Carter, 1976]

$$\sigma_{\hat{D}}^2 \geq \frac{1}{T \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi f)^2 \text{RSB}(f) df}, \quad (2.2.80)$$

où $\text{RSB}(f)$ est défini au §2.2.3. Il est montré et reconnu que la variance d'un EMV approche la borne de Cramér-Rao avec une précision arbitraire, pour peu que T soit suffisamment grand (*cf* preuve dans [Knapp et Carter, 1976]). La notion de «suffisamment grand» reste cependant vague et fortement dépendante des signaux considérés (RSB, largeur de bande, fréquence centrale, etc.). Dans de nombreuses applications pratiques, T ne peut être choisi suffisamment grand vis-à-vis du RSB et des largeurs de bande considérés, et la borne de Cramér-Rao dans ces cas là ne permet pas de borner la variance de l'estimateur de manière assez précise.

La borne inférieure de Ziv-Zakai¹⁷ associée au problème d'estimation de temps de retard, proposée dans [Chazan *et al.*, 1975] puis utilisée dans [Weiss et Weinstein, 1983], permet de borner de manière beaucoup plus fine la variance ou l'erreur quadratique moyenne d'un estimateur de temps de retard pour des valeurs modérées de RSB/produit temps-largeur de bande¹⁸. En fait, les auteurs de [Weiss et Weinstein, 1983] distinguent deux ordres de grandeurs du produit temps-largeur de bande : les valeurs modérées pour lesquelles l'indépendance des coefficients de Fourier des signaux est vérifiée, et les valeurs «élevées», pour lesquelles l'EMV est «proche» de la borne inférieure de Cramér-Rao. La borne inférieure de Ziv-Zakai permet de borner précisément l'EQM pour des valeurs de produit temps-largeur de bande allant du modérément élevé au très élevé. En particulier, elle permet de déterminer à partir de quelles valeurs de RSB/produit temps-largeur de bande la borne inférieure de Cramér-Rao devient réellement atteignable. Avant de formuler explicitement cette borne, il convient de définir la notion de test d'hypothèse et de risque associé.

A Tests d'hypothèses binaires, rapport de vraisemblances, risque d'erreur

Soient deux hypothèses $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ (*i.e.* deux événements), qu'on appelle respectivement hypothèse nulle (ou «de référence») et hypothèse alternative, mutuellement exclusives et exhaustives sur un espace probabilisé $(\Omega, \sigma, \mathbb{P})$, de probabilités respectives $P_0 \triangleq \mathbb{P}\{\mathcal{H}_0\}, P_1 \triangleq \mathbb{P}\{\mathcal{H}_1\}$, avec $P_0 + P_1 = 1$. Soit un vecteur aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R}^d (ou \mathbb{C}^d) dépendant des hypothèses $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$. Un test d'hypothèses binaire est un mécanisme de décision permettant, à partir d'une réalisation de X , de détecter soit \mathcal{H}_0 soit \mathcal{H}_1 . Cela peut se résumer à partitionner \mathbb{R}^d en deux sous-espaces $\mathcal{Z}_0, \mathcal{Z}_1$ de sorte que si X se réalise dans \mathcal{Z}_0 on choisit \mathcal{H}_0 et si X se réalise dans \mathcal{Z}_1 on choisit \mathcal{H}_1 . On définit les erreurs de première et seconde espèce comme $\{\text{détecter } \mathcal{H}_0\} \cap \{\mathcal{H}_1 \text{ s'est produit}\}$ et $\{\text{détecter } \mathcal{H}_1\} \cap \{\mathcal{H}_0 \text{ s'est produit}\}$. On appelle probabilité de fausse alarme P_F et probabilité de

16. Cramér-Rao Lower Bound—CRLB

17. Ziv-Zakai Lower Bound—ZZLB

18. Time-Bandwidth Product—TBWP

non-détection (*miss probability*) P_M les probabilités conditionnelles

$$\begin{cases} P_F = \mathbb{P}\{\text{détecter } \mathcal{H}_1 | \mathcal{H}_0\} = \int_{\mathcal{Z}_1} f_{X|\mathcal{H}_0}(x|\mathcal{H}_0) dx \\ P_M = \mathbb{P}\{\text{détecter } \mathcal{H}_0 | \mathcal{H}_1\} = \int_{\mathcal{Z}_0} f_{X|\mathcal{H}_1}(x|\mathcal{H}_1) dx. \end{cases} \quad (2.2.81)$$

Pour caractériser un test d'hypothèse, on peut définir le risque d'erreur

$$R = P_F P_0 + P_M P_1, \quad (2.2.82)$$

défini comme la somme des probabilités des erreurs de première et seconde espèce (c'est une probabilité). Noter que pour le risque d'erreur ainsi défini, on attache autant d'importance aux erreurs de première et seconde espèce. Un test sera dit optimal s'il minimise ce risque d'erreur.

Définition 2.2.1 (test du Rapport de Vraisemblances) *On appelle Rapport de Vraisemblances la VA*

$$\Lambda(X) = \ln \left[\frac{f_{X|\mathcal{H}_1}(X|\mathcal{H}_1)}{f_{X|\mathcal{H}_0}(X|\mathcal{H}_0)} \right]. \quad (2.2.83)$$

On appelle Test du Rapport de Vraisemblance (TRV) le test suivant

$$\Lambda(X) \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \eta, \quad (2.2.84)$$

qui consiste à détecter \mathcal{H}_0 si, pour une réalisation x de X , $\Lambda(x) < \eta$ et à détecter \mathcal{H}_1 dans le cas contraire.

THÉORÈME 2.2.3 test d'hypothèse binaire optimal.

Si $\eta = \ln(P_0/P_1)$, alors le TRV minimise le risque d'erreur. Si les deux hypothèses sont équiprobables a priori, alors $\eta = 0$.

On appelle P_e la valeur minimale du risque d'erreur atteinte avec le TRV, *i.e.* la valeur minimale de R défini en 2.2.82. Remarquons qu'on peut redéfinir P_M et P_F en fonction du Rapport de Vraisemblances puisque

$$\begin{cases} P_M = \mathbb{P}\{\Lambda \geq \eta | \mathcal{H}_0\} = \int_{\eta}^{\infty} f_{\Lambda|\mathcal{H}_0}(\lambda|\mathcal{H}_0) d\lambda \\ P_F = \mathbb{P}\{\Lambda < \eta | \mathcal{H}_1\} = \int_{-\infty}^{\eta} f_{\Lambda|\mathcal{H}_1}(\lambda|\mathcal{H}_1) d\lambda. \end{cases} \quad (2.2.85)$$

Si $f_{\Lambda|\mathcal{H}_0}$ et $f_{\Lambda|\mathcal{H}_1}$ sont connues, alors on peut calculer P_e via (2.2.85). En général, il est difficile, voire impossible d'avoir une forme analytique de ces ddp. On peut cependant trouver une solution approchée à condition que $\Lambda(X)$ soit une somme de VA indépendantes et que le nombre d de composantes de X soit suffisamment grand. L'obtention de cette expression approchée peut se trouver dans [Van Trees, 2001].

THÉORÈME 2.2.4 expression approchée du risque d'erreur minimal.

Si $\Lambda(X)$ est une somme de VA indépendantes et si le nombre d de composantes de X est suffisamment grand, alors le risque d'erreur minimal pour des hypothèses équiprobables a priori est donné par l'équation de Chernoff

$$P_e \approx \frac{1}{2} \exp \left(\mu(s_m) + \frac{s_m^2}{2} \mu''(s_m) \right) \phi \left(s_m \sqrt{\mu''(s_m)} \right) \\ + \frac{1}{2} \exp \left(\mu(s_m) + \frac{(1-s_m)^2}{2} \mu''(s_m) \right) \phi \left((1-s_m) \sqrt{\mu''(s_m)} \right),$$

avec

$$\mu(s) = \ln \int_{\mathbb{R}^d} [f_{X|\mathcal{H}_1}(x|\mathcal{H}_1)]^s [f_{X|\mathcal{H}_0}(x|\mathcal{H}_0)]^{1-s} dx,$$

s une variable réelle, μ' et μ'' les dérivées première et seconde de μ par rapport à son argument, s_m la valeur pour laquelle $\mu'(s_m) = 0$, et

$$\phi : z \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2/2} dt.$$

B Risque minimal d'erreur pour le problème d'estimation du temps de retard

On applique maintenant le théorème 2.2.4 dans le cas de l'estimation de temps de retard pour des signaux gaussiens dans leur ensemble. On rappelle que le vecteur aléatoire en question est le vecteur tel que défini au §2.2.3D. Les deux hypothèses sont les suivantes

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \text{le temps de retard vaut } D_0 \\ \mathcal{H}_1 : \text{le temps de retard vaut } D_1. \end{cases} \quad (2.2.86)$$

THÉORÈME 2.2.5 risque d'erreur minimal associé au problème d'ETR.

Le risque d'erreur associé au problème d'ETR vaut, lorsque $BT \gg 1$

$$P_e(\Delta) = \exp \left(T \int_{-f_m}^{f_m} \left[-\ln [1 + \nu(\Delta, f)] + \frac{\nu(\Delta, f)}{1 + \nu(\Delta, f)} \right] df \right) \\ \times \phi \left(\sqrt{T \int_{-f_m}^{f_m} \frac{2\nu(\Delta, f)}{1 + \nu(\Delta, f)} df} \right),$$

où $\Delta \triangleq D_0 - D_1$, ϕ est définie dans le théorème 2.2.4, f_m est la fréquence maximale des signaux, et

$$\nu(\Delta, f) = \frac{|\gamma_{z_1 z_2}(f)|^2}{1 - |\gamma_{z_1 z_2}(f)|^2} \sin^2(\pi f \Delta).$$

PREUVE Pour $j = 0, 1$, la ddp de X conditionnellement à H_j s'écrit

$$f_{X|\mathcal{H}_j}(x|\mathcal{H}_j) = \pi^{-4K-2} |C_j|^{-1} \exp\left(-x^\dagger C_j^{-1} x\right), \quad (2.2.87)$$

avec

$$\begin{cases} C_j = \text{diag}\{C_j[-K], C_j[-K+1], \dots, C_j[K]\} \\ C_j[k] = V_j[k]V_j[k]^\dagger S_{\text{ss}}[k] + C_n[k]. \end{cases} \quad (2.2.88)$$

Pour appliquer la formule de Chernoff au problème, On commence par calculer la fonction $\mu(s)$ associée. On a

$$[f_{X|\mathcal{H}_1}(x|\mathcal{H}_1)]^s [f_{X|\mathcal{H}_0}(x|\mathcal{H}_0)]^{1-s} = \frac{e^{-x^\dagger [sC_1^{-1} + (1-s)C_0^{-1}]x}}{\pi^{4K+2} |C_1|^s |C_0|^{1-s}}. \quad (2.2.89)$$

En intégrant sur \mathbb{C}^{4K+2} on obtient

$$\exp(\mu(s)) = \frac{|[sC_1^{-1} + (1-s)C_0^{-1}]^{-1}|}{|C_1|^s |C_0|^{1-s}}, \quad (2.2.90)$$

puis en prenant le logarithme il vient

$$\mu(s) = -s \ln |C_1| - (1-s) \ln |C_0| - \ln |sC_1^{-1} + (1-s)C_0^{-1}|. \quad (2.2.91)$$

En utilisant la structure bloc-diagonale de C_j , et le fait que pour tout $k \in \{-K, \dots, K\}$

$$|C_1[k]| = |C_0[k]| \quad (2.2.92)$$

ne dépend pas de D_0 ou D_1 (cf équation (2.2.54)), on obtient

$$\mu(s) = - \sum_{k=-K}^K \ln \left[|C_1[k]| \cdot |sC_1^{-1}[k] + (1-s)C_0^{-1}[k]| \right]. \quad (2.2.93)$$

Après quelques calculs on a finalement

$$\mu(s) = - \sum_{k=-K}^K \ln [1 + 4s(1-s)\nu(\Delta, k)], \quad (2.2.94)$$

avec $\Delta \triangleq D_0 - D_1$ et $\nu(\Delta, k) = \text{RSB}[k] \sin^2(\pi k \Delta / T)$. $\mu'(s)$ est déduit en dérivant (2.2.2) par rapport à s , soit

$$\mu'(s) = - \sum_{k=-K}^K \frac{4(1-2s)\nu(\Delta, k)}{1 + 4s(1-s)\nu(\Delta, k)}. \quad (2.2.95)$$

On en déduit que la valeur s_m qui annule μ' est $s_m = 1/2$. Le calcul de μ'' et l'évaluation de l'équation de Chernoff pour les valeurs de $\mu(s_m)$, $\mu'(s_m)$, $\mu''(s_m)$ obtenues donnent finalement

$$\begin{aligned} P_e(\Delta) &= \exp \left(\sum_{k=-K}^K \left[-\ln [1 + \nu(\Delta, k)] + \frac{\nu(\Delta, k)}{1 + \nu(\Delta, k)} \right] \right) \\ &\quad \times \phi \left(\sqrt{\sum_{k=-K}^K \frac{2\nu(\Delta, k)}{1 + \nu(\Delta, k)}} \right). \end{aligned} \quad (2.2.96)$$

Lorsque $BT \gg 1$, on passe au continu sans induire d'erreur significative, d'où le théorème. ■

REMARQUE 2.2.1 Remarquons que P_e ne dépend que de la différence Δ entre les temps de retard D_0 et D_1 . Cette propriété permettra de simplifier la formulation de la borne inférieure de Ziv-Zakai.

C Borne inférieure de Ziv-Zakai

La borne inférieure de Ziv-Zakai est donnée par le théorème suivant [Chazan *et al.*, 1975]

THÉORÈME 2.2.6 inégalité de Ziv-Zakai.

Soit \hat{D} un estimateur quelconque de D et soit $\epsilon \triangleq \hat{D} - D$ l'erreur d'estimation. Si D est a priori uniformément distribué sur un intervalle $I \triangleq [-\frac{D_m}{2}, \frac{D_m}{2}]$, alors pour $BT \gg 1$ On a

$$\mathbb{E}\{|\epsilon|^2\} \geq \frac{1}{D_m} \int_0^{D_m} \Delta (D_m - \Delta) P_e(\Delta) d\Delta,$$

où P_e est donnée au théorème 2.2.5.

PREUVE On considère les deux hypothèses définies en (2.2.81), on pose $D_0 = D_1 + \Delta$. On dispose d'un estimateur \hat{D} de D quelconque, et on s'intéresse au test sous-optimal suivant

$$|\hat{D} - D_1| \underset{D=D_1}{\overset{D=D_1+\Delta}{\geq}} |\hat{D} - D_1 - \Delta|. \quad (2.2.97)$$

Le risque associé à ce test, en supposant que les hypothèses sont équiprobables, s'écrit

$$R = \frac{1}{2} \mathbb{P} \left\{ \hat{D} - D_1 > \Delta/2 | D_1 \right\} + \frac{1}{2} \mathbb{P} \left\{ \hat{D} - D_1 - \Delta \leq -\Delta/2 | D_1 + \Delta \right\}. \quad (2.2.98)$$

Puisque le TRV minimise le risque d'erreur, on a nécessairement

$$R \geq P_e(\Delta), \quad (2.2.99)$$

où P_e est donné par le théorème 2.2.5. Soit $\epsilon \triangleq \hat{D} - D$ l'erreur d'estimation. On a donc

$$\frac{1}{2} \mathbb{P} \{ \epsilon > \Delta/2 | D_1 \} + \frac{1}{2} \mathbb{P} \{ \epsilon \leq -\Delta/2 | D_1 + \Delta \} \geq P_e(\Delta). \quad (2.2.100)$$

On introduit maintenant une hypothèse *a priori* sur D , que l'on suppose uniformément distribué sur un intervalle $I \triangleq [-\frac{D_m}{2}, \frac{D_m}{2}]$. L'inégalité (2.2.100) est valable pour tout couple (D_1, Δ) tel que D_1 et $D_0 = D_1 + \Delta$ appartiennent à I . C'est en particulier vrai pour $\Delta \in [0, D_m]$ et pour $D_1 \in I_\Delta \triangleq [-\frac{D_m}{2}, \frac{D_m}{2} - \Delta]$. D'après la littérature, l'intégration de (2.2.100) par rapport à D_1 sur l'intervalle I_Δ obéit aux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} (D_m - \Delta) P_e(\Delta) &\leq \frac{1}{2} \int_{-\frac{D_m}{2}}^{\frac{D_m}{2} - \Delta} \mathbb{P} \{ \epsilon > \Delta/2 | D_1 \} dD_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-\frac{D_m}{2} + \Delta}^{\frac{D_m}{2}} \mathbb{P} \{ \epsilon \leq -\Delta/2 | D_1 \} dD_1 \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{-\frac{D_m}{2}}^{\frac{D_m}{2}} \mathbb{P} \{ |\epsilon| \geq \Delta/2 | D_1 \} dD_1. \end{aligned} \quad (2.2.101)$$

Définissons maintenant

$$F(x) = \frac{1}{D_m} \int_{-\frac{D_m}{2}}^{\frac{D_m}{2}} \mathbb{P} \{ |\epsilon| \geq x | D_1 \} dD_1, \quad (2.2.102)$$

qui n'est autre que la probabilité *a posteriori* $\mathbb{P}\{|\epsilon| \geq x\}$ lorsque D_1 est uniformément distribué sur I . On a donc

$$(D_m - \Delta) P_e(\Delta) \leq \frac{D_m}{2} F(\Delta/2) \quad (2.2.103)$$

En multipliant par $2\Delta/D_m$ et en intégrant par rapport à Δ sur $[0, D_m]$ on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{2}{D_m} \int_0^{D_m} \Delta (D_m - \Delta) P_e(\Delta) d\Delta &\leq \int_0^{D_m} \Delta F(\Delta/2) d\Delta \\
&= 4 \int_0^{\frac{D_m}{2}} x F(x) dx \\
&\leq 4 \int_0^{D_m} x F(x) dx \\
&= [2x^2 F(x)]_0^{D_m} - 2 \int_0^{D_m} x^2 dF(x)
\end{aligned} \tag{2.2.104}$$

Remarquons que $dF(x) = -f_{|\epsilon|}(x)dx$, où $f_{|\epsilon|}$, la **ddp** de la VA $|\epsilon|$, a pour support $[0, D_m]$ si l'estimateur \hat{D} est construit de façon à produire des valeurs dans I . Il en découle que

$$-\int_0^{D_m} x^2 dF(x) = \mathbb{E}\{|\epsilon|^2\}. \tag{2.2.105}$$

De plus, si \hat{D} donne des valeurs dans I , $F(D_m) = \mathbb{P}\{|\epsilon| \geq D_m\} = 0$, ce qui conduit au théorème. ■

D Borne inférieure de Ziv-Zakai pour les signaux faible bande

La référence [Weiss et Weinstein, 1983] donne une expression analytique de la borne inférieure de Ziv-Zakai associée au problème d'ETR à partir des théorèmes 2.2.5 et 2.2.6 lorsque le signal est de type faible bande

$$\frac{S_{ss}(f)}{S_{n_j n_j}(f)} = \begin{cases} \text{cste} & \text{sur } [f_0 - \frac{B}{2}, f_0 + \frac{B}{2}] \cup [-f_0 - \frac{B}{2}, -f_0 + \frac{B}{2}] \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases} \tag{2.2.106}$$

où f_0 et B sont définis respectivement comme la fréquence centrale et la largeur de bande du signal, avec $B \ll f_0$. Ainsi, le **RSB** tel que défini à l'équation (2.2.65) est constant sur toute la bande passante des signaux. Au terme de calculs fastidieux, moyennant quelques approximations judicieuses, les auteurs arrivent à délimiter quatre zones distinctes du domaine du **RSB**, correspondant à quatre modes de fonctionnement différents de l'estimateur :

- Pour des valeurs de **RSB** inférieures à un seuil RSB_1 , l'estimation est dominée par le bruit, et l'EQM, indépendante du **RSB** sur ce domaine, n'est bornée que par la connaissance *a priori* que l'on a sur le temps de retard. Dans ce mode de fonctionnement, \hat{D} est uniformément distribué sur I .
- Pour des valeurs de **RSB** telles que $\text{RSB}_1 < \text{RSB} < \text{RSB}_2$, l'estimation présente un problème d'ambiguïté. Lorsque $B/f_0 \ll 1$, l'autocorrélation des signaux $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ est fortement oscillatoire : elle possède de nombreux maxima locaux très rapprochés (pseudo-période $1/f_0$) et d'amplitudes sensiblement égales. En présence de bruit, même faible, la sélection du «bon» maximum local est entachée d'erreur. Dans ce mode de fonctionnement, la borne inférieure de Ziv-Zakai en dB décroît linéairement avec le **RSB** en échelle logarithmique, avec une pente à $-20\text{dB}/\text{decade}$. La borne inférieure de Ziv-Zakai dans cette région coïncide avec la borne inférieure de Barankin, donnée dans [Chow et Schultheiss, 1981].
- Au delà d'un seuil RSB_3 , le bruit est suffisamment faible pour que le problème d'ambiguïté soit résolu. La borne inférieure de Ziv-Zakai coïncide alors avec la borne inférieure de Cramér-Rao. Dans ce mode de fonctionnement, la **ddp** de \hat{D} approche une loi normale centrée sur D .
- Entre RSB_2 et RSB_3 existe une zone de transition où il n'y a pas de formule analytique simple de la borne inférieure de Ziv-Zakai. Cette zone est généralement étroite et la borne inférieure de Ziv-Zakai y décroît fortement à mesure que le **RSB** augmente.

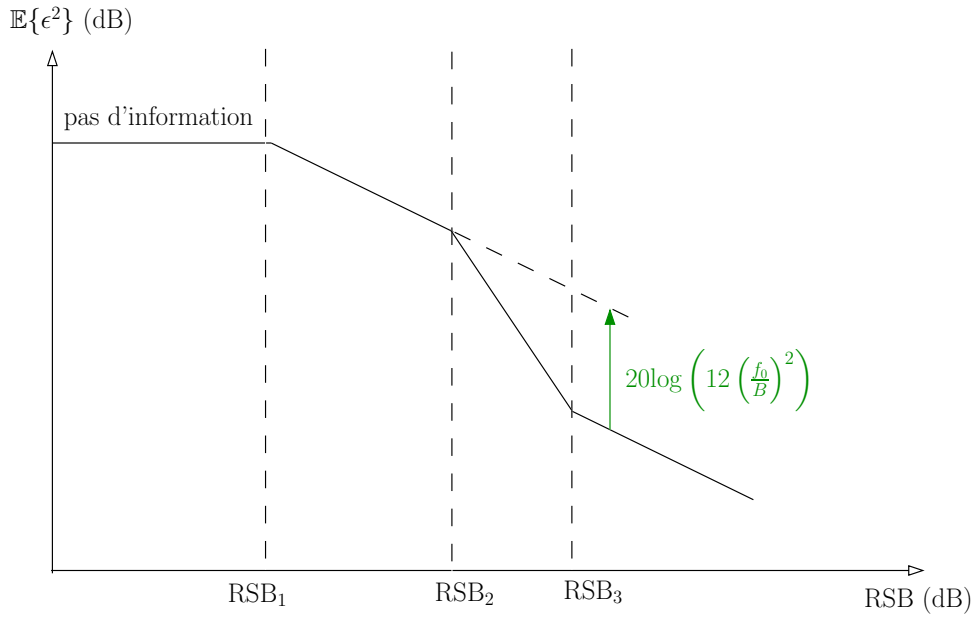


FIGURE 2.3: borne inférieure de Ziv-Zakai pour des signaux faible bande.

$$\mathbb{E}\{|\epsilon|^2\} \geq \begin{cases} \frac{D_m^2}{12} & \text{si } \text{RSB} \leq \text{RSB}_1 \\ \frac{K}{B^3 T \cdot \text{RSB}} & \text{si } \text{RSB}_1 < \text{RSB} \leq \text{RSB}_2 \\ \text{seuil} & \text{si } \text{RSB}_2 < \text{RSB} \leq \text{RSB}_3 \\ \frac{K'}{B T f_0^2 \cdot \text{RSB}} & \text{si } \text{RSB}_3 < \text{RSB} \end{cases} \quad (2.2.107)$$

$$\text{avec } \text{RSB}_1 \propto \left(\frac{f_0}{B}\right)^2 \frac{1}{(f_0 D_m)^2} \frac{1}{B T}, \quad \text{RSB}_2 \propto \frac{1}{B T} \left(\frac{f_0}{B}\right)^2, \quad \text{RSB}_3 \propto \frac{1}{B T} \left(\frac{f_0}{B}\right)^2 \left[\text{erf}^{-1}\left(\frac{B^2}{24 f_0^2}\right)\right]^2.$$

Les **RSB** dépendent donc de la largeur de bande B des signaux, de leur fréquence centrale f_0 et de la durée d'observation T . Pour une largeur de bande et une durée d'observation données, la levée de l'ambiguïté de phase d'un signal haute fréquence (f_0 élevé) nécessite donc un **RSB** plus important. Des études en simulation concrétiseront ces considérations théoriques au chapitre chap-azimut.

2.3 DISCUSSION

Les méthodes d'estimation de temps de retard présentées—corrélation croisée généralisée et méthodes de régression linéaire sur la phase—reposent sur un modèle de propagation en champ libre, et supposent par conséquent un déphasage linéaire en fréquence entre les microphones. D'autres méthodes tiennent explicitement compte des réverbérations. Il en est ainsi de la méthode de décomposition adaptative en valeurs propres [Benesty, 2000].

Comme on peut s'en douter, la performance des méthodes basées sur un modèle champ libre décroît très fortement en présence de réverbération. D'après [Champagne *et al.*, 1996] et [Gustafsson *et al.*, 2003], le phénomène de réverbération se manifeste au niveau des statistiques de

l'estimateur du temps de retard par l'apparition d'estimées aberrantes¹⁹, dont le taux d'apparition est d'autant plus grand que le temps de réverbération de la pièce est grand. Les méthodes basées sur une décomposition adaptative en valeurs propres, elles, s'affranchissent du modèle de propagation en champ libre et reposent sur l'estimation—sans apprentissage ni modèle *a priori*—des réponses impulsionnelles liées à la salle (*Room Related Impulse Response* (RRIR)) des deux microphones. On peut cependant noter plusieurs difficultés inhérentes à ces méthodes. Premièrement, ce sont des méthodes itératives (*e.g.* méthode du gradient) qui reposent sur une initialisation des estimés des RRIR et nécessitent de fixer des paramètres de réglage. Ces quantités conditionnent fortement la convergence vers les «vraies» RRIR (minima locaux du critère à optimiser, etc.). En second lieu, ce sont des méthodes bien plus coûteuses en temps de calcul. De plus, du fait qu'on cherche à estimer des RRIR plutôt qu'une réponse impulsionnelle «relative» entre les microphones, le temps d'autocorrélation des réponses à estimer est beaucoup plus long. Ceci implique d'estimer les autocorrélations des signaux sur des durées encore plus longues (§2.1.2). La question est donc : est-ce possible en robotique, en présence de mouvement et de variations rapides de RRIR ? De plus, les RRIR des deux microphones ne doivent pas avoir de zéros communs, ce qui est difficile à vérifier dans la réalité. Enfin, il faut se fixer *a priori* le temps d'autocorrélation (en gros la longueur) des RRIR, que l'on ne connaît pas en pratique (qui dépend du RT60 etc.).

À l'heure actuelle, nous préférons exploiter des méthodes supposant une propagation en champ libre, qui peuvent générer des outliers du fait des réverbérations. L'objectif est donc de les éliminer dans la stratégie de filtrage stochastique. Nous n'excluons toutefois pas qu'une étude plus approfondie des méthodes de décomposition adaptative en valeurs propres nous amène à revisiter notre position.

On peut aussi discuter du choix à retenir parmi les méthodes supposant une propagation en champ libre. Celles-ci peuvent être séparées en deux sous-catégories : celles basées sur la corrélation croisée généralisée et celles basées sur la minimisation d'une erreur sur la phase. Sur le plan théorique, ces deux méthodes sont relativement similaires. La méthode des moindres carrés sur la phase est analogue à la corrélation croisée généralisée avec le processeur PhaT, tandis que la méthode des moindres carrés pondérés est similaire à la corrélation croisée généralisée avec le processeur HT. D'un point de vue pratique, on peut cependant noter des différences. Avec la corrélation croisée généralisée, on n'a pas d'expression analytique de \hat{D} , il faut calculer la corrélation croisée généralisée en toutes ses valeurs possibles sur l'intervalle $[-D_m, D_m]$ puis sélectionner l'argument pour lequel elle est maximale. En pratique, la corrélation croisée généralisée est calculée au moyen de Transformées de Fourier Rapides²⁰ avant et arrière sur les signaux perçus échantillonnés, ce qui est relativement peu coûteux en temps de calcul. Cependant le retard physique vrai prend ses valeurs dans l'intervalle continu $[-D_m, D_m]$, ce qui veut dire que les retards vrais non multiples entiers de la période d'échantillonnage ne sont pas atteignables, et qu'on ne peut atteindre que la valeur multiple entier de temps de retard la plus proche. Pour des signaux échantillonnés à 44.1kHz, un espacement de 16cm entre les microphones et une célérité du son 344m/s, l'erreur en terme d'azimut dans le pire cas (azimut à plus ou moins 90°) atteint 18° (et 3° dans le cas le plus favorable, azimut 0°). En général on interpole donc la corrélation croisée généralisée discrète (interpolation en sinus cardinal par exemple) ce qui est un processus assez coûteux. Il existe des méthodes peu coûteuses d'interpolation (*e.g.* interpolation parabolique), mais celles-ci induisent un biais important sur l'estimé. *A contrario*, les méthodes basées sur la phase donnent directement l'expression du temps de retard qui minimise le critère considéré, du fait que le problème est linéaire. Il n'est donc pas requis d'évaluer un critère en une multitude de valeurs, ce qui épargne du temps de calcul. Par contre il faut disposer d'un algorithme pour «dérouler» la phase. Notons enfin qu'en robotique, la quasi-totalité des contributions repose sur la corrélation croisée généralisée.

19. ou *outliers*.

20. *Fast Fourier Transform-FFT*

Concernant le choix du processeur d'une corrélation croisée généralisée, PhaT et HT sont presque exclusivement employés en robotique, avec une nette prédominance pour PhaT. Mais il est reconnu que PhaT, qui présente la résolution temporelle la plus élevée, est aussi le processeur qui manque le plus de stabilité pour des durées d'observation courtes. En outre, PhaT ne fonctionne pas convenablement pour des signaux faible bande. Pour des signaux tels que de la voix, dont l'énergie se répartit sur des harmoniques de fréquence bien identifiées, nous préférons exploiter HT, car pour un $\text{RSB}/\text{produit temps-largeur de bande}$ suffisant, on peut en outre considérer que l'erreur d'estimation est gaussienne centrée, ce qui nous permet de poser un modèle statistique simple et standard pour le bruit d'observation dans l'algorithme aval de filtrage. Concernant les réverbérations, certaines contributions affirment rendre la corrélation croisée généralisée plus robuste aux réverbérations, tel le processeur *Reliability-Weighted PHase Transform-RWPHAT* de [Valin *et al.*, 2006]. Ces méthodes sont empiriques, et, à notre connaissance, aucun argument théorique ou expérimental à large échelle ne permet leur justification. Enfin, tous les processeurs mentionnés ci-dessus supposent que les bruits en les récepteurs sont indépendants. Bien que cette hypothèse soit presque sûrement mise en défaut en pratique, la corrélation croisée généralisée-PhaT est généralement sélectionnée faute de mieux. La contribution que nous développerons au chapitre 3 permettra toutefois d'incorporer une connaissance *a priori* sur les statistiques conjointes de ces bruits.

Estimation court terme d'azimut, détection d'activité

Les méthodes proposées dans le chapitre précédent reposent sur l'hypothèse que l'onde acoustique émise par la source se propage en champ libre. Dans le contexte de l'audition binaurale en robotique humanoïde, les microphones sont généralement placés sur une tête factice, éventuellement à l'intérieur de pavillons artificiels. Dans ce contexte, du fait de la diffusion de l'onde incidente par la tête et le torse du robot, l'hypothèse champ libre préalablement formulée n'est plus valable. Ainsi, nous proposons dans la première section de ce chapitre de nous focaliser sur la modélisation de cette diffusion. Après un aperçu des méthodes existantes les plus répandues en robotique, une méthode originale d'estimation de paramètres spatiaux par maximum de vraisemblance est proposée. Cette contribution est évaluée à la fois en simulation et en environnement réel contrôlé, et permet de mettre en évidence le rôle que peut avoir un élément diffusant en comparaison à une paire de microphones en champ libre. Une méthode originale de détection instantanée de l'activité de la source sonore constitue une seconde section. Cette contribution sera utile afin d'affecter un degré de confiance aux observations qui seront assimilées dans le filtre proposé au chapitre suivante.

3.1 DIFFUSION DE L'ONDE INCIDENTE PAR UNE TÊTE, ESTIMATION D'AZIMUT

Comme évoqué précédemment, nous supposons donc que l'hypothèse de champ libre n'est plus valable de par la présence d'éléments diffusants autour des microphones. En d'autres termes, le «temps de retard» n'est plus suffisant pour caractériser la propagation vers le capteur binaural. En toute rigueur, la notion même de temps de retard doit être redéfinie, puisque ledit temps de retard dépend de la fréquence de l'onde émise (*i.e.* le déphasage entre les deux microphones n'est plus linéaire par rapport à la fréquence). On parle alors de temps de propagation de groupe ou de phase¹. En outre, la présence de la tête induit une différence en amplitude entre les deux microphones, qui peut varier de manière significative avec la fréquence et la direction de la source, même lorsque celle-ci se trouve en champ lointain. Si on applique l'une des méthodes décrites dans la section précédente sur une bande de fréquence, disons centrée sur f_0 , suffisamment étroite (soit en n'intégrant que sur cette bande, soit en pré-filtrant les signaux par un filtre à bande étroite de fréquence centrale f_0) pour que le temps de propagation de groupe ou de phase et le gain entre les signaux gauche et droite varient peu sur cette bande, alors on estime en fait le temps de propagation de groupe en la fréquence f_0 [Hannan et Thomson, 1973]. En revanche,

1. Si $\varphi(f)$ désigne le déphasage d'un filtre en la fréquence f , alors les temps de propagation de groupe et de phase sont définis respectivement par $\tau_g(f) \triangleq -\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(f)}{df}$ et $\tau_p(f) \triangleq -\frac{\varphi(f)}{2\pi f}$ respectivement.

lorsqu'on applique la méthode sur toute la gamme de fréquences couverte par des signaux large bande, on peut se questionner sur la nature physique du résultat de l'estimation.

En robotique, la localisation binaurale repose généralement sur des indices extraits à partir des signaux gauche et droite sur une fenêtre temporelle de durée finie. On peut citer par exemple les indices binauraux : **ITD** ou **IPD** et **ILD**. Le problème consiste alors à retrouver tout ou partie des coordonnées de la source dans un repère rigidement lié à la tête à partir des indices extraits. Ceci nécessite une connaissance *a priori* de la propagation/diffusion de l'onde acoustique, qui peut être donnée par un modèle analytique simplifié ou par un apprentissage à partir de données expérimentales.

Pour l'estimation d'azimut, le premier modèle simplifié proposé en robotique fut le modèle AEG [Nakadai *et al.*, 2000] (*Auditory Epipolar Geometry*). Celui-ci exprime l'**IPD** en fonction de la fréquence et de l'azimut d'une source en champ lointain en négligeant totalement l'effet de la tête sur l'onde incidente. Ce modèle très simple fut ensuite quelque peu affiné par le modèle RAEG [Nakadai *et al.*, 2002] (*Revised Auditory Epipolar Geometry*), donnant une expression de l'**IPD** basée sur la formule de Woodworth-Schlosberg [Woodworth et Schlosberg, 1971]. Un troisième modèle analytique plus complet, proposé dans [Nakadai *et al.*, 2003a], repose sur la solution analytique de l'équation d'onde lorsqu'une sphère totalement rigide diffracte une onde incidente plane [Rayleigh, 1894] (*Scattering Theory*). Comme on peut s'y attendre, le modèle haute fréquence (*i.e.* lorsque l'onde incidente a une longueur plus courte que le demi-périmètre de la sphère) de l'**IPD** déduit de cette solution correspond au modèle RAEG.

Les notions d'**IPD** et d'**ILD** sont étroitement liées aux notions de **HRTF** et d'*Interaural Transfer Function* (**ITF**). La **HRTF** en la position d'un microphone représente la fonction de transfert entre le signal perçu par ledit microphone et le signal perçu un point de référence, qu'on prend généralement comme le point milieu de la tête si la tête était absente. L'**ITF** est le rapport entre les **HRTF** gauche et droite, de sorte que l'**IPD** et l'**ILD** sont par définition sa phase et son amplitude. Les **HRTF** expérimentales encapsulent naturellement les effets de la tête et du torse du robot. Il convient de noter qu'elles dépendent très fortement de l'environnement dans lequel les mesures sont réalisées.

3.1.1 Localisation binaurale par estimation conjointe d'**ILD** et d'**ITD** et pré-tabulation d'**ITF**

Dans [Raspaud *et al.*, 2010], une procédure d'estimation d'azimut est proposée pour un système d'acquisition binaural monté sur une tête anthropomorphe et une source située dans le plan azimutal de la tête. La correspondance

$$(f, \vartheta) \mapsto \text{ITF}(f, \vartheta), \quad (3.1.1)$$

où $\text{ITF}(f, \vartheta)$ désigne l'**ITF** des microphones pour une source provenant d'un azimut ϑ et émettant un signal sinusoïdal de fréquence f , est apprise hors ligne pour un ensemble discret d'azimuts et de fréquences. En ligne, les **ILD** et **ITD** (désignant ici le temps de propagation de phase entre les microphones) sont estimés en chaque bande de fréquence sur la base de transformées de Fourier court-terme des signaux observés sur une courte durée. Un estimé *distinct* de l'azimut est formé à partir des **ILD** et **ITD** calculés *sur chaque bande de fréquence* et des **ITF** pré-tabulées. Du fait qu'on cherche à estimer l'azimut sur une bande de fréquences étroite, une estimation à partir de l'**ITD** seule mène invariablement au problème d'ambiguïté de phase aux moyennes et hautes fréquences. En effet, même si l'**ITD** vraie (déduite de l'**IPD** vraie «déroulée») est monotone par rapport à l'azimut quelle que soit la fréquence considérée, en pratique on est confronté au fait qu'à une valeur d'**ITD** mesurée correspondent plusieurs valeurs admissibles d'azimuts dans la table de correspondance pré-tabulée (du moins aux fréquences moyennes et hautes), *i.e.* l'erreur

quadratique

$$|\text{ITD}_{\text{th}}(f, \vartheta) - \text{ITD}_{\text{mes}}(f)|^2 \quad (3.1.2)$$

admet une valeur faible pour plusieurs valeurs de ϑ . D'autre part, estimer l'azimut à partir de l'ILD seule pose aussi problème, du fait que l'ILD vraie n'est pas une fonction monotone de l'azimut. L'idée proposée par les auteurs consiste à utiliser, en chaque bande de fréquences, l'information portée par l'ILD pour lever l'ambiguïté sur l'ITD. Plus précisément, pour chaque bande de fréquences, un premier estimé grossier de l'azimut—noté $\hat{\vartheta}_{\text{ILD}}(f)$ —est formé à partir de l'ILD. Du fait que l'ILD «vraie» n'est pas toujours une fonction monotone de l'azimut, il se peut qu'en certaines bandes de fréquences, plusieurs valeurs d'azimuts soient admissibles. Dans ce cas l'azimut le plus proche de zéro est sélectionné. Ensuite, parmi les valeurs de ϑ admissibles vis-à-vis de l'ITD, celle qui est la plus proche de $\hat{\vartheta}_{\text{ILD}}(f)$ est choisie. Finalement, un histogramme est construit à partir des azimuts estimés sur chaque bande de fréquence *via* la procédure décrite précédemment, et un estimé « global » de l'azimut est formé par exemple en sélectionnant la valeur d'azimut la plus fréquente dans l'histogramme.

Bien que l'idée d'exploiter conjointement l'ILD et l'ITD en présence d'une tête semble pertinente, la méthode proposée est critiquable sur plusieurs aspects. Premièrement, l'information contenue dans l'ILD n'est pas pleinement exploitée, dans le sens où elle est utilisée uniquement dans le but de lever l'ambiguïté sur l'ITD de manière relativement *ad hoc*. En second lieu, l'approche repose sur un estimateur distinct d'azimut par bande de fréquences. Il nous semble plus pertinent de construire un estimateur «global» d'azimut par maximisation d'un critère intégrant les contributions de toutes les fréquences. Avec l'approche par histogramme proposée, la même importance est accordée à toutes les bandes de fréquences, indépendamment des valeurs du RSB sur celles-ci. En particulier, si le signal émis est faible bande, les azimuts estimés sur les bandes de fréquences où il est absent sont faux (outliers) et dégradent fortement la performance de l'estimateur global.

3.1.2 Localisation binaurale par identification de signatures dans le plan ILD-IPD

Dans [Handzel et Krishnaprasad, 2002], une stratégie de localisation de source dans le plan azimutal d'une tête sphérique est présentée. Les auteurs proposent de représenter l'ITF par un ensemble de «signatures» dans le plan ILD-IPD. Selon leur approche, à un azimut donné correspond une courbe dans le plan ILD-IPD—ou «signature»—paramétrée par la fréquence. Les «signatures» des azimuts qui sont testés dans la procédure de localisation sont connues *a priori*. Dans l'article, elles sont déduites d'une expression analytique du transfert entre les microphones, disponible du fait qu'une tête sphérique est considérée (sans prise en compte explicite des réverbérations). Ceci n'induit toutefois pas de perte de généralité, car la méthode peut tout aussi bien être appliquée à une tête quelconque dont l'ITF est apprise expérimentalement. En ligne, la localisation repose sur l'extraction de signature (*i.e.* la construction d'un vecteur concaténant les ILD et IPD extraits sur chaque bande de fréquence) à partir des données observées sur des fenêtres court-terme, et à sélectionner parmi les signatures apprises hors-ligne celle ayant la plus petite distance à la signature extraite en ligne. La distance entre deux signatures est basée sur la norme euclidienne quadratique, et s'exprime par

$$D(\vartheta) = \sum_f [(\text{ILD}_{\text{th}}(f, \vartheta) - \text{ILD}_{\text{mes}}(f))^2 + (\text{DIP}_{\text{th}}(f, \vartheta) - \text{DIP}_{\text{mes}}(f))^2]. \quad (3.1.3)$$

Cette distance est donc la somme de deux métriques, l'une relative à l'ILD, l'autre à l'IPD. Ces métriques sont préalablement normalisées, du fait que l'IPD et l'ILD n'ont pas la même dimension physique.

La méthode proposée ici se veut en quelque sorte la généralisation de la méthode par moindres carrés dans le cas d'une propagation en champ libre §2.2.4. La différence est que l'ITD n'est plus linéaire par rapport à la fréquence (de par la présence de la tête) et que l'ILD est intégrée au critère quadratique. Il ne s'agit donc plus d'une régression linéaire sur le déphasage des signaux. En particulier, il n'y a pas ici d'expression analytique de la valeur de ϑ minimisant (3.1.3), et le critère doit être évalué numériquement pour toutes les valeurs disponibles d'azimut.

Pour lever l'ambiguïté avant-arrière qui se présente lors d'un placement antipodal des microphones sur la sphère, les auteurs, dans cette même référence, proposent d'exploiter les dérivées des indices binauraux (indices binauraux dynamiques) par rapport à l'azimut lors d'une rotation azimutale infinitésimale de la sphère. La métrique construite en intégrant les indices binauraux dynamiques, combinée à de petits mouvements de rotation de la sphère, permet alors de lever cette ambiguïté.

Si l'estimation d'azimut semble ici plus pertinente que dans [Raspaud *et al.*, 2010] (notamment dans la façon dont l'information portée par l'ILD est intégrée dans la procédure d'estimation), le problème des indices binauraux «aberrants» (outliers) observés aux fréquences où le RSB est faible demeure.

3.1.3 Méthode par maximum de vraisemblance

Dans cette partie, plusieurs estimateurs d'azimut par maximum de vraisemblance sont présentés. Ceux-ci diffèrent par les hypothèses faites sur la nature—déterministe ou aléatoire gaussienne—du signal émis et par les informations *a priori* sur les bruits. Ces estimateurs sont issus de la littérature en traitement d'antenne datant du début des années 90 [Jaffer, 1988], [Doron *et al.*, 1993]. Si dans ces deux références une antenne de microphones en champ libre est considérée, les développements théoriques qui y sont présentés ne reposent pas sur une expression particulière du vecteur d'antenne (contrairement à [Knapp et Carter, 1976] par exemple). Aussi ces méthodes peuvent-elles s'appliquer au cas de deux microphones sur une tête dont l'ITF est connue (*e.g.* apprise expérimentalement). Assez curieusement, ces méthodes ne semblent pas, à notre connaissance, être exploitées dans les travaux récents en localisation binaurale. Nous présentons ici ces méthodes, en détaillant précisément les démonstrations des divers résultats, les hypothèses sous-jacentes, et en établissant des connexions étroites avec les discussions du chapitre 2. Ceci constitue l'une des contributions de la thèse.

On considère le modèle général (2.2.1), sans nécessairement disposer d'une expression explicite de h_ϑ . On suppose que H_ϑ (*i.e.* l'ITF des microphones) est connu et prétabulé pour un ensemble discret de valeurs de ϑ . Deux types d'hypothèses *a priori* sur la nature des signaux sont formulées. Dans le premier modèle, on considère que $\mathbf{s}(t)$, $\mathbf{n}_1(t)$ et $\mathbf{n}_2(t)$ sont aléatoires SSL réels centrés gaussiens dans leur ensemble. Dans le second modèle, seuls les bruits sont aléatoires centrés gaussiens, tandis que le signal de la source est supposé déterministe mais inconnu.

A Hypothèse d'une source aléatoire gaussienne

On considère ici que $\mathbf{s}(t)$, $\mathbf{n}_1(t)$, et $\mathbf{n}_2(t)$ (et par conséquent \mathbf{z}_1 et \mathbf{z}_2) sont aléatoires SSL réels gaussiens dans leur ensemble. On se base donc sur le système d'équations (2.2.4) pour la représentation spectrale des signaux $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$.

A-1 Construction du vecteur de données et définition du modèle d'observation On considère un intervalle d'observation $I_T \triangleq [0, T]$ et on définit une fenêtre $w(t)$ symétrique sur son support $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ avec $L \leq T$, de transformée de Fourier $W(f) \triangleq \mathcal{F}\{w(t)\}$ et d'autocorrélation $R_{ww}(\tau) \triangleq (w * w)(-\tau)$. On construit N fenêtres temporelles de même longueur L par décalage temporel de $w(t)$: pour $n \in \{1, \dots, N\}$, on définit $w_n(t) = w(t - \tau_n)$, avec $\tau_n = \frac{L}{2} + (n - 1)S$

et $S \leq L$ le décalage temporel entre deux fenêtres successives. $W_n(f)$ désigne la transformée de Fourier de $w_n(t)$. Pour $j \in \{1, 2\}$ et $n \in \{1, \dots, N\}$, on calcule la transformée de Fourier de $\mathbf{z}_j(t)$ fenêtré par $w_n(t)$

$$\mathbf{Z}_{j,n}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{z}_j(t) w_n(t) e^{-2i\pi f t} dt. \quad (3.1.4)$$

Pour une fonction des fréquences $\phi(\cdot)$ scalaire ou vectorielle continue, on note désormais $\phi[k] \triangleq \phi(k f_L)$ avec $f_L \triangleq 1/L$ et $k \in \mathbb{Z}$. On définit le vecteur de données \mathbf{Z} comme la concaténation par cannaux-trames-fréquences des $\mathbf{Z}_{j,n}[k]$

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{Z}[k_1]', \mathbf{Z}[k_2]', \dots, \mathbf{Z}[k_B]']', \quad (3.1.5)$$

avec, pour $k \in \{k_1, \dots, k_B\}$, $n \in \{1, \dots, N\}$,

$$\mathbf{Z}[k] = [\mathbf{Z}_1[k]', \mathbf{Z}_2[k]', \dots, \mathbf{Z}_N[k]']' \quad (3.1.6)$$

et $\mathbf{Z}_n[k] = [\mathbf{Z}_{1,n}[k], \mathbf{Z}_{2,n}[k]]'$. Le théorème suivant permet d'établir la **ddp** de \mathbf{Z} sous certaines hypothèses.

THÉORÈME 3.1.1 ddp conjointe des coefficients de Fourier court terme.

Si les conditions suivantes sont vérifiées

1. $R_{ww}(0) = 1$, $R_{ww}(S) \ll 1$,
2. $B_{ss} T_w \gg 1$, $B_{n_1 n_2} T_w \gg 1$, $B_{n_1 n_1} T_w \gg 1$, $B_{n_2 n_2} T_w \gg 1$,
3. $|H_\vartheta(f)|^2$ varie peu sur tout intervalle de longueur B_w ,
4. $\max_f |\tau_\vartheta(f)| \ll T_w$, avec $\tau_\vartheta(f)$ le temps de propagation de groupe de h_ϑ ,

alors la **ddp** $p_{\mathbf{Z}}$ de \mathbf{Z} s'écrit approximativement

$$p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; C_{\mathbf{z}}[k_1], \dots, C_{\mathbf{z}}[k_B]) \approx \prod_{n,k} \mathcal{CN}(Z_n[k]; 0, C_{\mathbf{z}}[k]), \quad (3.1.7)$$

où $\mathcal{CN}(\cdot; m, P)$ est la loi normale multivariable complexe circulaire de moyenne m et de matrice de covariance P , et Z (resp. $Z_n[k]$) désigne une réalisation de \mathbf{Z} (resp. $\mathbf{Z}_n[k]$).

PREUVE Par application du théorème 2.1.5 on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_{j,n}(f_1) \mathbf{Z}_{\ell,m}^*(f_2)\} = \\ \int_{\mathbb{R}} S_{\mathbf{z}_j \mathbf{z}_\ell}(f_2 - \nu) W(f_1 - f_2 + \nu) W(\nu) e^{-2i\pi\nu(\tau_n - \tau_m)} d\nu e^{-2i\pi(f_1 - f_2)\tau_n}. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Lorsque $B_{\mathbf{z}_j \mathbf{z}_\ell} T_w \gg 1$ (les conditions suffisantes pour satisfaire ces hypothèses sont les conditions 2 à 4 du théorème. Elles constituent une généralisation des conditions données dans [Macdonald et Schultheiss, 1969] dans le cas champ libre, déduite à partir du système (2.2.4), l'équation précédente devient

$$\mathbb{E}\{\mathbf{Z}_{j,n}(f_1) \mathbf{Z}_{\ell,m}^*(f_2)\} = S_{\mathbf{z}_j \mathbf{z}_\ell}(f_2) \overline{W}_{n-m}(f_1 - f_2) e^{-2i\pi(f_1 - f_2)\tau_n} \quad (3.1.9)$$

avec

$$\overline{W}_p(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} W(f + \nu) W(\nu) e^{-2i\pi\nu p S} d\nu. \quad (3.1.10)$$

Dans le cas particulier où les fenêtres ont des supports disjoints ($S = L$), on remarque que pour $n \neq m$, $\overline{W}_{n-m}(f) = 0$ quel que soit f , du fait que $\overline{W}_p(f)$ peut s'écrire

$$\overline{W}_p(f) = \mathcal{F}\{w(t)w(t - pS)\}. \quad (3.1.11)$$

Prenons maintenant le cas où $m = n$. Si $w(t)$ est une fenêtre rectangulaire, normalisée de sorte que $R_{ww}(0) = 1$, alors

$$\overline{W}_0(f_1 - f_2) = \frac{\sin(\pi(f_1 - f_2)L)}{\pi(f_1 - f_2)L}, \quad (3.1.12)$$

soit, en les f_1, f_2 multiples entiers de f_L ,

$$\overline{W}_0[k_1 - k_2] = \text{sinc}(k_1 - k_2), \quad (3.1.13)$$

ce qui donne finalement

$$\mathbb{E}\{Z_{j,n}[k_1]Z_{\ell,m}^*[k_2]\} = \begin{cases} S_{z_j z_\ell}[k_2] & \text{si } k_1 = k_2 \text{ et } m = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.1.14)$$

Dans le cas général où les supports des fenêtres ne sont pas nécessairement disjoints, on peut d'abord constater que $Z_{j,n}(f_1)$ et $Z_{\ell,m}(f_2)$ sont à peu près décorrésés si $|f_1 - f_2| \gg B_w$. En effet sous cette hypothèse $W(f_1 - f_2 + \nu)W(\nu)$ est à peu près identiquement nul, ce qui implique que $\overline{W}_{n-m}(f_1 - f_2) = 0$. Si L est suffisamment grand, on fait l'approximation que quels que soient m et n , $\mathbb{E}\{Z_{j,n}[k_1]Z_{\ell,m}^*[k_2]\} = 0$ pour $k_1 \neq k_2$. Dans le cas où $f_1 = f_2 = f$, on a

$$\mathbb{E}\{Z_{j,n}(f)Z_{\ell,m}^*(f)\} = S_{z_j z_\ell}(f)R_{ww}([m - n]S). \quad (3.1.15)$$

On voit clairement à travers (3.1.15) que le fait d'utiliser des fenêtres en recouvrement partiel («overlappées») introduit une corrélation entre des variables calculées sur des trames différentes. Cependant, si l'énergie de $w(t)$ est principalement concentrée autour de zéro, $R_{ww}([m - n]S)$ peut devenir, pour $m \neq n$, suffisamment faible pour être négligé (c'est la condition 1 du théorème). À titre d'exemple, pour $|m - n| = 1$ et $S = L/2$ (taux de recouvrement de 50%), $R_{ww}(L/2)$ vaut $0.5R_{ww}(0)$ pour une fenêtre rectangulaire, mais vaut seulement $0.15R_{ww}(0)$ pour une fenêtre de Hann. Avec un choix judicieux du taux de recouvrement et du type de fenêtre, on peut donc retrouver l'équation (3.1.14), moyennant quelques approximations supplémentaires par rapport au cas rectangulaire disjoint.

On a donc, sous les hypothèses précédentes,

$$C_{Z[k]} = \text{blockdiag}\{\underbrace{C_Z[k], C_Z[k], \dots, C_Z[k]}_{N \text{ fois}}\} \text{ pour } k \in \{k_1, \dots, k_B\} \text{ et} \\ C_Z = \text{blockdiag}\{C_{Z[k_1]}, C_{Z[k_2]}, \dots, C_{Z[k_B]}\}. \quad (3.1.16)$$

Du fait que des vecteurs aléatoires gaussiens décorrésés sont mutuellement indépendants, on obtient le théorème. ■

A-2 Estimation des paramètres spatiaux et spectraux du problème On rappelle que par hypothèse, les bruits $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ ne sont pas corrélés avec \mathbf{s} . Dans un premier temps, on considère que $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ ne sont pas mutuellement corrélés et sont identiquement distribués (ils sont donc indépendants et identiquement distribués (iid) car gaussiens). La DSP de \mathbf{n}_1 (supposée égale à celle de \mathbf{n}_2) est notée $\sigma^2(f)$. Dans ce cas de figure, la matrice C_Z , définie en (2.2.5), a pour expression

$$C_Z[k] = V_\vartheta[k]S_{ss}[k]V_\vartheta[k]^\dagger + \sigma^2[k]\mathbb{I}_2. \quad (3.1.17)$$

Sur la base du modèle statistique donné au théorème 3.1.1, le but est de sélectionner la valeur la plus vraisemblable de ϑ étant donné un échantillon de \mathbf{Z} . Généralement, ϑ n'est pas la seule inconnue du problème. Les paramètres spectraux de la source et du bruit peuvent être inconnus. Lorsqu'aucune information *a priori* sur la DSP de \mathbf{s} et/ou $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ n'est exploitée, les paramètres spectraux sont tout simplement les valeurs des DSP en les indices fréquentiels k_1, k_2, \dots, k_B . Si une représentation paramétrique est envisagée (*e.g.* si un signal est représenté comme la réponse à un bruit blanc d'un filtre AR, MA, ou ARMA), alors les paramètres correspondants sont les coefficients du filtre utilisé. Dans ce qui suit, on considère que l'on n'a pas de connaissance *a priori* sur la source. On s'intéresse à trois cas de figure, qui diffèrent par la quantité d'information *a priori* dont on dispose sur le bruit. Chaque cas implique un vecteur θ de paramètres différent.

1. Si la DSP du bruit $\sigma^2[k]$ est parfaitement connue, alors $\theta \triangleq [\vartheta, S_{\mathbf{ss}}[k_1], S_{\mathbf{ss}}[k_2], \dots, S_{\mathbf{ss}}[k_B]]'$.
2. Si le bruit est blanc de puissance σ^2 inconnue, alors $\theta \triangleq [\theta, S_{\mathbf{ss}}[k_1], S_{\mathbf{ss}}[k_2], \dots, S_{\mathbf{ss}}[k_B], \sigma^2]'$.
3. Si la DSP du bruit $\sigma^2[k]$ est totalement inconnue, alors $\theta \triangleq [\theta, S_{\mathbf{ss}}[k_1], S_{\mathbf{ss}}[k_2], \dots, S_{\mathbf{ss}}[k_B], \sigma^2[k_1], \sigma^2[k_2], \dots, \sigma^2[k_B]]'$.

Du fait que les paramètres spectraux de la source et possiblement du bruit sont inconnus, il faut chercher la valeur la plus vraisemblable de θ , *i.e.* la valeur $\hat{\theta}_{MV}$ de θ maximisant la ddp $p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; C_{\mathbf{z}}[k_1], \dots, C_{\mathbf{z}}[k_B])$, ou, de manière équivalente, son logarithme. Sur la base du modèle d'observation du théorème 3.1.1, la log-vraisemblance de θ par rapport aux données, notée $L(\mathbf{Z}; \theta)$ s'écrit

$$\begin{aligned} L(\mathbf{Z}; \theta) &= c_0 - N \sum_{k=k_1}^{k_B} \ln |C_{\mathbf{z}}[k]| - \sum_{k=k_1}^{k_B} \sum_{n=1}^N Z_n[k]^\dagger (C_{\mathbf{z}}[k])^{-1} Z_n[k] \\ &= c_0 - N \sum_{k=k_1}^{k_B} \left(\ln |C_{\mathbf{z}}[k]| + \text{tr} \left\{ (C_{\mathbf{z}}[k])^{-1} \hat{C}_{\mathbf{z}}[k] \right\} \right), \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

avec $c_0 \triangleq -2N B \ln(\pi)$ une constante additive sans importance, et $\hat{C}_{\mathbf{z}}[k]$ la matrice de covariance empirique définie par

$$\hat{C}_{\mathbf{z}}[k] \triangleq \frac{1}{N} \sum_n Z_n[k] Z_n[k]^\dagger. \quad (3.1.19)$$

Notons que par construction

$$\hat{C}_{\mathbf{z}}[k] = \begin{bmatrix} \bar{S}_{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_1}[k] & \bar{S}_{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2}[k] \\ \bar{S}_{\mathbf{z}_2 \mathbf{z}_1}[k] & \bar{S}_{\mathbf{z}_2 \mathbf{z}_2}[k] \end{bmatrix}, \quad (3.1.20)$$

où, pour $j, \ell \in \{1, 2\}$, $\bar{S}_{\mathbf{z}_j \mathbf{z}_\ell}$ est un estimateur de $S_{\mathbf{z}_j \mathbf{z}_\ell}$ basé sur la méthode du périodogramme moyenné (§2.1.2B). Lorsque les segments sont disjoints et que la fenêtre $w(t)$ est rectangulaire, l'estimateur est basé sur la méthode de Bartlett. Lorsque les segments sont overlappés et la fenêtre est de type Hann, il s'agit de la méthode de Welch. Le choix de la méthode résulte d'un compromis entre réduction de la variance de l'estimateur de DSP (croisée) et validation du modèle d'observation (cf preuve du théorème 3.1.1).

Chercher le maximum de $L(\mathbf{Z}; \theta)$ implique une procédure de maximisation sur $N_\theta \triangleq 1 + N_{\text{spect}}$ paramètres, avec N_{spect} le nombre de paramètres spectraux de la source et du bruit. Une maximisation directe en évaluant les valeurs du critère sur une grille discrète de valeurs de θ est à proscrire, en raison de la trop grande dimension du vecteur de paramètres. Alternativement, des méthodes itératives peuvent être envisagées. Dans [Segal *et al.*, 1991], une stratégie originale

est proposée sur la base de l'algorithme Espérance-Maximisation (EM) [Dempster *et al.*, 1977]. A chaque itération, les paramètres spectraux de la source et du bruit sont estimés sur la base des paramètres spatiaux estimés à l'itération précédente, puis les paramètres spatiaux sont ré-estimés à partir des DSP de la source et du bruit évalués à l'itération courante. La convergence de l'algorithme vers le maximum global de la log-vraisemblance n'est cependant pas garantie et est fortement conditionnée par son initialisation. Dans ce qui suit, on montre que $\hat{\vartheta}_{MV}$, la première composante de $\hat{\theta}_{MV}$, peut être obtenu en maximisant une fonction de ϑ uniquement, obtenue en exploitant des conditions de stationnarité au premier ordre sur la log-vraisemblance. On parle dans ce cas de *forme séparable de l'EMV* [Jaffer, 1988]–[Doron *et al.*, 1993]. La recherche de formes séparables est d'une importance cruciale du fait qu'elles réduisent drastiquement la dimension du problème de maximisation.

THÉORÈME 3.1.2 Estimateur d'azimut par maximum de vraisemblance, cas de figure 1.

Si $\hat{C}_z[k]$ est de rang plein quel que soit $k \in \{k_1, \dots, k_B\}$, alors l'estimateur $\hat{\vartheta}_{MV}$ de ϑ par maximum de vraisemblance dans le cas de figure 1 est obtenu en maximisant le critère suivant

$$J_1(\theta) = c_1 - N \sum_k \left(\ln \left| P_\vartheta[k] \hat{C}_z[k] P_\vartheta[k] + \sigma^2[k] P_\vartheta^\perp[k] \right| + \frac{1}{\sigma^2[k]} \text{tr}(P_\vartheta^\perp[k] \hat{C}_z[k]) \right)$$

avec $P_\vartheta[k] \triangleq V_\vartheta[k](V_\vartheta[k]^\dagger V_\vartheta[k])^{-1} V_\vartheta[k]^\dagger$ le projecteur orthogonal sur le sous-espace engendré par $V_\vartheta[k]$, $P_\vartheta^\perp[k] \triangleq \mathbb{I}_2 - P_\vartheta[k]$ le complément orthogonal de $P_\vartheta[k]$, et $c_1 \triangleq c_0 - NB$.

PREUVE La preuve est une adaptation des calculs de [Jaffer, 1988] au cas large bande, en considérant seulement deux capteurs et une seule source. On exprime la dérivée partielle de $L(Z; \theta)$ par rapport à $S_{ss}[k]$ pour $k \in \{k_1, \dots, k_B\}$. Le calcul de cette dérivée passe par le calcul des dérivées partielles de $\ln|C_z[k]|$ et $\text{tr}\left\{(C_z[k])^{-1} \hat{C}_z[k]\right\}$, cf Eq. (3.1.18). D'après les règles de calculs matriciels on a (en omettant la dépendance en k pour plus de lisibilité)

$$\frac{\partial \ln|C_z|}{\partial S_{ss}} = \text{tr} \left\{ \left[\frac{\partial \ln|C_z|}{\partial C_z} \right]' \frac{\partial C_z}{\partial S_{ss}} \right\}, \quad \frac{\partial \text{tr}(C_z^{-1} \hat{C}_z)}{\partial S_{ss}} = \text{tr} \left\{ \left[\frac{\partial \text{tr}(C_z^{-1} \hat{C}_z)}{\partial C_z} \right]' \frac{\partial C_z}{\partial S_{ss}} \right\}, \quad (3.1.21)$$

avec

$$\frac{\partial \ln|C_z|}{\partial C_z} = (C_z^{-1})', \quad \frac{\partial \text{tr}(C_z^{-1} \hat{C}_z)}{\partial C_z} = -\left(C_z^{-1} \hat{C}_z C_z^{-1}\right)' \quad (3.1.22)$$

et, cf Eq. (3.1.17),

$$\frac{\partial C_z}{\partial S_{ss}} = V_\vartheta V_\vartheta^\dagger. \quad (3.1.23)$$

À partir de (3.1.18)–(3.1.21)–(3.1.22)–(3.1.23) on obtient

$$\frac{\partial L(Z; \theta)}{\partial S_{ss}} = N V_\vartheta^\dagger C_z^{-1} (\hat{C}_z - C_z) C_z^{-1} V_\vartheta. \quad (3.1.24)$$

Une condition nécessaire d'un extremum de $L(Z; \theta)$ est que (3.1.24) soit égal à zéro. On cherche donc à exploiter la relation

$$V_\vartheta^\dagger C_z^{-1} (\hat{C}_z - C_z) C_z^{-1} V_\vartheta = 0. \quad (3.1.25)$$

Or d'après l'identité de Woodbury on a

$$C_z^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \left(\mathbb{I}_2 - V_\vartheta (S_{ss} V_\vartheta^\dagger V_\vartheta + \sigma^2)^{-1} S_{ss} V_\vartheta^\dagger \right), \quad (3.1.26)$$

ce qui permet d'écrire, après quelques calculs et simplifications, cf [Jaffer, 1988]

$$C_z^{-1}V_\vartheta = V_\vartheta(S_{\text{ss}}V_\vartheta^\dagger V_\vartheta + \sigma^2)^{-1}. \quad (3.1.27)$$

En utilisant (3.1.27) dans (3.1.25) il vient finalement

$$[S_{\text{ss}}V_\vartheta^\dagger V_\vartheta + \sigma^2]^{-1}V_\vartheta^\dagger(\hat{C}_z - C_z)V_\vartheta[S_{\text{ss}}V_\vartheta^\dagger V_\vartheta + \sigma^2]^{-1} = 0, \quad (3.1.28)$$

qui peut être simplifié en la condition équivalente

$$V_\vartheta^\dagger(\hat{C}_z - C_z)V_\vartheta = 0. \quad (3.1.29)$$

En injectant (3.1.17) dans (3.1.29) on déduit l'expression de S_{ss} , en fonction de θ , satisfaisant (3.1.25) :

$$\hat{S}_{\text{ss}} = (V_\vartheta^\dagger V_\vartheta)^{-1}V_\vartheta^\dagger(\hat{C}_z - \sigma^2\mathbb{I}_2)V_\vartheta(V_\vartheta^\dagger V_\vartheta)^{-1}. \quad (3.1.30)$$

Notons qu'un calcul de dérivée au deuxième ordre montrerait que pour un ϑ donné, \hat{S}_{ss} correspond bien à un maximum de $L(Z; \theta)$, qui est global du fait que \hat{S}_{ss} est l'unique solution de (3.1.25). On définit maintenant $C_{z,\vartheta}$, la matrice obtenue en remplaçant S_{ss} par \hat{S}_{ss} dans (3.1.17). Il vient immédiatement que cette matrice s'écrit

$$C_{z,\vartheta} = P_\vartheta(\hat{C}_z - \sigma^2\mathbb{I}_2)P_\vartheta + \sigma^2\mathbb{I}_2 = P_\vartheta\hat{C}_zP_\vartheta + \sigma^2P_\vartheta^\perp, \quad (3.1.31)$$

où P_ϑ et P_ϑ^\perp sont définis dans le théorème, et où l'on a utilisé le fait que $P_\vartheta^2 = P_\vartheta$ (définition d'un projecteur). Cette expression peut être injectée dans (3.1.18) pour obtenir un critère à maximiser en fonction de ϑ uniquement. Par contre, quelques précautions doivent être prises pour s'assurer que $C_{z,\vartheta}$ est bien définie positive (et donc inversible) quelle que soit la valeur de ϑ testée dans la procédure de maximisation. Il s'agit donc de s'assurer que quel que soit ϑ , $\text{rang}(C_{z,\vartheta}) = 2$. Notons d'abord que le rang d'un projecteur est la dimension de son image, donc $\text{rang}(P_\vartheta) = \text{rang}(P_\vartheta^\perp) = 1$. Par ailleurs, si \hat{C}_z est de rang plein (condition du théorème) et $\sigma^2 > 0$, alors $\text{rang}(P_\vartheta\hat{C}_zP_\vartheta) = \text{rang}(\sigma^2P_\vartheta^\perp) = 1$. Enfin, le rang d'une somme de deux matrices est égal à la somme des rangs si et seulement si les espaces générés par les colonnes des deux matrices ont une intersection réduite à $\{0\}$ ET les espaces générés par les lignes des deux matrices satisfont cette même propriété. Cette condition est satisfaite dans notre cas et découle de la supplémentarité des images de P_ϑ et P_ϑ^\perp , et du fait que ces deux matrices soient à symétrie hermitienne. Notons que d'après [Anderson, 1984], \hat{C}_z est de rang plein presque sûrement (§7.4.16) si $N \geq 2$, *i.e.* si l'on a moyenné au moins deux périodogrammes (croisés) court terme.

En remplaçant $C_z[k]$ par $C_{z,\vartheta}[k]$ dans (3.1.18), on obtient le critère J_1

$$J_1(\vartheta) = c_0 - N \sum_{k=k_1}^{k_B} \left(\ln|C_{z,\vartheta}[k]| + \text{tr} \left\{ (C_{z,\vartheta}[k])^{-1} \hat{C}_z[k] \right\} \right), \quad (3.1.32)$$

fonction de ϑ uniquement et dont le maximum est atteint en $\hat{\vartheta}_{MV}$. Il convient de rechercher une expression plus explicite de J_1 . L'inverse de $C_{z,\vartheta}$ s'écrit, en omettant encore une fois k pour plus de lisibilité

$$C_{z,\vartheta}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \left(\mathbb{I}_2 - V_\vartheta(\hat{S}_{\text{ss}}V_\vartheta^\dagger V_\vartheta + \sigma^2)^{-1}\hat{S}_{\text{ss}}V_\vartheta^\dagger \right). \quad (3.1.33)$$

Mais $\hat{S}_{\text{ss}}V_\vartheta^\dagger V_\vartheta + \sigma^2$ peut s'écrire, en utilisant (3.1.30),

$$\hat{S}_{\text{ss}}V_\vartheta^\dagger V_\vartheta + \sigma^2 = (V_\vartheta^\dagger V_\vartheta)^{-1}V_\vartheta^\dagger\hat{C}_zV_\vartheta. \quad (3.1.34)$$

Il vient alors, en utilisant (3.1.33)–(3.1.34),

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(C_{z,\vartheta}^{-1}\hat{C}_z) &= \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{tr}(\hat{C}_z) - \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{tr}\left\{V_\vartheta(V_\vartheta^\dagger\hat{C}_zV_\vartheta)^{-1}V_\vartheta^\dagger V_\vartheta\hat{S}_{ss}V_\vartheta^\dagger\hat{C}_z\right\} \\ &= \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{tr}(\hat{C}_z) - \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{tr}(V_\vartheta^\dagger V_\vartheta\hat{S}_{ss}).\end{aligned}\quad (3.1.35)$$

En remarquant finalement que $\mathrm{tr}(V_\vartheta^\dagger V_\vartheta\hat{S}_{ss}) = \mathrm{tr}(P_\vartheta\hat{C}_z) - \sigma^2$, on conclut que

$$\mathrm{tr}(C_{z,\vartheta}^{-1}\hat{C}_z) = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{tr}(P_\vartheta^\perp\hat{C}_z) + 1. \quad (3.1.36)$$

L'utilisation de (3.1.31)–(3.1.36) dans (3.1.32) donne le résultat du théorème. L'EMV de S_{ss} est par ailleurs donné en évaluant (3.1.30) en $\vartheta = \hat{\vartheta}_{MV}$. ■

Lorsque la DSP du bruit n'est pas connue, une modification est possible dans les cas de figure 2 et 3. On reprend le critère J_1 , mais cette fois ci en considérant que les paramètres spectraux du bruit sont inconnus, et on dérive J_1 par rapport à ces paramètres. Quel que soit le cas de figure, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln|C_{z,\vartheta}|}{\partial \sigma^2} &= \mathrm{tr}\left\{C_{z,\vartheta}^{-1}P_\vartheta^\perp\right\} = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{tr}(P_\vartheta^\perp) - \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{tr}\left\{V_\vartheta(V_\vartheta^\dagger\hat{C}_zV_\vartheta)^{-1}V_\vartheta^\dagger V_\vartheta\hat{S}_{ss}V_\vartheta^\dagger P_\vartheta^\perp\right\} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{tr}\left\{V_\vartheta(V_\vartheta^\dagger\hat{C}_zV_\vartheta)^{-1}V_\vartheta^\dagger P_\vartheta(\hat{C}_z - \sigma^2\mathbb{I}_2)P_\vartheta P_\vartheta^\perp\right\} = \frac{1}{\sigma^2}.\end{aligned}\quad (3.1.37)$$

Ci dessus, on a utilisé le fait que $\frac{\partial C_{z,\vartheta}}{\partial \sigma^2} = P_\vartheta^\perp$, exploité les équations (3.1.33)–(3.1.34)–(3.1.30), le fait que la trace d'un projecteur orthogonal est égale à son rang, et l'orthogonalité des colonnes respectives de P_ϑ et P_ϑ^\perp . On peut également écrire

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left[\frac{1}{\sigma^2}\mathrm{tr}(P_\vartheta^\perp\hat{C}_z) \right] = -\frac{1}{\sigma^4}\mathrm{tr}(P_\vartheta^\perp\hat{C}_z). \quad (3.1.38)$$

Ainsi, pour le cas de figure 2, annuler la dérivée de J_1 par rapport à σ^2 donne

$$-N \sum_k \left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^4}\mathrm{tr}(P_\vartheta^\perp[k]\hat{C}_z[k]) \right) = 0 \Leftrightarrow \sigma^2 = \frac{1}{B} \sum_k \mathrm{tr}(P_\vartheta^\perp[k]\hat{C}_z[k]), \quad (3.1.39)$$

et dans le cas de figure 3, pour $k \in \{k_1, \dots, k_B\}$, on a

$$-N \left(\frac{1}{\sigma^2[k]} - \frac{1}{\sigma^4[k]}\mathrm{tr}(P_\vartheta^\perp[k]\hat{C}_z[k]) \right) = 0 \Leftrightarrow \sigma^2[k] = \mathrm{tr}(P_\vartheta^\perp[k]\hat{C}_z[k]). \quad (3.1.40)$$

En injectant (3.1.39) ou (3.1.40) dans J_1 , on obtient les critères J_2 et J_3 correspondant aux cas de figure 2 et 3 respectivement, d'où le théorème :

THÉORÈME 3.1.3 Estimateur d'azimut par maximum de vraisemblance, cas de figure 2 et 3.

