

Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

Présentée et soutenue par :

Laure JAEGER

Le lundi 14 octobre 2013

Titre :

Optimisation multidisciplinaire sous incertitude en phase conceptuelle avion

ED MEGEP : Génie mécanique, mécanique des matériaux

Unité de recherche :

Institut Clément Ader

Directeur(s) de Thèse :

M. Christian BES

Rapporteurs :

M. Nicolas GAYTON

M. Jean-Claude BOCQUET

Autre(s) membre(s) du jury :

M. Pierre VILLON président

M. Stéphane SEGONDS

M. Christian GOGU

CONTENTS

INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
I LES ENJEUX DE LA PHASE CONCEPTUELLE AVION	9
1 INTRODUCTION	11
2 POSITIONNEMENT DU PROBLÈME INDUSTRIEL	13
3 ASPECTS MULTIDISCIPLINAIRES ET MULTI-NIVEAUX DE LA PHASE CONCEPTUELLE AVION	19
3.1 Multidisciplinarité	19
3.2 Processus de développement multi-niveaux	22
II ÉTAT DE L'ART SUR L'OPTIMISATION EN UNIVERS INCERTAIN	25
4 INTRODUCTION	27
5 CARACTÉRISATION DES INCERTITUDES	29
5.1 Sources d'incertitude	29
5.2 Modélisation des incertitudes	31
6 OPTIMISATION MONO-DISCIPLINAIRE EN UNIVERS INCERTAIN	33
6.1 Optimisation robuste et fiabiliste	34
6.1.1 Méthode de Taguchi	35
6.1.2 Méthodes d'optimisation robuste	36
6.1.3 Optimisation fiabiliste de la conception	40
6.1.4 Combinaison optimisation fiabiliste et optimisation ro- buste	43
6.2 Algorithmes de résolution	44
6.2.1 Méthodes à gradient	44
6.2.2 Méthodes de recherche directe	45
6.2.3 Algorithmes évolutifs	46
6.2.4 Méthodes d'approximation	46
7 L'OPTIMISATION MULTIDISCIPLINAIRE	49
7.1 Méthodes de résolution déterministe	49
7.1.1 MDF (Multidisciplinary Feasible Design)	51
7.1.2 IDF (Individual discipline Feasible)	52
7.1.3 CO (Collaborative optimization)	53
7.1.4 CSSO (Concurrent Subspace Optimization)	54
7.1.5 BLISS (Bi-Level Integrated System Synthesis method)	55
7.1.6 Vers des approches informatiques : les systèmes multi- agent	57
7.2 Méthodes de propagation des incertitudes en optimisation mul- tidisciplinaire	60
7.2.1 Méthodes SUA (System Uncertainty Analysis) et CSSUA (Concurrent Subsystem Uncertainty Analysis)	61

7.2.2	Méthode de génération de fonctions de distribution	64
-------	--	----

III UNE NOUVELLE MÉTHODOLOGIE DE TRAITEMENT DE LA PHASE CONCEPTUELLE AVION 67

8	INTRODUCTION	69
9	PROCESSUS DE LA PHASE CONCEPTUELLE AU SEIN D’AIRBUS	71
10	MÉTHODOLOGIE DE MODÉLISATION DES INCERTITUDES	81
10.1	Techniques existantes de prise en compte des incertitudes durant la phase conceptuelle avion	81
10.2	Une méthodologie de prise en compte des incertitudes durant la phase conceptuelle avion	82
10.2.1	Selection des incertitudes de modèle prévalentes	82
10.2.2	Quantification des incertitudes de modélisation	85
10.2.3	Quantification des incertitudes de paramètres de conception	93
11	FORMULATION DU PROBLÈME EN PHASE CONCEPTUELLE SOUS INCERTITUDE	95
11.1	Problème conceptuel avion sous incertitude de modélisation	95
11.1.1	Formulation du problème	95
11.1.2	Modèles de substitution	97
11.2	Problème conceptuel avion sous incertitudes de modélisation et de variables de conception	104
12	RÉSOLUTION DIRECTE DU PROBLÈME D’OPTIMISATION	107
12.1	Optimisation en double boucle	107
12.2	Accélération par modèles de substitution	109
12.2.1	Optimisation sous incertitudes de modélisation	110
12.2.2	Optimisation sous incertitudes de modélisation et de variables de conception	112
12.3	Analyses	113
13	RÉSOLUTION PAR AGENTIFICATION	117
13.1	Architecture pour la résolution du problème	118
13.2	Méthodologie pour la gestion des incertitudes dans une approche multi-agent	123
13.2.1	Quelques généralités sur l’optimisation séquentielle	123
13.2.2	Méthodes d’optimisation séquentielle mises en oeuvre dans le cadre multi-agent	125
13.2.3	Propagation des incertitudes dans le système multi-agent	131
13.3	Résolution numérique	137
13.3.1	Cas test analytique	137
13.3.2	Cas test industriel simplifié : la phase conceptuelle avion	141
13.4	Analyses	147
14	SYNTHÈSE SUR LES APPORTS	149

CONCLUSION GÉNÉRALE 151**ANNEXES** 157

- A TECHNIQUES DE MODÉLISATION DES INCERTITUDES** 159
 - A.1 Cadre théorique de la théorie des probabilités 159
 - A.1.1 Approche probabiliste pour les incertitudes de type aléatoire 161
 - A.1.2 Approche probabiliste pour les incertitudes de type épistémique 162
 - A.2 Modélisation par intervalles 166
 - A.2.1 Analyse par intervalles 166
 - A.2.2 La théorie des ensembles flous 168
 - A.3 La théorie des possibilités 171
 - A.4 La théorie de l'évidence 181
 - A.5 Conclusion sur les différentes techniques de modélisation des incertitudes 188
- B TECHNIQUES D'OPTIMISATION MONO-DISCIPLINAIRE EN UNIVERS INCERTAIN** 191
 - B.1 Méthode du cas le plus défavorable 191
 - B.2 Optimisation sous la théorie de l'évidence 193
- C TECHNIQUES D'OPTIMISATION MULTIDISCIPLINAIRE EN UNIVERS INCERTAIN** 195
 - C.1 Méthode du cas le plus défavorable 195
 - C.2 Optimisation multidisciplinaire sous la théorie de l'évidence 198

BIBLIOGRAPHIE 201

LIST OF FIGURES

FIGURE 1.1	Les phases de la conception avion issues de [104]	11
FIGURE 2.1	Définition de la phase conceptuelle avion issue de [104]	14
FIGURE 2.2	Famille d'avions	15
FIGURE 3.1	Etude conceptuelle avion, décomposition en disciplines interdépendantes	20
FIGURE 3.2	Phases de la conception avion au sein d'Airbus	23
FIGURE 6.1	Minimisation de la performance f avec une incertitude introduite sur la variable de décision x	34
FIGURE 6.2	Fiabilité des contraintes	35
FIGURE 6.3	Recherche du point MPP	43
FIGURE 7.1	Exemple de système multidisciplinaire [99]	51
FIGURE 7.2	Méthode MDF	52
FIGURE 7.3	Méthode IDF	52
FIGURE 7.4	Méthode CO	53
FIGURE 7.5	Méthode CSSO	55
FIGURE 7.6	Méthode BLISS	56
FIGURE 7.7	Agentification du cas d'étude d'Alexandrov	58
FIGURE 7.8	Système multidisciplinaire décomposé en sous systèmes	62
FIGURE 7.9	Méthode SUA	62
FIGURE 7.10	Détermination des variables de couplage dans la méthode CSSUA	63
FIGURE 7.11	Étapes permettant de mettre en place la fonction de répartition (extrait de [33])	64
FIGURE 9.1	Profil de la mission de l'avion	73
FIGURE 9.2	Exemple $wA_{fus} = f(x)$	74
FIGURE 9.3	Description de l'étude conceptuelle avion utilisée au sein d'Airbus : SIMCAD	75
FIGURE 9.4	Le bouclage « masse/mission »	77
FIGURE 9.5	Optimisation déterministe	78
FIGURE 10.1	Comparaison entre les points réels de la base de données historiques et ceux obtenus par le biais du modèle de régression associé	87
FIGURE 10.2	Écart-type constant déterminé pour le paramètre F_{wing}	88
FIGURE 10.3	Fonction de densité construite à partir d'un noyau de lissage	89
FIGURE 10.4	Ajustement de l'écart-type à la fenêtre gaussienne	91
FIGURE 10.5	Comparaison des différents écarts-types pour le paramètre wA_{fus}	92

FIGURE 11.1	Construction d'un modèle de substitution à partir d'échantillons d'un code de calcul coûteux	98
FIGURE 11.2	Exemples de plans d'expériences	100
FIGURE 11.3	Évolution de la précision du modèle de substitution en fonction du temps de calculs	101
FIGURE 12.1	Résultats de l'optimisation probabiliste sous incertitude de modélisation, optimisation en double boucle	108
FIGURE 12.2	Résultats de l'optimisation sous incertitude de modélisation, modèles de substitution	110
FIGURE 12.3	Comparaison entre les résultats de l'optimisation probabiliste avec ou sans prise en compte des incertitudes affectant les variables de conception	113
FIGURE 13.1	Description de la phase conceptuelle avion simplifiée	120
FIGURE 13.2	Agentification de l'étude conceptuelle avion	121
FIGURE 13.3	Optimisation déterministe	121
FIGURE 13.4	Résolution de l'étude conceptuelle avion déterministe par la méthode multi-agent	122
FIGURE 13.5	Optimisation séquentielle à deux niveaux	126
FIGURE 13.6	Modification de la contrainte en introduisant un coefficient de sécurité	129
FIGURE 13.7	Organigramme de la méthode d'optimisation fiable séquentielle en boucle unique	130
FIGURE 13.8	Structure d'un agent vue des incertitudes	131
FIGURE 13.9	Propagation des incertitudes à travers un système multi-agent	132
FIGURE 13.10	Évolution de la distribution beta généralisée en fonction des valeurs des paramètres	133
FIGURE 13.11	Propagation des incertitudes à travers un agent modèle	135
FIGURE 13.12	Propagation des incertitudes à travers un agent fonction objectif	136
FIGURE 13.13	Propagation des incertitudes à travers un agent contrainte	136
FIGURE 13.14	Modélisation du problème analytique	138
FIGURE 13.15	Agentification du problème de conception avion simplifié sous incertitude	141
FIGURE 13.16	Résolution de l'optimisation probabiliste par tirages de Monte-Carlo par la méthode multi-agent	144
FIGURE 13.17	Optimisation séquentielle en boucle unique, résolution par l'approche multi-agent	146
FIGURE A.1	Exemple de fonction de distribution cumulative (CDF) et sa complémentaire (CCDF)	160
FIGURE A.2	Exemple d'une fonction de répartition empirique (en bleu) à partir de 1000 échantillons issus d'une distribution normale centrée réduite	162

- FIGURE A.3 Figure 11 Représentation de la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$ (ligne en pointillée) ainsi que celle correspondant à X^2 (trait plein) obtenue par propagation de l'incertitude 164
- FIGURE A.4 Illustration issu de [94] d'un phénomène non physique lié à une mauvaise représentation de l'incertitude épistémique : diminution de la probabilité de défaillance lorsque l'incertitude augmente 165
- FIGURE A.5 Théorie des ensembles flous : exemple de fonction d'appartenance de type trapézoïdale 169
- FIGURE A.6 Profil de concentration obtenu au bout de 90 jours pour différentes valeurs de la fonction d'appartenance ($\beta = 0, 0.5$ et 1), issu de l'article [132] 170
- FIGURE A.7 Exemple d'une distribution de possibilité 173
- FIGURE A.8 Illustration de : a) fonction cumulative de densité de possibilité (CPoF), fonction cumulative de densité de nécessité (CNF); b) fonction cumulative complémentaire de densité de possibilité (CCPoF) et fonction cumulative complémentaire de densité de nécessité (CCNF) 174
- FIGURE A.9 Illustration des modes de combinaison entre deux distributions de possibilités triangulaires π_1 et π_2 : le mode de combinaison ou conjonctif (ligne en pointillés) et le mode disjonctif (trait mixte) 174
- FIGURE A.10 Illustration du mode de combinaison intermédiaire (trait plein) pour deux distributions de possibilité triangulaires (traits en pointillés) 175
- FIGURE A.11 Comparaison entre une distribution de probabilité $f_X(x)$ et une distribution de possibilité $\Pi_X(x)$ 178
- FIGURE A.12 Fonction de densité de probabilité et distribution de possibilité correspondante pour une variable X sur l'intervalle $[8, 12]$ 179
- FIGURE A.13 Illustration de la CCDF bornée par la CCNF et la CCPoF déterminées pour : a) des distributions uniformes et triangulaires illustrées Figure 17, b) une incertitude épistémique sur y telle que modélisée dans l'article [57] 180
- FIGURE A.14 Exemple d'éléments focaux C_i pour le calcul des fonctions de croyance et de plausibilité 183
- FIGURE A.15 Représentation de la croyance et de la plausibilité dans la théorie de l'évidence 183
- FIGURE A.16 Illustration : a) Fonction cumulative de croyance (CBF) et fonction cumulative de plausibilité (CPF), b) Fonction cumulative complémentaire de croyance (CCBF) et fonction cumulative complémentaire de plausibilité (CCPF) 184

FIGURE A.17	Illustration des délimitations par la CCBF et la CCPF d'une incertitude épistémique sur y telle que modélisée dans la référence [57]. Cadre a) modélisation de l'incertitude initiale, b) modélisation de l'incertitude affinée	185
FIGURE A.18	BPA des variables incertaines x_1 et x_2	187
FIGURE B.1	BPA des paramètres de conception x_1 et x_2	194
FIGURE C.1	Modèle multidisciplinaire	195
FIGURE C.2	Modèle multidisciplinaire	198

LIST OF TABLES

TABLE 9.1	Données de l'étude conceptuelle d'un avion de type A320	72
TABLE 10.1	Sensibilité en % de la fonction objectif et des contraintes en fonction des variables incertaines	84
TABLE 10.2	Comparaison du pourcentage de données comprises dans l'intervalle de confiance +/- 1 écart-type, selon la modélisation de l'écart-type choisi	93
TABLE 11.1	Valeurs des seuils de fiabilité à atteindre	96
TABLE 11.2	Critère de précision mesuré pour chaque surface de réponse lorsque les incertitudes de modélisation sont prises en compte	104
TABLE 11.3	Critère de précision mesuré pour chaque surface de réponse lorsque les incertitudes affectant les modèles et les paramètres de conception sont prises en compte	105
TABLE 12.1	Comparaison entre les résultats de l'optimisation déterministe et l'optimisation probabiliste	111
TABLE 12.2	Comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes de propagation : tirages de Monte-Carlo et surfaces de réponse	112
Table 13.1	Comparaison des résultats obtenus par le biais de la méthode multi-agent et de l'optimisation classique (algorithme Pattern Search) dans le cas de l'optimisation déterministe	122
TABLE 13.2	Écart-types des différents paramètres incertains	138
TABLE 13.3	Résultats du problème analytique, optimiseur classique (algorithme Pattern Search)	139
TABLE 13.4	Résultats du problème analytique, résolution par l'approche multi-agent	140

TABLE 13.5	Résultats du problème analytique, propagation par tirages de Monte-Carlo et résolution par l'approche multi-agent 140
TABLE 13.6	Résultats obtenus par l'approche multi-agent pour l'optimisation fiabiliste en double boucle 143
TABLE 13.7	Résultats obtenus par un algorithme classique (Pattern Search) pour l'optimisation fiabiliste en double boucle 143
TABLE 13.8	Comparaison des méthodes d'optimisation fiabiliste séquentielles, résolution par l'approche multi-agent 145
TABLE 13.9	Comparaison entre la méthodologie d'optimisation classique et la nouvelle approche 146
TABLE A.1	Comparaison entre les axiomes fondamentaux de la théorie des probabilités et ceux de la théorie des possibilités 177

GLOSSAIRE

AMAS	Système multi-agent auto adaptatif ("Auto-adaptative Multi-Agent System")
IRIT	Institut de Recherche en Informatique de Toulouse
ID ₄ CS	Conception intégrée pour les modèles complexes ("Integrative Design for Complex System")
ANR	Agence Nationale de la Recherche
MDO	Optimisation multidisciplinaire ("Multidisciplinary Design Optimization")
MTOW	Masse maximale de l'avion au décollage ("Maximum Take-off Weight")
SLST	Poussée des moteurs au niveau de la mer ("Sea Level Static Thrust")
S_{wing}	Surface de l'aile ("Surface Wing")
F_{wing}	Volume de carburant au niveau de l'aile ("Fuel Wing")
wA_{fus}	Aire brute du fuselage mouillé ("Wetted Area Fuselage")
SIMCAD	Modèles simples pour la phase conceptuelle avion ("Simple Models for Conceptual Aircraft Design")
DOE	Plan d'expériences ("Design Of Experiments")
MPP	Point de défaillance le plus probable ("Most Probable Point")
RBDO	Optimisation orientée fiabilité ("Reliability Based Design Optimization")
FORM	Méthode de fiabilité du premier ordre ("First Order Reliability Method")

À mes parents Galdina et Daniel JAEGER
À Emmanuel MICHELET
À mon grand-père Charles JAEGER

Un immense merci tout d'abord à Christian BES et Stéphane SEGONDS qui m'ont accompagné tout au long de ce parcours. Travailler avec vous a été un véritable plaisir. Vous avez tout deux su me faire profiter de votre savoir afin que je puisse mener à bien mes recherches. Je vous remercie pour votre grande implication, vos précieux conseils, votre soutien, votre incroyable gentillesse et pour le temps consacré à lire et relire ce document. Je remercie Marie-Pierre GLEIZES ainsi que l'ensemble des membres de l'équipe du projet ANR ID4CS pour m'avoir accueilli et avoir partagé avec moi leurs connaissances. Je remercie Nicolas GAYTON et Jean-Claude BOCQUET pour avoir accepté de rapporter ces travaux et Pierre VILLON pour sa participation au jury de thèse. Merci également à Thierry DRUOT pour son aide et le temps qu'il m'a dédié lors de l'application de mes recherches au cas-test AIRBUS. Je tiens à remercier très sincèrement mes amis et collègues de la filière génie mécanique pour m'avoir accueilli et intégré au sein de leur équipe. Je les remercie d'avoir été présents quotidiennement lors de ces trois années de thèse, d'avoir égayé mes journées et fait en sorte que ce soit un réel plaisir de me rendre tous les jours au laboratoire. Pour tout cela, merci! Merci à Isabelle, Kamel et Laurent pour la bonne humeur quotidienne au sein du bureau, leur soutien, leur aide et encouragements. Enfin, je dédie ce mémoire à ma famille, en particulier à mes parents, à Emmanuel, à mon grand-père et à mes amis qui m'ont soutenue dans la réalisation de mes études.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Notre étude s'intéresse à l'optimisation multidisciplinaire déployée lors de la conception de systèmes complexes. Elle sera tout particulièrement centrée sur la conception avion. Ces travaux s'inscrivent dans le cadre du projet ANR (Agence Nationale de la Recherche) ID₄CS (Integrative Design for Complex System) qui vise à mettre en place des outils performants d'aide à la conception.

La recherche de la meilleure performance et de la qualité au prix le plus bas est un enjeu majeur au sein du domaine industriel. La mise en oeuvre et la maîtrise de la conception sont donc primordiales, et toute erreur peut avoir des conséquences graves d'un point de vue économique ou opérationnel.

Lors de la conception d'un nouveau système de nombreux facteurs doivent être pris en compte rendant ainsi le problème complexe. Nous énumérons quelques uns des plus importants :

- La complexité de son architecture : la modélisation des phénomènes qui régissent le système demande un effort conséquent, et sollicite un grand nombre de domaines physiques (mécaniques des fluides, thermodynamique, mécaniques des structures etc.). Il existe des interactions entre ces différentes disciplines et il est impératif de déterminer une homogénéité entre les réponses fournies par celles-ci afin d'obtenir une description cohérente du système.
- Le coût de simulation : la conception d'un nouveau système s'appuie aujourd'hui sur des simulations numériques évoluées décrivant de plus en plus fidèlement les phénomènes physiques qui le gouvernent. Paradoxalement les délais de conception doivent être de plus en plus courts et maîtrisés afin de répondre le plus rapidement possible, dans un environnement concurrentiel aux besoins changeants de la demande, aux contraintes réglementaires de plus en plus exigeantes (sécurité, environnement, etc.).
- La présence d'incertitudes sur les variables de conception, les données et leurs modèles : les codes décrivant la physique des différentes disciplines peuvent être entachés d'écarts de modélisation, et posséder des incertitudes, d'autant plus sensibles que l'on se trouve dans les phases préliminaires, qui vont compliquer la recherche d'une configuration optimale. En effet, en dépit de leur sophistication, les modèles employés lors de la conception peuvent ne pas reproduire parfaitement la réalité. D'une part, la représentation d'un phénomène naturel passe souvent par l'omission de certains facteurs considérés comme négligeables. D'autre part, un modèle requiert la plupart du temps un certain nombre de paramètres qu'il est nécessaire de connaître. Toutefois, il est souvent difficile de calibrer ces grandeurs car leur valeur exacte n'est pas précisément connue au moment de la conception. En effet, certains facteurs évoluent au cours du développement, lors de la fabrication, etc.

Dans ce contexte, les rôles et les enjeux de conception d'un nouveau système sont donc renforcés et accrus. Nos travaux ont été plus particulièrement déployés dans le cadre de l'étude conceptuelle d'un avion (située en amont de la conception). Aujourd'hui la phase conceptuelle est traitée comme étant un

problème d'optimisation multidisciplinaire pour lequel on cherche à définir un ensemble de valeurs de paramètres caractérisant l'avion. En général, cette démarche utilise des méthodes classiques d'optimisation, qui abordent le problème d'une manière globale et déterministe en proposant des solutions satisfaisant l'ensemble des contraintes imposées. Mais les résultats fournis ne prennent pas en compte les incertitudes pouvant affecter le système.

En effet, le problème rencontré lors de la conception déterministe d'un système optimal est que les configurations déterminées peuvent être relativement sensibles aux incertitudes. Dans des conditions réelles, différents paramètres comme les propriétés des matériaux, les dimensions géométriques, les chargements, etc., présentent des aléas qui peuvent affecter la stabilité et la fiabilité du procédé obtenu à la suite de l'optimisation déterministe. Les avions ainsi conçus sont donc vulnérables aux fluctuations qui peuvent apparaître lors de leur réalisation ou de leur fonctionnement. Si ces incertitudes ne sont pas considérées lors de l'optimisation, la solution obtenue pourra se révéler en pratique bien moins performante que prévue, voire ne pas répondre aux performances imposées, causant ainsi des rebouclages coûteux dans le processus de conception. À l'heure actuelle, les incertitudes qui affectent le système sont la plupart du temps négligées, ou bien grossièrement prises en compte grâce à des marges de sécurité importantes. Celles-ci engendrent souvent des systèmes trop conservatifs : la fiabilité du système est assurée mais l'augmentation de la masse due à ces marges de sécurité pénalise les performances du système.

Pour pallier ce problème et améliorer l'étude conceptuelle d'un avion, nous nous sommes appuyés sur les différents domaines impliqués, à savoir la modélisation des incertitudes, la propagation des incertitudes au sein d'un problème d'optimisation multidisciplinaire et les méthodes numériques permettant de résoudre de tels problèmes complexes. Ainsi, les améliorations de l'étude conceptuelle avion visent principalement à apporter de nouvelles solutions, qui permettent :

- La modélisation des incertitudes pouvant fortement altérer le système : les modèles implémentés au sein du processus d'optimisation sont soit issus d'équations physiques simplifiées soit de modèles de régression issus d'une base de données historiques regroupant les différents paramètres d'avions commerciaux construits durant les dernières décennies. Les incertitudes sont dues au fait qu'il y a une différence entre les points réels découlant de la base de données historiques et les prédictions obtenues par le biais des modèles de régression linéaires. Nous proposons une nouvelle approche de modélisation des incertitudes qui s'ajuste à l'information disponible.
- La propagation des incertitudes dans un problème d'optimisation multidisciplinaire : nous souhaitons donc concevoir des systèmes qui ne soient pas trop sensibles aux fluctuations induites par les paramètres incertains et ayant statistiquement les meilleures performances. On parle d'optimisation robuste et fiabiliste. La recherche de solutions à de tels problèmes s'appuie sur des mesures de robustesse pour quantifier la variation de l'objectif due aux incertitudes, et des mesures de fiabilité per-

mettant quant à elles de mesurer la probabilité de bon fonctionnement du dispositif. Dans nos travaux nous mettons en place la formulation fiable et robuste de l'étude conceptuelle permettant de prendre en compte des incertitudes de natures différentes (en particulier les incertitudes de modélisation et celles affectant les variables de conception).

- La résolution de problème d'optimisation multidisciplinaire sous incertitudes : la place occupée par les simulations numériques dans le processus de conception d'un système ne cesse de croître, car elles permettent d'analyser et de comparer à moindre coût différentes configurations envisagées avant de mettre en oeuvre des expériences plus onéreuses sur des prototypes réels. Aujourd'hui le nombre de simulations qu'il est envisageable de réaliser en un temps raisonnable reste tout de même limité, car les analyses s'appuient sur des codes de calcul généralement complexes (issus de l'assemblage de modèles physiques simplifiés) dont l'exécution nécessite des temps de calcul importants. Par ailleurs lors de la prise en compte des incertitudes dans un problème d'optimisation multidisciplinaire le calcul des mesures de robustesse et de fiabilité nécessite de multiplier le nombre d'évaluations des objectifs et contraintes afin d'observer l'effet des variations des paramètres incertains autour de chaque solution considérée. Cela justifie ainsi l'emploi de méthodes numériques spécifiques à ce type de problème. Nous proposons dans nos travaux deux nouvelles méthodologies afin d'y parvenir. La première méthode est basée sur la construction de modèles de substitution. La seconde propose une résolution par le biais d'un système multi-agent auto-adaptatif ([AMAS](#) « Auto-adaptive Multi-Agent System »).

Nos recherches ont commencé en Septembre 2010 et ont été menées au sein de l'Institut Clément Ader. Elles s'inscrivent dans le cadre du projet [ANR ID4CS](#) qui a pour but de développer un environnement de modélisation de simulation pour concevoir des systèmes complexes notamment aéronautiques en exploitant la technologie des systèmes multi-agent. Ces études ont été menées en partenariat avec plusieurs entreprises et laboratoires : IRIT, Armines, Artal, Upetec, Inria, IMIT, EMSE, Artal, Airbus France et Snecma. Un des objectifs de ce projet est de mettre en place un outil performant pour la résolution de problèmes de conception avant-projet multidisciplinaire. Nos travaux ont été effectués en étroite collaboration avec l'[IRIT](#) (laboratoire ayant développé le système multi-agent) et Airbus (qui a fourni les cas tests d'étude conceptuelle avion). Ils ont débuté par la prise en main du code interne Airbus nommé [SIMCAD](#) (« Simple Models for Conceptual Aircraft Design »). Cet algorithme permet de définir les principales caractéristiques de l'avion afin de satisfaire les performances imposées et minimiser sa masse au décollage. Nous avons ainsi identifié les problématiques générales de l'étude conceptuelle avion, ainsi que l'ensemble des limites. Cette étude a montré qu'elles sont principalement dues à l'absence de prise en compte des incertitudes : l'optimum déterministe s'avère être sensible aux variations des paramètres induisant souvent des rebouclages coûteux en temps de calculs. Suite à l'identification de la nature des incertitudes, nous avons proposé une méthodologie permettant de les modéliser et de les propager à travers le

problème d'optimisation auquel nous devons faire face. Cette phase nous a permis de comparer notre approche aux solutions existantes et d'en mesurer les apports. Une fois la prise en compte des incertitudes effectuée, une deuxième limitation de l'existant a été mise en évidence : il s'agit de la méthode de résolution de l'optimisation multidisciplinaire. En effet les méthodes utilisées peuvent s'avérer difficiles à implémenter : sensibilité au bruit dû aux incertitudes, difficulté de traiter les boucles de rétroaction liant les différentes disciplines du problème, temps de convergence prohibitif etc. Nous nous sommes donc ensuite concentrés sur la mise en place de nouvelles approches. Nous avons tout d'abord développé une première méthode qui exploite des surfaces de réponse. Ces modèles de substitution remplacent les fonctions coûteuses qui entrent en jeu dans l'optimisation. Cette méthodologie fournit de bons résultats mais connaît des limites notamment si le problème augmente en complexité (nombre de variables incertaines et de variables de conception). Pour pallier à cette difficulté nous avons conçu une méthode subsidiaire qui emploie un système multi-agent.

Ce document est organisé comme suit. Dans la première partie de ce mémoire nous présenterons les enjeux de l'étude conceptuelle au travers de la conception avant-projet d'un avion. Nous expliquerons tout d'abord dans le chapitre 2 quel est le positionnement industriel du problème puis détaillerons dans le chapitre 3 deux spécificités de l'étude conceptuelle avion : l'aspect de multidisciplinarité et de multi-niveaux.

Dans la deuxième partie nous présenterons un état de l'art de l'optimisation en univers incertain. Le chapitre 5 concernera les différentes natures d'incertitudes rencontrées et les méthodes de modélisation possibles. Nous nous intéressons tout particulièrement à la modélisation utilisant la théorie des probabilités. Dans le chapitre 6 nous exposerons les techniques de formulation et de résolution du problème d'optimisation mono-disciplinaire sous incertitude. Enfin le chapitre 7 présentera une synthèse des méthodes d'optimisation multidisciplinaire qui correspond au cadre de notre étude en phase conceptuelle avion.

La troisième partie sera dédiée à la présentation de nos contributions. Nous détaillerons tout d'abord dans le chapitre 9 le problème industriel auquel nous sommes confrontés, c'est à dire la conception avant-projet d'un avion moyen-courrier (de type A320). Puis nous proposerons dans le chapitre 10 une nouvelle méthodologie de modélisation probabiliste des incertitudes qui tienne compte de l'information disponible au point courant du processus d'optimisation. Dans le chapitre 11 nous donnerons la formulation de l'étude conceptuelle avion qui permet de prendre en compte à la fois les incertitudes de modélisation et les incertitudes sur les variables de conception. Puis dans le chapitre 12 nous présenterons la résolution directe du problème d'optimisation par le biais d'une méthodologie employant des surfaces de réponse qui prédisent la fiabilité du système. Dans l'optique de résoudre des problèmes, dont les degrés de libertés sont plus importants, nous détaillerons dans le chapitre 13 une nouvelle méthodologie de résolution basée sur les systèmes multi-agent auto-adaptatif qui permettent de

paralléliser les simulations. Une synthèse concernant les apports de nos recherches sera établie dans le chapitre 14.

Enfin, une conclusion générale sera présentée rappelant les apports de la thèse et les perspectives à venir.

Première partie

LES ENJEUX DE LA PHASE CONCEPTUELLE AVION

INTRODUCTION

La conception de nouveaux modèles d'avion est une des activités critiques des constructeurs aéronautiques. Il leur faut en effet proposer en permanence des appareils toujours plus performants qui répondent à de nouvelles contraintes réglementaires et qui restent en phase avec leurs clients. Le processus de conception d'un nouvel avion est structuré en 3 grandes étapes comme décrit sur la figure 1.1 [104] : l'étude conceptuelle ; l'étude préliminaire et la phase de conception détaillée.

Ces trois étapes permettent de fixer progressivement les plans de fabrication de l'appareil considéré en utilisant des descriptions de plus en plus détaillées.

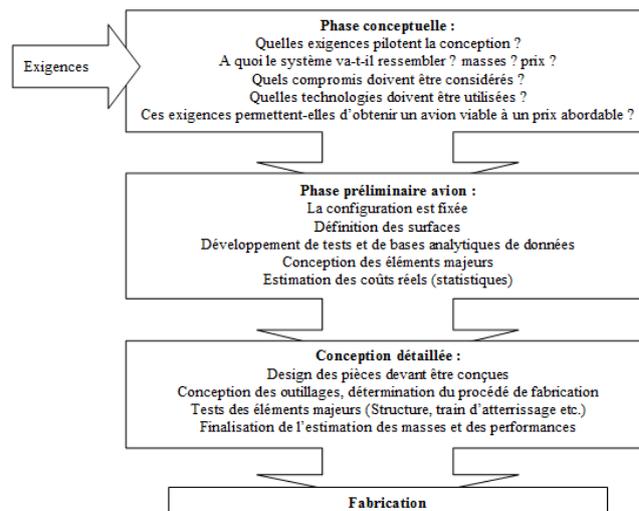


FIGURE 1.1: Les phases de la conception avion issues de [104]

C'est lors de la phase conceptuelle que la forme globale de l'avion est déterminée. Une telle étude peut se traiter en formulant et résolvant un problème d'optimisation. Les questions fondamentales telles que la configuration, la taille, les masses et les performances sont abordées. Le comportement de l'appareil est simulé grâce à un système multidisciplinaire faisant intervenir différentes entités telles que la géométrie, les masses, la structure, l'acoustique, l'aérodynamique, etc. Dans cette étude les éléments sont simplifiés. Malgré un nombre de paramètres limité, la phase conceptuelle est un problème d'optimisation complexe faisant intervenir des aspects de multi-

disciplinarité, de multi-niveaux (interaction entre les phases amonts et aval de la conception), d'interdépendance entre les paramètres etc.

La phase conceptuelle avion se caractérise par un grand nombre d'alternatives de conception, d'études commerciales ainsi qu'une continue évolution des concepts de l'avion en considération. Une des caractéristiques spécifiques de l'étude conceptuelle est l'utilisation de modèles grossiers issus de physiques simplifiées ou de modèles de régression construits sur des bases de données historiques afin de limiter le temps de calculs et/ou acquérir de la connaissance. À ce stade, les incertitudes engendrées sont prévalentes et peuvent entraîner des configurations avion ne remplissant pas les performances requises. L'étude conceptuelle avion est donc une étape primordiale du processus de développement qu'il convient de maîtriser.

La deuxième partie de ce mémoire présente le contexte de réalisation de l'étude conceptuelle avion. Nous définissons ainsi dans le chapitre 2 le positionnement du problème et les besoins fonctionnels auxquels la prise en compte des incertitudes va répondre dans ce contexte industriel. Nous présentons dans le chapitre 3 les spécificités de la phase conceptuelle avion et plus particulièrement les aspects de multidisciplinarité et de multi-niveaux.

2

POSITIONNEMENT DU PROBLÈME INDUSTRIEL

La phase conceptuelle est une étape fondamentale dans le développement d'un avion. En effet, les décisions prises lors de cette procédure génèrent une grande partie du coût du cycle de vie. Bien que la plupart de ces décisions s'inscrivent dans un contexte incertain, cette phase offre un large panel de possibilités pour l'innovation. Une présentation détaillée du processus général est donnée dans les références [104, 74, 109].

Les questions cruciales sont : « peut-on construire à un prix abordable un avion remplissant toutes les exigences du cahier des charges ? » et « comment faire les bons choix de conception dès les premières étapes de la conception afin d'éviter des boucles de reconception ? ». De nouvelles idées et de nouveaux concepts sont alors étudiés pour y parvenir. Si le cahier des charges n'est pas respecté, il pourra être réévalué ou assoupli en fonction des besoins et exigences du client. Durant la phase d'étude conceptuelle, les spécifications de conception sont utilisées afin de guider et évaluer les choix majeurs de la configuration générale de l'avion. Les caractéristiques principales de l'appareil sont ainsi déterminées : le type d'avion, la géométrie générale des ailes et de la queue, la forme du fuselage, la charge utile, le nombre de passagers, le nombre de moteurs, le train d'atterrissage ainsi que d'autres caractéristiques de conception. Le niveau de détail n'est pas très élevé car les connaissances sont limitées à ce stade du développement du système (par exemple la géométrie du fuselage de l'avion est définie en fonction de sa hauteur, largeur et longueur), cependant les interactions entre les différents composants sont cruciales. Si cela est possible, le bureau de conception avant projet s'appuie sur des avions déjà existants qui offrent une base de données conséquente des performances. Lors de cette première étape dans la définition d'un nouvel avion, les concepteurs font appel à des codes de calcul complexes pour vérifier la satisfaction des spécifications requises. Ainsi, différents concepts peuvent être évalués et comparés afin de déterminer le design le plus prometteur en termes de performances et de coût. La figure 2.1 décrit le procédé mis en œuvre durant la phase conceptuelle avion [104].

L'étude conceptuelle débute généralement avec la mise en place d'un ensemble d'exigences de conception établi par des clients potentiels ou des compagnies. Les contraintes de conception incluent des paramètres tels que : le rayon d'action, la charge utile, les distances au décollage et à l'atterrissage,

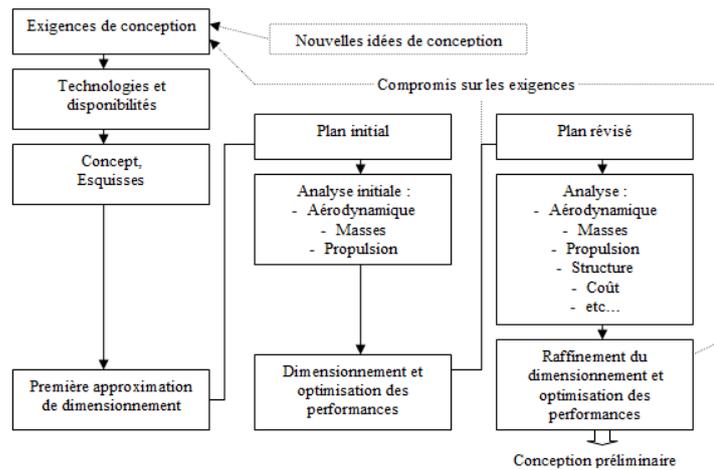


FIGURE 2.1: Définition de la phase conceptuelle avion issue de [104]

la manœuvrabilité et les plafonds de vitesse. Concevoir un avion c'est donc faire un ensemble de compromis sur ses caractéristiques. En organisant les contraintes de conception, nous obtenons trois catégories principales : les contraintes provenant des compagnies aériennes, des autorités de réglementation et de l'industrialisation [136].