Si $\hat{C}_z[k]$ est de rang plein quel que soit $k \in \{k_1, \dots, k_B\}$, alors l'estimateur $\hat{\vartheta}_{MV}$ de ϑ par maximum de vraisemblance dans les cas de figure 2 et 3 sont obtenus en maximisant les critères respectifs

$$\begin{aligned}J_2(\theta) &= c_2 - N \sum_k \ln \left| P_\vartheta[k]\hat{C}_z[k]P_\vartheta[k] + P_\vartheta^\perp[k] \frac{1}{B} \sum_k \mathrm{tr}(P_\vartheta^\perp[k]\hat{C}_z[k]) \right| \\ J_3(\theta) &= c_3 - N \sum_k \ln \left| P_\vartheta[k]\hat{C}_z[k]P_\vartheta[k] + P_\vartheta^\perp[k]\mathrm{tr}(P_\vartheta^\perp[k]\hat{C}_z[k]) \right|\end{aligned}$$

avec $P_\vartheta[k] \triangleq V_\vartheta[k](V_\vartheta[k]^\dagger V_\vartheta[k])^{-1}V_\vartheta[k]^\dagger$ le projecteur orthogonal sur le sous-espace engendré par $V_\vartheta[k]$, $P_\vartheta^\perp[k] \triangleq \mathbb{I}_2 - P_\vartheta[k]$ le complément orthogonal de $P_\vartheta[k]$, et $c_2 = c_3 \triangleq c_1 - NB$.

Les solutions précédentes sont applicables dans le cas où les bruits \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 sont **iid**. Le cas de bruits non **iid** peut être traité, à condition que leur matrice de covariance, notée $C_{\mathbf{n}}[k]$, soit connue à quelques paramètres multiplicatifs près. Par exemple, si $C_{\mathbf{n}}[k] = \sigma^2[k]\tilde{C}_{\mathbf{n}}[k]$, avec $\tilde{C}_{\mathbf{n}}[k]$ une matrice définie-positive connue, dont la décomposition de Choleski s'écrit

$$\tilde{C}_{\mathbf{n}}[k] = Q_{\mathbf{n}}[k]Q_{\mathbf{n}}[k]^\dagger, \quad (3.1.41)$$

alors la matrice de covariance de $\tilde{Z}_n[k] \triangleq (Q_{\mathbf{n}}[k])^{-1}Z_n[k]$ a pour expression (en omettant la dépendance en k)

$$\begin{aligned} C_{\tilde{z}} &= \mathbb{E} \left\{ (Q_{\mathbf{n}}^{-1}) Z_n Z_n^\dagger (Q_{\mathbf{n}}^{-1})^\dagger \right\} = (Q_{\mathbf{n}}^{-1}) C_z (Q_{\mathbf{n}}^{-1})^\dagger \\ &= (Q_{\mathbf{n}}^{-1}) (V_\vartheta S_{ss} V_\vartheta^\dagger + \sigma^2 Q_{\mathbf{n}} Q_{\mathbf{n}}^\dagger) (Q_{\mathbf{n}}^{-1})^\dagger = \tilde{V}_\vartheta S_{ss} \tilde{V}_\vartheta^\dagger + \sigma^2 \mathbb{I}_2, \end{aligned} \quad (3.1.42)$$

avec $\tilde{V}_\vartheta \triangleq Q_{\mathbf{n}}^{-1} V_\vartheta$. La matrice $C_{\tilde{z}}$ a donc la même structure que dans l'équation (3.1.17). Le schéma global d'estimation pour le case de figure 3 avec bruits non **iid** est décrit en algorithme 1.

B Source déterministe inconnue

Dans cette partie, la source $s(t)$ est supposée déterministe mais inconnue. Le vecteur de données est construit exactement de la même manière que dans le cas d'une source aléatoire gaussienne.

B-1 Définition du modèle d'observation On commence par introduire de nouvelles notations. Supposons s à énergie finie et Considérons l'équation

$$\mathbf{z}_2(t) = (h_\vartheta * s)(t) + \mathbf{n}_2(t). \quad (3.1.43)$$

En multipliant à gauche et à droite par une fenêtre $w_n(t)$ telle que définie au §2.1.2B, puis en prenant la transformée de Fourier on obtient

$$\mathbf{z}_{2,n}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} H_\vartheta(f - \nu) S(f - \nu) W_n(\nu) d\nu + \mathbf{N}_{2,n}(f), \quad (3.1.44)$$

avec $S(f)$ les transformées de Fourier de $s(t)$. Si $H(f)$ varie peu sur tout intervalle de fréquence de longueur la largeur du lobe principal de $W_n(f)$ (*i.e.* si le temps d'autocorrélation de $h_\vartheta(t)$ est court devant celui de $w(t)$), alors on peut écrire, de manière approximative,

$$\mathbf{z}_{2,n}(f) \approx H_\vartheta(f) S_n(f) + \mathbf{N}_{2,n}(f) \quad (3.1.45)$$

où $S_n(f)$ est la transformée de Fourier $s(t)$ modulé par $w_n(t)$. Sous cette approximation, $Z_n[k]$ s'écrit

$$Z_n[k] = V_\vartheta[k] S_n[k] + \mathbf{N}_n[k]. \quad (3.1.46)$$

Sous les hypothèse supplémentaires que les bruits sont centrés gaussien dans leur ensemble et que $B_{\mathbf{n},n_j} T_w \gg 1$, $Z_n[k]$ est gaussien et

$$\mathbb{E}\{Z_n[k]\} = V_\vartheta[k] S_n[k], \quad (3.1.47)$$

$$\mathbb{E} \{ (Z_n[k_1] - \mathbb{E}\{Z_n[k_1]\}) (Z_m^*[k_2] - \mathbb{E}\{Z_m^*[k_2]\}) \} = C_{\mathbf{n}}[k_1] \delta[k_1 - k_2] \delta[n - m]. \quad (3.1.48)$$

Algorithme 1 : Estimation court terme d'azimut, cas de figure 1**Entrées** : $z_1, z_2, V_\vartheta, Q_n$ **Sorties** : $\hat{\vartheta}_{MV}$ **1 pour** $j = 1, 2$ **faire** Sous hypothèse d'ergodisme, centrer x_j en lui retranchant sa moyenne temporelle

2
$$z_j = z_j - \frac{1}{P} \sum_{\ell=1}^P z_j[\ell]$$

 En utilisant un algorithme de Transformée de Fourier Court Terme (TFCT), calculer la représentations temps-fréquence de x_j

3
$$\mathcal{Z}_j = \text{TFCT}[z_j] \text{ (matrice } B \times N, N \text{ nombre de trames, } B \text{ nombre de fréquences)}$$

4 finpour**5 pour** $k = k_1, \dots, k_B$ **faire** Concaténer dans une matrice $2 \times N$ les valeurs de la Transformée de Fourier Discrète (TFD) en chaque canal et chaque trame à l'indice fréquentiel k

6
$$Z_{\text{temp}} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_1[k, 1], \mathcal{Z}_1[k, 2], \dots, \mathcal{Z}_1[k, N] \\ \mathcal{Z}_2[k, 1], \mathcal{Z}_2[k, 2], \dots, \mathcal{Z}_2[k, N] \end{bmatrix}$$

Réaliser sur les données la transformation permettant d'obtenir des bruits iid

7
$$\tilde{Z}_{\text{temp}} = (Q_n[k])^{-1} Z_{\text{temp}}$$

 Calculer la matrice de covariance empirique des données à l'indice fréquentiel k après transformation

8
$$\hat{C}_{\tilde{z}}[k] = \frac{1}{N} [\tilde{Z}_{\text{temp}}] [\tilde{Z}_{\text{temp}}]^\dagger$$

9 pour $\vartheta = \vartheta_1, \dots, \vartheta_{N_\vartheta}$ **faire** Réaliser sur le vecteur $V_\vartheta[k]$ la transformation permettant d'obtenir des bruits iid

10
$$\tilde{V}_\vartheta[k] = (Q_n[k])^{-1} V_\vartheta[k]$$

 Calculer le projecteur orthogonal sur le sous-espace engendré par $\tilde{V}_\vartheta[k]$, ainsi que son complément orthogonal

11
$$P_\vartheta[k] = \tilde{V}_\vartheta[k] (\tilde{V}_\vartheta[k]^\dagger \tilde{V}_\vartheta[k])^{-1} \tilde{V}_\vartheta[k]^\dagger; P_\vartheta^\perp[k] = \mathbb{I}_2 - P_\vartheta[k]$$

12 finpour**13 finpour****14 pour** $\vartheta = \vartheta_1, \dots, \vartheta_{N_\vartheta}$ **faire** Calculer la valeur du critère J_3 en ϑ

15
$$J_3(\vartheta) = c_3 - N \sum_{k=k_1}^{k_B} \ln \left| P_\vartheta[k] \hat{C}_{\tilde{z}}[k] P_\vartheta[k] + P_\vartheta^\perp[k] \text{tr}(P_\vartheta^\perp[k] \hat{C}_{\tilde{z}}[k]) \right|$$

16 finpour Retourner la valeur $\hat{\vartheta}_{MV}$ maximisant J_3

B-2 Estimation des paramètres spatiaux et spectraux du problème Pour le modèle de source déterministe, sous les conditions précédentes, le logarithme de la ddp du vecteur d'observation s'écrit dans ce cas

$$L(Z; \theta) = c_0 - N \sum_{k=k_1}^{k_B} \ln |C_n[k]| - \sum_{k=k_1}^{k_B} \sum_{n=1}^N (Z_n[k] - V_\vartheta[k] S_n[k])^\dagger (C_n[k])^{-1} (Z_n[k] - V_\vartheta[k] S_n[k]). \quad (3.1.49)$$

Dans ce cas de figure 1, l'estimé du maximum de vraisemblance est donné par le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1.4 Estimateur d'azimut par maximum de vraisemblance, cas de figure 1.

L'estimateur $\hat{\vartheta}_{MV}$ de ϑ par maximum de vraisemblance est obtenu en maximisant le critère

$$J_4(\theta) = c_0 - 2N \sum_{k=k_1}^{k_B} \ln(\sigma^2[k]) - N \sum_{k=k_1}^{k_B} \frac{1}{\sigma^2[k]} \text{tr}(P_\vartheta^\perp[k] \hat{C}_z[k])$$

avec $P_\vartheta[k] \triangleq V_\vartheta[k] (V_\vartheta[k]^\dagger V_\vartheta[k])^{-1} V_\vartheta[k]^\dagger$ le projecteur orthogonal sur le sous-espace engendré par $V_\vartheta[k]$, et $P_\vartheta^\perp[k] \triangleq \mathbb{I}_2 - P_\vartheta[k]$ le complément orthogonal de $P_\vartheta[k]$.

PREUVE Commençons, comme pour le cas d'une source aléatoire Gaussienne, par poser un modèle de bruits iid, i.e. $C_b[k] = \sigma^2[k] \mathbb{I}_2$, avec $\sigma^2[k]$ connu. Dans ce cas, la log-vraisemblance se simplifie en

$$L(Z; \theta) = c_0 - 2N \sum_{k=k_1}^{k_B} \ln(\sigma^2[k]) - \sum_{k=k_1}^{k_B} \frac{1}{\sigma^2[k]} \sum_{n=1}^N |Z_n[k] - V_\vartheta[k] S_n[k]|^2. \quad (3.1.50)$$

En dérivant cette log-vraisemblance par rapport à $S_n[k]$ et en cherchant sa valeur $\hat{S}_{n,\vartheta}[k]$ —en fonction de ϑ —pour laquelle la dérivée s'annule, on obtient

$$\hat{S}_{n,\vartheta}[k] = \left(V_\vartheta[k]^\dagger V_\vartheta[k] \right)^{-1} V_\vartheta[k]^\dagger Z_n[k], \quad (3.1.51)$$

qui n'est autre qu'un estimateur par moindres carrés de $S_n[k]$ pour ϑ connu. En réinjectant 3.1.51 dans 3.1.50 il vient assez immédiatement

$$J_4(\theta) = c_0 - 2N \sum_{k=k_1}^{k_B} \ln(\sigma^2[k]) - \sum_{k=k_1}^{k_B} \frac{1}{\sigma^2[k]} \sum_{n=1}^N |P_\vartheta^\perp[k] Z_n[k]|^2. \quad (3.1.52)$$

En remarquant que

$$\sum_{n=1}^N |P_\vartheta^\perp[k] Z_n[k]|^2 = N \text{tr} \left(P_\vartheta^\perp[k] \hat{C}_z[k] \right) \quad (3.1.53)$$

on obtient le résultat du théorème. ■

Le théorème suivant permet de traiter les cas de figure 2 et 3. Sa preuve reprend des éléments des preuves des théorèmes précédents et ne sera pas détaillée.

THÉORÈME 3.1.5 Estimateur d'azimut par maximum de vraisemblance, cas de figure 2 et 3.

L'estimateur $\hat{\theta}_{MV}$ de θ par maximum de vraisemblance est obtenu en maximisant le critère suivant

$$J_5(\theta) = c_5 - 2N \ln \left(\frac{1}{2B} \sum_{k=k_1}^{k_B} \text{tr}(P_\vartheta^\perp[k] \hat{C}_z[k]) \right)$$

$$J_6(\theta) = c_6 - 2N \sum_{k=k_1}^{k_B} \ln \left(\frac{1}{2} \text{tr}(P_\vartheta^\perp[k] \hat{C}_z[k]) \right)$$

avec $P_\vartheta[k] \triangleq V_\vartheta[k](V_\vartheta[k]^\dagger V_\vartheta[k])^{-1} V_\vartheta[k]^\dagger$ le projecteur orthogonal sur le sous-espace engendré par $V_\vartheta[k]$, $P_\vartheta^\perp[k] \triangleq \mathbb{I}_2 - P_\vartheta[k]$ le complément orthogonal de $P_\vartheta[k]$, et $c_5 = c_6 \triangleq c_0 - 2NB$.

C Discussions

Le choix d'un modèle de source déterministe inconnue ou aléatoire Gaussienne nécessite d'être discuté. Le point le plus important repose sur le constat suivant : pour une source déterministe, le nombre N_{spect} de paramètres spectraux à estimer dans la procédure est NB . Par conséquent, à mesure que la durée d'observation des signaux croît (*i.e.* que le nombre N de trames augmente), le nombre de paramètres spectraux à estimer croît de la même manière. Autrement dit le rapport entre la taille des données et le nombre de paramètres du modèle ne converge pas vers zéro. Ainsi l'EMV de θ pour un modèle de source déterministe, bien qu'étant effectivement un EMV, n'est pas asymptotiquement efficace. *A contrario*, le nombre de paramètres du modèle de source aléatoire Gaussienne est indépendant de N . Ceci découle directement du fait qu'on a considéré des signaux SSL dans le cas Gaussien aléatoire.

Une autre remarque intéressante est établie dans [Doron *et al.*, 1993]. En changeant légèrement la formulation des critères J_1, J_2, \dots, J_6 , l'auteur montre que quelle que soit la quantité d'information disponible a priori sur le bruit, on a une relation du type

$$J_{\text{gauss}}(\vartheta) = \mathcal{E}(\vartheta) + J_{\text{deter}}(\vartheta), \quad (3.1.54)$$

où, pour un modèle de bruit donné, J_{gauss} (resp. J_{deter}) désigne le critère à maximiser par rapport à θ pour un modèle de source aléatoire Gaussienne (resp. déterministe), et où

$$\mathcal{E}(\vartheta) \triangleq \sum_k \ln \left| P_\vartheta[k] \hat{C}_z[k] P_\vartheta[k] + P_\vartheta^\perp[k] \right| \quad (3.1.55)$$

peut s'interpréter, d'après l'auteur, comme *l'entropie de la projection des observations sur le sous-espace signal*. Toujours d'après l'auteur, cette entropie peut varier significativement par rapport à ϑ pour des RSB faibles et, dans le cas de sources multiples (les critères peuvent être étendus au cas de plusieurs sources et plus de deux capteurs, tant que le nombre de capteurs reste strictement supérieur au nombre de sources), peut donner une plus grande stabilité de l'estimateur (*i.e.* une plus faible variance) dans le cas de sources fortement corrélées, de sources provenant d'azimuts très proches, où de sources ayant des puissances très éloignées (*e.g.* si une source de faible puissance est présente parmi des sources de forte puissance).

Une dernière remarque est d'ordre pratique. Dans le modèle de source déterministe, de par l'absence du terme $\mathcal{E}(\vartheta)$ dans le critère, dont on rappelle on peut se permettre de travailler sur une seule trame des signaux ($N = 1$). On y voit cependant très peu d'intérêt.

D Résultats de simulation et interprétation

Supposons que l'émetteur E et les récepteurs R_1, R_2 se situent sur un plan commun et que l'émetteur soit en champ lointain, *i.e.* que la distance de l'émetteur au centre des récepteurs soit suffisamment grande devant l'espacement des récepteurs de sorte que les fronts d'onde soient approximativement plans au voisinage de la paire de récepteurs. Le transfert entre R_1 et R_2 ne dépend, dans ce cas, que d'un unique paramètre spatial θ , l'angle entre la droite perpendiculaire à (R_1R_2) passant par R et (RE) . Dans cette section, quelques propriétés de l'EMV de θ pour une source aléatoire dans le cas de figure 3 sont mises en avant pour deux modèles de propagation acoustique : le modèle de propagation en champ libre et le modèle de diffusion d'une onde plane incidente sur une tête sphérique rigide dont les récepteurs sont placés aux antipodes. Du fait qu'avec ces deux modèles le problème présente une ambiguïté avant-arrière ($\theta_1 = \pi - \theta_2 \Rightarrow H_{\theta_1} = H_{\theta_2}$, *i.e.* le système n'est pas *structurellement identifiable*), on ne peut pas s'attendre à une localisation unique sur un intervalle $[-\pi, \pi]$ des valeurs possibles de θ [Handzel et Krishnaprasad, 2002]. On considère donc ici que l'ensemble des valeurs admissibles de θ est limité à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Les statistiques de l'EMV, en plus de varier avec la durée d'observation des signaux, sont fortement dépendantes des DSP du signal et du bruit. Pour simplifier, on considère ici le cas où s et n ont des spectres plats sur une bande de fréquence commune, *i.e.* $S_{ss}(f)$ et $\sigma^2(f)$ sont constants sur cette bande et nuls ailleurs (dans la veine de [Weiss et Weinstein, 1983]–[Weinstein et Weiss, 1984]). Les paramètres spectraux influant sur les statistiques de l'EMV de θ se réduisent donc à la largeur de bande des signaux, leur fréquence centrale, et au RSB, défini en dB par $\text{RSB} = 10\log(S_{ss}/\sigma^2)$.

D-1 Propagation en champ libre Lorsqu'aucune tête n'est présente entre R_1 et R_2 , les signaux perçus en l'absence de bruit ne diffèrent que d'un retard temporel, fonction de θ . Plus précisément, la réponse fréquentielle entre les canaux gauche et droit s'écrit

$$H_{\vartheta}(f) = e^{-2i\pi f \frac{2a}{c} \sin \vartheta}. \quad (3.1.56)$$

Un tracé de l'IPD et de la ILD (*i.e.* la phase et l'amplitude en dB de $H_{\vartheta}(f)$) en fonction de θ et f pour un tel modèle est présenté en Fig.3.1-haut. Quelques résultats de simulation sont donnés en Fig.3.2–3.3. Il s'agit du tracé de la Pseudo Log-Vraisemblance (PLV) associée au cas de figure 3, en fonction de la direction d'arrivée (*i.e.* ϑ) testée et de la direction vraie. Pour chaque direction testée, la PLV est normalisée de façon que ses valeurs soient comprises entre 0 et 1. Le vecteur de données z est tiré aléatoirement selon (3.1.7), avec $C_z = V_{\vartheta} V_{\vartheta}^{\dagger} S_{ss} + \sigma^2 \mathbb{I}_2$.

Dans la Fig.3.2, la fréquence centrale a été fixée à 3kHz. La figure de gauche, pour laquelle le RSB a été fixé à 20dB et la largeur de bande à 260Hz, illustre le problème d'ambiguïté de phase : pour des signaux faible bande (*i.e.* des signaux dont la largeur de bande est faible devant leur fréquence centrale) la PLV admet plusieurs maxima locaux dont les hauteurs sont relativement proches. En raison de la présence du bruit, le pic le plus élevé ne correspond pas systématiquement à la direction d'arrivée vraie : la ddp de l'erreur d'estimation est multimodale et l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) est relativement grande dans ce mode d'opération. Lorsqu'on raisonne en terme de temps de retard à l'arrivée plutôt qu'en terme de direction d'arrivée (légitime du fait qu'on est ici en condition champ libre), la borne la plus fine de l'EQM est la borne inférieure de Barankin [Weiss et Weinstein, 1983]–[Weinstein et Weiss, 1984]. Notons en outre que le pic de vraisemblance correspondant à la vraie direction d'arrivée est plus large pour un émetteur au voisinage de $\pm 90^\circ$: l'estimation de direction d'arrivée est plus précise lorsque l'émetteur est en face de la paire de récepteurs, comme mentionné dans [Raspaud *et al.*, 2010]. Le problème d'ambiguïté de phase susmentionné disparaît à mesure que le RSB augmente, comme illustré dans la figure du centre, pour laquelle le RSB a été fixé à 60dB. On peut y observer que le mode principal de la PLV est plus étroit, et que les modes secondaires sont atténués par rapport

au cas précédent. Notons que plus la largeur de bande est faible, plus le **RSB** nécessaire pour lever complètement l'ambiguïté de phase est élevé. Un autre moyen de lever l'ambiguïté de phase est d'augmenter la largeur de bande, ce que l'on montre dans la figure de droite, pour laquelle cette dernière a été fixée à 1kHz. Comme on peut le constater, les modes secondaires de la **PLV** sont fortement atténués dans ce cas de figure. Lorsque le **RSB**, la largeur de bande et la durée d'observation des signaux augmentent, la **ddp** de l'estimateur devient unimodale sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ et approche une distribution Gaussienne, en vertu des propriétés asymptotiques des **EMV**. Dans ce mode de fonctionnement, la borne inférieure la plus fine de l'**EQM** est la borne inférieure de Cramér-Rao. Finalement, bien que cela ne soit pas montré sur les figures, lorsque le **RSB** et la largeur de bande deviennent trop faibles, la **ddp** de l'estimateur devient uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

La Fig.3.3 montre l'influence de la fréquence centrale d'un signal faible bande (largeur de bande de 260Hz) sur la distance entre les modes adjacents de la **PLV** et leur largeur. À mesure que la fréquence centrale diminue, les pics s'évalent et s'éloignent les uns des autres. À 340Hz (figure de droite), les modes secondaires ont totalement disparu et le système n'est plus sujet à l'ambiguïté de phase. Cependant, le mode principal est très étalé pour une telle fréquence, et l'**EQM** est relativement élevée.

D-2 Diffusion sur une tête sphérique rigide Lorsque les microphones sont montés aux antipodes d'une sphère rigide de rayon a , la réponse fréquentielle entre les canaux gauche et droit en champ lointain peut se calculer dans le cadre de la théorie des champs acoustiques. Elle s'exprime comme le rapport de FTLT normalisées [Duda et Martens, 1998]

$$H_{\theta}(f) = \frac{\psi_{\frac{\pi}{2}+\theta}(f)}{\psi_{-\frac{\pi}{2}-\theta}(f)}, \text{ avec} \quad (3.1.57)$$

$$\psi_{\alpha}(f) \triangleq \frac{1}{\left(\frac{2\pi fa}{c}\right)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-i)^{m-1} (2m+1) P_m(\cos\alpha)}{h'_m\left(\frac{2\pi fa}{c}\right)}. \quad (3.1.58)$$

Ci-dessus, le signal de référence est le signal qui serait perçu en le centre de la sphère si celle-ci était absente, α désigne l'angle entre la direction de la source et le rayon orienté vers le récepteur considéré, P_m est le polynôme de Legendre de degré m , h_m est la fonction de Hankel sphérique d'ordre m (à ne pas confondre avec h_{θ}), et h'_m sa première dérivée. En pratique, la somme infinie dans (3.1.58) est tronquée à un certain ordre. L'ordre minimum nécessaire pour que l'approximation soit valide dépend de la fréquence maximale considérée : aux basses fréquences par exemple, seuls les premiers termes sont significatifs. Pour éviter des calculs coûteux lors d'une localisation en-ligne, $H_{\theta}(f)$ peut être pré-tabulée hors-ligne pour un ensemble discret de valeurs de θ .

Contrairement au modèle en champ libre, pour lequel seul le déphasage apporte de l'information sur la direction d'arrivée, l'amplitude de $H_{\theta}(f)$ est également une source d'information utile (voir Fig.3.1-bas). Quelques résultats de simulation sont donnés dans la Fig.3.4. L'effet de l'information portée par l'**ILD** sur la **PLV** peut être constaté sur le tracé de gauche (largeur de bande de 260Hz, **RSB** de 20dB, fréquence centrale de 3kHz), à mettre en comparaison avec la Fig.3.2-gauche pour laquelle les conditions opérationnelles sont identiques. Avec la sphère, les lobes secondaires de la **PLV** sont atténués par rapport au cas champ libre, ce qui montre en quoi l'**ILD** contribue à lever—bien que partiellement—l'ambiguïté de phase de signaux faible bande. Pour une source proche de 0° , on observe peu de différence entre les **PLV** associées aux deux modèles. En effet, sous cette hypothèse, l'**IPD** tend à devenir linéaire par rapport à la fréquence, et l'**ILD** en dB devient identiquement nulle. L'effet de la tête dans ce cas devient négligeable. Notons que dans les mêmes conditions d'opération, la **PLV** est plus étroite près de $\pm 90^{\circ}$ avec le modèle de tête

sphérique. On peut donc s'attendre à une plus faible variance de l'estimateur près de ces directions pour une tête sphérique.

La Fig.3.4-centre (largeur de bande 260Hz, RSB 20dB, fréquence centrale 340Hz) est à comparer à la Fig.3.3-droite. Elle montre le comportement basse fréquence de l'estimateur lorsque la tête est présente. Aux basses fréquences, l'ILD de la sphère ne varie pas de manière significative avec la fréquence et la direction d'arrivée. L'effet de l'ILD est donc négligeable. En outre, l'IPD basse fréquence est obtenue en ne conservant que les deux premiers termes de la somme dans (3.1.58), et l'on peut montrer qu'elle peut être approximée par $DIP(\theta) = -2i\pi f \frac{3a}{c} \sin \theta$ [Duda et Martens, 1998]. Ainsi, le comportement de l'estimateur dans ce cas est comparable à celui du cas champ libre, à ceci près que les fréquences sont multipliées par un facteur d'échelle $\frac{3}{2}$. C'est ce qui explique les différences entre la Fig.3.4-centre et la Fig.3.3-droite. La Fig.3.4-droite, à comparer à la Fig.3.2-droite, montre l'influence de la diffusion sur la PLV pour une largeur de bande de 1kHz et une fréquence centrale de 3kHz.

La Fig.3.5 décrit finalement l'influence d'erreur de modèle sur les performances de l'estimateur. La figure de gauche montre la PLV pour une largeur de bande élevée et lorsqu'on fait une hypothèse champ libre alors que la sphère est en réalité présente entre les deux récepteurs. Près de 0° , l'erreur de modèle a peu d'influence sur l'erreur d'estimation, puisque la diffusion est négligeable dans ce cas. Cependant, à mesure que la vraie direction s'éloigne de 0° , un biais apparaît et augmente. Un comportement erratique est observé au delà de 60° . Dans la figure du centre, les observations sont également générées en utilisant le modèle acoustique de la sphère, mais dans le calcul de la PLV l'IPD est approximée *via* la formule de Woodworth-Schlosberg [Woodworth et Schlosberg, 1971] $DIP(\theta) = -2i\pi f \frac{a}{c} (\sin\theta + \theta)$, et les variations de la ILD sont simplement négligées. Bien que le biais soit réduit par rapport à la figure de gauche, on note une erreur significative près de $\pm 90^\circ$. Finalement, la figure de droite montre le résultat lorsque le modèle utilisé dans le calcul de la PLV est conforme au modèle vrai de la sphère.

3.2 DÉTECTION INSTANTANÉE D'ACTIVITÉ DE LA SOURCE

Nous venons de proposer une technique d'estimation de paramètres spatiaux par maximum de vraisemblance. L'estimateur ainsi formulé nous a permis de mettre en évidence l'importance de la présence d'un élément diffusant placé entre les microphones du capteur binaural. Nous nous focalisons maintenant sur la détection de l'activité de la source sonore. En effet, dans les environnements variables et évolutifs de la robotique, les sources sonores d'intérêt peuvent être intermittentes. La détection de leur activité peut permettre d'éviter de tenir compte d'observations aberrantes. Après un bref rappel des méthodes courantes permettant une telle détection, notre approche est présentée et discutée.

3.2.1 Test de Rapport de Vraisemblances basé sur la linéarité de la phase

Dans [Chan *et al.*, 1978], une stratégie de détection est proposée pour un modèle de propagation en champ libre, sur la base de l'estimateur de temps de retard décrit au §2.2.4. L'idée est qu'une mesure de l'adéquation de la phase estimée $\bar{\varphi}_{z_2 z_1}$ de $S_{z_2 z_1}$ avec la droite de pente \hat{D} —le temps de retard estimé *via* la procédure décrite au §2.2.4—est donnée par la somme des erreurs quadratiques (résidus)

$$R = \sum_k (\bar{\varphi}_{z_2 z_1}[k] - 2\pi f_k \hat{D})^2. \quad (3.2.1)$$

Cette somme est en outre une mesure de la puissance du signal, puisqu'une forte cohérence des signaux implique une faible erreur résiduelle. Les auteurs proposent donc d'utiliser cette variable aléatoire pour détecter la présence ou l'absence de signal, *via* le TRV. Il faut alors caractériser les

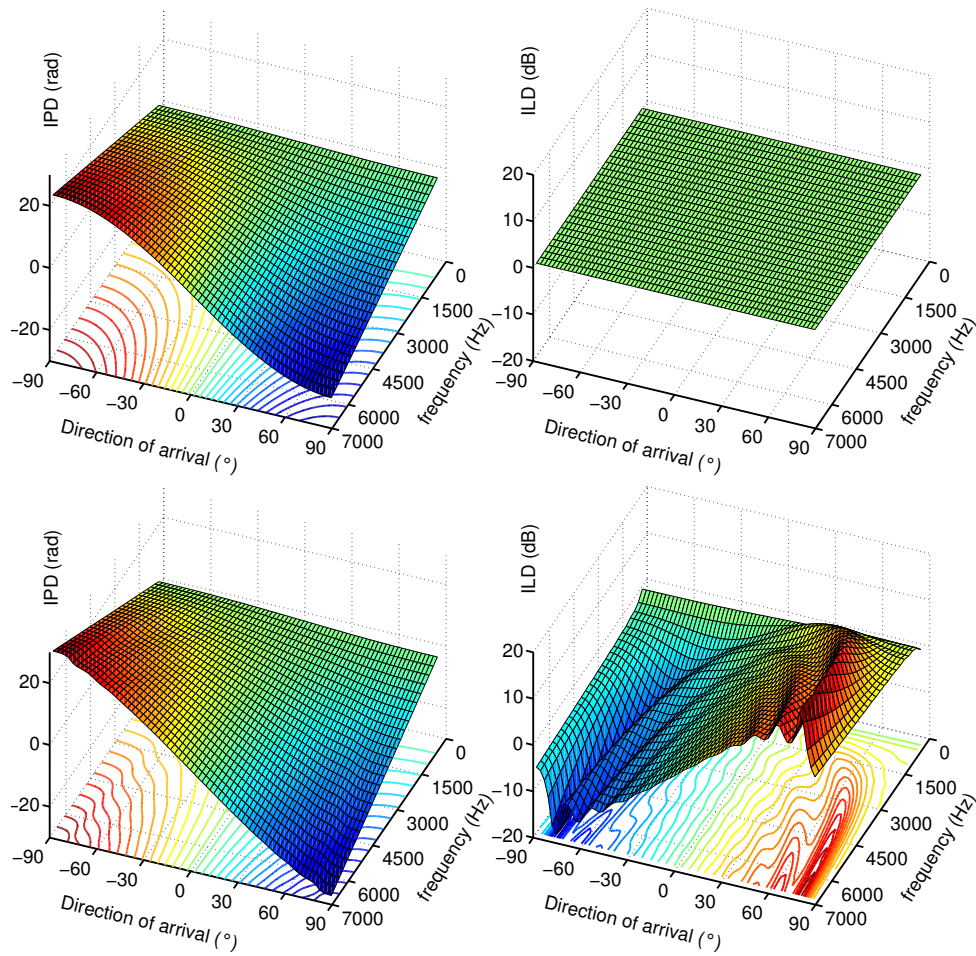


FIGURE 3.1: IPD et ILD (en dB) en fonction de la fréquence et de la direction d'arrivée pour un émetteur en champ lointain et pour (Haut) le modèle de propagation en champ libre (Bas) le modèle de la sphère rigide.

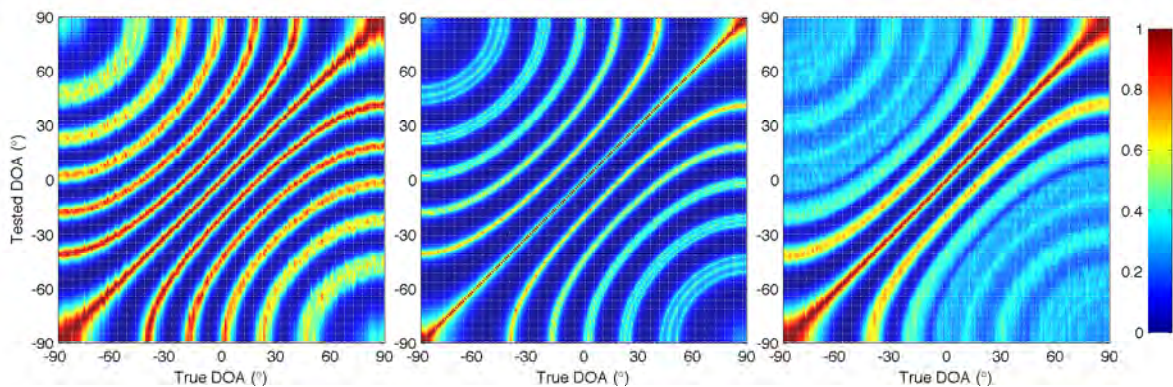


FIGURE 3.2: PLV pour le modèle champ libre. Fréquence centrale de 3kHz, et : (Gauche) RSB de 20dB, largeur de bande de 260Hz; (Centre) RSB de 60dB, largeur de bande de 260Hz; (Droite) RSB de 20dB, largeur de bande de 1kHz.

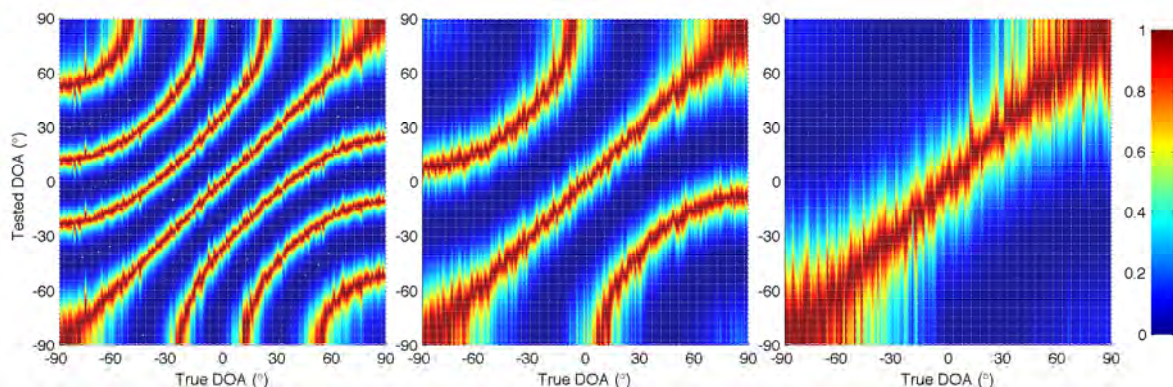


FIGURE 3.3: **PLV** pour le modèle champ libre. **RSB** de 20dB, largeur de bande de 260Hz, et : (Gauche) fréquence centrale de 1.6kHz ; (Centre) fréquence centrale de 860Hz ; (Droite) fréquence centrale de 340Hz

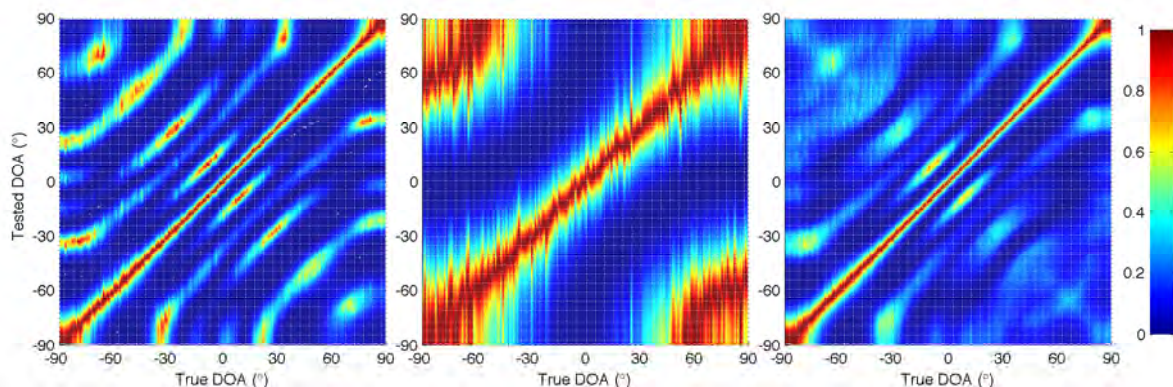


FIGURE 3.4: **PLV** pour le modèle sphère. **RSB** de 20dB, et : (Gauche) fréquence centrale de 3kHz, largeur de bande de 260Hz ; (Centre) fréquence centrale de 340Hz, largeur de bande de 260Hz ; (Droite) fréquence centrale de 3kHz, largeur de bande de 1kHz. Les conditions opérationnelles du tracé de gauche sont identiques à celles de Fig.3.2-gauche. Les conditions opérationnelles du tracé du centre sont identiques à celles de Fig.3.3-droite. Les conditions opérationnelles du tracé de droite sont identiques à celles de Fig.3.2-droite.

distributions $p(R|\text{absence de signal})$ et $p(R|\text{présence de signal})$. En vertu du théorème central-limite, ces deux distributions peuvent être approximées par des Gaussiennes pour peu que le nombre d'indices fréquentiels utilisés soit suffisamment grand et que l'hypothèse d'indépendance des $\tilde{S}_{z_2 z_1}[k]$ soit vérifiée. Les moyenne et variance de R sont alors calculés à partir des statistiques des erreurs $\epsilon[k]$ définies à l'équation 2.2.75, pour les deux hypothèses considérées (voir §2.1.2B et §2.1.2B-5 pour le calcul des statistiques à l'ordre 2 lorsque le nombre de degrés de liberté équivalent de la distribution est suffisamment grand). À noter que l'hypothèse simplificatrice d'un module au carré de la cohérence constant des signaux sur la bande de fréquence d'intérêt est faite, de sorte que les $\epsilon[k]$ sont supposés identiquement distribués.

Le seuil η du **TRV** (au-delà duquel la présence de signal est détectée) est calculé de manière à ce que la probabilité de fausse alarme

$$P_{FA} = \int_{-\infty}^{\eta} p(R|\text{absence de signal})dR \quad (3.2.2)$$

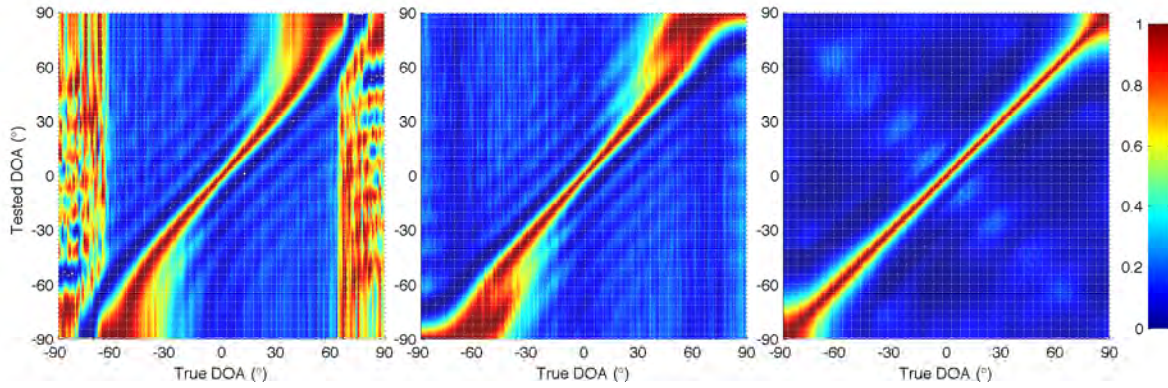


FIGURE 3.5: **PLV** pour des signaux large bande captés par des microphones en configuration antipodale sur une sphère rigide, mais en faisant l'hypothèse de divers modèles de propagation : (Gauche) dissonance induite par l'hypothèse de propagation en champ libre ; (Centre) dissonance induite par l'approximation de l'**ITD** par la formule de Woodworth-Schlossberg et par la prise en compte des variations de **ILD** ; (Droite) correspondance lorsque le modèle rend convenablement compte du phénomène de diffusion acoustique

soit égale à une valeur désirée. La probabilité de détection est alors donnée par

$$P_D = \int_{-\infty}^{\eta} p(R|\text{présence de signal})dR, \quad (3.2.3)$$

et est une fonction de P_{FA} et du **RSB** (considéré constant sur la bande de fréquence). Des courbes de ROC (*Receiver Operating Characteristics*) sont tracées pour caractériser le détecteur sous diverses conditions de **RSB**.

Cette stratégie de détection, bien qu'intéressante, repose sur un modèle de propagation en champ libre (linéarité de la phase de la **DSP** croisée des signaux). On préférera s'intéresser à des méthodes de détection ne reposant pas sur cette hypothèse.

3.2.2 Test du Rapport de Vraisemblance Généralisé basé sur des vraisemblances monaurales

Le travail présenté dans [Sohn *et al.*, 1999] concerne un schéma de détection monaural (basé sur un unique microphone). Considérons le vecteur de données relatif au $j^{\text{ième}}$ microphone, défini comme suit (en reprenant les notations du §3.1.3)

$$\mathbf{Z}_j = [Z_{j,1}[k_1], Z_{j,2}[k_1], \dots, Z_{j,N}[k_1], Z_{j,1}[k_2], Z_{j,2}[k_2], \dots, Z_{j,n}[k], \dots, Z_{j,N}[k_B]]. \quad (3.2.4)$$

Pour un modèle de source et bruits aléatoires gaussiens dans leur ensemble, et sous hypothèse d'indépendance des composantes de \mathbf{Z}_j , sa densité s'écrit

$$p_{\mathbf{Z}_j}(\mathbf{Z}_j; S_{\mathbf{z}_j\mathbf{z}_j}[k_1], \dots, S_{\mathbf{z}_j\mathbf{z}_j}[k_B]) = \prod_{n,k} \mathcal{C}\mathcal{N}(Z_{j,n}[k]; 0, S_{\mathbf{z}_j\mathbf{z}_j}[k]), \quad (3.2.5)$$

avec $S_{\mathbf{z}_j\mathbf{z}_j}(f)$ la **DSP** de $\mathbf{z}_j(f)$. On considère ici deux modèles possibles pour $S_{\mathbf{z}_j\mathbf{z}_j}(f)$, associés aux deux hypothèses mutuellement exclusives et exhaustives suivantes

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(S_{\mathbf{s}_j\mathbf{s}_j}) &: S_{\mathbf{z}_j\mathbf{z}_j} = S_{\mathbf{s}_j\mathbf{s}_j} + S_{\mathbf{n}_j\mathbf{n}_j} \text{ (présence de signal)} \\ \mathcal{H}_0 &: S_{\mathbf{z}_j\mathbf{z}_j} = S_{\mathbf{n}_j\mathbf{n}_j} \text{ (absence de signal).} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Ci-dessus, $S_{\mathbf{s}_j\mathbf{s}_j}(f)$ (resp. $S_{\mathbf{n}_j\mathbf{n}_j}(f)$) désigne la **DSP** inconnue (resp. connue) de $\mathbf{s}_j(t)$ (resp. $\mathbf{n}_j(t)$), la contribution de la source (resp. du bruit) en le $j^{\text{ième}}$ microphone. La log-vraisemblance de l'hypothèse composite alternative $\mathcal{H}_1(S_{\mathbf{s}_j\mathbf{s}_j})$ s'écrit, en omettant les termes constants sans importance

$$\ln p(\mathbf{Z}_j | \mathcal{H}_1(S_{\mathbf{s}_j\mathbf{s}_j}))[k] = -N \sum_k \left(\ln(S_{\mathbf{s}_j\mathbf{s}_j}[k] + S_{\mathbf{n}_j\mathbf{n}_j}[k]) + \frac{\hat{S}_{\mathbf{z}_j\mathbf{z}_j}}{S_{\mathbf{s}_j\mathbf{s}_j}[k] + S_{\mathbf{n}_j\mathbf{n}_j}[k]} \right) \quad (3.2.7)$$

avec

$$\hat{S}_{\mathbf{z}_j\mathbf{z}_j}[k] \triangleq \frac{1}{N} \sum_n |\mathbf{Z}_{j,n}[k]|^2 \quad (3.2.8)$$

un estimateur de $S_{\mathbf{z}_j\mathbf{z}_j}[k]$ par moyenne empirique de périodogrammes. En dérivant (3.2.7) par rapport à $S_{\mathbf{s}_j\mathbf{s}_j}$ on trouve la valeur de ce paramètre rendant l'hypothèse alternative \mathcal{H}_1 la plus vraisemblable par rapport aux données

$$\hat{S}_{\mathbf{s}_j\mathbf{s}_j} = \hat{S}_{\mathbf{z}_j\mathbf{z}_j} - S_{\mathbf{n}_j\mathbf{n}_j}. \quad (3.2.9)$$

Le logarithme du rapport de vraisemblance généralisé des deux hypothèses est alors donné par

$$\Lambda_j \triangleq \ln \left[\frac{p(\mathbf{Z}_j | \mathcal{H}_1(\hat{S}_{\mathbf{s}_j\mathbf{s}_j}))}{p(\mathbf{Z}_j | \mathcal{H}_0)} \right] = \sum_k \left[-\ln(1 + \hat{\xi}_j[k]) + \frac{\gamma_j[k] \hat{\xi}_j[k]}{1 + \hat{\xi}_j[k]} \right], \quad (3.2.10)$$

où $\xi_j[k] = S_{\mathbf{s}_j\mathbf{s}_j}[k]/S_{\mathbf{n}_j\mathbf{n}_j}[k]$ et $\gamma_j[k] = \hat{S}_{\mathbf{z}_j\mathbf{z}_j}[k]/S_{\mathbf{n}_j\mathbf{n}_j}[k]$ désignent respectivement les **RSB a priori** et **a posteriori** du récepteur j [Ephraim et Malah, 1984]. $\hat{\xi}_j[k]$ désigne quant à lui l'**EMV** du **RSB a priori** sous hypothèses de présence de signal. Il s'exprime en fonction du **RSB a posteriori** par

$$\hat{\xi}_j[k] = \frac{\hat{S}_{\mathbf{s}_j\mathbf{s}_j}}{S_{\mathbf{n}_j\mathbf{n}_j}} = \gamma_j[k] - 1, \quad (3.2.11)$$

ce qui donne finalement

$$\Lambda_j = \sum_k (-\ln \gamma_j[k] + \gamma_j[k] - 1). \quad (3.2.12)$$

La présence de signal est détectée ou non en le microphone j à partir du Test du Rapport de Vraisemblance Généralisé (**TRVG**)

$$\Lambda_j \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \eta \quad (3.2.13)$$

La façon dont cet algorithme de détection, conçu pour un système monaural, est étendu au cas de plusieurs microphones est cependant relativement floue dans certaines contributions. On imagine que la présence de signal est globalement détectée si par exemple elle est détectée en un certain nombre des microphones (système de vote). Par contre, définir un rapport de vraisemblance généralisé «global» par construction de la moyenne géométrique des rapports de vraisemblance associés à chaque microphone n'est pas consistant, car cela sous-entendrait une indépendance des signaux perçus en les microphones, ce qui n'est certainement pas le cas.

Dans tous les cas, nous pensons que cette approche n'est pas adaptée au cas de plusieurs microphones, car elle combine de manière *ad hoc* des informations monaurales, sans chercher à exploiter l'avantage que présente un réseau (ou une paire) de microphones : la corrélation entre les voies. En d'autres termes, on propose dans ce qui suit de construire un test sur la base de la densité *conjointe* du vecteur des données, et pas uniquement des densités *marginales* associées à chaque microphone. En particulier, pour des bruits **iid**, on pourra détecter de manière consistante l'absence ou la présence de signal sans apprentissage *a priori* des statistiques du bruit.

3.2.3 Détection basée sur la théorie de l'information

A Une brève introduction à l'identification statistique

Considérons un vecteur aléatoire Z dont la **ddp** est notée $p(z)$, et considérons une fonction $q(z|\rho)$ paramétrée par le vecteur ρ , définissant une densité et servant de modèle pour $p(z)$. La divergence de Kullback-Leibler

$$\mathcal{K}(p, q(\cdot|\rho)) \triangleq \int p(z) \ln \left(\frac{p(z)}{q(z|\rho)} \right) dz \quad (3.2.14)$$

caractérise l'information moyenne perdue lorsque $q(z|\rho)$ est utilisée pour approximer $p(z)$. En vue de trouver la valeur de ρ pour laquelle $q(z|\rho)$ approxime au mieux $p(z)$, on peut donc chercher à minimiser $\mathcal{K}(p, q(\cdot|\rho))$, ou de manière équivalente

$$\mathcal{B}(p, q(\cdot|\rho)) \triangleq - \int p(z) \ln q(z|\rho) dz, \quad (3.2.15)$$

par rapport à ρ . Étant donné N échantillons **iid** z_1, z_2, \dots, z_N de Z , la log-vraisemblance négative moyenne de ρ

$$\text{LVN}(z_1, z_2, \dots, z_N|\rho) = - \frac{1}{N} \sum_n \ln q(z_n|\rho) \quad (3.2.16)$$

définit une estimée de $\mathcal{B}(p, q(\cdot|\rho))$, qui peut être calculée indépendamment de p , et converge presque sûrement (§7.4.16) vers cette dernière pour $N \rightarrow \infty$. Son argmin

$$\hat{\rho} \triangleq \operatorname{argmin}_\rho \text{LVN}(z_1, z_2, \dots, z_N|\rho) = \operatorname{argmax}_\rho q(z_1, z_2, \dots, z_N|\rho) \quad (3.2.17)$$

constitue l'**EMV** de ρ et est connu pour être, sous certaines conditions de régularité, asymptotiquement efficace.

Lorsque plusieurs modèles sont en compétition, la minimisation d'une estimée de $\mathcal{B}(p, q(\cdot|\rho))$ n'est plus une solution cohérente à l'identification statistique. C'est le cas lorsque ces modèles se présentent sous différentes formes de $q(z|\rho)$ ou sous la même forme mais avec différentes restrictions sur le vecteur de paramètres ρ . En effet, dans ces conditions le modèle possédant le plus grand nombre de degrés de liberté (*i.e.* le nombre de paramètres indépendants décrivant $q(z|\rho)$) est favorisé en moyenne (biais asymptotique sur la sélection du modèle). Comme solution [Akaike, 1974] propose le critère **AIC**, défini de sorte que $\frac{1}{N} \text{AIC}(\rho)$ constitue en moyenne un estimé de $2\{\mathcal{B}(p, q(\cdot|\rho))\}$. Ce critère s'écrit

$$\text{AIC}(\rho) = 2N \text{LVN}(z_1, z_2, \dots, z_N|\rho) + 2k, \quad (3.2.18)$$

avec k le nombre de paramètres libres dans ρ , pénalisant les modèles pour lesquels la dimension de l'espace admissible sur lequel l'optimisation de ρ est réalisée est élevée. Dans le cas de modèles en compétition, la valeur de ρ minimisant le critère **AIC**², dénommée *Minimum Akaike Information Criterion Estimate* (**MAICE**) doit être sélectionnée. Dans le cas d'un unique modèle, le **MAICE** coïncide avec l'**EMV**.

B Application à la détection d'activité de source large-bande

Définissons le paramètre $d \in \{0, 1\}$ de sorte que $d = 1$ (resp. $d = 0$) indique que l'émetteur est actif (resp. inactif). La décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance $C_z[k]$, en fonction de la valeur de d , est notée $C_d[k]$ et s'écrit [Wax et Kailath, 1985]

$$C_d[k] = \begin{cases} \lambda_k U_k U_k^\dagger + \sigma^2[k] (\mathbb{I}_2 - U_k U_k^\dagger) & \text{si } d = 1 \\ \sigma^2[k] \mathbb{I}_2 & \text{si } d = 0. \end{cases} \quad (3.2.19)$$

2. A (or Akaike) Information Criterion—AIC.

Ci-dessus, U_k est le vecteur propre—de norme unitaire—de $C_1[k]$ associé à la valeur propre λ_k , qui engendre le dit *sous-espace signal*; $U_k U_k^\dagger$ est le projecteur orthogonal sur le sous-espace signal. $\mathbb{I}_2 - U_k U_k^\dagger$ est le complément orthogonal de $U_k U_k^\dagger$, appelé *projecteur sur le sous-espace bruit*. Notons que $\lambda_k - \sigma^2[k]$ est l'unique valeur propre non nulle de $S_{\text{ss}}[k] V_\theta[k] V_\theta[k]^\dagger$, donc $\lambda_k > \sigma^2[k]$. De l'équation (3.2.19), on déduit un vecteur de paramètres caractérisant entièrement la **ddp** de Z pour chaque valeur de d :

$$\rho_d = \begin{cases} \left[\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_B}, \sigma^2[k_1], \dots, \sigma^2[k_B], U'_{k_1}, \dots, U'_{k_B} \right]' & \text{pour } d = 1 \\ \left[\sigma^2[k_1], \dots, \sigma^2[k_B] \right]' & \text{pour } d = 0 \end{cases} \quad (3.2.20)$$

Quelle que soit la valeur de $d \in \{0, 1\}$ la log-vraisemblance de ρ_d par rapport à Z s'écrit

$$L(Z; \rho_d) = c_0 - N \sum_k \left(\ln |C_d[k]| + \text{tr}(C_d[k]^{-1} \hat{C}[k]) \right). \quad (3.2.21)$$

Pour $k \in \{k_1, \dots, k_B\}$, définissons $\ell_{1,k}, \ell_{2,k}$, les deux valeurs propres de $\hat{C}[k]$ (strictement positives presque sûrement si le nombre de trames N vérifie $N \geq 2$), ordonnées de sorte que $\ell_{1,k} \geq \ell_{2,k}$, et définissons $\tilde{U}_{1,k}, \tilde{U}_{2,k}$ les vecteurs propres de $\hat{C}[k]$ associés respectivement à $\ell_{1,k}$ et $\ell_{2,k}$.

THÉORÈME 3.2.1 Détecteur d'activité par **MAICE**.

l'estimateur par minimum du critère d'information d'Akaike \hat{d}_{AIC} est l'argument minimisant

$$\text{AIC}(d) = -2\tilde{L}(Z; \hat{\rho}_d) + 2P(d), \quad (3.2.22)$$

$$(3.2.23)$$

avec $\hat{\rho}_d$ l'**EMV** de ρ_d ,

$$\tilde{L}(Z; \hat{\rho}_d) = \sum_k \ln \left(\frac{\prod_{i=d+1}^2 \ell_{i,k}^{\frac{1}{2-d}}}{\frac{1}{2-d} \sum_{i=d+1}^2 \ell_{i,k}} \right)^{(2-d)N}, \quad (3.2.24)$$

$$P(d) = (d+1)B + 4dB - 2dB. \quad (3.2.25)$$

PREUVE En injectant (3.2.19) dans (3.2.21) dans le cas $d = 1$, et en utilisant le fait que $U_k^\dagger U_k = 1$ on obtient

$$L(Z; \rho_1) = c_0 - N \sum_k \left(\ln(\lambda_k \sigma^2[k]) + \frac{1}{\sigma^2[k]} \text{tr}(\hat{C}[k]) - \left(\frac{1}{\sigma^2[k]} - \frac{1}{\lambda_k} \right) \text{tr}(\hat{C}[k] U_k U_k^\dagger) \right), \quad (3.2.26)$$

qui est maximisé—sous la contrainte $U_k^\dagger U_k = 1$ —en la valeur $\hat{\rho}_1$ de ρ_1 satisfaisant

$$\begin{cases} \hat{U}_k = \tilde{U}_{1,k} \\ \hat{\lambda}_k = \text{tr}(\hat{C}[k] \tilde{U}_{1,k} \tilde{U}_{1,k}^\dagger) = \ell_{1,k} \\ \hat{\sigma}^2[k] = \text{tr}(\hat{C}[k] (\mathbb{I}_2 - \tilde{U}_{1,k} \tilde{U}_{1,k}^\dagger)) = \ell_{2,k}. \end{cases} \quad (3.2.27)$$

En utilisant (3.2.27) dans (3.2.26) il vient finalement

$$L(Z; \hat{\rho}_1) = c_2 - 2N \sum_k \ln(\sqrt{l_{1,k} l_{2,k}}). \quad (3.2.28)$$

Dans la même veine, injecter (3.2.19) dans (3.2.21) dans le cas $d = 0$ donne

$$L(Z; \rho_0) = c_0 - 2N \sum_k \ln(\sigma^2[k]) - N \sum_k \frac{\text{tr}(\hat{C}[k])}{\sigma^2[k]}, \quad (3.2.29)$$

qui atteint son maximum pour

$$\hat{\sigma}^2[k] = \frac{1}{2} \text{tr}(\hat{C}[k]) = \frac{l_{1,k} + l_{2,k}}{2}. \quad (3.2.30)$$

Ainsi, la valeur maximale de (3.2.29) vaut

$$L(Z; \hat{\rho}_0) = c_2 - 2N \sum_k \ln\left(\frac{l_{1,k} + l_{2,k}}{2}\right). \quad (3.2.31)$$

Sans perte de généralité, la log-vraisemblance peut être normalisée en posant

$$\tilde{L}(Z; \hat{\rho}_d) \triangleq L(Z; \hat{\rho}_d) - L(Z; \hat{\rho}_1), \quad (3.2.32)$$

qui mène à (3.2.24) dans la veine de [Wax et Kailath, 1985][Danes et Bonnal, 2010]. Notons que dans (3.2.24), le terme entre parenthèses apparaît être le rapport entre les moyennes géométrique et arithmétique des $2 - d$ plus petites valeurs propres de $\hat{C}[k]$. Dans (3.2.25), $(d + 1)B$ est le nombre de valeurs propres distinctes dans l'ensemble $\{C_d[k_1], \dots, C_d[k_B]\}$, $4dB$ est le nombre de coefficients des composantes complexes des vecteurs propres du sous-espace signal, et $-2dB$ est la réduction du nombre de degrés de liberté dans ρ_d en raison de la normalisation de ces vecteurs propres. ■

Filtrage Bayésien

Ce chapitre concerne le dernier niveau du schéma de localisation active binaurale, à savoir l'assimilation, dans un filtre stochastique, des indices spatiaux extraits des signaux binauraux à court-terme selon les méthodes des chapitres 2–3, et leur fusion avec les ordres moteurs du capteur sur la base de l'équation de dynamique a priori présentée au §1.2.3. On considère une source sonore unique, éventuellement intermittente. L'extraction des indices spatiaux court-terme peut être entachée de fausses mesures.

Dans un premier temps, le capteur binaural est supposé en champ libre. L'estimation étant mise en œuvre par ordinateur, on discrétise tout d'abord la représentation d'état à temps continu (§4.1). Après une introduction au filtrage stochastique (§4.2), on propose une stratégie permettant d'assurer l'initialisation automatique et la consistance de l'estimateur (§4.3) et on l'évalue en simulation (§4.4). Le chapitre se poursuit (§4.5) par un résumé du problème voisin du «Bearings-Only Tracking», longuement étudié dans la littérature, et une étude de ses connexions avec la localisation active. Ensuite, on propose des solutions à la présence de fausses mesures (§4.6), à la détection d'activité de la source conjointement à sa localisation (§4.7), et on les évalue expérimentalement (§4.8). En conclusion, l'extension de ces schémas à un capteur binaural monté sur une tête est présentée et évaluée expérimentalement.

On rappelle que des perspectives pour la localisation multi-sources font l'objet du dernier chapitre du manuscrit (§5).

4.1 DISCRÉTISATION DE L'ÉQUATION D'ÉTAT À TEMPS CONTINU

En vue d'appliquer une stratégie de filtrage à temps discret, nous discrétisons l'équation d'état à temps continu (1.2.51). Cette discrétisation est donnée dans le théorème suivant.

THÉORÈME 4.1.1 Discrétisation de l'équation d'état à temps continu.

Soit T_s la période d'échantillonnage du système considéré. Pour un processus f , on note $f_k \triangleq f(kT_s)$. Lorsque les torseurs cinématiques du capteur et de l'émetteur sont bloqués à l'ordre zéro (BOZ) à la période d'échantillonnage T_s , (1.2.51) peut être convertie en l'équation d'état à temps discret exacte suivante :

$$x_{k+1} = F(\omega_k)x_k + G_1(\omega_k)u_{1k} + G_2(\lambda_k, \omega_k)u_{2k}$$

avec

$$\begin{aligned}
 x_k &\triangleq \begin{bmatrix} e_{yk} \\ e_{zk} \\ \lambda_k \end{bmatrix}, \quad u_{1k} \triangleq \begin{bmatrix} v_{Ryk} \\ v_{Rzk} \\ \omega_k \end{bmatrix}, \quad u_{2k} \triangleq \begin{bmatrix} v_{Ey_k} \\ v_{Ez_k} \end{bmatrix}, \\
 F(\omega_k) &= \begin{bmatrix} \cos(\omega_k T_s) & \sin(\omega_k T_s) & 0 \\ -\sin(\omega_k T_s) & \cos(\omega_k T_s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_1(\omega_k) = \begin{bmatrix} -\frac{\sin(\omega_k T_s)}{\omega_k} & \frac{\cos(\omega_k T_s)-1}{\omega_k} & 0 \\ -\frac{\cos(\omega_k T_s)-1}{\omega_k} & -\frac{\sin(\omega_k T_s)}{\omega_k} & 0 \\ 0 & 0 & -T_s \end{bmatrix}, \\
 G_2(\lambda_k, \omega_k) &= T_s \begin{bmatrix} \cos(\lambda_k - \omega_k T_s) & -\sin(\lambda_k - \omega_k T_s) \\ \sin(\lambda_k - \omega_k T_s) & \cos(\lambda_k - \omega_k T_s) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.1.3}
 \end{aligned}$$

PREUVE La preuve se trouve en annexe 7.6. ■

4.2 STRATÉGIES DE FILTRAGE

4.2.1 Conventions et notations

Les vecteurs aléatoires sont notés en fonte `typewriter`. Si \mathbf{u} est un vecteur aléatoire, alors u désigne, selon le contexte, une réalisation de \mathbf{u} (*i.e.* $u = \mathbf{u}(\omega)$, où ω est un événement de l'univers Ω , ensemble de départ de \mathbf{u} , muni d'une probabilité \mathbb{P} et d'une σ -algèbre qu'on ne spécifiera pas), ou l'argument de la `ddp` $p_{\mathbf{u}}$. La `ddp` conditionnelle $p_{\mathbf{u}|v}(u|v)$ de \mathbf{u} sachant $\{v = v\}$ est notée pour simplifier $p(u|v)$. Si \mathbf{w} est un vecteur aléatoire discret, $p(w)$ désigne par convention $\mathbb{P}\{\mathbf{w} = w\}$; il s'agit de la fonction de masse de probabilité (mdp) de \mathbf{w} . Les processus d'état et d'observation sont notés \mathbf{x} et \mathbf{z} , respectivement. \mathbf{x}_k ou \mathbf{z}_k désignent le vecteur aléatoire que définit \mathbf{x} ou \mathbf{z} à l'itération $k \in \mathbb{N}$. On note par convention $x_{0:k}$ (resp. $z_{1:k}$) une réalisation de $\mathbf{x}_{0:k} \triangleq [x_0', \dots, x_k']'$ (resp. $\mathbf{z}_{1:k} \triangleq [z_1', \dots, z_k']'$). On confondra parfois par abus de langage un vecteur aléatoire et sa réalisation, sa loi de probabilité (ou distribution) et sa `ddp`. En particulier, le terme *observation* peut désigner, selon le contexte, le vecteur aléatoire \mathbf{z}_k ou bien sa réalisation z_k . pour $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:\ell}$ (resp. $\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:\ell}$) est parfois noté $\mathbf{x}_{k|\ell}$ (resp. $\mathbf{z}_{k|\ell}$).

4.2.2 Cadre de travail

Nous disposons d'une équation d'état discrète donnée dans le théorème 4.1.1, décrivant l'évolution de la position et de l'orientation relatives de l'émetteur par rapport au capteur, en fonction des vitesses du capteur et de l'émetteur. Pour tenir compte d'erreurs possibles entre la réalité et ce modèle déterministe théorique, l'équation d'état stochastique

$$\mathbf{x}_{k+1} = F(\omega_k)\mathbf{x}_k + G_1(\omega_k)u_{1k} + G_2(\lambda_k, \omega_k)u_{2k} + \mathbf{w}_k \tag{4.2.1}$$

est introduite en ajoutant un bruit de dynamique aléatoire gaussien \mathbf{w}_k de statistiques connues, et en transformant le processus déterministe x en processus aléatoire \mathbf{x} . Concernant l'émetteur, soit celui-ci est supposé parfaitement immobile, auquel cas $u_2 \equiv 0$ et \mathbf{w} ne modélise qu'une erreur sur le déplacement du capteur, soit celui-ci est supposé suivre une marche aléatoire gaussienne `iid`, *i.e.* u_2 est transformé en \mathbf{u}_2 , et $\mathbf{u}_{20:k}$ est supposé échantillonné selon une loi gaussienne centrée, avec, pour tout i, j , $\mathbb{E}\{\mathbf{u}_{2j}\mathbf{u}_{2\ell}'\} = Q_{\mathbf{u}_2}\delta_{j,\ell}$ et $Q_{\mathbf{u}_2} = \sigma_{\mathbf{u}_2}^2 \mathbb{I}_2$ connue. Dans ce second cas de figure, du fait que les observations sont indépendantes de λ et sous certaines hypothèses faibles, le terme $G_2(\lambda_k, \omega_k)\mathbf{u}_{2k}$ peut être intégré au bruit de dynamique \mathbf{w}_k , qui modélise alors une incertitude sur

les mouvements du capteur ET de l'émetteur. Dans les deux cas de figure, l'équation d'état se réduit donc à

$$\mathbf{x}_{k+1} = F(\omega_k)\mathbf{x}_k + G_1(\omega_k)u_{1k} + \mathbf{w}_k, \quad (4.2.2)$$

que l'on notera de manière plus compacte $\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, u_{1k}) + \mathbf{w}_k$. Des mouvements plus complexes de l'émetteur pourraient être envisagés, mais sortent du cadre de cette thèse.

Concernant le modèle d'observation, l'hypothèse de propagation en champ libre est faite, exception faite du §4.9. Dans ce cas les observations $z_{1:k}$ sont les ITD estimés sur des fenêtres court terme (quelques dizaines de millisecondes) associées aux instants $1, \dots, k$, sur la base d'une des méthodes décrites au chapitre 2. L'équation d'observation utilisée est donc

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k, \quad (4.2.3)$$

où h est explicitée en équation 1.2.52, et où \mathbf{v}_k est un bruit d'observation représentant une erreur sur l'estimation d'ITD due à la présence de bruit acoustique, à la durée finie des fenêtres d'observations, etc.

4.2.3 Hypothèses de travail

Le processus d'état \mathbf{x} est supposé markovien de distribution initiale $p(x_0)$ et de loi de transition—ou *dynamique*— $p(x_k|x_{0:k-1}) = p(x_k|x_{k-1})$. Les observations sont considérées indépendantes conditionnellement au processus d'état, et l'observation à l'instant k ne dépend que de l'état au même instant, ce qui donne

$$\begin{aligned} p(z_{1:k}|x_{0:k}) &= p(z_k|x_{0:k})p(z_{1:k-1}|x_{0:k}), \\ \text{avec } p(z_k|x_{0:k}) &= p(z_k|x_{0:k}, z_{1:k-1}) = p(z_k|x_k), \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

où $p(z_k|x_k)$ exprime aussi la *vraisemblance* de x_k par rapport à z_k . Le vecteur d'état à l'instant k et le processus d'observation à $k-1$ sont en outre supposés indépendants conditionnellement au processus d'état à $k-1$, selon

$$\begin{aligned} p(x_k, z_{1:k-1}|x_{0:k-1}) &= p(x_k|x_{0:k-1})p(z_{1:k-1}|x_{0:k-1}), \\ \text{avec } p(x_k|x_{0:k-1}) &= p(x_k|x_{0:k-1}, z_{1:k-1}) = p(x_k|x_{k-1}). \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

La représentation d'état

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, u_{1k}) + \mathbf{w}_k, \quad (4.2.6)$$

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad (4.2.7)$$

où f et h sont non linéaires et où les bruits de dynamique et de mesure \mathbf{w}, \mathbf{v} sont blancs, mutuellement indépendants, et indépendants de \mathbf{x}_0 satisfait aux hypothèses énoncées précédemment.

4.2.4 Le filtrage Bayésien optimal et sa solution récursive exacte

Sur la base des hypothèses précédentes, le filtrage Bayésien optimal consiste à calculer récursivement la **ddp** conjointe *a posteriori* $p(x_{0:k}|z_{1:k})$. Dans ce qui suit, on se focalisera sur le calcul de la **ddp** marginale $p(x_k|z_{1:k})$, aussi appelée densité de filtrage. Ce calcul est basé sur l'application de la règle de Bayes

$$p(x_k|z_{1:k}) = \frac{p(z_k|x_k, z_{1:k-1})p(x_k|z_{1:k-1})}{p(z_k|z_{1:k-1})} = \frac{p(z_k|x_k)p(x_k|z_{1:k-1})}{p(z_k|z_{1:k-1})}. \quad (4.2.8)$$

La marginalisation de $p(x_{0:k}|z_{1:k-1}) = p(x_k|x_{0:k-1}, z_{1:k-1})p(x_{0:k-1}|z_{1:k-1})$ selon $x_{0:k-1}$ conduit à l'équation de Chapman-Kolmogorov, qui donne, en appliquant la propriété (4.2.5), la densité de prédiction $p(x_k|z_{1:k-1})$ à l'instant k en fonction de la densité de filtrage à l'instant $k-1$ et de la loi de transition selon

$$p(x_k|z_{1:k-1}) = \int p(x_k|x_{k-1})p(x_{k-1}|z_{1:k-1})dx_{k-1}. \quad (4.2.9)$$

La constante de normalisation $p(z_k|z_{1:k-1})$ est quant à elle obtenue par marginalisation de $p(z_k, x_{0:k}|z_{1:k-1}) = p(z_k|x_{0:k}, z_{1:k-1})p(x_{0:k}|z_{1:k-1})$ selon $x_{0:k}$ et s'exprime, en utilisant la propriété (4.2.4), en fonction de la vraisemblance et de la densité de prédiction à l'instant k selon

$$p(z_k|z_{1:k-1}) = \int p(z_k|x_k)p(x_k|z_{1:k-1})dx_k. \quad (4.2.10)$$

Le calcul récursif de la densité *a posteriori* ne possède d'expression analytique que dans un nombre restreint de cas. Dans le cas d'un système linéaire où l'état initial et les bruits d'observation et de dynamique sont gaussiens dans leur ensemble, il est montré que la densité de filtrage est une gaussienne. Elle est donc entièrement caractérisée par sa moyenne et sa matrice de covariance. Le filtre de Kalman (FK) [Kalman, 1960] permet alors la propagation récursive de l'expression analytique de ces deux moments. Pour des modèles plus complexes (*e.g.* non linéaires et/ou non gaussiens), la solution exacte ne peut être déterminée, et des solutions approchées deviennent nécessaires.

Il existe différentes approches pour traiter un problème de filtrage non linéaire à bruits de dynamique et d'observation non gaussiens. Parmi les plus utilisées, on peut citer l'approche par *filtrage particulière* et l'approche par *extensions du filtre de Kalman*. L'approche particulière a reçu un très grand intérêt ces dernières années dans la communauté du filtrage Bayésien et de nombreuses stratégies ont été développées [Gordon *et al.*, 1993]–[Pitt et Shephard, 1999]–[Doucet *et al.*, 2000]–[Merwe et Wan, 2003]–[Kotecha *et al.*, 2003] (voir un aperçu de ces méthodes dans [Arulampalam *et al.*, 2002]) et appliquées à des domaines variés, *e.g.* le suivi visuel pour l'interaction homme-robot [Brèthes *et al.*, 2010]. Dans le contexte de la localisation binaurale par filtrage Bayésien, l'approche particulière est très souvent privilégiée (*cf* chapitre introductif de ce manuscrit). Pour justifier cette approche, l'argument de la non-Gaussianité des bruits ou de la multimodalité de la distribution *a posteriori* de l'état et de la fonction de vraisemblance est souvent invoqué.