LES CONTRAINTES DES COMPAGNIES AÉRIENNES : Généralement, les contraintes de haut niveau des compagnies aériennes sont de réaliser des missions (transporter un nombre donné de passagers, sur une distance définie) en ayant des coûts de maintenance et d'exploitation minimaux. Le marché est donc segmenté en fonction de la distance à parcourir et du nombre de passagers transportés (cf. figure 2.2). Le transport aérien est également fortement lié au contexte politique/ économique/ sécuritaire qui influence la perception que les clients et les autorités ont du risque dans le transport aérien. Les compagnies aériennes requièrent donc des avions génériques qui puissent évoluer et satisfaire de nouveaux besoins dus aux évolutions rapides et parfois imprévisibles du marché et de la réglementation.

LES CONTRAINTES DES AUTORITÉS DE RÉGLEMENTATION : Les autorités de réglementation imposent des contraintes sur le système avion afin d'assurer un niveau maximal de sécurité et respecter l'environnement. Par exemple les autorités de l'Aviation Civile (JAA « Joint Aviation Authorities ») soumettent des normes et procédures réglementaires en matière de sécurité aérienne.

LES CONTRAINTES INDUSTRIELLES : La contrainte industrielle de haut niveau est de fabriquer des produits en répondant aux demandes des compagnies aériennes et de maximiser la rentabilité. Le développement de nouveaux avions dépend des disponibilités technologiques, des limites sont par exemple imposées par les procédés de fabrication actuels (précision et capa-

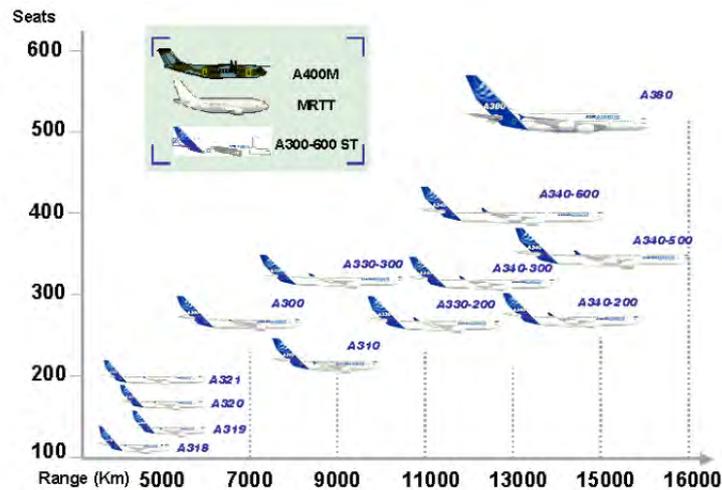


FIGURE 2.2: Famille d'avions

cité des machines outils). Le concepteur doit également faire un choix quant aux technologies qui vont être utilisées. Si le système est conçu dans un futur proche alors il devra employer uniquement des technologies actuellement disponibles (moteurs et matériel électronique conçus pour être utilisés sur des aéronefs existants). Si l'avion est dimensionné pour être conçu dans un futur plus lointain une estimation de l'état de l'art technologique doit être effectuée afin de déterminer quelles technologies émergentes seront alors prêtes à être utilisées. De ces contraintes de haut niveau en découlent de nombreuses autres.

Aujourd'hui les besoins des compagnies aériennes en rayon d'action sont variés. Les avionneurs proposent donc aux clients une gamme de produits complète afin de couvrir au mieux l'ensemble de leurs besoins et peser pleinement dans la compétition. Ce contexte a conduit les constructeurs à développer une gamme d'avions regroupés dans des familles rassemblant les mêmes caractéristiques, afin de profiter des bénéfices suivants :

- rationaliser l'offre en proposant une gamme de produits ;
- factoriser les efforts de développement et de fabrication, en favorisant la réutilisation de composants ;
- simplifier la chaîne logistique et la politique d'approvisionnement ;
- gérer de manière cohérente les centres de compétences (bureaux d'études, unités de production etc.).

Cette modularité offre également des avantages aux compagnies aériennes, en leur apportant une réduction des temps de formation des mécaniciens et pilotes et des coûts de maintenance. Finalement un objectif commun aux compagnies aériennes et aux constructeurs est de mettre sur le marché l'avion le plus rapidement possible pour s'adapter à la dynamique du trafic aérien. Cependant, concevoir des familles d'avions implique nécessairement de nouvelles contraintes de conception, qui interfèrent parfois avec certains critères de performances et donc avec les exigences des compagnies aériennes, qui souhaitent des avions aux performances optimales sur chacune de leurs missions. La fabrication d'avions génériques (objectif de fa-

mille) implique aussi que le modèle conçu s'écarte légèrement de sa configuration optimale, car il partage des caractéristiques avec des avions dont les missions sont différentes.

Dans ce contexte, les missions de la phase conceptuelle avion sont essentielles. Il s'agit d'une part d'améliorer la vision globale de la famille à concevoir et d'autre part de proposer des solutions innovantes et réalistes aux compagnies.

Pour réaliser un nouvel avion, une étude conceptuelle est organisée en plusieurs étapes. Nous résumons ces différentes phases :

1. Dans un premier temps, une ébauche des besoins est réalisée. Elle permet, en analysant les attentes commerciales et les évolutions du marché, de proposer une série d'objectifs. Une fois ces objectifs définis, on s'appuie sur les expériences passées et sur les avions connus pour trouver, parmi ceux existants, celui qui est le plus proche de l'étude, et que l'on appelle avion de référence.
2. Durant la seconde phase, le constructeur collecte des modèles (modèles souvent de grosse granularité) qui sont utilisables dans le cadre de l'étude. Cet ensemble de données comprend des modèles d'aérodynamique, de calcul de masse, de performances, etc.
3. Avec l'ensemble des modèles de simulation sélectionnés, le concepteur construit une fonction de simulation et l'applique sur l'avion de référence, pour lequel les performances réelles sont connues. En comparant les performances fournies par les modèles choisis avec les performances réelles de l'avion, on vérifie la qualité des résultats fournis par l'assemblage des modèles. Ainsi, lorsque les résultats obtenus par les modèles ne sont pas satisfaisants, on les ajuste en utilisant des outils de calibrage.
4. À ce stade de la modélisation de nombreux degrés de liberté (variables de conception) sont disponibles. Afin de définir un problème d'optimisation, le concepteur sélectionne des topologies géométriques industrialisables qui permettent de réduire le nombre de paramètres. Par exemple, pour une mission donnée, la géométrie du fuselage est définie à partir de sa longueur et de sa largeur qui sont elles-mêmes dimensionnées en fonction du nombre de passagers et de leur répartition dans l'avion.
5. Une fois que les modèles sont calibrés et que les degrés de liberté sont définis, le concepteur introduit de nouveaux coefficients de calibrage qui vont permettre de tenir compte des innovations technologiques disponibles ou envisagées. La fonction est alors utilisée pour trouver un ensemble de paramètres de conception qui satisfait le nouveau cahier des charges. Cependant pour simplifier le problème et la recherche de ce point de départ, l'étude est souvent réalisée dans un premier temps sans étudier les bouclages entre les différents modèles constituant le code de calcul. Notamment le bouclage entre les fonctions permettant d'évaluer la masse et la mission de l'avion : afin de réaliser une mission, une certaine quantité de carburant est nécessaire, or, cette quantité se

répercute sur la masse maximale au décollage, sur les structures de l'avion et donc sur la mission, de ce fait nous obtenons une boucle de rétroaction masse/mission. À ce stade, la conception est donc incomplète et non cohérente.

6. Ensuite, le nouvel avion est étudié par le biais d'une chaîne de conception complète, qui inclut les bouclages entre les différentes fonctions (dont la boucle masse/mission). Parfois, le bouclage n'est pas réalisable avec le paramétrage obtenu lors de la phase précédente et certains objectifs doivent alors être modifiés (par exemple : le nombre de moteurs). Dans ce cas, il est nécessaire de réitérer la phase en amont.
7. Lorsque la chaîne de conception est vérifiée, une première optimisation du nouvel avion peut-être engagée. Cette optimisation est effectuée par le biais du code interne Airbus nommé [SIMCAD](#) [14] qui est un code typique avionneur (nous détaillerons cet algorithme dans le chapitre 9).
8. Une fois le résultat obtenu, une phase d'analyse et de consolidation est réalisée. Elle consiste à confronter les résultats à d'autres sources de calculs ou à d'autres avis d'experts du domaine, jusqu'à présent extérieurs à l'étude. On teste alors différentes hypothèses et on vérifie si d'autres choix plus pertinents n'auraient pas été possibles.
9. Finalement la dernière phase consiste à sélectionner une configuration et à lui appliquer des analyses de sensibilités. L'objectif est alors de vérifier que la solution trouvée n'est pas trop sensible aux modifications des paramètres de conception ou des performances.

Par souci de simplicité, les différentes étapes sont présentées de façon séquentielle. Dans la réalité, de nombreuses boucles sont possibles entre les phases.

La phase conceptuelle du développement d'un avion est donc un problème d'optimisation qui consiste à trouver un ensemble de paramètres définissant les performances du futur aéronef étant donné diverses contraintes opérationnelles. À ce stade de la conception, la connaissance est limitée (par exemple sur les propriétés des matériaux, les données de propulsion, etc.) et l'analyse est fondée sur des modèles de basse fidélité à partir d'équations empiriques ou de modèles physiques simplifiés [126] engendrant ainsi des incertitudes. Des incertitudes peuvent également intervenir tout au long du processus de fabrication. Par exemple, les avions sont classés en différentes familles et peuvent partager certains composants (notamment le train d'atterrissage) initialement conçus pour un certain type d'aéronefs. Ceci permet de simplifier les gammes de fabrication et ainsi d'en diminuer les coûts. Cependant ces composants, optimisés durant les phases de conception pour certains modèles d'avion, sont employés pour d'autres modèles, où ils viennent remplacer ceux dimensionnés au départ, engendrant des incertitudes. D'autre part la précision de fabrication est toujours limitée, de ce fait il est difficile de réaliser exactement le système décrit par une solution optimale. La conception d'un avion est donc soumise à des incertitudes de natures différentes qu'il convient de maîtriser dès l'étude conceptuelle afin

de réduire le temps et le coût de développement. En effet, lors de l'étude de sensibilités (phase 9) le système déterministe sélectionné peut s'avérer très sensible aux faibles variations des paramètres et ne plus satisfaire les performances imposées dans le cahier des charges. Les paramètres optimaux de l'avion sélectionné ne sont donc pas satisfaisants et l'étude conceptuelle doit être rebouclée. Les résultats de l'optimisation déterministe obtenus suite à l'étude conceptuelle peuvent également conduire, lors des phases détaillées de la conception, à un design trop conservatif (si des marges de conception arbitraires sont prises en compte) ou un design sous dimensionné donc dangereux (sans les marges de conception) entraînant des phases de re-conception coûteuses. Une prise en compte des incertitudes dès la phase conceptuelle permet de mettre en place une conception robuste et fiable. C'est à dire un système dont les performances ne sont pas sensibles aux variations des paramètres (critère de robustesse) et garantissant statistiquement ses performances optimales (critère de fiabilité).

3

ASPECTS MULTIDISCIPLINAIRES ET MULTI-NIVEAUX DE LA PHASE CONCEPTUELLE AVION

L'étude conceptuelle avion est un problème d'optimisation complexe qui nécessite une décomposition en disciplines et niveaux afin de faciliter la recherche de la meilleure solution. En effet, la conception implique de nombreux acteurs aux compétences diverses répertoriées en disciplines qui co-opèrent ensemble [68] mais également des modélisations de granularités différentes (le niveau de détail et la fidélité du modèle est propre à chaque discipline). Dans ce chapitre nous présentons dans un premier temps les décompositions de l'étude conceptuelle avion en disciplines. Puis nous décrivons le processus de développement avion au sein d'Airbus, composé de plusieurs niveaux de granularités différentes.

3.1 MULTIDISCIPLINARITÉ

L'optimisation du design d'un nouvel avion lors de la phase d'étude conceptuelle se base sur un modèle de simulations numériques qui permet d'estimer les performances de l'appareil. La modélisation d'un tel système complexe est décomposée en plusieurs sous-systèmes interdépendants différents. Ces domaines d'expertise sont appelés des « disciplines ». Dans notre cas, les disciplines imbriquées dans l'étude conceptuelle que nous allons mener ne correspondent pas à des domaines scientifiques distincts (tels que les métiers avions : aérodynamique, résistance des matériaux, thermique, acoustique etc.) mais à des parties de l'avion (aile, queue, fuselage etc.) comme le montre la description détaillée fournie ci-dessous (cf. figure 3.1). Les décompositions en disciplines et niveaux de notre système sont spécifiques à l'étude conceptuelle menée au sein d'Airbus. Une décomposition plus traditionnelle de celle exposée dans nos recherches existe par exemple dans les écrits de Perez et al. [99] ou DeLaurentis et al. [33].

Un avion est donc un système multidisciplinaire dans lequel différents domaines entrent en interaction : les sorties d'une discipline peuvent être les entrées d'une autre et vice-versa créant ainsi des boucles de rétroaction. La modélisation utilisée pour cette étude est une représentation simplifiée d'un avion complet qui met en jeu neuf disciplines, détaillées ci-après :

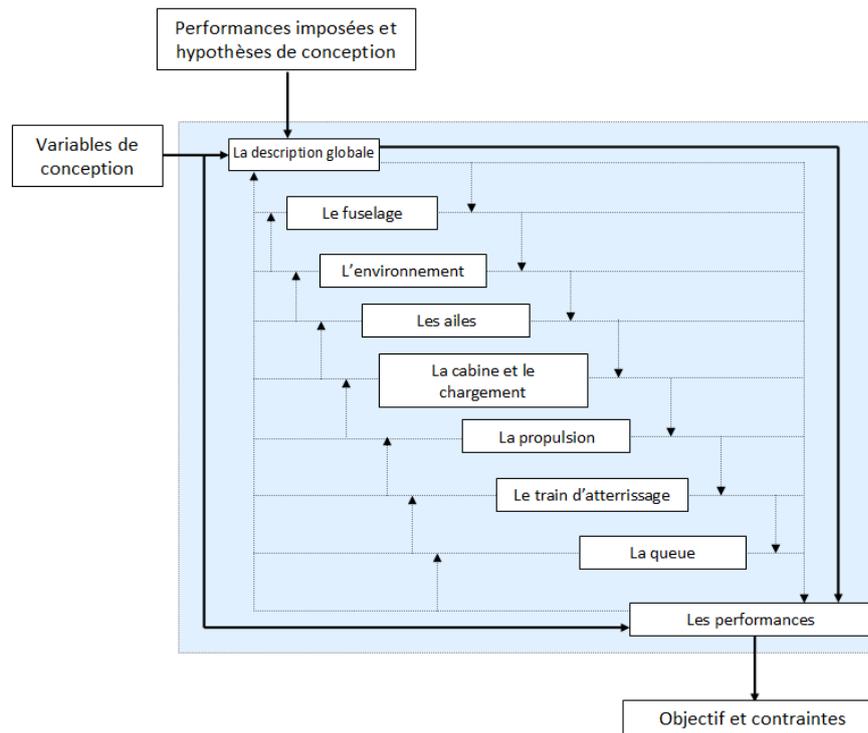


FIGURE 3.1: Etude conceptuelle avion, décomposition en disciplines interdépendantes

L'ENVIRONNEMENT EXTÉRIEUR : les caractéristiques de l'environnement dans lequel évolue l'avion sont déterminées au sein de cette discipline (densité de l'air, vitesse du son, nombre de Mach, pression de l'air etc.).

LE FUSELAGE : cette discipline permet de définir la géométrie du fuselage (la largeur, la longueur et l'aire brute du fuselage mouillé, ou encore aire en contact avec le flux d'air extérieur), la masse, la forme du fuselage et la traînée de frottement. La taille et la forme générale du fuselage sont déterminées en fonction de la charge utile.

LES AILES : cette discipline permet de déterminer la géométrie des ailes (l'aspect, l'aire brute des ailes mouillées, la capacité du réservoir de kérosène au niveau d'une aile, l'angle de flèche), la masse et l'aérodynamique des ailes (la longueur, la traînée de frottement, la traînée induite des ailes, la traînée due à la compressibilité, etc.).

LA PROPULSION : cette discipline permet de définir la géométrie de la nacelle moteur (le design de la nacelle doit satisfaire à la fois les contraintes géométriques et les exigences du moteur), l'aérodynamique (le coefficient de frottement), la masse du pylône et la thermodynamique du moteur (la consommation de carburant dans des conditions de vol données, la poussée des moteurs etc.). Les moteurs sont modélisés d'un point de vue macroscopique, car la simulation détaillée d'une turbomachine n'est pas nécessaire

à ce stade de la conception. Les performances des moteurs sont estimées à partir de tables numériques qui indiquent la poussée et la consommation spécifique en fonction des différentes phases de vol.

LA QUEUE : grâce à cette discipline la géométrie de la queue est déterminée (le volume, la capacité de carburant et l'aire sont déterminées à la fois pour la partie horizontale et verticale de la queue, etc.), ainsi que les masses et l'aérodynamique.

LE TRAIN D'ATERRISSAGE : cette discipline permet de déterminer le nombre de roues et la masse du train d'atterrissage.

LA CABINE ET LE CHARGEMENT : cette discipline permet de définir le nombre de passagers dans les différentes classes ainsi que les masses (la charge utile, la masse d'ameublement, la masse du système opérateur, la masse des conteneurs et des palettes).

LES PERFORMANCES : Cette discipline permet de connaître les performances de l'avion au cours d'une mission. Il s'agit des données de sortie du problème. Ces performances peuvent par exemple être le rayon d'action de l'appareil, sa longueur de décollage, sa vitesse d'approche avant l'atterrissage, etc. Les performances sont calculées pour différentes conditions atmosphériques et différentes conditions d'utilisation de l'appareil (par exemple dans le cas d'un moteur en panne). Tous les calculs de performance sont basés sur l'intégration des équations de la mécanique du vol, l'avion étant considéré comme un solide rigide.

LA DESCRIPTION GLOBALE : Les paramètres de conception sont déterminés au sein de cette discipline (surface de l'aile et poussée des moteurs) ainsi que la fonction objectif (masse de l'avion au décollage), les masses (masse de l'avion sans carburant, masse du carburant nécessaire à la mission etc.), l'aérodynamique (la traînée de pression, la traînée induite, la traînée de frottement, la portance maximale à l'atterrissage, etc.) et le coût de la mission.

Ces disciplines et leurs interdépendances sont implémentées au sein du code interne Airbus *SIMCAD* [14]. Cet algorithme permet de définir les principales caractéristiques de l'appareil afin de satisfaire les performances imposées et minimiser la fonction objectif : la masse de l'avion au décollage (*MTOW* « Maximum Take-off Weight »). Chaque discipline partage des variables avec les autres disciplines et dépend donc en partie de leurs résultats. L'assemblage des neuf disciplines présentées ci-dessus définit ainsi un système multidisciplinaire au sein duquel les disciplines sont en interaction permanente et dont l'objectif est de concevoir un avion réalisant les besoins exprimés par l'avionneur et les compagnies aériennes

Pour donner un exemple d'interaction, la consommation de l'appareil est déterminée à partir de la masse de carburant nécessaire à l'accomplissement de la mission, à laquelle il faut ajouter les réserves réglementaires obligatoires. Lorsque la masse de la structure de l'avion augmente, sa consumma-

tion augmente aussi, il faut donc emporter plus de carburant pour effectuer une mission donnée. Ce carburant supplémentaire vient se rajouter au poids de l'avion, ce qui nécessite de renforcer sa structure. La masse de la structure est alors augmentée, et la consommation de l'appareil est à nouveau impactée. Les interactions entre les disciplines font ainsi apparaître des boucles de rétroaction qui rendent la simulation du système complexe. Le but final est de parvenir à stabiliser ces bouclages afin d'arriver à un équilibre entre les différentes disciplines.

Chaque discipline peut également être elle-même un modèle plus ou moins pluridisciplinaire. La simulation de la propulsion de l'appareil fait par exemple intervenir la géométrie de la nacelle moteur, l'aérodynamique ou encore la thermodynamique du moteur. La notion de discipline est donc liée à une description donnée du système que l'on considère.

Ainsi, la conception des avions implique de multiples disciplines (la propulsion, le fuselage, le train d'atterrissage, etc.) qui peuvent être étroitement liées. De nouvelles approches d'optimisation ont été développées par le passé, afin de traiter de tels problèmes industriels. En effet aujourd'hui les systèmes sont de plus en plus complexes et les méthodes d'optimisation classiques peuvent se révéler difficiles à implémenter pour traiter de tels problèmes dont le nombre de variables et de modèles est élevé [137]. L'optimisation multidisciplinaire (MDO « Multidisciplinary Design Optimization ») a fait l'objet de diverses recherches et il a ainsi été montré que ces méthodes peuvent améliorer considérablement l'optimisation conceptuelle des aéronefs en prenant notamment en compte le lien entre les différentes disciplines. Les méthodes basées sur l'utilisation de systèmes multi-agent auto adaptatifs sont également une alternative intéressante permettant de répondre à cette problématique [137]. La question de l'intégration des incertitudes dans ces méthodes d'optimisation multidisciplinaire se pose alors afin de faciliter la mise en place de systèmes fiables et robustes dès les premières étapes de la conception.

Les modèles utilisés pour chacune des disciplines peuvent aussi être de fidélités diverses. Nous présentons dans la section suivante cette notion de multi-niveaux.

3.2 PROCESSUS DE DÉVELOPPEMENT MULTI-NIVEAUX

Pour maîtriser la complexité du produit, la phase de conception est décomposée en plusieurs jalons, au cours desquels la conception est scindée et détaillée. Elle débute après la clôture de la phase de faisabilité et comprend deux phases importantes [6] : la phase des concepts (M3-M5) et la phase de définition (M5-M7). La fabrication du système ainsi conçu débute dès la phase de développement (M7-M14), voir figure 3.2. On rappelle que le découpage en multi-niveaux présenté dans cette section est propre à Airbus.

La conception se décompose en :

UNE PHASE DES CONCEPTS (M3-M5) : durant les jalons M3-M4 l'objectif est d'optimiser et affiner les concepts définis pour l'avion global afin de

faire émerger une première configuration, c'est typiquement la phase dédiée aux avant-projets. Durant cette phase de la conception l'avion est représenté par un ensemble restreint de paramètres, le but étant alors d'optimiser les variables de conception en fonction des contraintes (contraintes réglementaires, besoins du client etc.). D'autre part, les modèles employés afin de représenter les différentes physiques de l'avion, sont des modèles de basse fidélité dus à des connaissances limitées. Ainsi, à ce stade de la conception les incertitudes affectant le système sont importantes. Suite aux jalons M3-M4, une première configuration du produit est proposée (Product Definition Level 0). Les jalons M4-M5 consolident la configuration de référence en détaillant les concepts techniques associés à l'aide d'outils de conception plus précis et de connaissances métiers approfondies. De cette étape ressort un partage des tâches, un planning du projet, et une configuration de référence plus précise (Product Definition Level 1).

UNE PHASE DE DÉFINITION (M5-M7) : cette phase débute après les jalons M5. Durant cette étude, le produit passe du stade de concepts détaillés au stade de produit complètement défini par des plans et des modèles. À partir de cette étape, le rôle des avant-projets devient plus consultatif, l'objectif maintenant étant de détailler la conception par composants en utilisant les résultats des étapes précédentes.

La fabrication du système débute avec :

LA PHASE DE DÉVELOPPEMENT (M7-M14) : la phase de développement correspond à la production, l'assemblage et aux tests du premier appareil. Elle permet de préparer la production en série du nouvel avion.

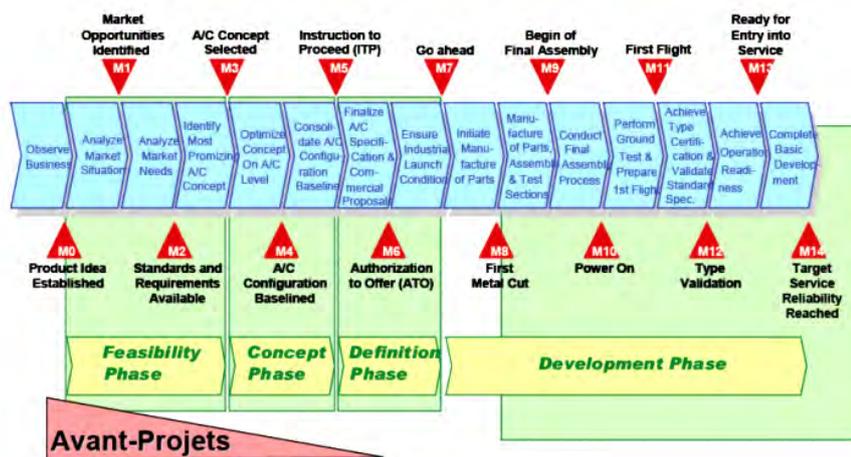


FIGURE 3.2: Phases de la conception avion au sein d'Airbus

Durant ce découpage en plusieurs niveaux de conception, des choix sont opérés à chaque passage d'un niveau à un autre. Ainsi la définition plus détaillée du produit met l'accent sur de nouvelles contraintes qui nécessitent

la recherche de nouvelles solutions plus précises. Mais lorsque les niveaux de précision deviennent plus détaillés, les relations entre les disciplines sont souvent moins évidentes. Des re-négociations à des niveaux plus abstraits sont alors nécessaires afin d'améliorer la vue d'ensemble et les relations entre disciplines. Ce genre de négociations s'effectue lors des différentes réunions de revue d'un programme avion.

La première partie de cette thèse a ainsi permis de présenter une vision globale de l'étude conceptuelle avion. Il s'agit d'un problème d'optimisation multidisciplinaire et multi-niveaux dont les performances peuvent être impactées par des incertitudes de natures différentes. Aujourd'hui, les méthodes conventionnelles d'optimisation du design d'un avion sont déterministes et les incertitudes sont négligées ou prises en compte par l'introduction de facteurs de sécurité constants. Ces approches engendrent souvent des systèmes trop conservatifs. Des méthodes spécifiques doivent donc être mises en place pour permettre la propagation des incertitudes. Nous proposons dans la partie 4 un état de l'art sur l'optimisation en univers incertain.

Deuxième partie

ÉTAT DE L'ART SUR L'OPTIMISATION EN UNIVERS
INCERTAIN

4

INTRODUCTION

De nos jours, l'optimisation est un outil majeur dans la conception de nouveaux produits et processus de fabrication. En effet, le problème auquel l'ingénieur doit souvent faire face est l'amélioration d'une caractéristique du produit (par exemple, son coût, son poids ou ses performances) tout en satisfaisant certaines contraintes (réglementation, sécurité de l'environnement, etc.). Les objectifs visant à améliorer le système peuvent être donnés par des descriptions verbales, des modèles mathématiques, des modèles de simulation, ou des modèles physiques. De manière générale, ces objectifs sont des fonctions qui doivent être minimisées, tout en tenant compte des contraintes imposées sur les paramètres de conception [81]. Ces contraintes sont modélisées par des inégalités et/ou des égalités restreignant l'espace de conception (ou espace de recherche). Ainsi, les méthodes d'optimisation permettent de déterminer la meilleure alternative dans le sens des objectifs donnés.

Les solutions optimales trouvées lors de la résolution d'un problème d'optimisation déterministe classique ne sont peut être pas les meilleures à utiliser en pratique. En effet, elles ne tiennent pas compte des incertitudes qui affectent le système réel. Le résultat obtenu peut donc être différent de l'optimum réel du fait de ces écarts de modélisation. Les systèmes conçus avec une approche déterministe peuvent ainsi se révéler très sensibles même à de petites variations sur certains de leurs paramètres qui vont fortement dégrader leurs performances. C'est donc avec un intérêt tout particulier que de nombreuses études se penchent aujourd'hui sur la gestion des incertitudes en optimisation. Dans nos travaux, nous souhaitons résoudre des problèmes d'optimisation multidisciplinaire sous incertitudes, c'est à dire des problèmes faisant intervenir plusieurs disciplines (souvent interdépendantes). Ainsi, dans cette partie nous proposons un état de l'art permettant de définir les différentes étapes à suivre afin de traiter de tels problèmes d'optimisation sous incertitudes.

Dans le chapitre 5 nous présentons les différentes sources d'incertitude pouvant impacter un système et expliquons ensuite comment elles peuvent être modélisées en vue d'une analyse de fiabilité et de robustesse. Après avoir justifié le choix que nous avons effectué afin de modéliser les incertitudes présentes dans l'étude conceptuelle avion, nous abordons dans le chapitre 6 les méthodes de résolution d'un problème d'optimisation mono-disciplinaire sous incertitudes. Enfin, nous décrivons dans le chapitre 7, les différentes approches proposant des solutions à l'optimisation multidiscipli-

naire. Nous mettons ainsi en avant la difficulté et les exigences de résolution des problèmes d'optimisation multidisciplinaires.

5

CARACTÉRISATION DES INCERTITUDES

Nous présentons tout d'abord dans ce chapitre les différentes sources d'incertitude que nous pouvons rencontrer dans un problème d'optimisation. Une fois identifiées, les incertitudes doivent être modélisées et quantifiées de façon adaptée afin de pouvoir évaluer la robustesse et la fiabilité des solutions. Nous énumérons donc les différentes approches afin de représenter les incertitudes.

5.1 SOURCES D'INCERTITUDE

Les sources potentielles d'incertitude dans les problèmes d'ingénierie peuvent provenir :

DES INCERTITUDES DANS LES DONNÉES EXPÉRIMENTALES :

- le dispositif d'essai ;
- les protocoles des tests ;
- les inexactitudes de mesure ;
- les conditions environnementales ;
- etc.

DES INCERTITUDES DANS LA MODÉLISATION :

- les approches de modélisation et décisions (qui peuvent varier d'un concepteur à un autre) ;
- les conditions aux limites et chargement (interne et externe) ;
- les outils de modélisation utilisés (par exemple il existe différentes méthodes basées sur les éléments finis et divers logiciels permettant de les traiter) ;
- la sélection des valeurs des paramètres d'un modèle basée sur des données limitées ;
- les ressources numériques disponibles (qui affectent la fidélité du modèle ou le nombre d'échantillons utilisés dans les analyses stochastiques) ;
- les approximations des lois physiques ;
- etc.

DES INCERTITUDES DANS LE SYSTÈME FABRIQUÉ :

- les tolérances de conception et de fabrication ;
- les propriétés des matériaux ;

- les méthodes de fabrication ;
- etc.

En ce qui concerne les différents types d'incertitudes, une distinction est généralement faite entre les incertitudes aléatoires et les incertitudes épistémiques. L'incertitude aléatoire est également appelée incertitude stochastique, incertitude irréductible, incertitude inhérente, variabilité ou incertitude de type I. Elle peut provenir de la stochasticité environnementale, de l'inhomogénéité des matériaux, des fluctuations dans le temps, de la variation dans l'espace, de l'hétérogénéité et autres différences intrinsèques aux caractéristiques d'un système. Cette incertitude est dite irréductible, car elle ne peut être réduite par des études supplémentaires, même s'il est possible de mieux la caractériser (par exemple, il est possible d'obtenir une précision plus fine de l'écart type en ayant plus d'échantillons).

Le lancé d'une pièce de monnaie est un exemple classique d'incertitude aléatoire. Les caractéristiques intrinsèques au tirage au sort équitable conduisent à une incertitude sur son résultat, qui peut être caractérisée par une probabilité de 0.5 d'obtenir pile ou face.

Nous prenons un autre exemple d'incertitude aléatoire rencontré en ingénierie. Les rafales de vent auxquelles un avion est soumis au cours de son cycle de vie peuvent être considérées comme des incertitudes aléatoires. Ces incertitudes peuvent être mieux caractérisées en équipant les avions d'une instrumentation complète de manière à mesurer les rafales de vent imposées au système avion. Toutefois, ces incertitudes ne peuvent pas être réduites, car elles proviennent de la stochasticité environnementale, d'où le terme d'incertitudes irréductibles.

L'incertitude épistémique, parfois appelée incertitude réductible ou incertitude de type II, provient d'un manque de connaissances. Ce genre d'incertitude est généralement lié à l'ignorance scientifique, l'incertitude de mesure, l'insuffisance de données expérimentales, l'inobservabilité de phénomènes ou la censure, ce qui en d'autres termes découle d'un manque de connaissances. Ces incertitudes sont dites réductibles, car elles peuvent potentiellement être réduites par des études supplémentaires, menant à une meilleure connaissance des phénomènes en cause. Notez qu'après la réduction de l'incertitude épistémique affectant un système, l'incertitude aléatoire est souvent à prendre en compte.

Un exemple classique d'incertitude épistémique est celui lié à l'estimation de l'âge d'une personne. Supposons que je lise dans un journal qu'un auteur ayant reçu un prix littéraire donne une conférence dans ma ville et que je souhaite connaître l'âge de celui-ci. Aucune information concrète n'est donnée dans le journal à ce propos, je ne peux ainsi qu'estimer l'âge de l'auteur entre 20 et 70 ans. L'incertitude sur l'âge est alors très importante. Toutefois, comme mentionné précédemment, l'incertitude épistémique peut être réduite par des connaissances supplémentaires. Si j'assiste au discours, je verrais ainsi l'auteur, ce qui pourrait me permettre de réduire l'incertitude sur son âge entre 40 et 50 ans. Si je vais parler à l'auteur à la suite de son discours, je pourrais obtenir des renseignements supplémentaires me permettant de réduire davantage l'incertitude sur son âge. L'incertitude épis-

témique pourrait dans ce cas être réduite à zéro si je parviens à obtenir sa date de naissance exacte.

L'incertitude de mesure est un exemple typique d'incertitude épistémique dans les problèmes d'ingénierie. De même que l'âge de l'auteur, la grandeur qui doit être mesurée a une valeur fixe vraie. Cependant, l'instrumentation de mesure permet généralement de déterminer la quantité à une incertitude près. Cette incertitude peut être réduite en développant une meilleure instrumentation ou en ayant une meilleure connaissance du processus de mesure, par exemple. L'incertitude épistémique est donc identifiée comme étant le terme réductible, même si souvent cette incertitude ne peut être totalement éliminée (limite des connaissances).

Ainsi, les incertitudes peuvent se manifester sous de multiples formes et il est important de les modéliser de manière appropriée lors de l'évaluation des risques.

5.2 MODÉLISATION DES INCERTITUDES

La théorie des probabilités a historiquement fourni le premier cadre de travail pour la modélisation et la quantification de l'incertitude. Cette approche permet de traiter de façon appropriée l'incertitude aléatoire. Les incertitudes épistémiques décrites précédemment peuvent quant à elles être modélisées par le biais de différentes méthodes [10] :

MODÉLISATION PAR INTERVALLES : on définit l'intervalle de variation d'un paramètre (la distribution de probabilité sur cet intervalle est inconnue). Par exemple, on aura : $x_1 = [-1,5 ; 3,2]$.

MODÉLISATION PROBABILISTE : l'incertitude est modélisée par une distribution de probabilité (le plus souvent une loi normale ou bien uniforme). Par exemple : $x_2 \sim N(0, 1, 2)$.

MODÉLISATION POSSIBILISTE : l'incertitude est décrite à l'aide de la logique floue. Un coefficient entre 0 et 1 est attribué à chaque sous-ensemble auquel peut appartenir le paramètre incertain. Il permet d'évaluer dans quelle mesure l'évènement considéré est possible.

MODÉLISATION PAR LA THÉORIE DE L'ÉVIDENCE : la théorie de l'évidence est également basée sur l'analyse d'intervalles. Cette méthode consiste à établir une mesure de l'incertitude en fonction de la croyance ou de la plausibilité.

Un aperçu plus détaillé de ces différentes méthodes est présenté dans l'annexe A. Bien que l'approche probabiliste puisse être utilisée afin de modéliser l'incertitude épistémique, les représentations alternatives énumérées précédemment le permettent également. Des études pour unifier ces différentes théories en une méthode générique basée sur la théorie des probabilités imprécises ont été menées et nous pouvons citer les approches proposées

par Walley [134] et Klir [76]. Cependant, à ce jour, il ne semble pas y avoir d'accord commun sur l'approche convenant le mieux afin de représenter l'incertitude épistémique. En effet certains auteurs affirment que la théorie des probabilités est suffisante pour traiter tous les types d'incertitudes, tandis que d'autres affirment que l'une des théories alternatives est nécessaire afin de représenter de manière appropriée l'incertitude épistémique. Nous pouvons nous référer à la synthèse de travaux menés sur les incertitudes épistémiques lors d'un séminaire dédié [46] ainsi qu'à l'annexe A.5, pour un aperçu du débat autour de ce sujet.