Dans ce manuscrit, nous abordons la localisation binaurale active via l'exploitation d'extensions du filtrage de Kalman plutôt que par filtrage particulière. En effet, le problème est caractérisé par : (1) une distribution *a priori* de l'état très étalée ; (2) des observations qui ne renseignent que sur une certaine composante du vecteur d'état ; (3) des pics de vraisemblance potentiellement très étroits. Il est communément admis que ce genre de difficultés pose problème pour des stratégies particulières «simples» (*e.g.* stratégie *Sequential Importance Resampling*), voire pour des stratégies plus évoluées (*e.g.* stratégie *Auxiliary*). L'idée ici n'est pas de faire une étude comparative entre les deux approches, mais de montrer qu'une approche par filtrage de Kalman donne des résultats tout à fait satisfaisants dans notre problème. Il existe certainement des méthodes particulières adaptées aux difficultés soulevées précédemment, mais nous défendons l'idée que le paradigme particulière ne doit pas être privilégié de manière systématique. Selon nous, l'approche particulière est à envisager principalement lorsqu'il n'existe pas d'expression analytique du lien état-mesure (dans la veine de [Brèthes *et al.*, 2010]), ce qui n'est pas le cas dans le problème considéré. Une contribution ponctuelle combinant les résultats du chapitre 3 avec une stratégie *Sequential Importance Resampling* au moyen de distributions circulaires est toutefois disponible dans [Marković *et al.*, 2014].

Nous commençons par rappeler brièvement le principe du filtre de Kalman. Ce rappel nous semble nécessaire, dans la mesure où ce filtre est à la base de tous les algorithmes qui seront

présentés ultérieurement. Par ailleurs, il permet d'introduire des notations qui seront utilisées tout au long de ce chapitre.

4.2.5 Le filtre de Kalman

Le filtre de Kalman découle de l'application de la règle de Bayes pour les modèles linéaires de la forme

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= F_k \mathbf{x}_k + G_k u_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k &= H_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \end{cases} \quad (4.2.11)$$

avec $\mathbf{x}_0, \mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k$ gaussiens dans leur ensemble, $\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k$ centrés, blancs, mutuellement indépendants et indépendants de \mathbf{x}_0 . Ces hypothèses se résument en

$$\forall k_1, k_2, \begin{cases} [\mathbf{x}'_0, \mathbf{w}'_{k_1}, \mathbf{v}'_{k_2}]' \text{ gaussien,} \\ \mathbb{E}\{[\mathbf{x}'_0, \mathbf{w}'_{k_1}, \mathbf{v}'_{k_1}]'\} = [m'_{\mathbf{x}_0}, 0', 0']', \\ \mathbb{E} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 - m_{\mathbf{x}_0} \\ \mathbf{w}_{k_1} \\ \mathbf{v}_{k_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 - m_{\mathbf{x}_0} \\ \mathbf{w}_{k_2} \\ \mathbf{v}_{k_2} \end{bmatrix}' \right\} = \begin{bmatrix} P_{\mathbf{x}_0} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & Q_{k_1} \delta_{k_1, k_2} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & R_{k_1} \delta_{k_1, k_2} \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (4.2.12)$$

où $m_{\mathbf{x}_0}, P_{\mathbf{x}_0} \geq 0, Q_k \geq 0, R_k > 0$ sont donnés et où δ_{k_1, k_2} désigne le symbole de Kronecker. Il vient alors que $\mathbf{x}_{0:k}$ et $\mathbf{z}_{1:k}$ sont gaussiens dans leur ensemble. Par propriétés des vecteurs aléatoires gaussiens, il en découle que $p(x_k | z_{1:k})$ et $p(x_k, z_k | z_{1:k-1})$ sont des lois gaussiennes. On définit ci-dessous les moments qui les caractérisent :

- $\hat{\mathbf{x}}_{k|k} \triangleq \mathbb{E}\{\mathbf{x}_k | z_{1:k}\},$
- $P_{k|k} \triangleq \mathbb{E}\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})' | z_{1:k}\},$
- $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \triangleq \mathbb{E}\{\mathbf{x}_k | z_{1:k-1}\},$
- $P_{k|k-1} \triangleq \mathbb{E}\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})' | z_{1:k-1}\},$
- $\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \triangleq \mathbb{E}\{\mathbf{z}_k | z_{1:k-1}\},$
- $S_{k|k-1} \triangleq \mathbb{E}\{(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})' | z_{1:k-1}\},$
- $T_{k|k-1} \triangleq \mathbb{E}\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})' | z_{1:k-1}\}.$

Le filtre de Kalman consiste en le calcul récursif de ces moments. La mise en place de ce calcul est brièvement présentée ci-après. $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, P_{k|k-1}$ sont déduits de $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}$ sur la base de l'équation d'état, selon

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = F_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + G_{k-1} u_{k-1}, \quad (4.2.13)$$

$$P_{k|k-1} = F_{k-1} P_{k-1|k-1} F_{k-1}' + Q_{k-1}. \quad (4.2.14)$$

De là, $\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}, S_{k|k-1}, T_{k|k-1}$ peuvent être calculés sur la base de l'équation d'observation, selon

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = H_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \quad (4.2.15)$$

$$S_{k|k-1} = H_k P_{k|k-1} H_k' + R_k, \quad (4.2.16)$$

$$T_{k|k-1} = P_{k|k-1} H_k'. \quad (4.2.17)$$

Les équations (4.2.13) à (4.2.17) constituent l'étape de prédiction du filtre. L'étape de mise à jour consiste en le calcul de $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, P_{k|k}$ sur la base de l'observation courante z_k et de la règle de Bayes dans le cas gaussien, selon

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k (z_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}), \quad (4.2.18)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k S_{k|k-1} K_k', \quad (4.2.19)$$

avec $K_k \triangleq T_{k|k-1} (S_{k|k-1})^{-1}$ le fameux gain de Kalman. Dans la suite de ce chapitre, nous considérons que $Q_k = Q$ et $R_k = R$ sont indépendants de k .

4.2.6 Extensions non linéaires du filtre de Kalman

Dans notre problème comme dans un grand nombre d'applications, le modèle d'état est non linéaire. De ce fait, même si l'état initial et les bruits de dynamique et de mesure sont gaussiens dans leur ensemble, les densités de prédiction et de filtrage ne sont plus gaussiennes. Les extensions non linéaires du FK consistent à approximer les densités de prédiction $p(x_k|z_{1:k-1})$ et de filtrage $p(x_k|z_{1:k})$ par des gaussiennes, et donc à maintenir constant le nombre de paramètres décrivant ces distributions, au prix d'une perte d'information.

Le Filtre de Kalman Étendu (FKE) permet la détermination approchée des moyenne et matrice de covariance *a posteriori* du vecteur d'état en linéarisant au premier ordre les équations de dynamique et d'observation au voisinage de l'état estimé à l'itération précédente et de l'état prédit à l'itération courante respectivement [Jazwinski, 1970]. Bien que le FKE soit très largement utilisé dans de nombreux domaines d'application depuis plusieurs décennies, il est globalement reconnu que sa mise en œuvre et le réglage de ses paramètres ne sont pas aisés et que des problèmes de stabilité apparaissent pour des systèmes à fortes non-linéarités. En outre, le calcul de matrices Jacobiennes inhérent au FKE mène souvent à des difficultés supplémentaires en terme de mise en œuvre.

Plus récemment, Julier et Uhlman [Julier et Uhlmann, 1997] ont proposé le Filtre de Kalman Unscented (FKU), une alternative au FKE reposant sur la *transformée unscented*, une technique de linéarisation statistique permettant de propager les deux premiers moments d'une distribution à travers une fonction non linéaire sans recourir au calcul de matrice Jacobienne.

A Transformée unscented et filtre de Kalman unscented

Considérons deux vecteurs aléatoires \mathbf{x} et \mathbf{y} (de dimensions n_x et n_y respectivement) unis par la relation

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}), \quad (4.2.20)$$

où f est une fonction non linéaire quelconque. Pour $\mathbf{z} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, on note $\bar{\mathbf{z}} \triangleq \mathbb{E}\{\mathbf{z}\}$, $P_{\mathbf{z}\mathbf{z}} \triangleq \mathbb{E}\{(\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}})(\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}})'\}$. La transformée unscented permet une approximation de $\bar{\mathbf{y}}$ et $P_{\mathbf{y}\mathbf{y}}$ sur la base d'un échantillonnage déterministe de la loi de \mathbf{x} au moyen de $2n_x + 1$ σ -points $\{\mathcal{X}_i\}_{i=0, \dots, 2n_x}$ choisis de manière à capturer l'information sur les deux premiers moments de \mathbf{x} . Ceux-ci s'écrivent

$$\begin{cases} \mathcal{X}_0 &= \bar{\mathbf{x}} \\ \mathcal{X}_i &= \bar{\mathbf{x}} + \left(\sqrt{(n_x + \lambda) P_{\mathbf{x}\mathbf{x}}} \right)_i, \mathcal{X}_{2n_x+i} = \bar{\mathbf{x}} - \left(\sqrt{(n_x + \lambda) P_{\mathbf{x}\mathbf{x}}} \right)_i \text{ pour } i = 1, \dots, n_x \end{cases} \quad (4.2.21)$$

où $\lambda = \alpha^2(n_x + \kappa) - n_x$ est un paramètre de réglage, fonction de deux variables α et κ , caractérisant la dispersion des σ -points autour de $\bar{\mathbf{x}}$, et où $\left(\sqrt{(n_x + \lambda) P_{\mathbf{x}\mathbf{x}}} \right)_i$ est la $i^{\text{ème}}$ colonne d'une matrice racine carrée de $(n_x + \lambda) P_{\mathbf{x}\mathbf{x}}$ (*i.e.* une matrice A —elle n'est pas unique—vérifiant $AA' = (n_x + \lambda) P_{\mathbf{x}\mathbf{x}}$). La décomposition de Choleski est généralement choisie pour calculer cette racine carrée, en raison de la rapidité et de la stabilité numérique des algorithmes associés (complexité algorithmique en $\mathcal{O}(n_x^3)$). Les σ -points sont ensuite propagés à travers la fonction f , donnant

$$\mathcal{Y}_i = f(\mathcal{X}_i), \text{ pour } i = 0, \dots, 2n_x. \quad (4.2.22)$$

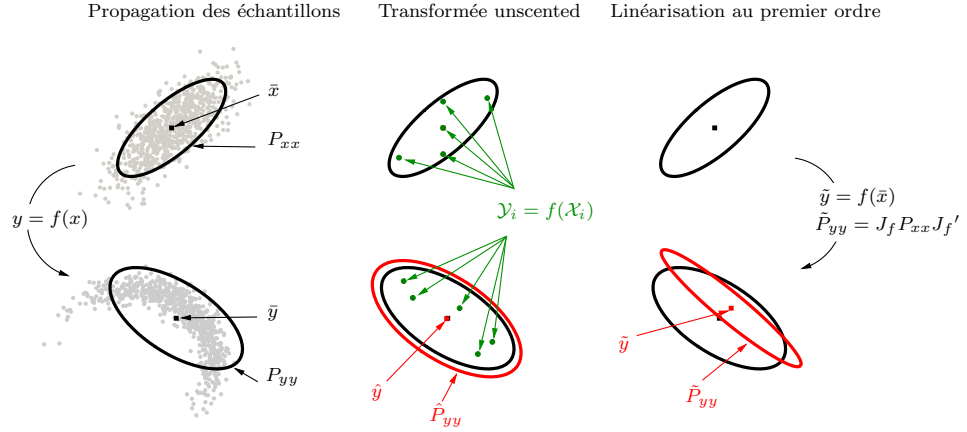


FIGURE 4.1: Propagation des deux premiers moments d'un vecteur aléatoire \mathbf{x} à travers une fonction non linéaire f . (Gauche) Propagation des échantillons et estimation des vrais moments. (Centre) Transformée unscented : calcul et propagation des σ -points. (Droite) Linéarisation au premier ordre.

Les moments de \mathbf{y} sont ensuite calculés via

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{y}} &= \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^m \mathcal{Y}_i \\ \hat{P}_{yy} &= \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^c (\mathcal{Y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathcal{Y}_i - \bar{\mathbf{y}})', \end{cases} \quad (4.2.23)$$

avec $w_0^m = \frac{\lambda}{n_x + \lambda}$, $w_0^c = \frac{\lambda}{n_x + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta)$, et, pour $i = 1, \dots, 2n_x$, $w_i^m = w_i^c = \frac{1}{2(n_x + \lambda)}$ (voir figure 4.1).

Comme le précisent Julier et Uhlmann [Julier et Uhlmann, 1997], la transformée unscented permet une précision accrue sur les deux premiers moments de la distribution de \mathbf{y} par rapport à une linéarisation locale. La méthode de calcul des moments doit dans l'idéal être *non-biaisée*, i.e. $\hat{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{y}}$, et *efficace*, i.e. $\hat{P}_{yy} - P_{yy}$ doit être minimale (au sens de la relation d'ordre associée à la définie positivité d'une matrice). En général ces deux propriétés ne sont pas satisfaites, sauf dans le cas linéaire gaussien. Une autre propriété importante est la *consistance* de la méthode, i.e. la satisfaction de $\hat{P}_{yy} - P_{yy} > \mathbb{O}$. Une méthode qui n'est pas consistante sous-estime la matrice de covariance P_{yy} . Lorsqu'elle est utilisée dans un filtre, elle peut mener à des conclusions trop optimistes du filtre. *A contrario*, une méthode trop *conservative* sur-estime la matrice de covariance et mène à une perte d'information exagérée.

Le filtre de Kalman unscented découle de ces considérations. Ses étapes constitutives figurent dans les algorithmes 2–3–4–5. La transformée unscented intervient dans les étapes de prédiction de l'état et de l'observation. La mise à jour conformément à la règle de Bayes reste inchangée par rapport au cas linéaire.

B Implémentation du filtre de Kalman unscented

Historiquement, la méthode proposée dans [Julier et Uhlmann, 1997] ne comprenait que le paramètre de réglage κ , i.e. les paramètres α et β valaient respectivement 1 et 0. Pour $n_x = 1$, les auteurs ont montré que, dans le cas Gaussien, prendre $n_x + \kappa = 3$ annule l'erreur entre les moments d'ordre 4 de $\Delta \mathbf{x} \triangleq \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ et des $\{\sigma_i\}_{i=1, \dots, 2n_x}$, permettant à $\hat{\mathbf{y}}$ et $\bar{\mathbf{y}}$ de coïncider jusqu'à l'ordre 5 de leur Développement en Série de Taylor (DST) (dans le cas multidimensionnel

Algorithme 2 : Sorties = Sigma-Point(Entrées)Calcul de σ -points**Entrées :** $\bar{x}, \sqrt{P_{xx}}, \gamma$ **Sorties :** $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1, \dots, 2n_x}$

- 1 $\mathcal{X}_0 = \bar{x}$
- 2 **pour** $i = 1, \dots, n_x$ **faire**
- 3 $\mathcal{X}_i = \bar{x} + \gamma (\sqrt{P_{xx}})_i$; $\mathcal{X}_{n_x+i} = \bar{x} - \gamma (\sqrt{P_{xx}})_i$
- 4 **finpour**

Algorithme 3 : Sorties = Moy(Entrées)Moyenne empirique de σ -points**Entrées :** $\{\mathcal{X}_i\}_{i=0, \dots, 2n_x}, \lambda$ **Sorties :** \hat{x}

- 1 $\hat{x} = \frac{1}{2(n_x + \lambda)} \sum_{i=1}^{2n_x} \mathcal{X}_i + \frac{\lambda}{n_x + \lambda} \mathcal{X}_0$

Algorithme 4 : Sorties=Corr(Entrées)Corrélation empirique de σ -points**Entrées :** $\{\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i\}_{i=0, \dots, 2n_x}, \alpha, \kappa, \beta$ **Sorties :** \hat{P}_{xy}

- 1 $\lambda = \alpha^2(n_x + \kappa) - n_x$
- 2 $\hat{P}_{xy} = \frac{1}{2(n_x + \lambda)} \sum_{i=1}^{2n_x} \mathcal{X}_i \mathcal{Y}_i' + \left[\frac{\lambda}{n_x + \lambda} + 1 - \alpha^2 + \beta \right] \mathcal{X}_0 \mathcal{Y}_0'$

cependant, une erreur est tout de même introduite sur les moments croisés d'ordre 4). Que ce soit pour le calcul de moyenne ou de matrice de covariance, les auteurs soutiennent de plus que dans le cas gaussien l'erreur due aux moments d'ordres supérieurs est plus faible (ou égale) avec la transformée unscented—quel que soit le paramètre κ —qu'avec une linéarisation au premier ordre. Par ailleurs, les auteurs précisent que prendre κ négatif ne garantit pas la définie positivité de P_{yy} , ce qui peut poser problème. Une légère modification de la méthode est proposée pour assurer la définie positivité dans le cas $\kappa < 0$, au prix d'une solution un peu plus conservatrice.

Dans [Julier, 2002], la version «scaled» de la transformée unscented est proposée et le paramètre α est introduit. L'idée sous-jacente vient du fait que lorsque la dimension de l'état grandit, les σ -points sont davantage dispersés autour de la moyenne de \mathbf{x} . Même si l'information sur la moyenne et la matrice de covariance sont toujours capturés correctement, l'échantillonnage peut avoir pour conséquence de capturer en plus des effets non-locaux de la non-linéarité. Cela peut poser problème pour certains types de non-linéarités. Le paramètre β est également introduit pour réduire l'erreur sur les termes d'ordre 4 dans le DST de la matrice de covariance, si jamais une information est disponible sur les moments d'ordre 4 de $\Delta \mathbf{x}$. Dans le cas gaussien par exemple, il est montré que prendre $\beta = 2$ minimise cette erreur. Dans [Van der Merwe et Wan, 2001a], les valeurs usuelles des paramètres sont données, à savoir $1e^{-4} < \alpha < 1$, $\kappa = 0$, et $\beta = 2$ pour des distributions gaussiennes.

Afin de prévenir d'éventuels problèmes de stabilité numérique des équations du filtre et

Algorithme 5 : Sorties=FKU(Entrées)

Filtre de Kalman Unscented, cas de bruits additifs centrés

Entrées : $\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}, u_{k-1}, z_k, f, h, Q, R$
Sorties : $\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}, \hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}, \hat{z}_{k|k-1}, S_{k|k-1}$
 Décomposition de Choleski de $P_{k-1|k-1}$
 1 $(P_{k-1|k-1})^{\frac{1}{2}} = \text{Chol}(P_{k-1|k-1})$
 Calcul des σ -points de $\mathbf{x}_{k|k-1}$
 2 $\left[\{\mathcal{X}_{i,k-1|k-1}\}_{i=0,\dots,2n_x} \right] = \text{Sigma-Point} \left(\hat{x}_{k-1|k-1}, (P_{k-1|k-1})^{\frac{1}{2}}, \sqrt{n_x + \lambda} \right)$
 Passage des σ -points à travers la dynamique du système
 3 **pour** $i = 0, \dots, 2n_x$ **faire**
 4 $\mathcal{X}_{i,k|k-1} = f(\mathcal{X}_{i,k-1|k-1}, u_{k-1})$
 5 **finpour**
 Calcul des deux premiers moments de $\mathbf{x}_{k|k-1}$
 6 $\hat{x}_{k|k-1} = \text{Moy}(\{\mathcal{X}_{i,k|k-1}\}_{i=0,\dots,2n_x}, \lambda)$
 7 $P_{k|k-1} = \text{Corr}(\{\mathcal{X}_{i,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1}, \mathcal{X}_{i,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1}\}_{i=0,\dots,2n_x}, \alpha, \beta, \kappa) + Q$
 Nouveau tirage des σ -points pour prendre le bruit de dynamique en compte
 8 $(P_{k|k-1})^{\frac{1}{2}} = \text{Chol}(P_{k|k-1})$
 9 $\left[\{\mathcal{X}_{i,k|k-1}\}_{i=0,\dots,2n_x} \right] = \text{Sigma-Point} \left(\hat{x}_{k|k-1}, (P_{k|k-1})^{\frac{1}{2}}, \sqrt{n_x + \lambda} \right)$
 Passage des σ -points de $\mathbf{x}_{k|k-1}$ à travers la fonction d'observation
 10 **pour** $i = 0, \dots, 2n_x$ **faire**
 11 $\mathcal{Z}_{i,k|k-1} = g(\mathcal{X}_{i,k|k-1})$
 12 **finpour**
 Calcul des deux premiers moments de $\mathbf{z}_{k|k-1}$
 13 $\hat{z}_{k|k-1} = \text{Moy}(\{\mathcal{Z}_{i,k|k-1}\}_{i=0,\dots,2n_x}, \lambda)$
 14 $S_{k|k-1} = \text{Corr}(\{\mathcal{Z}_{i,k|k-1} - \hat{z}_{k|k-1}, \mathcal{Z}_{i,k|k-1} - \hat{z}_{k|k-1}\}_{i=0,\dots,2n_x}, \alpha, \beta, \kappa) + R$
 Calcul de la covariance croisée de $\mathbf{x}_{k|k-1}$ et $\mathbf{z}_{k|k-1}$
 15 $T_{k|k-1} = \text{Corr}(\{\mathcal{X}_{i,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1}, \mathcal{Z}_{i,k|k-1} - \hat{z}_{k|k-1}\}_{i=0,\dots,2n_x}, \alpha, \beta, \kappa)$
 Calcul des deux premiers moments de $\mathbf{x}_{k|k}$ (règle de Bayes)
 16 $K_k = T_{k|k-1} (S_{k|k-1})^{-1}$; $\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (z_k - \hat{z}_{k|k-1})$; $P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k S_{k|k-1} K_k'$

d'assurer la définie positivité des matrices de covariance mises en jeu, une version «racine carrée» a été implémentée, selon [Van der Merwe et Wan, 2001b].

4.3 STRATÉGIES MULTI-HYPOTHÈSES POUR PALLIER LES PROBLÈMES D'INITIALISATION ET DE PROPAGATION DE DISTRIBUTIONS ÉTALÉES

Plusieurs problèmes restent à traiter. Le premier concerne la caractérisation de la moyenne et de la covariance *a priori* de l'état initial pour permettre l'initialisation du filtre. En effet, une initialisation incohérente avec la distribution initiale effective de l'état peut mener à une divergence du filtre. Lorsque peu d'information *a priori* est disponible sur l'état initial, comme c'est le cas dans notre application, une solution généralement utilisée dans le cas linéaire gaussien pour garantir la consistance et la stabilité consiste à implémenter une forme information¹ du

1. propagation de la matrice d'information (inverse de la matrice de covariance) et du vecteur d'information (matrice d'information multipliée par la moyenne) *a posteriori* en lieu et place de la matrice de covariance et de la

filtre, ou bien à initialiser celui-ci avec une moyenne nulle et une matrice de covariance à forts coefficients (*i.e.* une gaussienne très étalée dont la région de volume minimal et de confiance à $\alpha\%$ recouvre une zone importante de l'espace d'état). Cette dernière solution est la seule possible dans le cas non linéaire, mais elle peut poser problème. Prenons par exemple l'étape de correction du filtre dans le cas général, où la densité de filtrage est calculée en multipliant la densité de prédiction par la vraisemblance, selon

$$p(x_k|z_{1:k}) \propto p(z_k|x_k)p(x_k|z_{1:k-1}). \quad (4.3.1)$$

Dans le cas linéaire gaussien, pour une observation z_k donnée, la vraisemblance de l'état $p(z_k|x_k)$ en tant que fonction de x_k est une gaussienne non normalisée. Lorsque la densité de prédiction est gaussienne, sa multiplication par la vraisemblance donne, après normalisation, une densité de filtrage gaussienne (c'est sur cette propriété entre autres que repose le filtre de Kalman). Lorsque l'équation d'observation n'est pas linéaire, la vraisemblance peut, selon le type de non-linéarité, s'éloigner fortement de la Gaussianité (cumulants d'ordres supérieurs à 2 très élevés). Lorsque $p(x_k|z_{1:k-1})$ est très resserrée autour de sa moyenne, ceci ne pose pas particulièrement de problème et la densité de filtrage reste à peu près gaussienne, en dépit de la non-Gaussianité de $p(z_k|x_k)$ (*i.e.* les approximations sous-jacentes aux FKE et FKU sont valides). Pour une densité de prédiction très étalée en revanche, le caractère nongaussien de $p(z_k|x_k)$ se répercute directement sur $p(x_k|z_{1:k})$. L'utilisation des FKE et FKU peut alors être remise en cause pour deux raisons. D'une part, lorsque la densité de filtrage n'est pas approximativement gaussienne (*e.g.* est multimodale), sa caractérisation par ses seules moyenne et covariance n'est plus un moyen adéquat de la décrire. D'autre part, la propagation de distributions très étalées à travers les non-linéarités peut rapidement mener à des résultats trop optimistes des FKE et FKU.

4.3.1 Distribution initiale multi-hypothèses

Pour pallier ce problème, une approche multi-hypothèse peut être envisagée, dans la veine de [Bar-Shalom et Li, 1993]. Elle consiste à représenter la distribution initiale par un mélange de gaussiennes

$$p(x_0) = \sum_{j=1}^J w_0^j \mathcal{N}(x_0; \hat{x}_{0|0}^j, P_{0|0}^j), \quad (4.3.2)$$

où les $\{w_0^j\}_{j=1,\dots,J}$ sont définis de sorte que

$$\sum_{j=1}^J w_0^j = 1, \text{ pour garantir que } \int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(x_0) dx_0 = 1. \quad (4.3.3)$$

Pour $j = 1, \dots, J$, $w_0^j = \mathbb{P}\{M = m_j\} \triangleq p(m_j)$ désigne la probabilité que \mathbf{x}_0 soit échantillonné selon l'hypothèse m_j , *i.e.* selon la densité de probabilité $\mathcal{N}(x_0; \hat{x}_{0|0}^j, P_{0|0}^j)$. Les moyennes et matrices de covariance des différentes hypothèses ainsi que leur nombre J sont choisis de façon que chaque hypothèse de la **ddp** *a priori* initiale de l'état soit suffisamment étroite pour résoudre les difficultés évoquées précédemment, mais aussi pour que $p(x_0)$ «recouvre» une région suffisamment importante de l'espace d'état, *i.e.* soit peu informative.

On assimile alors les observations dans une batterie de filtres de Kalman unscented exécutés en parallèle, chacun initialisé selon la $j^{\text{ième}}$ hypothèse du mélange initial (4.3.2), $j = 1, \dots, J$. Ces filtres ne sont pas interactifs, cependant la surveillance de l'innovation² de chacun d'eux permet d'évaluer à chaque instant k la vraisemblance de chaque hypothèse m_j relativement à

moyenne *a posteriori*.

2. innovation du filtre associé à l'hypothèse m_j : $z_k - \hat{z}_{k|k-1}^j$, avec $\hat{z}_{k|k-1}^j \triangleq \mathbb{E}\{\mathbf{z}_k | z_{1:k-1}, m_j\}$.

la séquence d'observations assimilée. On déduit alors les probabilités *a posteriori* (ou «poids») des hypothèses. Les hypothèses peu probables *a posteriori* (ainsi que les filtres qui leur sont associés) peuvent éventuellement être désactivées, auquel cas les poids des hypothèses/filtres restants sont redistribués de façon que leur somme demeure égale à 1. Ainsi, le processus d'estimation se concentre assez rapidement sur les zones de l'espace d'état pertinentes, et délivre une approximation consistante de la loi *a posteriori* sous la forme d'un mélange de gaussiennes de complexité décroissante.

Mathématiquement, pour J hypothèses, la loi *a posteriori* s'écrit comme le mélange

$$p(x_k|z_{1:k}) = \sum_{j=1}^J w_k^j p(x_k|z_{1:k}, m_j), \quad (4.3.4)$$

où

$$w_k^j \triangleq p(m_j|z_{1:k}) \quad (4.3.5)$$

désigne le poids de l'hypothèse m_j étant données les observations jusqu'à l'instant k . Conditionnellement à m_j , la densité *a posteriori* de l'état est la gaussienne

$$p(x_k|z_{1:k}, m_j) = \mathcal{N}\left(x_k; \hat{x}_{k|k}^j, P_{k|k}^j\right) \quad (4.3.6)$$

dont les deux premiers moments $\hat{x}_{k|k}^j, P_{k|k}^j$ sont calculés via une itération du FKU à partir des deux premiers moments $\hat{x}_{k-1|k-1}^j, P_{k-1|k-1}^j$ de $p(x_{k-1}|z_{1:k-1}, m_j)$, de la commande à l'instant précédent u_{k-1} et de l'observation courante z_k . L'application de la règle de Bayes permet d'exprimer la probabilité *a posteriori* $p(m_j|z_{1:k})$ de l'hypothèse m_j comme

$$w_k^j = \frac{\ell_k^j w_{k-1}^j}{L_k}, \quad (4.3.7)$$

où $\ell_k^j \triangleq p(z_k|z_{1:k-1}, m_j)$, la densité de prédiction de la mesure conditionnellement à m_j évaluée en la mesure courante z_k constitue la vraisemblance de m_j . Elle s'écrit

$$\ell_k^j = \mathcal{N}\left(z_k; \hat{z}_{k|k-1}^j, S_{k|k-1}^j\right), \quad (4.3.8)$$

où $\hat{z}_{k|k-1}^j, S_{k|k-1}^j$ sont calculés dans l'étape de prédiction de l'observation du FKU. La constante de normalisation $L_k \triangleq p(z_k|z_{1:k-1})$ est obtenue par marginalisation de $p(z_k, m_j|z_{1:k-1})$ selon m_j

$$p(z_k|z_{1:k-1}) = \sum_{j=1}^J \ell_k^j w_{k-1}^j. \quad (4.3.9)$$

L'ensemble est résumé dans l'algorithme 6 (dans l'hypothèse où aucune hypothèse n'est éliminée).

4.3.2 Distributions des bruits multi-hypothèses

Lorsque les bruits de dynamique et/ou d'observation ont des variances élevées, des problèmes de consistance peuvent apparaître même si une stratégie multi-hypothèse est employée avec une initialisation cohérente des hypothèses. En effet, même si les hypothèses du mélange de gaussiennes sont relativement étroites, l'intégration de forts bruits de dynamique et/ou d'observation au cours du temps contribue à «étaler» les densités de prédiction et de filtrage. Pour remédier à ce problème, un filtre à mélange de gaussiennes peut être employé [Alspach et Sorenson, 1972].

Algorithme 6 : Sorties=FKU-MH(Entrées)

FKU Multi-Hypothèses

Entrées : $\left\{ \hat{x}_{k-1|k-1}^j, P_{k-1|k-1}^j, w_{k-1}^j \right\}_{j=1, \dots, J}, u_{k-1}, z_k, f, h, Q, R$

Sorties : $\left\{ \hat{x}_{k|k}^j, P_{k|k}^j, w_k^j \right\}_{j=1, \dots, J}$

- 1 **pour** $j = 1, \dots, J$ **faire**
 - Calcul des moments de $p(x_k | z_{1:k-1}, m_j)$, $p(z_k | z_{1:k-1}, m_j)$ et $p(x_k | z_{1:k}, m_j)$
 - 2 $\left[\hat{x}_{k|k}^j, P_{k|k}^j, \hat{x}_{k|k-1}^j, P_{k|k-1}^j, \hat{z}_{k|k-1}^j, S_{k|k-1}^j \right] = \text{FKU} \left(\hat{x}_{k-1|k-1}^j, P_{k-1|k-1}^j, u_{k-1}, z_k, f, h, Q, R \right)$
 - Calcul de la probabilité *a posteriori* (ou <<ponds>>) de l'hypothèse m_j
 - 3 $\ell_k^j = \mathcal{N} \left(z_k; \hat{z}_{k|k-1}^j, S_{k|k-1}^j \right)$; $w_k^j = \ell_k^j w_{k-1}^j$
- 4 **finpour**

Calcul de la constante de normalisation des poids
- 5 $L_k = \sum_{j=1}^J w_k^j$
- Normalisation des poids de sorte que $\sum_{j=1}^J p(m_j | z_{1:k}) = 1$
- 6 **pour** $j = 1, \dots, J$ **faire**
- 7 $w_k^j = w_k^j / L_k$
- 8 **finpour**

Même si cette méthode est généralement présentée comme un moyen de s'affranchir de l'hypothèse de Gaussianité des bruits, elle peut en fait servir à obtenir une certaine consistance pour des systèmes non linéaires à bruits gaussiens de forte puissance, *e.g.* lorsque, dans le cas de notre problème, le processus générateur du mouvement de la source est très permissif. Dans la méthode proposée par Alspach et Sorenson, les bruits de dynamique et d'observation sont représentés par des mélanges de gaussiennes, selon

$$\begin{cases} p(w_k) = \sum_{m=1}^M q^m \mathcal{N}(w_k; \hat{w}^m, Q^m) \\ p(v_k) = \sum_{p=1}^P r^p \mathcal{N}(v_k; \hat{v}^p, R^p), \end{cases} \quad (4.3.10)$$

avec $\sum_{m=1}^M q^m = \sum_{n=1}^N r^n = 1$. Encore une fois, même si les vraies lois des bruits sont gaussiennes, on les modélise par des mélanges de gaussiennes qui les approximent convenablement, mais dont chaque hypothèse est suffisamment étroite. La densité de transition et la vraisemblance s'écrivent alors

$$\begin{cases} p(x_k | x_{k-1}) = \sum_{m=1}^M q^m \mathcal{N}(x_k; f(x_{k-1}, u_{k-1}) + \hat{w}^m, Q^m) \\ p(z_k | x_k) = \sum_{n=1}^N r^n \mathcal{N}(z_k; h(x_k) + \hat{v}^n, R^n). \end{cases} \quad (4.3.11)$$

En supposant que la densité de filtrage à l'instant $k-1$ est un mélange de gaussiennes à J_{k-1} hypothèses

$$p(x_{k-1} | z_{1:k-1}) = \sum_{j=1}^{J_{k-1}} \gamma_{k-1}^j \mathcal{N}(x_{k-1}; \hat{x}_{k-1|k-1}^j, P_{k-1|k-1}^j), \quad (4.3.12)$$

l'étape de prédiction (4.2.9) s'écrit alors

$$p(x_k|z_{1:k-1}) = \sum_{j=1}^{J_{k-1}} \sum_{m=1}^M \gamma_{k-1}^j q^m \int \mathcal{N}(x_k; f(x_{k-1}, u_{k-1}) + \hat{w}^m, Q^m) \cdot \mathcal{N}(x_{k-1}; \hat{x}_{k-1|k-1}^j, P_{k-1|k-1}^j) dx_{k-1}, \quad (4.3.13)$$

qu'on approxime par le mélange de gaussiennes

$$p(x_k|z_{1:k-1}) = \sum_{j=1}^{J_{k-1}} \sum_{m=1}^M \gamma_{k-1}^j q^m \mathcal{N}(x_k; \hat{x}_{k|k-1}^{j,m}, P_{k|k-1}^{j,m}), \quad (4.3.14)$$

où les moments $\hat{x}_{k|k-1}^{j,m}, P_{k|k-1}^{j,m}$ sont calculés via l'étape de prédiction du FKU à partir des moments $\hat{x}_{k-1|k-1}^j, P_{k-1|k-1}^j$, de la commande u_{k-1} , et des moments \hat{w}^m, Q^m . L'étape de correction (4.2.8) s'écrit quant à elle

$$p(x_k|z_{1:k}) = \frac{1}{L_k} \sum_{j=1}^{J_{k-1}} \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P \gamma_{k-1}^j q^m r^p \mathcal{N}(z_k; h(x_k) + \hat{v}^p, R^p) \mathcal{N}(x_k; \hat{x}_{k|k-1}^{j,m}, P_{k|k-1}^{j,m}), \quad (4.3.15)$$

qu'on approxime par le mélange de gaussiennes

$$p(x_k|z_{1:k}) = \frac{1}{L_k} \sum_{j=1}^{J_{k-1}} \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P \gamma_{k-1}^j q^m r^p \ell_k^{j,m,p} \mathcal{N}(x_k; \hat{x}_{k|k}^{j,m,p}, P_{k|k}^{j,m,p}), \quad (4.3.16)$$

où les moments $\hat{x}_{k|k}^{j,m,p}, P_{k|k}^{j,m,p}$ sont calculés via une étape de correction du FKU à partir des moments $\hat{x}_{k|k-1}^{j,m}, P_{k|k-1}^{j,m}$, de l'observation z_k , et des moments \hat{v}^p, R^p et où

$$\ell_k^{j,m,p} = \mathcal{N}(z_k; \hat{z}_{k|k-1}^{j,m,p}, S_{k|k-1}^{j,m,p}), \quad (4.3.17)$$

dont les moments $\hat{z}_{k|k-1}^{j,m,p}, S_{k|k-1}^{j,m,p}$ sont calculés dans l'étape de correction du FKU. La constante de normalisation $L_k = p(z_k|z_{1:k-1})$ est quant à elle donnée par

$$L_k = \sum_{j=1}^{J_{k-1}} \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P \gamma_{k-1}^j q^m r^p \ell_k^{j,m,p}. \quad (4.3.18)$$

La méthode est résumée dans l'algorithme 7. Bien que cet algorithme ne soit pas testé en simulation ou en contexte réel, son évocation nous semble intéressante dans une optique de présenter de manière relativement exhaustive toutes les difficultés qui peuvent se présenter dans notre problème de filtrage, et les solutions qui peuvent être envisagées.

4.4 ANALYSE DE RÉSULTATS DE SIMULATION

Afin d'illustrer les propos du §4.3, plusieurs scénarios ont été simulés. Les résultats sont présentés sur les figures 4.2 à 4.9. Pour chacune de ces figures sont représentés dans le repère monde le capteur (repère bleu, les microphones sont représentés par des points bleus), l'émetteur (repère rouge, l'émetteur est représenté par un carré rouge), ainsi que la région de confiance à 99% (de taille minimale) de chacune des hypothèses du FKU-MH (ellipses semi-transparentes grisées) à six itérations différentes. Les moments de l'approximation «moment-matchée» de la distribution sont également représentés. Le triangle noir représente la moyenne de cette distribution et l'ellipse en trait noir sa région de confiance à 99%. Les échelles sont en mètres. Le filtre retourne les résultats à une fréquence de 20Hz.

Algorithme 7 : Sorties=FKU-MG(Entrées)

FKU à mélange de Gaussiennes

Entrées : $\{\hat{x}_{k-1|k-1}^j, P_{k-1|k-1}^j, \gamma_{k-1}^j\}_{j=1, \dots, J_k}, u_{k-1}, z_k, f, h, \{\hat{w}^m, Q^m\}_{m=1, \dots, M}, \{\hat{v}^m, R^p\}_{p=1, \dots, P}$

Sorties : $\{\hat{x}_{k|k}^{j,m,p}, P_{k|k}^{j,m,p}, \gamma_k^{j,m,p}\}_{j=1, \dots, J, m=1, \dots, M, p=1, \dots, P}$

1 pour $j = 1, \dots, J_{k-1}$ **faire**

2 $(P_{k-1|k-1}^j)^{\frac{1}{2}} = \text{Chol}(P_{k-1|k-1}^j)$

3 $[\{\mathcal{X}_{i,k-1|k-1}^j\}_{i=0, \dots, 2n_x}] = \text{Sigma-Point}(\hat{x}_{k-1|k-1}^j, (P_{k-1|k-1}^j)^{\frac{1}{2}}, \sqrt{n_x + \lambda})$

4 pour $i = 0, \dots, 2n_x$ **faire**

5 $\mathcal{X}_{i,k|k-1}^j = f(\mathcal{X}_{i,k-1|k-1}^j, u_{k-1})$

6 finpour

7 $\hat{x}^j = \text{Moy}(\{\mathcal{X}_{i,k|k-1}^j\}_{i=0, \dots, 2n_x}, \lambda)$

8 pour $m = 1, \dots, M$ **faire**

9 $\hat{x}_{k|k-1}^{j,m} = \hat{x}^j + \hat{w}^m$

10 $P_{k|k-1}^{j,m} = \text{Corr}(\{\mathcal{X}_{i,k|k-1}^j - \hat{x}_{k|k-1}^{j,m}, \mathcal{X}_{i,k|k-1}^j - \hat{x}_{k|k-1}^{j,m}\}_{i=0, \dots, 2n_x}, \alpha, \beta, \kappa) + Q^m$

11 $(P_{k|k-1}^{j,m})^{\frac{1}{2}} = \text{Chol}(P_{k|k-1}^{j,m})$

12 $[\{\mathcal{X}_{i,k|k-1}^{j,m}\}_{i=0, \dots, 2n_x}] = \text{Sigma-Point}(\hat{x}_{k|k-1}^{j,m}, (P_{k|k-1}^{j,m})^{\frac{1}{2}}, \sqrt{n_x + \lambda})$

13 pour $i = 0, \dots, 2n_x$ **faire**

14 $\mathcal{Z}_{i,k|k-1}^{j,m} = h(\mathcal{X}_{i,k|k-1}^{j,m})$

15 finpour

16 $\hat{z}^{j,m} = \text{Moy}(\{\mathcal{Z}_{i,k|k-1}^{j,m}\}_{i=0, \dots, 2n_x}, \lambda)$

17 pour $p = 1, \dots, P$ **faire**

18 $\hat{z}_{k|k-1}^{j,m,p} = \hat{z}^{j,m} + \hat{v}^p$

19 $S_{k|k-1}^{j,m,p} = \text{Corr}(\{\mathcal{Z}_{i,k|k-1}^{j,m} - \hat{z}_{k|k-1}^{j,m,p}, \mathcal{Z}_{i,k|k-1}^{j,m} - \hat{z}_{k|k-1}^{j,m,p}\}_{i=0, \dots, 2n_x}, \alpha, \beta, \kappa) + R^p$

20 $T_{k|k-1}^{j,m,p} = \text{Corr}(\{\mathcal{X}_{i,k|k-1}^j - \hat{x}_{k|k-1}^{j,m}, \mathcal{Z}_{i,k|k-1}^{j,m} - \hat{z}_{k|k-1}^{j,m,p}\}_{i=0, \dots, 2n_x}, \alpha, \beta, \kappa)$

21 $K_k^{j,m,p} = T_{k|k-1}^{j,m,p} (S_{k|k-1}^{j,m,p})^{-1}$; $\hat{x}_{k|k}^{j,m,p} = \hat{x}_{k|k-1}^{j,m} + K_k^{j,m,p} (z_k - \hat{z}_{k|k-1}^{j,m,p})$

22 $P_{k|k}^{j,m,p} = P_{k|k-1}^{j,m} - K_k^{j,m,p} S_{k|k-1}^{j,m,p} (K_k^{j,m,p})'$

23 $\ell_k^{j,m,p} = \mathcal{N}(z_k; \hat{z}_{k|k-1}^{j,m,p}, S_{k|k-1}^{j,m,p})$

24 $\gamma_k^{j,m,p} = \gamma_{k-1}^j q^{m,p} \ell_k^{j,m,p}$

25 finpour

26 finpour

27 finpour

28 pour $j = 1, \dots, J_{k-1}, m = 1, \dots, M, p = 1, \dots, P$ **faire**

29 $\gamma_k^{j,m,p} = \frac{\gamma_k^{j,m,p}}{\sum_{j', m', p'} \gamma_k^{j', m', p'}}$

30 finpour

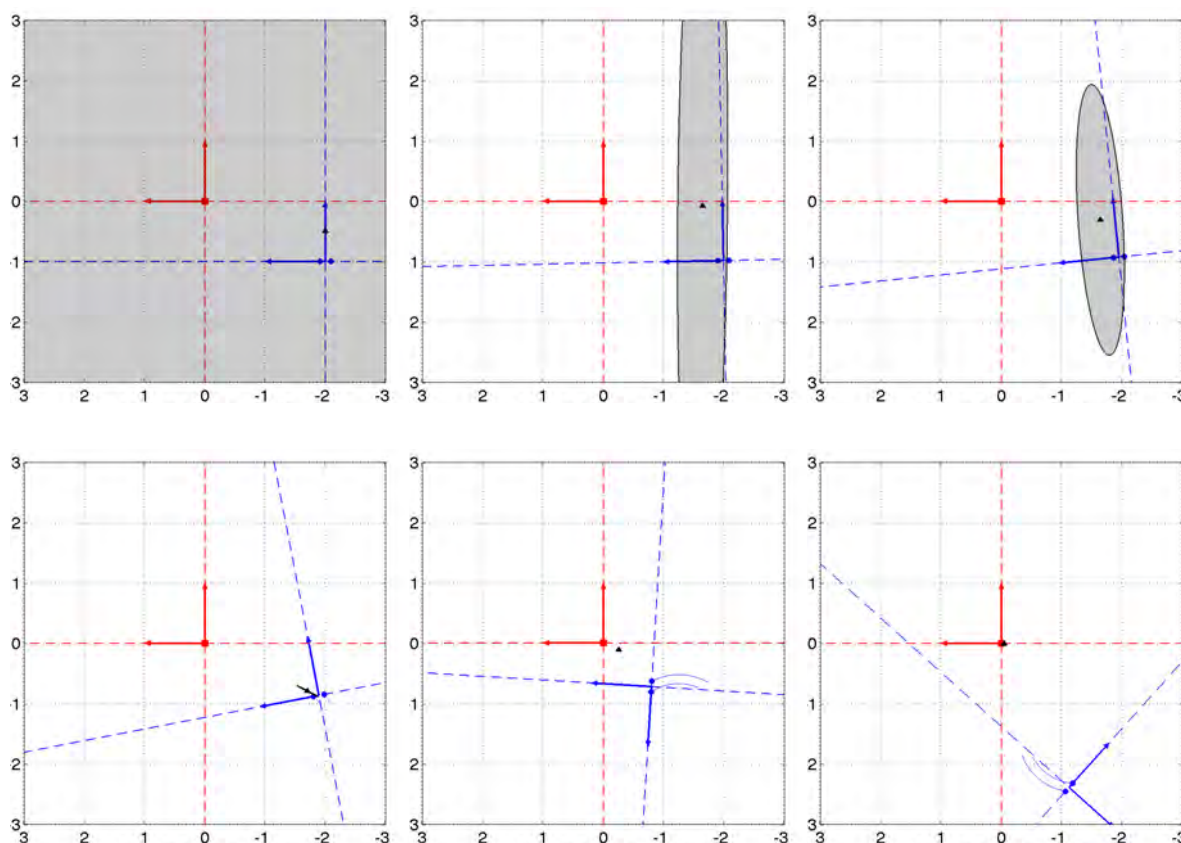


FIGURE 4.2: Résultat de l'estimation (FKU) dans le repère monde aux itérations $\{1, 3, 11, 20, 152, 399\}$ (sens de lecture de gauche à droite et de de haut en bas) : exemple de mise en échec du FKU initialisé avec une distribution *a priori* gaussienne très étalée. Effondrement prématuré de la matrice de covariance du filtre et perte de consistance de l'estimateur.

Dans la figure 4.2, le problème d'initialisation d'un FKU avec une distribution gaussienne très étalée est mis en évidence. La figure montre que l'ellipse initiale, très large, rétrécit très fortement dès les premières itérations, avec une nette perte de consistance (filtre beaucoup trop optimiste) : moyenne *a posteriori* très éloignée des réalisations de l'état, et ellipse de confiance très resserrée autour de cette moyenne.

Dans les figures 4.3 à 4.9, on illustre le fait qu'une approche par FKU-MH permet de garantir la consistance du filtre avec une initialisation très peu informative. En outre, les effets du type de mouvement du capteur sur les résultats de localisation d'une source statique sont étudiés qualitativement. Pour toutes ces simulations, les paramètres de réglage sont les mêmes : émetteur immobile, faible bruit de mesure, conditions initiales identiques. Seule la trajectoire du capteur diffère d'une simulation à l'autre. Le filtre est initialisé avec une mixture de 24 hypothèses gaussiennes, couvrant un disque de rayon 3m centré sur le point milieu du capteur.

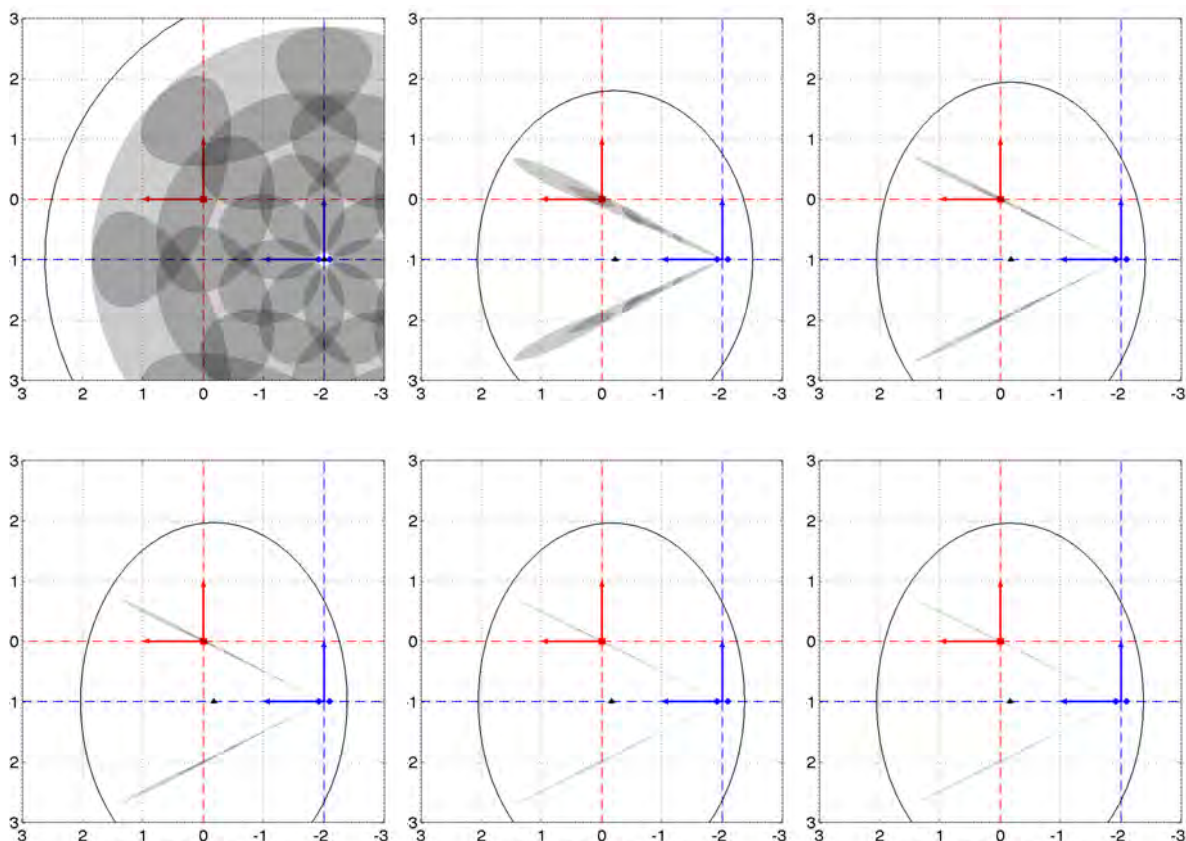


FIGURE 4.3: Résultat de l'estimation (FKU-MH) dans le repère monde aux itérations $\{1, 5, 31, 63, 304, 399\}$ (sens de lecture de gauche à droite et de de haut en bas) : capteur immobile.

En figure 4.3, le capteur est immobile. Aux premières itérations, les hypothèses du mélange caractérisant la distribution *a posteriori* de l'état se répartissent le long de deux directions : la direction donnée par (RE) et la direction symétrique par rapport à (RR_1) . Ce résultat n'est pas surprenant lorsqu'on fait le lien avec la figure 2.2, dans laquelle les isolignes de la fonction d'observation sont tracées. Cette figure nous indique qu'instantanément, une observation ne renseigne que sur la direction de la source (azimut ϑ), et pas sa distance. Elle illustre aussi le problème d'ambiguïté avant-arrière, du fait que deux sources provenant des directions respectives ϑ et $\pi - \vartheta$ «gènèrent» exactement la même observation. Tant que le capteur ne se déplace pas, on a donc peu d'information sur la distance de la source, et une ambiguïté avant-arrière. On remarque aussi en figure 4.3 que tant que l'ambiguïté avant-arrière est présente, la gaussienne «moment-matchée» est une approximation très pauvre de la distribution de l'état. De par l'ambiguïté portée par la fonction d'observation (et donc de la vraisemblance de l'état par rapport aux observations), la distribution «vraie» de l'état est par essence multimodale, et on comprend bien qu'une hypothèse gaussienne unique ne suffit pas à la caractériser. Cela explique en partie le constat relatif à la figure 4.2.

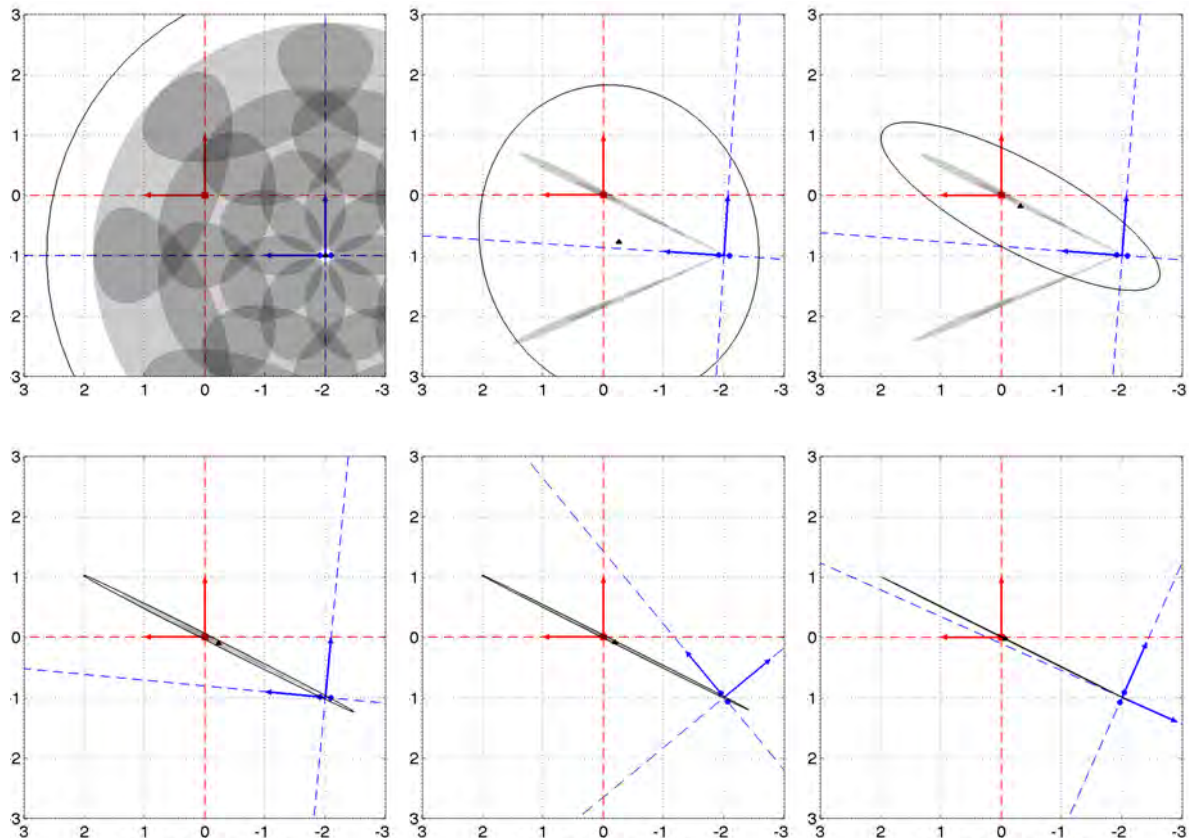


FIGURE 4.4: Résultat de l'estimation (FKU-MH) dans le repère monde aux itérations $\{1, 14, 16, 20, 177, 399\}$ (sens de lecture de gauche à droite et de haut en bas) : rotation du capteur autour de x_R .

En figure 4.4, le capteur effectue une rotation autour de son axe x_R (vitesse de rotation ω_x constante, vitesses de translation v_{Ry}, v_{Rz} nulles). Comme on peut le voir, ce type de mouvement permet de lever l'ambiguïté avant-arrière. Ceci peut se comprendre de manière assez intuitive. En tournant le capteur dans le sens positif par exemple, l'ITD «vraie» correspondant à une source placée «à l'avant» (resp. «à l'arrière») du capteur est sensée croître (resp. décroître). Les variations de la trajectoire d'observation au cours du temps permettent donc de lever cette ambiguïté. On en donne ici une explication simplifiée. Au cours de chaque itération du FKU-MH, la distribution de l'observation prédite conditionnellement à chacune des hypothèses de la distribution *a posteriori* de l'état à l'itération précédente est calculée. De par la dynamique du système, une variation négative (resp. positive) du processus d'observation sera prédite au niveau des hypothèses placées à l'arrière (resp. à l'avant) du capteur. Du fait que l'émetteur est en réalité placé à l'avant du capteur, l'évaluation de la densité de prédiction de l'observation associée à chaque hypothèse en l'observation courante va donc favoriser *a posteriori* les hypothèses situées à l'avant du capteur. On remarque par ailleurs que ce type de mouvement ne permet pas de récupérer de l'information sur la distance, du fait que l'ellipse à 99% de la gaussienne «mode-matchée» reste très étalée dans la direction (RE).

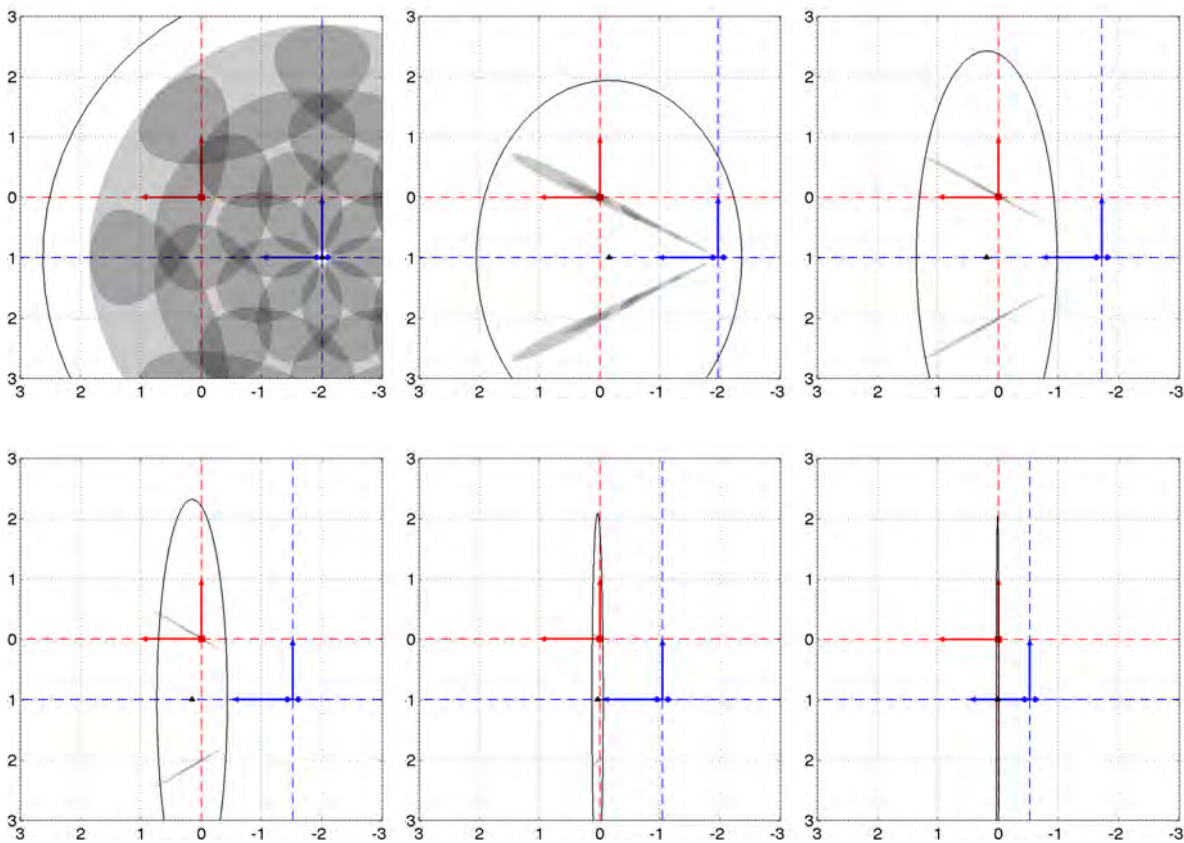


FIGURE 4.5: Résultat de l'estimation (FKU-MH) dans le repère monde aux itérations $\{1, 6, 39, 66, 129, 198\}$ (sens de lecture de gauche à droite et de de haut en bas) : translation du capteur dans le sens donné par y_R .

En figure 4.4, le capteur se déplace dans la direction et le sens donnés par \vec{y}_R (vitesses v_{R_y} constante positive, v_{R_z} et ω_x nulles). Dans ce cas de figure, la dynamique du capteur ne permet pas de lever l'ambiguïté avant-arrière, mais à cette ambiguïté près, donne une grande information sur la distance relative, dans le sens où à l'itération finale, la densité de l'état *a posteriori* est caractérisée par une mixture de deux hypothèses : une hypothèse très étroite resserrée autour de la position vraie de l'émetteur, et une hypothèse symétrique par rapport à (RR_1) .

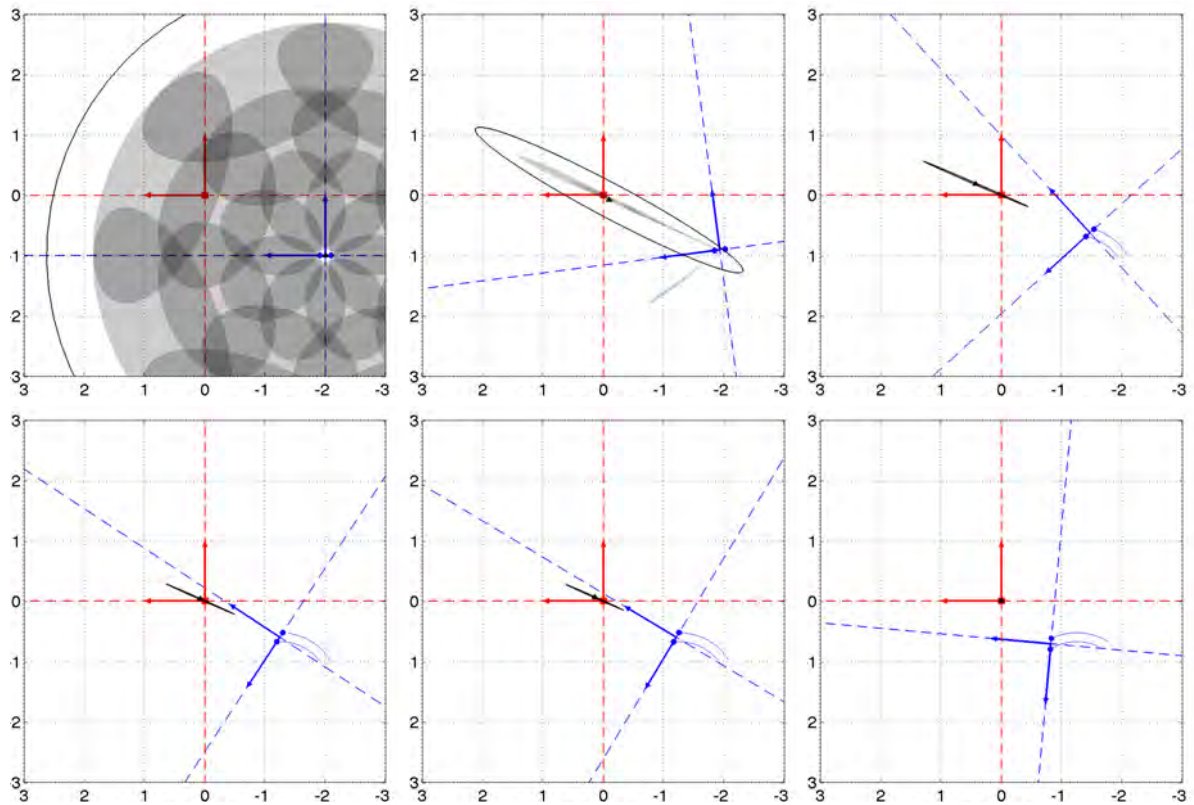


FIGURE 4.6: Résultat de l'estimation (FKU-MH) dans le repère monde aux itérations $\{1, 14, 75, 100, 104, 149\}$ (sens de lecture de gauche à droite et de haut en bas) : combinaison de translation et rotation du capteur.

En figure 4.6, une combinaison de translations et rotation est appliquée au capteur. À la différence des cas 4.4–4.5, le mouvement permet ici de lever l'ambiguïté avant-arrière *et* récupérer une information précise sur la distance. L'ellipse de confiance à l'itération finale est très resserrée autour de la position vraie de l'émetteur. La quantité d'information que l'on peut récupérer dépend bien sûr des bruits de dynamique et d'observation. Ici le bruit de dynamique est très faible (émetteur complètement immobile, peu d'aléa sur le déplacement du capteur), de sorte que si le mouvement est suffisamment informatif, on récupère une information extrêmement précise sur la position de l'émetteur.

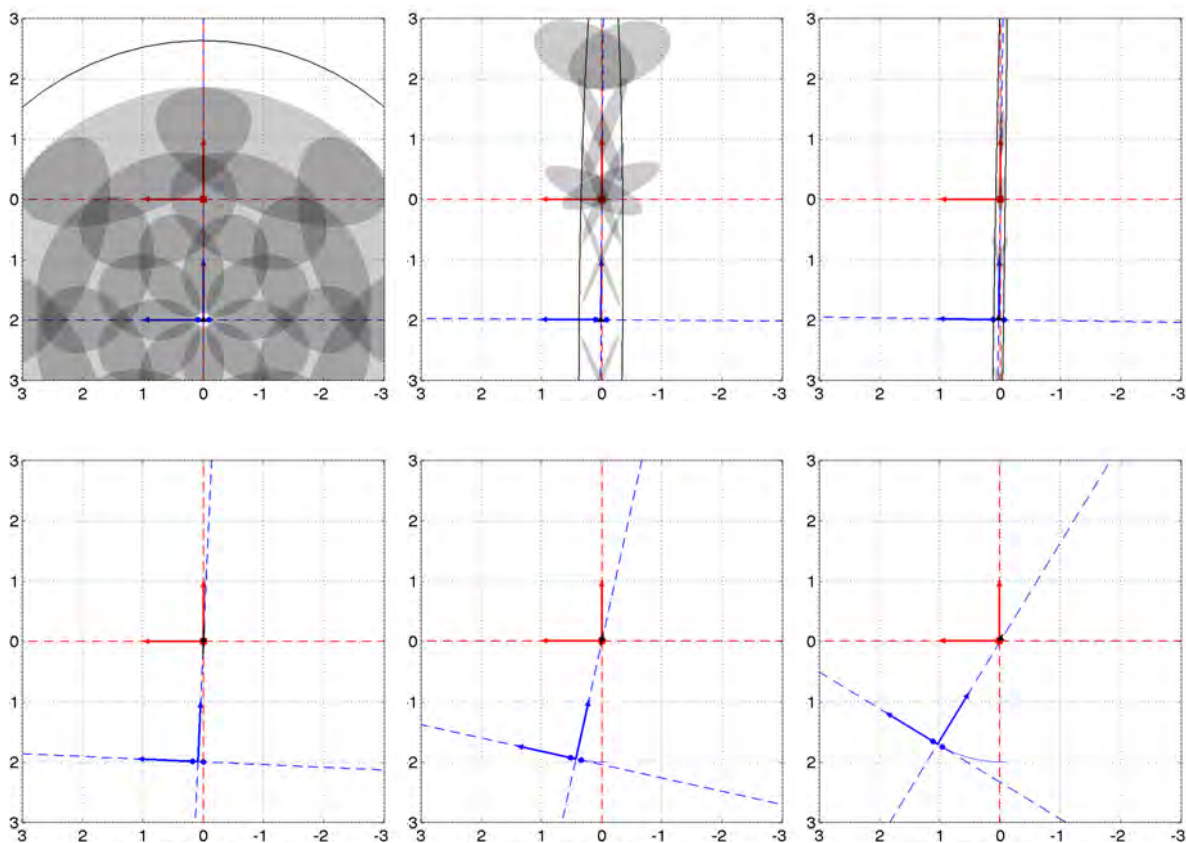


FIGURE 4.7: Résultat de l'estimation (FKU-MH) dans le repère monde aux itérations $\{1, 2, 3, 7, 30, 74\}$ (sens de lecture de gauche à droite et de haut en bas) : rotation du point milieu du capteur autour de l'émetteur, le vecteur z_R pointant vers l'émetteur.

En figure 4.7, le point milieu du capteur effectue une rotation autour de l'émetteur, et le vecteur \vec{z}_R «pointe» vers l'émetteur. On constate que ce type de mouvement permet de récupérer une information très précise sur la position de l'émetteur en un temps très court. L'interprétation de ce résultat peut se faire en analysant à nouveau la figure 2.2. Le gradient de la fonction d'observation en tout point du plan est perpendiculaire à l'isoline passant par ce point, et sa norme est d'autant plus élevée que les isolignes sont resserrées au voisinage de ce point. Pour un émetteur dont la direction d'arrivée forme un angle de 0° avec \vec{z}_R , on se trouve dans un cas où, pour une distance donnée, la norme du gradient atteint sa valeur maximale (à une faible variation d'azimut ϑ correspond une forte variation de la fonction d'observation). On se trouve donc dans un cas où «localement» les observations sont très informatives sur l'état du système, ce qui permet de récupérer de l'information rapidement sans nécessité d'un grand déplacement du capteur.

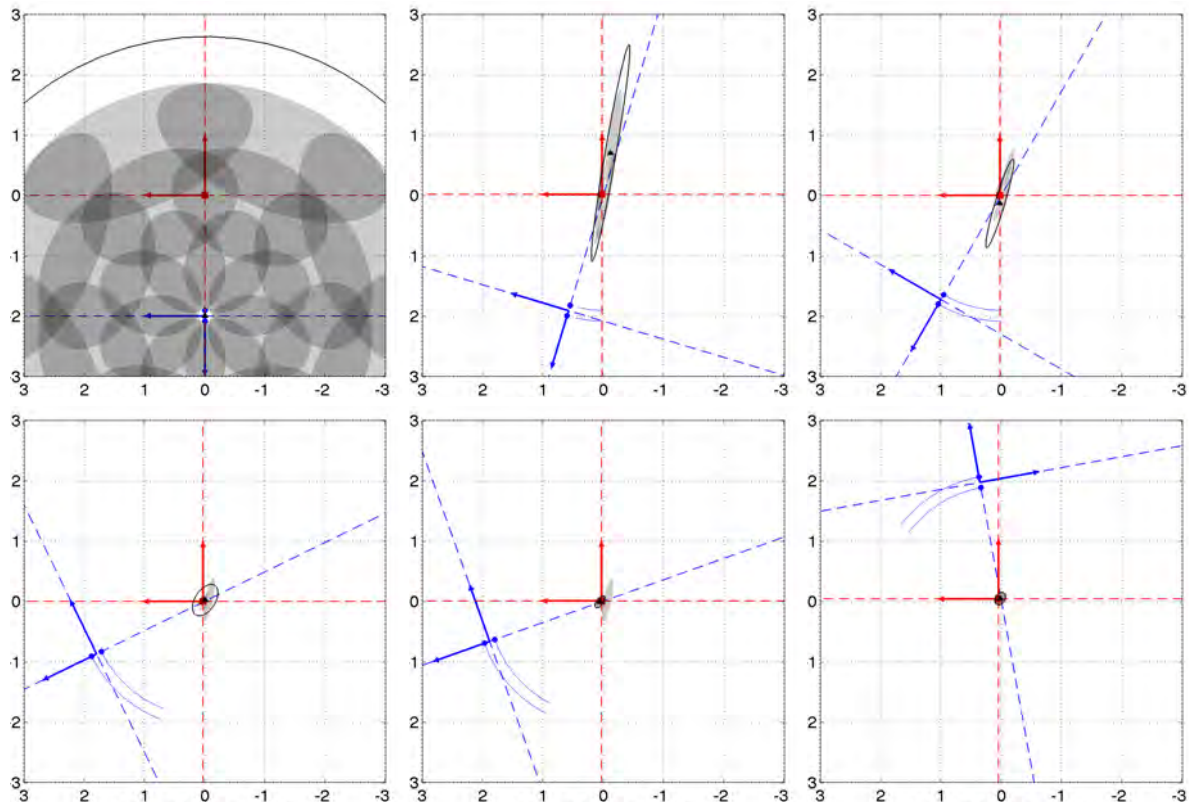


FIGURE 4.8: Résultat de l'estimation (FKU-MH) dans le repère monde aux itérations $\{1, 14, 75, 100, 104, 149\}$ (sens de lecture de gauche à droite et de haut en bas) : rotation du point milieu du capteur autour de l'émetteur, le vecteur $-\vec{y}_R$ pointant vers l'émetteur.

En figure 4.8, le centre du capteur effectue le même mouvement qu'en figure 4.7, mais cette fois ci le vecteur $-\vec{y}_R$ pointe dans la direction de l'émetteur. Dans ce cas de figure, à comparer avec le cas 4.7, un déplacement bien plus important est nécessaire pour que la densité *a posteriori* de l'état devienne suffisamment informative. On est ici dans un cas très défavorable, du fait que le gradient de la fonction d'information est proche du vecteur nul lorsque l'émetteur se trouve au voisinage de l'axe (RR_1) .