Dans la suite de nos études, notre choix s'est porté vers une représentation probabiliste des incertitudes. La théorie des probabilités est l'approche la plus classique pour l'analyse d'incertitudes. Il s'agit en effet d'une méthodologie générale et simple qui a fait preuve de nombreuses études. L'approche probabiliste est également la mieux connue et celle en général utilisée dans le domaine industriel, notamment au sein d'Airbus. D'autre part, les incertitudes que nous souhaitons prendre en compte durant la phase conceptuelle avion sont principalement des incertitudes de modélisation (représentation du phénomène physique par des modèles approchés), ou des incertitudes dues à un manque de connaissances. Ce sont donc des incertitudes épistémiques, cependant elles ne peuvent être réduites dans les délais du projet par des campagnes d'essais ou par des études théoriques plus approfondies. Au stade conceptuel ces incertitudes épistémiques peuvent donc être considérées comme étant irréductibles et nous choisissons de ce fait de les modéliser telles que les incertitudes aléatoires. Ainsi, afin de représenter les incertitudes affectant l'étude conceptuelle à laquelle nous sommes confrontés et assurer la cohérence avec les modélisations implémentées au sein d'Airbus nous choisissons une approche probabiliste.

Maintenant que le choix de modélisation est établi nous expliquons comment ces incertitudes peuvent être propagées dans un problème d'optimisation mono-disciplinaire.

OPTIMISATION MONO-DISCIPLINAIRE EN UNIVERS INCERTAIN

L'objectif lors de la résolution de problèmes d'optimisation est de mettre en place un ensemble de décisions afin d'aider l'industriel à trouver le système ayant les meilleures performances. Les problèmes d'optimisation mono-objectif sont formulés en termes mathématiques comme suit [13] :

$$\begin{cases} \min_x f(x) & x \in S \\ g_i(x) \leq 0 & i = 1, \dots, p \\ h_j(x) = 0 & j = 1, \dots, r \end{cases} \quad (6.1)$$

où f est la fonction objectif, S l'espace de recherche, g_i les contraintes d'inégalité et h_j les contraintes d'égalité. Un aspect important des systèmes optimisés par le biais de cette formulation déterministe est que l'optimum trouvé peut être très sensible aux petites variations affectant les paramètres du problème. Au cours des dernières décennies, la communauté des ingénieurs a émis une nécessité croissante concernant la prise en compte des incertitudes dans les méthodes d'optimisation en conception, notamment pour des systèmes tels que les avions, les engins spatiaux ou les centrales nucléaires par exemple [133, 96]. Par conséquent diverses méthodes ont été développées afin de prendre en compte l'incertitude dans les techniques d'optimisation. Ces méthodes vont de la conception de systèmes pour des valeurs critiques en utilisant des facteurs de sécurité, aux techniques plus avancées de type probabilistes, telle que l'optimisation de la conception d'un produit basée sur la fiabilité ou l'optimisation robuste. L'optimisation fiabiliste vise à mettre en place un système dont le seuil minimal de performance et/ou les contraintes sont atteintes avec une certaine probabilité donnée. L'optimisation robuste recherche quant à elle à définir un système optimisé dont les performances sont peu sensibles aux incertitudes. Ces approches probabilistes sont l'objet de la première partie de ce chapitre. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe B pour une présentation des méthodes de propagation d'incertitude dans un problème d'optimisation mono-disciplinaire basées sur : l'analyse par intervalles et la théorie de l'évidence (la théorie des possibilités n'est pas détaillée car elle semble être peu abordée dans la littérature et à notre connaissance il n'existe pas d'application concrète de celle-ci.). Ce chapitre vise ensuite à présenter des algorithmes permettant de résoudre les problèmes d'optimisation mono-disciplinaire sous incertitudes ainsi formulés.

6.1 OPTIMISATION ROBUSTE ET FIABILISTE

Lors de leur conception les systèmes sont soumis à des incertitudes de tous types :

- la définition d'un problème d'optimisation avec des fonctions objectifs et des contraintes constitue une approximation de la réalité ;
- la précision de fabrication est toujours limitée d'où la difficulté de réaliser exactement le système décrit par une solution optimale ;
- la présence d'incertitudes qui affectent les paramètres d'entrée (exemple : conditions climatiques) ainsi que les modèles utilisés (physique simplifiée pour obtenir un temps de calculs faible).

Lorsque les incertitudes sont modélisées de façon probabiliste, leur prise en compte affecte la robustesse et la fiabilité du système conçu. À ce stade, nous donnons des exemples simples des façons dont l'incertitude peut impacter l'optimum d'un système.

La figure 6.1 représente une fonction objectif f dépendant d'un unique paramètre x . Dans cet exemple, l'incertitude sur le paramètre d'entrée x du système est modélisée par une fonction de densité de probabilité normale. Pour une configuration donnée, l'intervalle de variation possible pour le paramètre x va générer une variation de la performance du système.

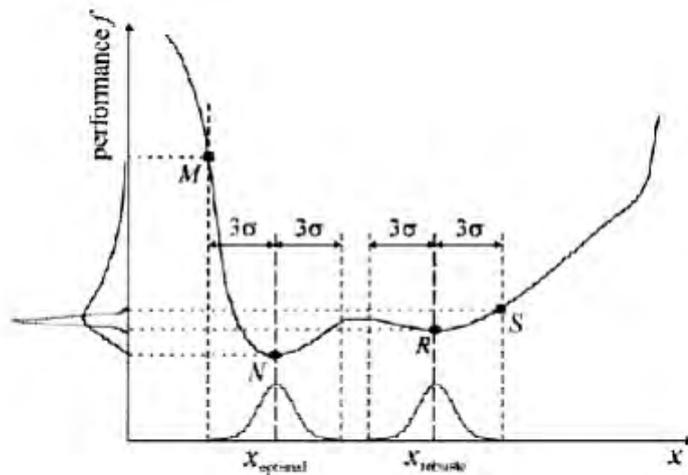


FIGURE 6.1: Minimisation de la performance f avec une incertitude introduite sur la variable de décision x

Par exemple les densités de probabilité normales définissant la variabilité du paramètre x en deux points ($x_{optimal}$ et $x_{robuste}$) sont représentées sur l'axe des abscisses (voir figure 6.1). Si ces incertitudes viennent perturber la valeur nominale du paramètre x autour des deux solutions indiquées sur la figure 6.1, nous observons pour des variations identiques du paramètre x que la performance de la solution optimale est fortement altérée alors que l'impact sur la solution robuste est beaucoup plus faible. En effet, nous constatons que la densité de l'incertitude introduite sur la fonction objectif au point N

est beaucoup plus grande que celle introduite au point R , car la fonction objectif varie considérablement au voisinage de ce point. Même si la performance nominale est moindre, il est plus judicieux de choisir la solution robuste ($x_{robuste}$) peu sensible aux variations des paramètres plutôt que $x_{optimal}$ (solution du problème déterministe). Le but d'un système robuste est donc de maintenir ses performances relativement stables lorsqu'elles sont exposées à des conditions incertaines [13].

Les incertitudes affectent également les contraintes. Dans le cas d'un problème déterministe les contraintes sont violées lorsqu'elles dépassent un certain seuil constant, représenté en rouge sur la figure 6.2 (la contrainte est violée si $x > x_{lim}$). Lorsque nous prenons en compte les incertitudes dans un problème d'optimisation, les contraintes ne peuvent plus être représentées par un scalaire. Ainsi, la prise en compte des incertitudes est modélisée par des distributions le long des courbes afin de garantir un certain niveau de fiabilité (tel que représenté sur la figure 6.2). Le problème devient alors le suivant : on minimise une fonction coût en s'assurant que la contrainte soit respectée avec une certaine probabilité de fiabilité.

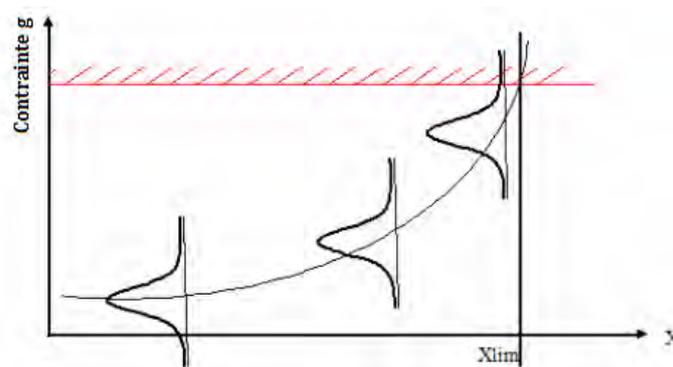


FIGURE 6.2: Fiabilité des contraintes

Ces deux derniers exemples permettent de mettre en évidence le fait que la prise en compte des incertitudes dans un problème d'optimisation a un impact à la fois sur les contraintes ainsi que sur la fonction objectif. De ce fait, les méthodes d'optimisation employées en conception tiennent souvent compte de la robustesse et de la fiabilité de la solution. Nous allons donc présenter plus en détail ces concepts en commençant tout d'abord par une introduction des travaux effectués par le précurseur dans ce domaine : Taguchi.

6.1.1 Méthode de Taguchi

Les mesures de robustesse permettent de quantifier la sensibilité aux incertitudes de différentes solutions afin de les comparer. On peut ainsi analyser par exemple les solutions optimales fournies par une optimisation déterministe classique afin de déterminer laquelle est la plus robuste. Mais on peut

aussi chercher à optimiser cette robustesse de façon à obtenir les solutions les plus robustes possibles. Les optima robustes ne sont en effet pas forcément situés au même endroit que les optima classiques (même locaux), cf. figure 6.1. C'est pourquoi la prise en compte de la robustesse au sein même du processus d'optimisation se justifie vis-à-vis d'une simple analyse de la robustesse des solutions issues d'une optimisation déterministe.

L'optimisation robuste est un pan de la recherche opérationnelle qui cherche à optimiser un système en prenant en compte les différentes incertitudes du problème. La conception de systèmes robustes est née des travaux de Taguchi, même si on utilise aujourd'hui des méthodes différentes de celles qu'il avait proposées. La méthodologie de conception robuste développée par Taguchi peut être décomposée en deux étapes [124] :

- conception du système : évaluation des paramètres caractérisant le produit et sa structure d'ensemble ;
- détermination des paramètres de conception : optimisation des paramètres de conception afin d'obtenir les performances requises (contrôle des variables d'optimisation et réduction de l'influence du bruit ζ).

Afin de répondre à la deuxième étape, Taguchi a mis en place une mesure du bruit : MSD (« Mean Square Deviation ») qui permet de calculer l'écart entre $y_i = y(x, \zeta_i)$ (fonction permettant de quantifier la qualité associée au paramètre x) et la valeur cible \hat{y} :

$$MSD_1 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (y(x, \zeta_i) - \hat{y})^2 \quad (6.2)$$

avec x constant. Selon l'objectif de conception, d'autres variantes de cette fonction peuvent être utilisées (MSD_2, MSD_3 , cf. [13]). Une fonction appelée SNR (« Signal-to-Noise Ratio ») est ensuite employée afin de déterminer le ratio « signal-sur-bruit » :

$$SNR = -10 \log(MSD) \quad (6.3)$$

Cette fonction doit être maximisée afin de minimiser la sensibilité de la solution au bruit. Pour ce faire, Taguchi utilise les plans d'expériences (DOE « Design Of Experiments ») qui permettent d'étudier différentes solutions [77, 111] et ainsi d'obtenir le système ayant les meilleures performances. Afin de disposer d'une méthode efficace, le nombre de variables de conception ne doit pas être élevé. Il est important de noter que cette méthode permet de concevoir un système robuste : faiblement sensible aux variations (méthode dite de conception robuste), mais non optimisé [10]. Diverses méthodes ont été développées selon cette étude afin d'établir un compromis entre la robustesse et l'optimisation d'un système : ce sont les méthodes d'optimisation robustes.

6.1.2 Méthodes d'optimisation robuste

Dans le cadre de l'optimisation robuste, nous pouvons utiliser des mesures de robustesse basées sur les techniques probabilistes. La modélisation

des incertitudes, présentes en entrée d'un problème, par des distributions de probabilité sur x engendre par propagation des distributions de probabilité résultantes sur les sorties $f(x)$ (ainsi que sur les contraintes de manière tout à fait similaire). On cherche donc à quantifier la robustesse d'une solution x , relativement à un objectif f donné, en se basant sur sa distribution d'incertitude de sortie. Dans ce contexte, on distingue notamment les mesures de robustesse basées sur les quantiles, qui permettent de garantir une certaine performance dans le voisinage, ainsi que les mesures basées sur les espérances (avec par exemple la mesure de l'espérance en elle-même ou de la variance), qui permettent d'évaluer la valeur moyenne ou l'amplitude des variations de la fonction dans le voisinage de la solution étudiée.

Dans un premier temps, nous exposons une méthode d'optimisation robuste courante en statistique basée sur le calcul de quantiles. Dans un problème d'optimisation robuste formulé en ayant recours aux quantiles, nous étudions la fonction de distribution de f . Dans le cas où la fonction objectif f est à minimiser, notre but est d'obtenir des réalisations de f suffisamment petites. Soit pour un certain seuil q donné, nous souhaitons que le maximum de valeurs de f respecte la loi $f \leq q$. Pour un nombre de tirages n donné, le nombre espéré est $n \text{Prob}[f \leq q|x]$. Le critère de robustesse est alors : $\text{Prob}[f \leq q|x] \rightarrow \max$. La fréquence à laquelle nous obtenons des solutions satisfaisantes est maximisée. Nous posons, $\text{Prob}[q|x] = \text{Prob}[f \leq q|x]$ et le critère de maximisation robuste est alors [13] :

$$\begin{cases} \max_x F_q(x) & x \in S \\ F_q(x) = \text{Prob}[q|x] \\ g_i(x) \leq 0 & i = 1, \dots, p \end{cases} \quad (6.4)$$

avec S espace de recherche, g_i les contraintes du problème d'optimisation. La valeur optimale du paramètre de conception x dépend du choix de la valeur du seuil q . Pour un problème de minimisation, le critère de robustesse est :

$$\begin{cases} \min_x F_q(x) & x \in S \\ F_q(x) = 1 - \text{Prob}[q|x] \\ g_i(x) \leq 0 & i = 1, \dots, p \end{cases} \quad (6.5)$$

Dans le cas où il est nécessaire que notre système atteigne un certain niveau de fiabilité (défaillance inférieure à un seuil donné), le problème d'optimisation robuste en termes de quantiles est en général écrit comme suit :

$$\begin{cases} \min_x q_\alpha(x) & x \in S \\ g_i(x) \leq 0 & i = 1, \dots, p \end{cases} \quad (6.6)$$

$F_q(x) = 1 - \text{Prob}[q|x] = \alpha$, q est alors appelé le quantile d'ordre α de la fonction objectif du système étudié et est noté $q_\alpha(x)$.

La formulation de l'optimisation robuste en termes de quantiles peut être perçue comme une évolution du cas le plus défavorable [10]. En effet, la mesure du pire cas établit que 100 % des points au voisinage ont une performance meilleure ou équivalente à celle énoncée. Par conséquent, il est possible de définir des mesures qui sont moins conservatrices que le pire des cas : nous prendrons par exemple le quantile d'ordre 0,95 qui assure que la performance de 95 % des points au voisinage sera meilleure ou équivalente. Afin de déterminer la valeur d'un quantile, on a souvent recours aux méthodes de Monte-Carlo, qui sont des méthodes de simulation basées sur un grand nombre de tirages aléatoires. À chaque itération du processus d'optimisation, les données statistiques (moyenne, variance, quantiles, etc.) sont calculées par simulations. Des applications de cette méthode telles que l'optimisation de la structure d'une automobile, l'optimisation du design d'un gyroscope ou d'un satellite sont exposées dans [113, 135]. Cette approche permet de mettre en place des estimations convenables, même si le nombre d'évaluations de la fonction objectif est élevé et entraîne donc un coût important. Diverses techniques d'échantillonnage existent afin de couvrir au mieux l'espace et réduire le nombre de simulations. Une des techniques populaires est la méthode de l'hypercube latin [87].

Les mesures de quantiles sont intéressantes car elles permettent d'avoir une certaine garantie sur le résultat (degré de confiance plus ou moins élevé selon l'ordre du quantile). Elles sont pourtant assez rarement utilisées en optimisation robuste (elles impliquent des calculs lourds). Ainsi, nous avons généralement recours à des mesures de la robustesse basées sur la variance et l'espérance de la fonction objectif.

L'approche la plus répandue en optimisation robuste consiste à mesurer les deux premiers moments de la distribution de sortie du système (l'espérance et la variance). L'optimisation robuste se traduit alors souvent comme un problème multiobjectif : l'objectif est d'optimiser la performance moyenne du système tout en réduisant les variations de cette performance. Des méthodes permettent ensuite de se ramener d'un problème bi-objectif à un problème mono-objectif grâce à l'introduction de poids et d'une nouvelle fonction coût. Le problème robuste est formulé de façon générale comme suit [81] :

$$\begin{cases} \min_x E[f(x, \delta)] & x \in S \\ \min_x Var[f(x, \delta)] \\ g_i(x, \delta) \leq 0 & i = 1, \dots, p \end{cases} \quad (6.7)$$

où S est le domaine de validité. Ces objectifs ayant des solutions différentes (le gain en robustesse se fait généralement au détriment de la performance des solutions), le compromis moyenne/variance peut alors être tranché en introduisant un poids β [90, 82], et le critère à minimiser devient :

$$\min_x \left[(1 - \beta)E[f(x, \delta)] + \beta\sqrt{Var[f(x, \delta)]} \right], \beta \in [0, 1] \quad (6.8)$$

Une autre solution permettant de résoudre le problème multi-objectif consiste à étudier le front de Pareto qui revient à faire varier le poids lorsque les

fonctions sont convexes. Dans le cadre de l'optimisation robuste, différentes techniques de détermination du front de Pareto peuvent être utilisées telles que la programmation par compromis [20, 108]. Un état de l'art est établi dans l'article [30].