Les scénarios présentés aux figures 4.3 à 4.8 soulèvent un problème particulièrement intéressant : celui de la définition d'une stratégie de déplacement optimale au sens d'un critère d'information, *i.e.* le problème de savoir comment commander le robot, sur la base de la perception auditive, pour récupérer un maximum d'information sur la position de l'émetteur en un temps minimal. Ce problème n'entre pas dans le cadre de cette thèse (dans le sens où l'on ne cherche jamais à commander spécifiquement le robot, mais simplement exploiter la connaissance de ses ordres moteurs), mais en constitue une prospective.

Les scénarios présentés aux figures 4.9–4.10 visent quant à eux à illustrer certains points de discussion lorsque l'émetteur effectue une marche aléatoire sans direction privilégiée.

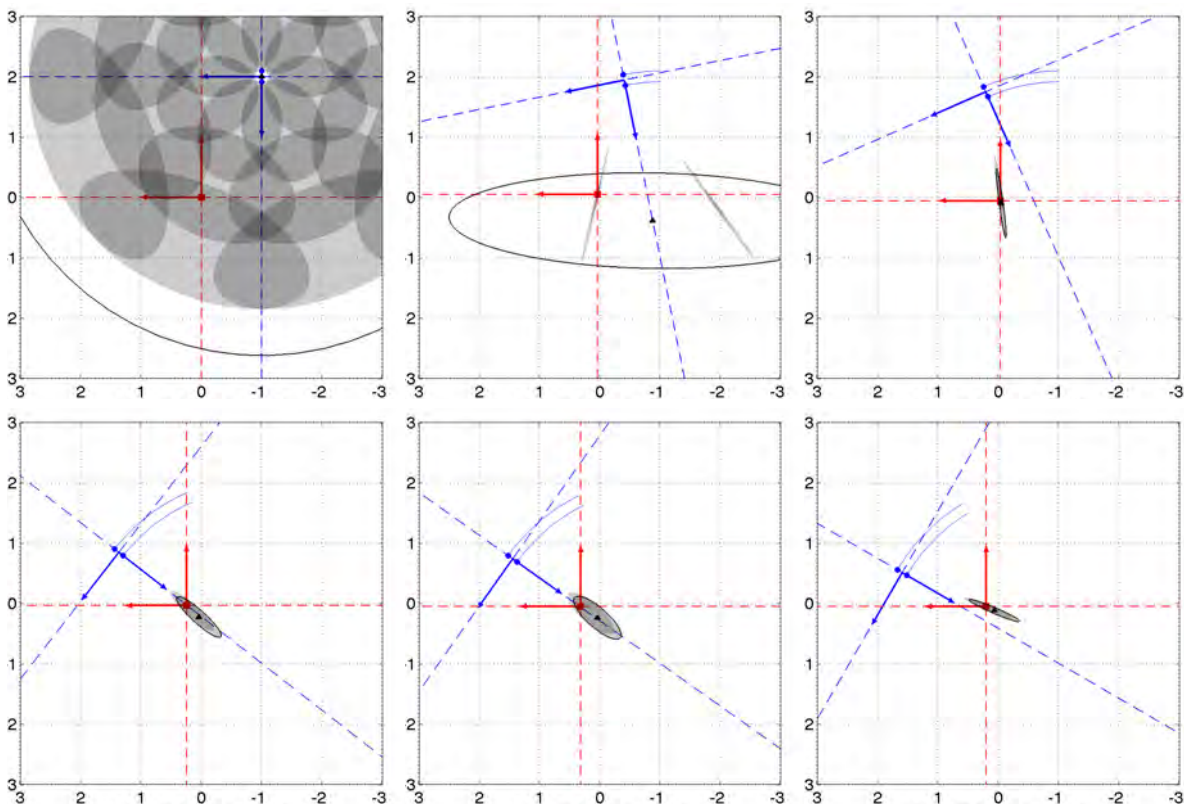


FIGURE 4.9: Résultat de l'estimation (FKU-MH) dans le repère monde aux itérations $\{1, 41, 84, 183, 192, 210\}$ (sens de lecture de gauche à droite et de haut en bas) : vitesses de l'émetteur aléatoires centrées gaussiennes décorrélées. Effet du passage de l'émetteur à travers l'axe y_R du capteur lorsque la dynamique de l'émetteur est permissive.

En figure 4.9, la vitesse de l'émetteur est générée par un processus aléatoire centré blanc gaussien de matrice de covariance connue. Les résultats de la simulation montrent certains aspects intéressants quand la source «coupe» l'axe \vec{y}_R du repère du capteur. Alors qu'à l'itération 84 la densité *a posteriori* est plutôt informative, on constate une perte d'information rapide aux itérations 183 et 192, lorsque l'émetteur est à un azimut θ voisin de 90° . Comme on l'a vu précédemment, pour un tel cas de figure, les observations apportent très peu d'information sur les variables d'état. Dans ce cas, la perte d'information inhérente à l'intégration du bruit de dynamique au cours du temps prend le dessus sur l'information apportée par les observations : les hypothèses de la distribution *a posteriori* de l'état s'évalent. Dès que le système s'éloigne de ce point de fonctionnement défavorable, les ellipses de confiance se resserrent de nouveau autour de la position de l'émetteur.

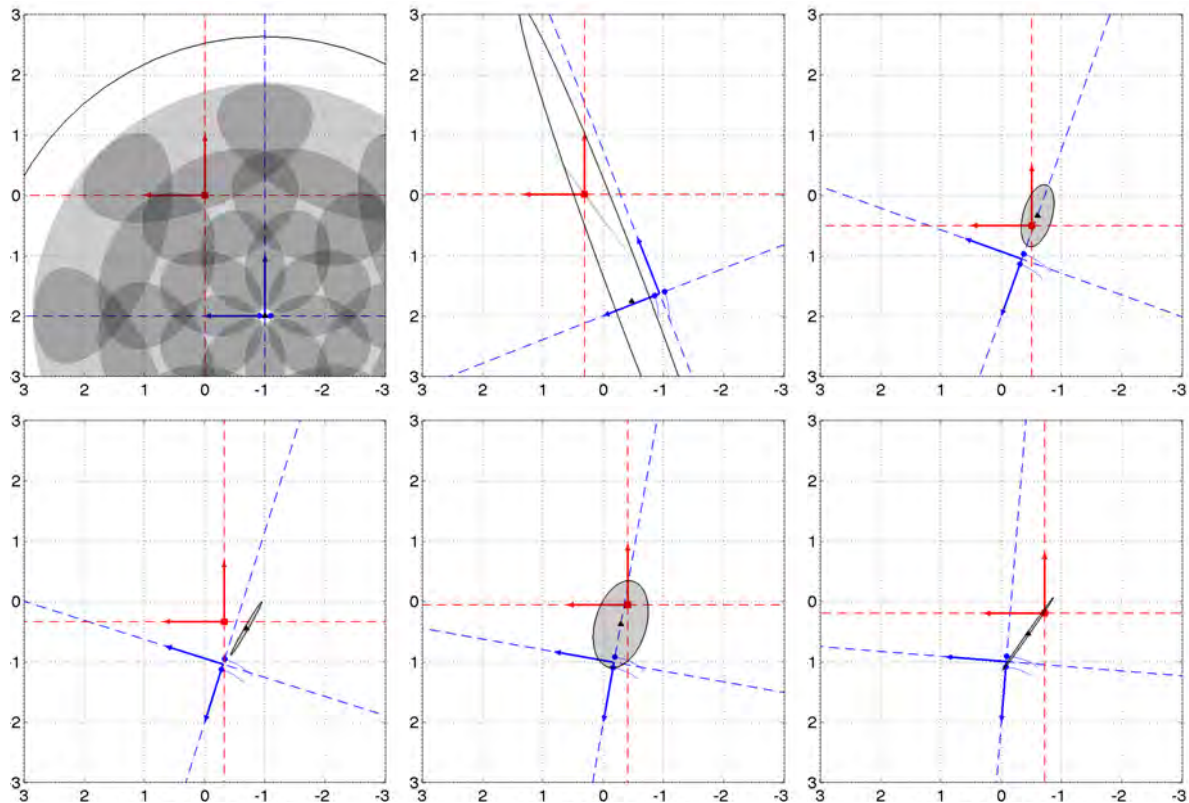


FIGURE 4.10: Résultat de l'estimation (FKU-MH) dans le repère monde aux itérations $\{1, 76, 246, 254, 280, 299\}$ (sens de lecture de gauche à droite et de haut en bas) : vitesses de l'émetteur aléatoires gaussiennes. Effet du passage de l'émetteur à travers l'axe y_R du capteur lorsque la dynamique de l'émetteur est *très* permissive. Perte momentanée de consistance du filtre.

En figure 4.10, la source se déplace selon une marche aléatoire, de diffusion plus importante qu'au scénario de la figure 4.9. Le même constat y est fait, à ceci près que lorsque l'émetteur est dans une direction peu informative, les hypothèses du mélange s'étalent beaucoup plus rapidement, du fait que le mouvement de l'émetteur est beaucoup plus permissif qu'en figure 4.9. Lorsque l'émetteur et le capteur sont relativement proches, ceci peut soulever un problème de perte de consistance. Pour des dynamiques fortement bruitées, il faut alors envisager d'utiliser une stratégie FKU-MG à la place d'une stratégie FKU-MH. Ceci n'est pas testé dans ce manuscrit, mais fait l'objet de travaux futurs.

4.5 LIENS AVEC LE PROBLÈME DU *Bearings-Only Tracking*

Dans le problème considéré, pour une source en champ lointain, les observations n'apportent d'information significative que sur son azimut ϑ (si ces observations ne sont pas fusionnées avec les ordres moteurs du capteur). Le problème étudié s'apparente donc fortement au problème de *Bearings-Only Tracking-BOT*, qui trouve des applications dans de nombreux domaines, comme par exemple le suivi de cible à partir des mesures radar ou sonar (*e.g.* pour des applications militaires). L'application du FKE au problème de BOT et les problèmes sous-jacents ont reçu une attention considérable dans la littérature. Au départ, le système de coordonnées cartésien était exclusivement employé pour la représentation d'état du système. Avec cette paramétrisation, un

comportement instable du FKE fut mis en évidence expérimentalement : «effondrement» prématuré de la matrice de covariance, perte de consistance du filtre, etc. Aidala fut l'un des premiers à étudier théoriquement le comportement du FKE dans le problème du BOT [Aidala, 1979]. L'analyse porte sur la représentation d'état à temps discret suivante (déduite de manière exacte d'une représentation d'état à temps continu sous hypothèse que la commande u est bloquée à l'ordre zéro à la période d'échantillonnage T_s du système)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= F\mathbf{x}_k - Gu_k, \\ \mathbf{z}_k &= h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k, \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

avec

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = T_s^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.5.2)$$

Ci-dessus, \mathbf{x} désigne le processus de bruit d'observation, centré gaussien. Le processus d'état $\mathbf{x} \triangleq [r_x, r_y, T_s v_x, T_s v_y]'$ regroupe à chaque instant les composantes dans le repère monde des position et vitesse (normalisée par rapport à la période d'échantillonnage) relatives de la cible par rapport à l'observateur. La commande $u \triangleq [a_{x_o}, a_{y_o}]'$ regroupe les composantes—déterministes et connues—dans le repère monde de l'accélération de l'observateur par rapport au monde. L'équation d'état traduit ici un mouvement rectiligne et uniforme de la cible par rapport au monde, sans bruit de dynamique. Le processus d'observation est constitué à chaque instant de valeurs bruitées de l'angle β formé par le vecteur observateur-cible, dont l'expression dans le repère monde est notée $(\vec{r})_{\mathcal{F}_O} \triangleq [r_x, r_y]'$, et une direction de référence \vec{y}_o (e.g. le Nord). Cette angle β (bearing) s'écrit $\beta \triangleq \widehat{(\vec{y}_o, \vec{r})}$, de sorte que l'équation d'observation dans (4.5.1) s'écrit plus précisément

$$\mathbf{z}_k = \arctan\left(\frac{r_x}{r_y}\right) + \mathbf{v}_k. \quad (4.5.3)$$

Dans [Aidala, 1979], les causes du phénomène d'effondrement prématuré de la matrice de covariance du FKE sont examinées à travers le développement d'expressions analytiques des moments $\hat{x}_{0|k}, P_{0|k}$ de la densité de lissage $p(x_0|z_{1:k})$. Il est d'abord expliqué qu'en l'absence d'erreur de prédiction sur la direction de la cible, une information sur la distance relative ne peut être récupérée qu'en présence d'une manœuvre du capteur (accélération non nulle de celui-ci). Mathématiquement, ceci se traduit par le fait que la *matrice d'observabilité* du système (voir l'article cité en référence pour la définition de cette matrice) n'est pas de rang plein tant que le capteur n'a pas effectué une manœuvre. En présence d'erreur de prédiction sur la direction de l'émetteur, il est montré que le rang de la matrice d'observabilité peut devenir plein avant même une manœuvre du capteur. Ce fait traduit un phénomène de «fausse observabilité» et lorsque le FKE est initialisé avec une matrice de covariance à forts coefficients, l'analyse montre que $P_{0|k}$ peut subitement s'effondrer, entraînant une perte de consistance du filtre et une sous-estimation très nette de la distance de la cible.

Dans [Aidala et Hammel, 1983], il est suggéré et montré que le système de coordonnées cartésien utilisé pour la représentation d'état du système n'est pas le plus adéquat. Les auteurs proposent alors d'utiliser une autre représentation, et de paramétrer le problème en terme de *coordonnées polaires modifiées*, i.e. d'utiliser le vecteur d'état $X = [\beta, \dot{\beta}, \dot{r}/r, 1/r]'$. Si cette représentation rend l'équation d'état non linéaire et relativement compliquée, elle rend en revanche l'équation d'observation linéaire. Les auteurs montrent alors que tant que le capteur n'a pas effectué de manœuvre, il existe un découplage naturel des composantes «observables» et «non-observables» du vecteur $\mathbf{x}_{0|k}$, ce qui permet d'éviter le phénomène de fausse observabilité évoqué précédemment.

Dans [Peach, 1995], il est constaté que l'utilisation des coordonnées polaires modifiées ne résout pas systématiquement les problèmes de consistance du FKE. Il est proposé, au lieu d'utiliser un unique FKE avec une initialisation très pessimiste (nécessaire lorsque l'on a pas d'information *a priori* sur l'état), d'utiliser une banque de FKE paramétrés en distance. L'idée est, à partir d'une observation initiale, *i.e.* une mesure bruitée z_0 de β_0 , d'initialiser J FKE en parallèle, tous initialisés avec la même valeur moyenne $\hat{\beta}_{0|0}$ relative à la composante β —déduite de z_0 —mais avec des valeurs initiales différentes de $\hat{r}_{0|0}$ relatives à la distance r . La procédure d'initialisation est expliquée en détail dans [Peach, 1995]. Selon les auteurs, cette stratégie multi-hypothèses peut être appliquée à n'importe quel système de coordonnées (cartésiennes, polaires modifiées, ou autres variantes de la littérature). Cependant, le nombre minimal J de filtres à initialiser dans la procédure pour obtenir des résultats consistants peut varier d'un système de coordonnées à l'autre, et on peut s'attendre à nombre J plus faible pour le système polaire modifié, de par les considérations précédentes.

Dans [Brehard et Le Cadre, 2007], une autre difficulté relative au problème du BOT—rarement évoquée dans la littérature—est soulevée. En effet, les considérations précédentes ne portent que sur des systèmes dont la dynamique n'est pas bruitée. Comme dans la plupart des problèmes de filtrage, les statistiques du bruit de dynamique ne sont pas connues et sont difficiles à estimer *a priori*. Il faut en général effectuer des hypothèses à leur sujet (*tuning* du filtre). En général, l'amplitude du bruit de dynamique à utiliser comme paramètre du filtre est choisie relativement grande, car la prendre plus petite que l'amplitude «vraie»—inconnue—risquerait de compromettre la consistance du filtre. L'amplitude du bruit de dynamique est donc généralement surévaluée, quitte à avoir des résultats un peu trop pessimistes mais consistants. Or, dans le cas du BOT, [Brehard et Le Cadre, 2007] a montré en simulation que surévaluer le bruit de dynamique du système peut mener aux conclusions contraires (indépendamment du système de coordonnées choisi, ou du choix d'une stratégie particulière/Kalman). Plus spécifiquement, lorsque le capteur n'effectue pas de manœuvre pour «récupérer l'observabilité» sur la distance de l'émetteur, une «surévaluation» de la distance et une perte de consistance du filtre sont constatés. En mettant le problème en équation avec le système de *coordonnées polaires logarithmiques*, et considérant un bruit de dynamique centré gaussien de matrice de covariance

$$Q = \sigma \tilde{Q}, \quad (4.5.4)$$

où \tilde{Q} est une matrice normalisée donnant la structure de Q et σ est le facteur d'amplitude du bruit, les auteurs constatent qu'en l'absence de manœuvre les quantités σ et r_k n'apparaissent pas séparément dans les équations de dynamique, mais que seul leur rapport

$$\tilde{\sigma}_k = \frac{\sigma}{r_k} \quad (4.5.5)$$

est présent. Les auteurs appellent ce rapport «variance naturelle du système». En conséquence, en l'absence de manœuvre, la quantité que l'on peut espérer estimer est $\tilde{\sigma}_k$ et non $1/r_k$ (ou son logarithme ρ_k dans le système polaire logarithmique). Les auteurs proposent ensuite un *filtre particulière hiérarchique* pour résoudre le problème évoqué dans le cas où ρ_k n'est pas «observable». Ce filtre fonctionne en deux étapes. La première consiste à estimer $\beta_k, \dot{\beta}_k, \dot{\rho}_k, \tilde{\sigma}_k$ (les variables considérées «observables» en l'absence de manœuvre), puis sur la base de cette étape, la connaissance *a priori* sur ρ_k est mise à jour. Des résultats de simulation montrent que l'approche proposée permet, en l'absence de manœuvre, d'obtenir des résultats bien plus consistants que ceux d'un filtre particulier SIR par exemple. Par contre, dans les exemples donnés les filtres emploient 5000 particules, ce qui demeure relativement élevé.

Comme on l'a dit, le problème BOT s'apparente à notre problème de filtrage à partir de mesures d'ITD, mais il existe des différences notables entre les deux problèmes. Premièrement, dans le BOT, le capteur est supposé ponctuel, et la direction observateur-émetteur β est donnée

par rapport à une direction de référence liée au monde. Dans notre cas, la direction de l'émetteur θ est définie par rapport à l'axe z_R lié au capteur. Dans le BOT (resp. notre problème), les observations sont des versions bruitées de β (resp. de l'ITD, fonction non-inversible de θ , de par l'ambiguïté avant-arrière). Dans le BOT, quel que soit l'état, les observations renseignent toujours de la même manière sur β (fonction d'observation linéaire dans le système de coordonnées polaire, polaire modifié, etc. et bruit d'observation supposé indépendant de l'état). Dans notre problème, l'information portée par les observations est dépendante de θ (cf figures 4.7 à 4.10). Enfin, dans le BOT (resp. notre problème), le capteur est commandé en accélération de translation (resp. vitesses de translation et rotation). Aussi les résultats théoriques développés dans les contributions précédentes ne peuvent pas rigoureusement se transposer à notre problème.

Si par exemple dans notre problème l'émetteur est supposé se déplacer en mouvement rectiligne et uniforme, il n'est pas du tout certain qu'une transformation du type

$$(e_y, e_z, v_{Ey}, v_{Ez}) \mapsto (\theta, \dot{\theta}, \dot{r}/r, 1/r) \quad (4.5.6)$$

nous permette de «découpler» les variables observables des variables «inobservables» en l'absence de manœuvre, ni même qu'elle nous donne toujours une description minimale du même problème physique. La recherche d'autres types de paramétrisations pour caractériser notre problème demande une étude plus approfondie des équations d'état présentées en introduction de cette thèse, peut faire l'objet de futurs travaux, mais ne sera pas abordée dans cette thèse. On se contentera donc d'utiliser les équations et variables d'état données au §1.2, sauf lorsqu'on considèrera une tête, auquel cas nous utiliserons le système de coordonnées polaires (avec un émetteur statique par rapport au monde, $v_{Ey} = v_{Ez} = 0$), mais pour des raisons autres que celles énoncées précédemment, que l'on spécifiera le moment venu.

On peut par contre remarquer par un simple exemple de simulation que les difficultés liées au «tuning» du bruit de dynamique dans le problème du BOT s'appliquent également à notre problème. C'est l'objet de la figure 4.11, où le capteur effectue un mouvement de rotation autour de l'axe \vec{x}_R , sans translation de son centre R . L'émetteur effectue une marche aléatoire avec un certain paramètre de diffusion (variance du bruit de dynamique). Le filtre repose également sur ce modèle, mais le paramètre de diffusion est surévalué d'un facteur 10. On arrive au même genre de conclusion que dans [Brehard et Le Cadre, 2007], à savoir une perte de consistance du filtre et une surestimation de la distance de l'émetteur.

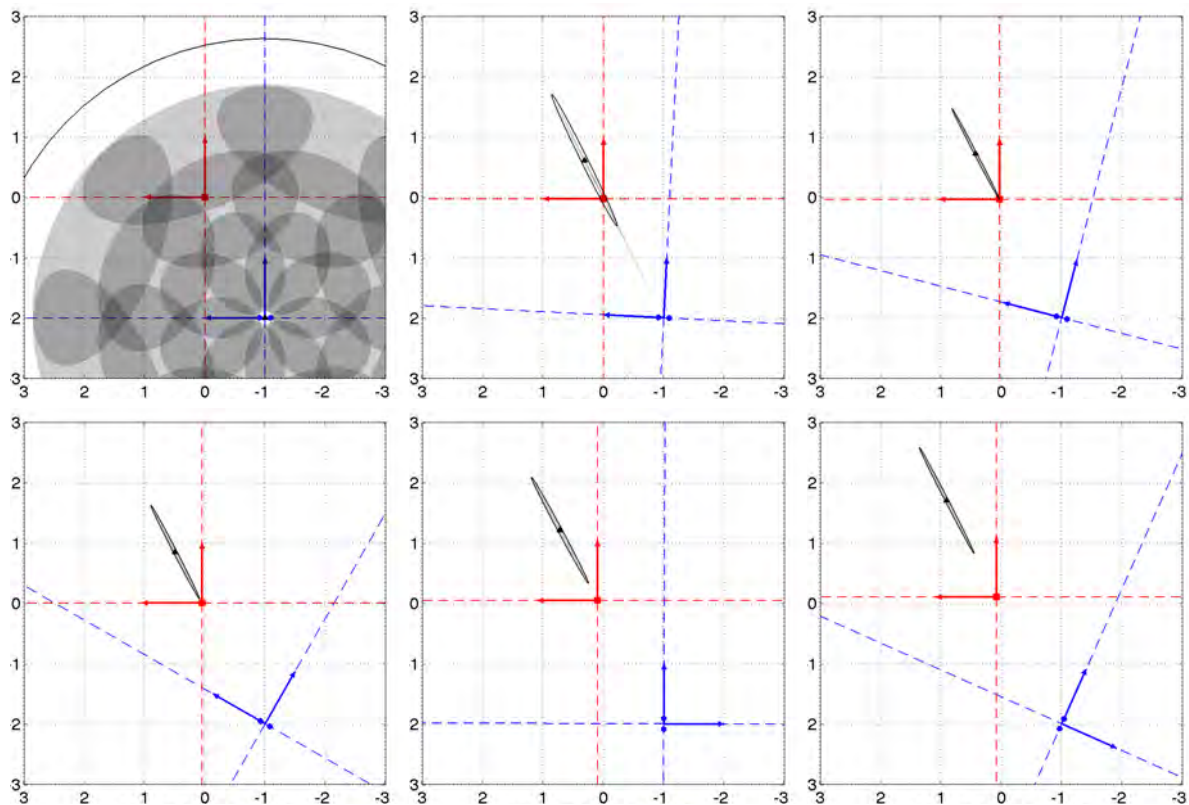


FIGURE 4.11: Résultat de l'estimation (FKU-MH) dans le repère monde aux itérations $\{1, 11, 52, 105, 316, 399\}$ (sens de lecture de gauche à droite et de haut en bas) : vitesses de l'émetteur aléatoires gaussiennes. Effet de la sur-évaluation du paramètre de la dynamique de l'émetteur lorsque le mouvement du capteur est peu informatif sur la distance. Perte de consistance du filtre, sur-évaluation de la distance de l'émetteur.

Ce genre de constat soulève un autre type de problème spécifique à la robotique. Lorsqu'une stratégie de filtrage basée sur l'ITD est appliquée pour localiser par exemple un locuteur humain, la dynamique du locuteur est difficile à modéliser. En robotique, on a souvent recours à des modèles de type marche aléatoire corrélée/décorrélée, processus de Langevin, très pessimistes (permissifs) pour «capturer» des erreurs de modèle et les bruits. Le fait qu'un humain puisse changer de dynamique au cours du temps est source de difficultés, puisque ce genre de solution risque très fortement de donner des résultats similaires à ceux présentés en figure 4.11, en particulier pour un capteur immobile. Cela remet aussi en cause la présentation de certains travaux en robotique, où seule la moyenne a posteriori est présentée sans considérer de région de confiance associée.

4.6 GESTION DE FAUSSES MESURES

Du fait de la mobilité du capteur et/ou de l'émetteur et de la non-stationnarité du signal émis, les fenêtres d'observation sur lesquelles sont calculés les temps de retard sont relativement courtes (typiquement quelques dizaines de millisecondes). Les statistiques de l'estimateur de ITD peuvent alors varier fortement d'une fenêtre d'observation à l'autre. Pour illustrer ce propos, la figure 4.12 montre les ITD théorique et estimé au cours du temps pour un capteur mobile en champ libre et un haut-parleur statique émettant un signal de voix humaine dans une chambre acoustique très peu réverbérante. Les ITD théoriques sont déduites des positions vraies du haut-parleur et du

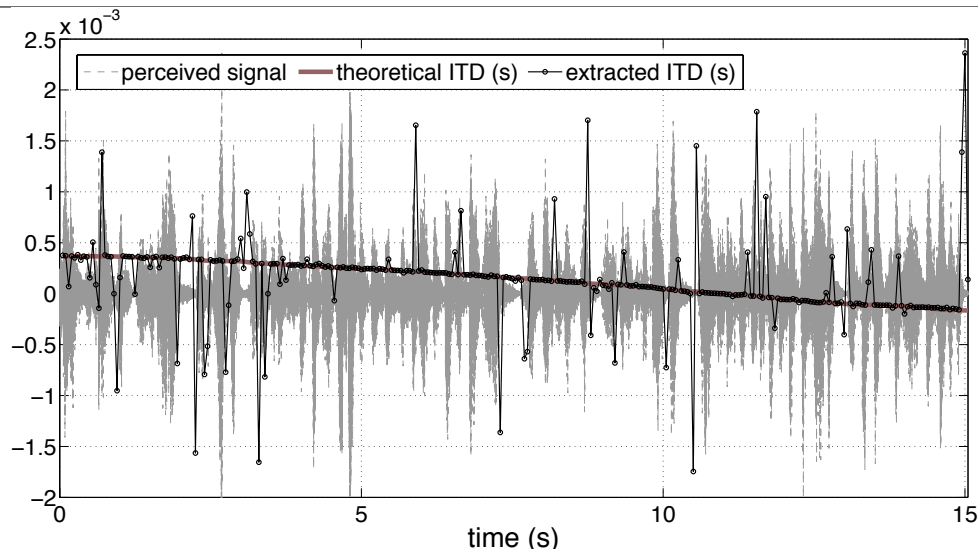


FIGURE 4.12: **ITD** théorique (trait plein marron) et estimé (points noirs) au cours du temps pour un capteur mobile en champ libre et un haut-parleur immobile émettant un signal de voix. Le signal perçus en l'un des microphones (gris clair) est visible en arrière plan.

capteur, enregistrées au cours du mouvement avec un système de capture de mouvement. Les **ITD** sont calculés tous les 50ms avec la méthode de corrélation croisée généralisée à partir de séquences audio de 10ms. L'acquisition audio est faite à 44.1kHz, et du fait que la précision de la corrélation croisée généralisée discrète est limitée par la fréquence d'échantillonnage, celle-ci est interpolée en insérant des zéros entre les échantillons de la séquence originale avant d'appliquer un filtre passe pas. Comme la figure le montre, la plupart des **ITD** extraits coïncident avec les valeurs théoriques, tandis que certains semblent être de fausses mesures indépendantes de la position relative de l'émetteur par rapport au récepteur. La figure montre que ces fausses observations se manifestent même dans des conditions acoustiques idéales (peu de bruit lié à l'environnement, réverbérations très faibles), et on peut s'attendre à des résultats bien pires dans des environnements plus réalistes.

Notons que la fréquence d'apparition des fausses mesures dépend de la durée T de la fenêtre d'observation, mais que ce paramètre doit être choisi avec soin, du fait que le vrai temps de retard à estimer ne doit pas varier significativement pendant la durée d'observation T pour que l'**ETR** ait un sens [Knapp et Carter, 1976]. C'est d'une importance fondamentale lorsque l'émetteur et le récepteur sont en mouvement.

A Modèle à une mesure

Des considérations précédentes, un modèle d'observation est proposé, tenant compte de la non-stationnarité du signal de l'émetteur. Il est supposé qu'à chaque instant k , l'observation \mathbf{z}_k —i.e. l'**ETR**—conditionnellement à \mathbf{x}_k peut suivre l'une des deux lois suivantes :

- Une **ddp** uniforme de support symétrique $\mathcal{D} = [-D_m, D_m]$ (où $D_m = \frac{2a}{c}$ est la valeur maximale que peut prendre le temps de retard physique théorique entre les deux microphones) lorsqu'à l'instant considéré le **RSB** et/ou le produit temps-largeur de bande (BT) ne sont pas suffisamment élevés pour que l'estimateur de **ITD** apporte suffisamment d'information sur la position de l'émetteur. Ce cas sera mentionné ultérieurement sous le nom de *fausse mesure*.
- Une **ddp** gaussienne déduite de (4.2.7), où h est donné par (1.2.41) et où \mathbf{v} est centré blanc et gaussien, de variance connue et relativement faible, lorsqu'à l'instant considéré le **RSB** et

le produit temps-largeur de bande sont suffisamment élevés pour apporter une information précise et sans ambiguïté sur la position de la source. Ce cas sera mentionné ultérieurement sous le nom de cas de *mesure correcte*.

Cette représentation binaire est une approximation grossière de la réalité, puisque, d'après les discussions du §2.2.5, il peut exister en pratique des mesures entre fausses et correctes (notamment lorsque le signal présente des caractéristiques faible bande). On a également fait l'hypothèse, tout comme dans [Knapp et Carter, 1976]–[Weiss et Weinstein, 1983]–[Weinstein et Weiss, 1984], que les bruits de mesure des récepteurs sont indépendants l'un de l'autre et indépendants du signal de l'émetteur. Notons que, bien que les algorithmes ne soient pas évalués en milieux réverbérants, l'apparition d'observations aberrantes est aussi une caractéristique de ce genre de milieux [Gustafsson *et al.*, 2003]–[Champagne *et al.*, 1996]. Cependant, l'hypothèse de fausses observations uniformément distribuées n'est généralement pas très pertinente pour des milieux fortement réverbérants.

Au vu des discussions précédentes, un schéma de filtrage exploitant l'équation d'observation (4.2.7) uniquement ne serait donc pas adapté pour le modèle d'observation décrit ci-dessus. En effet, si la variance du bruit d'observation d'un filtre FKU-MH était réglée de manière à coïncider précisément avec la valeur vraie de la variance des observations correctes, alors les fausses mesures, ayant une distribution bien plus large, compromettraient la stabilité du filtre. *A contrario*, si cette variance était sur-évaluée par rapport à la variance des observations correctes, de manière, en quelque sorte, à «capturer» les statistiques des fausses mesures, alors la précision du filtre serait remise en cause et on pourrait s'attendre à un comportement trop *pessimiste* du filtre.

La figure 4.13 illustre la mise en échec du FKU-MH pour un modèle d'observation «réaliste» conforme au modèle proposé précédemment, et un filtre basé sur l'hypothèse d'absence de fausses mesures. Les paramètres de la simulation ont été réglés de sorte qu'à chaque instant, une fausse observation apparaît avec une probabilité de 0.9. Comme on peut l'observer, quelques fausses observations suffisent à complètement «déstabiliser» le filtre.

Une possibilité pour résoudre ce problème serait de définir une procédure externe qui sélectionne les observations à assimiler par le filtre en fonction d'un critère judicieusement choisi [Bar-Shalom et Li, 1995], par exemple utiliser le critère AIC défini en §3.2. Le problème est qu'avec une certaine probabilité, des observations validées par le système de détection peuvent être en réalité fausses, et le filtre peut, dans ce cas, être alimenté avec des observations fausses en «croyant» celles-ci correctes. En outre, l'algorithme de détection repose sur certaines hypothèses simplificatrices qui peuvent être violées dans un environnement réel (de "fausses" sources additionnelles peuvent apparaître fugitivement, différentes de la source suivie, bruit de l'environnement non stationnaire et non spatialement blanc, etc.). Sachant qu'une seule fausse observation validée peut avoir de grandes conséquences sur la consistance du filtre, on propose une autre solution. La stratégie proposée ci-dessous prend en compte les fausses mesures d'une manière probabiliste, en exploitant le modèle d'observation binaire décrit précédemment.

Considérons qu'à l'itération k la densité de prédiction de l'état est correctement décrite par le mélange de gaussiennes

$$p(x_k|z_{1:k-1}) = \sum_{j=1}^J w_{k-1}^j p(x_k|z_{1:k-1}, m_j), \quad (4.6.1)$$

avec $p(x_k|z_{1:k-1}, m_j) = \mathcal{N}(x_k; \hat{x}_{k|k-1}^j, P_{k|k-1}^j)$, $w_{k-1}^j = p(m_j|z_{1:k-1})$ et $\sum_{j=1}^J w_{k-1}^j = 1$. On définit la variable aléatoire discrète binaire \mathbf{I}_k comme suit

$$\mathbf{I}_k = \begin{cases} 1 & \text{si } z_k \text{ est une mesure correcte,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.6.2)$$

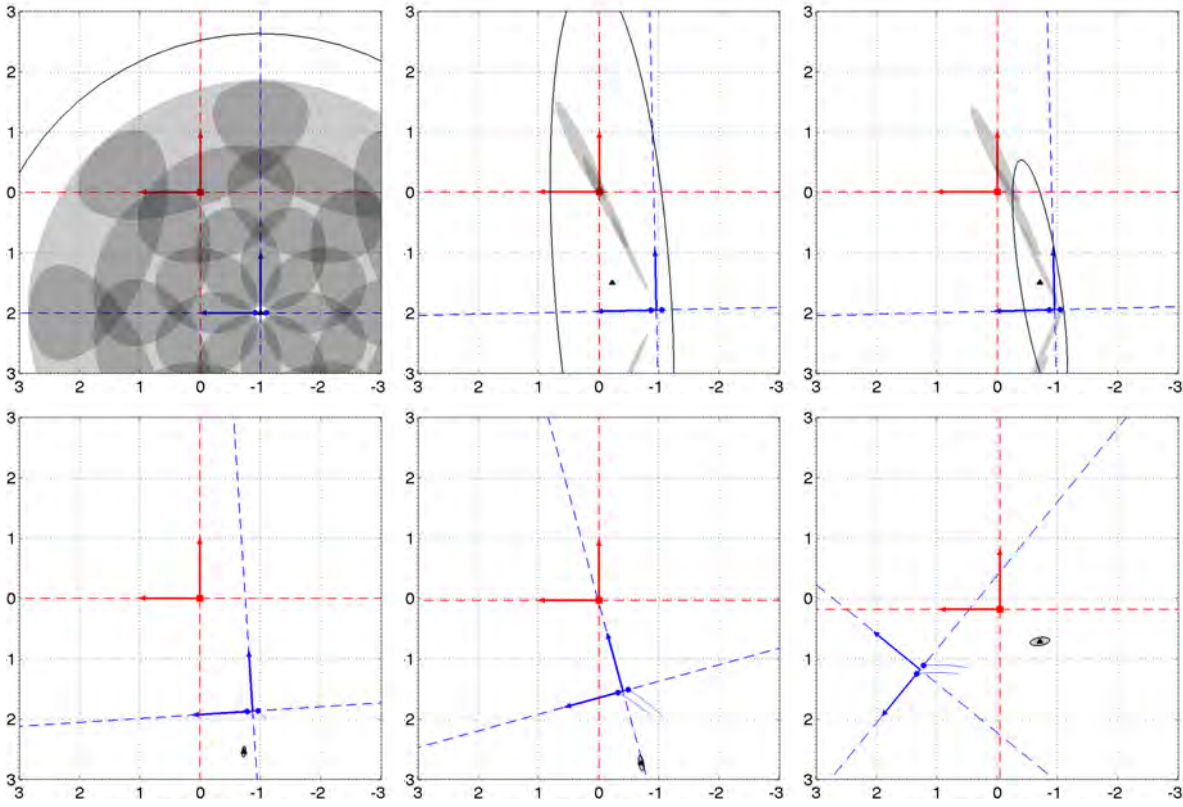


FIGURE 4.13: Résultat de l'estimation (FKU-MH) dans le repère monde aux itérations $\{1, 10, 11, 27, 108, 355\}$ (sens de lecture de gauche à droite et de haut en bas) : émetteur immobile. Effet de la non prise en compte des fausses observations dans la stratégie de filtrage.

qui indique par sa valeur si l'observation courante est bonne ou mauvaise. Une observation fautive z_k est supposée indépendante de \mathbf{x}_k et de $\mathbf{z}_{1:k-1}$, et suit une loi uniforme sur la région \mathcal{D} , de sorte que

$$p(z_k | z_{1:k-1}, m_j, \mathbf{I}_k = 0) = \mathcal{U}(z_k; \mathcal{D}). \quad (4.6.3)$$

Une observation correcte z_k a pour **ddp**, conditionnellement à $z_{1:k-1}$ et m_j ,

$$p(z_k | z_{1:k-1}, m_j, \mathbf{I}_k = 1) = \mathcal{N}\left(z_k; \hat{z}_{k|k-1}^{j,1}, S_{k|k-1}^{j,1}\right), \quad (4.6.4)$$

où $\hat{z}_{k|k-1}^{j,1}, S_{k|k-1}^{j,1}$, les moments de l'observation prédite sous l'hypothèse m_j sachant qu'elle est bonne, sont calculés à partir des moments $\hat{x}_{k|k-1}^j, P_{k|k-1}^j$ dans l'étape de prédiction d'un FKU. En appliquant le théorème des probabilités totales par rapport aux modes m_j et aux réalisations possibles de \mathbf{I}_k , on peut exprimer la densité de filtrage à l'itération k comme suit

$$p(x_k | z_{1:k}) = \sum_{j=1}^J w_k^j \sum_{i=0}^1 \gamma_k^{j,i} \mathcal{N}\left(x_k; \hat{x}_{k|k}^{j,i}, P_{k|k}^{j,i}\right), \quad (4.6.5)$$

avec $w_k^j \triangleq \mathbb{P}\{\mathbf{M} = m_j | z_{1:k}\}$ et $\gamma_k^{j,i} \triangleq \mathbb{P}\{\mathbf{I}_k = i | z_{1:k}, m_j\}$. Les moments de $(\mathbf{x}_k | z_{1:k}, m_j, \mathbf{I}_k = i)$, notés $\hat{x}_{k|k}^{j,i}, P_{k|k}^{j,i}$, sont calculés à partir des moments $\hat{x}_{k|k-1}^j, P_{k|k-1}^j, \hat{z}_{k|k-1}^{j,1}, S_{k|k-1}^{j,1}$ et de l'observation courante z_k dans l'étape de correction du FKU. Les moments $\hat{x}_{k|k}^{j,0}, P_{k|k}^{j,0}$ sont tout simplement égaux

à $\hat{x}_{k|k-1}^j, P_{k|k-1}^j$, du fait qu'une fausse observation est indépendante de l'état. Les probabilités *a posteriori* $\gamma_k^{j,i}$ sont obtenues par application de la règle de Bayes selon

$$\gamma_k^{j,i} = \frac{p(z_k|z_{1:k-1}, m_j, \mathbf{I}_k = i) \mathbb{P}\{\mathbf{I}_k = i\}}{p(z_k|z_{1:k-1}, m_j)} = \frac{\ell_k^{j,i} P_i}{\ell_k^j}, \quad (4.6.6)$$

où $\ell_k^{j,i} \triangleq p(z_k|z_{1:k-1}, m_j, \mathbf{I}_k = i)$ est donné en fonction de i aux équations (4.6.3)–(4.6.4), $P_i \triangleq \mathbb{P}\{\mathbf{I}_k = i\}$ est supposé indépendant des observations passées et de l'état, et où

$$\ell_k^j \triangleq p(z_k|z_{1:k-1}, m_j) = \ell_k^{j,1} P_1 + \ell_k^{j,0} P_0. \quad (4.6.7)$$

Des calculs précédents, on déduit que pour une densité de prédiction à J hypothèses gaussiennes, on obtient une densité de filtrage à $2J$ hypothèses gaussiennes. L'algorithme présenté ici s'apparente au FKU-MG, si ce n'est que la densité de l'observation conditionnellement à l'état est ici un mélange d'une loi gaussienne et d'une loi uniforme et non un mélange de gaussiennes. Tout comme pour le filtre à mélange de gaussiennes, on peut avoir recours à divers algorithmes de gestion des hypothèses plus ou moins élaborés pour éviter la croissance exponentielle du nombre de modes au cours du temps. Une stratégie simple consiste, à chaque itération, à fusionner les modes $\{j, 0\}$ et $\{j, 1\}$ selon

$$\hat{x}_{k|k}^j = \sum_{i=0}^1 \gamma_k^{j,i} \hat{x}_{k|k}^{j,i}, \quad (4.6.8)$$

$$P_{k|k}^j = \sum_{i=0}^1 \gamma_k^{j,i} \left(P_{k|k}^{j,i} + \left(\hat{x}_{k|k}^{j,i} - \hat{x}_{k|k}^j \right) \left(\hat{x}_{k|k}^{j,i} - \hat{x}_{k|k}^j \right)' \right). \quad (4.6.9)$$

De sorte que la densité de filtrage de l'état est approximée par le mélange

$$p(x_k|z_{1:k}) = \sum_{j=1}^J w_k^j \mathcal{N}(x_k; \hat{x}_{k|k}^j, P_{k|k}^j), \quad (4.6.10)$$

où w_k^j , la probabilité *a posteriori* de l'hypothèse m_j , est donnée par

$$w_k^j = \frac{\ell_k^j w_{k-1}^j}{\sum_{p=1}^J \ell_k^p w_{k-1}^p}. \quad (4.6.11)$$

La stratégie est résumée dans l'algorithme 8³. La figure 4.14 montre le résultat d'une stratégie (FKU-MH-GFM) dans le même scénario que celui de la figure 4.13 (vérité terrain identique, mêmes itérations). On voit clairement que la stratégie proposée permet de garantir la consistance de l'estimation, en dépit des fausses mesures.

3. remarque concernant l'algorithme 8 : la constante de normalisation L_k n'a pas d'intérêt en soi et il n'est donc pas nécessaire de retourner sa valeur en sortie de l'algorithme. Cependant, lorsque le FKU-MH-GFM est utilisé dans l'une des stratégies de détection présentées au §4.7, cette constante est utilisée dans des calculs plus haut niveau.

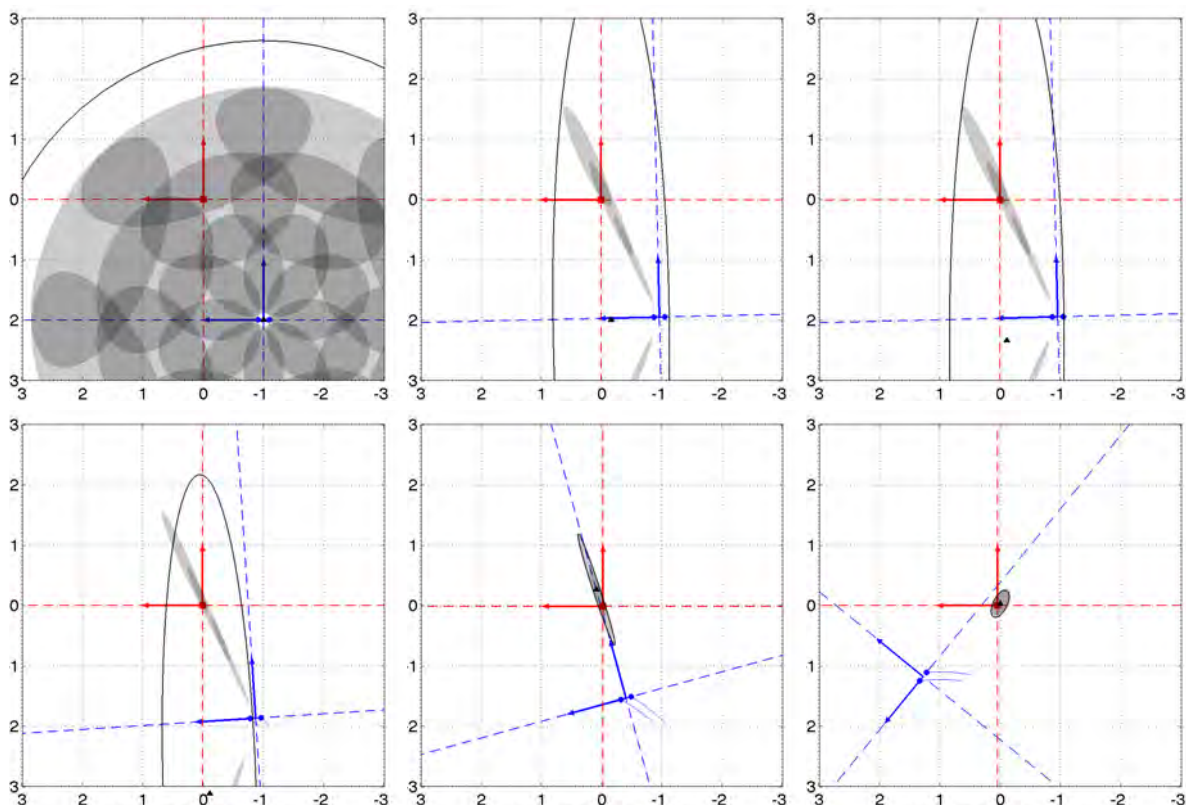


FIGURE 4.14: Résultat de l'estimation (FKU-MH-GFM) dans le repère monde aux itérations $\{1, 10, 11, 27, 108, 355\}$ (sens de lecture de gauche à droite et de haut en bas) : émetteur immobile. Consistance de l'estimateur lorsque les fausses observations sont explicitement prises en compte dans la stratégie de filtrage.

B Modèle à mesures multiples

Certains auteurs proposent, plutôt que construire une observation en extrayant l'argument qui maximise la corrélation croisée généralisée, de poser un seuil sur la corrélation croisée généralisée, et de déterminer tous les extrema locaux de celle-ci au dessus de ce seuil. Les arguments de ces extrema sont ensuite extraits pour construire à chaque instant un jeu d'observations. L'idée sous-jacente est qu'en milieu réverbérant par exemple, la corrélation croisée généralisée admet plusieurs pics, et que le plus haut pic ne correspond pas toujours à la position de la source. Pour éviter de «manquer le bon pic», on en sélectionne un certain nombre, dont les arguments constituent un jeu d'observation. Le problème qui se pose est donc de décider quelle observation doit être assimilée dans le schéma de filtrage. Le filtre *Probabilistic Data Association Filter* (PDAF) proposé dans [Bar-Shalom et Li, 1995] permet, comme son nom l'indique, de gérer ces observations multiples de manière probabiliste. On en décrit le principe, ainsi que le modèle d'observation sur lequel il repose.

À chaque instant, un ensemble d'observations est disponible. Parmi ces observations, seules celles qui se sont réalisées dans un sous-ensemble de l'espace d'observation—appelé domaine de validation⁴—noté \mathcal{D}_k sont exploitées dans la stratégie de filtrage. On parle d'observations validées. À chaque instant, le nombre d'observations validées est représenté par une variable aléatoire

4. *validation gate*

Algorithme 8 : Sorties=FKU-MH-GFM(Entrées)

FKU Multi-Hypothèses à Gestion de Fausses Mesures

Entrées : $\left\{ \hat{x}_{k-1|k-1}^j, P_{k-1|k-1}^j, w_{k-1}^j \right\}_{j=1, \dots, J}, u_{k-1}, z_k, f, h, Q, R$ **Sorties :** $\left\{ \hat{x}_{k|k}^j, P_{k|k}^j, w_k^j \right\}_{j=1, \dots, J}, L_k^{-1}$ **1 pour** $j = 1, \dots, J$ **faire**Calcul des moments de $(\mathbf{x}_{k|k-1}|m_j, \mathbf{I}_k=1)$, $(\mathbf{z}_{k|k-1}|m_j, \mathbf{I}_k=1)$ et $(\mathbf{x}_{k|k}|m_j, \mathbf{I}_k=0)$ *via* une étape du FKU**2** $\left[\hat{x}_{k|k}^{j,1}, P_{k|k}^{j,1}, \hat{x}_{k|k}^{j,0}, P_{k|k}^{j,0}, \hat{z}_{k|k-1}^j, S_{k|k-1}^{j,1} \right] = \text{FKU} \left(\hat{x}_{k-1|k-1}^j, P_{k-1|k-1}^j, u_{k-1}, z_k, f, h, Q, R \right)$ Calcul du poids du mode m_j *a posteriori***3** $\ell_k^j = \mathcal{N} \left(z_k; \hat{z}_{k|k-1}^j, S_{k|k-1}^{j,1} \right) P_1 + \mathcal{U} \left(z_k; \mathcal{D} \right) P_0$; $w_k^j = \ell_k^j w_{k-1}^j$ Calcul des pondérations pour la fusion des modes $\{j, 1\}$ et $\{j, 2\}$ **4** $\gamma_k^{j,1} = \frac{\mathcal{N} \left(z_k; \hat{z}_{k|k-1}^j, S_{k|k-1}^{j,1} \right) P_1}{\ell_k^j}$; $\gamma_k^{j,0} = \frac{\mathcal{U} \left(z_k; \mathcal{D} \right) P_0}{\ell_k^j}$ Fusion des modes, calcul des moments *mode-matched***5** $\hat{x}_{k|k}^j = \sum_{i=0}^1 \gamma_k^{j,i} \hat{x}_{k|k}^{j,i}$ **6** $P_{k|k}^j = \sum_{i=0}^1 \gamma_k^{j,i} \left(P_{k|k}^{j,i} + \left(\hat{x}_{k|k}^{j,i} - \hat{x}_{k|k}^j \right) \left(\hat{x}_{k|k}^{j,i} - \hat{x}_{k|k}^j \right)' \right)$ **7 finpour**Calcul de la constante de normalisation des poids *a posteriori***8** $L_k = \sum_{j=1}^J w_k^j$ Normalisation des poids de sorte que $\sum_{j=1}^J p(m_j|z_{1:k}) = 1$ **9 pour** $j = 1, \dots, J$ **faire****10** | $w_k^j = w_k^j / L_k$ **11 finpour**

discrète \mathbf{n}_k dont on connaît la réalisation n_k . On note \mathcal{Z}_k l'ensemble (fini) des n_k observations validées à l'instant k

$$\mathcal{Z}_k = \{z_k^i\}_{i=1, \dots, n_k}. \quad (4.6.12)$$

Notons que \mathcal{Z}_k peut être vu comme la réalisation d'un *ensemble fini aléatoire*, objet mathématique pouvant être totalement caractérisé par

- une loi discrète caractérisant le nombre d'éléments (cardinal) de l'ensemble fini.
- une famille de lois symétriques (invariantes par permutation quelconque des composantes), caractérisant la répartition conjointe des éléments de l'ensemble, conditionnellement à leur nombre.

C'est cette caractérisation qui sera exploitée dans les développements qui vont suivre. A noter qu'avec le formalisme mathématique usuel relatif aux *vecteurs aléatoires*, la densité conjointe de \mathcal{Z}_k **n'a de sens que si elle est conditionnée sur** l'événement $\{\mathbf{n}_k = n_k\}$. Nous insistons sur quelques éléments de terminologie pour clarifier la suite. Le terme «observation» désigne un **élément** de \mathcal{Z}_k (*i.e.* une valeur candidate d'ITD issue de la procédure décrite précédemment) et non \mathcal{Z}_k tout entier. Le terme «jeu d'observations» fait, lui, référence à \mathcal{Z}_k . z_k^i désigne le $i^{\text{ème}}$ élément de \mathcal{Z}_k , tandis que z_k désigne un élément quelconque de cet ensemble. \mathbf{z}_k est une variable

aléatoire dont la réalisation est z_k .

On note D_k le volume—le terme volume étant le terme générique, mais dans notre cas où l'espace d'observation est de dimension 1, il s'agit d'une longueur—de la région de validation \mathcal{D}_k à l'instant k . À chaque instant, on considère qu'une observation **au plus provient** de l'émetteur, *i.e.*, conditionnellement à \mathbf{x}_k obéit à (4.2.7). On parle d'*observation correcte*. Les observations qui ne sont pas correctes sont dites *fausses*, et sont supposées identiquement distribuées, indépendantes les unes des autres et indépendantes du vecteur d'état. On suppose connue et indépendante du temps la probabilité, notée P_D , qu'une observation (validée ou non) correcte soit présente parmi l'ensemble des observations. On parle de *probabilité de détection* de la cible (en l'occurrence l'émetteur). Comme au §4.6A, on considère que la densité de filtrage de l'état à l'itération $k - 1$ est correctement approximée par le mélange de gaussiennes

$$p(x_{k-1} | \mathcal{Z}_{1:k-1}) = \sum_{j=1}^J w_{k-1}^j \mathcal{N}(x_{k-1}; \hat{x}_{k-1|k-1}^j, P_{k-1|k-1}^j), \quad (4.6.13)$$

où les indices $j = 1, \dots, J$ font référence aux modes m_1, \dots, m_J du mélange de gaussiennes caractérisant la distribution initiale de l'état. On définit la probabilité

$$P_{V_k} \triangleq \mathbb{P}\{\mathbf{z}_k \in \mathcal{D}_k | \mathcal{Z}_{1:k-1}, \mathbf{z}_k \text{ correcte}\} = \int_{\mathcal{D}_k} \sum_{j=1}^J w_{k-1}^j \mathcal{N}(z_k; \hat{z}_{k|k-1}^j, S_{k|k-1}^j) dz_k \quad (4.6.14)$$

qu'une observation correcte à l'instant k soit validée, conditionnellement à $\mathcal{Z}_{1:k-1}$. L'intégrande dans (4.6.14) représente la densité de prédiction d'une observation correcte, et est déduite de $p(x_k | \mathcal{Z}_{1:k-1})$ dans l'étape de prédiction du FKU-MH. On peut aussi écrire

$$P_{V_k} = \sum_{j=1}^J w_{k-1}^j P_{V_k}^j \quad (4.6.15)$$

avec $P_{V_k}^j \triangleq \mathbb{P}\{\mathbf{z}_k \in \mathcal{D}_k | \mathcal{Z}_{1:k-1}, \mathbf{z}_k \text{ correcte}, m_j\}$. Dans le cadre du PDAF initialement proposé dans [Bar-Shalom et Li, 1995], les densités sont approximées par des gaussiennes, et en particulier

$$p(z_k | \mathcal{Z}_{1:k-1}, \mathbf{z}_k \text{ correcte}) = \mathcal{N}(z_k; \hat{z}_{k|k-1}, S_{k|k-1}). \quad (4.6.16)$$

La région de validation est alors définie comme l'ellipsoïde à « $\alpha\%$ » d'une observation correcte prédite, *i.e.*

$$\mathcal{D}_k \triangleq \left\{ z : (z - \hat{z}_{k|k-1})' S_{k|k-1}^{-1} (z - \hat{z}_{k|k-1}) < \gamma(\alpha) \right\}, \text{ avec } \gamma(\alpha) \text{ tel que } P_{V_k} = \alpha/100 \quad (4.6.17)$$

de sorte que P_{V_k} n'a pas besoin d'être calculé en ligne. Dans notre cas multi-gaussien, il faut généralement calculer l'intégrale de $p(z_k | \mathcal{Z}_{1:k-1})$ sur \mathcal{D}_k en ligne. On se propose de définir ici la région de validation par

$$\mathcal{D}_k \triangleq [-D_m, D_m], \quad (4.6.18)$$

puisque les extrema de la corrélation croisée généralisée sont généralement recherchés sur le domaine des retards physiques possibles. On définit la variable aléatoire discrète \mathbf{I}_k indiquant quelle mesure validée est correcte

$$\mathbf{I}_k = \begin{cases} i & \text{si } z_k^i \text{ est la mesure validée correcte (unique),} \\ 0 & \text{si toutes les mesures validées sont fausses.} \end{cases} \quad (4.6.19)$$

Le fait que la réalisation de \mathbf{I}_k soit inconnue est à l'origine de notre problème *d'association de données*. Une observation fautive **validée** \mathbf{z}_k est supposée indépendante de \mathbf{x}_k —*a fortiori* de $\mathcal{Z}_{1:k-1}$ —et suit la loi uniforme sur la région de validation, *i.e.*

$$p(z_k | \mathcal{Z}_{1:k-1}, \mathbf{z}_k \in \mathcal{D}_k, \mathbf{z}_k \text{ fautive}, m_j) = \mathcal{U}(z_k; \mathcal{D}_k). \quad (4.6.20)$$

Une observation correcte **validée** \mathbf{z}_k a pour **ddp**, conditionnellement à $\mathcal{Z}_{1:k-1}$ et m_j ,

$$p(z_k | \mathcal{Z}_{1:k-1}, \mathbf{z}_k \in \mathcal{D}_k, \mathbf{z}_k \text{ correcte}, m_j) = \frac{1}{P_{V_k}^j} \mathcal{N}(z_k; \hat{z}_{k|k-1}^j, S_{k|k-1}^j) \mathbb{I}_{\mathcal{D}_k}(z_k), \quad (4.6.21)$$

avec $\mathbb{I}_{\mathcal{D}_k}(z_k)$ la fonction indicatrice de \mathcal{D}_k , égale à 1 sur \mathcal{D}_k et 0 ailleurs. Les équations (4.6.20)–(4.6.21) donnent, en les $z_k^i \in \mathcal{Z}_k$

$$p(z_k^i | \mathcal{Z}_{1:k-1}, \mathbf{I}_k \neq i, m_j) = \frac{1}{D_k} \text{ avec } D_k = 2D_m \quad (4.6.22)$$

$$p(z_k^i | \mathcal{Z}_{1:k-1}, \mathbf{I}_k = i, m_j) = \frac{1}{P_{V_k}^j} \mathcal{N}(z_k^i; \hat{z}_{k|k-1}^j, S_{k|k-1}^j), \quad (4.6.23)$$

de sorte que la densité conjointe $\ell_k^{j,i}$ de \mathcal{Z}_k conditionnellement à $\{\mathbf{I}_k = i_k, \mathbf{M} = m_j, \mathbf{n}_k = n_k\}$ et aux jeux d'observations passés s'écrit, sous l'hypothèse d'indépendance des observations évoquée précédemment

$$\begin{aligned} \ell_k^{j,i} &\triangleq p(\mathcal{Z}_k | \mathcal{Z}_{1:k-1}, i_k, m_j, n_k) = \prod_{i=1}^{n_k} p(z_k^i | \mathcal{Z}_{1:k-1}, i_k, m_j) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{P_{V_k}^j} \mathcal{N}(z_k^i; \hat{z}_{k|k-1}^j, S_{k|k-1}^j) D_k^{-n_k+1} & \text{si } i \neq 0 \\ D_k^{-n_k} & \text{si } i = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.6.24)$$

On détaille maintenant les étapes du calcul de $p(x_k | \mathcal{Z}_{1:k})$ à partir de (4.6.13) et du jeu d'observations courant, en exploitant les vraisemblances calculées précédemment. En appliquant le théorème des probabilités totales par rapport aux hypothèses m_j et aux réalisations possibles de \mathbf{I}_k , on peut exprimer la densité de filtrage à l'itération k comme suit

$$p(x_k | \mathcal{Z}_{1:k}) = \sum_{j=1}^J w_k^j \sum_{i=0}^{n_k} \gamma_k^{j,i} \mathcal{N}(x_k; \hat{x}_{k|k}^{j,i}, P_{k|k}^{j,i}), \quad (4.6.25)$$

avec $w_k^j \triangleq \mathbb{P}\{M = m_j | \mathcal{Z}_{1:k}\}$ et $\gamma_k^{j,i} \triangleq \mathbb{P}\{\mathbf{I}_k = i | \mathcal{Z}_{1:k}, M = m_j\}$. Pour $i = 1, \dots, n_k$ les moments $\hat{x}_{k|k}^{j,i}, P_{k|k}^{j,i}$ de $(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_{1:k}, M = m_j, \mathbf{I}_k = i)$ sont calculés à partir des moments $\hat{x}_{k-1|k-1}^j, P_{k-1|k-1}^j$ via une itération du FKU assimilant l'observation z_k^i . Pour $i = 0$, $\hat{x}_{k|k}^{j,0}, P_{k|k}^{j,0}$ sont calculés par simple étape de prédiction du FKU. Les $\gamma_k^{j,i}$ sont obtenus par application de la règle de Bayes

$$\gamma_k^{j,i} = \frac{\ell_k^{j,i} \beta_{i,j}^{n_k}}{\sum_{p=0}^{n_k} \ell_k^{j,p} \beta_{p,j}^{n_k}}, \quad (4.6.26)$$

où les $\ell_k^{j,i}$ sont définis à l'équation (4.6.24) et où $\beta_{i,j}^{n_k} \triangleq \mathbb{P}\{\mathbf{I}_k = i | \mathcal{Z}_{1:k-1}, M = m_j, n_k\}$. On reviendra plus tard sur le calcul de ces dernières quantités. Les w_k^j sont eux aussi donnés par application de la règle de Bayes

$$w_k^j = \frac{\ell_k^j w_{k-1}^j}{\sum_{p=1}^J \ell_k^p w_{k-1}^p}, \quad (4.6.27)$$

où $\ell_k^j \triangleq p(\mathcal{Z}_k | \mathcal{Z}_{1:k-1}, M = m_j, n_k)$, la vraisemblance de l'hypothèse m_j par rapport au jeu d'observations courant, est donnée par

$$\ell_k^j = \sum_{i=0}^{n_k} \ell_k^{j,i} \beta_{i,j}^{n_k}. \quad (4.6.28)$$

Pour éviter la croissance exponentielle du nombre d'hypothèses au cours du temps, une stratégie simple consiste, à chaque itération, à fusionner les hypothèses $\{j, 0\}, \dots, \{j, i\}, \dots, \{j, n_k\}$ selon

$$p(x_k | \mathcal{Z}_{1:k}) = \sum_{j=1}^J w_k^j \sum_{i=1}^{n_k} \gamma_k^{j,i} \mathcal{N}(x_k; \hat{x}_{k|k}^{j,i}, P_{k|k}^{j,i}) \approx \sum_{j=1}^J w_k^j \mathcal{N}(x_k; \hat{x}_{k|k}^j, P_{k|k}^j) \quad (4.6.29)$$

avec $\{\hat{x}_{k|k}^j, P_{k|k}^j\}$ les moments "mode-matched" du mélange $\sum_{i=0}^{n_k} \gamma_k^{j,i} \mathcal{N}(x_k; \hat{x}_{k|k}^{j,i}, P_{k|k}^{j,i})$, calculés *via*

$$\hat{x}_{k|k}^j = \sum_{i=0}^{n_k} \gamma_k^{j,i} \hat{x}_{k|k}^{j,i}, \quad (4.6.30)$$

$$P_{k|k}^j = \sum_{i=0}^{n_k} \gamma_k^{j,i} \left(P_{k|k}^{j,i} + (\hat{x}_{k|k}^{j,i} - \hat{x}_{k|k}^j) (\hat{x}_{k|k}^{j,i} - \hat{x}_{k|k}^j)' \right), \quad (4.6.31)$$

Il reste à calculer les $\beta_{i,j}^{n_k}$ en fonction des données du problème. Par définition on a

$$\beta_{i,j}^{n_k} = \mathbb{P}\{\mathbf{I}_k = i | \mathcal{Z}_{1:k-1}, m_j, n_k\}. \quad (4.6.32)$$

Pour aller plus loin dans le développement, on définit la variable aléatoire discrète ϕ_k décrivant le nombre de fausses observations validées à l'itération k . Conditionnellement au fait que le nombre d'observations validées est n_k , ϕ_k ne peut prendre que deux valeurs distinctes : n_k (auquel cas toutes les observations validées sont fausses) ou bien $n_k - 1$ (auquel cas une observation correcte est présente parmi les observations validées). En utilisant le théorème des probabilités totales par rapport aux valeurs possibles de ϕ_k , on obtient

$$\begin{aligned} \beta_{i,j}^{n_k} &= \mathbb{P}\{\mathbf{I}_k = i | \phi_k = n_k - 1, \mathcal{Z}_{1:k-1}, m_j, n_k\} \mathbb{P}\{\phi_k = n_k - 1 | \mathcal{Z}_{1:k-1}, m_j, n_k\} \\ &\quad + \mathbb{P}\{\mathbf{I}_k = i | \phi_k = n_k, \mathcal{Z}_{1:k-1}, m_j, n_k\} \mathbb{P}\{\phi_k = n_k | \mathcal{Z}_{1:k-1}, m_j, n_k\} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n_k} \mathbb{P}\{\phi_k = n_k - 1 | \mathcal{Z}_{1:k-1}, m_j, n_k\} & \text{si } i \in \{1, \dots, n\} \\ \mathbb{P}\{\phi_k = n_k | \mathcal{Z}_{1:k-1}, m_j, n_k\} & \text{si } i = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.6.33)$$

Ci dessus, on a utilisé le fait que conditionnellement à $\{\mathbf{n}_k = n_k, \phi_k = n_k - 1\}$, $\{\mathbf{I}_k = 0\}$ est un événement impossible et $\{\mathbf{I}_k = i\}$ est équiprobable $\forall i \in \{1, \dots, n_k\}$. En utilisant maintenant la formule de Bayes sur $\mathbb{P}\{\phi_k = n_k - 1 | \mathcal{Z}_{1:k-1}, m_j, n_k\}$ et $\mathbb{P}\{\phi_k = n_k | \mathcal{Z}_{1:k-1}, m_j, n_k\}$ il vient

$$\mathbb{P}\{\phi_k = n_k - 1 | \mathcal{Z}_{1:k-1}, m_j, n_k\} = \frac{\mathbb{P}\{\mathbf{n}_k = n_k | \phi_k = n_k - 1, \mathcal{Z}_{1:k-1}, m_j\} \mathbb{P}\{\phi_k = n_k - 1\}}{\mathbb{P}\{\mathbf{n}_k = n_k | \mathcal{Z}_{1:k-1}, m_j\}} \quad (4.6.34)$$

$$\mathbb{P}\{\phi_k = n_k | \mathcal{Z}_{1:k-1}, m_j, \mathbf{n}_k = n_k\} = \frac{\mathbb{P}\{\mathbf{n}_k = n_k | \phi_k = n_k, \mathcal{Z}_{1:k-1}, m_j\} \mathbb{P}\{\phi_k = n_k\}}{\mathbb{P}\{\mathbf{n}_k = n_k | \mathcal{Z}_{1:k-1}, m_j\}}. \quad (4.6.35)$$

Mais $\mathbb{P}\{\mathbf{n}_k = n_k | \phi_k = n_k - 1, \mathcal{Z}_{1:k-1}, m_j\}$ est en fin de compte la probabilité d'avoir une observation correcte parmi les observations validées, conditionnellement à $\{\mathbf{M} = m_j\}$. Cette probabilité vaut donc $P_D P_{V_k}^j$ (détection et validation de l'observation correcte sous hypothèse m_j). De la même manière $\mathbb{P}\{\mathbf{n}_k = n_k | \phi_k = n_k, \mathcal{Z}_{1:k-1}, m_j\}$ est la probabilité de ne pas avoir d'observation correcte parmi les observation validées ($\{\text{non-détection}\}$ ou $\{\text{détection et non-validation}\}$) et vaut $1 - P_D P_{V_k}^j$. La constante de normalisation $\mathbb{P}\{\mathbf{n}_k = n_k | \mathcal{Z}_{1:k-1}, m_j\}$ s'exprime donc, en vertu du théorème des probabilités totales, par

$$\mathbb{P}\{\mathbf{n}_k = n_k | \mathcal{Z}_{1:k-1}, m_j\} = P_D P_{V_k}^j \mathbb{P}\{\phi_k = n_k - 1\} + (1 - P_D P_{V_k}^j) \mathbb{P}\{\phi_k = n_k\}. \quad (4.6.36)$$

Enfin, pour être complet, il reste à poser un modèle pour la variable aléatoire ϕ_k , *i.e.* le nombre de fausses observations validées. On peut par exemple utiliser une loi de Poisson

$$\mathbb{P}\{\phi_k = \ell\} = e^{-\lambda D_k} \frac{(\lambda D_k)^\ell}{\ell!}, \quad (4.6.37)$$

avec λD_k le nombre moyen de fausses observations dans une région \mathcal{D}_k de «volume» D_k (*i.e.* λ désigne le nombre de fausses observations par unité de volume de l'espace d'observation).

Avec le FKU-MH-PDA, on a moins de chance de «manquer» un pic pertinent de la corrélation croisée généralisée. Mais *a contrario* on introduit un plus grand nombre de fausses observations, ce qui rajoute de l'incertitude par rapport au FKU-MH-GFM. Donc il n'est pas certain que l'approche à plusieurs mesures apporte toujours plus d'information. En plus, le FKU-MH-PDA coûte plus cher du fait qu'on fait n_k étapes de mise à jour du FKU (autant que le nombre d'observations, puisqu'on envisage le fait que chacune de ces observations soit la «bonne») au lieu d'une seule. On doit aussi en plus poser un modèle pour la loi du nombre de fausses observations dans la région de validation. Et surtout, quand il y a des réverbérations, les pics de la corrélation croisée généralisée «dues» aux réverbérations ne sont certainement pas indépendantes de l'état. Enfin, il faut aussi régler la valeur du seuil de la corrélation croisée généralisée.

Autre constat : à chaque itération on a plusieurs pics de corrélation croisée généralisée au dessus d'un seuil prédéfini. Mais on traite uniquement les arguments de ces pics (*i.e.* les ITD candidats). On pourrait aussi inclure une information d'amplitude dans la stratégie (par exemple en ne considérant pas seulement les arguments des pics mais aussi leur hauteur). Mais cela nécessite de poser un modèle a priori sur comment se distribue la hauteur d'un pic si ce pic est «bon» et si ce pic est «mauvais». Ayant posé les modèles, on peut rajouter un facteur correctif de manière *ad hoc* dans le calcul des probabilités d'association (les $\gamma_k^{i,j}$) qui tient compte de la dynamique du système *et* de l'information d'amplitude (privilégier les observations dont l'information d'amplitude est grande). Il s'agit du *Probabilistic Data Association Filter with Amplitude Information* (PDAFAI) présenté dans [Bar-Shalom et Li, 1995]. Celui-ci demande par contre de poser encore d'autres modèles *a priori*.