La plupart des applications concernant l'optimisation robuste utilisent l'espérance et la variance des paramètres de conception. Cependant, en pratique, le calcul analytique de ces données à partir de densités de probabilité sur les paramètres d'entrée est souvent difficile. Les fonctions imbriquées dans le problème à travers lesquelles les incertitudes doivent être propagées sont dans la majorité des cas non-linéaires. Des techniques d'approximation doivent donc être employées. En principe on a recours aux développements de Taylor ou, dans le cas d'un système avec peu de paramètres, nous pouvons utiliser les intégrations de Gauss-Hermite [60]. Une des méthodes basée sur les développements de Taylor est exposée dans l'article [29]. Cette méthode est applicable lorsque les dérivées de la fonction objectif sont analytiquement déterminables. L'utilisation des développements de Taylor mène à diverses approches. Darlington et al. [29] mettent ainsi en place une méthode dans laquelle la fonction objectif est approximée au premier ordre (on suppose que la valeur moyenne de la fonction objectif f est égale à f) au point nominal de conception x . La fonction objectif f peut ensuite combiner robustesse et performance grâce à une somme pondérée des objectifs : minimisation de l'espérance et de la variance. Cette méthodologie est mise en application dans divers domaines : optimisation de la géométrie d'un appareil électromécanique [114], problèmes simples de conception [82], conception robuste d'une aile d'avion [55], conception robuste d'une antenne parabolique [35]. Cependant cette approche peut mener à des résultats totalement erronés dans la réalité surtout lorsque les incertitudes sont grandes par rapport à l'échelle de non linéarité du problème. Ceci est dû au fait que seuls les termes linéaires sont pris en compte dans le développement de Taylor de la fonction objectif. Cette méthode peut être améliorée en considérant les termes quadratiques. Cette méthodologie a notamment été appliquée à la conception d'avion [51] et l'optimisation robuste de la forme d'une pôle [97].

Finalement, il existe de nombreuses expressions possibles de la robustesse d'une solution. Selon la formulation de la robustesse que l'on considère, les solutions d'un même problème peuvent différer. Chacune des formulations présentées ci-dessus peut s'appliquer et se justifier pour un cas précis d'optimisation. L'approche à utiliser devra donc être choisie en fonction des informations disponibles sur les incertitudes du problème ainsi que des propriétés de robustesse que l'on souhaite obtenir pour les solutions optimales. Dans cette section nous avons exprimé les mesures de robustesse en considérant un objectif f , mais elles pourraient être également écrites pour une contrainte g . Deux notions différentes de robustesse cohabitent : d'un côté la robustesse liée aux objectifs (on ne souhaite pas que la variation associée aux incertitudes dégrade les objectifs trop fortement près de l'optimum), et de l'autre la robustesse liée à la satisfaction des contraintes (on ne souhaite pas

que l'optimum soit situé trop près des limites imposées par les contraintes): ce sont les contraintes de fiabilité.

Dans la section suivante nous présentons une formulation courante de l'optimisation fiabiliste.

6.1.3 Optimisation fiabiliste de la conception

En ayant recours à une méthode d'optimisation fiabiliste le concepteur cherche à déterminer un système optimal satisfaisant un niveau minimal de fiabilité. De façon formelle : la fiabilité est l'aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise dans des conditions données, pendant une durée imposée. Le terme fiabilité est également utilisé comme caractéristique désignant une probabilité de succès ou un pourcentage de succès (définition technique donnée par l'AFNOR). Un problème de fiabilité est posé formellement de la façon suivante (cf. [83]) :

Soit $\{X\} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ le vecteur aléatoire constitué des variables aléatoires X_k considérées avec $k = 1, 2, \dots, n$. Les fonctions de performance $G_i(\{X\})$; $i = 1, \dots, p$ décrivent l'état du système :

- $G_i(\{X\}) > 0$ définit le domaine de sûreté D_s , domaine intérieur à l'état limite, domaine des événements de succès ;
- $G_i(\{X\}) \leq 0$ définit le domaine de défaillance D_d , domaine extérieur à l'état limite, domaine des événements de défaillance ;
- $G_i(\{X\}) = 0$ définit conventionnellement la surface d'état limite, frontière entre les deux domaines précédents : D_s et D_d .

Soit $f_X(\{X\})$ la densité de probabilité du vecteur aléatoire $\{X\}$ et $G_i(\{X\})$ une fonction d'état limite. La mesure de la défaillance $P_{def}^{G_i}$ est alors la probabilité associée à l'événement $G_i(\{X\}) \leq 0$ c'est-à-dire la région de l'espace constituée par le domaine de défaillance, soit :

$$P_{def}^{G_i} = Prob[G_i(\{X\}) \leq 0] = \int_{D_d^i} f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (6.9)$$

Dans le cas particulier de deux variables aléatoires, la résistance R et la sollicitation S , nous avons donc :

- $\{X\} = \{R, S\}$ le vecteur des variables aléatoires, avec S et R les variables de sortie ;
- $G(\{X\}) = R - S = 0$ la fonction d'état limite ;
- $G(\{X\}) = R - S > 0$ le domaine de sûreté D_s ;
- $G(\{X\}) = R - S \leq 0$ le domaine de défaillance D_d ;

Dans le cas simple de deux variables aléatoires R et S caractérisées par une densité de probabilité jointe notée $f_{R,S}(r, s)$. La mesure de la défaillance P_{def} est la probabilité associée à l'événement $Z = \{R - S \leq 0\}$:

$$P_{def} = Prob[\{R - S \leq 0\}] = \int_{D_d} f_{R,S}(r, s) dr ds \quad (6.10)$$

La fiabilité est définie comme étant la probabilité du complémentaire de la défaillance, avec $Fiabilité = 1 - P_{def} = P_f$. L'optimisation sous contrainte

fiabiliste vise à déterminer une conception à coût minimal tout en assurant une performance avec un haut degré de fiabilité. Précisément, nous souhaitons minimiser une fonction objectif f en agissant sur des variables de conception caractéristiques x sous des contraintes de fiabilité g_i venant remplacer ou compléter les contraintes déterministes. Lorsque nous prenons en compte des incertitudes, introduites à travers les variables aléatoires δ , tous les critères deviennent potentiellement fonction de ces variables. Il faut donc s'intéresser aux fonctions aléatoires $f(x, \delta)$ et $g_i(x, \delta)$. Le problème d'optimisation doit alors être formulé en probabilités [81] et le dimensionnement optimal est défini par :

$$\begin{cases} \min_x E[f(x, \delta)] & x \in S \\ \text{Prob}(g_i(x, \delta) \leq 0) \geq P_f^{\delta_i} & i = 1, \dots, p \end{cases} \quad (6.11)$$

où les $P_f^{\delta_i}$ sont des seuils de fiabilité et S le domaine de validité. Au moins $P_f^{\delta_i}$ pourcents des simulations seront telles que la contrainte g_i est satisfaite. Typiquement, les seuils $P_f^{\delta_i}$ sont grands afin d'obtenir une bonne fiabilité des résultats (e.g., 95 %). Lorsque $g_i > 0$ décrit une situation intolérable telle que la ruine du système, les $P_f^{\delta_i}$ peuvent devenir très proches de 1. Différentes formulations d'un problème d'optimisation fiabiliste sont possibles, néanmoins cette approche est la plus courante dans le milieu industriel. Notons également que dans de nombreux problèmes nous nous plaçons dans le cas simplificateur où f est indépendant de δ . Ceci permet de traiter l'étude comme un simple problème d'optimisation sous des contraintes d'inégalité, avec la particularité tout de même que ces contraintes sont habituellement très chères à calculer (simulations importantes engendrant des temps de calcul élevés). Par exemple lorsque nous souhaitons minimiser la masse d'un avion sous des contraintes de probabilité de rupture, nous nous plaçons sous l'hypothèse que l'incertitude majeure affectant la probabilité de rupture provient de la variabilité dans les propriétés des matériaux (limite élastique), qui n'a donc pas d'influence sur la fonction objectif (la masse ici).

Le calcul de l'intégrale de l'équation 6.9 permettant de déterminer la probabilité de défaillance de l'équation 6.11 est souvent difficile à effectuer (ce calcul n'est mené que dans des cas particulièrement favorables où les fonctions de densité ont des formes simples). Une approche alternative afin d'évaluer cette intégrale est la méthode de simulation de Monte-Carlo. Cependant, lorsque nous souhaitons obtenir une probabilité de fiabilité élevée, le nombre d'expériences devient important et de ce fait le coût de calcul prohibitif. Une méthodologie alternative approximative est basée sur le calcul du point le plus probable (MPP).

Le niveau de fiabilité souhaité est souvent caractérisé à l'aide de l'indice de fiabilité. Dans l'exemple particulier de deux variables aléatoires R (résistance) et S (solicitation), $Z = R - S$ modélise la marge. L'indice de fiabilité de Rjanitzyne-Cornell β_C (sans dimension) est obtenu à partir de la moyenne m_Z et de l'écart-type σ_Z [11] :

$$\beta_C = \frac{m_Z}{\sigma_Z} \quad (6.12)$$

Cet indice indique le nombre des écarts types entre le point moyen m_Z et l'état limite ($Z = 0$). Il traduit l'usage fréquent en ingénierie de se décaler de quelques écarts-types par rapport à la moyenne afin de se placer en sûreté. L'indice de Rjanitzyne-Cornel est lié à $P_f = \Phi(-\beta)$ de façon exacte dans le cas de variables Gaussiennes et d'état-limite linéaire. En effet, une représentation différente de la marge Z pour le même état-limite, conduit à une valeur différente de β_C . Pour pallier ce problème, Hasofer et Lind ont proposé de ne pas se placer dans l'espace des variables physiques aléatoires $\{X\} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ mais de se placer dans un nouvel espace de variables Gaussiennes statistiquement indépendantes $\{U\} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, de moyennes nulles $m_{u_j} = 0$ et d'écarts-types unitaires $\sigma_{u_j} = 1 : X \rightarrow U$ vecteur gaussien où chaque composante u_j suit une loi normale centrée réduite $N(0, 1)$. La transformation de l'espace physique vers l'espace normé (ou espace standard) est immédiate dans le cas de variables X_j Gaussiennes indépendantes et la linéarité de l'état limite est conservée :

$$u_j = \frac{X_j - m_{X_j}}{\sigma_{X_j}} \quad (6.13)$$

Une des méthodes afin de déterminer la probabilité $Prob [g_i(u_j) \leq 0]$ est alors de construire une approximation au premier ordre comme suit : le point le plus probable P^* est tout d'abord recherché sur la surface d'état limite $g_i(u_j) = 0$ en résolvant un problème d'optimisation non linéaire. En d'autre terme, cela correspondant à trouver le point appartenant à la surface $g_i(u_j) = 0$ le plus proche de l'origine (cf. figure 6.3) de l'espace des variables centrées réduites u_j . L'indice de fiabilité est alors le minimum de la distance entre l'origine de l'espace des variables normalisées u_j et le domaine de sûreté $g_i(u_j) = 0$, ce qui s'écrit sous la forme d'un problème d'optimisation :

$$\begin{cases} \beta = \min \sqrt{\{u\}^t \{u\}} \\ g_i(u_j) \leq 0 \end{cases} \quad (6.14)$$

Outre l'indice de fiabilité β , les cosinus directeurs permettent de donner la direction de la droite (OP^*) orientée de P^* vers O (cf. figure 6.3) dans l'espace standard :

$$u_j^* = -\beta \alpha_j \quad (6.15)$$

Afin de déterminer l'indice β on emploie des techniques telles que l'algorithme de Rackwitz-Fiessler [56]. Une fois le point MPP déterminé, on effectue un développement en série de Taylor de la fonction g_i autour de ce point. Dans le cas où on utilise la méthode FORM (« First Order Reliability Method »), le développement est tronqué après les termes linéaires, soit :

$$g_i(X) \approx g_i(x_p) + \nabla g_i(x_p)^T (X - x_p) \quad (6.16)$$

Cette approximation revient à remplacer la surface d'état limite par son hyper plan tangent au point de construction x_p (voir figure 6.3). Le problème

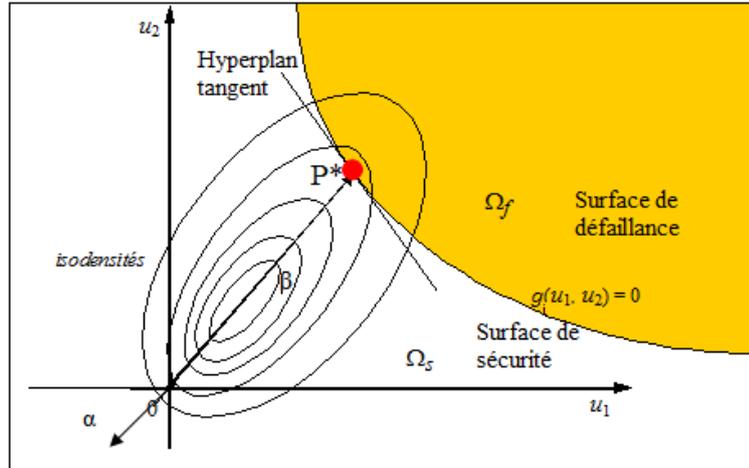


FIGURE 6.3: Recherche du point MPP

est ainsi réduit à une intégration unidimensionnelle de la fonction de densité de probabilité normale entre les bornes $-\infty$ et $\|x_p\|$. Nous établissons alors l'approximation :

$$\begin{cases} \text{Prob}[g_i(x) \leq 0] \approx \Phi(-\beta) \\ \beta = \frac{g_i(x_p) - \nabla g_i(x_p)^T x_p}{\sqrt{\nabla g_i(x_p)^T \nabla g_i(x_p)}} \end{cases} \quad (6.17)$$

Si on considère les termes quadratiques du développement de Taylor nous sommes alors amenés à utiliser la méthode SORM (« Second Order Reliability Methods ») [56, 103]. Pour une explication plus détaillée nous renvoyons le lecteur aux travaux de Agarwal [1].

La détermination du point le plus probable est un problème d'optimisation à part entière qui induit un processus itératif. Quand la formulation probabiliste 6.11 est employée afin de résoudre le problème d'optimisation, la méthode est dite en « double boucle ». L'efficacité de cette méthode est généralement faible car elle emploie une boucle d'analyse probabiliste afin de déterminer la fiabilité de chaque contrainte au point courant de l'optimisation (requérant un nombre de calculs intensif pour l'analyse d'incertitude) puis une deuxième boucle afin de minimiser la fonction objectif tout en satisfaisant les contraintes fiabilistes [36]. Ainsi afin de limiter le temps de calcul, des méthodes d'optimisation fiabiliste en boucle unique ont été développées [22, 140, 122]. Ces méthodes seront exposées par la suite.

6.1.4 Combinaison optimisation fiabiliste et optimisation robuste

Il est également possible de concevoir un système faiblement sensible aux variations et ayant statistiquement les meilleures performances. Pour ce faire

on allie robustesse et fiabilité, et le problème se pose alors de la façon suivante [26] :

$$\begin{cases} \min_x E[f(x, \delta)] & x \in S \\ \min_x \text{Var}[f(x, \delta)] \\ \text{Prob}[g_i(x, \delta) \leq 0] \geq \alpha_i^g & i = 1, \dots, p \end{cases} \quad (6.18)$$

avec S l'espace de recherche. Le compromis moyenne/variance peut être à nouveau tranché en introduisant une pénalité λ [26], et le critère à minimiser devient :

$$f_\lambda(x) = E[f(x, \delta)] + \lambda \sqrt{\text{Var}[f(x, \delta)]} \quad (6.19)$$

Les quelques applications que nous rencontrons afin d'illustrer cette méthodologie sont souvent des problèmes académiques tels que l'optimisation de structures simples composées de poutres [49]. La résolution de problèmes réels sont plus rares, néanmoins cette méthodologie est mise en œuvre dans le cas de la conception optimale et robuste d'un véhicule (étude visant à améliorer la tenue de route) [21].

Le développement de méthodes d'optimisation sous incertitude pour les applications industrielles a été largement influencé par l'émergence de modèles de simulations numériques ainsi que des attentes croissantes de la part des concepteurs. L'avènement de telles approches a suscité un nouvel intérêt quant à la possibilité d'optimiser des systèmes complexes. Dans la section suivante nous présentons une synthèse des algorithmes d'optimisation les plus répandus dans le domaine industriel.

6.2 ALGORITHMES DE RÉOLUTION

Le choix d'un algorithme, permettant de résoudre efficacement un problème d'optimisation, dépend des caractéristiques mathématiques de la fonction objectif, des variables de conception, des contraintes ainsi que des informations disponibles. Dans ce chapitre nous établissons une brève revue des différents algorithmes pouvant être utilisés afin de résoudre de façon générale un problème d'optimisation.

6.2.1 Méthodes à gradient

Les techniques à gradient sont des méthodes simples et pratiques permettant de résoudre un problème d'optimisation. Cette méthode fonctionne de manière itérative en améliorant successivement le vecteur des variables de conception x_k à partir d'hypothèses (estimations). La valeur x_k sera modifiée d'une itération du processus d'optimisation à la suivante, de telle façon : x_{k+1} avec $x_{k+1} = x_k + s_k$ où $s_k = \alpha_k d_k$ avec $\alpha_k > 0$ le pas d'itération et d_k la direction de descente. Les méthodes à gradient nécessitent le calcul du gradient ou du hessien de la fonction objectif et des contraintes. La fonction à minimiser f est remplacée par son approximation linéaire locale : $f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k) s_k + o(\|s_k\|)$. L'objectif est de diminuer la

valeur de f d'une itération à l'autre. On obtient $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$ lorsque $f'(x_k) s_k + o(\|s_k\|) \leq 0$, c'est-à-dire quand la direction de descente d_k est telle que $f'(x_k) d_k \leq 0$ (la direction de descente optimale est le vecteur opposé au gradient).

Dans certaines circonstances, les méthodes à gradient nécessitent de nombreuses itérations avant d'obtenir une précision suffisante. Elle converge en general vers des optima locaux qui peuvent se trouver loin des optima globaux. De nombreuses techniques ont été proposées, telle que la méthode du gradient conjugué [59], qui permet d'accélérer la convergence de l'algorithme. Ce dernier a par la suite été amélioré par les méthodes de Fletcher-Reeves [47] et Polak-Robiere [101]. D'autre part, la dérivée de la fonction objectif est rarement connue dans des problèmes d'optimisation réels et n'a de sens que pour les problèmes continus. Par exemple, l'utilisation de gradients approchés par différences finies [15] n'est pas toujours préconisée [25], notamment lorsque des boîtes noires sont imbriquées dans le processus d'optimisation.

6.2.2 Méthodes de recherche directe

Les méthodes de recherche dites « directe » sont des méthodes ne nécessitant pas le calcul du gradient. Ces approches consistent à échantillonner la fonction objectif en un nombre fini de points à chaque itération du processus d'optimisation. Elles décident des évaluations suivantes à partir de ces échantillons sans aucune approximation des dérivées ni aucun modèle de la fonction. Ces approches peuvent être classées en deux catégories : les méthodes basées sur un simplexe comme l'algorithme de Nelder-Mead [92] et les méthodes de recherche directe guidées par un ensemble de directions telles que l'approche Pattern Search [125]. La méthode de minimisation de Nelder-Mead est basée sur la comparaison des valeurs de la fonction objectif d'un problème d'optimisation aux $(N + 1)$ sommets d'un simplexe général. Le simplexe de Nelder-Mead peut être défini de la façon suivante. Soit f la fonction objectif que l'on cherche à optimiser. Soit un simplexe S défini par $N + 1$ sommets, dans un espace de dimension N et $\{x_j\}_{j=1, \dots, N+1}$, ces derniers sommets, tels que $f(x_1) > f(x_2) > \dots > f(x_{N+1})$. Ainsi, x_1 est le plus mauvais point et x_{N+1} est le meilleur point. x_{N+1} est modifié à chaque itération, selon, l'équation suivante : $x(\mu) = (1 + \mu) x^* - \mu x_{N+1}$, où x^* désigne le centroïde de x_1, x_2, \dots, x_N , c'est à dire $x^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$. Les opérations de base sont les suivantes : la réflexion ($\mu = 1$), l'expansion ($\mu = 2$), la contraction externe ($\mu = 0,5$) et la contraction interne ($\mu = -0,5$). Le simplexe initial est donc modifié à travers les opérations de base en changeant le sommet ayant la plus grande valeur de la fonction objectif par un autre point de valeur plus petite.