4.7 DÉTECTION ET LOCALISATION CONJOINTES

Pour l'instant, on a défini une stratégie de filtrage reposant sur un modèle du type

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, u_k) + \mathbf{w}_k, \quad (4.7.1)$$

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \text{ avec une probabilité } P_1 \quad (4.7.2)$$

$$\mathbf{z}_k \sim \mathcal{U}(\cdot; \mathcal{D}) \text{ avec une probabilité } P_0 = 1 - P_1,$$

où f , h , et les vecteurs d'état, d'observation et de commande ont été définis au §1.2.2. On dénote \mathcal{M}_1 ce modèle. On considère maintenant en plus un second modèle \mathcal{M}_2 où l'équation de dynamique reste inchangée mais où l'émetteur est cette fois-ci inactif, *i.e.* les signaux audio perçus en les microphones sont des bruits indépendants. Dans ce cas de figure les observations issues de l'algorithme d'extraction de temps de retard sont systématiquement indépendantes de l'état et sont uniformément distribuées sur l'intervalle \mathcal{D} des valeurs physiques possibles du temps de retard vrai. Le modèle \mathcal{M}_2 s'écrit

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, u_k) + W_k, \quad (4.7.3)$$

$$\mathbf{z}_k \sim \mathcal{U}(\cdot; \mathcal{D}). \quad (4.7.4)$$

On considère dans cette section que le système peut passer dynamiquement du modèle \mathcal{M}_1 au modèle \mathcal{M}_2 et inversement. Si les sauts entre les modèles sont autorisés à se produire à

Algorithme 9 : Sorties=FKU-MH-PDA(Entrées)

FKU-MH à Association de Données Probabiliste

Entrées : $\left\{ \hat{x}_{k-1|k-1}^j, P_{k-1|k-1}^j, w_{k-1}^j \right\}_{j=1, \dots, J}, u_{k-1}, \mathcal{Z}_k, f, h, Q, R$

Sorties : $\left\{ \hat{x}_{k|k}^j, P_{k|k}^j, w_k^j \right\}_{j=1, \dots, J}, L_k$

1 **pour** $j = 1, \dots, J$ **faire**

2 **pour** $i = 0, \dots, n_k$ **faire**

 Calcul des moments de $(\mathbf{x}_{k|k-1}|m_j, \mathbf{I}_k = i)$ et $(\mathbf{z}_{k|k-1}, |m_j, \mathbf{z}_k \text{ correcte})$ *via* une étape du FKU

3 $\left[\hat{x}_{k|k}^{j,i}, P_{k|k}^{j,i}, \hat{x}_{k|k}^{j,0}, P_{k|k}^{j,0}, \hat{z}_{k|k-1}^j, S_{k|k-1}^j \right] = \text{FKU} \left(\hat{x}_{k-1|k-1}^j, P_{k-1|k-1}^j, u_{k-1}, z_k^i, f, h, Q, R \right)$

 Calcul des probabilités de validation conditionnées sur $\{M = m_j\}$ à partir des moments $\hat{z}_{k|k-1}^j, S_{k|k-1}^j$ et de la région de validation \mathcal{D}_k en utilisant une table de la fonction de répartition d'une gaussienne centrée normée

4 $P_{V_k}^j = \int_{-D_m}^{+D_m} p(z_k; \hat{z}_{k|k-1}^j, S_{k|k-1}^j) dz_k$

 Calcul de $p(\mathcal{Z}_k | \mathcal{Z}_{1:k-1}, i, m_j, n_k)$

5 $\ell_k^{j,i} = \begin{cases} \frac{1}{P_{V_k}^j} \mathcal{N} \left(z_k^i; \hat{z}_{k|k-1}^j, S_{k|k-1}^j \right) D_k^{-n_k+1} & \text{si } i \neq 0 \\ D_k^{-n_k} & \text{si } i = 0 \end{cases}$

 Calcul de $\mathbb{P}\{\mathbf{I}_k = i | \mathcal{Z}_{1:k-1}, m_j, n_k = n_k\}$

6 $\beta_{i,j}^{n_k} = \begin{cases} \frac{1}{n_k} \frac{P_D P_{V_k}^j \mathbb{P}\{\phi_k = n_k - 1\}}{P_D P_{V_k}^j \mathbb{P}\{\phi_k = n_k - 1\} + (1 - P_D P_{V_k}^j) \mathbb{P}\{\phi_k = n_k\}} & \text{si } i \neq 0 \\ \frac{(1 - P_D P_{V_k}^j) \mathbb{P}\{\phi_k = n_k\}}{P_D P_{V_k}^j \mathbb{P}\{\phi_k = n_k - 1\} + (1 - P_D P_{V_k}^j) \mathbb{P}\{\phi_k = n_k\}} & \text{si } i = 0 \end{cases}$

7 $\gamma_k^{j,i} = \ell_k^{j,i} \beta_{i,j}^{n_k}$

8 **finpour**

9 $\ell_k^j = \sum_{i=0}^{n_k} \gamma_k^{j,i}$

10 **pour** $i = 0, \dots, n_k$ **faire**

11 | $\gamma_k^{j,i} = \frac{\gamma_k^{j,i}}{\ell_k^j}$

12 **finpour**

 Fusion des modes, calcul des moments *mode-matched*

13 $\hat{x}_{k|k}^j = \sum_{i=0}^{n_k} \gamma_k^{j,i} \hat{x}_{k|k}^{j,i}$

14 $P_{k|k}^j = \sum_{i=0}^{n_k} \gamma_k^{j,i} \left(P_{k|k}^{j,i} + \left(\hat{x}_{k|k}^{j,i} - \hat{x}_{k|k}^j \right) \left(\hat{x}_{k|k}^{j,i} - \hat{x}_{k|k}^j \right)' \right)$

15 $w_k^j = \ell_k^j w_{k-1}^j$

16 **finpour**

 Calcul de la constante de normalisation des poids *a posteriori*

17 $L_k = \sum_{j=1}^J w_k^j$

 Normalisation des poids de sorte que $\sum_{j=1}^J p(m_j | z_{1:k}) = 1$

18 **pour** $j = 1, \dots, J$ **faire**

19 | $w_k^j = w_k^j / L_k$

20 **finpour**

n'importe quel instant, alors le nombre de modes du mélange de gaussiennes caractérisant la distribution de l'état *a posteriori* croit de manière exponentielle au cours du temps, rendant le problème insoluble en pratique. Des solutions sous-optimales doivent alors être envisagées, comme les Modèles Multiples Interactifs (MMI), ou les méthodes Pseudo-Bayésiennes Généralisées (PBG) [Bar-Shalom et Li, 1995], et permettent d'approximer la distribution de l'état *a posteriori*, sur la base d'une connaissance *a priori* des probabilités de transition entre les modèles. Du fait que ces approches exploitent une connaissance *a priori* des probabilités de transition, elles reposent sur l'hypothèse fondamentale que *la nature est informative*. En pratique, cette connaissance *a priori* n'est pas connue et des hypothèses doivent être faites (*e.g.*, dans le pire cas, en supposant équiprobables les différentes transitions). D'un autre côté, une approche fondée sur des TRVG permet de s'affranchir de poser ces hypothèses *a priori* et permet de définir une stratégie de filtrage adaptative pour estimer le vecteur d'état conjointement à la détection de sauts sporadiques entre les modèles [Van Trees, 2001].

A Une approche basée sur le TRVG

A-1 Détection d'un saut $\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ Définissons la fenêtre temporelle

$$\mathcal{W} = \{k - N + 1, k - N + 2, \dots, k\}, \quad (4.7.5)$$

de durée finie N et se terminant à l'itération courante k . Supposons que la densité de filtrage $p(x_{k-N} | z_{1:k-N})$ de l'état à l'itération $k - N$ est correctement décrite par un mélange de gaussiennes dont les jeux de poids et moments associés $\{w_{k-N}^j\}_{j=1,\dots,J}$ et $\{\hat{x}_{k-N}^j, P_{k-N}^j\}_{j=1,\dots,J}$ sont connus. Le système est supposé suivre le modèle \mathcal{M}_1 aux itérations antérieures à $k_0 \triangleq k - N + 1$. Sur la base des observations $z_{k_0:k}$ et des commandes $u_{k_0-1:k-1}$, le but est de définir une règle de décision pour détecter l'une des deux hypothèses mutuellement exclusives et exhaustives suivantes

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(k_1) &: \text{un saut } \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2 \text{ s'est produit à l'itération } k_1 \in \mathcal{W}, \\ \mathcal{H}_0 &: \text{le système est resté en } \mathcal{M}_1. \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

On définit \mathcal{H}_0 comme l'*hypothèse nulle* ou *hypothèse de référence* de notre problème de décision et \mathcal{H}_1 comme l'*hypothèse alternative*. Notons que $\mathcal{H}_1(k_1)$ est une *hypothèse composite* du fait que son paramètre k_1 , l'instant auquel le saut peut s'être produit, prend ses valeurs dans l'ensemble \mathcal{W} . Le TRVG consiste à calculer les vraisemblances $\Lambda_{\mathcal{H}_1}(k_1) \triangleq p(z_{k_0:k} | \mathcal{H}_1(k_1))$ et $\Lambda_{\mathcal{H}_0} \triangleq p(z_{k_0:k} | \mathcal{H}_0)$ de $\mathcal{H}_1(k_1)$ et \mathcal{H}_0 respectivement par rapport à $z_{k_0:k}$ et à détecter soit $\mathcal{H}_1(k_1)$ soit \mathcal{H}_0 à partir de la règle de décision suivante

$$\frac{\Lambda_{\mathcal{H}_1}(\hat{k}_1)}{\Lambda_{\mathcal{H}_0}} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \eta, \quad (4.7.7)$$

où

$$\hat{k}_1 \triangleq \operatorname{argmax}_{k_1 \in \mathcal{W}} [\Lambda_{\mathcal{H}_1}(k_1)] \quad (4.7.8)$$

est l'EMV de k_1 , *i.e.* la valeur candidate de k_1 qui rend l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1(k_1)$ la plus vraisemblable, et où η est un paramètre de réglage de l'algorithme. Notons que si \mathcal{H}_1 était une hypothèse simple, le test (4.7.7) serait, en vertu du Lemme de Neyman-Pearson, le *test le plus puissant*, au sens où il maximise la probabilité de détection pour une probabilité de fausse alarme donnée. On montre que (4.7.7) est *uniformément le plus puissant*.

En utilisant la règle de chaînage arrière de Bayes [Gustafsson, 2000], La vraisemblance de \mathcal{H}_0 peut être factorisée de la manière suivante

$$\Lambda_{\mathcal{H}_0} = \prod_{m=k_0}^k \Lambda_m^{k_0}, \quad (4.7.9)$$

où $\Lambda_m^{k_0} \triangleq p(z_m | \mathcal{H}_0, z_{k_0:m-1})$ est calculée à partir d'un FKU-MH-GFM associé au modèle \mathcal{M}_1 initialisé à l'itération $k_0 - 1 = k - N$ avec les moments et poids décrivant la **ddp** de $X_{k_0-1} | \mathbf{z}_{1:k_0-1} = z_{1:k_0-1}$. De même, on a pour $\mathcal{H}_1(k_1)$

$$\Lambda_{\mathcal{H}_1}(k_1) = \begin{cases} (2D_m)^{-N} & \text{si } k_1 = k_0, \\ \prod_{m=k_0}^{k_1-1} \Lambda_m^{k_0} \times (2D_m)^{-(k-k_1+1)} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.7.10)$$

Une fois la décision faite *via* (4.7.7), si \mathcal{H}_0 est détectée, alors les N jeux de moments et poids calculés par le FKU-MH-GFM aux itérations $k_0, k_0 + 1, \dots, k$ sont conservés tels qu'ils sont. Sinon, si $\mathcal{H}_1(\hat{k}_1)$ est détectée, alors seulement les $\hat{k}_1 - k_0$ premiers jeux, aux instants $k_0, k_0 + 1, \dots, \hat{k}_1 - 1$ sont conservés, et les $N - \hat{k}_1 + 1$ derniers sont recalculés avec un filtre associé à \mathcal{M}_2 , *i.e.* ne réalisant que des étapes de prédiction de l'état (dénomé UKF-MH-Pred), initialisé à l'itération $\hat{k}_1 - 1$ avec les moments et poids *a posteriori* calculés *via* le FKU-MH-GFM à cet instant précis, de manière à recalculer leurs valeurs aux $k - \hat{k}_1 + 1$ instants ultérieurs à $\hat{k}_1 - 1$.

A-2 Détection d'un saut $\mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_1$ Dans ce paragraphe, le système est supposé suivre le modèle \mathcal{M}_2 aux instants antérieurs à p . Les deux hypothèses \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 que l'on considère maintenant sont définies par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(k_1) : & \text{ un saut } \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_1 \text{ s'est produit à l'itération } k_1 \in \mathcal{W}, \\ \mathcal{H}_0 : & \text{ le système est resté en } \mathcal{M}_2. \end{aligned} \quad (4.7.11)$$

Les vraisemblances $\Lambda_{\mathcal{H}_0} \triangleq p(z_{k_0:k} | \mathcal{H}_0)$ et $\Lambda_{\mathcal{H}_1}(k_1) \triangleq p(z_{k_0:k} | \mathcal{H}_1(k_1))$ de \mathcal{H}_0 et $\mathcal{H}_1(k_1)$ s'écrivent maintenant

$$\Lambda_{\mathcal{H}_0} = (2D_m)^{-N}, \quad (4.7.12)$$

$$\Lambda_{\mathcal{H}_1}(k_1) = (2D_m)^{-(k_1-k_0)} \times \prod_{m=k_1}^k \Lambda_m^{k_1} \quad (4.7.13)$$

où $\Lambda_m^{k_1}$ est donné par un FKU-MH-GFM associé au modèle \mathcal{M}_1 initialisé à l'instant $k_1 - 1$ avec les moments et poids *a posteriori* donnés à cet instant précis par un FKU-MH-Pred, lui-même initialisé à l'instant $k_0 - 1$ avec les moments et poids (donnés) décrivant la **ddp a posteriori** de $\mathbf{x}_{k_0-1} | \mathbf{z}_{1:k_0-1}$. Du fait que calculer $\Lambda_m^{k_1}$ pour chaque valeur candidate de k_1 nécessite de lancer N FKU-MH-GFM distincts, la complexité de l'algorithme pour la détection d'un saut $\mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_1$, dénoté FBTRVG2, est plus importante que celle du FBTRVG1.

A-3 Considérations importantes Le premier problème concerne la taille N de la fenêtre de données. Pour que le **TRVG** soit fiable, un N élevé est préconisé. D'un autre côté une taille élevée de la fenêtre augmente la période à laquelle les résultats de la localisation et de la détection sont délivrés. En outre, la complexité algorithmique du FBTRVG2 croît de manière exponentielle par rapport à N . Enfin, la stratégie de filtrage proposée repose sur l'hypothèse de sauts *sporadiques* entre les modèles \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 (pas plus d'un saut par fenêtre de données), hypothèse qui a d'autant plus de chances d'être violée que N est élevé. Le choix de N résulte donc d'un compromis entre fiabilité du test, temps de traitement, et vérification des hypothèses sous-jacentes au test.

La seconde considération concerne les résultats du FBTRVG1 lorsque les p dernières observations sont fausses avec $p \ll N$. Il a été constaté que dans ce cas de figure l'hypothèse alternative était quasi-systématiquement détectée, indépendamment du fait qu'un saut $\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ se soit

Algorithme 10 : Sorties=FBTRVG1(Entrées)Filtre basé sur le **TRVG 1**

Entrées : $\left\{ \bar{x}_{k_0-1|k_0-1}^j, \bar{P}_{k_0-1|k_0-1}^j, \bar{w}_{k_0-1}^j \right\}_{j=1,\dots,J}, \{z_m\}_{m=k_0,\dots,k}, \{u_{m-1}\}_{m=k_0,\dots,k}$

Sorties : $\left\{ \hat{x}_{m|m}^j, P_{m|m}^j, w_m^j \right\}_{j=1,\dots,J, m=k_0,\dots,k}$

- 1 **pour** $m = k_0, \dots, k$ **faire**
 - En utilisant un FKU-MH-GFM associé au modèle \mathcal{M}_1 , calculer récursivement les moments et poids du mélange de gaussiennes caractérisant la distribution de $(\mathbf{x}_m | \mathbf{z}_{1:m} = z_{1:m})$ sous hypothèse que \mathcal{H}_0 est vraie
- 2 $\left[\left\{ \bar{x}_{m|m}^j, \bar{P}_{m|m}^j, \bar{w}_m^j \right\}_{j=1,\dots,J}, \Lambda_m^{k_0} \right] =$
FKU-MH-GFM $\left(\left\{ \bar{x}_{m-1|m-1}^j, \bar{P}_{m-1|m-1}^j, \bar{w}_{m-1}^j \right\}_{j=1,\dots,J}, u_{m-1}, z_m, f, h, Q, R \right)$
- 3 **finpour**
- Calculer la vraisemblance de \mathcal{H}_0 par rapport à $z_{k_0:k}$:
- 4 $\Lambda_{\mathcal{H}_0} = \prod_{m=k_0}^k \Lambda_m^{k_0}$
- 5 **pour** $k_1 = k_0, \dots, k$ **faire**
 - Calculer la vraisemblance de $\mathcal{H}_1(k_1)$ par rapport à $z_{k_0:k}$:
- 6 $\Lambda_{\mathcal{H}_1}(k_1) = \begin{cases} (2D_m)^{-N} & \text{si } k_1 = k_0, \\ \prod_{m=k_0}^{k_1-1} \Lambda_m^{k_0} \times (2D_m)^{-(k-k_1+1)} & \text{sinon,} \end{cases}$
- 7 **finpour**
- Procéder au **TRVG**:
- 8 $\frac{\Lambda_{\mathcal{H}_1}(\hat{k}_1)}{\Lambda_{\mathcal{H}_0}} \underset{\mathcal{H}_0}{\underset{\mathcal{H}_1}{\geq}} \eta$, avec $\hat{k}_1 = \operatorname{argmax}_{k_1 \in \mathcal{W}} [\Lambda_{\mathcal{H}_1}(k_1)]$
- 9 **si** \mathcal{H}_0 *détectée* **alors**
 - Affecter les N les jeux de moments et poids donnés par le FKU-MH-GFM à la sortie:
- 10 $\left\{ \hat{x}_{m|m}^j, P_{m|m}^j, w_m^j \right\}_{j=1,\dots,J, m=k_0,\dots,k} = \left\{ \bar{x}_{m|m}^j, \bar{P}_{m|m}^j, \bar{w}_m^j \right\}_{j=1,\dots,J, m=k_0,\dots,k}$
- 11 **sinon si** \mathcal{H}_1 *détectée* **alors**
 - Conserver les $\hat{k}_1 - 1$ premiers jeux de moments et poids donnés par le FKU-MH-GFM:
- 12 $\left\{ \hat{x}_{m|m}^j, P_{m|m}^j, w_m^j \right\}_{j=1,\dots,J, m=k_0-1,\dots,\hat{k}_1-1} = \left\{ \bar{x}_{m|m}^j, \bar{P}_{m|m}^j, \bar{w}_m^j \right\}_{j=1,\dots,J, m=k_0-1,\dots,\hat{k}_1-1}$
- 13 **pour** $m = \hat{k}_1, \dots, k$ **faire**
 - En utilisant un FKU-MH-Pred associé au modèle \mathcal{M}_2 , recalculer les moments et poids de la distribution de l'état sous hypothèse que $\mathcal{H}_1(\hat{k}_1)$ est vraie
- 14 $\left[\left\{ \hat{x}_{m|m}^j, P_{m|m}^j, w_m^j \right\}_{j=1,\dots,J} \right] =$
FKU-MH-Pred $\left(\left\{ \hat{x}_{m-1|m-1}^j, P_{m-1|m-1}^j, w_{m-1}^j \right\}_{j=1,\dots,J}, u_{m-1}, f, Q \right)$
- 15 **finpour**
- 16 **fin**

Algorithme 11 : Sorties=FBTRVG2(Entrées)Filtre basé sur le **TRVG 2**

Entrées : $\left\{ \hat{x}_{k_0-1|k_0-1}^{j,k_0}, P_{k_0-1|k_0-1}^{j,k_0}, w_{k_0-1}^{j,k_0} \right\}_{j=1,\dots,J}, \{z_m\}_{m=k_0,\dots,k}, \{u_{m-1}\}_{m=k_0,\dots,k}$

Sorties : $\left\{ \hat{x}_{m|m}^j, P_{m|m}^j, w_m^j \right\}_{j=1,\dots,J, m=k_0,\dots,k}$

1 pour $m = k_0, \dots, k$ **faire**

En utilisant un FKU-MH-Pred associé au modèle \mathcal{M}_2 , calculer récursivement les moments et poids du mélange de gaussiennes caractérisant la distribution de $(x_m | z_{1:m} = z_{1:m})$ sous hypothèse que \mathcal{H}_0 est vraie

2 $\left[\left\{ \hat{x}_{m|m}^{j,k_0}, P_{m|m}^{j,k_0}, w_m^{j,k_0} \right\}_{j=1,\dots,J} \right] = \text{FKU-MH-Pred} \left(\left\{ \hat{x}_{m-1|m-1}^{j,k_0}, P_{m-1|m-1}^{j,k_0}, w_{m-1}^{j,k_0} \right\}_{j=1,\dots,J}, u_{m-1}, f, Q \right)$

3 finpour

4 pour $k_1 = k_0, \dots, k$ **faire**

pour $m < k_1$ les moments et poids de la distribution de $(x_m | z_{1:m} = z_{1:m})$ sous hypothèse \mathcal{H}_0 sont identiques aux moments et poids de cette distribution sous hypothèse $\mathcal{H}_1(k_1)$

5 $\left\{ \hat{x}_{m|m}^{j,k_1}, P_{m|m}^{j,k_1}, w_m^{j,k_1} \right\}_{m=k_0-1:k_1-1} = \left\{ \hat{x}_{m|m}^{j,k_0}, P_{m|m}^{j,k_0}, w_m^{j,k_0} \right\}_{m=k_0-1:k_1-1}$

6 pour $m = k_1, \dots, k$ **faire**

En utilisant un FKU-MH-GFM associé au modèle \mathcal{M}_1 , calculer récursivement les moments et poids caractérisant la distribution de $(x_m | z_{1:m} = z_{1:m})$ sous hypothèse que $\mathcal{H}_1(k_1)$ est vraie

7 $\left[\left\{ \hat{x}_{m|m}^{j,k_1}, P_{m|m}^{j,k_1}, w_m^{j,k_1} \right\}_{j=1,\dots,J}, \Lambda_m^{k_1} \right] = \text{FKU-MH-GFM} \left(\left\{ \hat{x}_{m-1|m-1}^{j,k_1}, P_{m-1|m-1}^{j,k_1}, w_{m-1}^{j,k_1} \right\}_{j=1,\dots,J}, u_{m-1}, z_m, f, h, Q, R \right)$

8 finpour

9 finpour

Calculer la vraisemblance de \mathcal{H}_0 par rapport à $z_{k_0:k}$:

10 $\Lambda_{\mathcal{H}_0} = (2D_m)^{-N}$

11 pour $k_1 = k_0, \dots, k$ **faire**

Calculer la vraisemblance de $\mathcal{H}_1(k_1)$ par rapport à $z_{k_0:k}$:

12 $\Lambda_{\mathcal{H}_1}(k_1) = (2D_m)^{-(k_1-k_0)} \times \prod_{m=k_1}^k \Lambda_m^{k_1}$

13 finpour

Procéder au **TRVG**:

14 $\frac{\Lambda_{\mathcal{H}_1}(\hat{k}_1)}{\Lambda_{\mathcal{H}_0}} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \eta$, avec $\hat{k}_1 = \text{argmax}_{k_1 \in \mathcal{W}} [\Lambda_{\mathcal{H}_1}(k_1)]$

Affecter les valeurs de sortie en fonction de l'hypothèse détectée

15 si \mathcal{H}_0 **détectée alors**

16 $\left\{ \hat{x}_{m|m}^j, P_{m|m}^j, w_m^j \right\}_{j=1,\dots,J, m=k_0,\dots,k} = \left\{ \hat{x}_{m|m}^{j,k_0}, P_{m|m}^{j,k_0}, w_m^{j,k_0} \right\}_{j=1,\dots,J, m=k_0,\dots,k}$

17 sinon si \mathcal{H}_1 **détectée alors**

18 $\left\{ \hat{x}_{m|m}^j, P_{m|m}^j, w_m^j \right\}_{j=1,\dots,J, m=k_0,\dots,k} = \left\{ \hat{x}_{m|m}^{j,\hat{k}_1}, P_{m|m}^{j,\hat{k}_1}, w_m^{j,\hat{k}_1} \right\}_{j=1,\dots,J, m=k_0,\dots,k}$

19 fin

réellement produit ou non. Pour palier ce problème, on peut par exemple ne considérer, comme valeurs candidates du paramètre k_1 de l'hypothèse alternative, que les valeurs $k_0, k_0 + 1, \dots, k - p + 1$, *i.e.* ne pas chercher à détecter de saut en fin de fenêtre de données (*i.e.* attendre l'obtention de nouvelles données jugées fausses aux itérations suivantes avant d'effectivement confirmer un passage de \mathcal{M}_1 vers \mathcal{M}_2).

B Une approche basée sur les MMI

Soit θ_k une chaîne de Markov à n_m états finis qui indique, par sa valeur, quel modèle suit le système à l'itération k , *i.e.* pour $i = 1, \dots, n_m$, l'événement $\{\theta_k = i\}$ indique que le système suit le modèle \mathcal{M}_i à l'itération k . Dans notre problème, $n_m = 2$, mais les développements qui vont suivre ne présument pas du nombre de modèles. Les probabilités de transition caractérisant cette chaîne de Markov sont définies, pour $i = 1, \dots, n_m$, et $j = 1, \dots, n_m$, par

$$p_{ij} = \mathbb{P}\{\theta_k = j | \theta_{k-1} = i\} = \mathbb{P}\{\theta_k = j | \theta_{k-1} = i, \mathbf{s}_{k-2} = \mathbf{s}_{k-2}\}, \quad (4.7.14)$$

où $\mathbf{s}_k = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k)$ désigne la séquence des états du système de l'instant initial à l'instant k . Le processus (\mathbf{x}_k, θ_k) définit ainsi un processus Markovien hybride, et la solution optimale au calcul de la densité *a posteriori* de \mathbf{x}_k est donnée, en vertu du théorème des probabilités totales, par

$$p(x_k | z_{1:k}) = \sum_{i_1=1}^{n_m} \sum_{i_2=1}^{n_m} \dots \sum_{i_k=1}^{n_m} \mathbb{P}\{\mathbf{s}_k = i_0, i_1, \dots, i_k | z_{1:k}\} p(x_k | \mathbf{s}_k = i_0, i_1, \dots, i_k, z_{1:k}), \quad (4.7.15)$$

Comme le fait apparaître clairement l'équation (4.7.15), la solution optimale du problème entraîne nécessairement une explosion combinatoire du nombre de modes *a posteriori*, et des solutions approchées sont indispensables à toute application pratique. Parmi ces solutions, l'approche par MMI [Blom et Bar-Shalom, 1988] est certainement la plus *cost-effective* et la plus employée. On va commencer par détailler une itération de la solution récursive exacte, puis définir les approximations du filtre à MMI appliqué à notre problème (caractérisé entre autres, on le rappelle, par une distribution initiale multimodale).

La première étape de la solution récursive optimale consiste à calculer la densité *a posteriori* de \mathbf{x}_{k-1} conditionnellement à $\{\theta_k = i\}$, pour $i = 1, \dots, n_m$. Il s'agit de l'étape de *mélange* du filtre. Cette *ddp* est donnée par application du théorème des probabilités totales et s'exprime par

$$p(x_{k-1} | \theta_k = i, z_{1:k-1}) = \sum_{j=1}^{n_m} \mu_{k-1|k-1}^{j|i} p(x_{k-1} | \theta_{k-1} = j, z_{1:k-1}), \quad (4.7.16)$$

où la probabilité $\mu_{k-1|k-1}^{j|i} \triangleq \mathbb{P}\{\theta_{k-1} = j | \theta_k = i, z_{1:k-1}\}$ est communément appelée *probabilité de mélange*. Dans (4.7.16), on a exploité l'hypothèse selon laquelle $(\mathbf{x}_{k-1} | \theta_{k-1} = j, z_{1:k-1})$ est indépendant de l'événement $\{\theta_k = i\}$. Les probabilités de mélange sont quant-à-elles données par l'application de la règle de Bayes, selon

$$\mu_{k-1|k-1}^{j|i} = \frac{p_{ji} \mathbb{P}\{\theta_{k-1} = j | z_{1:k-1}\}}{\mathbb{P}\{\theta_k = i | z_{1:k-1}\}}. \quad (4.7.17)$$

La constante de normalisation $\mathbb{P}\{\theta_k = i | z_{1:k-1}\}$ est calculée *via*

$$\mathbb{P}\{\theta_k = i | z_{1:k-1}\} = \sum_{\ell=1}^{n_m} p_{\ell i} \mathbb{P}\{\theta_{k-1} = \ell | z_{1:k-1}\}. \quad (4.7.18)$$

Dans les équations (4.7.17)–(4.7.18), on a exploité implicitement le fait que

$$\mathbb{P}\{\theta_k = i | \theta_{k-1} = j, z_{1:k-1}\} = \mathbb{P}\{\theta_k = i | \theta_{k-1} = j\} = p_{ji}. \quad (4.7.19)$$

Une fois l'étape de mélange réalisée, la densité de prédiction de l'état à l'instant k conditionnellement à $\{\theta_k = i\}$ est calculée à partir de la densité de filtrage à l'instant $k-1$ conditionnellement à $\{\theta_k = i\}$ (cette densité ayant été calculée à l'étape de mélange) pour $i = 1, \dots, n_m$ via

$$p(x_k | \theta_k = i, z_{1:k-1}) = \int p(x_k | \theta_k = i, x_{k-1}) p(x_{k-1} | \theta_k = i, z_{1:k-1}) dx_{k-1}. \quad (4.7.20)$$

Ci-dessus, $p(x_k | \theta_k = i, x_{k-1})$ désigne la densité de transition de l'état associée au modèle \mathcal{M}_i . Notons que dans le problème considéré, $\mathbf{x}_k | x_{k-1}$ ne dépend pas du modèle, la différence entre les modèles se trouvant uniquement au niveau des fonctions de vraisemblance $p(z_k | \theta_k = i, x_k)$. L'application de la règle de Bayes nous permet finalement de calculer la densité de $\mathbf{x}_k | \theta_k = i$ et la probabilité de $\{\theta_k = i\}$ *a posteriori*, conformément aux équations

$$p(x_k | \theta_k = i, z_{1:k}) = \frac{p(z_k | \theta_k = i, x_k) p(x_k | \theta_k = i, z_{1:k-1})}{p(z_k | \theta_k = i, z_{1:k-1})}, \quad (4.7.21)$$

$$\mathbb{P}\{\theta_k = i | z_{1:k}\} = \frac{p(z_k | \theta_k = i, z_{1:k-1}) \mathbb{P}\{\theta_k = i | z_{1:k-1}\}}{p(z_k | z_{1:k-1})}. \quad (4.7.22)$$

Les dénominateurs des équations (4.7.21)–(4.7.22) sont quant à eux donnés par l'application du théorème des probabilités totales, selon

$$p(z_k | \theta_k = i, z_{1:k-1}) = \int p(z_k | \theta_k = i, x_k) p(x_k | \theta_k = i, z_{1:k-1}) dx_k, \quad (4.7.23)$$

$$p(z_k | z_{1:k-1}) = \sum_{\ell=1}^{n_m} \mathbb{P}\{\theta_k = \ell | z_{1:k-1}\} p(z_k | \theta_k = \ell, z_{1:k-1}). \quad (4.7.24)$$

Finalement, la densité de l'état *a posteriori* est donnée par

$$p(x_k | z_{1:k}) = \sum_{i=1}^{n_m} \mathbb{P}\{\theta_k = i | z_{1:k}\} p(x_k | \theta_k = i, z_{1:k}). \quad (4.7.25)$$

Dans la méthode par **MMI** d'origine, la réduction du nombre de modes se situe au niveau de l'étape de mélange. En supposant que pour $j = 1, \dots, n_m$, la **ddp** $p(x_{k-1} | \theta_{k-1} = j, z_{1:k-1})$ est correctement approximée par une gaussienne

$$p(x_{k-1} | \theta_{k-1} = j, z_{1:k-1}) = \mathcal{N}\left(x_{k-1}; \hat{x}_{k-1|k-1}^j, P_{k-1|k-1}^j\right), \quad (4.7.26)$$

on approxime le mélange de gaussiennes

$$p(x_{k-1} | \theta_k = i, z_{1:k-1}) = \sum_{j=1}^{n_m} \mu_{k-1|k-1}^{j|i} \mathcal{N}\left(x_{k-1}; \hat{x}_{k-1|k-1}^j, P_{k-1|k-1}^j\right) \quad (4.7.27)$$

par une unique gaussienne *mode-matched* de moments

$$\tilde{x}_{k-1|k-1}^i = \sum_{j=1}^{n_m} \mu_{k-1|k-1}^{j|i} \hat{x}_{k-1|k-1}^j, \quad (4.7.28)$$

$$\bar{P}_{k-1|k-1}^i = \sum_{j=1}^{n_m} \mu_{k-1|k-1}^{j|i} \left[P_{k-1|k-1}^j + \left[\hat{x}_{k-1|k-1}^j - \tilde{x}_{k-1|k-1}^i \right] \left[\hat{x}_{k-1|k-1}^j - \tilde{x}_{k-1|k-1}^i \right]' \right]. \quad (4.7.29)$$

Dans notre contexte, la distribution de $(\mathbf{x}_{k-1} | \boldsymbol{\theta}_{k-1} = j, \mathbf{z}_{1:k-1} = z_{1:k-1})$ est caractérisée par un mélange de n_g densités supposées gaussiennes selon

$$\begin{aligned} p(x_{k-1} | \boldsymbol{\theta}_{k-1} = j, z_{1:k-1}) &= \sum_{m=1}^{n_g} w_{k-1}^{m,j} p(x_{k-1} | \boldsymbol{\theta}_{k-1} = j, M = m, z_{1:k-1}) \\ &= \sum_{m=1}^{n_g} w_{k-1}^{m,j} \mathcal{N}\left(x_{k-1}; \hat{x}_{k-1|k-1}^{m,j}, P_{k-1|k-1}^{m,j}\right), \end{aligned} \quad (4.7.30)$$

où l'événement $\{\mathbf{M} = m\}$ indique que l'état initial a été tiré selon le $m^{\text{ième}}$ mode gaussien de la distribution *a priori* le caractérisant, et où $w_{k-1}^{m,j} \triangleq \mathbb{P}\{\mathbf{M} = m | \boldsymbol{\theta}_{k-1} = j, z_{1:k-1}\}$ est la probabilité *a posteriori* à l'instant $k - 1$ de cet événement conditionnellement à $\{\boldsymbol{\theta}_{k-1} = j\}$. La ddp $p(x_{k-1} | \boldsymbol{\theta}_k = i, z_{1:k-1})$ s'exprime donc par la double somme

$$p(x_{k-1} | \boldsymbol{\theta}_k = i, z_{1:k-1}) = \sum_{j=1}^{n_m} \mu_{k-1|k-1}^{j|i} \sum_{m=1}^{n_g} w_{k-1}^{m,j} \mathcal{N}\left(x_{k-1}; \hat{x}_{k-1|k-1}^{m,j}, P_{k-1|k-1}^{m,j}\right) \quad (4.7.31)$$

$$= \sum_{m=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n_m} \mu_{k-1|k-1}^{m,j|i} \mathcal{N}\left(x_{k-1}; \hat{x}_{k-1|k-1}^{m,j}, P_{k-1|k-1}^{m,j}\right), \quad (4.7.32)$$

avec $\mu_{k-1|k-1}^{m,j|i} \triangleq w_{k-1}^{m,j} \mu_{k-1|k-1}^{j|i}$. On se propose d'approximer ce mélange de $n_g n_m$ gaussiennes en un mélange de n_g gaussiennes en fusionnant, pour $m = 1, \dots, n_g$, les modes indicés par les couples $(m, 1), \dots, (m, n_m)$ en un unique mode selon

$$p(x_{k-1} | \boldsymbol{\theta}_k = i, z_{1:k-1}) \approx \sum_{m=1}^{n_g} \bar{w}_{k-1}^{m,i} \mathcal{N}\left(x_{k-1}; \bar{x}_{k-1|k-1}^{m,i}, \bar{P}_{k-1|k-1}^{m,i}\right), \quad (4.7.33)$$

avec

$$\bar{w}_{k-1}^{m,i} \triangleq \sum_{j=1}^{n_m} \mu_{k-1|k-1}^{m,j|i} \quad (4.7.34)$$

et

$$\bar{x}_{k-1|k-1}^{m,i} = \sum_{j=1}^{n_m} \frac{\mu_{k-1|k-1}^{m,j|i}}{\bar{w}_{k-1}^{m,i}} \hat{x}_{k-1|k-1}^{m,j}, \quad (4.7.35)$$

$$\bar{P}_{k-1|k-1}^{m,i} = \sum_{j=1}^{n_m} \frac{\mu_{k-1|k-1}^{m,j|i}}{\bar{w}_{k-1}^{m,i}} \left[P_{k-1|k-1}^{m,j} + \left[\hat{x}_{k-1|k-1}^{m,j} - \bar{x}_{k-1|k-1}^{m,i} \right] \left[\hat{x}_{k-1|k-1}^{m,j} - \bar{x}_{k-1|k-1}^{m,i} \right]' \right]. \quad (4.7.36)$$

Une fois ceci fait, les étapes (4.7.20)–(4.7.21) sont gérées à l'aide des algorithmes FKU-MH-GFM et FKU-MH-Pred :

$$p(x_k | \boldsymbol{\theta}_k = 1, z_{1:k}) = \sum_{m=1}^{n_g} w_k^{m,1} p(x_k | \boldsymbol{\theta}_k = 1, M = m, z_{1:k}) \quad (4.7.37)$$

est calculé à partir de l'approximation à n_g modes de $p(x_{k-1} | \boldsymbol{\theta}_k = 1, z_{1:k-1})$ *via* une étape du FKU-MH-GFM associé au modèle \mathcal{M}_1 , tandis que

$$p(x_k | \boldsymbol{\theta}_k = 2, z_{1:k}) = \sum_{m=1}^{n_g} w_k^{m,2} p(x_k | \boldsymbol{\theta}_k = 2, M = m, z_{1:k}) \quad (4.7.38)$$

est calculé à partir de l'approximation à n_g modes de $p(x_{k-1}|\theta_k=2, z_{1:k-1})$ via une étape du FKU-MH-Pred associé au modèle \mathcal{M}_2 . Pour le calcul des probabilités *a posteriori* $\mu_k^i \triangleq \mathbb{P}\{\theta_k=i|z_{1:k}\}$, le calcul de la vraisemblance $\Lambda_k^i \triangleq p(z_k|\theta_k=i, z_{1:k-1})$ du mode \mathcal{M}_i par rapport à l'observation courante et conditionnellement aux observations passées est nécessaire (cf Eq.(??)). Pour le cas $i=1$, il s'agit ni plus ni moins de la constante de normalisation L_k calculée et retournée en sortie de l'algorithme FKU-MH-GFM. Pour $i=2$, cette vraisemblance est tout simplement l'évaluation de $\mathcal{U}(\cdot; \mathcal{D})$ en la valeur z_k . La constante de normalisation globale $C_k \triangleq p(z_k|z_{1:k-1})$ est elle donnée en exploitant les équations (4.7.24)–(4.7.18)

$$C_k = \sum_{\ell=1}^{n_m} \Lambda_k^\ell \sum_{q=1}^{n_m} p_{q\ell} \mu_{k-1}^q, \quad (4.7.39)$$

de sorte que la probabilité *a posteriori* de $\{\theta_k=i\}$ s'écrit finalement

$$\mu_k^i = \frac{1}{C_k} \Lambda_k^i \sum_{q=1}^{n_m} p_{qi} \mu_{k-1}^q. \quad (4.7.40)$$

La stratégie de filtrage basée sur les MMI, dénommée FBMMI, est résumée dans l'algorithme 12. Des résultats de simulation sont donnés en figures 4.15–5.1. Le filtre est initialisé sous l'hypothèse que l'émetteur est silencieux (modèle \mathcal{M}_2), ce qui est effectivement le cas au départ. Tant que le système suit le modèle \mathcal{M}_2 (itérations 1 à 50), les observations sont systématiquement fausses (uniformément distribuées sur l'intervalle \mathcal{D}_k), et la densité de l'état *a posteriori* reste très peu informative (voir itérations 1, 51, 55 de la figure 5.1). Lorsque la source se met à émettre (modèle \mathcal{M}_1), le filtre «détecte» assez rapidement que la trajectoire d'observation est «compatible» avec un saut $\mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_1$ aux alentours de l'itération 50 : la probabilité *a posteriori* μ_k^1 du modèle \mathcal{M}_1 (tracée en figure 4.15) passe rapidement de 0 à 1. La densité *a posteriori* de l'état devient alors beaucoup plus informative (itérations 63, 86 de la figure 5.1). À l'itération 200, un saut $\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ se produit (la source s'éteint). Ce saut est assez rapidement «détecté» par le filtre. Les observations n'apportent plus d'information sur l'état, et sa densité *a posteriori* s'étale (itérations 209, 238, 301), de par la présence de bruit dans la dynamique. Un saut $\mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_1$ est à nouveau détecté à l'itération 300.

En figure 4.15–(Bas) est représenté le couloir à 99% de l'approximation «moment-matchée» de l'observation prédite sous hypothèse qu'elle est bonne. L'interprétation de ce couloir est simple : à chaque instant, conditionnellement à toutes les observations passées, si jamais l'observation courante est bonne, elle a une très grande chance de se réaliser dans ce couloir. Au départ, ce couloir est très large, du fait que la distribution initiale de l'état est très peu informative et que la source n'émet pas. Entre les itérations 50 et 200, ce couloir est très étroit du fait que le système suit le modèle \mathcal{M}_1 . À partir de l'itération 200, on voit clairement ce couloir s'élargir, du fait que la source n'émet plus et que le bruit de dynamique est intégré au cours du temps. Vers l'itération 280, on observe un phénomène plutôt intéressant. En dépit du fait que la source n'émet pas, deux observations successives se sont réalisées dans le couloir de confiance de l'observation prédite. Ceci mène le filtre à «croire» ces observations correctes, et donc à penser qu'il est assez probable *a posteriori* que le système suive désormais le modèle \mathcal{M}_1 . C'est ce qu'on observe visuellement en figure 4.15–(Haut), où la probabilité μ_k^1 augmente subitement et brièvement aux alentours de l'itération 280. Un constat similaire peut être fait aux instants compris entre 370 et 380, où le système suit le modèle \mathcal{M}_1 , mais où plusieurs fausses observations se réalisent successivement, entraînant des «fluctuations» sur μ_k^1 . L'amplitude des fluctuations sur μ_k^1 dépend bien sur des probabilités *a priori* de transitions entre les modèles que l'on fixe. En général, il vaut mieux donner des faibles valeurs aux probabilités *a priori* des saut $\mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ (inférieure à 0.01 typiquement).

La probabilité μ_k^1 donnée par le FBMMI peut être exploitée par un mécanisme de décision pour l'initialisation/arrêt automatique de suivi de source. L'idée est simple. Pour l'initialisation par exemple, on peut lancer le FBMMI avec $\mu_0^1 = 0$ (pas de source), et si au cours des itérations $\mu_k^1 = 0$ passe au dessus d'un certain seuil et y reste pendant une certaine durée, alors on peut déclarer qu'une source est effectivement présente et retourner les résultats de l'estimation. *A contrario*, si μ_k^1 repasse en dessous d'un certain seuil pendant un certain temps, on peut déclarer que la source a disparu, et réinitialiser le FBMMI pour détecter l'apparition d'une nouvelle source.

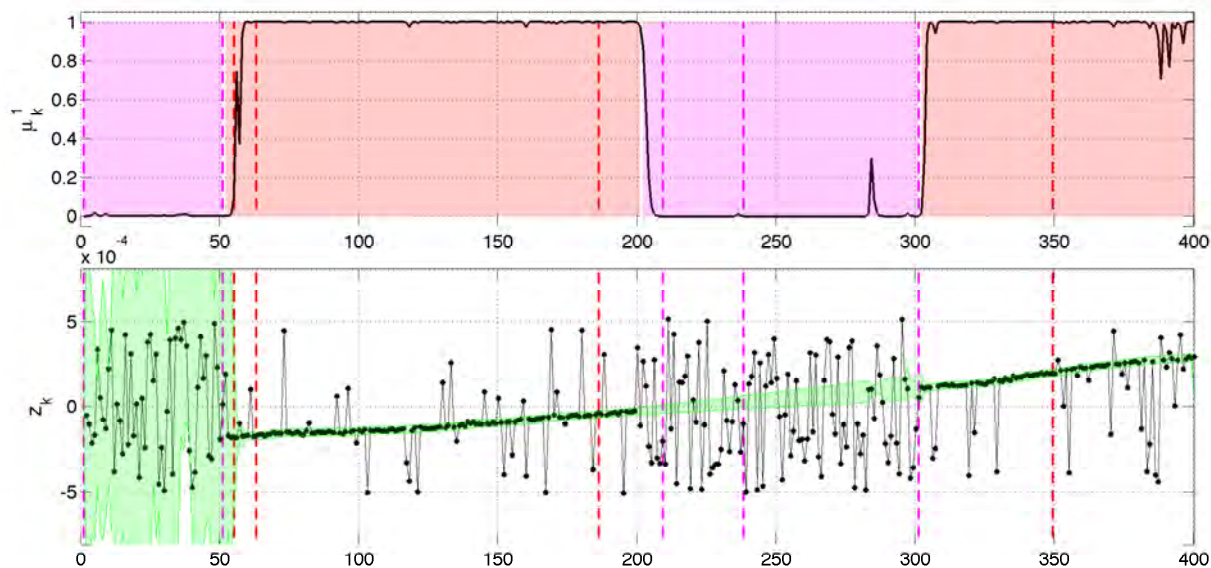


FIGURE 4.15: Résultat de l'estimation (FBMMI). (Haut) probabilité *a posteriori* que la source soit en émission. La coloration rouge (resp. magenta) en arrière plan indique plages de temps où la source est en émission (resp. silencieuse). (Bas) trajectoire d'observation (points noirs) et couloir à 99% de l'approximation «mode-matchée» de l'observation prédite sous hypothèse qu'elle est bonne (vert clair). Les lignes verticales en pointillé indiquent les instants correspondants aux 9 tracés de la figure 5.1.

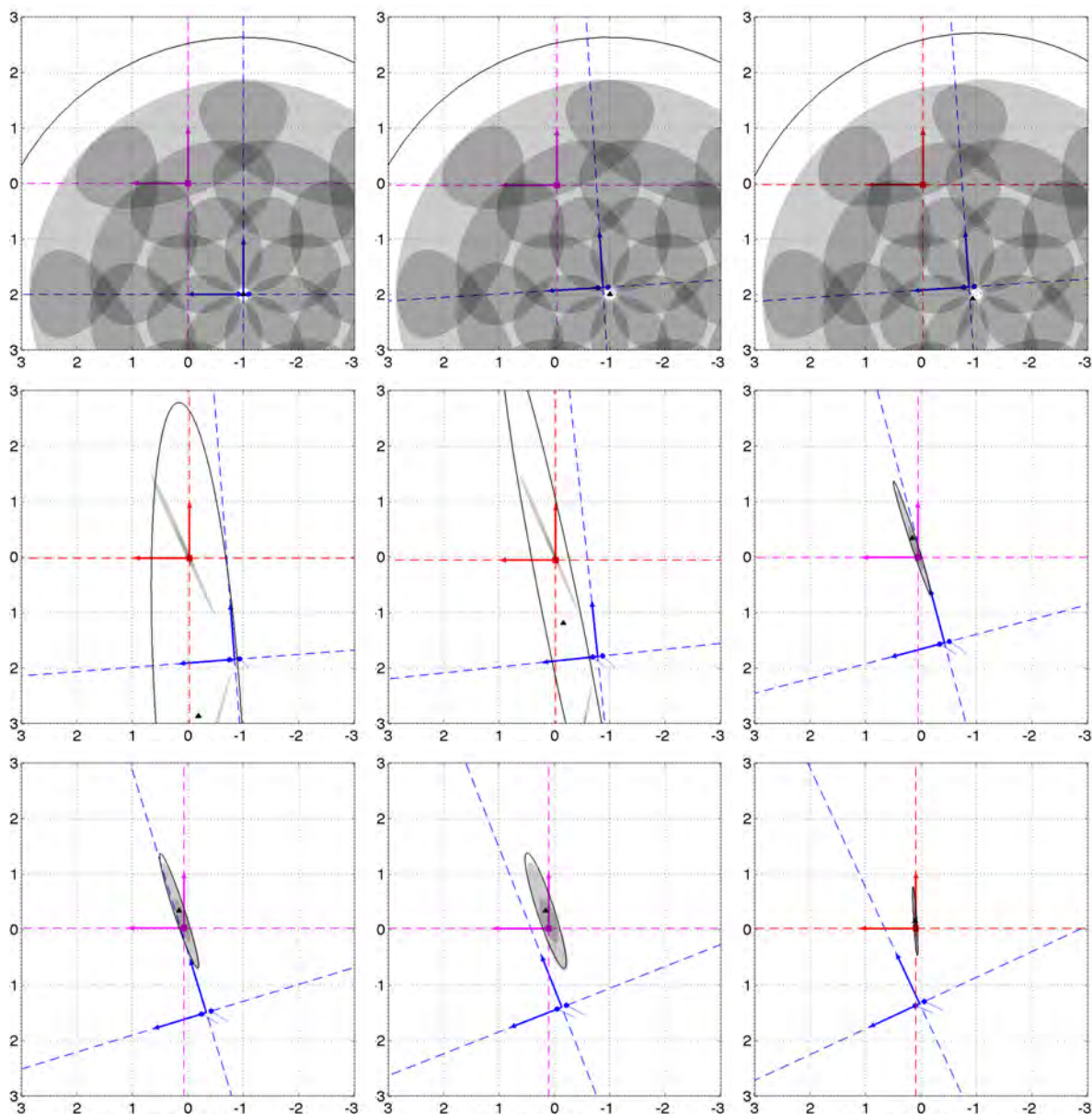


FIGURE 4.16: Résultat de l'estimation (FBMMI) dans le repère monde aux itérations $\{1, 51, 55, 63, 86, 209, 238, 301, 349\}$ (sens de lecture de gauche à droite et de haut en bas). Couleur de la source rouge (resp. magenta) = émission (resp. silence).

4.8 ÉVALUATION EXPÉRIMENTALE DE L'APPROCHE PROPOSÉE

4.8.1 Description du protocole expérimental

Pour évaluer les méthodes proposées avec de vrais signaux binauraux, des expériences ont été réalisées dans une chambre acoustique dont les murs et le plafond sont recouverts de mousse à structure pyramidale. Deux microphones omnidirectionnels identiques, espacés de 17cm, sont placés en champ libre sur un trépied mobile. Une acquisition synchrone à 44.1kHz des sorties des deux microphones est réalisée. Le capteur et le haut-parleur sont placés à la même hauteur,

Algorithme 12 : Sorties=FBMMI(Entrées)Filtre basé sur les **MMI**

Entrées : $\left\{ \hat{x}_{k-1|k-1}^{m,i}, P_{k-1|k-1}^{m,i}, w_{k-1}^{m,i} \right\}_{i=1,\dots,n_m, m=1,\dots,n_g}, \left\{ \mu_{k-1}^i \right\}_{i=1,\dots,n_m}, z_k, u_{k-1}$

Sorties : $\left\{ \hat{x}_{k|k}^{m,i}, P_{k|k}^{m,i}, w_k^{m,i} \right\}_{i=1,\dots,n_m, m=1,\dots,n_g}, \left\{ \mu_k^i \right\}_{i=1,\dots,n_m}$

1 **pour** $i = 1, \dots, n_m$ **faire**2 **pour** $j = 1, \dots, n_m$ **faire**3
$$\mu_{k-1|k-1}^{j,i} = \frac{p_{ji} \mu_{k-1}^j}{\sum_{\ell=1}^{n_m} p_{\ell i} \mu_{k-1}^\ell}$$
4 **pour** $m = 1, \dots, n_g$ **faire**5
$$\mu_{k-1|k-1}^{m,j|i} = \mu_{k-1|k-1}^{j|i} w_{k-1}^{m,j}$$
6
$$\bar{w}_{k-1}^{m,i} = \sum_{j=1}^{n_m} \mu_{k-1|k-1}^{m,j|i}$$
7
$$\bar{\hat{x}}_{k-1|k-1}^{m,i} = \sum_{j=1}^{n_m} \frac{\mu_{k-1|k-1}^{m,j|i}}{\bar{w}_{k-1}^{m,i}} \hat{x}_{k-1|k-1}^{m,j}$$
8
$$\bar{P}_{k-1|k-1}^{m,i} = \sum_{j=1}^{n_m} \frac{\mu_{k-1|k-1}^{m,j|i}}{\bar{w}_{k-1}^{m,i}} \left(P_{k-1|k-1}^{m,j} + \left(\hat{x}_{k-1|k-1}^{m,j} - \bar{\hat{x}}_{k-1|k-1}^{m,i} \right) \left(\hat{x}_{k-1|k-1}^{m,j} - \bar{\hat{x}}_{k-1|k-1}^{m,i} \right)' \right)$$
9 **finpour**10 **finpour**11 **finpour**12
$$\left[\left\{ \hat{x}_{k|k}^{m,1}, P_{k|k}^{m,1}, w_k^{m,1} \right\}_{m=1,\dots,n_g}, \Lambda_k^1 \right] =$$
FKU-MH-GFM $\left(\left\{ \bar{\hat{x}}_{k-1|k-1}^{m,1}, \bar{P}_{k-1|k-1}^{m,1}, \bar{w}_{k-1}^{m,1} \right\}_{m=1,\dots,n_g}, u_{k-1}, z_k, f, h, Q, R \right)$ 13
$$\left[\left\{ \hat{x}_{k|k}^{m,2}, P_{k|k}^{m,2}, w_k^{m,2} \right\}_{m=1,\dots,n_g} \right] = \text{FKU-MH-Pred} \left(\left\{ \bar{\hat{x}}_{k-1|k-1}^{m,2}, \bar{P}_{k-1|k-1}^{m,2}, \bar{w}_{k-1}^{m,2} \right\}_{m=1,\dots,n_g}, u_{k-1}, f, Q \right); \Lambda_k^2 =$$

 $(2D_m)^{-1}$ 14 **pour** $i = 1, \dots, n_m$ **faire**15
$$\mu_k^i = \Lambda_k^i \sum_{\ell=1}^{n_m} p_{\ell i} \mu_{k-1}^\ell$$
16 **finpour**17
$$C_k = \sum_{i=1}^{n_m} \mu_k^i$$
18 **pour** $i = 1, \dots, n_m$ **faire**19
$$\mu_k^i = \mu_k^i / C_k$$
20 **finpour**

et le capteur est déplacé manuellement durant l'émission du haut-parleur et l'acquisition des microphones. Pendant l'expérience, les positions et vitesses du capteur et du haut-parleur par rapport à un repère fixe lié à la salle sont acquises à 200Hz avec un système de capture de mouvement donnant une erreur de position inférieure au millimètre. La vérité terrain est donc disponible pour tester la précision des résultats de localisation. Le protocole expérimental est illustré en figure 4.17.

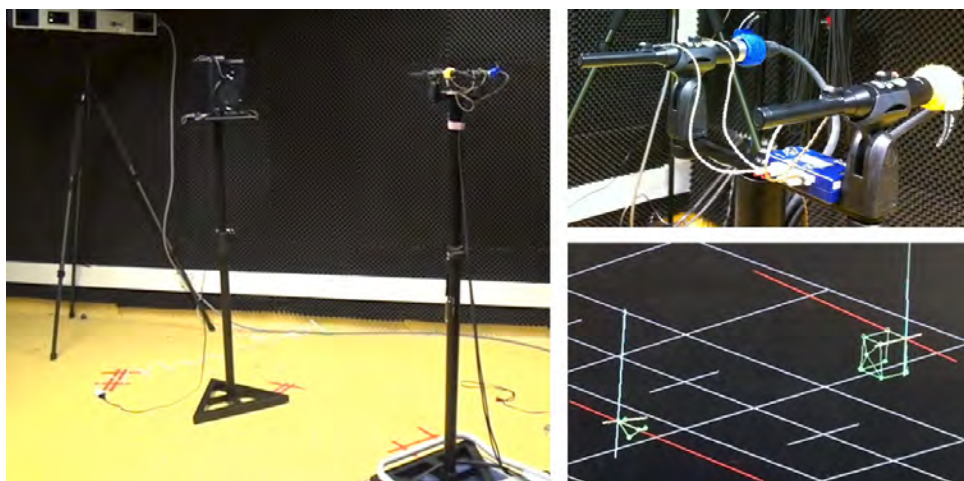


FIGURE 4.17: Protocole expérimental. (Gauche) Capteur binaural et haut parleur. L'une des caméras infrarouges, mesurant la vérité terrain, est visible en arrière plan. (Haut-Droite) Les deux microphones du capteur, munis de 5 marqueurs pour l'acquisition de leur déplacement au cours de l'expérience. (Bas-Droite) Résultats du système de capture de mouvement, les positions et orientations du capteur et du haut-parleur sont mesurées avec précision.

4.8.2 Résultats de la localisation

Les figures 4.19–4.20 montrent les résultats de localisation obtenus pour deux expériences distinctes. Dans les deux cas, le haut parleur est immobile par rapport au monde et le capteur (binaural en champ libre) est en déplacement. Dans l'expérience relative à la figure 4.19, un bruit blanc gaussien est émis en continu par le haut-parleur et la stratégie de filtrage FKU-MH est utilisée. Dans l'expérience de la figure 4.20, un signal vocal intermittent est émis et l'algorithme FBMMI est employé. Pour chaque cas, les résultats sont présentés en 6 itérations sur deux pages (sens chronologique de haut en bas).

Pour chaque itération de l'expérience relative à la figure 4.19, trois sous-figures sont données. Dans la sous-figure de gauche, on peut voir les positions vraies du capteur binaural (marqueurs ronds bleus) et de l'émetteur (quatre marqueurs carrés rouges placés aux coins du haut-parleur, un marqueur supplémentaire placé au milieu de sa face «avant»). Celles-ci sont exprimées en mètres dans le repère relatif à la pièce et sont issues du système de capture de mouvement. La figure présente également les ellipses de confiance à 99% de chacune des hypothèses propagées par le FKU-MH (ellipses grisées semi-transparentes). La moyenne (triangle noir) et l'ellipse de confiance à 99% (ellipse en trait plein noir) de la loi gaussienne «moment-matchée» approximant la densité *a posteriori* de la position de l'émetteur dans la pièce sont également représentées. Dans la sous-figure de droite en haut, une représentation temps-fréquence des signaux perçus au cours des trois secondes précédant l'instant courant est donnée (échelle en secondes pour le temps et en kHz pour les fréquences). Dans la sous-figure de droite en bas, la corrélation croisée généralisée-HT utilisée pour construire l'observation courante (*i.e.* le temps de retard entre les

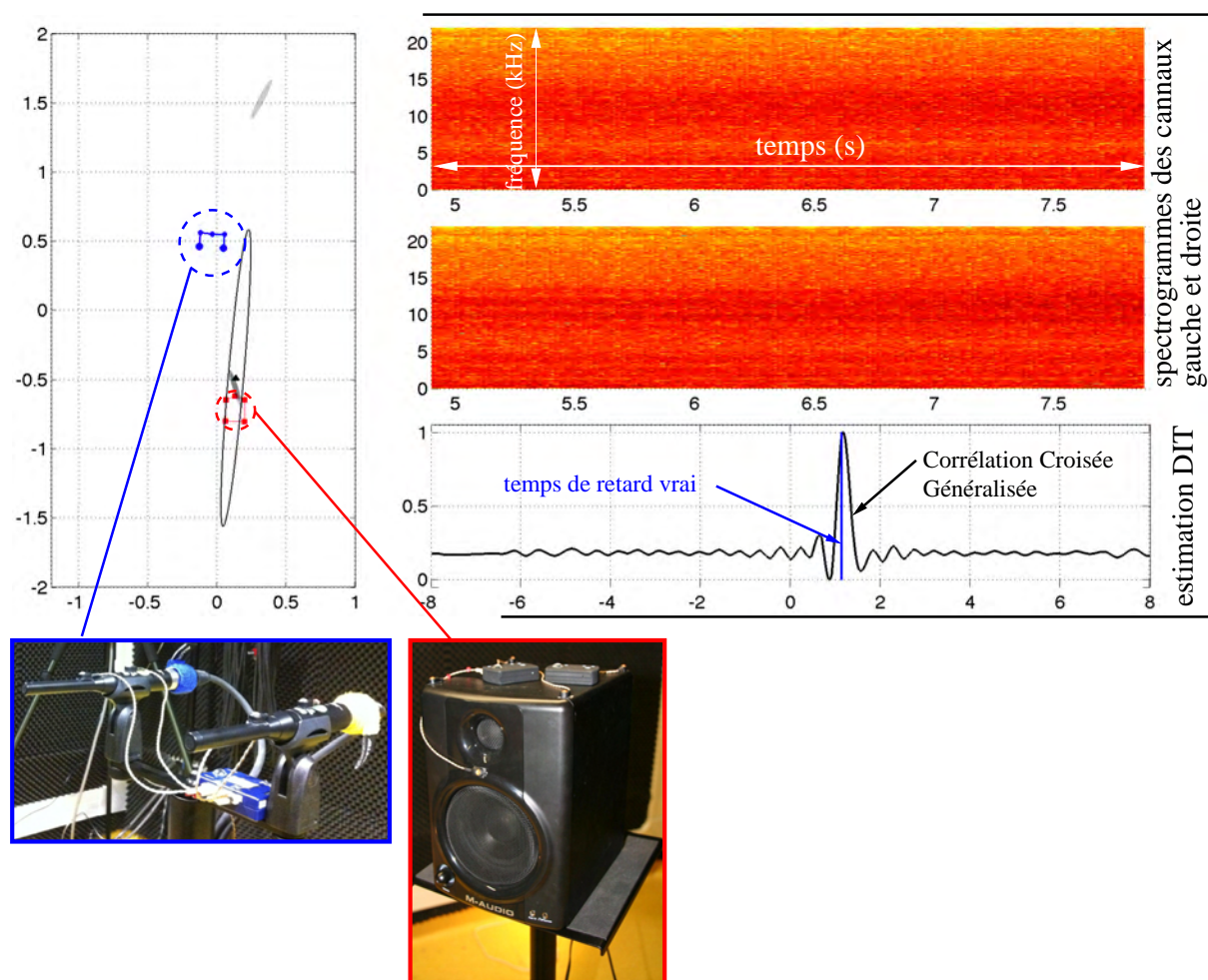
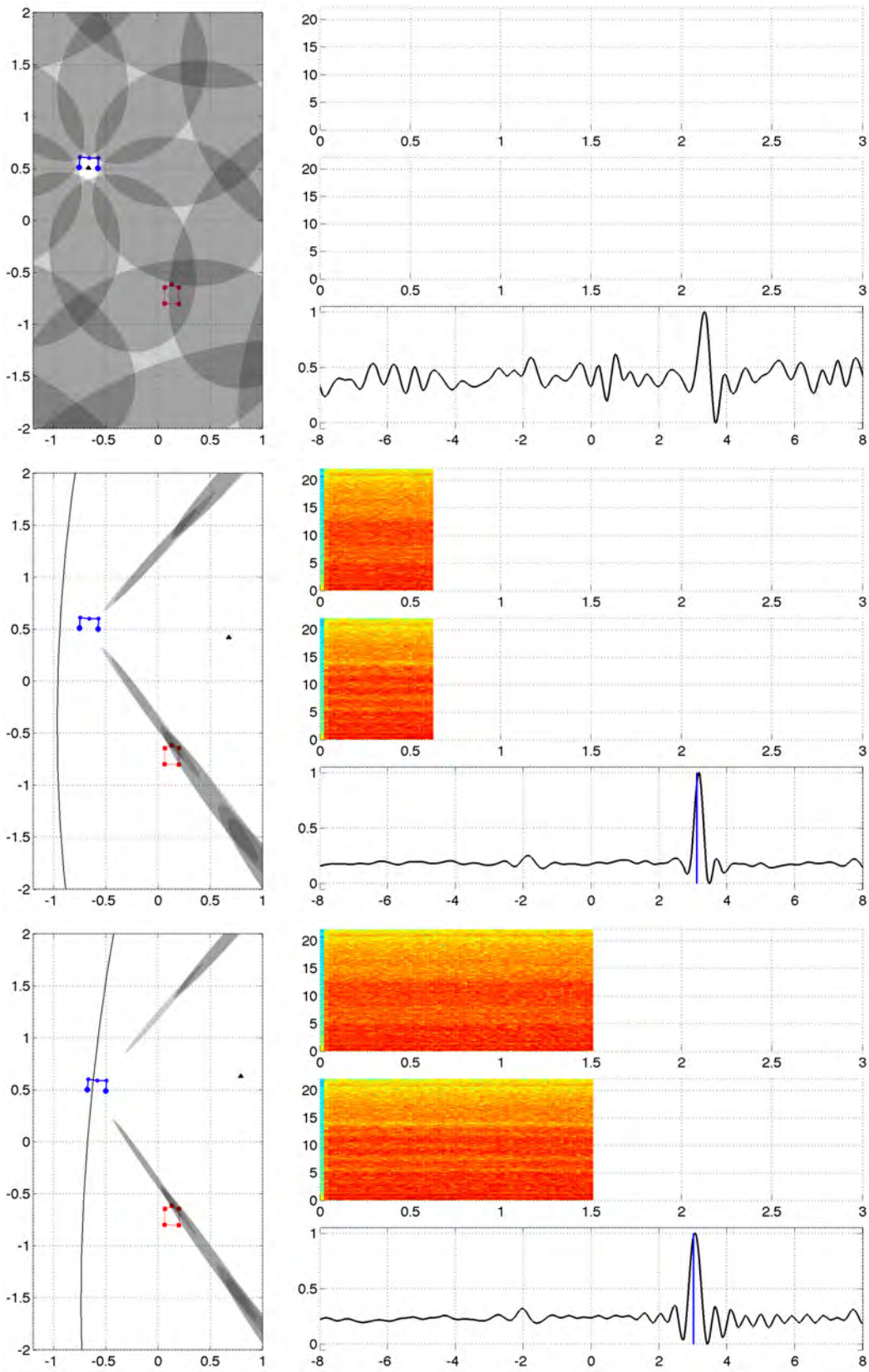


FIGURE 4.18: Légende nécessaire à la compréhension des résultats expérimentaux. (Gauche) Localisation dans le repère monde. (Droite) Description temps-fréquence des signaux et estimation de temps de retard par corrélation croisée généralisée (pour propagation en champ libre).

microphones estimé à l'itération courante) est tracée en noir. Cette corrélation croisée généralisée est construite sur la base de 4 trames consécutives (sans recouvrement) de 512 échantillons, ce qui correspond à une durée d'observation d'environ 46ms (acquisition synchrone des signaux à 44.1kHz). En fait, la corrélation croisée généralisée discrète est interpolée à l'aide de sinus cardinaux. Sur cette même sous-figure, le temps de retard «vrai» à l'itération courante, déduit de la position relative de l'émetteur par rapport au capteur, est représenté par un trait vertical bleu. L'échelle des abscisses (arguments de la corrélation croisée généralisée) est en 10^{-4} s. La figure 4.18 complète de manière visuelle ces explications.

La présentation des résultats relatifs à la seconde expérience (figure 4.20) est similaire à celle de la première expérience. Le protocole de calcul de la corrélation croisée généralisée-HT est inchangé, mais le tracé de la corrélation croisée généralisée en figure bas-droite est remplacé par un tracé de la trajectoire d'observation sur l'horizon de 3s précédant l'instant courant. Le couloir à 99% de l'approximation «moment-matchée» de la loi de prédiction de l'observation sous hypothèse qu'elle est correcte est également tracé en vert clair.



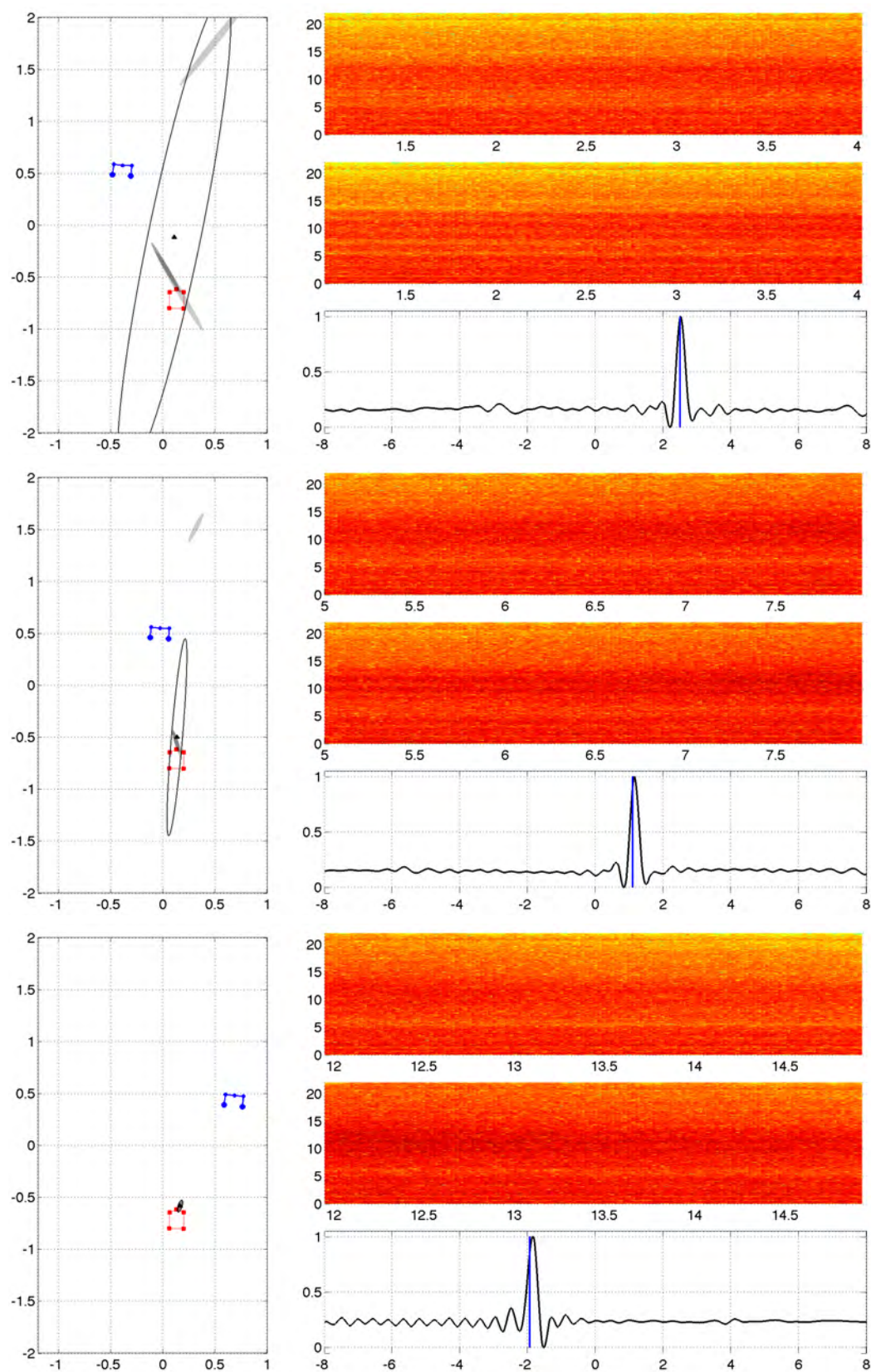
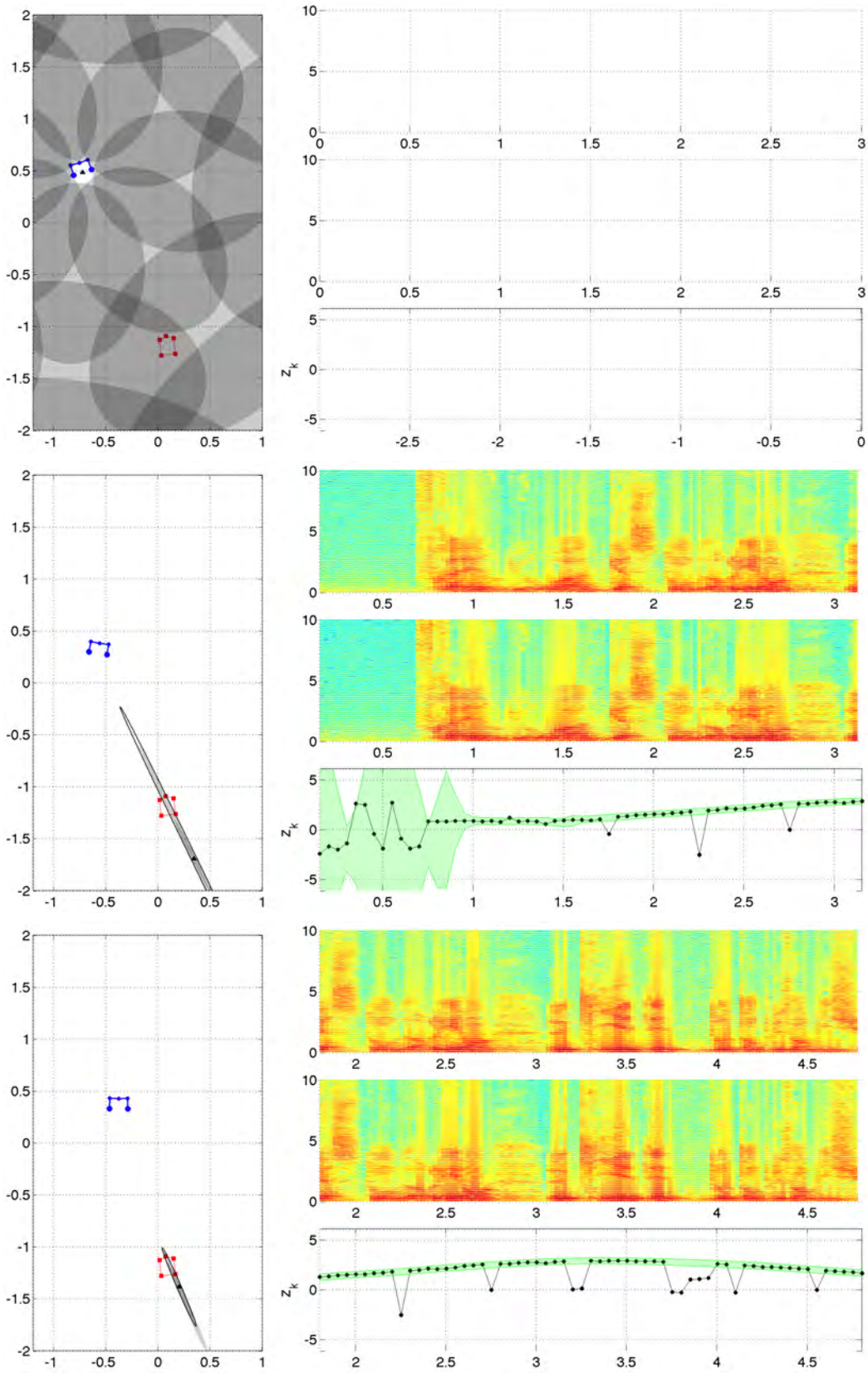


FIGURE 4.19: Résultats expérimentaux : capteur binaural en champ libre, source émettant un bruit blanc gaussien. Émetteur statique dans le repère monde. Capteur binaural en mouvement.



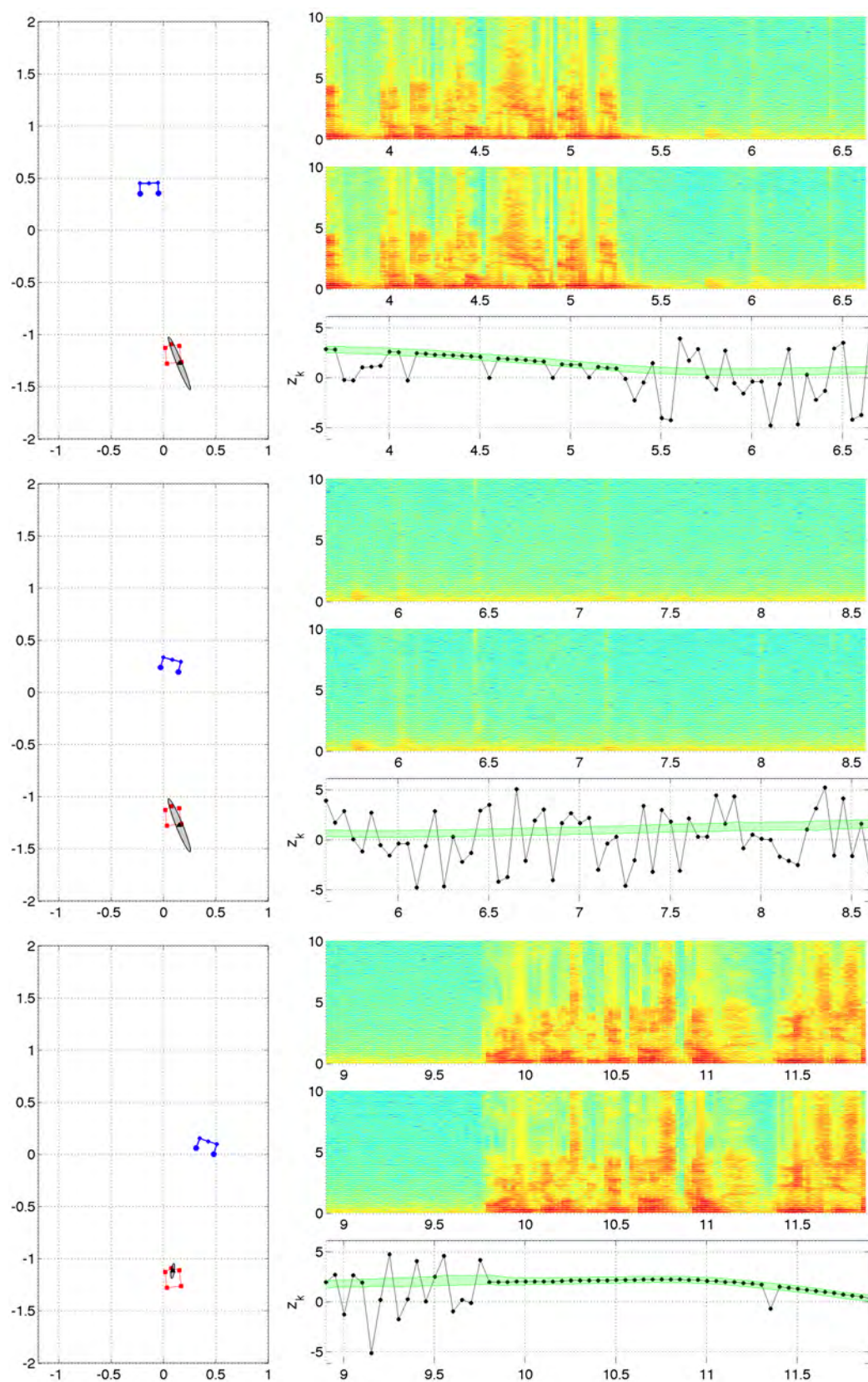


FIGURE 4.20: Résultats expérimentaux : capteur binaural en champ libre, source émettant un signal de voix. Émetteur statique dans le repère monde. Capteur binaural en mouvement.

Les résultats de la première et la seconde expérience sont en accord avec les analyses du FKU-MH et du FBMMI faites en simulation aux §4.4 et §4.7B respectivement. On constate qu'en fin d'expérience, dans les deux cas, le déplacement du capteur et l'acquisition auditive ont permis d'obtenir une information précise et sans ambiguïté sur la position de l'émetteur : une seule hypothèse restante en fin d'expérience, très resserrée autour de sa moyenne et très proche du marqueur de la face «avant» du haut-parleur. Plusieurs points expliquent ce constat. Premièrement, l'émetteur est immobile, et le torseur cinématique du capteur est déduit très précisément des données délivrées par le système de capture de mouvement. Ce fait est connu *a priori*, et en conséquence le filtre est réglé avec une faible variance du bruit de dynamique. D'autre part, le contexte expérimental est très favorable : réverbérations négligeables, absence de bruit issu du déplacement du capteur, torseur cinématique parfaitement connu, etc. Sur un système réel, on peut s'attendre à de nombreuses difficultés supplémentaires. Premièrement, sur un robot réel, le torseur cinématique du capteur n'est pas donné, mais déduit des ordres moteurs du robot et d'un modèle liant ces ordres moteurs au dit torseur cinématique. Il peut donc exister des erreurs supplémentaires du fait que le modèle que l'on exploite ne décrit pas parfaitement la réalité (glissement, jeu sur les actionneurs, etc.). Ensuite, sur un vrai robot, les actionneurs génèrent du bruit qui peut détériorer fortement la performance de l'estimateur de temps de retard. Enfin, la présence de réverbérations en milieu plus réaliste est également une source de difficultés.

Il reste donc un nombre conséquent de problèmes à traiter en vue d'obtenir un système de localisation binaurale active fonctionnel pour un robot et un environnement réels. Les résultats donnés ici permettent cependant une première validation des méthodes proposées dans un contexte expérimental «idéal».

4.9 STRATÉGIE POUR UNE TÊTE

Jusqu'à présent, on a défini des stratégies de filtrage stochastique pour un capteur en champ libre. Lorsque les microphones sont placés sur une tête, de telles stratégies ne peuvent pas être appliquées telles qu'elles. En premier lieu, l'estimation instantanée de ITD doit être remplacée par une estimation instantanée d'azimut sur la base des considérations et des méthodes du chapitre 3. Deuxièmement, il faut discuter des points suivants.

Si la tête servant de support aux microphones présente une symétrie avant-arrière, on ne peut pas se contenter de rechercher sur chaque trame de données audio l'azimut le plus vraisemblable sur l'intervalle $[-\pi, \pi[$ et poser une équation d'observation de la forme

$$\mathbf{z}_k = \boldsymbol{\theta}_k + V_k \quad (4.9.1)$$

avec V_k un bruit gaussien centré. En effet, l'erreur sur l'estimation d'azimut peut au mieux être considérée bi-modale, du fait que deux azimuts θ_1 et $\pi - \theta_1$ sont aussi vraisemblables l'un que l'autre. Ce que l'on peut faire en revanche, c'est restreindre la recherche de l'azimut le plus vraisemblable sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et définir une fonction d'observation qui tient compte de l'ambiguïté avant-arrière, *e.g.*

$$\mathbf{z}_k = h(\theta_k) + V_k \quad (4.9.2)$$

avec $h(\theta) = \theta$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $h(\theta) = \pi - \theta$ sur $[-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Cependant, un tel modèle ne tient pas compte du fait que l'erreur en terme d'azimut estimé est en réalité fortement dépendante de l'azimut «vrai», et donc que le bruit d'observation dépend de l'état. Une solution plus pertinente serait finalement d'appliquer une transformation de la forme

$$\theta \mapsto \sin(\theta) \quad (4.9.3)$$

à l'azimut estimé sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et à poser $h = \sin$ dans (4.9.2), pour pouvoir considérer un bruit d'observation relativement indépendant de l'état.

Si la tête ne présente pas de problème d'identifiabilité sur $[-\pi, \pi]$ (e.g. s'il s'agit d'une tête antropomorphe munie de pavillons artificiels), les considérations précédentes ne tiennent plus et il faut envisager une autre solution. Plutôt que d'estimer un azimut et définir une fonction d'observation et des statistiques de bruit, on propose d'approximer le critère à optimiser choisi parmi ceux proposés au chapitre 3 par un mélange de gaussiennes, et de définir ce mélange comme la fonction de vraisemblance $p(z_k|\theta_k)$ de notre problème de filtrage. On n'a donc plus de lien état-mesure analytique, mais la structure du modèle utilisé pour décrire la vraisemblance nous permet tout de même de définir une stratégie de filtrage basée sur le FKU. On présente les grandes lignes de l'algorithme proposé, qui s'apparente à l'algorithme FKU-MG.

On considère ici que la densité de prédiction de l'état à l'instant k est correctement décrite par un mélange de I_k gaussiennes selon

$$p(x_k|z_{1:k-1}) = \sum_{i=1}^{I_k} w_{k-1}^i \mathcal{N}(x_k; \hat{x}_{k|k-1}^i, P_{k|k-1}^i). \quad (4.9.4)$$

La vraisemblance de x_k est quant-à-elle modélisée par un mélange de la forme

$$p(z_k|x_k) = \sum_{j=1}^{J_k} \gamma_k^j \exp \left[-\frac{1}{2} (x_k - \mu_k^j)' (\Phi_k^j)^{-1} (x_k - \mu_k^j) \right], \quad (4.9.5)$$

Notons que $p(z_k|x_k)$, pour z_k fixé et en tant que fonction de x_k , n'est pas à proprement parler un mélange de gaussiennes. Il ne s'agit pas d'une ddp de la variable \mathbf{x}_k , et il n'y a pas de raison que son intégrale sur x_k soit unitaire. Pour simplifier le propos, on se place ici dans le cas d'un émetteur immobile, et on utilise les paramètres du système de coordonnées polaires (r, θ) comme variables d'état (cf §1.2.5 et Fig.1.6). Pour représenter le fait que la vraisemblance (4.9.5) est indépendante de r_k , on impose les structures suivantes aux $\{\mu_k^j\}_{j=1, \dots, J_k}$ et aux $\{\Phi_k^j\}_{j=1, \dots, J_k}$

$$\Phi_k^j = \begin{bmatrix} \infty & 0 \\ 0 & \phi_k^j \end{bmatrix}, \quad \mu_k^j = \begin{bmatrix} 0 \\ m_k^j \end{bmatrix}. \quad (4.9.6)$$

Ci-dessus, les m_k^j, Φ_k^j sont les paramètres du modèle que l'on utilise pour approximer le critère. D'après des résultats classiques sur les produits de gaussiennes, on peut montrer que

$$p(x_k|z_{1:k}) \propto \sum_{i=1}^{I_k} \sum_{j=1}^{J_k} \alpha_k^{i,j} \mathcal{N}(x_k; \hat{x}_{k|k}^{i,j}, P_{k|k}^{i,j}), \quad (4.9.7)$$

avec

$$P_{k|k}^{i,j} = \left[(P_{k|k-1}^i)^{-1} + (\Phi_k^j)^{-1} \right]^{-1}, \quad (4.9.8)$$

$$\hat{x}_{k|k}^{i,j} = P_{k|k}^{i,j} \left[(P_{k|k-1}^i)^{-1} \hat{x}_{k|k-1}^i + (\Phi_k^j)^{-1} \mu_k^j \right], \quad (4.9.9)$$

$$\alpha_k^{i,j} = w_{k-1}^i \gamma_k^j \left[\frac{|P_{k|k}^{i,j}|}{|P_{k|k-1}^i|} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\hat{x}_{k|k-1}^i - \mu_k^j)' (P_{k|k-1}^i + \Phi_k^j)^{-1} (\hat{x}_{k|k-1}^i - \mu_k^j) \right]. \quad (4.9.10)$$

Par ailleurs, la constante de normalisation $p(z_k|z_{1:k-1})$ est donnée en marginalisant la densité conjointe $p(x_k, z_k|z_{1:k-1})$ par rapport à x_k

$$C_k \triangleq p(z_k|z_{1:k-1}) = \int p(z_k|x_k) p(x_k|z_{1:k-1}) dx_k = \sum_{i=1}^{I_k} \sum_{j=1}^{J_k} \alpha_k^{i,j}, \quad (4.9.11)$$

de sorte que la densité de filtrage à l'instant k s'écrit finalement

$$p(x_k | z_{1:k}) = \sum_{i=1}^{I_k} \sum_{j=1}^{J_k} w_k^{i,j} \mathcal{N}(x_k; \hat{x}_{k|k}^{i,j}, P_{k|k}^{i,j}) \quad (4.9.12)$$

avec

$$w_k^{i,j} = \frac{\alpha_k^{i,j}}{C_k}. \quad (4.9.13)$$

Reste à montrer qu'avec la structure "dégénérée" des Φ_k^j définie en (4.9.6), les matrices $P_{k|k-1}^i + \Phi_k^j$ à inverser dans (4.9.10) sont effectivement inversibles. Soit A une matrice quelconque et

$$\Phi = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & \phi_k^j \end{bmatrix}. \quad (4.9.14)$$

avec q et ϕ_k^j positifs. Dans ce cas l'inverse de $A + \Phi_k^j$ vaut

$$(A + \Phi_k^j)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} A_{2,2} + \phi_k^j & -A_{1,2} \\ -A_{2,1} & A_{2,1} + q \end{bmatrix}}{[A_{1,1} + q][A_{2,2} + \phi_k^j] - A_{1,2}A_{2,1}}. \quad (4.9.15)$$

En passant à la limite $q \rightarrow +\infty$ pour $A = \mathbb{O}_2$ et $A = P_{k|k-1}^i$ on obtient respectivement

$$(\Phi_k^j)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\phi_k^j} \end{bmatrix}, \quad (P_{k|k-1}^i + \Phi_k^j)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(P_{k|k-1}^i)_{2,2} + \phi_k^j} \end{bmatrix}. \quad (4.9.16)$$

La stratégie est finalement résumée dans l'algorithme 13.

Les figures suivantes présentent les résultats de l'expérimentation de la stratégie en conditions réelles. Le protocole expérimental est identique à celui présenté au §4.8.1, à ceci près que la paire de microphones utilisée est ici montée sur une sphère rigide de rayon 16cm. À chaque instant, on applique la méthode développée au chapitre 3 pour le calcul de la pseudo-vraisemblance de l'azimut de la source sur l'intervalle $]-180^\circ, 180^\circ]$ par pas de 2° , en considérant un modèle de source aléatoire gaussienne et des bruits de mesure iid. Cette pseudo-vraisemblance est calculée à partir de 4 trames successives non-overlappées de 512 échantillons.

La figure 4.21 montre, pour une expérience donnée, les résultats du calcul de cette pseudo-vraisemblance en 6 instants différents pour un émetteur en mouvement et un capteur fixe par rapport au monde (sens chronologique de haut en bas, figure sur deux pages). Pour chaque itération, trois sous-figures sont présentées. Sur la sous-figure de gauche, on peut voir, dans le repère du capteur, les positions du haut-parleur (marqueurs magentas, quatre marqueurs aux coins du haut-parleur et un marqueur au centre de la face «avant») et des microphones (marqueurs rouges), ainsi qu'un tracé polaire de la pseudo-vraisemblance (bleu). Les sous-figures de droite représentent la superposition des signaux binauraux, la représentation temps-fréquence du canal gauche, et la représentation temps-fréquence du canal droit.

La localisation active binaurale proprement dite est présentée figure 4.22. Cette figure s'étend sur deux pages, et l'ordre chronologique est de haut en bas. Le haut-parleur est fixe dans le repère monde, tandis que la sphère est en mouvement. Les positions des marqueurs relatifs à la source et les positions des deux microphones sont schématisées comme précédemment. À chaque instant, on présente à gauche dans le repère du monde, et à droite dans le repère du capteur binaural, les ellipsoïdes à 99% des diverses hypothèses propagées par le FKU-VMG. La mise en œuvre de ce filtre fait intervenir une approximation de la pseudo-vraisemblance par un mélange de gaussiennes

Algorithme 13 : Sorties=FKU-VMG(Entrées)

FKU à Vraisemblance Multi-gaussiennes

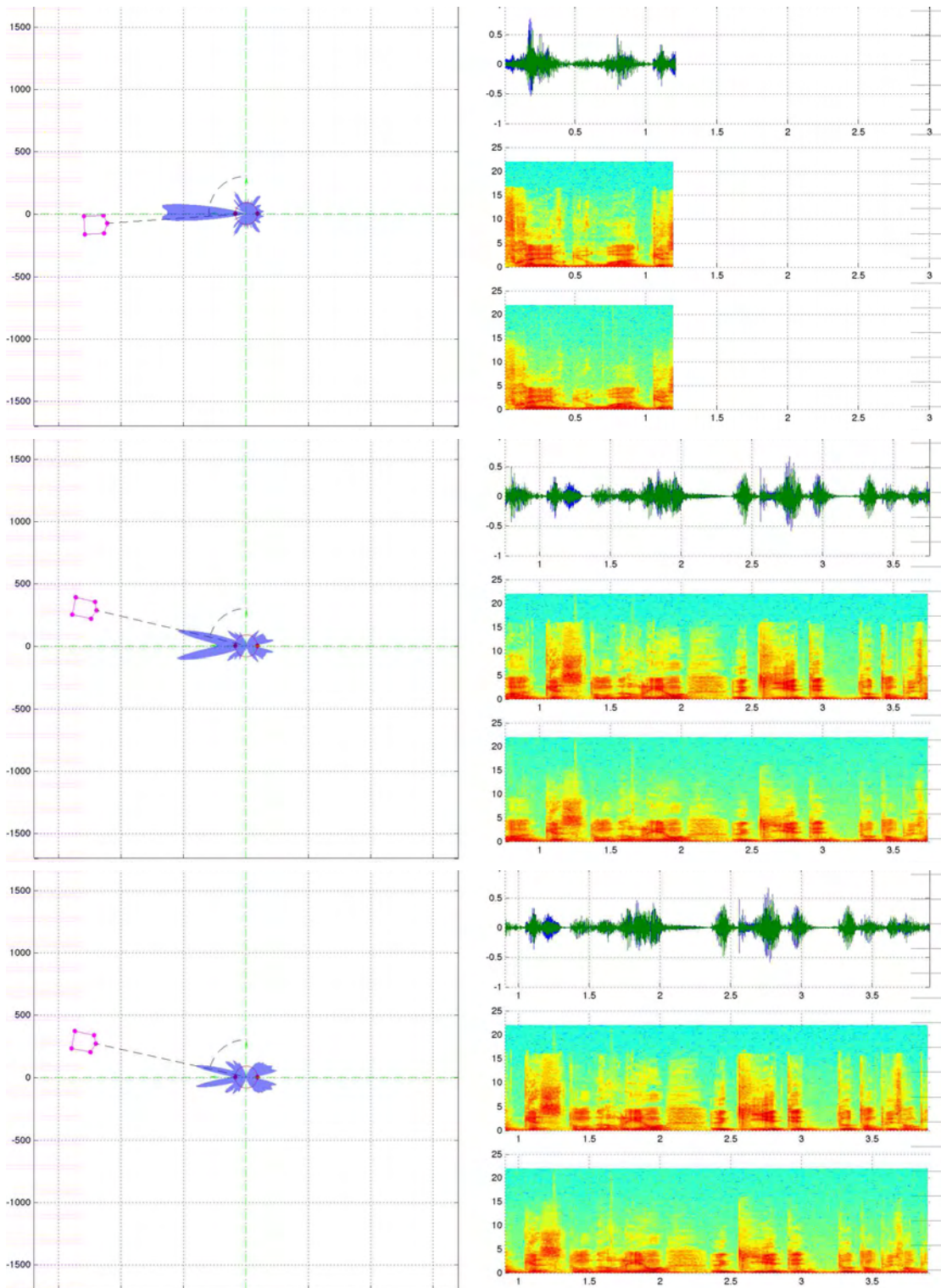
Entrées : $\{\hat{x}_{k-1|k-1}^i, P_{k-1|k-1}^i, w_{k-1}^i\}_{i=1, \dots, I_{k-1}}, u_{k-1}, f, Q, \{m_k^j, \phi_k^j, \gamma_k^j\}_{j=1, \dots, J_k}$

Sorties : $\{\hat{x}_{k|k}^{i,j}, P_{k|k}^{i,j}, w_k^{i,j}\}_{j=1, \dots, J_k, i=1, \dots, I_k}$

- 1 **pour** $i = 1, \dots, I_{k-1}$ **faire**
- 2 $(P_{k-1|k-1}^i)^{\frac{1}{2}} = \text{Chol}(P_{k-1|k-1}^i)$
- 3 $[\{\mathcal{X}_{p, k-1|k-1}^i\}_{p=0, \dots, 2n_x}] = \text{Sigma-Point}(\hat{x}_{k-1|k-1}^i, (P_{k-1|k-1}^i)^{\frac{1}{2}}, \sqrt{n_x + \lambda})$
- 4 **pour** $p = 0, \dots, 2n_x$ **faire**
- 5 $\mathcal{X}_{p, k|k-1}^i = f(\mathcal{X}_{p, k-1|k-1}^i, u_{k-1})$
- 6 **finpour**
- 7 $\hat{x}_{k|k-1}^i = \text{Moy}(\{\mathcal{X}_{p, k|k-1}^i\}_{p=0, \dots, 2n_x}, \lambda)$
- 8 $P_{k|k-1}^i = \text{Corr}(\{\mathcal{X}_{p, k|k-1}^i - \hat{x}_{k|k-1}^i, \mathcal{X}_{p, k|k-1}^i - \hat{x}_{k|k-1}^i\}_{p=0, \dots, 2n_x}, \alpha, \beta, \kappa) + Q$
- 9 **pour** $j = 1, \dots, J_k$ **faire**
- 10 $P_{k|k}^{i,j} = [(P_{k|k-1}^i)^{-1} + \text{Diag}(0, 1/\phi_k^j)]^{-1}$
- 11 $\hat{x}_{k|k}^{i,j} = P_{k|k}^{i,j} [(P_{k|k-1}^i)^{-1} \hat{x}_{k|k-1}^i + \text{Diag}(0, 1/\phi_k^j) [0, m_k^j]']$
- 12 $\alpha_k^{i,j} = w_{k-1}^i \gamma_k^j \left[\frac{|P_{k|k}^{i,j}|}{|P_{k|k-1}^i|} \right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} (\hat{x}_{k|k-1}^i - [m_k^j])' \text{Diag}\left(0, \frac{1}{(P_{k|k-1}^i)_{2,2} + \phi_k^j}\right) (\hat{x}_{k|k-1}^i - [m_k^j])}$
- 13 **finpour**
- 14 **finpour**
- 15 $C_k = \sum_{i=1}^{I_{k-1}} \sum_{j=1}^{J_{k-1}} \alpha_k^{i,j}$ **pour** $i = 1, \dots, I_{k-1}$ **faire**
- 16 **pour** $j = 1, \dots, J_k$ **faire**
- 17 $w_k^{i,j} = \alpha_k^{i,j} / C_k$
- 18 **finpour**
- 19 **finpour**

non normalisé comportant 4 hypothèses. La flèche bleue issue du centre du capteur binaural décrit le vecteur vitesse de celui-ci par rapport au monde, exprimé dans le repère monde (sous-figure de gauche) ou dans le repère capteur (sous-figure de droite). Dans la même veine, l'arc de cercle orienté bleu schématise la composante en rotation du torseur cinématique du capteur par rapport au monde exprimé dans chacun des repères.

Les résultats sont ici aussi satisfaisants. Toutefois les remarques effectuées en fin de section 4.8.2 restent en vigueur.



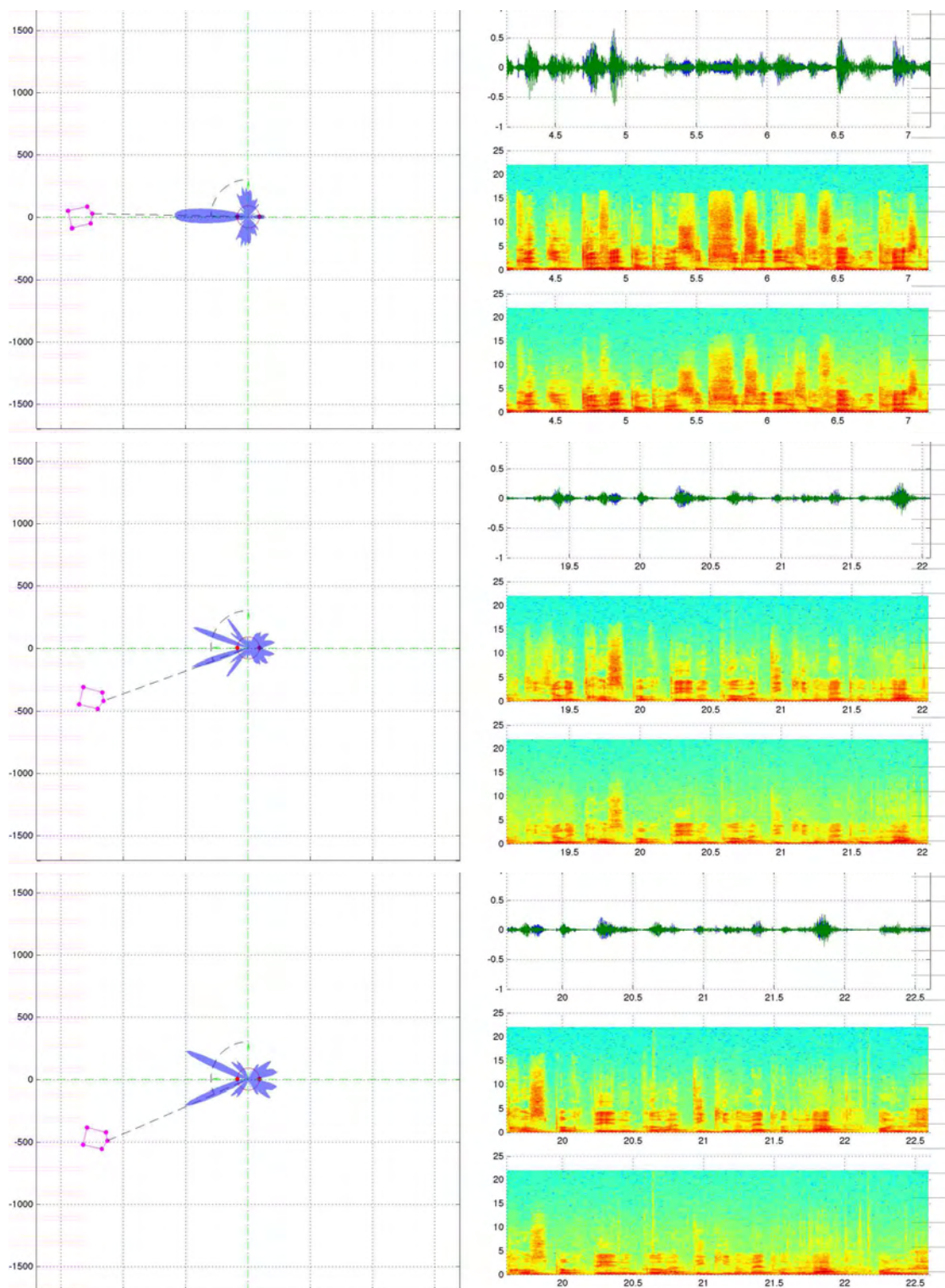
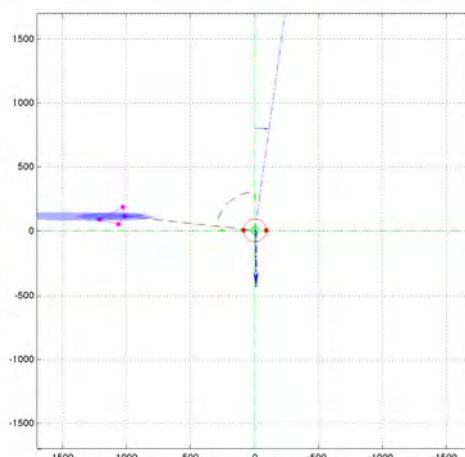
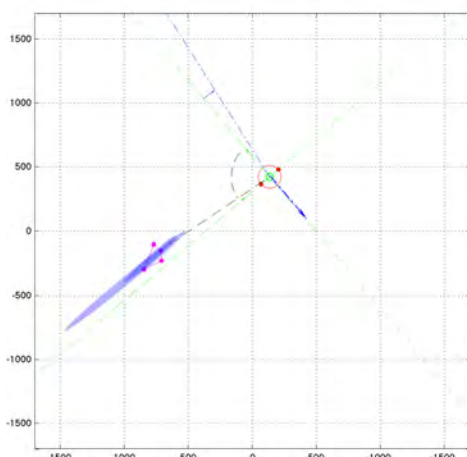
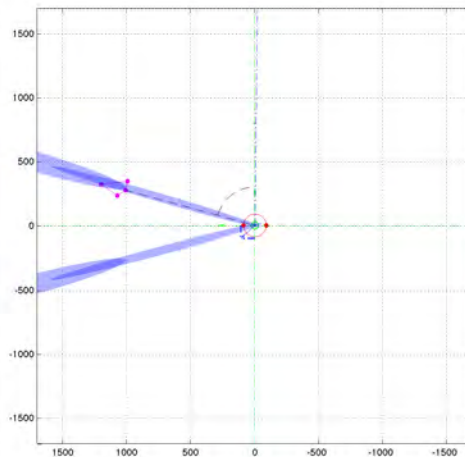
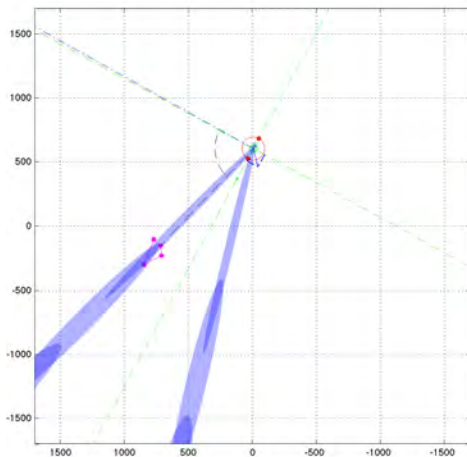
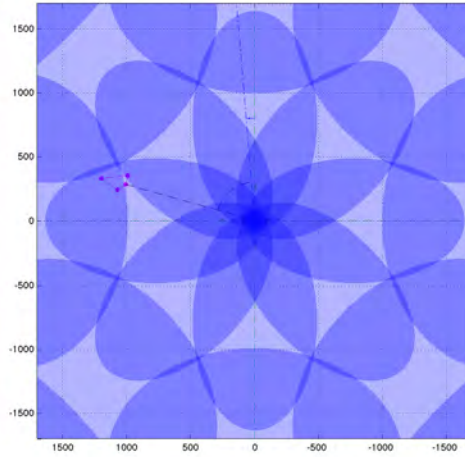
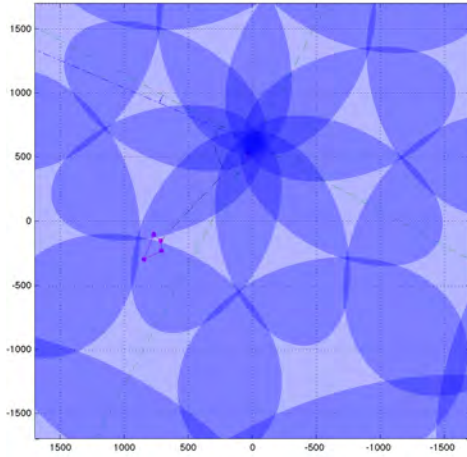


FIGURE 4.21: Détection de primitives spatiales depuis une tête sphérique en conditions réelles, selon la stratégie développée au chapitre 3. La source émet un signal vocal.



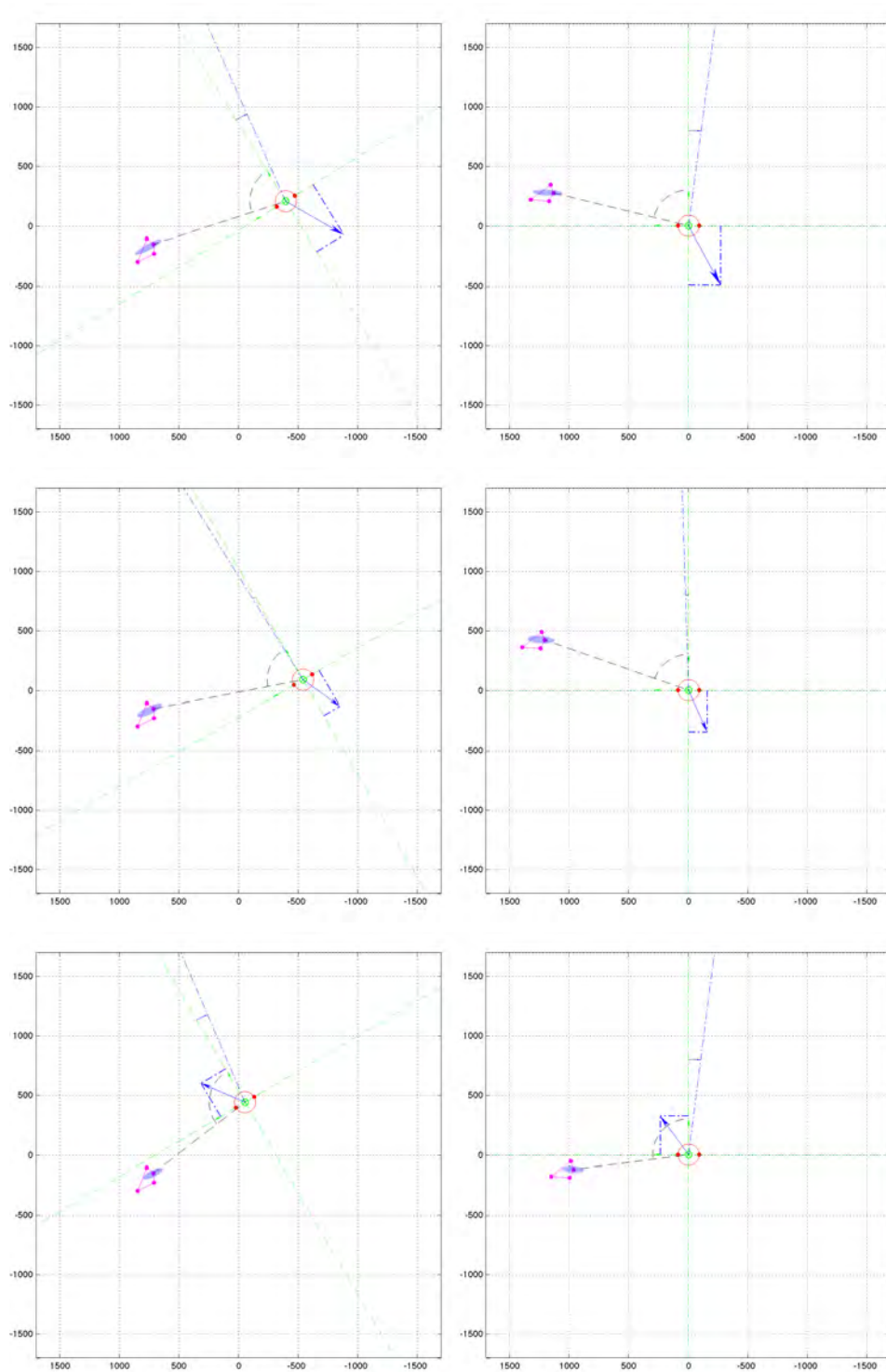


FIGURE 4.22: Localisation active binaurale depuis une tête sphérique en conditions réelles par application de l'algorithme 13. La source émet des signaux de voix.

Prospectives pour la localisation multi-cibles

Dans les chapitres précédents, nous nous sommes focalisés sur la formalisation d'un schéma générique de localisation active binaurale d'une source sonore. Celui-ci s'appuie essentiellement sur un filtre stochastique capable de fusionner les informations provenant des commandes motrices avec des indices spatiaux extraits des signaux audio captés pour en déduire une estimation de la position relative de la source par rapport au robot. Dans cette approche, on a considéré une source sonore unique, éventuellement intermittente. Nous proposons dans ce chapitre plus prospectif d'étendre l'approche proposée au cas de la localisation active de plusieurs sources.

Faire de la localisation multi-cibles nécessite une modification des méthodes proposées jusqu'ici sur deux aspects. En effet il faut pouvoir

- estimer de manière instantanée des paramètres spatiaux associés à plusieurs sources (dont le nombre n'est pas nécessairement connu, et peut varier au cours du temps) émettant simultanément, toujours à partir d'une unique paire de microphones.
- intégrer ces estimés dans une stratégie de filtrage multi-cible, gérant explicitement de manière probabiliste les problèmes d'association de données qui se posent naturellement : instantanément, étant donné un jeu d'observations, impossibilité *a priori* de savoir quelle observation est issue de quelle source, présence de fausses mesures, sources qui ne se «manifestent» pas sur un horizon court terme, disparition de sources, émergence de nouvelles sources, etc.

L'extension de la détection instantanée d'azimut vue au chapitre 3 au cas multi-sources est tout d'abord abordée dans une première section. Sur cette base, nous proposons dans une seconde section quelques pistes pour la construction d'une nouvelle stratégie de filtrage capable de traiter plusieurs sources dans l'environnement.

5.1 DÉTECTION INSTANTANÉE D'AZIMUTS DE PLUSIEURS SOURCES

Considérons un vecteur aléatoire Z —supposé continu sans perte de généralité—dont la *ddp*, notée $p(Z|\theta)$, est paramétrée par un vecteur inconnu θ que l'on souhaite estimer. Comme vu au §2.2.3D, l'EMV des paramètres est obtenu en maximisant $L(\theta; Z) \triangleq \ln p(Z|\theta)$ par rapport à θ . Dans beaucoup de problèmes pratiques, il n'existe pas de solution analytique à ce problème de maximisation. Une méthode brutale consiste à évaluer $p(Z|\theta)$ numériquement pour chaque valeur admissible de θ sur une grille discrète. Quand l'espace des paramètres n'est pas borné et/ou sa dimension est trop élevée, cette procédure devient vite irréalisable. Comme on l'a vu au chapitre 3, une possibilité pour réduire la dimension de l'espace de recherche consiste à chercher une *forme séparable* de l'EMV. Malencontreusement, dans notre problème de localisation instantanée

de plusieurs sources—déterministes inconnues ou aléatoires gaussiennes—on ne peut trouver de forme séparable que si le nombre de récepteurs est strictement supérieur au nombre d'émetteurs (en effet, si cette condition n'est pas vérifiée, le sous-espace bruit n'existe plus, et on ne peut plus détecter les sources par une technique de projection). Cela ne signifie pas qu'il n'existe pas de solution à notre problème, mais que la recherche du maximum de vraisemblance en devient beaucoup plus ardue. Dans ce cas de figure plusieurs possibilités s'offrent à nous.

On peut premièrement relaxer l'hypothèse de gaussianité des sources, et chercher à exploiter l'information contenue dans les tenseurs de cumulants d'ordres supérieurs à 2 (nuls dans le cas gaussien). En traitement d'antenne bande étroite, il est montré qu'une décomposition en structures propres du tenseur des cumulants d'ordre 4 des signaux permet de localiser plus de sources que de récepteurs, le nombre maximal de sources détectable dépendant de la structure de la *matrice directionnelle* de l'antenne (liée à sa géométrie), *i.e.* de la nature (dimension) de l'espace vectoriel qu'elle décrit lorsque toutes les positions possibles de la source sont parcourues [Porat et Friedlander, 1990]–[Cardoso, 1990]–[Cardoso, 1991]–[Dogan et Mendel, 1995]. Cependant, la littérature concernant les cumulants d'ordre 4 pour la localisation est principalement dédiée (1) au paradigme du traitement d'antenne (algorithmes MUSIC 4ème ordre, ESPRIT 4ème ordre, etc.) et (2) aux signaux faible bande. À ce jour, nous n'avons pas connaissance de travaux sur l'utilisation des cumulants d'ordre supérieur dans le contexte binaural large bande. Chercher à innover dans cette direction n'est pas sans difficulté, du fait qu'une base théorique solide en algèbre tensorielle est un pré-requis. En outre, les méthodes à l'ordre 4 sont parfois remises en cause en raison du manque de stabilité des cumulants d'ordre 4 empiriques vis-à-vis des outliers, ce qui est particulièrement problématique lorsque les cumulants sont estimés sur la base d'une analyse court terme des flux audio.

Une autre approche consiste à poser des hypothèses simplificatrices du problème, et définir des méthodes de localisation sous-optimales (*i.e.* abandonner l'idée de chercher l'EMV). Dans cette veine, [Porat et Friedlander, 1983] proposent (sous l'hypothèse de propagation en champ libre champ lointain) de modéliser les sources par des processus AR d'ordres 1 ou 2 dont les paramètres ne coïncident pas (*i.e.* on fait l'hypothèse que deux sources ne peuvent pas avoir le même spectre, ce qui correspond à une forme particulière d'hypothèse de coloration des sources). La méthode se décline en deux étapes : (1) estimation des coefficients des modèles AR en analysant les termes diagonaux de la matrice de covariance empirique des signaux ; (2) estimation des temps de retard sur la base des spectres estimés. En analysant la structure des termes diagonaux de la matrice de covariance théorique des signaux, les auteurs montrent d'abord que le polynôme $a(z)$, défini comme le produit des dénominateurs des fonctions de transfert en z des systèmes AR modélisant les spectres des sources, satisfait à une équation linéaire de type Yule-Walker (*cf* §2.1.2), indépendante des paramètres spatiaux du problème. Les coefficients de ce polynôme sont donc estimés à partir de la corrélation empirique des signaux *via* la méthode des moindres carrés. L'ordre de $a(z)$ n'étant pas connu, le critère AIC est proposé pour estimer cet ordre. Cependant, les auteurs insistent sur le fait qu'une procédure basée sur l'ordre vrai du système mène invariablement à une estimation biaisée des coefficients de $a(z)$, et qu'il est nécessaire de choisir un ordre au moins deux fois supérieur à l'ordre vrai pour s'affranchir du biais de l'estimation. Notons $b(z)$ l'estimé de $a(z)$ *via* la procédure précédente. $b(z)$ est, de par les conditions précédentes, d'ordre supérieur à $a(z)$. L'estimation des spectres des sources repose sur le constat suivant : globalement, $a(z)$ est un diviseur de $b(z)$, *i.e.* parmi les racines de $b(z)$, un certain nombre correspond aux racines de $a(z)$ (*i.e.* aux pôles des modèles AR décrivant les sources), et leurs valeurs sont relativement indépendantes des trames. Les racines restantes sont fortement dépendantes des trames, approximativement uniformément distribuées sur le cercle unitaire, et existent du fait qu'on a surestimé l'ordre de $a(z)$ dans la procédure d'estimation des coefficients. En effectuant une factorisation en zéros de $b(z)$, et en analysant le comportement de ces zéros sur plusieurs trames de données, on peut extraire les racines de $b(z)$ correspondant au

racines de $a(z)$. De là, de par les hypothèses faites sur les spectres des sources, on peut remonter aux pôles associés à chaque source, et donc à leurs spectres. L'estimation des paramètres spatiaux est ensuite réalisée sur la base de ces spectres. Une extension est également pourvue pour des modèles de type **ARMA**. Des améliorations possibles sont données dans [Nehorai *et al.*, 1983]. Bien entendu, la performance de ce genre de méthode est fortement conditionnée par la validité des modèles **AR** ou **ARMA** utilisés pour représenter les sources. En particulier, des modèles d'ordre 1 ou 2 sont généralement insuffisants pour décrire correctement des signaux vocaux. Par ailleurs la non-stationnarité de tels signaux impose d'utiliser des trames de courte durée et relativement peu nombreuses (à moins de modéliser les signaux au moyen de paramètres **AR** variables d'une trame à l'autre, ce qui n'est pas proposé dans cette méthode). Parmi d'autres approches sous-optimales récentes complètement différentes des deux contributions précédentes, on peut citer [Blandin *et al.*, 2011b], où la localisation de sources dans un contexte déterminé ou surdéterminé repose sur la construction d'un *spectre angulaire* dont les extrema locaux indiquent des valeurs de **ITD** compatibles avec les phases observées dans chaque case (ou «bin») de la représentation temps-fréquence des signaux perçus.

Une dernière alternative est finalement de poser (ou non) des hypothèses qui simplifient le problème de maximum de vraisemblance, et de recourir à des méthodes itératives permettant de trouver la solution optimale au problème en évitant la force brute. L'hypothèse la plus récurrente dans la littérature concernant ces méthodes itératives est certainement l'hypothèse de parcimonie temps-fréquence¹ : une source au plus est dominante dans chaque «bin» d'une représentation temps-fréquence des signaux. Schématiquement, les algorithmes fondés sur cette hypothèse reposent sur deux étapes répétées de manière itérative

- pour chaque source, grouper les «bins» temps-fréquence où cette source est supposée dominante, sur la base des paramètres spatiaux des sources estimés à l'itération précédente (séparation, masquage, «clustering»);
- pour chaque source, ré-estimer les paramètres spatiaux qui lui sont associés à partir des «bins» temps-fréquence où celle-ci est supposée dominante (localisation).

Dans [Izumi *et al.*, 2007], l'algorithme **EM** est utilisé pour estimer les temps de retard associés à plusieurs sources à partir d'une paire de microphones en champ libre, en utilisant un modèle de sources déterministes inconnues et bruit aléatoire gaussien, dans la veine du modèle présenté au §3.1.3B. Dans [Sawada *et al.*, 2007], une méthode de classification de type *k-means* est employée dans l'étape de séparation. Dans [Blandin *et al.*, 2011a], les deux méthodes citées précédemment sont évaluées et comparées à partir de données expérimentales. Une méthode basée sur l'**EM** ne reposant pas sur l'hypothèse de parcimonie est également proposée. Dans [Feder et Weinstein, 1988], l'approche **EM** est également employée pour l'**ETR** relative à

- plusieurs sources indépendantes dans un milieu non-réverbérant;
- une source et un canal multi-délai entre les microphones (*e.g.* en présence de réverbérations).

Les quatre références précédentes concernent l'**ETR**, *i.e.* ne présument pas que les microphones peuvent être placés sur un élément diffusant. Dans [Deleforge et Horaud, 2012], l'algorithme **EM** est utilisé pour la localisation de plusieurs sources parcimonieuses à partir d'une tête anthropomorphe binaurale munie de deux degrés de liberté en rotation. Dans cette contribution, à la différence des travaux précédents, les données exploitées ne sont pas les valeurs des transformées de Fourier court terme des signaux perçus, mais les **ILD** et **IPD** estimées en chaque case temps-fréquence. Ces **ILD** et **IPD** extraites sont supposées suivre des loi gaussiennes indépendantes, dont les variances sont inconnues. En particulier, en une case temps-fréquence donnée, l'**ILD** et la **IPD** extraites sont supposés indépendantes. Ce modèle statistique des données peut paraître surprenant au premier regard, mais semble trouver une justification au vu des considérations du §2.1B-5, où il est montré que sous certaines conditions (*i.e.* la variable NDE définie en (2.1.55)

1. *W-Disjointness Orthogonality-WDO*

est suffisamment grande), l'amplitude et la phase de l'estimateur de la DSP croisée de deux signaux centrés gaussiens sont gaussiens indépendants. La correspondance entre la position relative de la source par rapport à la tête (résumée aux angles *pan-tilt* de la tête, dans la veine de [Deleforge et Horaud, 2011]) et les valeurs moyennes des ILD et IPD associés sont apprises hors ligne à partir d'un haut-parleur émettant un bruit blanc.

Dans la suite de ce chapitre on présente en détail trois algorithmes de détection d'azimuts à partir d'une tête binaurale fondés sur l'algorithme EM. Les notations, définitions et modèles statistiques des chapitres 2–3 sont repris et étendus au cas de plusieurs sources. Ainsi le modèle «instantané» des signaux perçus (2.2.1) est-il généralisé au cas de plusieurs sources :

$$\begin{cases} \mathbf{z}_1(t) &= \sum_{q=1}^Q \mathbf{s}_q(t) + \mathbf{n}_1(t) \\ \mathbf{z}_2(t) &= \sum_{q=1}^Q (\mathbf{s}_q * h_{\vartheta_q})(t) + \mathbf{n}_2(t). \end{cases} \quad (5.1.1)$$

Ci-dessus, \mathbf{s}_q désigne la contribution de la $q^{\text{ième}}$ source, de direction d'incidence (ou azimut) ϑ_q , au signal perçu en R_1 . les signaux des sources $\{\mathbf{s}_q\}_{q=1,\dots,Q}$ et les bruits $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ sont supposés aléatoires réels, de moyenne nulle, et gaussiens dans leur ensemble. Le vecteur d'observation \mathbf{Z} est construit à partir de transformées de Fourier court terme des signaux $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ perçus en les microphones R_1, R_2 , dans la lignée des méthodes des chapitres 2–3. Au §5.1.1, on commence par un bref rappel sur le principe de l'algorithme EM. Un algorithme basé sur la parcimonie des sources est présenté au 5.1.2, tandis que les §5.1.3–5.1.4 présentent des méthodes relaxant cette hypothèse.

5.1.1 L'algorithme Espérance-Maximisation en bref

L'algorithme EM [Dempster *et al.*, 1977], initialement proposé par Dempster, est une méthode itérative conçue spécialement pour la recherche de maximum de vraisemblance. On en rappelle brièvement le principe de manière informelle. La publication de Dempster est recommandée pour le lecteur intéressé par les fondements théoriques et les détails de la méthode.

On introduit un vecteur aléatoire \mathbf{X} , qu'on suppose ici continu mais qui peut être discret ou hybride (continu-discret), désormais appelé vecteur de données complètes. Ce vecteur et le vecteur de données réellement disponibles \mathbf{Z} doivent satisfaire à la relation

$$p(\mathbf{Z}|\mathbf{X}, \theta) = p(\mathbf{Z}|\mathbf{X}), \quad (5.1.2)$$

i.e. $\mathbf{Z}|\mathbf{X}$ doit être indépendant de θ . Le choix du vecteur \mathbf{X} n'est pas unique et constitue l'un des points clé de la méthode. Le but est de définir \mathbf{X} de sorte que, si un échantillon X de \mathbf{X} était donné, alors trouver le maximum de $p(X|\theta)$ —la vraisemblance de θ par rapport aux données complètes—serait une tâche aisée. On dénote θ, θ^* deux valeurs candidates² du vecteur de paramètres. Alors on a

$$L(\theta) - L(\theta^*) = \ln \frac{p(\mathbf{Z}|\theta)}{p(\mathbf{Z}|\theta^*)} = \ln \int \frac{p(\mathbf{Z}, X|\theta)}{p(\mathbf{Z}|\theta^*)} dX. \quad (5.1.3)$$

En exploitant l'hypothèse (5.1.2), il vient

$$p(\mathbf{Z}, X|\theta) = p(\mathbf{Z}|\mathbf{X})p(X|\theta), \quad (5.1.4)$$

$$p(\mathbf{Z}|\theta^*) = \frac{p(\mathbf{Z}|\mathbf{X})p(X|\theta^*)}{p(X|\mathbf{Z}, \theta^*)}. \quad (5.1.5)$$

2. attention, θ^* ne désigne pas le conjugué de θ .

En injectant (5.1.4)–(5.1.5) dans (5.1.3) on obtient

$$\begin{aligned} L(\theta) - L(\theta^*) &= \ln \int \frac{p(\mathbf{X}|\theta)}{p(\mathbf{X}|\theta^*)} p(\mathbf{X}|Z, \theta^*) d\mathbf{X} \\ &= \ln \left(\mathbb{E} \left\{ \frac{p(\mathbf{X}|\theta)}{p(\mathbf{X}|\theta^*)} \middle| Z, \theta^* \right\} \right) \geq \mathbb{E} \left\{ \ln \frac{p(\mathbf{X}|\theta)}{p(\mathbf{X}|\theta^*)} \middle| Z, \theta^* \right\}, \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

où la dernière inégalité est l'inégalité de Jensen (la fonction logarithme Néperien étant concave sur son domaine de définition). On obtient donc l'inégalité suivante

$$L(\theta) - L(\theta^*) \geq Q(\theta, \theta^*) - Q(\theta^*, \theta^*), \quad (5.1.7)$$

où

$$Q(\theta, \theta^*) = \mathbb{E} \left\{ \ln p(\mathbf{X}|\theta) \middle| Z, \theta^* \right\} = \int \ln p(\mathbf{X}|\theta) p(\mathbf{X}|Z, \theta^*) d\mathbf{X} \quad (5.1.8)$$

est communément appelée la fonction auxiliaire du problème. Par conséquent, étant donné une valeur initiale θ^* , si l'on trouve une valeur θ telle que $Q(\theta, \theta^*) > Q(\theta^*, \theta^*)$, alors on vérifie que $L(\theta) \geq L(\theta^*)$, en vertu de l'inégalité (5.1.7), *i.e.* on a trouvé une valeur θ plus vraisemblable (ou aussi vraisemblable) que θ^* . En particulier, un tel θ peut être trouvé si, à θ^* donné, on maximise la fonction auxiliaire $Q(\cdot, \theta^*)$. Si \mathbf{X} a été défini judicieusement, alors on peut espérer que $Q(\cdot, \theta^*)$ soit «facile» à maximiser. L'algorithme EM prend donc la forme itérative suivante

1. Initialiser θ^*
2. Étape Espérance : Calculer $Q(\cdot, \theta^*)$
3. Étape Maximisation : Conserver la valeur θ maximisant $Q(\cdot, \theta^*)$
4. Poser $\theta^* = \theta$ et revenir à l'étape 2 si $L(\theta) - L(\theta^*)$ est supérieur à un seuil prédéfini. Sinon, retourner la valeur de θ .

Ainsi, à chaque étape de l'algorithme, on s'assure d'un incrément positif ou nul de la vraisemblance de θ , ce qui assure de converger vers un maximum local de la fonction de vraisemblance.

Notons que dans le cas particulier où le vecteur \mathbf{X} choisi résulte de la concaténation de \mathbf{Z} et d'un vecteur \mathbf{Y} (communément appelé vecteur de *données latentes*), alors³

$$\int \ln p_{\mathbf{X}|\theta}(X|\theta) p_{\mathbf{X}|Z, \theta^*}(X|Z, \theta^*) dX = \iint \ln p_{Z, \mathbf{Y}|\theta}(\zeta, Y|\theta) p_{Z, \mathbf{Y}|Z, \theta^*}(\zeta, Y|Z, \theta^*) d\zeta dY. \quad (5.1.9)$$

Mais

$$p_{Z, \mathbf{Y}|Z, \theta^*}(\zeta, Y|Z, \theta^*) = p_{\mathbf{Y}|Z, \theta^*}(Y|Z, \theta^*) p_{Z|Z, \theta^*}(\zeta|Z, \theta^*) = p_{\mathbf{Y}|Z, \theta^*}(Y|Z, \theta^*) \delta(\zeta - Z), \quad (5.1.10)$$

ce qui donne

$$\int \ln p_{\mathbf{X}|\theta}(X|\theta) p_{\mathbf{X}|Z, \theta^*}(X|Z, \theta^*) dX = \int \ln p_{Z, \mathbf{Y}|\theta}(Z, Y|\theta) p_{\mathbf{Y}|Z, \theta^*}(Y|Z, \theta^*) dY, \quad (5.1.11)$$

ou encore

$$\mathbb{E}_{\mathbf{X}|Z, \theta^*} \left\{ \ln p_{\mathbf{X}|\theta}(\mathbf{X}|\theta) \middle| Z, \theta^* \right\} = \mathbb{E}_{\mathbf{Y}|Z, \theta^*} \left\{ \ln p_{Z, \mathbf{Y}|\theta}(Z, \mathbf{Y}|\theta) \middle| Z, \theta^* \right\}. \quad (5.1.12)$$

3. ici on réintroduit ponctuellement les notations formelles des **ddp** pour faire clairement apparaître une distinction entre ζ , une variable muette associée à \mathbf{Z} par rapport à laquelle on intègre, et Z , la réalisation de \mathbf{Z} que l'on détient.

5.1.2 Hypothèse de parcimonie des sources dans le domaine temps-fréquence

Dans cette section, l'hypothèse de stationnarité (individuelle et mutuelle) des signaux $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ est relaxée. Dans ce cas de figure, leurs autocorrélations $R_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_1}(t, \tau) \triangleq \mathbb{E}\{\mathbf{z}_1(t)\mathbf{z}_1(t-\tau)\}$, $R_{\mathbf{z}_2\mathbf{z}_2}(t, \tau) \triangleq \mathbb{E}\{\mathbf{z}_2(t)\mathbf{z}_2(t-\tau)\}$ et intercorrélations $R_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(t, \tau) \triangleq \mathbb{E}\{\mathbf{z}_1(t)\mathbf{z}_2(t-\tau)\}$ ne sont plus des fonctions de τ uniquement. On peut toutefois calculer les transformées de Fourier de ces quantités par rapport à τ et interpréter les fonctions obtenues comme des **DSP** et **DSP** croisée des signaux, mais paramétrées par le temps t , *i.e.* comme des spectres évoluant au cours du temps. Pour pouvoir traiter des signaux non stationnaires sans remettre complètement en cause tous les calculs de statistiques faits aux §2.1, on fait généralement l'hypothèse de *stationnarité locale* des signaux. Cette hypothèse consiste à dire que $\mathbb{E}\{\mathbf{z}_i(t)\mathbf{z}_j(t-\tau)\}$ varie effectivement avec t , mais que sur une trame de données suffisamment courte indexée par n , $R_{\mathbf{z}_i\mathbf{z}_j}(t, t-\tau) \approx R_{\mathbf{z}_i\mathbf{z}_j,n}(\tau)$ ne dépend pas de t . On note $S_{\mathbf{z}_i\mathbf{z}_j,n}(f)$ la transformée de Fourier de $R_{\mathbf{z}_i\mathbf{z}_j,n}(\tau)$, elle aussi indépendante de t mais indexée par l'indice temporel n .

Pour définir notre vecteur de données et le modèle statistique qui lui est associé, on va découper les signaux observés le long de notre fenêtre d'observation en trames (comme on l'a fait jusqu'à présent), mais on va également définir des groupes de trames successives. Plus spécifiquement, on effectue un réindigage des fenêtres court-terme telles que définies au §3.1.3A-1 en posant

$$w_{(n_g, n_f)}(t) = w(t - \tau_{(n_g, n_f)}). \quad (5.1.13)$$

Ci dessus, les entiers n_g et n_f désignent respectivement l'indice du groupe de trames et l'indice de la trame dans le groupe de trames considéré. Le vecteur de données est construit exactement de la même manière qu'au §3.1.3A-1, mais en intégrant la double indexation des trames. $\mathbf{Z}_{(n_g, n_f)}[k]$ désigne donc la concaténation des valeurs des transformées de Fourier court terme des signaux gauche et droite sur la trame indexée par (n_g, n_f) et à la fréquence d'indice k . $\mathbf{Z}_{n_g}[k] \triangleq [\mathbf{Z}_{(n_g, 1)}[k]', \mathbf{Z}_{(n_g, 2)}[k]', \dots, \mathbf{Z}_{(n_g, N_f)}[k]']'$ désigne quant-à-lui les «données dans la case temps-fréquence (n_g, k) »⁴. Le vecteur de données (ou d'observation) \mathbf{Z} résulte alors de la concaténation des données de toutes les cases temps-fréquence :

$$\mathbf{Z} \triangleq [\mathbf{Z}_1[k_1]', \mathbf{Z}_1[k_2]', \dots, \mathbf{Z}_1[k_B]', \mathbf{Z}_2[k_1]', \dots, \mathbf{Z}_{N_g}[k_B]']'. \quad (5.1.14)$$

Pour simplifier le propos, on considère que les bruits $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ sont eux individuellement et mutuellement **SSL**, **iid** de **DSP** constante et connue σ^2 . On considère que les $\mathbf{Z}_{(n_g, n_f)}[k]$ sont indépendants les uns des autres (voir chapitre 3 pour les hypothèses et approximations sous-jacentes à l'hypothèse d'indépendance). On suppose connu *a priori* le nombre de sources Q . On fait l'hypothèse de stationnarité locale des sources sur les intervalles temporels correspondants aux différents groupes de trames, et on suppose de surcroît que dans une case temps fréquence, une seule source est dominante, c'est à dire que, sous hypothèse que la source indexée par q est dominante dans la case temps fréquence (n_g, k) , la matrice de covariance de $\mathbf{Z}_{(n_g, n_f)}[k]$ s'exprime, quel que soit $n_f \in \{1, \dots, N_f\}$, par

$$C_{\mathbf{Z}_{(n_g, n_f)}[k]}^{(q)} = V_{\vartheta_q}[k] S_{\mathbf{s}_q \mathbf{s}_q, n_g}[k] V_{\vartheta_q}[k]^\dagger + \sigma^2 \mathbb{I}_2 \quad (5.1.15)$$

Pour alléger les notations, on rebaptise $C_{\mathbf{Z}_{(n_g, n_f)}[k]}^{(q)}$ et $S_{\mathbf{s}_q \mathbf{s}_q, n_g}[k]$ en $C_{n_g}^{(q)}[k]$ et $S_{n_g}^{(q)}[k]$ respectivement.

On note $S_{n_g}[k] \triangleq [S_{n_g}^{(1)}[k], S_{n_g}^{(2)}[k], \dots, S_{n_g}^{(Q)}[k]]'$. Le vecteur de paramètres inconnus θ s'exprime alors par

$$\theta \triangleq [\vartheta', \theta'_{\text{spec}}]'. \quad (5.1.16)$$

4. dans «temps-fréquence», «temps» fait donc référence à «groupe de trames».

avec $\vartheta \triangleq [\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_Q]'$ et $\theta_{\text{spec}} \triangleq [S_1[k_1]', S_2[k_1]', \dots, S_{N_g}[k_1]', S_1[k_2]', \dots, S_{N_g}[k_B]]'$ vecteurs de paramètres spatiaux et spectraux du problème respectivement. Sous les hypothèses précédemment énoncées, la log-vraisemblance du vecteur de paramètres par rapport aux données d'écrit

$$\ln p(Z|\theta) = \sum_{n_g=1}^{N_g} \sum_{k=k_1}^{k_B} \ln p(Z_{n_g}[k]|\vartheta, S_{n_g}[k]). \quad (5.1.17)$$

Pour chaque source q , on suppose que la probabilité a priori que celle-ci soit dominante dans la case temps-fréquence (n_g, k) est $1/Q$. La ddp de $Z_{n_g}[k]$ est donc représentée par un mélange de Q hypothèses équiprobables

$$p(Z_{n_g}[k]|\vartheta, S_{n_g}[k]) = \sum_{q=1}^Q \frac{1}{Q} p(Z_{n_g}[k]|\vartheta_q, S_{n_g}^{(q)}[k]), \quad (5.1.18)$$

et chaque hypothèse $q \in \{1, \dots, Q\}$ est une gaussienne complexe à symétrie circulaire

$$p(Z_{n_g}[k]|\vartheta_q, S_{n_g}^{(q)}[k]) = \mathcal{CN}(Z_{n_g}[k]; 0, \text{Diag}(C_{n_g}^{(q)}[k], \dots, C_{n_g}^{(q)}[k])), \quad (5.1.19)$$

où la matrice de covariance $C_{n_g}^{(q)}[k]$, selon l'équation (5.1.15), est paramétrée par la DSP $S_{n_g}^{(q)}[k]$ de la source q en la case temps-fréquence (n_g, k) et sa direction d'incidence ϑ_q . La log-vraisemblance de θ par rapport aux données s'exprime donc par

$$\ln p(Z|\theta) = \sum_{n_g=1}^{N_g} \sum_{k=k_1}^{k_B} \ln \left(\sum_{q=1}^Q \frac{1}{Q} \mathcal{CN}(Z_{n_g}[k]; 0, \text{Diag}(C_{n_g}^{(q)}[k], \dots, C_{n_g}^{(q)}[k])) \right). \quad (5.1.20)$$

La valeur de θ maximisant cette fonction n'admettant pas d'expression analytique ni de forme séparable, on cherche son maximum *via* l'algorithme EM en introduisant un vecteur de données complètes \mathbf{X} que l'on définit ci-après. On considère le vecteur discret de *variables latentes* $\mathbf{y} \triangleq [y_1[k_1], y_2[k_1], \dots, y_{N_g}[k_1], y_1[k_2], \dots, y_{N_g}[k_B]]'$, avec $\forall (n_g, k)$

$$\{y_{n_g}[k] = q\} \Rightarrow Z_{n_g}[k] \sim \mathcal{CN}(\cdot; 0, \text{Diag}(C_{n_g}^{(q)}[k], \dots, C_{n_g}^{(q)}[k])), \quad (5.1.21)$$

i.e. $y_{n_g}[k]$ informe sur l'origine de $Z_{n_g}[k]$ (de quelle hypothèse q il est originaire, *i.e.* quelle source est dominante dans la case temps-fréquence (n_g, k)). Soit $\mathbf{x}_{n_g}[k] \triangleq [Z_{n_g}[k]', y_{n_g}[k]]'$ le *vecteur de données complètes dans la case temps-fréquence* (n_g, k) et

$$\mathbf{X} \triangleq [\mathbf{x}_1[k_1]', \mathbf{x}_2[k_1]', \dots, \mathbf{x}_{N_g}[k_1]', \mathbf{x}_1[k_2]', \dots, \mathbf{x}_{N_g}[k_B]]' \quad (5.1.22)$$

le vecteur de données complètes, résultant de la concaténation des données latentes et des données réellement disponibles. On suppose que les vecteurs de données complètes dans les différentes cases temps-fréquence sont indépendants deux à deux. Le choix du vecteur \mathbf{y} comme données latentes est légitime du fait que si la réalisation de ce vecteur était connue, il suffirait de grouper les cases temps-fréquence associées à chaque source, et effectuer de l'estimation par maximum de vraisemblance mono-source pour chaque groupe de cases pour obtenir l'EMV de θ . La fonction auxiliaire à maximiser s'écrit donc, en se basant sur la discussion en fin du §5.1.1

$$Q(\theta, \theta^*) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} \ln p(Z, y|\theta) p(y|Z, \theta^*), \quad (5.1.23)$$

avec $\mathcal{Y} = \{1, 2, \dots, Q\}^{N_g k_B}$ l'espace discret dans lequel vit \mathbf{y} . En remarquant que

$$p(Z_{n_g}[k]|y_{n_g}[k], \vartheta, S_{n_g}[k]) = p(Z_{n_g}[k]|\vartheta_{y_{n_g}[k]}, S_{n_g}^{(y_{n_g}[k])}[k]), \quad (5.1.24)$$

on peut ré-exprimer ainsi la log-vraisemblance de θ par rapport aux données complètes

$$\begin{aligned}
\ln p(Z, y|\theta) &= \sum_{n_g, k} \ln p(Z_{n_g}[k], y_{n_g}[k]|\vartheta, S_{n_g}[k]) = \sum_{n_g, k} \ln \frac{1}{Q} p\left(Z_{n_g}[k]|\vartheta_{y_{n_g}[k]}, S_{n_g}^{(y_{n_g}[k])}[k]\right) \\
&= \sum_{n_g, k} \ln \mathbb{C}\mathcal{N}\left(Z_{n_g}[k]; 0, \text{Diag}\left(C_{n_g}^{(y_{n_g}[k])}[k], \dots, C_{n_g}^{(y_{n_g}[k])}[k]\right)\right) - N_g k_B \ln Q \\
&= -N_f \sum_{n_g, k} \left(\ln \det C_{n_g}^{(y_{n_g}[k])}[k] + \text{trace}\left(\left(C_{n_g}^{(y_{n_g}[k])}[k]\right)^{-1} \hat{C}_{n_g}[k]\right) \right) + c(Q), \quad (5.1.25)
\end{aligned}$$

avec

$$\hat{C}_{n_g}[k] \triangleq \frac{1}{N_f} \sum_{n_f=1}^{N_f} Z_{(n_g, n_f)}[k] Z_{(n_g, n_f)}[k]^\dagger \quad (5.1.26)$$

la matrice de covariance empirique des signaux calculée sur la case temps-fréquence (n_g, k) et $c(Q)$ une constante sans intérêt. La vraisemblance de θ^* par rapport aux données latentes sachant les données s'exprime, en exploitant la règle de Bayes, comme suit

$$\begin{aligned}
p(y|Z, \theta^*) &= \prod_{n_g, k} p(y_{n_g}[k]|Z_{n_g}[k], \vartheta^*, S_{n_g}[k]^*) \\
&= \prod_{n_g, k} \left(\frac{\frac{1}{Q} p\left(Z_{n_g}[k]|\vartheta_{y_{n_g}[k]}^*, S_{n_g}^{(y_{n_g}[k])}[k]^*\right)}{\sum_q \frac{1}{Q} p\left(Z_{n_g}[k]|\vartheta_q^*, S_{n_g}^{(q)}[k]^*\right)} \right) \\
&= \prod_{n_g, k} \left(\frac{\mathbb{C}\mathcal{N}\left(Z_{n_g}[k]; 0, \text{Diag}\left(C_{n_g}^{(y_{n_g}[k])}[k]^*, \dots, C_{n_g}^{(y_{n_g}[k])}[k]^*\right)\right)}{\sum_q \mathbb{C}\mathcal{N}\left(Z_{n_g}[k]; 0, \text{Diag}\left(C_{n_g}^{(q)}[k]^*, \dots, C_{n_g}^{(q)}[k]^*\right)\right)} \right). \quad (5.1.27)
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction auxiliaire à maximiser peut-elle s'écrire

$$\begin{aligned}
Q(\theta, \theta^*) &= \sum_{y \in \mathcal{Y}} \left(\sum_{n_g, k} \ln p\left(Z_{n_g}[k]|\vartheta_{y_{n_g}[k]}, S_{n_g}^{(y_{n_g}[k])}[k]\right) \times \right. \\
&\quad \left. \prod_{m_g, \ell} p(y_{m_g}[\ell]|Z_{m_g}[\ell], \vartheta^*, S_{m_g}[\ell]^*) \right) + c(Q, \theta^*), \quad (5.1.28)
\end{aligned}$$

avec $\sum_{y \in \mathcal{Y}}(\cdot) = \sum_{y_1[k_1]=1}^Q \cdots \sum_{y_{n_g'}[k']=1}^Q \cdots \sum_{y_{N_g}[k_B]=1}^Q(\cdot)$ et $c(Q, \theta^*)$ une constante par rapport à θ qu'on omet par la suite. L'expression de la fonction auxiliaire telle que donnée à l'équation (5.1.28) ne nous simplifie pour l'instant pas vraiment la tâche. Les développements qui vont suivre, vont nous donner une expression bien plus intéressante de cette fonction auxiliaire. En utilisant la relation

$$\sum_{n_g, k} \ln p\left(Z_{n_g}[k]|\vartheta_{y_{n_g}[k]}, S_{n_g}^{(y_{n_g}[k])}[k]\right) = \sum_{n_g, k} \sum_{q=1}^Q \delta_{q, y_{n_g}[k]} \ln p\left(Z_{n_g}[k]|\vartheta_q, S_{n_g}^{(q)}[k]\right), \quad (5.1.29)$$

où δ est le symbole de Kronecker, il vient

$$Q(\theta, \theta^*) = \sum_{q=1}^Q \sum_{n_g, k} \ln p \left(Z_{n_g}[k] | \vartheta_q, S_{n_g}^{(q)}[k] \right) \times \\ \sum_{y_1[k_1]=1}^Q \cdots \sum_{y_{n'_g}[k']=1}^Q \cdots \sum_{y_{N_g}[k_B]=1}^Q \delta_{q, y_{n_g}[k]} \prod_{m_g, \ell} p(y_{m_g}[\ell] | Z_{m_g}[\ell], \vartheta^*, S_{m_g}[\ell]^*). \quad (5.1.30)$$

Or

$$\prod_{m_g, \ell} p(y_{m_g}[\ell] | Z_{m_g}[\ell], \vartheta^*, S_{m_g}[\ell]^*) = \\ p(y_{n_g}[k] | Z_{n_g}[k], \vartheta^*, S_{n_g}[k]^*) \prod_{m_g, \ell \neq n_g, k} p(y_{m_g}[\ell] | Z_{m_g}[\ell], \vartheta^*, S_{m_g}[\ell]^*) \quad (5.1.31)$$

et

$$\sum_{y_{n_g}[k]=1}^Q \delta_{q, y_{n_g}[k]} p(y_{n_g}[k] | Z_{n_g}[k], \vartheta^*, S_{n_g}[k]^*) = p(q | Z_{n_g}[k], \vartheta^*, S_{n_g}[k]^*), \quad (5.1.32)$$

avec par abus de notation $p(q | Z_{n_g}[k], \vartheta^*, S_{n_g}[k]^*) = \mathbb{P}\{y_{n_g}[k] = q | Z_{n_g}[k], \vartheta^*, S_{n_g}[k]^*\}$. D'où

$$Q(\theta, \theta^*) = \sum_{q=1}^Q \sum_{n_g, k} \ln p \left(Z_{n_g}[k] | \vartheta_q, S_{n_g}^{(q)}[k] \right) \sum_{y_1[k_1]=1}^Q \cdots \sum_{y_{n_g}[k-1]=1}^Q \\ \sum_{y_{n_g}[k+1]=1}^Q \cdots \sum_{y_{N_g}[k_B]=1}^Q p(q | Z_{n_g}[k], \vartheta^*, S_{n_g}[k]^*) \prod_{m_g, \ell \neq n_g, k} p(y_{m_g}[\ell] | Z_{m_g}[\ell], \vartheta^*, S_{m_g}[\ell]^*), \quad (5.1.33)$$

ou encore

$$\sum_{q=1}^Q \sum_{n_g, k} \ln p \left(Z_{n_g}[k] | \vartheta_q, S_{n_g}^{(q)}[k] \right) p(q | Z_{n_g}[k], \vartheta^*, S_{n_g}[k]^*) \times \\ \prod_{m_g, \ell \neq n_g, k} \sum_{y_{m_g}[\ell]=1}^Q p(y_{m_g}[\ell] | Z_{m_g}[\ell], \vartheta^*, S_{m_g}[\ell]^*). \quad (5.1.34)$$

Mais par la définition même de probabilité

$$\sum_{y_{m_g}[\ell]=1}^Q p(y_{m_g}[\ell] | Z_{m_g}[\ell], \vartheta^*, S_{m_g}[\ell]^*) = 1, \quad (5.1.35)$$

donc, finalement

$$Q(\theta, \theta^*) = \sum_{q=1}^Q \sum_{n_g, k} \ln p \left(Z_{n_g}[k] | \vartheta_q, S_{n_g}^{(q)}[k] \right) \mathbb{P}\{y_{n_g}[k] = q | Z_{n_g}[k], \vartheta^*, S_{n_g}[k]^*\}. \quad (5.1.36)$$

La fonction auxiliaire telle qu'exprimée à l'équation (5.1.36) devient très intéressante. Premièrement, elle se présente comme la somme de Q fonctions $\{Q_q(\cdot, \theta^*)\}_{q=1, \dots, Q}$, où chaque fonction

$Q_q(\cdot, \theta^*)$ ne dépend que de θ_q , le vecteur concaténant les paramètres spatiaux et spectraux associés à la source q

$$Q(\theta, \theta^*) = \sum_q Q_q(\theta_q, \theta^*). \quad (5.1.37)$$

Il suffit donc de maximiser chacun des $Q_q(\cdot, \theta^*)$ séparément pour avoir le maximum de $Q(\cdot, \theta^*)$. En second lieu, on va voir que des conditions de stationnarité au premier ordre sur les $Q_q(\cdot, \theta^*)$ peuvent être exploitées pour faciliter la recherche de leurs maxima. Pour la suite, on note pour plus de lisibilité

$$\gamma_{n_g}^{(q)}[k] = \mathbb{P}\{\mathbf{y}_{n_g}[k] = q|Z_{n_g}[k], \vartheta^*, S_{n_g}[k]^*\} \quad (5.1.38)$$

et on omet la dépendance de $\gamma_{n_g}^{(q)}[k]$ par rapport à $\vartheta^*, S_{n_g}[k]^*$. La dérivée partielle de $Q_q(\theta_q, \theta^*)$ par rapport à $S_{n_g}^{(q)}[k']$ vaut, du fait que $\gamma_{n_g}^{(q)}[k']$ ne dépend pas de $S_{n_g}^{(q)}[k']$,

$$\frac{\partial Q_q(\theta_q)}{\partial S_{n_g}^{(q)}[k']} = \gamma_{n_g}^{(q)}[k'] \frac{\partial}{\partial S_{n_g}^{(q)}[k']} \left[\ln p \left(Z_{n_g}[k'] | \vartheta_q, S_{n_g}^{(q)}[k'] \right) \right] \quad (5.1.39)$$

et vaut zéro lorsque $S_{n_g}^{(q)}[k']$ vaut, en fonction de ϑ_q , (exactement de la même manière qu'au chapitre 3)

$$\hat{S}_{n_g}^{(q)}[k] = \left(V_{\vartheta_q}[k]^\dagger V_{\vartheta_q}[k] \right)^{-1} V_{\vartheta_q}[k]^\dagger \left(\hat{C}_{n_g}[k] - \sigma^2 \mathbb{I}_2 \right) V_{\vartheta_q}[k] \left(V_{\vartheta_q}[k]^\dagger V_{\vartheta_q}[k] \right)^{-1}. \quad (5.1.40)$$

En réinjectant l'équation précédente dans Q_q , on trouve que (toujours de la même manière que dans le cas mono-source du chapitre 3)

$$\hat{\vartheta}_q = \operatorname{argmin}_{\vartheta_q} \sum_{n_g, k} \gamma_{n_g}^{(q)}[k] \left(\ln \det \left[P_{\vartheta_q}[k] \hat{C}_{n_g}[k] P_{\vartheta_q}[k] + \sigma^2 P_{\vartheta_q}^\perp[k] \right] + \frac{1}{\sigma^2} \operatorname{trace} \left[P_{\vartheta_q}^\perp[k] \hat{C}_{n_g}[k] \right] \right). \quad (5.1.41)$$

On constate une grande similitude entre la fonction à minimiser dans (5.1.41) et la PLV dans le cas mono-source. La première différence réside dans le fait qu'on somme sur les fréquences et sur les groupes de trames (qui vient du fait qu'on a relaxé l'hypothèse de stationnarité). L'autre différence se trouve dans l'apparition de la pondération $\gamma_{n_g}^{(q)}[k]$ à l'intérieur de cette somme. Cette pondération représente en fait la probabilité que la source q soit dominante dans chaque case temps fréquence (n_g, k) , sur la base des données et de l'hypothèse «naïve» que le vecteur de paramètres est θ^* . On commence donc à voir apparaître les deux étapes principales de notre algorithme EM :

1. Calcul des $\hat{\vartheta}_q, \hat{S}_{n_g}^{(q)}[k]$ sur la base des $\gamma_{n_g}^{(q)}[k]$.
2. Mise à jour des $\gamma_{n_g}^{(q)}[k]$ à partir des $\hat{\vartheta}_q, \hat{S}_{n_g}^{(q)}[k]$, puis retour en 1.