Un premier avantage de l'algorithme de Nelder-Mead est qu'il ne requiert pas de calcul de gradient car c'est une méthode d'ordre 0. De plus c'est un algorithme rapide et robuste comparé par exemple aux algorithmes génétiques qui présentent une perte d'efficacité quand on a besoin de résultats

précis [105]. Cependant cette méthode peut converger vers un minimum local.

La méthode directe de recherche Pattern Search est celle employée dans l'étude conceptuelle avion, elle sera détaillée dans la suite de cette thèse (cf. chapitre 9).

6.2.3 Algorithmes évolutifs

Les algorithmes évolutifs sont des méthodes dites d'exploration qui découlent de la théorie de l'évolution (Darwin) : une population initiale est générée de façon aléatoire (points appelés « parents »), les meilleurs individus sont retenus pour engendrer une nouvelle population (évaluation des contraintes et de la fonction objectif). Ce procédé, appelé « mutation », est réitéré jusqu'à l'obtention d'une solution jugée satisfaisante. Les algorithmes évolutifs sont séparés en classes : les stratégies d'évolution, les programmes évolutifs [12], les algorithmes génétiques [48] et les programmes génétiques [78]. Un état de l'art de ces différentes méthodes est donné dans [5]. La méthode du recuit est un cas particulier des algorithmes évolutifs (un unique parent crée un descendant) [75, 131].

Ces différents algorithmes évolutifs ont été mis en application pour divers problèmes d'optimisation sous incertitudes : optimisation d'une soupape d'échappement d'automobile [73], conception robuste des pâles d'un ventilateur [80], conception robuste de filtres optiques [52]. La plupart de ces méthodes utilisent des techniques d'échantillonnage afin de réduire le bruit [18]. Certaines études mettent en défaut cette méthode et démontrent qu'un seul échantillonnage par paramètre de conception est plus efficace qu'un ré-échantillonnage [128, 127]. Les algorithmes évolutifs explorent l'ensemble de l'espace de conception, ainsi ils sont efficaces en ce qui concerne la résolution de problèmes d'optimisation globaux.

6.2.4 Méthodes d'approximation

Les méthodes d'approximation permettent de construire des modèles approchés ou métamodèles à partir d'un ensemble de points x scrupuleusement choisis. Nous utilisons les valeurs observées de f pour construire un métamodèle F_M de la fonction objectif f et/ou des contraintes. Les métamodèles sont souvent des fonctions simples de x qui dépendent d'un ensemble de paramètres à optimiser [13]. En ayant ainsi un modèle dépendant des variables observées, l'optimum peut être facilement calculé et peut servir d'approximation pour l'optimum de f (rigoureusement il ne s'agit pas de l'optimum réel mais par itérations successives on arrive souvent à s'en rapprocher suffisamment). Un état de l'art concernant la modélisation des métamodèles est établi dans [71] (plan d'expériences, surfaces de réponse, réseaux de neurones etc.). Dans le contexte de l'optimisation les surfaces de réponse [91], les réseaux de neurones [100] et les modèles de krigeage [69, 42] sont couramment utilisés. Jin et al. [70] fournissent un aperçu de

l'utilisation de ces techniques dans le cadre de l'optimisation robuste. L'approche des surfaces de réponse sera détaillée dans la section 11.1.2 de cette thèse. Pour des problèmes à grand nombre de variables la construction de ces approximations présente des limitations en terme de temps de calcul.

Les systèmes conçus font souvent intervenir plusieurs disciplines étroitement liées (pour un avion par exemple : les masses, le système de propulsion, le fuselage etc.). Les approches d'optimisation sous incertitude standards sont alors difficiles à mettre en oeuvre et des méthodes spécifiques permettant de propager les incertitudes à travers ces différentes disciplines doivent être mises en place. Le but du chapitre suivant est donc de donner un aperçu des techniques d'optimisation multidisciplinaires sous incertitudes.

L'OPTIMISATION MULTIDISCIPLINAIRE

Après la mise en place de méthodes d'optimisation pour des problèmes mono-disciplinaire il était utile de faire de même pour les problèmes multidisciplinaires. Ce domaine étudie l'optimisation de systèmes qui font intervenir plusieurs disciplines interdépendantes. Ces interdépendances rendent souvent inefficaces les méthodes classiques d'optimisation. En effet, les approches standards peuvent se heurter à la grande taille de ces systèmes [137], dont l'évaluation globale est le plus souvent extrêmement coûteuse (voir parfois impossible directement). Le développement de méthodes spécifiques est donc nécessaire afin de faire face aux problèmes d'optimisation multidisciplinaire. Le fait de les décomposer en différents sous-systèmes permet notamment de rendre leur optimisation réalisable. Parallèlement, l'implémentation de méthodes numériques telles que les systèmes multi-agent auto adaptatifs, facilite également la prise en compte des différentes dimensions du problème multidisciplinaire au sein du même système de résolution [137] : nombre de variables élevé, rétroaction entre les disciplines etc. L'approche de résolution multi-agent a auparavant été proposée pour la résolution de problèmes de conception préliminaire avion [136]. Il faut ensuite déployer des techniques facilitant la propagation des incertitudes entre disciplines dans ces méthodes de résolution de problèmes d'optimisation multidisciplinaire.

Dans un premier temps, nous présentons dans ce chapitre différentes méthodes de résolution déterministe de problèmes d'optimisation multidisciplinaire. Nous détaillerons notamment l'approche multi-agent développée au sein du projet ID₄CS. Puis nous nous intéresserons à la propagation des incertitudes dans les problèmes d'optimisation multidisciplinaire. Les méthodes présentées sont basées sur une représentation des incertitudes probabilistes. D'autres méthodes de propagation basées sur des modélisations subsidiaires : analyse d'intervalles et théorie de l'évidence, sont présentées dans l'annexe C.

7.1 MÉTHODES DE RÉOLUTION DÉTERMINISTE

L'optimisation multidisciplinaire s'intéresse aux systèmes complexes constitués de plusieurs sous-systèmes interdépendants. Dans le chapitre précédent nous étions situés dans le cadre de l'optimisation mono-disciplinaire où l'ensemble du système à optimiser est considéré comme une unique boîte noire. Cependant certains systèmes sont souvent bien trop importants pour pou-

voir être abordés ainsi. Afin de traiter des problèmes de conception complexes (tels que la conception d'avions, de voitures, de fusées, etc.), toute approche directe est difficile voire impossible, et il devient nécessaire de décomposer le système en différents constituants. Nous pouvons alors décrire un problème d'optimisation multidisciplinaire comme un ensemble de sous-systèmes (appelés « disciplines ») interconnectés au sein desquels est traitée une spécificité du problème. Cette subdivision du problème est une façon d'organiser efficacement la conception afin de trouver les meilleurs compromis entre les spécifications et les exigences : elle fournit un cadre efficace pour la recherche de la solution optimale, dans tous les corps de métiers ainsi définis par les disciplines. Les méthodes d'optimisation multidisciplinaires permettent de manipuler simultanément les variables impliquées dans les différentes disciplines du problème. Le design optimal est ainsi déterminé rapidement [30]. Ces méthodes sont particulièrement plus efficaces qu'une succession d'optimisations mono-disciplinaires qui contourne la prise en compte des multiples boucles entre les disciplines.

La difficulté de l'optimisation multidisciplinaire réside donc dans la prise en compte des différentes relations entre les sous-systèmes : nous ne souhaitons pas effectuer une optimisation pour chacune des disciplines, mais pour l'ensemble du système global, c'est à dire les disciplines avec leurs interdépendances. La conception de systèmes implique souvent des domaines d'expertise variés (comme les masses, le système de propulsion, la géométrie, etc.). Ainsi, le but recherché en optimisation multidisciplinaire est de faciliter les échanges entre les disciplines afin qu'elles convergent ensemble le plus rapidement possible vers une solution optimale globale. Les problématiques multidisciplinaires sont très répandues dans l'industrie, notamment dans le secteur aéronautique et spatial. Dans l'article [120], les auteurs présentent une vue d'ensemble du domaine et de ses récents progrès. Plusieurs exemples de problèmes concrets que l'on rencontre dans la littérature sont également détaillés dans [8].

Nous donnons un exemple simple de système multidisciplinaire comportant trois disciplines (cf. figure 7.1 [99]). Le système possède différentes variables d'entrées, qui peuvent être des variables de conception z ou bien des paramètres environnementaux e fixés. Les disciplines communiquent entre elles par le biais de variables de couplage (ou de partage) y . Nous retrouvons en sortie du système la fonction objectif f et les contraintes g du problème. Dans le cadre de l'optimisation multidisciplinaire, les variables d'entrées sont aussi parfois différenciées en variables locales x (pour une variable qui n'impacte qu'une seule discipline) et variables de partage y (pour les autres variables).

Dans notre exemple, x_i serait ainsi un ensemble de variables locales et y_i un ensemble de variables partagées par les trois disciplines. Certaines entrées de disciplines proviennent de sorties d'autres disciplines. Ces liens interdisciplinaires sont également représentés par les variables de couplage y_i (parfois appelées variables d'interaction). La modification de la sortie de

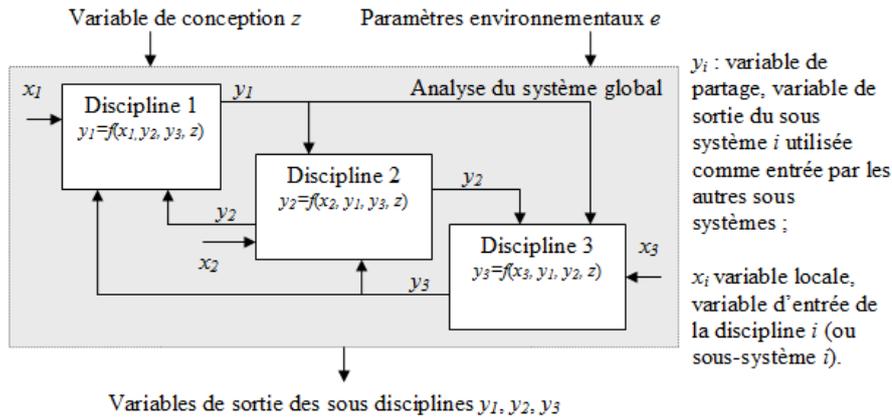


FIGURE 7.1: Exemple de système multidisciplinaire [99]

l'une des disciplines peut donc impacter les autres par l'intermédiaire de ces variables, ce qui va altérer les sorties des autres disciplines qui pourront à leur tour avoir un effet sur la discipline initiale. Le problème de l'analyse multidisciplinaire est donc de parvenir à un équilibre entre toutes les disciplines en résolvant les différents bouclages présents (c'est-à-dire en trouvant des valeurs stables pour les variables de couplage y_i qui conviennent à toutes les disciplines). Plusieurs méthodes existent afin d'obtenir la convergence des variables de couplage : ces variables peuvent être gérées par le système lui-même, ou bien être intégrées à la formulation du problème d'optimisation (un état de l'art concernant ces méthodes est établi dans [99]). Ces différentes méthodologies d'optimisation multidisciplinaire déterministe sont brièvement présentées dans cette section.

7.1.1 MDF (Multidisciplinary Feasible Design)

La méthode MDF est non seulement la formulation la plus répandue dans le milieu industriel mais également la plus simple à mettre en oeuvre. Une analyse globale du système (MDA « Multidisciplinary Design Analysis ») est couplée à un optimiseur (voir figure 7.2) : à chaque itération du processus d'optimisation, les équations d'état sont résolues afin de déterminer les sorties. Les variables de partage y (cf. figure 7.1) sont également déterminées lors de la MDA, notamment en employant une itération de Gauss-Seidel entre les différentes analyses des disciplines [3].

Le problème se pose de la façon suivante :

$$\begin{cases} \min_{z,x} f(z, y_i(x, y_j, z), x) & i, j = 1, \dots, n; i \neq j \\ g(z, y_i(x, y_j, z), x) \leq 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

Cette méthode est la plus simpliste, car elle est basée sur un système intégré et nécessite seulement un optimiseur. Elle a également l'avantage de pouvoir être facilement implémentée et modifiée : en comparaison aux autres

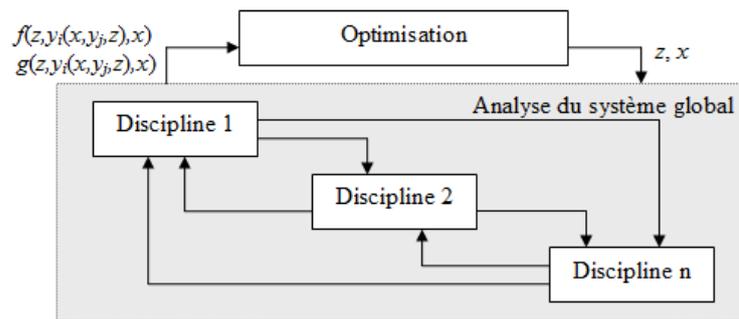


FIGURE 7.2: Méthode MDF

méthodes de décomposition cette approche requiert moins de temps afin d'être modifiée et s'adapte plus facilement aux différents problèmes auxquels nous sommes confrontés. Toutefois, un grand nombre d'évaluations est nécessaire pour les problèmes complexes. D'autre part, cette méthode présente des difficultés afin de déterminer l'optimum lorsque le nombre de variables et de boucles de rétroaction augmente.

7.1.2 IDF (Individual discipline Feasible)

La méthode IDF permet d'éviter une analyse du système global (analyse faite dans la méthode MDF) qui peut s'avérer coûteuse lorsque les paramètres de conception sont importants. On procède à un découplage des disciplines : chaque discipline a pour but de résoudre sa propre équation d'état. L'optimisation reste cependant unifiée (cf. figure 7.3). La concordance entre les solutions des différentes disciplines est assurée grâce à la création de contraintes (on impose notamment une contrainte sur la variable auxiliaire y'_i créée afin de découpler l'analyse disciplinaire) [4].

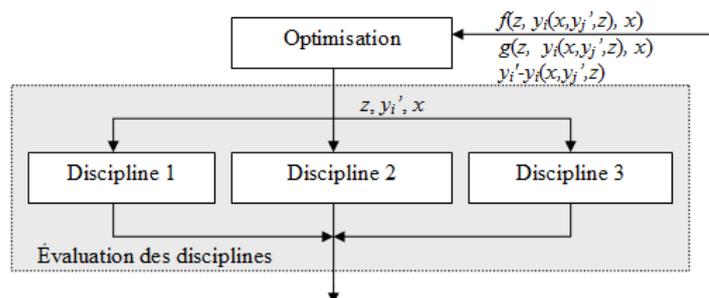


FIGURE 7.3: Méthode IDF

Le problème se pose de la façon suivante :

$$\begin{cases} \min_{z, y', x} f(z, y_i(x, y'_j, z), x) & i, j = 1, \dots, n; i \neq j \\ g(z, y_i(x, y'_j, z), x) \leq 0 \\ y'_i - y_i(x, y'_j, z) = 0 \end{cases} \quad (7.2)$$

Les méthodes IDF et MDF ont des avantages et des inconvénients semblables. Néanmoins, la méthode IDF, fait preuve d'une certaine amélioration en termes de temps CPU (« Central Processing Unit »). En effet, un plus petit nombre d'évaluations globales du système est nécessaire. Cependant, bien que les disciplines locales puissent se situer dans le domaine du réalisable, le système complet peut ne pas l'être avant la convergence du processus d'optimisation.

7.1.3 CO (Collaborative optimization)

L'architecture de la méthode CO est illustrée sur la figure 7.4. Cette méthode présente deux niveaux. L'optimisation au niveau système (niveau 1) est chargée de déterminer les valeurs cibles des variables de conception globales z (utilisées par l'ensemble des disciplines) ainsi que les valeurs des variables dites de partage y (variables d'entrée utilisées par plusieurs disciplines) tout en respectant les contraintes imposées au système. Une fois ces variables déterminées elles sont envoyées aux disciplines. Au niveau 2 chaque discipline gère ses variables locales. Les optimisations disciplinaires sont chargées d'optimiser l'objectif propre à la discipline (les résultats de l'optimisation disciplinaire sont z^* , y^* et x^*) tout en respectant certaines contraintes locales imposées dans le but d'éviter d'éventuelles contradictions entre les différentes disciplines (contraintes J_i , une contrainte crée pour chaque discipline) [4].

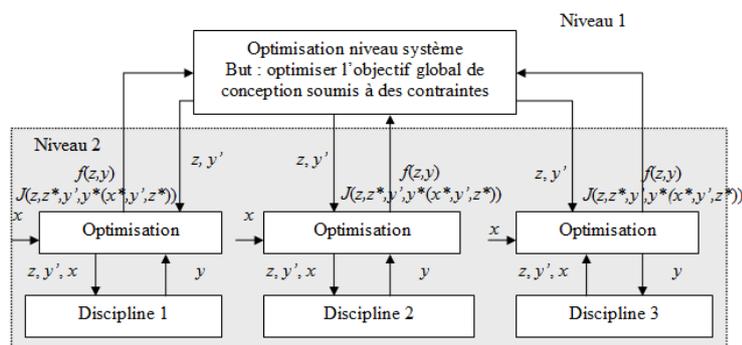


FIGURE 7.4: Méthode CO

Le problème d'optimisation niveau système (Niveau 1) se pose de la façon suivante :

$$\begin{cases} \min_{z_{SL}, y_{SL}} f(z_{SL}, y_{SL}) \\ J_i(z_{SL}, z_i^*, y_{SL}, y_i^*(x_i^*, y_j, z_i^*)) = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; i \neq j \end{cases} \quad (7.3)$$

où l'indice SL désigne les variables niveau système. Le problème d'optimisation niveau disciplinaire (Niveau 2) concernant la discipline i se pose quant à lui comme suit :

$$\begin{cases} \min_{z, y, x} J_i(z_{SL}, z_i, y_{SL}, y_i(x_i, y_j, z_i)) = \sum (z_{SL} - z_i)^2 + \sum (y_{SL} - y_i)^2 \\ g_i(z_i, y_i(x_i, y_j, z_i), x_i) \leq 0 \end{cases} \quad (7.4)$$

Cette méthode a été développée afin de résoudre des problèmes multidisciplinaires présentant un grand nombre de paramètres. Les méthodes de décomposition permettent de trouver des résultats proches de la solution réelle néanmoins des différences mineures existent entre les solutions. Elles sont dues à la limite de compatibilité interdisciplinaire, et le degré d'approximation. Cette méthode a tendance à être plus coûteuse en temps de calculs que les précédentes mais elle permet d'atteindre de meilleurs niveaux de faisabilité. Grâce à sa portabilité, la méthode CO est une méthode de décomposition efficace (possibilité d'intégrer une méthode dans la structure existante).