La seconde étape de l'algorithme est souvent appelée étape de séparation, dans le sens où l'on calcule la répartition des sources dans les différentes cases temps-fréquence. Le calcul des $\gamma_{n_g}^{(q)}[k]$ est donné dans l'équation (5.1.27). On note

$$\bar{\gamma}_{n_g}^{(q)}[k] \triangleq \mathcal{CN} \left(Z_{n_g}[k]; 0, \operatorname{Diag} \left(C_{n_g}^{(q)}[k]^*, \dots, C_{n_g}^{(q)}[k]^* \right) \right), \quad (5.1.42)$$

de sorte que

$$\gamma_{n_g}^{(q)}[k] = \frac{\bar{\gamma}_{n_g}^{(q)}[k]}{\sum_{\ell=1}^Q \bar{\gamma}_{n_g}^{(\ell)}[k]}. \quad (5.1.43)$$

Le logarithme de $\bar{\gamma}_{n_g}^{(q)}[k]$ est la log-vraisemblance de $\vartheta_q^*, S_{n_g}^{(q)}[k]^*$ par rapport à $Z_{n_g}[k]$. Mais du fait que $\bar{\gamma}_{n_g}^{(q)}[k]$ est mis à jour à partir de $\vartheta_q^*, S_{n_g}^{(q)}[k]^*$, *i.e.* les $\hat{\vartheta}_q, \hat{S}_{n_g}^{(q)}[k]$ de l'itération précédente, eux-même unis par la relation (5.1.40), il vient immédiatement que

$$\ln \bar{\gamma}_{n_g}^{(q)}[k] = -N_f \left(\ln \det \left[P_{\vartheta_q^*}[k] \hat{C}_{n_g}[k] P_{\vartheta_q^*}[k] + \sigma^2 P_{\vartheta_q^*}^\perp[k] \right] + \frac{1}{\sigma^2} \text{trace} \left[P_{\vartheta_q^*}^\perp[k] \hat{C}_{n_g}[k] \right] \right) + \text{const.} \quad (5.1.44)$$

La méthode est résumée dans l'algorithme 5.1.4. On remarque qu'avec cette méthode, il n'est pas nécessaire d'initialiser les paramètres spectraux de sources, grâce à la relation (5.1.40). Pour parler plus clairement, étant donné une valeur candidate initiale pour ϑ , on déduit directement les valeurs les plus vraisemblables des spectres des sources par rapport aux données sur la base de cet «*initial guess*» sur ϑ , *i.e.* les spectres sont initialisés de manière à être les plus «compatibles» possibles avec les azimuts initiaux. Ceci offre un avantage particulièrement intéressant, dans la mesure où l'initialisation est le point le plus crucial et le plus sensible des algorithmes EM en général, et que dans d'autres variantes de l'EM pour la détection d'azimuts, telles celles présentées aux §5.1.3–5.1.4, l'ensemble des paramètres (spatiaux et spectraux) doivent être initialisés.

5.1.3 Échantillons des sources comme données latentes

Dans cette section on considère des signaux stationnaires pour simplifier, mais on pourrait sans difficulté relaxer cette hypothèse. L'algorithme présenté ici s'apparente à celui défini dans [Ozerov et Févotte, 2010]. Néanmoins, dans cette dernière référence, $\underline{V}_\vartheta[k]$ est totalement inconnu et doit être estimé pour chaque k (*i.e.* chaque bande de fréquence) à la place de ϑ . Une factorisation en matrices non-négatives des spectrogrammes des sources est proposée pour résoudre le problème d'alignement des matrices ainsi estimées sur les différentes composantes fréquentielles des signaux (lié au problème d'ambiguïté de permutation des colonnes de la «matrice de mélange» en *séparation aveugle*). Dans cette thèse, du fait qu'on dispose d'un modèle paramétrique du transfert entre les récepteurs, nous ne sommes pas confrontés à ce problème d'alignement. On suppose que les signaux des sources—aléatoires—et les signaux perçus sont gaussiens dans leur ensemble. Ici, nous considérons des signaux stationnaires, aussi oublions nous donc le double indigage des trames défini dans la section précédente. Plus spécifiquement, nous oublions la notion de groupe de trames, et une trame est référencée ici par l'indice n . La relation qui unit les sources aux signaux perçus dans le domaine temps-fréquence est la suivante

$$\mathbf{Z}_n[k] = \underline{V}_\vartheta[k] \mathbf{S}_n[k] + \mathbf{N}_n[k], \quad (5.1.45)$$

avec

$$\underline{V}_\vartheta[k] = [V_{\vartheta_1}[k], \dots, V_{\vartheta_q}[k], \dots, V_{\vartheta_Q}[k]]. \quad (5.1.46)$$

Ci-dessus, $\mathbf{Z}_n[k]$, $\mathbf{S}_n[k]$, et $\mathbf{N}_n[k]$ désignent les valeurs des transformées de Fourier court terme des signaux multidimensionnels $\mathbf{z}(t)$, $\mathbf{s}(t)$, et $\mathbf{n}(t)$, constitués respectivement de $(\mathbf{z}_1(t), \mathbf{z}_2(t))$, $(\mathbf{s}_1(t), \mathbf{s}_2(t), \dots, \mathbf{s}_Q(t))$, et $(\mathbf{n}_1(t), \mathbf{n}_2(t))$. Cette relation est une approximation, mais on considère que les hypothèses sous-jacentes sont vérifiées, *i.e.* les réponses impulsionnelles $\{h_{\vartheta_q}\}_{q=1, \dots, Q}$ prennent des valeurs négligeables au bout d'un temps suffisamment court devant les durée des fenêtres d'observation (hypothèse généralement abusive dans la pratique, mais peu discutée dans la littérature). Le vecteur de paramètres ϑ à estimer résulte de la concaténation du vecteur ϑ (regroupant les directions d'arrivée des différentes sources) et des coefficients des matrices de covariance des sources aux différentes fréquences $\{C_{\mathbf{S}[k]k\mathbf{S}[k]}\}_{k=1, \dots, k_B}$. On suppose en outre que pour $k \in \{k_1, \dots, k_B\}$, les $V_{\vartheta_q}[k]$ sont linéairement indépendants (ce qui implique entre autres qu'on ne peut considérer deux sources ayant la même direction d'incidence). On considère pour

Algorithme 14 : EM Basé sur la Parcimonie Temps-Fréquence (EMBPTF)

Entrées : $\vartheta^{(\text{init})}, \eta, \text{maxit}$
Sorties : $\hat{\vartheta}, \gamma$

- 1 compt = 0, $\Delta L = \infty$
- 2 **tant que** $\Delta L \geq \eta$ | compt < maxit **faire**
- 3 compt = compt + 1
- 4 **pour** $q = 1, \dots, Q$ **faire**
- 5 **si** compt = 1 **alors**
- 6 $\hat{\vartheta}_q = \vartheta_q^{(\text{init})}$
- 7 **sinon**
- 8 $\hat{\vartheta}_q = \underset{\vartheta_q}{\text{argmin}} \sum_{n_g, k} \gamma_{n_g}^{(q)} [k] \left[\text{Indet} \left(P_{\vartheta_q} [k] \hat{C}_{n_g} [k] P_{\vartheta_q} [k] + \sigma^2 P_{\vartheta_q}^\perp [k] \right) + \frac{1}{\sigma^2} \text{trace} \left(P_{\vartheta_q}^\perp [k] \hat{C}_{n_g} [k] \right) \right]$
- 9 **fin**
- 10 **finpour**
- 11 $L(\hat{\vartheta}) =$

$$\sum_{n_g, k} \ln \left(\sum_q \frac{1}{Q} \exp \left(-N_f \left[\text{Indet} \left(P_{\hat{\vartheta}_q} [k] \hat{C}_{n_g} [k] P_{\hat{\vartheta}_q} [k] + \sigma^2 P_{\hat{\vartheta}_q}^\perp [k] \right) + \frac{1}{\sigma^2} \text{trace} \left(P_{\hat{\vartheta}_q}^\perp [k] \hat{C}_{n_g} [k] \right) \right] \right) \right)$$
- 12 **si** compt > 1 **alors**
- 13 $\Delta L = L(\hat{\vartheta}) - L(\vartheta^*)$
- 14 **fin**
- 15 $\vartheta^* = \hat{\vartheta}$
- 16 **pour** $n_g = 1, \dots, N_k, k = k_1, \dots, k_B$ **faire**
- 17 **pour** $q = 1, \dots, Q$ **faire**
- 18 $\tilde{\gamma}_{nk}(q) = \exp \left(-N_f \left[\text{Indet} \left(P_{\vartheta_q^*} [k] \hat{C}_{n_g} [k] P_{\vartheta_q^*} [k] + \sigma^2 P_{\vartheta_q^*}^\perp [k] \right) + \frac{1}{\sigma^2} \text{trace} \left(P_{\vartheta_q^*}^\perp [k] \hat{C}_{n_g} [k] \right) \right] \right)$
- 19 **finpour**
- 20 $\gamma_{n_g}^{(q)} [k] = \frac{\tilde{\gamma}_{nk}^{(q)} [k]}{\sum_{\ell=1}^Q \tilde{\gamma}_{nk}^{(\ell)} [k]}$
- 21 **finpour**
- 22 **fantant**

simplifier que $C_{\mathbb{N}[k]\mathbb{N}[k]}$ est connue pour tout k (et non nécessairement diagonale). On choisit comme données latentes les $\mathbf{S}_n[k]$, regroupés dans un vecteur \mathbf{S} , de sorte que le vecteur de données complètes soit $\mathbf{X} \triangleq [\mathbf{Z}', \mathbf{S}']'$. Notons qu'il ne faut pas confondre ici $\mathbf{S}_n[k]$ ou sa réalisation $S_n[k]$ avec la quantité portant le même nom définie dans la section précédente. Sous les hypothèses classiques d'indépendance vues tout au long de ce manuscrit, la log-vraisemblance de θ par rapport aux données complètes s'exprime comme suit

$$\ln p(\mathbf{Z}, \mathbf{S} | \theta) = -N \sum_k \left(\text{Indet} C_k + \text{trace} \left(C_k^{-1} \hat{C}_k \right) \right) + \text{const}, \quad (5.1.47)$$

La matrice C_k ayant la forme suivante

$$C_k = \begin{bmatrix} C_{\mathbf{Z}[k]\mathbf{Z}[k]} & C_{\mathbf{Z}[k]\mathbf{S}[k]} \\ C_{\mathbf{S}[k]\mathbf{Z}[k]} & C_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]} \end{bmatrix}, \quad (5.1.48)$$

avec $C_{Z[k]Z[k]} \triangleq \mathbb{E}\{Z_n[k]Z_n[k]^\dagger\}$, $C_{Z[k]S[k]} \triangleq \mathbb{E}\{Z_n[k]S_n[k]^\dagger\}$, $C_{S[k]Z[k]} \triangleq \mathbb{E}\{S_n[k]Z_n[k]^\dagger\}$, et $C_{S[k]S[k]} \triangleq \mathbb{E}\{S_n[k]S_n[k]^\dagger\}$. \hat{C}_k est la forme empirique de C_k construite à partir des données complètes, *i.e.*

$$\hat{C}_k \triangleq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n[k]X_n[k]^\dagger \quad (5.1.49)$$

avec $X_n[k] \triangleq [Z_n[k]', S_n[k]']'$. Noter que pour k donné les statistiques individuelles et conjointes des $Z_n[k]$, $S_n[k]$ sont indépendantes de n , ce qui découle directement de l'hypothèse de stationnarité des signaux. On peut écrire par ailleurs

$$\begin{cases} C_{Z[k]Z[k]} = \underline{V}_\vartheta[k]C_{S[k]S[k]}\underline{V}_\vartheta[k]^\dagger + C_{N[k]N[k]} \\ C_{Z[k]S[k]} = \underline{V}_\vartheta[k]C_{S[k]S[k]} \\ C_{S[k]Z[k]} = C_{S[k]S[k]}\underline{V}_\vartheta[k]^\dagger. \end{cases} \quad (5.1.50)$$

On omet désormais l'indice k pour plus de lisibilité. Le déterminant de C vaut

$$\det C = \det(C_{SS}) \det(C_{ZZ} - C_{ZS}C_{SS}^{-1}C_{SZ}) = \det C_{SS} \det C_{NN}, \quad (5.1.51)$$

et son inverse s'écrit

$$\begin{aligned} C^{-1} &= \begin{bmatrix} (C_{ZZ} - C_{ZS}C_{SS}^{-1}C_{SZ})^{-1} & -(C_{ZZ} - C_{ZS}C_{SS}^{-1}C_{SZ})^{-1}C_{ZS}C_{SS}^{-1} \\ -C_{SS}^{-1}C_{SZ}(C_{ZZ} - C_{ZS}C_{SS}^{-1}C_{SZ})^{-1} & C_{SS}^{-1}C_{SZ}(C_{ZZ} - C_{ZS}C_{SS}^{-1}C_{SZ})^{-1}C_{ZS}C_{SS}^{-1} + C_{SS}^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_{NN}^{-1} & -C_{NN}^{-1}\underline{V}_\theta \\ -\underline{V}_\theta^\dagger C_{NN}^{-1} & \underline{V}_\theta^\dagger C_{NN}^{-1}\underline{V}_\theta + C_{SS}^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.1.52)$$

On a donc, en notant \hat{C}_{ZZ} , \hat{C}_{ZS} , \hat{C}_{SS} les formes empiriques de C_{ZZ} , C_{ZS} , C_{SS} (*i.e.* les sous-blocs de \hat{C}),

$$\begin{aligned} \text{trace}(C^{-1}\hat{C}) &= \text{trace}(C_{NN}^{-1}\hat{C}_{ZZ}) + \text{trace}(C_{SS}^{-1}\hat{C}_{SS}) \\ &\quad + \text{trace}(\underline{V}_\theta^\dagger C_{NN}^{-1}\underline{V}_\theta \hat{C}_{SS}) - 2\text{Re}(\text{trace}(\underline{V}_\theta^\dagger C_{NN}^{-1}\hat{C}_{ZS})), \end{aligned} \quad (5.1.53)$$

de sorte que la log-vraisemblance s'écrit finalement

$$\begin{aligned} \ln p(Z, S|\theta) &= -N \sum_k \left(\ln \det C_{N[k]N[k]} + \ln \det C_{S[k]S[k]} + \text{trace}(C_{N[k]N[k]}^{-1}\hat{C}_{Z[k]Z[k]}) + \right. \\ &\quad \left. \text{trace}(C_{S[k]S[k]}^{-1}\hat{C}_{S[k]S[k]}) + \text{trace}(\underline{V}_\theta[k]^\dagger C_{N[k]N[k]}^{-1}\underline{V}_\theta[k]\hat{C}_{S[k]S[k]}) - \right. \\ &\quad \left. 2\text{Re}[\text{trace}(\underline{V}_\theta[k]^\dagger C_{N[k]N[k]}^{-1}\hat{C}_{Z[k]S[k]})] \right) + \text{const.} \end{aligned} \quad (5.1.54)$$

En dérivant cette log-vraisemblance par rapport à $C_{S[k]S[k]}$ et en cherchant quand cette dérivée s'annule, on obtient l'EMV de $C_{S[k]S[k]}$, qui n'est autre que la matrice de covariance empirique des échantillons des sources. La dérivée partielle en question s'écrit (en omettant l'indice k)

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \ln p(z, s|\theta)}{\partial C_{SS}} = -\frac{\partial}{\partial C_{SS}} (\ln \det C_{SS}) - \frac{\partial}{\partial C_{SS}} \left(\text{trace}(C_{SS}^{-1}\hat{C}_{SS}) \right) \quad (5.1.55)$$

$$= -(C_{SS}^{-1})' + (C_{SS}^{-1}\hat{C}_{SS}C_{SS}^{-1})', \quad (5.1.56)$$

de sorte que

$$\frac{\partial \ln p(z, s | \theta)}{\partial C_{SS}} = \mathbb{O} \Leftrightarrow C_{SS} = \hat{C}_{SS}. \quad (5.1.57)$$

L'**EMV** de ϑ lorsque les données latentes sont disponibles s'exprime donc ainsi

$$\hat{\vartheta} = \operatorname{argmin}_{\vartheta} \sum_k \left(\operatorname{trace} \left(\underline{Y}_{\vartheta}[k]^{\dagger} C_{\mathbb{N}[k]\mathbb{N}[k]}^{-1} \underline{Y}_{\vartheta}[k] \hat{C}_{\mathbf{s}[k]\mathbf{s}[k]} \right) - \right. \\ \left. 2\operatorname{Re} \left\{ \operatorname{trace} \left(\underline{Y}_{\vartheta}[k]^{\dagger} C_{\mathbb{N}[k]\mathbb{N}[k]}^{-1} \hat{C}_{\mathbf{z}[k]\mathbf{s}[k]} \right) \right\} \right). \quad (5.1.58)$$

Du fait que les données latentes ne sont pas disponibles, on calcule, dans une optique d'itération, l'espérance de la log-vraisemblance des données complètes conditionnellement aux données et à l'hypothèse que le vecteur de paramètres vaut θ^* . On cherche donc l'expression de la fonction auxiliaire

$$Q(\theta, \theta^*) = \mathbb{E} \{ \ln p(\mathbf{Z}, \mathbf{S} | \theta) | Z, \theta^* \}. \quad (5.1.59)$$

En prenant l'espérance de (5.1.54) on a, de manière immédiate

$$Q(\theta, \theta^*) = -N \sum_k \left(\ln \det C_{\mathbb{N}[k]\mathbb{N}[k]} + \ln \det C_{\mathbf{s}[k]\mathbf{s}[k]} + \operatorname{trace} \left(C_{\mathbb{N}[k]\mathbb{N}[k]}^{-1} \hat{C}_{\mathbf{z}[k]\mathbf{z}[k]} \right) + \right. \\ \left. \operatorname{trace} \left(C_{\mathbf{s}[k]\mathbf{s}[k]}^{-1} \tilde{C}_{\mathbf{s}[k]\mathbf{s}[k]} \right) + \operatorname{trace} \left(\underline{Y}_{\theta}[k]^{\dagger} C_{\mathbb{N}[k]\mathbb{N}[k]}^{-1} \underline{Y}_{\theta}[k] \tilde{C}_{\mathbf{s}[k]\mathbf{s}[k]} \right) - \right. \\ \left. 2\operatorname{Re} \left[\operatorname{trace} \left(\underline{Y}_{\theta}[k]^{\dagger} C_{\mathbb{N}[k]\mathbb{N}[k]}^{-1} \tilde{C}_{\mathbf{z}[k]\mathbf{s}[k]} \right) \right] \right) + \operatorname{const} \quad (5.1.60)$$

avec

$$\tilde{C}_{\mathbf{s}[k]\mathbf{s}[k]} = \mathbb{E} \left\{ \hat{C}_{\mathbf{s}[k]\mathbf{s}[k]} | Z, \theta^* \right\} = \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{N} \sum_n \mathbf{s}_n[k] \mathbf{s}_n[k]^{\dagger} | Z, \theta^* \right\}, \quad (5.1.61)$$

$$\tilde{C}_{\mathbf{z}[k]\mathbf{s}[k]} = \mathbb{E} \left\{ \hat{C}_{\mathbf{z}[k]\mathbf{s}[k]} | Z, \theta^* \right\} = \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{N} \sum_n \mathbf{z}_n[k] \mathbf{s}_n[k]^{\dagger} | Z, \theta^* \right\}. \quad (5.1.62)$$

La valeur de θ correspondant au maximum de la fonction auxiliaire est donc

$$\hat{\vartheta} = \operatorname{argmin}_{\vartheta} \sum_k \left(\operatorname{trace} \left(\underline{Y}_{\vartheta}[k]^{\dagger} C_{\mathbb{N}[k]\mathbb{N}[k]}^{-1} \underline{Y}_{\vartheta}[k] \tilde{C}_{\mathbf{s}[k]\mathbf{s}[k]} \right) - \right. \\ \left. 2\operatorname{Re} \left[\operatorname{trace} \left(\underline{Y}_{\vartheta}[k]^{\dagger} C_{\mathbb{N}[k]\mathbb{N}[k]}^{-1} \tilde{C}_{\mathbf{z}[k]\mathbf{s}[k]} \right) \right] \right), \quad (5.1.63)$$

Un constat remarquable ici est que $\{C_{\mathbf{z}[k]\mathbf{z}[k]}, C_{\mathbf{z}[k]\mathbf{s}[k]}, C_{\mathbf{s}[k]\mathbf{s}[k]}\}_{k=1, \dots, k_B}$ constituent une statistique suffisante du problème, et que la vraisemblance des paramètres par rapport à cette statistique suffisante a une structure particulière, appelée forme exponentielle [Dempster *et al.*, 1977]. De ce fait, l'argument du maximum de la fonction auxiliaire a exactement la même expression que l'**EMV** des données complètes, mais en remplaçant les composantes inconnues des statistiques suffisantes par leurs espérances conditionnelles (*i.e.* en remplaçant $C_{\mathbf{z}[k]\mathbf{s}[k]}$, $C_{\mathbf{s}[k]\mathbf{s}[k]}$ par $\tilde{C}_{\mathbf{z}[k]\mathbf{s}[k]}$, $\tilde{C}_{\mathbf{s}[k]\mathbf{s}[k]}$ respectivement). Conditionnellement à $Z_n[k]$ et θ^* , $\mathbf{S}_n[k]$ suit une loi normale de **ddp** (règle de Bayes dans le cas linéaire gaussien)

$$p(\mathbf{S}_n[k] | Z_n[k], \theta^*) = \mathcal{CN} \left(\mathbf{S}_n[k]; \hat{\mathbf{S}}_n[k], P_k \right), \quad (5.1.64)$$

avec

$$\hat{S}_n[k] = \mathbb{E} \{ \mathbf{S}_n[k] | Z_n[k], \vartheta^* \} = K_k^* Z_n[k], \quad (5.1.65)$$

$$\begin{aligned} P_k &= \mathbb{E} \left\{ \left(\mathbf{S}_n[k] - \hat{S}_n[k] \right) \left(\mathbf{S}_n[k] - \hat{S}_n[k] \right)^\dagger \middle| Z_n[k], \vartheta^* \right\} \\ &= C_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]}^* - K_k^* \underline{V}_{\vartheta^*}[k] C_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]}^* \end{aligned} \quad (5.1.66)$$

et K_k^* donné par

$$K_k^* = C_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]}^* \underline{V}_{\vartheta^*}[k]^\dagger \left(\underline{V}_{\vartheta^*}[k] C_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]}^* \underline{V}_{\vartheta^*}[k]^\dagger + C_{\mathbf{N}[k]\mathbf{N}[k]} \right)^{-1}. \quad (5.1.67)$$

On rappelle que $\{\vartheta^*, \{C_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]}^*\}_{k=k_1, \dots, k_B}\}$ constituent les composantes de θ^* , le vecteur de paramètres estimé à l'itération précédente. Il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ \mathbf{S}_n[k] \mathbf{S}_n[k]^\dagger | Z_n[k], \theta^* \} &= P_k + \hat{S}_n[k] \hat{S}_n[k]^\dagger \\ &= C_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]}^* - K_k^* \underline{V}_{\vartheta^*}[k] C_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]}^* + K_k^* Z_n[k] Z_n[k]^\dagger K_k^{*\dagger}, \end{aligned} \quad (5.1.68)$$

et finalement que

$$\mathbb{E} \left\{ \hat{C}_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]} \middle| Z, \theta^* \right\} = C_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]}^* - K_k^* \underline{V}_{\vartheta^*}[k] C_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]}^* + K_k^* \hat{C}_{\mathbf{Z}[k]\mathbf{Z}[k]} K_k^{*\dagger}. \quad (5.1.69)$$

De la même manière, on a

$$\mathbb{E} \left\{ \hat{C}_{\mathbf{Z}[k]\mathbf{S}[k]} \middle| Z, \theta^* \right\} = \hat{C}_{\mathbf{Z}[k]\mathbf{Z}[k]} K_k^{*\dagger}. \quad (5.1.70)$$

En pratique, on met en œuvre un algorithme d'Espérance-Maximisation Généralisé (EMG) au lieu de l'EM pour éviter d'avoir à maximiser une fonction de Q paramètres (à la place on maximise successivement Q fonctions de 1 paramètre). Ainsi on ne trouve pas le maximum de $Q(\theta, \theta^*)$, mais on trouve un θ qui garantit que $Q(\theta, \theta^*) \geq Q(\theta^*, \theta^*)$. La procédure est résumée dans l'algorithme 15.

5.1.4 Sources Indépendantes

L'algorithme qui est proposé ici présente de grandes similitudes avec celui présenté dans [Feder et Weinstein, 1988]. Nous conservons les hypothèses et notations du §5.1.3, à ceci près que nous considérons des sources (resp. bruits) mutuellement indépendantes (resp. indépendants, identiquement distribués, temporellement blancs et de variance σ^2 connue) *i.e.* C_k (resp. $C_{\mathbf{N}[k]\mathbf{N}[k]}$) est supposée diagonale (resp. proportionnelle à la matrice identité). Notons $\mathbf{S}_n^{(q)}[k]$ la $q^{\text{ième}}$ composante de $\mathbf{S}_n[k]$ (à ne pas confondre avec la même notation introduite au §5.1.2, désignant la DSP de la source q dans la case temps-fréquence (n, k) sous hypothèse que celle-ci est dominante). Dans le cas particulier de sources indépendantes, l'équation (5.1.45) se simplifie en

$$\mathbf{Z}_n[k] = \sum_{q=1}^Q V_{\vartheta_q}[k] \mathbf{S}_n^{(q)}[k] + \mathbf{N}_n[k] = \sum_{q=1}^Q \left(V_{\vartheta_q}[k] \mathbf{S}_n^{(q)}[k] + \mathbf{N}_n^{(q)}[k] \right) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{X}_n^{(q)}[k] \quad (5.1.71)$$

avec

$$\mathbf{X}_n^{(q)}[k] = V_{\vartheta_q}[k] \mathbf{S}_n^{(q)}[k] + \mathbf{N}_n^{(q)}[k], \quad \sum_{q=1}^Q \mathbf{N}_n^{(q)}[k] = \mathbf{N}_n[k], \quad (5.1.72)$$

Puisque les sources sont supposées indépendantes, les paramètres spectraux à estimer se réduisent aux coefficients diagonaux des matrices $\{C_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]}\}_{k=k_1, \dots, k_B}$ définies au §5.1.3, *i.e.* Les DSP

Algorithme 15 : EMG Basé sur les Sources comme Données Latentes (EMGBSDL)

Entrées : $\vartheta^{(\text{init})}, \left\{ C_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]}^{(\text{init})} \right\}_{k=k_1, \dots, k_B}, \eta, \text{maxit}$

Sorties : $\hat{\vartheta}, \left\{ \hat{C}_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]} \right\}_{k=k_1, \dots, k_B}$

```

1 compt = 0, ΔL = ∞
2 tant que ΔL ≥ η | compt < maxit faire
3   compt = compt + 1
4   si compt = 1 alors
5     |  $\hat{\vartheta} = \vartheta^{(\text{init})}$ 
6     |  $\left\{ \hat{C}_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]} \right\}_{k=k_1, \dots, k_B} = \left\{ C_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]}^{(\text{init})} \right\}_{k=k_1, \dots, k_B}$ 
7   sinon
8     | pour  $q = 1, \dots, Q$  faire
9     |    $\hat{\vartheta}_q =$ 
10    |    $\text{argmin}_{\vartheta_q} \sum_k \left( \text{trace} \left( \mathbf{V}_{\hat{\vartheta}}^{(q)}[k]^\dagger C_{\mathbf{N}[k]\mathbf{N}[k]}^{-1} \mathbf{V}_{\hat{\vartheta}}^{(q)}[k] \tilde{C}_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]} \right) - 2\text{Re} \left[ \text{trace} \left( \mathbf{V}_{\hat{\vartheta}}^{(q)}[k]^\dagger C_{\mathbf{N}[k]\mathbf{N}[k]}^{-1} \tilde{C}_{\mathbf{Z}[k]\mathbf{S}[k]} \right) \right] \right)$ 
11    |   avec  $\mathbf{V}_{\hat{\vartheta}}^{(q)}[k] = \mathbf{V}_{\hat{\vartheta}_1, \dots, \hat{\vartheta}_{q-1}, \hat{\vartheta}_q, \vartheta_{q+1}^*, \dots, \vartheta_Q^*}[k]$ 
12    |    $\left\{ \hat{C}_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]} \right\}_{k=1, \dots, k_B} = \left\{ \tilde{C}_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]} \right\}_{k=1, \dots, k_B}$ 
13  | finpour
14  |  $L(\hat{\vartheta}, \left\{ \hat{C}_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]} \right\}_{k=k_1, \dots, k_B}) = -N \sum_k \left( \text{indet} C_{\mathbf{Z}[k]\mathbf{Z}[k]} + \text{trace} \left( C_{\mathbf{Z}[k]\mathbf{Z}[k]}^{-1} \hat{C}_{\mathbf{Z}[k]\mathbf{Z}[k]} \right) \right)$ 
15  | avec  $C_{\mathbf{Z}[k]\mathbf{Z}[k]} = \mathbf{V}_{\hat{\vartheta}}[k] \hat{C}_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]} \mathbf{V}_{\hat{\vartheta}}[k]^\dagger + C_{\mathbf{N}[k]\mathbf{N}[k]}$ 
16  | si compt > 1 alors
17  |    $\Delta L = L(\hat{\vartheta}, \left\{ \hat{C}_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]} \right\}_{k=k_1, \dots, k_B}) - L(\vartheta^*, \left\{ C_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]}^* \right\}_{k=k_1, \dots, k_B})$ 
18  | fin
19  |  $\vartheta^* = \hat{\vartheta} ; \left\{ C_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]}^* \right\}_{k=k_1, \dots, k_B} = \left\{ \hat{C}_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]} \right\}_{k=k_1, \dots, k_B}$ 
20  | pour  $k = 1, \dots, k_B$  faire
21  |    $K_k^* = C_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]}^* \mathbf{V}_{\vartheta^*}[k]^\dagger \left( \mathbf{V}_{\vartheta^*}[k] C_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]}^* \mathbf{V}_{\vartheta^*}[k]^\dagger + C_{\mathbf{N}[k]\mathbf{N}[k]} \right)^{-1}$ 
22  |    $\tilde{C}_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]} = C_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]}^* - K_k^* \mathbf{V}_{\vartheta^*}[k] C_{\mathbf{S}[k]\mathbf{S}[k]}^* + K_k^* \hat{C}_{\mathbf{Z}[k]\mathbf{Z}[k]} K_k^{*\dagger}$ 
23  |    $\tilde{C}_{\mathbf{Z}[k]\mathbf{S}[k]} = \hat{C}_{\mathbf{Z}[k]\mathbf{Z}[k]} K_k^{*\dagger}$ 
24  | finpour
25  fintant

```

$\{S_{\mathbf{s}_q \mathbf{s}_q}\}_{q=1, \dots, Q}$ des sources en les indices fréquentiels $k = k_1, \dots, k_B$. Sans perte de généralité, on peut choisir les $\{\mathbf{N}_n^{(q)}[k]\}_{q=1, \dots, Q}$ centrés gaussiens dans leur ensemble et *iid*, avec quel que soit $q \in \{1, \dots, Q\}$

$$C_{\mathbf{N}^{(q)}[k]\mathbf{N}^{(q)}[k]} = \frac{1}{Q} C_{\mathbf{N}[k]\mathbf{N}[k]} = \frac{\sigma^2}{Q} \mathbb{I}_2. \quad (5.1.73)$$

quel que soit n , la matrice de covariance de $\mathbf{Z}_n[k]$ s'écrit donc

$$C_{\mathbf{Z}[k]\mathbf{Z}[k]} = \sum_{q=1}^Q \left(V_{\vartheta_q}[k] S_{\mathbf{s}_q \mathbf{s}_q}[k] V_{\vartheta_q}[k]^\dagger + \frac{\sigma^2}{Q} \mathbb{I}_2 \right). \quad (5.1.74)$$

On construit le vecteur $\mathbf{X}_n[k]$ comme suit

$$\mathbf{X}_n[k] = \left[\left(\mathbf{X}_n^{(1)}[k] \right)', \dots, \left(\mathbf{X}_n^{(q)}[k] \right)', \dots, \left(\mathbf{X}_n^{(Q)}[k] \right)' \right]', \quad (5.1.75)$$

de sorte que $\mathbf{X}_n[k]$ et $\mathbf{Z}_n[k]$ sont unis par la relation suivante

$$\mathbf{Z}_n[k] = H \mathbf{X}_n[k], \text{ avec } H = \underbrace{[\mathbb{I}_2, \dots, \mathbb{I}_2]}_{Q \text{ fois}}. \quad (5.1.76)$$

On note que par construction, quel que soit $(n, k) \in \{1, \dots, N\} \times \{k_1, \dots, k_B\}$ et quels que soient $q_1, q_2 \in \{1, \dots, Q\}$, $\mathbf{X}_n^{(q_1)}[k]$ et $\mathbf{X}_n^{(q_2)}[k]$ sont mutuellement indépendants. On définit ici

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1[k_1]', \mathbf{X}_2[k_1]', \dots, \mathbf{X}_N[k_1], \mathbf{X}_1[k_2], \dots, \mathbf{X}_N[k_B]]' \quad (5.1.77)$$

comme le vecteur de données complètes de notre problème. Ce choix est judicieux, du fait que si une réalisation X de \mathbf{X} était donnée, il suffirait d'employer, pour chaque source q , l'algorithme mono-source présenté au chapitre 3 à partir de la réalisation des $\mathbf{X}_n^{(q)}[k]$ pour estimer θ . La log-vraisemblance des paramètres par rapport aux données complètes s'écrit (en omettant les termes constants sans importance)

$$\ln p(X|\theta) = \sum_{q=1}^Q \sum_{n, k} \ln p \left(X_n^{(q)}[k] | \vartheta_q, S_{\mathbf{s}_q \mathbf{s}_q}[k] \right) \quad (5.1.78)$$

$$= -N \sum_{q=1}^Q \sum_{k=k_1}^{k_B} \left(\ln \det C_{\mathbf{X}^{(q)}[k]\mathbf{X}^{(q)}[k]} + \text{trace} \left(\left(C_{\mathbf{X}^{(q)}[k]\mathbf{X}^{(q)}[k]} \right)^{-1} \hat{C}_{\mathbf{X}^{(q)}[k]\mathbf{X}^{(q)}[k]} \right) \right), \quad (5.1.79)$$

avec

$$C_{\mathbf{X}^{(q)}[k]\mathbf{X}^{(q)}[k]} = V_{\vartheta_q}[k] S_{\mathbf{s}_q \mathbf{s}_q}[k] V_{\vartheta_q}[k]^\dagger + \frac{\sigma^2}{Q} \mathbb{I}_2 \quad (5.1.80)$$

et

$$\hat{C}_{\mathbf{X}^{(q)}[k]\mathbf{X}^{(q)}[k]} = \frac{1}{N} \sum_n X_n^{(q)}[k] X_n^{(q)}[k]^\dagger. \quad (5.1.81)$$

la forme empirique de $C_{\mathbf{X}^{(q)}[k]\mathbf{X}^{(q)}[k]}$. Selon les résultats du théorème 3.1.4, les paramètres maximisant cette log-vraisemblance sont donnés par

$$\hat{\vartheta}_q = \underset{\vartheta_q}{\operatorname{argmin}} \sum_{k=k_1}^{k_B} \left(\ln \det \left(P_{\vartheta_q}[k] \hat{C}_{\mathbf{X}^{(q)}[k]\mathbf{X}^{(q)}[k]} P_{\vartheta_q}[k] + \frac{\sigma^2}{Q} P_{\vartheta_q}^\perp[k] \right) + \frac{Q}{\sigma^2} \text{trace} \left(P_{\vartheta_q}^\perp[k] \hat{C}_{\mathbf{X}^{(q)}[k]\mathbf{X}^{(q)}[k]} \right) \right), \quad (5.1.82)$$

et par

$$\hat{S}_{\mathbf{s}_q \mathbf{s}_q}[k] = \left(V_{\hat{\vartheta}_q}^\dagger[k] V_{\hat{\vartheta}_q}[k] \right)^{-1} V_{\hat{\vartheta}_q}^\dagger[k] \left(\hat{C}_{\mathbf{x}^{(a)}[k] \mathbf{x}^{(a)}[k]} - \frac{\sigma^2}{Q} \mathbb{I}_2 \right) V_{\hat{\vartheta}_q}[k] \left(V_{\hat{\vartheta}_q}^\dagger[k] V_{\hat{\vartheta}_q}[k] \right)^{-1}. \quad (5.1.83)$$

Encore une fois, ces estimés ne peuvent être calculés directement, du fait qu'ils reposent sur une réalisation du vecteur de données complètes \mathbf{X} . En prenant l'espérance de 5.1.79 conditionnellement aux données et à θ^* on obtient la fonction auxiliaire suivante

$$Q(\theta, \theta^*) = -N \sum_{q=1}^Q \sum_{k=k_1}^{k_B} \left(\text{Indet} C_{\mathbf{x}^{(a)}[k] \mathbf{x}^{(a)}[k]} + \text{trace} \left(\left(C_{\mathbf{x}^{(a)}[k] \mathbf{x}^{(a)}[k]} \right)^{-1} \tilde{C}_{\mathbf{x}^{(a)}[k] \mathbf{x}^{(a)}[k]} \right) \right), \quad (5.1.84)$$

où

$$\tilde{C}_{\mathbf{x}^{(a)}[k] \mathbf{x}^{(a)}[k]} \triangleq \mathbb{E} \left\{ \hat{C}_{\mathbf{x}^{(a)}[k] \mathbf{x}^{(a)}[k]} | Z, \theta^* \right\}. \quad (5.1.85)$$

On s'intéresse maintenant au développement de (5.1.85). Pour ce faire, on s'intéresse à

$$\tilde{C}_{\mathbf{x}[k] \mathbf{x}[k]} = \mathbb{E} \left\{ \hat{C}_{\mathbf{x}[k] \mathbf{x}[k]} | Z, \theta^* \right\} = \text{diag} \left(\tilde{C}_{\mathbf{x}^{(1)}[k] \mathbf{x}^{(1)}[k]}, \dots, \tilde{C}_{\mathbf{x}^{(a)}[k] \mathbf{x}^{(a)}[k]}, \dots, \tilde{C}_{\mathbf{x}^{(Q)}[k] \mathbf{x}^{(Q)}[k]} \right). \quad (5.1.86)$$

La **ddp** de $\mathbf{x}_n[k]$ conditionnellement à $Z_n[k]$ et θ^* s'écrit (règle de Bayes dans le cas linéaire gaussien)

$$p(X_n[k] | Z_n[k], \theta^*) = \mathcal{CN} \left(X_n[k]; \hat{X}_n[k], P_k \right), \quad (5.1.87)$$

avec

$$\begin{cases} \hat{X}_n[k] &= K_k^* Z_n[k] \\ P_k &= C_{\mathbf{x}[k] \mathbf{x}[k]}^* - K_k^* H C_{\mathbf{x}[k] \mathbf{x}[k]}^* \end{cases} \quad (5.1.88)$$

et

$$K_k^* = C_{\mathbf{x}[k] \mathbf{x}[k]}^* H' \left(H C_{\mathbf{x}[k] \mathbf{x}[k]}^* H' \right)^{-1}. \quad (5.1.89)$$

La matrice $C_{\mathbf{x}[k] \mathbf{x}[k]}^*$ intervenant dans (5.1.88)–(5.1.89) s'exprime par

$$C_{\mathbf{x}[k] \mathbf{x}[k]}^* = \text{diag} \left(C_{\mathbf{x}^{(1)}[k] \mathbf{x}^{(1)}[k]}^*, \dots, C_{\mathbf{x}^{(a)}[k] \mathbf{x}^{(a)}[k]}^*, \dots, C_{\mathbf{x}^{(Q)}[k] \mathbf{x}^{(Q)}[k]}^* \right). \quad (5.1.90)$$

avec

$$C_{\mathbf{x}^{(a)}[k] \mathbf{x}^{(a)}[k]}^* = V_{\hat{\vartheta}_q}^* S_{\mathbf{s}_q \mathbf{s}_q}^*[k] V_{\hat{\vartheta}_q}^{*\dagger} + \frac{\sigma^2}{Q} \mathbb{I}_2. \quad (5.1.91)$$

Pour rappel, $\left\{ \vartheta_q^*, \{S_{\mathbf{s}_q \mathbf{s}_q}^*[k]\}_{k=k_1, \dots, k_B} \right\}_{q=1, \dots, Q}$ sont les composantes du vecteur θ^* , l'estimé du vecteur de paramètres à l'itération précédente. Il vient alors

$$\mathbb{E} \{ \mathbf{x}_n[k] \mathbf{x}_n[k]^\dagger | Z_n[k], \theta^* \} = P_k + \hat{X}_n[k] \hat{X}_n[k]^\dagger = C_{\mathbf{z}[k] \mathbf{z}[k]}^* - K_k^* H C_{\mathbf{z}[k] \mathbf{z}[k]}^* + K_k^* Z_n[k] Z_n[k]^\dagger K_k^{*\dagger}, \quad (5.1.92)$$

puis

$$\tilde{C}_{\mathbf{x}[k] \mathbf{x}[k]} = C_{\mathbf{x}[k] \mathbf{x}[k]}^* - K_k^* H C_{\mathbf{x}[k] \mathbf{x}[k]}^* + K_k^* \hat{C}_{\mathbf{z}[k] \mathbf{z}[k]} K_k^{*\dagger}. \quad (5.1.93)$$

En utilisant les structures bloc-diagonales de $\tilde{C}_{\mathbf{x}[k] \mathbf{x}[k]}$ et $C_{\mathbf{x}[k] \mathbf{x}[k]}^*$, ainsi que l'expression de H donnée en (5.1.76), on obtient finalement, après quelques calculs

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{\mathbf{x}^{(a)}[k] \mathbf{x}^{(a)}[k]} &= C_{\mathbf{x}^{(a)}[k] \mathbf{x}^{(a)}[k]}^* - C_{\mathbf{x}^{(a)}[k] \mathbf{x}^{(a)}[k]}^* \left(C_{\mathbf{z}[k] \mathbf{z}[k]}^* \right)^{-1} C_{\mathbf{x}^{(a)}[k] \mathbf{x}^{(a)}[k]}^* + \\ &C_{\mathbf{x}^{(a)}[k] \mathbf{x}^{(a)}[k]}^* \left(C_{\mathbf{z}[k] \mathbf{z}[k]}^* \right)^{-1} \hat{C}_{\mathbf{z}[k] \mathbf{z}[k]} \left(C_{\mathbf{z}[k] \mathbf{z}[k]}^* \right)^{-1} C_{\mathbf{x}^{(a)}[k] \mathbf{x}^{(a)}[k]}^*, \end{aligned} \quad (5.1.94)$$

avec

$$C_{z[k]z[k]}^* = \sum_{q=1}^Q C_{x^{(q)}[k]x^{(q)}[k]}^*. \quad (5.1.95)$$

Les équations (5.1.84)–(5.1.94) constituent ainsi les deux étapes de notre algorithme, résumé en algorithme 16. On remarque que pour des sources indépendantes, la fonction auxiliaire $Q(\theta, \theta^*)$ se décompose en la somme de q fonctions $Q_q(\theta_q, \theta_q^*)$, où θ_q réunit les paramètres spatiaux et spectraux relatifs à la source q . À la différence de la méthode présentée au §5.1.3, il n'est donc pas nécessaire d'avoir recours à l'EMG.

5.1.5 Discussions

On peut développer de nombreuses variantes des trois algorithmes décrits plus haut, en fonction de la quantité d'information *a priori* que l'on a sur le bruit, du modèle que l'on utilise pour ce bruit, etc. dans la veine des différentes variantes proposée dans le cas mono-source au chapitre 3. On peut également étendre ces méthodes à des sources dont le nombre est inconnu, en exploitant par exemple le critère AIC pour la détection du nombre de sources. Ces algorithmes seront évalués dans des travaux futurs à court terme. En particulier, il faudra tester l'influence de nombreux paramètres sur leurs performances : paramètres des transformées de Fourier court-terme (taille des trames, et groupes de trames, recouvrement, etc.), « finesse » de la grille discrète des valeurs d'azimuts testées dans la procédure, procédure d'initialisation de l'algorithme, etc. Il faudra également voir si certaines variantes de l'algorithme EM permettent une amélioration des résultats (*e.g.* EM Stochastique pour réduire le risque de « rester piégé » dans un maximum local du critère). Dans tous les cas, nous pensons que les approches présentées ici offrent des perspectives bien plus prometteuses que les méthodes usuellement employées en robotique, tels que la recherche des extrema d'une corrélation croisée généralisée.

5.2 FILTRAGE MULTI-SOURCES

Le problème du filtrage multi-sources présente de nombreuses difficultés supplémentaires par rapport au cas mono-source : le nombre de sources peut varier au cours du temps (apparition ou disparition d'un locuteur par exemple) et les observations (*i.e.* les azimuts estimés des sources à partir d'observations court-terme des flux audio) ne sont pas ordonnées ; en d'autres termes, les azimuts détectés ne sont pas associés *a priori* aux différentes cibles à localiser dans la scène. Concrètement, dans un jeu d'observations donné, un sous-ensemble des observations peut renseigner sur les positions des sources dans la scène (non-nécessairement toutes) et un autre sous-ensemble peut constituer de fausses observations, indépendantes des positions des sources. Il faut alors synthétiser un schéma récursif capable de détecter le nombre de sources dans la scène au cours du temps, et, pour chaque source, estimer son état, sur la base de jeux d'observations très ambigus : azimuts des sources réellement présentes dans la scène parfois non détectés instantanément ; fausses détections en raison de la courte durée d'observation des signaux ; non-stationarité des sources, du bruit ; etc.

Il existe des contributions reconnues au filtrage multi-cibles. Certaines reposent sur l'hypothèse selon laquelle le nombre de sources est connu et n'évolue pas au cours du temps. La méthode la plus rudimentaire consiste à initialiser un filtre mono-cible pour chaque source, et, à chaque jeu d'observations, à assimiler dans celui-ci l'observation la plus en accord avec les statistiques qu'il produit concernant la prédiction de l'observation.

Dans [Bar-Shalom et Li, 1995], un filtre JPDAF (*Joint Probabilistic Data Association Filter*) est proposé. Ce filtre se veut une extension du PDAF au cas multi-cibles. À chaque itération, toutes les associations possibles observation-cible sont envisagées, et leurs probabilités *a posteriori*

Algorithme 16 : EM Basé sur l'Indépendance des Sources (EMBS)

Entrées : $\vartheta^{(\text{init})}, \{S_{s_q s_q}^{(\text{init})}[k]\}_{k=k_1, \dots, k_B, q=1, \dots, Q}, \eta, \text{maxit}$

Sorties : $\hat{\vartheta}$

- 1 compt = 0, $\Delta L = \infty$
- 2 **tant que** $\Delta L \geq \eta$ | compt < maxit **faire**
- 3 compt = compt + 1
- 4 **si** compt = 1 **alors**
- 5 $\hat{\vartheta} = \vartheta^{(\text{init})}$
- 6 **sinon**
- 7 **pour** $q = 1, \dots, Q$ **faire**
- 8 $\hat{\vartheta}_q =$
 $\operatorname{argmin}_{\vartheta_q} \sum_k \left(\operatorname{Indet} \left(P_{\vartheta_q}[k] \tilde{C}_{\mathbf{x}^{(q)}[k] \mathbf{x}^{(q)}[k]} P_{\vartheta_q}[k] + \frac{\sigma^2}{Q} P_{\vartheta_q}^\perp[k] \right) + \frac{Q}{\sigma^2} \operatorname{trace} \left(P_{\vartheta_q}^\perp[k] \tilde{C}_{\mathbf{x}^{(q)}[k] \mathbf{x}^{(q)}[k]} \right) \right)$
- 9 **finpour**
- 10 **fin**
- 11 $L(\hat{\theta}) = -N \sum_k \left(\operatorname{Indet} C_{\mathbf{z}[k] \mathbf{z}[k]} + \operatorname{trace} \left(C_{\mathbf{z}[k] \mathbf{z}[k]}^{-1} \hat{C}_{\mathbf{z}[k] \mathbf{z}[k]} \right) \right)$
- 12 avec $C_{\mathbf{z}[k] \mathbf{z}[k]} = \begin{cases} \sum_q \left(P_{\hat{\vartheta}_q}[k] \tilde{C}_{\mathbf{x}^{(q)}[k] \mathbf{x}^{(q)}[k]} P_{\hat{\vartheta}_q}[k] + \frac{\sigma^2}{Q} P_{\hat{\vartheta}_q}[k] \right) & \text{si compt} > 1 \\ \sum_q V_{\theta_q^*}[k] S_{s_q s_q}^{(\text{init})}[k] V_{\theta_q^*}[k]^\dagger + \sigma^2 \mathbb{I}_2 & \text{sinon} \end{cases}$
- 13 **si** compt > 1 **alors**
- 14 $\Delta L = L(\hat{\theta}) - L(\theta^*)$
- 15 **fin**
- 16 $\theta^* = \hat{\theta}$
- 17 **pour** $k = 1, \dots, k_B$ **faire**
- 18 **pour** $q = 1, \dots, Q$ **faire**
- 19 $C_{\mathbf{x}^{(q)}[k] \mathbf{x}^{(q)}[k]}^* = \begin{cases} P_{\theta_q^*}[k] \tilde{C}_{\mathbf{x}^{(q)}[k] \mathbf{x}^{(q)}[k]} P_{\theta_q^*}[k] + \frac{\sigma^2}{Q} P_{\theta_q^*}^\perp[k] & \text{si compt} > 1 \\ V_{\theta_q^*}[k] V_{\theta_q^*}[k]^\dagger S_{s_q s_q}^{(\text{init})}[k] + \frac{\sigma^2}{Q} \mathbb{I}_2 & \text{sinon} \end{cases}$
- 20 **finpour**
- 21 $C_{\mathbf{z}[k] \mathbf{z}[k]}^* = \sum_q C_{\mathbf{x}^{(q)}[k] \mathbf{x}^{(q)}[k]}^*$
- 22 **pour** $q = 1, \dots, Q$ **faire**
- 23 $\tilde{C}_{\mathbf{x}^{(q)}[k] \mathbf{x}^{(q)}[k]} = C_{\mathbf{x}^{(q)}[k] \mathbf{x}^{(q)}[k]}^* - C_{\mathbf{x}^{(q)}[k] \mathbf{x}^{(q)}[k]}^* \left(C_{\mathbf{z}[k] \mathbf{z}[k]}^* \right)^{-1} C_{\mathbf{x}^{(q)}[k] \mathbf{x}^{(q)}[k]}^* +$
 $C_{\mathbf{x}^{(q)}[k] \mathbf{x}^{(q)}[k]}^* \left(C_{\mathbf{z}[k] \mathbf{z}[k]}^* \right)^{-1} \hat{C}_{\mathbf{z}[k] \mathbf{z}[k]} \left(C_{\mathbf{z}[k] \mathbf{z}[k]}^* \right)^{-1} C_{\mathbf{x}^{(q)}[k] \mathbf{x}^{(q)}[k]}^*$
- 24 **finpour**
- 25 **finpour**
- 26 **fin tq**

sont calculées. Le JPDAF nécessite une information suffisante sur les positions initiales des différentes sources pour conduire à des résultats satisfaisants. Ceci entre en contradiction avec les spécifications de notre problème. La littérature propose toutefois des extensions du JPDAF pour initialiser de manière *ad hoc* le suivi de nouvelles cibles apparaissant dans la scène. Le filtre MHT (*Multiple Hypothesis Tracker*) est une autre solution proposée dans [Bar-Shalom et Li, 1995], qui considère, à la différence du JPDAF, toutes les combinaisons possibles d'associations observation-cible depuis l'instant initial jusqu'à l'instant courant. En particulier, l'approche permet de détecter, parmi tous les jeux d'observations passées et présentes, si une *trajectoire d'observations* est susceptible d'avoir été produite par une nouvelle source, et donc d'initialiser le suivi de nouvelles sources. Le nombre d'hypothèses à envisager à chaque itération croissant très vite de manière démesurée, le MHT ne peut être implémenté sans un système très efficace de gestion d'hypothèses (fusion, élimination, etc.).

Plus récemment, les auteurs de [Goodman et al., 1997] ont soumis l'idée que la théorie des *vecteurs aléatoires* n'est fondamentalement pas adaptée au problème du filtrage multi-cibles, et proposent d'utiliser le formalisme des *ensembles finis aléatoires* (*Random Finite Set (RFS)*) pour modéliser le problème. Selon ce formalisme, l'état et l'observation sont modélisés par des ensembles finis (non ordonnés) de vecteurs aléatoires, dont la cardinalité (i.e. le nombre d'objets) est également aléatoire. Ce formalisme fut mis en place par [Matheron, 1975] dans l'idée de probabiliser l'ensemble $\mathcal{F}(E)$ des parties finies d'un espace de Hausdorff E (e.g. \mathbb{R}^d). En particulier, dans ses travaux, Mathéron étend les définitions de topologie, mesure, intégrale (Lebesgue), dérivée (Radón-Nykodym), etc. usuelles sur \mathbb{R}^d à celles de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d)$. Sur la base de ces travaux, [Goodman et al., 1997] étendent de manière formelle le problème de filtrage mono-cible au problème multi-cible *via* le calcul de STatistiques d'Ensembles FInis⁵. En particulier, les auteurs étendent les formules de récursion Bayésienne bien connues pour les vecteurs aléatoires au cas des ensembles finis aléatoires. Ces formules étant inexploitable en pratique (car faisant intervenir des intégrales d'ensemble), les auteurs proposent dans [Mahler, 2003] une approximation réduisant la difficulté du problème, en faisant une analogie très parlante avec le filtre de Kalman dans le filtrage mono-cible. Dans le cas mono-cible, les formules de récursion Bayésiennes sont déjà très coûteuses dans le cas général. Pour des processus gaussiens et des systèmes linéaires cependant, le calcul récursif d'une **ddp** se résume à la propagation d'une moyenne et d'une matrice de covariance. Pour les systèmes non linéaires, moyennant certaines approximations (tenseurs des cumulants d'ordre supérieur négligeables), on peut toujours se ramener à une propagation de moments d'ordres 1 et 2. L'idée dans le cas multi-cibles est similaire. Moyennant certaines approximations (les distributions de prédiction et de filtrage de l'ensemble aléatoire fini \mathcal{X} restent à peu près Poissoniennes), le filtrage Bayésien multi-cible peut se ramener au calcul récursif d'une fonction d'intensité $v_{\mathcal{X}}(x)$, caractérisant entièrement à chaque instant la distribution de filtrage de l'ensemble aléatoire \mathcal{X} si celui-ci est à peu près Poissonien. Concrètement, cette fonction d'intensité est une fonction de \mathbb{R}^d qui, lorsqu'intégrée sur un sous-ensemble A de \mathbb{R}^d , donne le nombre moyen d'éléments de l'ensemble aléatoire \mathcal{X} inclus dans A

$$\int_A v_{\mathcal{X}}(x)dx = \mathbb{E}\{|\mathcal{X} \cap A|\} \triangleq V_{\mathcal{X}}(A) \quad (5.2.1)$$

avec $|\cdot|$ le cardinal d'un ensemble fini. $V_{\mathcal{X}}(A)$ est communément appelé le premier moment de l'ensemble aléatoire \mathcal{X} . Le cardinal d'un ensemble fini aléatoire Poissonien suit une loi discrète de Poisson de paramètre (i.e. de moyenne)

$$\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} v_{\mathcal{X}}(x)dx, \quad (5.2.2)$$

5. *FInite Set STatistics-FISST*

et, conditionnellement à la réalisation du cardinal de \mathcal{X} , ses éléments sont des vecteurs aléatoires iid de densité de probabilité

$$p(x) = v_{\mathcal{X}}(x)/\lambda. \quad (5.2.3)$$

A noter que pour un ensemble fini aléatoire \mathcal{X} quelconque de fonction d'intensité donnée, l'ensemble fini aléatoire Poissonien ayant la même intensité est le RFS dont la distribution approxime au mieux la distribution de \mathcal{X} , au sens du minimum la divergence de Kullback-Leibler (redéfinie pour les ensembles finis aléatoires) [Mahler, 2003]. Dans cette même référence, une structure «prédiction-correction» (analogue à celle du filtre de Kalman pour les vecteurs aléatoires) pour le calcul récursif de la fonction d'intensité est mise en place. Ce calcul tient compte de manière explicite et rigoureuse de l'apparition et disparition d'éléments (objets), des fausses observations, de la probabilité de détection des objets en fonction de leur état, etc. Cette récursion porte le nom de filtre à *Probability Hypothesis Density* (PHD)⁶. Malgré tout, le filtre PHD reste difficilement utilisable d'un point de vue pratique, puisque le calcul récursif porte toujours sur une fonction continue de \mathbb{R}^d (alors que dans le filtre de Kalman, il porte sur un vecteur de taille d et une matrice symétrique de taille $d \times d$). De récentes contributions permettent cependant une mise en œuvre pratique du filtre PHD. Dans [Vo et Ma, 2006], le calcul récursif du filtre PHD est développé dans le cas où les intensités de filtrage et de prédiction sont approximées par des mélanges de gaussiennes (non normalisées, du fait que l'intégrale d'une fonction d'intensité sur \mathbb{R}^d est par définition le nombre moyen d'objets dans tout l'espace, non nécessairement unitaire). La complexité de l'algorithme proposé—le PHD à mélange de gaussiennes—n'est pas loin de celle d'un filtre de Kalman à Mélange de gaussiennes. Dans [Vo et al., 2005], une implémentation du filtre PHD par des méthodes séquentielles de Monte Carlo est proposée.

Si une implémentation du filtrage multi-cibles basé sur les ensembles aléatoires finis ne peut être envisagée sans méthodes d'approximation plus ou moins drastiques, nous trouvons les approches basées sur les RFS bien plus attractives et prometteuses que le JPDAF et ses extensions. En effet, le filtre PHD repose sur une théorie mathématique solide parfaitement adaptée au problème de filtrage multi-cible. Une fois la solution optimale déterminée, des solutions sous-optimales, reposant sur des approximations, sont ensuite envisagées. *A contrario*, le JPDAF repose sur des outils qui ne sont au départ pas adaptés au problème, et des aménagements sont proposés pour tenter de résoudre le problème. Par exemple, [Vo, 2008] a mis en lumière certains problèmes de fond dans l'instanciation de la règle de Bayes dans le JPDAF. Les approches basées sur les RFS ont récemment été utilisées en audition. Dans [Ma et al., 2006], une méthode séquentielle de Monte Carlo est utilisée pour localiser jusqu'à trois sources dans une salle réverbérante, à partir de plusieurs paires de microphones placées sur les murs de la salle. Concernant la construction des observations, une corrélation croisée généralisée-PhaT est effectuée sur chaque paire de microphones. Les arguments des extrema locaux de ces corrélation croisée généralisée sont extraits, formant un jeu d'observations. Une approche similaire est proposée dans [Vo et al., 2004]. Dans les deux contributions, les mouvements des sources sont supposés générés par un processus de Langevin, et les fausses observations sont supposées uniformément distribuées sur l'intervalle $[-D_m, D_m]$, mutuellement indépendantes et indépendantes des observations correctes.

Appliquer une stratégie de filtrage multi-cible—comme par exemple le filtre PHD à mélange de gaussiennes—à un capteur binaural actif, en exploitant le modèle de dynamique décrit au §1.2.2 et en construisant les observations à partir de l'un des algorithmes présentés au §5.1 est un travail en cours, et constituerait selon nous une contribution innovante en localisation de sources en robotique. Nous n'excluons pas non plus d'étendre le problème à un capteur à 6 degrés de liberté.

6. Probability Hypothesis Density–PHD

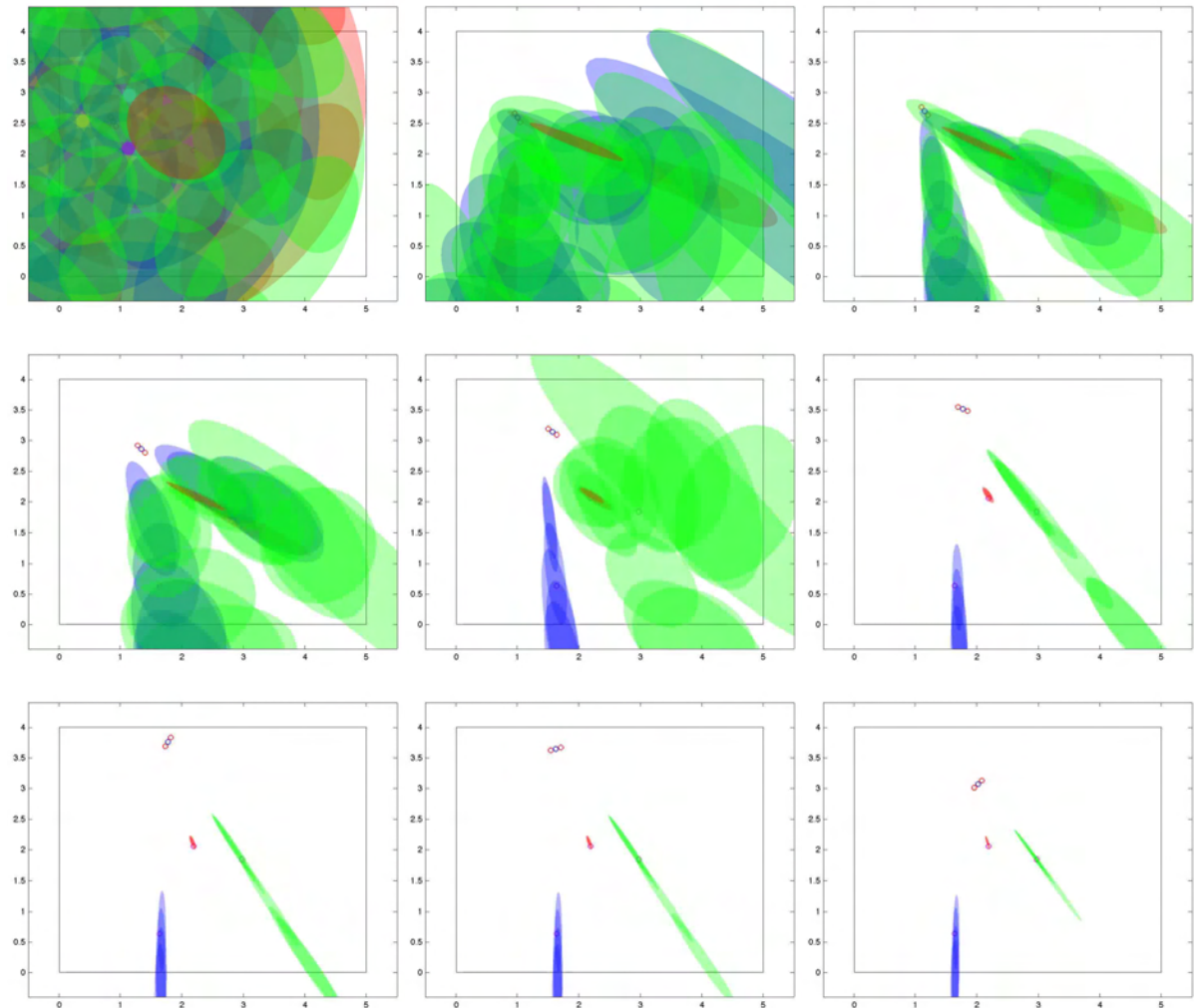


FIGURE 5.1: Résultat de l'estimation (JPDAF) dans le repère monde aux itérations $\{1, 14, 32, 57, 93, 135, 175, 223, 294\}$ (sens de lecture de gauche à droite et de de haut en bas). Les cercles rouges représentent les positions des récepteurs. Les 3 cercles magenta représentent les trois sources dans la scène, émettant des signaux de voix. Les ellipses bleues, vertes et rouges représentent les hypothèses des distributions *a posteriori* des 3 émetteurs. Les signaux perçus sont simulés *via* la méthode des images (coefficients de réflexion des murs 0.4). Les observations sont extraites en récupérant les arguments des maxima locaux d'une corrélation croisée généralisée-PhaT.

Conclusion

Le travail présenté dans cette thèse concerne la localisation de sources, éventuellement mobiles, depuis un capteur binaural mobile en Robotique. L'objectif a été de développer des stratégies actives, qui combinent les signaux binauraux perçus et les ordres moteurs du capteur de façon à lever des ambiguïtés inhérentes à leurs contreparties passives, lesquelles font l'hypothèse d'un monde statique. Le choix a été fait de focaliser l'étude sur des stratégies en deux étapes : extraction d'information spatiale et détection d'activité relatives à la/les source(s) par une analyse court-terme du flux audio ; assimilation des données ainsi extraites et fusion avec les ordres moteurs du robot dans un schéma de filtrage stochastique.

Notre ligne directrice a été de proposer des contributions fortement ancrées dans la théorie du signal, mais qui ne perdent pas de vue le contexte robotique. Ainsi :

- Nous avons d'abord considéré le problème sous-jacent de l'estimation du temps de retard en champ libre. Une bibliographie étendue intégrant les processeurs associés a permis de mieux cerner l'essence du problème, et de porter un jugement étayé sur les approches «standard» en robotique. À notre connaissance, ces aspects théoriques n'ont jamais été étudiés de manière aussi complète pour la robotique.
- Nous avons proposé une méthode originale pour calculer l'estimé du maximum de vraisemblance de l'azimut d'une source à partir d'une description temps-fréquence à court terme des signaux qu'elle induit—en conjonction avec le bruit—en des microphones positionnés sur une tête, le transfert entre ces microphones étant supposé connu *a priori* en fonction de la fréquence et de l'azimut d'un émetteur. Cette méthode s'appuie sur et étend des résultats développés dans la littérature sous l'hypothèse de propagation libre. Nous avons également proposé un schéma de détection instantanée de l'activité de l'émetteur par des techniques d'identification statistique.
- Plusieurs algorithmes, de complexité croissante, ont été développés pour la localisation active binaurale d'une source. Leur principe commun est d'assimiler temporellement les paramètres spatiaux court-terme précédemment estimés avec les ordres moteurs de la tête. Parmi les caractéristiques de ces algorithmes, on peut citer : un socle théorique étayé, consistant en un modèle d'état stochastique original et des techniques de filtrage permettant une initialisation automatique et assurant la consistance de l'estimation ; la capacité à gérer les fausses mesures ; la définition et la caractérisation de plusieurs schémas de détection en ligne de l'intermittence de la source ; l'application au cas d'un capteur binaural en champ libre ou bien monté sur un élément diffusant.

Tous les algorithmes ont été étudiés sur des données simulées. Ils ont également été appliqués hors-ligne à des signaux binauraux et ordres moteurs acquis dans un environnement réel (chambre acoustiquement préparée). Leurs conclusions ont été comparées avec une vérité terrain acquise lors de l'expérience par un système de capture de mouvement. Des implémentations sont en cours : im-

plémentation logicielle en C/C++ sous la librairie open-source *HARK* [Nakadai *et al.*, 2010] pour l’audition en Robotique ; implémentation mixte logicielle/matérielle (C/C++ & VHDL) sur l’architecture “System-on-a-Programmable-Chip” développée au LAAS-CNRS [Lunati *et al.*, 2012]. Elles permettront une exploitation des algorithmes sur des robots mobiles tels que l’humanoïde HPR-2 ou les robots personnels PR2 hébergés par le LAAS-CNRS. L’évaluation exhaustive qui sera conduite sur cette base et sur la base de “datasets” librement disponibles permettra leur caractérisation dans des environnements plus ou moins réverbérants, encombrés, évolutifs, etc.

PROSPECTIVES

Le dernier chapitre du manuscrit a présenté un ensemble de travaux plus prospectifs pour aborder le cas multi-sources. Ceux-ci concernent essentiellement l’estimation de paramètres spatiaux à court terme, en tant qu’extension de l’approche mono-source. La méconnaissance des statistiques des sources (densités spectrales de puissance, densités spectrales de puissance croisées) implique, pour résoudre le problème, de (1) poser des hypothèses supplémentaires ; (2) recourir à des méthodes itératives pour établir l’estimé du maximum de vraisemblance, telles que l’algorithme EM (Espérance-Maximisation). Ces travaux doivent naturellement être complétés. Une première prospective à court terme consiste en l’évaluation de stratégies qui diffèrent par les hypothèses a priori sur les sources, par le choix des données latentes invoquées dans l’algorithme EM, et par la quantité d’information disponible sur le bruit ambiant.

Comme cela a été présenté dans ce manuscrit, l’assimilation de mesures multiples en provenance de sources multiples a fait l’objet de travaux préliminaires, qui seront poursuivis en priorité.

Nous privilégierons donc l’exploitation du filtrage à base d’ensembles finis aléatoires (RFS) conjointement à notre stratégie de détection de paramètres spatiaux dans le cas multi-sources.

Une dernière prospective aura pour objectif de prolonger le caractère « actif » de la localisation, en commandant les mouvements du capteur de façon à enrichir l’information binaurale perçue (*cf* l’introduction à ce problème dans les Figs. 4.8 et 4.11). Ici, l’estimation active pourra être formulée comme un problème de commande optimale stochastique en boucle fermée, qui, sur la base des poids et moments du mélange décrivant la loi *a posteriori* de l’état, permet l’élaboration d’ordres moteurs réalisant un compromis moyen entre l’information acquise au terme d’un horizon temporel donné et le travail effectué par la commande pour réaliser le déplacement [Scardovi, 2005]. Plus généralement, on pourra envisager un compromis entre une tâche de stabilisation (d’une erreur, d’une distance relativement à un objectif de positionnement défini par ailleurs, etc.) et une tâche d’exploration (agrégation d’information sur une quantité d’intérêt).

Annexes

Les annexes qui suivent présentent des définitions, propriétés et théorèmes concernant les variables, vecteurs et signaux aléatoires. On peut les retrouver dans de nombreux ouvrages de référence [Papoulis, 1984]–[Deville, 2011].

7.1 PROBABILITÉS

7.1.1 Généralités sur les ensembles

Définition 7.1.1 (expérience aléatoire) Une expérience aléatoire est un processus qui engendre des résultats qu'on ne peut prédire de manière certaine. On appelle univers l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Soit Ω un univers quelconque.

Définition 7.1.2 (événements) On appelle événement tout sous-ensemble de Ω . Un événement élémentaire est un événement constitué d'un unique résultat. On appelle événement certain l'ensemble Ω , et événement impossible l'ensemble vide, noté \emptyset .

Définition 7.1.3 (unions et intersections) Soient A et B deux événements. L'union (resp. intersection) de A et B , notée $A \cup B$ (resp. $A \cap B$), est le sous-ensemble des éléments appartenant à A ou B (resp. A et B). Le complément de A , noté \bar{A} , est le sous-ensemble des éléments de Ω n'appartenant pas à A . Les événements A et B sont dits disjoints si $A \cap B = \emptyset$.

Définition 7.1.4 (partition) On appelle partition de Ω toute famille $(A_i)_{i \geq 1}$ d'événements deux à deux disjoints tels que $\cup_{i \geq 1} A_i = \Omega$.

7.1.2 Axiomatique de Kolmogorov

Définition 7.1.5 (sigma-algèbre) On appelle σ -algèbre (ou tribu) de Ω toute famille σ de sous-ensembles de Ω qui vérifie les propriétés suivantes :

1. elle contient l'univers : $\Omega \in \sigma$.
2. Elle est stable par complémentation : $A \in \sigma \Rightarrow \bar{A} \in \sigma$.
3. Elle est stable par union dénombrable : $(A_i)_{i \geq 1} \in \sigma \Rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \sigma$.

Des deux premiers points de la définition il vient immédiatement qu'une σ -algèbre contient aussi l'événement impossible \emptyset .

Définition 7.1.6 (espace probabilisable ou mesurable) *Un espace probabilisable ou mesurable est un univers muni d'une σ -algèbre.*

Soit σ une σ -algèbre de Ω de sorte que le couple (Ω, σ) définisse un espace probabilisable ou mesurable.

Définition 7.1.7 (probabilité) *Une probabilité \mathbb{P} sur σ est une application de σ dans $[0, 1]$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. Pour toute famille dénombrable $(A_i)_{i \geq 1} \in \sigma$ d'événements deux à deux disjoints,
$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Une probabilité est donc une mesure de masse totale unitaire. Les éléments de σ sont appelés les sous-ensembles probabilisables par rapport à \mathbb{P} .

Définition 7.1.8 (espace probabilisé, espace mesuré) *Un espace probabilisé (resp. mesuré) est un espace probabilisable (resp. mesurable) muni d'une probabilité (resp. mesure).*

Soit \mathbb{P} une probabilité sur σ de sorte que le triplet $(\Omega, \sigma, \mathbb{P})$ définisse un espace probabilisé.

7.1.3 Probabilité conditionnelle, théorème de Bayes

Définition 7.1.9 (probabilité conditionnelle) *Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. La probabilité d'un événement B conditionnellement à A (ou sachant A), notée $\mathbb{P}(B|A)$, est définie par :*

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Pour un événement A tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, l'application $\mathbb{P}(\cdot|A)$ est une probabilité sur σ .

Définition 7.1.10 (événements indépendants) *Les événement A et B sont dits indépendants si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, ce qui équivaut à $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$, ou encore $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.*

THÉORÈME 7.1.1 probabilités totales.

Soit $(A_i)_{i \geq 1}$ une partition de Ω et B un événement. Alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

THÉORÈME 7.1.2 Bayes.

Soient deux événements A et B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors :

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A) \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Si $(A_i)_{i \geq 1}$ est une partition de Ω , en combinant les théorèmes 7.1.1 et 7.1.2, on peut écrire

$$\forall j \geq 1, \mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}. \quad (7.1.1)$$

7.2 VARIABLE ALÉATOIRE RÉELLE

7.2.1 Définition d'une variable aléatoire réelle

Définition 7.2.1 (topologie) On appelle topologie de Ω toute famille τ de sous-ensembles de Ω qui vérifie les propriétés suivantes :

1. elle contient l'ensemble vide : $\emptyset \in \tau$.
2. Elle est stable par intersection finie : $(A_i)_{1 \leq i \leq n} \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$.
3. Elle est stable par union quelconque : $(A_i)_{i \in I} \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

Définition 7.2.2 (espace topologique) Un espace topologique est un univers muni d'une topologie. Les sous-ensembles appartenant à la topologie sont appelés les ouverts de l'espace topologique.

Soit τ une topologie de Ω de sorte que le couple (Ω, τ) définisse un espace topologique.

Définition 7.2.3 (topologie ou sigma-algèbre engendrée par une famille) La topologie τ (resp. la σ -algèbre σ) de Ω est engendrée par une famille f de sous-ensembles de Ω si c'est la plus petite topologie (resp. σ -algèbre) de Ω , au sens de l'inclusion, contenant f .

Définition 7.2.4 (topologie usuelle de \mathbb{R}) La topologie usuelle de \mathbb{R} est la topologie engendrée par la famille des intervalles ouverts de \mathbb{R} . Les ouverts de \mathbb{R} pour la topologie usuelle sont \mathbb{R} , \emptyset , et toutes les réunions quelconques d'intervalles ouverts.

Définition 7.2.5 (sigma-algèbre borélienne) La σ -algèbre borélienne de Ω pour la topologie τ , notée $\mathcal{B}(\Omega)$, est la σ -algèbre engendrée par τ .

Définition 7.2.6 (sigma-algèbre borélienne de \mathbb{R}) La σ -algèbre borélienne de \mathbb{R} , $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, est la σ -algèbre engendrée par la topologie usuelle de \mathbb{R} .

PROPOSITION 7.2.1.

La σ -algèbre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est en outre engendrée par :

- la famille des intervalles ouverts de \mathbb{R}
- la famille des sous-ensembles ouverts de \mathbb{R}
- la famille des intervalles fermés de \mathbb{R}
- la famille des sous-ensembles fermés de \mathbb{R}
- la famille des sous-ensembles compacts de \mathbb{R}
- la famille des intervalles ouverts à gauche, fermés à droite de \mathbb{R}
- la famille des intervalles fermés à gauche, ouverts à droite de \mathbb{R}
- la famille des intervalles de la forme $] - \infty, x[$ avec $x \in \mathbb{R}$
- la famille des intervalles de la forme $] - \infty, x]$ avec $x \in \mathbb{R}$
- la famille des intervalles de la forme $]x, +\infty[$ avec $x \in \mathbb{R}$
- la famille des intervalles de la forme $]x, +\infty]$ avec $x \in \mathbb{R}$

Définition 7.2.7 (variable aléatoire réelle) On appelle variable aléatoire réelle toute application \mathbf{x} de Ω dans \mathbb{R} telle que :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbf{x}^{-1}(A) \in \sigma,$$

où $\mathbf{x}^{-1}(A) \triangleq \{\omega \in \Omega \mid \mathbf{x}(\omega) \in A\}$ désigne l'antécédent de A par \mathbf{x} . On le note par abus de langage $\{\mathbf{x} \in A\}$.

En fait, comme $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les intervalles de la forme $] - \infty, x[$ avec $x \in \mathbb{R}$, la définition précédente peut être restreinte aux sous-ensembles A de cette forme. On note $\{\mathbf{x} < x\}$ les antécédents de tels sous-ensembles. On note donc que si \mathbf{x} est une variable aléatoire réelle, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \{\mathbf{x} < x\} \in \sigma.$$

7.2.2 Description d'une variable aléatoire

Définition 7.2.8 (loi de probabilité) *La loi de probabilité $P_{\mathbf{x}}$ associée à une variable aléatoire réelle \mathbf{x} est définie par :*

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_{\mathbf{x}}(A) = \mathbb{P}\{\mathbf{x} \in A\}.$$

De par la définition de variable aléatoire, si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\{\mathbf{x} \in A\} \in \sigma$, donc $\mathbb{P}\{\mathbf{x} \in A\}$ existe bien. La définition précédente s'écrit de manière plus concise ainsi : $P_{\mathbf{x}} = \mathbb{P} \circ \mathbf{x}^{-1}$. La définition d'une loi de probabilité $P_{\mathbf{x}}$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ se ramène à la définition d'une probabilité \mathbb{P} sur σ . Par ailleurs, on peut montrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_{\mathbf{x}})$ est un espace probabilisé.

Définition 7.2.9 (fonction de répartition) *On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire \mathbf{x} , notée $F_{\mathbf{x}}$, l'application de \mathbb{R} dans $[0, 1]$ définie par :*

$$F_{\mathbf{x}}(x) \triangleq \mathbb{P}\{\mathbf{x} < x\} = P_{\mathbf{x}}(] - \infty, x]).$$

Définition 7.2.10 (variable aléatoire discrète) *Une variable aléatoire \mathbf{x} est dite discrète s'il existe un sous-ensemble dénombrable \mathcal{D} de \mathbb{R} tel que $\mathbb{P}\{\mathbf{x} \in \mathcal{D}\} = 1$.*

Définition 7.2.11 (variable aléatoire continue) *Une variable aléatoire \mathbf{x} est dite continue si sa fonction de répartition est continue et dérivable en tout point.*

Définition 7.2.12 (fonction de répartition conditionnelle) *Soient un événement A et une variable aléatoire \mathbf{x} . On définit la fonction de répartition de \mathbf{x} conditionnelle à A , notée $F_{\mathbf{x}|A}(x|A)$, comme :*

$$F_{\mathbf{x}|A}(x|A) \triangleq \frac{\mathbb{P}\{\mathbf{x} < x, A\}}{\mathbb{P}(A)},$$

avec $\{\mathbf{x} < x, A\} = \{\mathbf{x} < x\} \cap A$.

Définition 7.2.13 (densité de probabilité d'une variable aléatoire continue) *Soit un espace probabilisé $(\Omega, \sigma(\Omega), \mathbb{P})$ et soit le vecteur aléatoire $\mathbf{x} : (\Omega, \sigma(\Omega)) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, de loi de probabilité $P_{\mathbf{x}} = \mathbb{P} \circ \mathbf{x}^{-1}$. On rappelle que $P_{\mathbf{x}}$ est une probabilité (à fortiori une mesure) σ -finie sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Si $P_{\mathbf{x}} \ll \mu$, où μ est la mesure de Lebesgue (σ -finie) sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d))$ (qu'on restreint à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ pour coller avec le théorème), alors il existe une unique (μ -presque partout) fonction f telle que*

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), P_{\mathbf{x}}(A) = \int_A f(x) \mu(dx).$$

On l'appelle densité de probabilité de \mathbf{x} et on la note $f_{\mathbf{x}} = \frac{dP_{\mathbf{x}}}{d\mu}$.

Définition 7.2.14 (densité de probabilité conditionnelle) *Soit un événement A et une variable aléatoire \mathbf{x} . On définit la **ddp** de \mathbf{x} conditionnelle à A , notée $f_{\mathbf{x}|A}(x|A)$, comme la dérivée de la fonction de répartition de \mathbf{x} conditionnelle à A :*

$$f_{\mathbf{x}|A}(x|A) = \frac{dF_{\mathbf{x}|A}(x|A)}{dx}.$$

La notion de densité peut être étendue aux variables aléatoires discrètes en considérant la dérivée au sens des distributions.

Définition 7.2.15 (espérance d'une variable aléatoire continue) Soit \mathbf{x} une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \sigma(\Omega), \mathbb{P})$. L'espérance de \mathbf{x} , est définie par :

$$\mathbb{E}\{\mathbf{x}\} \triangleq \int_{\Omega} \mathbf{x} d\mathbb{P} = \int_{\Omega} \mathbf{x}(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$$

Il se trouve que cette espérance s'écrit aussi

$$\mathbb{E}\{\mathbf{x}\} = \int_{\mathbb{R}^d} x dF_{\mathbf{x}}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} x f(x) dx$$

Définition 7.2.16 (espérance d'une variable aléatoire discrète) Soit \mathbf{x} une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathcal{D} . L'espérance de \mathbf{x} est définie par :

$$\mathbb{E}\{\mathbf{x}\} = \sum_{x \in \mathcal{D}} x \mathbb{P}\{\mathbf{x} = x\},$$

où $\{\mathbf{x} = x\} = \{\omega \in \Omega | \mathbf{x}(\omega) = x\}$.

Soit une fonction ϕ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dérivable et de dérivée ϕ' . Sous certaines conditions portant sur ϕ , $\mathbf{y} = \phi \circ \mathbf{x}$ est aussi une variable aléatoire (cf [Papoulis, 1984], p86-87), et la ddp de \mathbf{y} s'exprime comme

$$f_{\mathbf{y}}(y) = \sum_{i=1}^N \frac{f_{\mathbf{x}}(x_i(y))}{|\phi'(x_i(y))|}, \quad (7.2.1)$$

où $\{x_i(y)\}_{i=1, \dots, N}$ sont les solutions de $\phi(x) = y$. On peut également montrer que

$$\mathbb{E}_{\phi}\{\mathbf{x}\} \triangleq \mathbb{E}\{\phi \circ \mathbf{x}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f_{\mathbf{x}}(x) dx. \quad (7.2.2)$$

Ces considérations vont nous permettre de définir les moments d'une variable aléatoire.

Définition 7.2.17 (moments d'une variable aléatoire continue) Soit \mathbf{x} une variable aléatoire continue de ddp $f_{\mathbf{x}}$. Le moment d'ordre n de \mathbf{x} est défini par :

$$m_{\mathbf{x}}^{(n)} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_{\mathbf{x}}(x) dx.$$

Définition 7.2.18 (moments d'une variable aléatoire discrète) Soit \mathbf{x} une variable aléatoire discrète. Le moment d'ordre n de \mathbf{x} est défini par :

$$m_{\mathbf{x}}^{(n)} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}^n\} = \sum_{x \in \mathcal{D}} x^n \mathbb{P}\{\mathbf{x} = x\}$$

$m_{\mathbf{x}}^{(1)}$ est l'espérance (ou moyenne) de \mathbf{x} , on la note aussi $m_{\mathbf{x}}$.

Définition 7.2.19 (moments centrés d'une variable aléatoire) Le moment centré d'ordre n d'une variable aléatoire \mathbf{x} est défini par

$$\mu_{\mathbf{x}}^{(n)} = \mathbb{E}\{(\mathbf{x} - m_{\mathbf{x}})^n\}.$$

$\mu_{\mathbf{x}}^{(2)}$ est la variance de \mathbf{x} , on la note aussi $v_{\mathbf{x}}$, et on appelle écart-type de \mathbf{x} la quantité $\sigma_{\mathbf{x}} \triangleq \sqrt{v_{\mathbf{x}}}$.

Définition 7.2.20 (espérance conditionnelle d'une variable aléatoire continue) Soient A un événement et \mathbf{x} une variable aléatoire continue de *ddp* conditionnelle à A $f_{\mathbf{x}|A}$. L'espérance de \mathbf{x} conditionnelle à A est définie par :

$$\mathbb{E}\{\mathbf{x}|A\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\mathbf{x}|A}(x|A) dx.$$

Définition 7.2.21 (espérance conditionnelle d'une variable aléatoire discrète) Soient A un événement et \mathbf{x} une variable aléatoire discrète. L'espérance de \mathbf{x} conditionnelle à A est définie par :

$$\mathbb{E}\{\mathbf{x}|A\} \triangleq \sum_{x \in \mathcal{D}} x \mathbb{P}\{\mathbf{x} = x, A\}.$$

Définition 7.2.22 (variable aléatoire gaussienne) Une variable aléatoire continue est dite gaussienne si sa *ddp*, définie sur \mathbb{R} , s'écrit

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \frac{1}{\sigma_{\mathbf{x}} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - m_{\mathbf{x}}}{\sigma_{\mathbf{x}}}\right)^2\right),$$

avec $m_{\mathbf{x}}$ et $\sigma_{\mathbf{x}}$ deux paramètres dans \mathbb{R} .

$m_{\mathbf{x}}$ et $\sigma_{\mathbf{x}}$ sont respectivement la moyenne et l'écart-type de \mathbf{x} . On note $f_{\mathbf{x}}(x) = \mathcal{N}(x; m_{\mathbf{x}}, \sigma_{\mathbf{x}})$.

7.3 VECTEUR ALÉATOIRE RÉELS

On introduit maintenant $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, la σ -algèbre borélienne de \mathbb{R}^d , qui est engendrée par la topologie usuelle de \mathbb{R}^d , *i.e.* l'ensemble des unions quelconques de pavés ouverts. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est (entre autre) engendrée par l'ensemble des pavés de la forme $] - \infty, x_1[\times \dots \times] - \infty, x_n[$, où $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^d$. Un vecteur aléatoire \mathbf{x} est donc une application de σ dans \mathbb{R}^d qui vérifie

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \mathbf{x}^{-1}(A) \in \sigma. \quad (7.3.1)$$

La définition précédente peut se restreindre aux ensembles A de la forme $] - \infty, x_1[\times \dots \times] - \infty, x_n[$, où $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^d$, et on définit la loi de probabilité de \mathbf{x} comme

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), P_{\mathbf{x}}(A) = \mathbb{P}\{\mathbf{x} \in A\}. \quad (7.3.2)$$

La fonction de répartition de \mathbf{x} est définie par

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{x}}(x_1, \dots, x_n) &= \mathbb{P}\{\mathbf{x}_1 < x_1, \dots, \mathbf{x}_n < x_n\} \\ &= P_{\mathbf{x}}(] - \infty, x_1[\times \dots \times] - \infty, x_n[), \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

avec $\{\mathbf{x}_1 < x_1, \dots, \mathbf{x}_n < x_n\} = \{\mathbf{x}_1 < x_1\} \cap \dots \cap \{\mathbf{x}_n < x_n\}$. Si $F_{\mathbf{x}}$ est continue dérivable, sa *ddp* est définie par

$$f_{\mathbf{x}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_{\mathbf{x}}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}. \quad (7.3.4)$$

Chacune des composantes de $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \sigma, \mathbb{P})$ et possède donc une loi, une fonction de répartition et une *ddp* propres. La *ddp* propre d'une composante est appelée *ddp* «marginale», et est obtenue en intégrant la *ddp* conjointe par rapport à toutes les autres composantes. Les composantes d'un vecteur aléatoire sont dites indépendantes si

$$f_{\mathbf{x}}(x_1, \dots, x_n) = f_{x_1}(x_1) \dots f_{x_n}(x_n), \quad (7.3.5)$$

i.e. la ddp conjointe est égale au produit des ddp marginales. Ces composantes sont dites identiquement distribuées elles possèdent la même ddp. Soit une fonction ϕ de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} dérivable et de gradient $\nabla\phi$. Sous certaines conditions portant sur ϕ , $y = \phi \circ \mathbf{x}$ est une variable aléatoire, et la ddp de y s'exprime comme

$$f_y(y) = \sum_{i=1}^N \frac{f_x(x_i(y))}{|\nabla\phi(x_i(y))|}, \quad (7.3.6)$$

où $\{x_i(y)\}_{i=1,\dots,N}$ sont les solutions de $\phi(x) = y$. Ces considérations vont nous permettre de définir les moments d'un vecteur aléatoire. Les moments croisés d'indices $k = [k_1 \dots k_n]^T$ sont définis par

$$m_{\mathbf{x}}^{(k)} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}_1^{k_1} \dots \mathbf{x}_n^{k_n}\}, \quad (7.3.7)$$

et les moments croisés centrés par

$$\mu_{\mathbf{x}}^{(k)} = \mathbb{E}\left\{(\mathbf{x}_1 - m_{\mathbf{x}_1})^{k_1} \dots (\mathbf{x}_n - m_{\mathbf{x}_n})^{k_n}\right\}. \quad (7.3.8)$$

La quantité

$$R_{\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\} \quad (7.3.9)$$

s'appelle la corrélation de \mathbf{x}_i et \mathbf{x}_j , et la quantité

$$C_{\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j} = \mathbb{E}\{(\mathbf{x}_i - m_{\mathbf{x}_i})(\mathbf{x}_j - m_{\mathbf{x}_j})\} \quad (7.3.10)$$

s'appelle la covariance de \mathbf{x}_i et \mathbf{x}_j . On dit que les composantes $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ sont décorrélées si

$$\forall i, j \neq i, C_{\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j} = 0. \quad (7.3.11)$$

L'espérance d'un vecteur aléatoire \mathbf{x} vient comme le vecteur des moyennes des composantes

$$m_{\mathbf{x}} = [m_{\mathbf{x}_1} \dots m_{\mathbf{x}_n}]^T. \quad (7.3.12)$$

On définit la matrice de corrélation de \mathbf{x} par

$$R_{\mathbf{x}} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\} = \begin{bmatrix} R_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1} & \dots & R_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_n} \\ \vdots & & \vdots \\ R_{\mathbf{x}_n\mathbf{x}_1} & \dots & R_{\mathbf{x}_n\mathbf{x}_n} \end{bmatrix} \quad (7.3.13)$$

et sa matrice de covariance par

$$C_{\mathbf{x}} = \mathbb{E}\{(\mathbf{x} - m_{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - m_{\mathbf{x}})^T\} = \begin{bmatrix} C_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1} & \dots & C_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{\mathbf{x}_n\mathbf{x}_1} & \dots & C_{\mathbf{x}_n\mathbf{x}_n} \end{bmatrix}. \quad (7.3.14)$$

La ddp d'un vecteur aléatoire gaussien s'écrit

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \frac{1}{\sqrt{|C_{\mathbf{x}}|}(\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - m_{\mathbf{x}})^T C_{\mathbf{x}}^{-1}(x - m_{\mathbf{x}})\right). \quad (7.3.15)$$

Pour un vecteur aléatoire gaussien, l'indépendance des composantes équivaut à la décorrélation des composantes.

7.4 SIGNAUX ALÉATOIRES RÉELS MONODIMENSIONNELS

7.4.1 Définition et description d'un signal aléatoire

Définition 7.4.1 (signal aléatoire) *Un signal aléatoire réel monodimensionnel \mathbf{x} est une fonction à valeurs réelles dépendant à la fois du résultat d'une expérience aléatoire et d'une autre variable, qu'on prend généralement comme étant le temps :*

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &: \mathcal{E} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\mapsto \mathbf{x}(t, \omega). \end{aligned}$$

Si $\mathcal{E} = \mathbb{R}$, le signal aléatoire est dit à temps continu. Si \mathcal{E} est un ensemble dénombrable, le signal aléatoire est dit à temps discret.

A $t \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $\mathbf{x}(t, \cdot)$ définit une variable aléatoire. A $\omega \in \Omega$ fixé, $\mathbf{x}(\cdot, \omega)$ est une fonction déterministe du temps souvent appelée trajectoire ou réalisation. Soit \mathbf{x} un signal aléatoire à temps continu.

A Description à un instant

Soit un instant t fixé. On note $\mathbf{x}(t)$ la variable aléatoire que définit le signal aléatoire \mathbf{x} à cet instant.

Définition 7.4.2 (fonction de répartition à l'ordre 1) *La fonction de répartition à l'ordre 1 du signal aléatoire \mathbf{x} est la fonction de répartition de la variable aléatoire $\mathbf{x}(t)$:*

$$F_{\mathbf{x}}(x, t) = \mathbb{P}\{\mathbf{x}(t) < x\}.$$

Définition 7.4.3 (densité de probabilité à l'ordre 1) *La ddp à l'ordre 1 du signal aléatoire \mathbf{x} est définie par :*

$$f_{\mathbf{x}}(x, t) = \frac{\partial F_{\mathbf{x}}(x, t)}{\partial x}.$$

Définition 7.4.4 (moyenne d'un signal aléatoire) *La moyenne $m_{\mathbf{x}}$ du signal aléatoire \mathbf{x} est la moyenne de la variable aléatoire $\mathbf{x}(t)$:*

$$m_{\mathbf{x}}(t) = \mathbb{E}\{\mathbf{x}(t)\}.$$

B Description à deux instants

Soient deux instants t_1 et t_2 fixés. On note $\mathbf{x}(t_1)$ et $\mathbf{x}(t_2)$ les variables aléatoires que définit le signal aléatoire \mathbf{x} à ces instants.

Définition 7.4.5 (fonction de répartition à l'ordre 2) *La fonction de répartition à l'ordre 2 du signal aléatoire \mathbf{x} est la fonction de répartition conjointe des variables aléatoire $\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2)$:*

$$F_{\mathbf{x}}(x_1, x_2, t_1, t_2) = \mathbb{P}\{\mathbf{x}(t_1) < x_1, \mathbf{x}(t_2) < x_2\}.$$

Définition 7.4.6 (densité de probabilité à l'ordre 2) *La ddp à l'ordre 2 du signal aléatoire \mathbf{x} est définie par :*

$$f_{\mathbf{x}}(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_{\mathbf{x}}(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Définition 7.4.7 (autocorrélation d'un signal aléatoire) L'autocorrélation $R_{\mathbf{x}}$ du signal aléatoire \mathbf{x} est la moyenne du produit des variables aléatoires $\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2)$:

$$R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) = \mathbb{E}\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\}.$$

Définition 7.4.8 (autocovariance d'un signal aléatoire) L'autocovariance $C_{\mathbf{x}}$ du signal aléatoire \mathbf{x} de moyenne $m_{\mathbf{x}}$ est définie par :

$$C_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) = E\{(\mathbf{x}(t_1) - m_{\mathbf{x}}(t_1))(\mathbf{x}(t_2) - m_{\mathbf{x}}(t_2))\}.$$

En d'autres termes, $C_{\mathbf{x}}$ est l'autocorrélation de la variable aléatoire centrée $\mathbf{x} - m_{\mathbf{x}}$. elle s'écrit aussi :

$$C_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) = R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) - m_{\mathbf{x}}(t_1)m_{\mathbf{x}}(t_2).$$

C Description à n instants

Soient n instants t_1, \dots, t_n fixés. On note $\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_n)$ les variables aléatoire que définit le signal aléatoire \mathbf{x} à ces instants.

Définition 7.4.9 (fonction de répartition à l'ordre n) La fonction de répartition à l'ordre n du signal aléatoire \mathbf{x} est la fonction de répartition conjointe des variables aléatoires $\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_n)$:

$$F_{\mathbf{x}}(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = \mathbb{P}\{\mathbf{x}(t_1) < x_1, \dots, \mathbf{x}(t_n) < x_n\}.$$

Définition 7.4.10 (densité de probabilité à l'ordre n) La ddp à l'ordre n du signal aléatoire \mathbf{x} est définie par :

$$f_{\mathbf{x}}(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_{\mathbf{x}}(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}.$$

Définition 7.4.11 (moment d'ordre n d'un signal aléatoire) Le moment d'ordre n du signal aléatoire \mathbf{x} est la moyenne du produit des variables aléatoires $\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_n)$:

$$m_{\mathbf{x}}^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{E}\{\mathbf{x}(t_1) \times \dots \times \mathbf{x}(t_n)\}.$$

La moyenne de \mathbf{x} est son moment d'ordre 1, l'autocorrélation son moment d'ordre 2.

Définition 7.4.12 (moment d'ordre n d'un signal aléatoire) Le moment centré d'ordre n du signal aléatoire \mathbf{x} est la moyenne du produit des variables aléatoires centrées $\mathbf{x}(t_1) - m_{\mathbf{x}}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_n) - m_{\mathbf{x}}(t_n)$:

$$\mu_{\mathbf{x}}^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{E}\{(\mathbf{x}(t_1) - m_{\mathbf{x}}(t_1)) \times \dots \times (\mathbf{x}(t_n) - m_{\mathbf{x}}(t_n))\}.$$

L'autocovariance de \mathbf{x} est son moment centré d'ordre 2.

Définition 7.4.13 (signal aléatoire gaussien) Un signal aléatoire est dit gaussien si quel que soit n dans \mathbb{N} et quels que soient n instants t_1, \dots, t_n , le vecteur $[\mathbf{x}(t_1) \dots \mathbf{x}(t_n)]^T$ est un vecteur aléatoire gaussien.

7.4.2 Stationarité, ergodicité, densité spectrale

Pour décrire entièrement une variable aléatoire, il suffit de connaître par exemple sa ddp (ou sa loi, ou sa fonction de répartition). Pour un signal aléatoire, il faut connaître sa ddp à tous les ordres, ce qui représente une quantité d'information nécessaire infiniment plus grande. Certains signaux aléatoires caractérisés par une certaine «régularité» statistique au cours du temps peuvent être décrits avec une quantité d'information moins grande. Cette «régularité» est traduit par la notion de stationarité.

Définition 7.4.14 (stationarité au sens strict) *Le signal aléatoire \mathbf{x} est dit stationnaire au sens strict (SSS) si quelque soit n sa ddp à l'ordre n est invariante par translation temporelle, i.e. si elle vérifie :*

$$\forall a, f_{\mathbf{x}}(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = f_{\mathbf{x}}(x_1, \dots, x_n, t_1 + a, \dots, t_n + a).$$

En particulier, pour $n = 1$, $f_{\mathbf{x}}(x, t)$ ne dépend pas de t .

Définition 7.4.15 (stationnarité au sens large) *Le signal aléatoire \mathbf{x} est dit SSL si :*

1. sa moyenne $m_{\mathbf{x}}(t)$ est indépendante de t .
2. Son autocorrélation $R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2)$ ne dépend que de $\tau = t_2 - t_1$.

On note que $R_{\mathbf{x}}(t - \tau, t) = E\{\mathbf{x}(t - \tau)\mathbf{x}(t)\} = R_{\mathbf{x}}(t, t + \tau) = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t + \tau)\}$ ne dépend pas de t , et on écrit

$$R_{\mathbf{x}}(\tau) = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t + \tau)\}. \quad (7.4.1)$$

Propriété 7.4.1 *Si \mathbf{x} est un signal aléatoire SSL, alors son autocorrélation $R_{\mathbf{x}}$ est paire, bornée, et*

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, |R_{\mathbf{x}}(\tau)| < R_{\mathbf{x}}(0),$$

Définition 7.4.16 (convergence presque sûre) *Une suite $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires converge presque sûrement vers une variable aléatoire \mathbf{x} s'il existe un sous-ensemble Ω_0 de Ω tel que :*

1. $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$.
2. $\forall \omega_0 \in \Omega_0, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n(\omega_0) = \mathbf{x}(\omega_0)$.

En d'autres termes, le sous-ensemble $\bar{\Omega}_0$ des événements ω pour lesquels $\mathbf{x}_n(\omega)$ ne tend pas vers $\mathbf{x}(\omega)$ a une probabilité nulle.

Soient \mathbf{x} un signal aléatoire réel quelconque et $\phi(t)$ une fonction déterministe du temps à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et définie sur un intervalle $[a, b]$. Soit ω un événement fixé de Ω . $\mathbf{x}(\cdot, \omega)$, qui dénote une réalisation de \mathbf{x} , est alors une fonction déterministe du temps. Pour peu que $\mathbf{x}(\cdot, \omega)$ soit défini sur $[a, b]$, l'intégrale

$$I_{\mathbf{x}}(\omega) \triangleq \int_a^b \mathbf{x}(t, \omega) \phi(t) dt \quad (7.4.2)$$

est existe définie, et l'application

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{x}} &: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ \omega &\mapsto I_{\mathbf{x}}(\omega) \end{aligned} \quad (7.4.3)$$

est une variable aléatoire réelle ou complexe sur Ω . On note par abus de langage :

$$I_{\mathbf{x}} = \int_a^b \mathbf{x}(t) \phi(t) dt.$$

Définition 7.4.17 (ergodicité en moyenne) On suppose que le signal aléatoire \mathbf{x} est à moyenne $m_{\mathbf{x}}$ constante. Soit m_T la variable aléatoire définie comme :

$$m_T = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathbf{x}(t) dt.$$

Le signal aléatoire \mathbf{x} est dit ergodique en moyenne si la suite $(m_T)_{T \in \mathbb{R}^+}$ converge presque sûrement vers $m_{\mathbf{x}}$ quand $T \rightarrow \infty$.

Définition 7.4.18 (ergodisme relatif à l'autocorrélation) On suppose que le signal aléatoire \mathbf{x} est SSL et d'autocorrélation $R_{\mathbf{x}}(\tau)$. Soit $R_T(\tau)$ la variable aléatoire définie comme :

$$R_T(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathbf{x}(t) \mathbf{x}(t + \tau) dt.$$

Le signal aléatoire \mathbf{x} est dit ergodique relativement à son autocorrélation si pour tout τ , la suite $(R_T(\tau))_{T \in \mathbb{R}^+}$ converge en moyenne quadratique vers $R_{\mathbf{x}}(\tau)$ quand $T \rightarrow \infty$.

L'ergodicité d'un signal aléatoire SSL est difficilement vérifiable dans la pratique. La plupart du temps, il s'agit d'une hypothèse de travail qu'on pose pour simplifier un problème. Comme on le verra par la suite, lorsque l'on veut estimer les moments d'un signal aléatoire à partir d'une seule de ses réalisations, l'hypothèse d'ergodicité permet d'assurer la consistance de l'estimateur.

Définition 7.4.19 (densité spectrale de puissance) Si le signal aléatoire \mathbf{x} est SSL, on définit sa densité spectrale de puissance (DSP), notée $S_{\mathbf{x}}$, comme la transformée de Fourier de son autocorrélation $R_{\mathbf{x}}$, si elle existe :

$$S_{\mathbf{x}}(f) \triangleq \mathcal{F}[R_{\mathbf{x}}(\tau)] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} R_{\mathbf{x}}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau.$$

THÉORÈME 7.4.1 Wiener-Khintchine.

Soit le signal aléatoire \mathbf{x} SSL et d'autocorrélation $R_{\mathbf{x}}(\tau)$ continue intégrable sur \mathbb{R} et de DSP $S_{\mathbf{x}}$. On définit l'intégrale stochastique

$$\mathbf{x}_T(f) \triangleq \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathbf{x}(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

et la quantité

$$S_T(f) \triangleq \frac{1}{T} E\{|\mathbf{x}_T(f)|^2\}.$$

Alors

$$\forall f \in \mathbb{R}, \lim_{T \rightarrow \infty} [S_T(f)] = S_{\mathbf{x}}(f)$$

La moyenne, l'autocorrélation et la DSP d'un signal aléatoire SSL sont des quantités utiles pour le caractériser. Un problème qui se pose est celui de l'estimation de ces quantités à partir d'une seule réalisation tronquée (*i.e.* disponible sur un intervalle à bornes dans \mathbb{R}) du signal.

7.5 CARACTÉRISTIQUES DES ESTIMATEURS

Soit \mathbf{x} une variable aléatoire continue dont la ddp $f_{\mathbf{x}}(x; \theta)$ est paramétrée par θ (e.g. une ddp gaussienne centrée paramétrée par sa variance). On souhaite avoir une idée du paramètre θ en ayant à disposition n réalisations de \mathbf{x} : $\mathbf{x}(\omega_1), \dots, \mathbf{x}(\omega_n)$. Pour formaliser le problème, on peut définir n variables aléatoire iid $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ ayant la même ddp que \mathbf{x} , et considérer que $\mathbf{x}(\omega_1), \dots, \mathbf{x}(\omega_n)$ sont les réalisations respectives de $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$. Un estimateur du paramètre θ est une statistique $\hat{\theta}_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ dont on espère qu'elle soit «proche» du paramètre θ (sous réserve de définir la notion de «proche» pour des variables aléatoires, ce que nous verrons par la suite). En général, pour la suite, on n'écrira plus explicitement la dépendance de $\hat{\theta}_n$ vis-à-vis de $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, et on confondra souvent par abus de langage la variable aléatoire $\hat{\theta}_n$ avec la suite de variables aléatoires $(\hat{\theta}_n)_{n \geq 1}$. À noter que l'on considère ici que θ est un paramètre réel, et non une variable aléatoire. On se place donc dans le cadre de l'estimation au sens de Fisher (par opposition à l'estimation bayésienne, où θ est considéré comme une variable aléatoire de ddp a priori connue). La définition du problème d'estimation s'étend au cas des vecteurs et signaux aléatoires, et on peut considérer dans le cas général un vecteur de paramètres à estimer.

Définition 7.5.1 (convergence en probabilité) On dit qu'une suite de variables aléatoire $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers \mathbf{x} si :

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}| \geq \epsilon\} = 0.$$

À noter que \mathbf{x} peut ici être vu comme un réel ou comme une variable aléatoire.

Propriété 7.5.1 $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers $\mathbf{x} \Rightarrow (\mathbf{x}_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers \mathbf{x} .

Définition 7.5.2 (consistance) Un estimateur $\hat{\theta}_T$ de θ est dit consistant si la suite $(\hat{\theta}_T)_{T \in \mathbb{R}^+}$ converge en probabilité vers θ quand $T \rightarrow \infty$.

Définition 7.5.3 (biais) Le biais d'un estimateur $\hat{\theta}_T$ de θ est défini comme :

$$b_{\hat{\theta}_T}(\theta) = E\{\hat{\theta}_T\} - \theta.$$

Un estimateur est dit non-biaisé lorsque son biais est nul.

Définition 7.5.4 (variance) La variance d'un estimateur $\hat{\theta}_T$ de θ est définie comme :

$$v_{\hat{\theta}_T} = E\{(\hat{\theta}_T - E\{\hat{\theta}_T\})^2\}.$$

Définition 7.5.5 (erreur quadratique moyenne) L'erreur quadratique moyenne (EQM) d'un estimateur $\hat{\theta}_T$ de θ est définie comme :

$$e_{\hat{\theta}_T}(\theta) = E\{(\hat{\theta}_T - \theta)^2\}.$$

THÉORÈME 7.5.1 Inégalité de Tchebycheff.

Soit \mathbf{x} une variable aléatoire de moyenne $m_{\mathbf{x}}$ et de variance $v_{\mathbf{x}}$.

$$\forall \epsilon > 0, P(|\mathbf{x} - m_{\mathbf{x}}| \geq \epsilon) \leq \frac{v_{\mathbf{x}}}{\epsilon^2}$$

Propriété 7.5.2 Soit $\hat{\theta}_T$ un estimateur de la variable aléatoire θ , $b_T(\theta)$ son biais et $v_T(\theta)$ sa variance. Si $\lim_{T \rightarrow \infty} b_T(\theta) = 0$ et $\lim_{T \rightarrow \infty} v_T(\theta) = 0$ alors $\hat{\theta}_T$ est consistant.

La propriété 7.5.2 découle directement du théorème 7.5.1. Ainsi, dans la pratique, pour montrer qu'un estimateur est consistant, on calcule son biais et sa variance et on montre qu'ils convergent vers zéro.

7.6 PREUVE DU THÉORÈME 4.1.1

Pour obtenir l'équation d'état à temps discret pour des torseurs cinématiques BOZ à partir de l'équation d'état à temps continu (1.2.51), il faut résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} \dot{e}_y = -v_{Ry} + \omega e_z + v_{Ey} \cos \lambda - v_{Ez} \sin \lambda & (7.6.1a) \\ \dot{e}_z = -v_{Rz} - \omega e_y + v_{Ey} \sin \lambda + v_{Ez} \cos \lambda & (7.6.1b) \\ \dot{\lambda} = -\omega & (7.6.1c) \end{cases}$$

sur un intervalle $[kT_s, (k+1)T_s]$, en maintenant $[v_{Ry}, v_{Rz}, \omega, v_{Ey}, v_{Ez}]'$ constant sur $[kT_s, (k+1)T_s[$. Sans perte de généralité, on établit la démonstration sur $[0, T_s]$. la valeur de $[v_{Ry}, v_{Rz}, \omega, v_{Ey}, v_{Ez}]'$ sur $[0, T_s[$ est notée $[v_{Ry0}, v_{Rz0}, \omega_0, v_{Ey0}, v_{Ez0}]'$. De (7.6.1c) on déduit une solution triviale pour λ

$$\lambda(t) = \lambda_0 - \omega_0 t. \quad (7.6.2)$$

En injectant (7.6.2) dans (7.6.1a) et (7.6.1b) et en utilisant des relations trigonométriques usuelles, on obtient

$$\begin{cases} \dot{e}_y = -v_{Ry0} + \omega_0 e_z + \alpha c_\omega + \beta s_\omega & (7.6.3a) \\ \dot{e}_z = -v_{Rz0} - \omega_0 e_y + \beta c_\omega - \alpha s_\omega, & (7.6.3b) \end{cases}$$

avec $c_\omega(t) \triangleq \cos(\omega_0 t)$, $s_\omega(t) \triangleq \sin(\omega_0 t)$ et

$$\begin{cases} \alpha \triangleq v_{Ey0} \cos \lambda_0 - v_{Ez0} \sin \lambda_0 & (7.6.4a) \\ \beta \triangleq v_{Ey0} \sin \lambda_0 + v_{Ez0} \cos \lambda_0. & (7.6.4b) \end{cases}$$

En dérivant (7.6.3b) par rapport au temps (resp. (7.6.3a)) et en injectant (7.6.3a) (resp. (7.6.3b)) dans l'équation résultante, on obtient le système d'équations différentielles découplé suivant

$$\begin{cases} \ddot{e}_y + \omega_0^2 e_y = -\omega_0 v_{Rz0} + 2\omega_0(\beta c_\omega - \alpha s_\omega) & (7.6.5a) \\ \ddot{e}_z + \omega_0^2 e_z = \omega_0 v_{Ry0} - 2\omega_0(\alpha c_\omega + \beta s_\omega), & (7.6.5b) \end{cases}$$

de sorte que e_y (resp. e_z) peut s'exprimer comme la somme d'une solution homogène $e_y^{(h)}$ (resp. $e_z^{(h)}$) et d'une solution particulière $e_y^{(p)}$ (resp. $e_z^{(p)}$), conformément à

$$\begin{cases} e_u^{(h)} = A_u c_\omega + B_u s_\omega, & (7.6.6a) \\ e_u^{(p)} = a_u c_\omega + b_u s_\omega + C_u, & (7.6.6b) \end{cases}$$

où $u \in \{x, y\}$. Ci-dessus, A_u, B_u, C_u sont des constantes, tandis que a_u, b_u sont fonction du temps. La forme des solutions particulières a été déterminée à partir de la forme des termes de droite dans (7.6.5a)–(7.6.5b). Puisque $e_y^{(p)}$ et $e_z^{(p)}$ sont des solutions de (7.6.5a) et (7.6.5b) respectivement, alors

$$\ddot{e}_u^{(p)} + \omega_0^2 e_u^{(p)} = \ddot{a}_u c_\omega + \ddot{b}_u s_\omega + 2\omega_0[\dot{b}_u c_\omega - \dot{a}_u s_\omega] + \omega_0^2 C_u \quad (7.6.7)$$

doit évaluer le terme de droite de (7.6.5a) pour $u = y$ et le terme de droite de (7.6.5b) pour $u = z$. Voici des conditions suffisantes

$$a_y(t) = \alpha t \quad ; \quad a_z(t) = \beta t \quad (7.6.8)$$

$$b_y(t) = \beta t \quad ; \quad b_z(t) = -\alpha t \quad (7.6.9)$$

$$C_y = -\frac{v_{Rz0}}{\omega_0} \quad ; \quad C_z = \frac{v_{Ry0}}{\omega_0}. \quad (7.6.10)$$

e_y and e_z s'écrivent donc

$$\begin{cases} e_y(t) = [A_y + \alpha t]c_\omega(t) + [B_y + \beta t]s_\omega(t) - \frac{v_{Rz0}}{\omega_0} \\ e_z(t) = [A_z + \beta t]c_\omega(t) + [B_z - \alpha t]s_\omega(t) + \frac{v_{Ry0}}{\omega_0}. \end{cases} \quad (7.6.11a)$$

$$(7.6.11b)$$

Les constantes A_y, A_z sont obtenues en évaluant e_y, e_z à l'instant initial

$$\begin{cases} A_y = e_{y0} + \frac{v_{Rz0}}{\omega_0} \\ A_z = e_{z0} - \frac{v_{Ry0}}{\omega_0}, \end{cases} \quad (7.6.12a)$$

$$(7.6.12b)$$

tandis que B_y, B_z sont obtenues en évaluant \dot{e}_y, \dot{e}_z à l'instant initial (*i.e.* en dérivant (7.6.11a)–(7.6.11b) par rapport au temps et en comparant le résultat à (7.6.3a)–(7.6.3b) à l'instant initial)

$$\begin{cases} B_y = e_{z0} - \frac{v_{Ry0}}{\omega_0} \\ B_z = -e_{y0} - \frac{v_{Rz0}}{\omega_0}. \end{cases} \quad (7.6.13a)$$

$$(7.6.13b)$$

Des calculs subsidiaires mènent finalement à

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e_y(t) \\ e_z(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) & 0 \\ -\sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{y0} \\ e_{z0} \\ \lambda_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} & \frac{\cos(\omega_0 t)-1}{\omega_0} & 0 \\ -\frac{\cos(\omega_0 t)-1}{\omega_0} & -\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} & 0 \\ 0 & 0 & -t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Ry0} \\ v_{Rz0} \\ \omega_0 \end{bmatrix} \\ &+ t \begin{bmatrix} \cos(\lambda_0 - \omega_0 t) & -\sin(\lambda_0 - \omega_0 t) \\ \sin(\lambda_0 - \omega_0 t) & \cos(\lambda_0 - \omega_0 t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Ey0} \\ v_{Ez0} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7.6.14)$$

pour $t \in [0, T_s]$. L'évaluation en $t = T_s$ donne la relation de récurrence entre les itérations 0 et 1. Le résultat peut être étendu aux itérations k et $k + 1$ pour n'importe quel entier k .

Liste des acronymes

ITF <i>Interaural Transfer Function</i>	70
RFS <i>Random Finite Set</i>	177
PHD <i>Probability Hypothesis Density</i>	178
ETR Estimation de Temps de Retard	58
CC Corrélation Croisée	9
EMV Estimateur par Maximum de Vraisemblance	54
DSP Densité Spectrale de Puissance	23
TRV Test du Rapport de Vraisemblance	61
TRVG Test du Rapport de Vraisemblance Généralisé	89
ddp densité de probabilité	29
iid indépendants et identiquement distribués	74
RSB Rapport Signal-à-Bruit	50
IPD <i>Interaural Phase Difference</i> (différence interaurale en phase)	7
ITD <i>Interaural Time Difference</i> (différence interaurale en temps)	7
ILD <i>Interaural Level Difference</i> (différence interaurale en amplitude)	7
EM Espérance-Maximisation	76

EMG Espérance-Maximisation Généralisé	171
SSL Stationnaire au Sens Large	24
AR Auto Régressif	41
MA Moyenne Ajustée	43
ARMA AutoRégressif à Moyenne Ajustée	44
AIC <i>Akaike Information Criterion</i>	42
MAICE <i>Minimum Akaike Information Criterion Estimate</i>	90
PLV Pseudo Log-Vraisemblance	83
EQM Erreur Quadratique Moyenne	83
DST Développement en Série de Taylor	99
HRTF <i>Head-Related Transfer Function</i>	7
RRIR <i>Room Related Impulse Response</i>	67
MMI Modèles Multiples Interactifs	131
TFCT Transformée de Fourier Court Terme	80
TFD Transformée de Fourier Discrète	80

Liste des Algorithmes

1	Estimation court terme d'azimut, cas de figure 1	80
2	Sorties = Sigma-Point(Entrées) Calcul de σ -points	100
3	Sorties = Moy(Entrées) Moyenne empirique de σ -points	100
4	Sorties=Corr(Entrées) Corrélation empirique de σ -points	100
5	Sorties=FKU(Entrées) Filtre de Kalman Unscented, cas de bruits additifs centrés	101
6	Sorties=FKU-MH(Entrées) FKU Multi-Hypothèses	104
7	Sorties=FKU-MG(Entrées) FKU à mélange de Gaussiennes	106
8	Sorties=FKU-MH-GFM(Entrées) FKU Multi-Hypothèses à Gestion de Fausses Mesures	125
9	Sorties=FKU-MH-PDA(Entrées) FKU-MH à Association de Données Probabiliste	130
10	Sorties=FBTRVG1(Entrées) Filtre basé sur le TRVG 1	133
11	Sorties=FBTRVG2(Entrées) Filtre basé sur le TRVG 2	134
12	Sorties=FBMMI(Entrées) Filtre basé sur les MMI	141
13	Sorties=FKU-VMG(Entrées) FKU à Vraisemblance Multi-gaussiennes	151
14	EM Basé sur la Parcimonie Temps-Fréquence (EMBPTF)	168
15	EMG Basé sur les Sources comme Données Latentes (EMGBSDL)	172
16	EM Basé sur l'Indépendance des Sources (EMBIS)	176

Bibliographie

- [Aidala, 1979] AIDALA, V. (1979). Kalman filter behavior in bearings-only tracking applications. *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, AES-15(1):29–39.
- [Aidala et Hammel, 1983] AIDALA, V. et HAMMEL, S. (1983). Utilization of modified polar coordinates for bearings-only tracking. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 28(3):283–294.
- [Akaike, 1974] AKAIKE, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 19(6):716–723.
- [Alspach et Sorenson, 1972] ALSPACH, D. et SORENSON, H. (1972). Nonlinear bayesian estimation using Gaussian sum approximations. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 17(4):439–448.
- [Anderson, 1984] ANDERSON, T. (1984). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. Wiley Series in Probability and Statistics - Applied Probability and Statistics Section Series. Wiley.
- [Arulampalam *et al.*, 2002] ARULAMPALAM, M. S., MASKELL, S. et GORDON, N. (2002). A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 50:174–188.
- [Bar-Shalom et Li, 1993] BAR-SHALOM, Y. et LI, X. (1993). *Estimation and Tracking : Principles, Techniques and Software*. Artech House.
- [Bar-Shalom et Li, 1995] BAR-SHALOM, Y. et LI, X. (1995). *Multitarget-Multisensor Tracking : Principles and Techniques*. YBS Publishing.
- [Benesty, 2000] BENESTY, J. (2000). Adaptive eigenvalue decomposition algorithm for passive acoustic source localization. *J. Acoust. Soc. Am*, 107(1):384–391.
- [Berglund et Sitte, 2005] BERGLUND, E. et SITTE, J. (2005). Sound source localisation through active audition. *In Intelligent Robots and Systems, 2005. (IROS 2005). 2005 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 653–658.
- [Bernard *et al.*, 2010] BERNARD, M., N’GUYEN, S., PIRIM, P., GAS, B. et MEYER, J.-A. (2010). Phonotaxis behavior in the artificial rat Psikharpax. *In Int. Symposium on Robotics and Intelligent Sensors (IRIS’2010)*, pages 118–122, Nagoya, Japan.
- [Blackman et Tukey, 1958] BLACKMAN, R. et TUKEY, J. (1958). *The measurement of power spectra, from the point of view of communications engineering*. Dover books on engineering and engineering physics. Dover Publications.

- [Blandin *et al.*, 2011a] BLANDIN, C., OZEROV, A. et VINCENT, E. (2011a). Multi-source TDOA estimation in reverberant audio using angular spectra and clustering. Research Report RR-7566, INRIA.
- [Blandin *et al.*, 2011b] BLANDIN, C., VINCENT, E. et OZEROV, A. (2011b). Multi-source TDOA estimation using SNR-based angular spectra. *In Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2011 IEEE International Conference on*, pages 2616–2619.
- [Blom et Bar-Shalom, 1988] BLOM, H. A. P. et BAR-SHALOM, Y. (1988). The interacting multiple model algorithm for systems with markovian switching coefficients. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 33(8):780–783.
- [Brehard et Le Cadre, 2007] BREHARD, T. et LE CADRE, J.-P. (2007). Hierarchical particle filter for bearings-only tracking. *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, 43(4):1567–1585.
- [Brèthes *et al.*, 2010] BRÈTHES, L., LERASLE, F., DANÈS, P. et FONTMARTY, M. (2010). Particle filtering strategies for data fusion dedicated to visual tracking from a mobile robot. *Machine Vision and Applications*, 21:427–448.
- [Cardoso, 1990] CARDOSO, J.-F. (1990). Localisation et identification par la quadricovariance. *Traitement du Signal*, 7(5):397–406.
- [Cardoso, 1991] CARDOSO, J.-F. (1991). Higher-Order narrow band array processing. *In Proc. Intl. Workshop on Higher-Order Stat., Chamrousse, France*, pages 121–130.
- [Carter *et al.*, 1973a] CARTER, G., KNAPP, C. et NUTTALL, A. (1973a). Estimation of the magnitude-squared coherence function via overlapped fast fourier transform processing. *Audio and Electroacoustics, IEEE Transactions on*, 21(4):337 – 344.
- [Carter et Knapp, 1975] CARTER, G. C. et KNAPP, C. (1975). Coherence and its estimation via the partitioned modified chirp-z transform. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, 23(3):257–264.
- [Carter *et al.*, 1973b] CARTER, G. C., NUTTALL, A. H. et CABLE, P. (1973b). The smoothed coherence transform. *Proceedings of the IEEE*, 61(10):1497–1498.
- [Champagne *et al.*, 1996] CHAMPAGNE, B., BEDARD, S. et STEPHENNE, A. (1996). Performance of time-delay estimation in the presence of room reverberation. *Speech and Audio Processing, IEEE Transactions on*, 4(2):148–152.
- [Chan *et al.*, 1978] CHAN, Y., HATTIN, R. et PLANT, J. B. (1978). The least squares estimation of time delay and its use in signal detection. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, 26(3):217–222.
- [Chan et Miskowicz, 1984] CHAN, Y. et MISKOWICZ, R. (1984). Estimation of coherence and time delay with arma models. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 32(2).
- [Chazan *et al.*, 1975] CHAZAN, D., ZAKAI, M. et ZIV, J. (1975). Improved lower bounds on signal parameter estimation. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 21(1):90 – 93.
- [Chow et Schultheiss, 1981] CHOW, S. et SCHULTHEISS, P. (1981). Delay estimation using narrow-band processes. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 29(3).
- [Cooke *et al.*, 2007] COOKE, M., LU, Y.-C., LU, Y. et HORAUD, R. (2007). Active hearing, active speaking. *In* DAU, T., BUCHHOLZ, J. M., HARTE, J. M. et CHRISTIANSEN, T. U., éditeurs : *International Symposium on Auditory and Audiological Research (ISAAR '07)*.

- [Cramér, 1999] CRAMÉR, H. (1999). *Mathematical Methods of Statistics (PMS-9)*. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics. Princeton University Press.
- [Danes et Bonnal, 2010] DANES, P. et BONNAL, J. (2010). Information-theoretic detection of broadband sources in a coherent beamspace music scheme. *In Intelligent Robots and Systems (IROS), 2010 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 1976–1981.
- [Deleforge et Horaud, 2011] DELEFORGE, A. et HORAUD, R. (2011). Learning the Direction of a Sound Source Using Head Motions and Spectral Features. Rapport de recherche RR-7529, INRIA.
- [Deleforge et Horaud, 2012] DELEFORGE, A. et HORAUD, R. (2012). The cocktail party robot : Sound source separation and localisation with an active binaural head. *In in IEEE/ACM International Conference on Human Robot Interaction*.
- [Dempster *et al.*, 1977] DEMPSTER, A. P., LAIRD, N. M. et RUBIN, D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. *Journal Of The Royal Statistical Society, Series B*, 39(1):1–38.
- [Deville, 2011] DEVILLE, Y. (2011). *Traitement du signal - Signaux temporels et spatiotemporels : Analyse des signaux, théorie de l'information, traitement d'antenne, séparation aveugle de sources*. TECHNOSUP : les filières technologiques des enseignements supérieurs. Ellipses Marketing.
- [Djuric et Kay, 1998] DJURIC, P. et KAY, S. (1998). Spectrum estimation and modeling. *In MADISSETTI, V. et WILLIAMS, D., éditeurs : The Digital Signal Processing Handbook*. C R C Press LLC.
- [Dogan et Mendel, 1995] DOGAN, M. C. et MENDEL, J. M. (1995). Applications of cumulants to array processing .I. Aperture extension and array calibration. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 43(5).
- [Doron *et al.*, 1993] DORON, M., WEISS, A. et MESSER, H. (1993). Maximum-likelihood direction finding of wide-band sources. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 41(1):411–.
- [Doucet *et al.*, 2000] DOUCET, A., GODSILL, S. et ANDRIEU, C. (2000). On sequential monte carlo sampling methods for bayesian filtering. *Statistics and Computing*, 10(3):197–208.
- [Duda et Martens, 1998] DUDA, R. O. et MARTENS, W. L. (1998). Range dependence of the response of a spherical head model. *Journal of the Acoustic Society of America*, 104:3048–3058.
- [Ephraim et Malah, 1984] EPHRAIM, Y. et MALAH, D. (1984). Speech enhancement using a minimum-mean square error short-time spectral amplitude estimator. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, 32(6):1109–1121.
- [Feder et Weinstein, 1988] FEDER, M. et WEINSTEIN, E. (1988). Parameter estimation of superimposed signals using the EM algorithm. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, 36(4):477–489.
- [Goodman *et al.*, 1997] GOODMAN, I., MAHLER, R. et NGUYEN, H. (1997). *Mathematics of Data Fusion*. NATO Asi Series. Springer.
- [Gordon *et al.*, 1993] GORDON, N. J., SALMOND, D. J. et SMITH, A. F. M. (1993). Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation. *Iee Proceedings F Radar and Signal Processing*, 140.
- [Gustafsson, 2000] GUSTAFSSON, F. (2000). *Adaptive filtering and change detection*. Wiley.

- [Gustafsson *et al.*, 2003] GUSTAFSSON, T., RAO, B. et TRIVEDI, M. (2003). Source localization in reverberant environments : modeling and statistical analysis. *Speech and Audio Processing, IEEE Transactions on*, 11(6):791–803.
- [Handzel et Krishnaprasad, 2002] HANDZEL, A. et KRISHNAPRASAD, P. (2002). Biomimetic sound-source localization. *IEEE Sensors Journal*, 2(6):607–616.
- [Hannan et Thomson, 1973] HANNAN, E. et THOMSON, P. (1973). Estimating group delay. *Biometrika*, 60(2):241 – 253.
- [Izumi *et al.*, 2007] IZUMI, Y., ONO, N. et SAGAYAMA, S. (2007). Sparseness-based 2CH BSS using the EM algorithm in reverberant environment. *In Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics, 2007 IEEE Workshop on*, pages 147–150.
- [Jaffer, 1988] JAFFER, A. (1988). Maximum likelihood direction finding of stochastic sources : a separable solution. *In Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1988. ICASSP-88., 1988 International Conference on*, pages 2893–2896 vol.5.
- [Jazwinski, 1970] JAZWINSKI, A. (1970). *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Mathematics in Science and Engineering. Elsevier Science.
- [Julier, 2002] JULIER, S. (2002). The scaled unscented transformation. *In American Control Conference, 2002. Proceedings of the 2002*, volume 6, pages 4555–4559 vol.6.
- [Julier et Uhlmann, 1997] JULIER, S. J. et UHLMANN, J. K. (1997). New extension of the Kalman filter to nonlinear systems. *In KADAR, I., éditeur : Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, volume 3068, pages 182–193.
- [Kalman, 1960] KALMAN, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME—Journal of Basic Engineering*, 82(Series D):35–45.
- [Kay, 1988] KAY, S. (1988). *Modern Spectral Estimation : Theory and Application/Book and Disk*. Prentice-Hall Signal Processing Series : Advanced monographs. PTR Prentice Hall.
- [Knapp et Carter, 1976] KNAPP, C. et CARTER, G. (1976). The generalized correlation method for estimation of time delay. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, 24(4):320 – 327.
- [Kneip et Baumann, 2008] KNEIP, L. et BAUMANN, C. (2008). Binaural model for artificial spatial sound localization based on interaural time delays and movements of the interaural axis. *J Acoust Soc Am*, 124(5):3108–19.
- [Kotecha *et al.*, 2003] KOTECHA, J. H., DJURIĆ, P. M., MEMBER, S. et I, T. (2003). Gaussian sum particle filtering. *In Signal Processing 51*, pages 2602–2612.
- [Lafraquière *et al.*, 2010] LAFLAQUIÈRE, A., ARGENTIERI, S., GAS, B. et CASTILLO-CASTENADA, E. (2010). Space dimension perception from the multimodal sensorimotor flow of a naive robotic agent. *In Intelligent Robots and Systems (IROS), 2010 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 1520–1525.
- [Ljung, 1987] LJUNG, L. (1987). *System identification : theory for the user*. Prentice-Hall information and system sciences series. Prentice-Hall.
- [Lu et Cooke, 2010] LU, Y.-C. et COOKE, M. (2010). Motion strategies for binaural localisation of speech sources in azimuth and distance by artificial listeners. *Speech Communication*.
- [Lunati *et al.*, 2012] LUNATI, V., MANHES, J. et DANÈS, P. (2012). A versatile system-on-a-programmable-chip for array processing and binaural robot audition. *In Intelligent Robots and Systems (IROS), 2012 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 998–1003.

- [Ma *et al.*, 2006] MA, W.-K., VO, B.-N., SINGH, S. et BADDELEY, A. (2006). Tracking an unknown time-varying number of speakers using TDOA measurements : a random finite set approach. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 54(9):3291–3304.
- [Macdonald et Schultheiss, 1969] MACDONALD, V. et SCHULTHEISS, P. (1969). Optimum passive bearing estimation in a spatially incoherent noise environment. *J. Acoust. Soc. Am*, 46:37 – 43.
- [Mahler, 2003] MAHLER, R. (2003). Multitarget bayes filtering via first-order multitarget moments. *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, 39(4):1152–1178.
- [Marković et Petrović, 2010] MARKOVIĆ, I. et PETROVIĆ, I. (2010). Speaker localization and tracking with a microphone array on a mobile robot using von Mises distribution and particle filtering. *Robotics and Autonomous Systems*, 58(11):1185 – 1196.
- [Marković *et al.*, 2014] MARKOVIĆ, I., PORTELLO, A., DANÈS, P., PETROVIĆ, I. et ARGENTIERI, S. (2014). Active speaker localization with circular likelihoods and bootstrap filtering. *In IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. in press.
- [Marple, 1986] MARPLE, S. L. (1986). *Digital spectral analysis : with applications*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA.
- [Matheron, 1975] MATHERON, G. (1975). *Random sets and integral geometry*. Wiley series in probability and mathematical statistics : Probability and mathematical statistics. Wiley.
- [Merwe et Wan, 2003] MERWE, R. et WAN, E. (2003). Gaussian mixture sigma-point particle filters for sequential probabilistic inference in dynamic state-space models. *In Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), Hong Kong*, pages 701–704. IEEE.
- [Michaud. *et al.*, 2007] MICHAUD., F., CÔTÉ., C., D, L., Y, B., VALIN, J., BEAUDRY, E., RAÏEVSKY, C., PONCHON, A., MOISAN, P., LEPAGE, P., MORIN, Y., GAGNON, F., GIGUÈRE, P., ROUX, M., CARON, S., FRENETTE, P. et KABANZA, F. (2007). Spartacus attending the 2005 AAI conference. *Autonomous Robots*, 22:369–383.
- [Morse et Ingard, 1968] MORSE, P. et INGARD, K. (1968). *Theoretical acoustics*. International series in pure and applied physics. McGraw-Hill.
- [Nakadai *et al.*, 2000] NAKADAI, K., LOURENS, T., OKUNO, H. G. et KITANO, H. (2000). Active audition for humanoid. *In Proceedings of 17th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-2000) (2000), AAAI*, pages 832–839. AAAI.
- [Nakadai *et al.*, 2003a] NAKADAI, K., MATSUURA, D., OKUNO, H. G. et KITANO, H. (2003a). Applying scattering theory to robot audition system : Robust sound source localization and extraction. *In Proceedings IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2003*, pages 1147–1152.
- [Nakadai *et al.*, 2002] NAKADAI, K., OKUNO, H. et KITANO, H. (2002). Auditory fovea based speech separation and its application to dialog system. *In Intelligent Robots and Systems, 2002. IEEE/RSJ International Conference on*, volume 2, pages 1320–1325 vol.2.
- [Nakadai *et al.*, 2003b] NAKADAI, K., OKUNO, H. et KITANO, H. (2003b). Robot recognizes three simultaneous speech by active audition. *In Robotics and Automation, 2003. Proceedings. ICRA '03. IEEE International Conference on*, volume 1, pages 398–405 vol.1.
- [Nakadai *et al.*, 2010] NAKADAI, K., TAKAHASHI, T., OKUNO, H., NAKAJIMA, H., HASEGAWA, Y. et TSUJINO, H. (2010). Design and implementation of robot audition system HARK. *Advanced Robotics*, 24(5–6):739–761.

- [Nehorai *et al.*, 1983] NEHORAI, A., SU, G. et MORF, M. (1983). Estimation of time differences of arrival by pole decomposition. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, 31(6):1478–1492.
- [Nuttall et Chief Of Naval Development Washington DC., 1975] NUTTALL, A. et CHIEF OF NAVAL DEVELOPMENT WASHINGTON DC. (1975). *Estimation of Cross-Spectra Via Overlapped Fast Fourier Transform Processing*. Defense Technical Information Center.
- [Okuno *et al.*, 2004] OKUNO, H., OGATA, T., KOMATANI, K. et NAKADAI, K. (2004). Computational auditory scene analysis and its application to robot audition. In *IEEE Int. Conf. on Informatics Research for Development of Knowledge Society Infrastructure (ICKS'2004)*, pages 73–80.
- [O'Regan, 2011] O'REGAN, J. (2011). *Why Red Doesn't Sound Like a Bell : Understanding the Feel of Consciousness*. Oxford University Press, USA.
- [Ozerov et Févotte, 2010] OZEROV, A. et FÉVOTTE, C. (2010). Multichannel nonnegative matrix factorization in convolutive mixtures for audio source separation. *Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on*, 18(3):550–563.
- [Papoulis, 1977] PAPOULIS, A. (1977). *Signal analysis*. McGraw-Hill electrical and electronic engineering series. McGraw-Hill.
- [Papoulis, 1984] PAPOULIS, A. (1984). *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill Series in Electrical Engineering. McGraw-Hill.
- [Peach, 1995] PEACH, N. (1995). Bearings-only tracking using a set of range-parameterised extended kalman filters. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings -*, 142(1):73–80.
- [Pitt et Shephard, 1999] PITT, M. K. et SHEPHARD, N. (1999). Filtering via Simulation : Auxiliary Particle Filters. *Journal of the American Statistical Association*, 94(446):590–599.
- [Porat et Friedlander, 1983] PORAT, B. et FRIEDLANDER, B. (1983). Estimation of spatial and spectral parameters of multiple sources. *IEEE Transactions on Information Theory*, 29(3):412–425.
- [Porat et Friedlander, 1990] PORAT, B. et FRIEDLANDER, B. (1990). Direction finding algorithms based on high-order statistics. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990. ICASSP-90., 1990 International Conference on*, pages 2675–2678 vol.5.
- [Rao, 1992] RAO, C. (1992). Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters. In KOTZ, S. et JOHNSON, N., éditeurs : *Breakthroughs in Statistics*, Springer Series in Statistics, pages 235–247. Springer New York.
- [Raspaud *et al.*, 2010] RASPAUD, M., VISTE, H. et EVANGELISTA, G. (2010). Binaural source localization by joint estimation of ILD and ITD. *IEEE Trans. on Audio, Speech, and Language Processing*, 18(1):68–77.
- [Rayleigh, 1894] RAYLEIGH, J. (1894). *The theory of sound*. Macmillan and co.
- [Rissanen, 1978] RISSANEN, J. (1978). Modeling by shortest data description. *Automatica*, 14(5):465–471.
- [Rosenthal et Okuno, 1997] ROSENTHAL, D. et OKUNO, H., éditeurs (1997). *Computational Auditory Scene Analysis*. Lawrence Erlbaum Associates.
- [Roth, 1971] ROTH, P. R. (1971). Effective measurements using digital signal analysis. *Spectrum, IEEE*, 8(4):62–70.

- [Sawada *et al.*, 2007] SAWADA, H., ARAKI, S., MUKAI, R. et MAKINO, S. (2007). Grouping separated frequency components by estimating propagation model parameters in frequency-domain blind source separation. *Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on*, 15(5):1592–1604.
- [Scardovi, 2005] SCARDOVI, L. (2005). *Information Based Control for State and Parameter Estimation*. Thèse de doctorat, University of Genoa.
- [Segal *et al.*, 1991] SEGAL, M., WEINSTEIN, E. et MUSICUS, B. (1991). Estimate-maximize algorithms for multichannel time delay and signal estimation. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 39(1):1–16.
- [Sohn *et al.*, 1999] SOHN, J., KIM, N. S. et SUNG, W. (1999). A statistical model-based voice activity detection. *Signal Processing Letters, IEEE*, 6(1):1–3.
- [Toshima et Aoki, 2009] TOSHIMA, I. et AOKI, S. (2009). Possibility of simplifying head shape with the effect of head movement for an acoustical telepresence robot : Telehead. In *Intelligent Robots and Systems, 2009. IROS 2009. IEEE/RSJ International Conference on*, pages 193–198.
- [Valin *et al.*, 2006] VALIN, J., MICHAUD, F. et ROUAT, J. (2006). Robust 3d localization and tracking of sound sources using beamforming and particle filtering. In *In Proceedings International Conference on Audio, Speech and Signal Processing*, pages 841–844.
- [Van der Merwe et Wan, 2001a] Van der MERWE, R. et WAN, E. (2001a). The square-root unscented kalman filter for state and parameter-estimation. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2001. Proceedings. (ICASSP '01). 2001 IEEE International Conference on*, volume 6, pages 3461–3464 vol.6.
- [Van der Merwe et Wan, 2001b] Van der MERWE, R. et WAN, E. (2001b). The square-root unscented kalman filter for state and parameter-estimation. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing. IEEE International Conference on*, pages 3461–3464.
- [Van Trees, 2001] VAN TREES, H. (2001). *Detection, Estimation, and Modulation Theory*. Numéro vol. 1 de Detection, Estimation, and Modulation Theory. John Wiley & Sons.
- [Van Trees, 2002] VAN TREES, H. L. (2002). *Optimum Array Processing*, volume IV de *Detection, Estimation, and Modulation Theory*. John Wiley & Sons, Inc.
- [Vo et Ma, 2006] VO, B.-N. et MA, W.-K. (2006). The Gaussian Mixture Probability Hypothesis Density Filter. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 54(11):4091–4104.
- [Vo *et al.*, 2005] VO, B.-N., SINGH, S. et DOUCET, A. (2005). Sequential monte carlo methods for multi-target filtering with random finite sets. *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, 4(1).
- [Vo *et al.*, 2004] VO, B.-N., SINGH, S. et MA, W.-K. (2004). Tracking multiple speakers using random sets. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2004. Proceedings. (ICASSP '04). IEEE International Conference on*, volume 2, pages ii–357–60 vol.2.
- [Vo, 2008] VO, B. T. (2008). *Random Finite Sets in Multi-Object Filtering*. These, The University of Western Australia.
- [Ward *et al.*, 2003] WARD, D. B., LEHMANN, E. A. et WILLIAMSON, R. C. (2003). Particle filtering algorithms for tracking an acoustic source in a reverberant environment. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 11:826–836.
- [Wax et Kailath, 1985] WAX, M. et KAILATH, T. (1985). Detection of signals by information theoretic criteria. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, 33(2):387–392.

- [Weinstein et Weiss, 1984] WEINSTEIN, E. et WEISS, A. (1984). Fundamental limitations in passive time delay estimation - Part II : Wideband systems. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*.
- [Weiss et Weinstein, 1983] WEISS, A. et WEINSTEIN, E. (1983). Fundamental limitations in passive time delay estimation - Part I : Narrowband systems. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*.
- [Welch, 1967] WELCH, P. (1967). The use of fast fourier transform for the estimation of power spectra : A method based on time averaging over short, modified periodograms. *Audio and Electroacoustics, IEEE Transactions on*, 15(2):70 – 73.
- [Woodworth et Schlosberg, 1971] WOODWORTH, R. et SCHLOSBERG, H. (1971). *Experimental Psychology*. Holt, Rinehart and Winston, 3rd édition.
- [Ziomek, 1995] ZIOMEK, L. J. (1995). *Fundamentals of Acoustic Field Theory and Space-Time Signal Processing*. CRC Press.

Title :

Active Binaural Sound Sources Localisation in Humanoid Robotics

Abstract :

This thesis deals with the definition of algorithms for the localisation of still or moving sound sources from a mobile binaural sensor in robotics. The aim is to develop active strategies, combining left-right perceived signals with the sensor motor commands so as to overcome usual limitations in the case of a static world : resolve ambiguities (*e.g.* front-back), recover observability of variables, etc. The study focuses on two-step strategies : (1) extraction of spatial information and source activity detection from a short-term analysis of audio streams ; (2) temporal assimilation of these data and fusion with the sensor motor commands in a stochastic filtering scheme.

Titre :

Localisation Binaurale Active de Sources Sonores en Robotique Humanoïde

Directeurs de Thèse :

Patrick DANÈS, Professeur des Universités à l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier,
Sylvain ARGENTIERI, Maître de Conférences à l'Université Pierre et Marie Curie

Lieu et Date de Soutenance :

Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS, le 10 Décembre 2013

Résumé :

Cette thèse concerne la définition d'algorithmes pour la localisation de sources sonores (statiques ou mobiles) depuis un capteur binaural mobile en robotique. L'objectif est de développer des stratégies actives, qui combinent les signaux gauche-droite perçus et les ordres moteurs du capteur de façon à compenser les limitations usuelles dans le cas d'un monde statique : levée d'ambiguïtés (par exemple, avant-arrière), récupération de l'observabilité de certaines variables inobservables, etc. L'étude est focalisée sur des stratégies en deux étapes : (1) extraction d'information spatiale et détection d'activité relative à la/les sources par une analyse court-terme des flux audio ; (2) assimilation temporelle de ces données et fusion avec les ordres moteurs du capteur dans un schéma de filtrage stochastique.

Mots-clé :

Localisation de source ; Binaural ; Filtrage stochastique ; Détection d'activité de source ;
Estimation d'azimuth ; Estimation de temps de retard.

Discipline administrative :

Automatique

Intitulé et Adresse du Laboratoire :

Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS) du CNRS
7 Avenue du Colonel Roche, 31400 Toulouse