7.1.4 CSSO (Concurrent Subspace Optimization)

La méthode CSSO est une méthode de décomposition permettant d'effectuer plusieurs optimisations en parallèle (cf. figure 7.5) : chacune des disciplines optimise certains paramètres du problème global. Chaque sortie est approximée par une optimisation disciplinaire (y_i^{app}) afin de pouvoir simuler les réponses des autres disciplines (les disciplines sont couplées : l'entrée d'une discipline est la sortie d'une autre). De la même façon, l'optimisation niveau système utilise des modèles d'approximation. Les modèles disciplinaires sont mis à jour, suite à l'optimisation niveau système. Une analyse multidisciplinaire complète est effectuée à chaque boucle afin de générer un système respectant les contraintes, cette analyse est ensuite utilisée pour la mise à jour des modèles [119].

Le problème d'optimisation disciplinaire concernant la discipline i se pose :

$$\begin{cases} \min_{z, y} f(z, y(x_i, y_j^{app}, z_i), y_j^{app}) \quad i, j = 1, \dots, n; i \neq j \\ g_i(z, y_i(x_i, y_j^{app}, z_i), y_j^{app}, x_i) \leq 0 \end{cases} \quad (7.5)$$

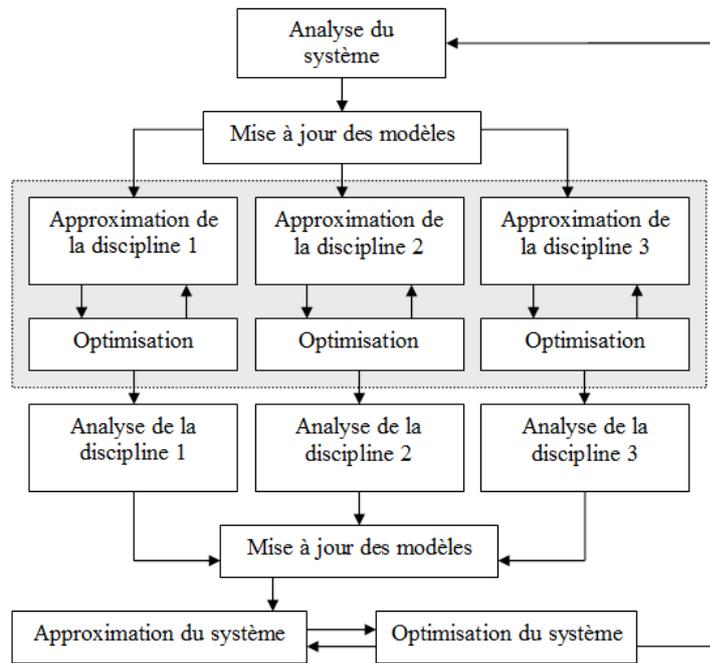


FIGURE 7.5: Méthode CSSO

Le problème d'optimisation niveau système se pose quant à lui de la façon suivante :

$$\begin{cases} \min_{z, y^{app}} f(z, y^{app}) \\ g(z, y^{app}) \leq 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

La formulation CSSO est donc une approche décentralisée dans laquelle chaque discipline tente d'optimiser le problème global en utilisant des modèles approchés des autres disciplines. Cette méthode est efficace principalement pour les formulations analytiques ou pour des problèmes dont le nombre de disciplines est faible. En effet les approximations du système accroissent la complexité de sa mise en oeuvre.

7.1.5 BLISS (Bi-Level Integrated System Synthesis method)

La formulation BLISS est elle aussi une méthode à deux niveaux, mais dans laquelle les variables de couplages sont gérées en interne par une analyse multidisciplinaire. Le principe de la méthode BLISS est de construire un modèle linéaire réduit à partir des valeurs des sorties et de leurs gradients (cf. figure 7.6). Les variables locales sont tout d'abord optimisées pour résoudre le problème linéaire approché (chaque discipline est optimisée en faisant varier les variables locales x tandis que les variables globales z sont maintenues constantes ; on veille à respecter les contraintes locales). Les variables globales sont ensuite optimisées afin de résoudre le problème linéaire approché. La fonction objectif globale tient compte des contraintes saturées par les optimisations disciplinaires grâce aux informations apportées par les

coefficients de Lagrange associés à ces contraintes (l'analyse de sensibilité permet de prédire l'effet de chaque variable sur la fonction objectif) [121]. Le calcul est ensuite poursuivi de manière itérative à partir de la nouvelle solution obtenue, jusqu'à la convergence vers une solution intéressante.

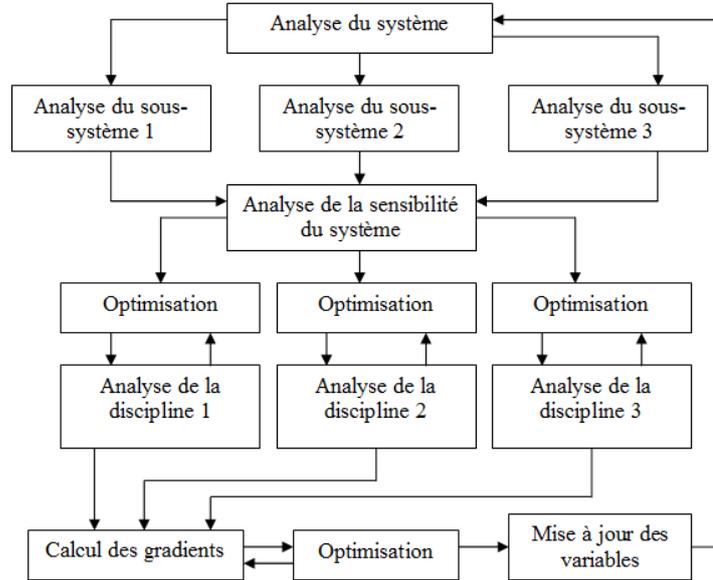


FIGURE 7.6: Méthode BLISS

Le problème d'optimisation disciplinaire concernant la discipline i se pose :

$$\begin{cases} \min_{x_i} [d(f, x_i)^T \Delta x_i] \\ g_i(x_i) \leq 0 \end{cases} \quad (7.7)$$

où $d(f, x_i)$ est la dérivée locale de la fonction objectif. Le problème au niveau système se pose quant à lui de la façon suivante :

$$\begin{cases} \min [f] \\ f = d(y_1, x_1) \Delta x_1 + d(y_2, x_2)^T \Delta x_2 + d(y_3, x_3)^T \Delta x_3 + \dots \\ g(z, y(x, z), x) \leq 0 \end{cases} \quad (7.8)$$

BLISS est la méthode permettant généralement d'obtenir la solution la plus réalisable en termes de nombre de contraintes actives, cependant, due à l'analyse de sensibilité imbriquée elle est également la méthode la plus coûteuse en ressources informatiques. Cette méthode fournit une certaine possibilité de portabilité (possibilité d'intégrer une méthode dans la structure existante).

Les différentes méthodes exposées dans cette section sont testées et comparées dans l'article [99], dans le cadre d'un problème simple analytique et

dans le cas d'un problème plus complexe de conception avion. Pour tenir compte des incertitudes dans un système multidisciplinaire, il faut propager ces incertitudes dans tout le système afin de connaître l'incertitude résultante en sortie. Il est donc nécessaire que toutes les disciplines s'échangent des informations sur les incertitudes impactant leurs données, en plus de leurs propres données. Cette opération implique de réaliser d'importantes modifications dans le modèle décrivant le système afin de permettre cet échange d'informations supplémentaires ainsi que leur traitement. Pour faciliter l'intégration de la robustesse dans les processus d'optimisation multidisciplinaires présentés dans cette section, Baudoui propose dans [10] une solution simplifiée basée sur des compromis, qui ne nécessite pas de bouleverser la description du système. Seules les disciplines impactées par des paramètres incertains seront adaptées afin de permettre la prise en compte des incertitudes. La propagation complète des incertitudes n'est pas réalisée. Donnons un exemple simple : on suppose qu'une seule discipline possède des paramètres incertains. La démarche consiste alors à remplacer le modèle de cette discipline par un modèle réduit intégrant la robustesse : nous pénalisons pour cela sa sortie en fonction de la robustesse des points considérés. On peut par exemple construire un modèle du cas le plus défavorable de cette discipline. On peut également mettre en place un modèle réduit, établi à partir d'un certain nombre d'échantillons pour lesquels la robustesse a été évaluée. Les modifications apportées au modèle encapsulé dans la discipline vont affecter le système tout entier et conduire vers une solution optimale différente, à priori plus robuste que la solution initiale.

De nouvelles approches basées sur l'intelligence artificielle : les systèmes multi-agents adaptatifs, permettent également de répondre aux problèmes de résolution rencontrés en optimisation multidisciplinaire.

7.1.6 *Vers des approches informatiques : les systèmes multi-agent*

Dans le travail actuel mené au sein du projet ID4CS dans lequel s'inscrit cette thèse, l'approche choisie afin de résoudre des problèmes d'optimisation multidisciplinaire est basée sur les systèmes multi-agent. Les AMAS sont dédiés à la résolution de problèmes complexes. Ils permettent de prendre en compte tous les aspects de la MDO et fournissent ainsi une aide aux ingénieurs dans leur étude de la conception optimale.

Un système AMAS est un système composé de plusieurs entités autonomes appelées agents. Un agent a un ou plusieurs objectifs locaux. Il interagit avec d'autres agents afin de satisfaire ses objectifs. Des études ont démontré que ce type de système peut être utilisé pour la résolution de problèmes d'optimisation multidisciplinaire [51]. L'objectif de cette section est de présenter le fonctionnement d'un système multi-agent auto adaptatif.

Nous explicitons le principe d'un système multi-agent grâce à un cas test analytique simple : un cas d'étude inspiré d'Alexandrov [4]. Ce cas d'étude est représentatif d'un problème d'optimisation multidisciplinaire :

$$\begin{cases} \min_{l_1, l_2, s} \frac{1}{2} (a_1^2 + 10a_2^2 + 5(s-3)^2) & l_1, l_2, s \in S; a_1 = \frac{l_1 - a_2}{2}; a_2 = \frac{l_2 - a_1}{2} \\ s - 10l_1 - 1 \leq 0 \\ -s + l_2 + 2 \leq 0 \end{cases} \quad (7.9)$$

Le cas d'étude peut être agentifié tel que représenté sur la figure 7.7.

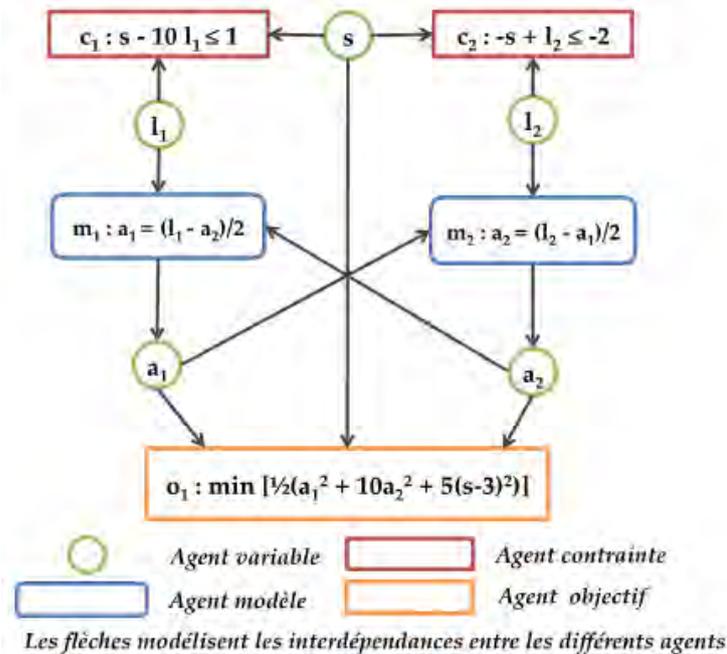


FIGURE 7.7: Agentification du cas d'étude d'Alexandrov

Chacun des éléments introduits dans le problème d'optimisation multidisciplinaire peut être encapsulé dans un agent. Il existe des agents de natures différentes :

- agent variable : représente les variables échangées dans le problème. Un agent variable peut être connecté en entrée à un ou plusieurs agents (agent modèle, contrainte ou objectif). Dans ce cas, l'agent variable fournit aux agents auxquels il est connecté une valeur permettant le calcul de leurs valeurs de sortie. Un agent variable peut aussi être connecté à un seul agent modèle en sortie, dans ce cas sa valeur correspond à celle fournie par le modèle. Un agent variable peut donc être situé en entrée (l_1, l_2, a_1, a_2) et/ou en sortie (a_1 en sortie de m_1, a_2 en sortie de m_2) d'autres agents. Lorsqu'un agent est seulement connecté en entrée, il est capable de satisfaire directement toute demande de modification

en envoyant tout simplement cette requête à sa valeur courante. Lorsqu'un agent est situé en sortie d'un agent modèle, sa valeur dépend du calcul de ce dernier, il ne peut donc changer sa valeur qu'indirectement en demandant à l'agent modèle de modifier sa valeur de sortie.

- agent modèle : représente le calcul d'un modèle provenant d'une discipline quelconque. Un agent modèle prend en entrée les valeurs des agents variables qui y sont connectés (i.e. pour $m_1 : l_1$ et a_2) et les utilise pour déterminer la ou les valeurs des variables connectées en sortie du modèle (i.e. pour $m_1 : a_1$). Afin de satisfaire une demande de changement de valeur transmise par l'un de ses agents variables connecté en sortie, l'agent modèle détermine les modifications nécessaires à appliquer à ses valeurs en entrée et envoie à son tour des demandes de changement à ses agents variables connectés en sortie.
- agent objectif : représente l'objectif du problème d'optimisation (minimiser ou maximiser une valeur du problème, i.e. o_1). Ce type d'agent est une spécialisation de l'agent modèle. En effet, l'agent objectif ne comporte qu'une seule sortie et envoie directement des demandes de modification de ses valeurs en entrée afin de minimiser ou maximiser cette sortie.
- agent contrainte : représente une contrainte du problème MDO (i.e. c_1 ou c_2). Comme l'agent objectif, ce type d'agent est une spécialisation de l'agent modèle. L'agent contrainte produit une seule valeur de sortie et il agit de manière à maintenir une valeur supérieure, inférieure ou égale à une constante. Pour ce faire, l'agent envoie des demandes de modification de valeur à ses agents variables en entrée.

Lorsque tous les agents ont atteint un compromis, sans forcément atteindre leur objectif, les agents variables ont alors convergé vers les valeurs optimales du problème MDO.

La fonction des différents agents étant introduite, on présente maintenant brièvement la démarche de résolution d'un problème d'optimisation multidisciplinaire par le biais d'un système multi-agent sur un exemple simple (cas d'étude inspiré d'Alexandrov). On suppose que les variables et les paramètres d'entrée ont des valeurs initiales arbitraires. On suppose également que l'agent objectif (dans lequel est encapsulé la performance à minimiser) décide de demander à la variable a_2 de prendre une valeur différente de celle actuelle afin d'améliorer la performance du système (nouvelle valeur déterminée par le biais d'un optimiseur local propre à chaque agent). La démarche suivie par le système multi-agent est alors la suivante. a_2 étant une variable associée à un modèle, elle ne peut décider toute seule de changer sa valeur, elle doit transmettre la requête à son modèle. Une optimisation locale est alors effectuée au niveau de l'agent modèle afin de répondre à cette demande. L'optimiseur retourne les valeurs des entrées du modèle (a_1 et l_2) qui sont solutions du problème. L'agent modèle envoie alors les requêtes nécessaires à ses entrées. Pour simplifier les explications on suppose que l_2 a déjà la bonne valeur. Étant donné que la variable a_1 ne peut changer sa valeur elle-même, une demande est alors transmise à son modèle. Le modèle utilise l'optimiseur (qui peut être différent de celui précédemment employé)

pour traiter la demande. L'optimiseur retourne une valeur pour a_2 et l_1 (une fois de plus, nous avons choisi de simplifier l'exemple : a_2 a déjà la valeur requise). Le modèle envoie un message à l'entrée l_1 . l_1 est un paramètre, il peut lui-même décider de changer sa valeur. Il accepte la demande et en informe les entités en relation avec lui de ce changement. Le modèle peut maintenant calculer la nouvelle valeur de a_1 . Comme a_1 modifie sa valeur, elle informe les entités en relation avec elle de ce changement. Le modèle peut alors déterminer la nouvelle valeur de a_2 . Etant donné que la valeur de a_2 est modifiée, l'agent modèle informe les entités en relation avec lui de cette modification. Ainsi, le modèle doit calculer une nouvelle valeur pour a_1 , etc. Ce comportement s'enchaîne jusqu'à un critère d'arrêt, par exemple jusqu'à stabilisation du système.

Une telle méthode de résolution de problèmes d'optimisation utilisant les systèmes multi-agent présente plusieurs avantages :

- d'un point de vue informatique les agents sont des entités autonomes donc facilement parallélisables sur différents processeurs afin d'accélérer les temps de calcul
- en ce qui concerne la recherche de l'optimum, la résolution du problème se fait uniquement au niveau local des agents et résulte de la définition des différentes interactions entre agents. Indépendamment de la complexité du problème il n'y a donc pas besoin de définir des stratégies de coordination au niveau global comme c'est le cas dans la plupart des algorithmes décrits précédemment. Cela peut dans certains cas permettre la résolution d'un problème qui aurait été difficilement décomposable avec des stratégies classiques présentées dans la section précédente.

Cependant, malgré le fait que les systèmes multi-agent permettent de résoudre efficacement les problèmes d'optimisation multidisciplinaire déterministe, ils n'ont jusqu'alors été étendus à l'optimisation stochastique.

7.2 MÉTHODES DE PROPAGATION DES INCERTITUDES EN OPTIMISATION MULTIDISCIPLINAIRE

Tout comme les systèmes plus classiques, les systèmes multidisciplinaires peuvent être soumis à des incertitudes affectant les paramètres d'entrée. Une solution optimale choisie à partir des résultats d'une optimisation purement déterministe pourra alors voir ses performances se dégrader du fait de ces incertitudes. Dans un tel contexte, il est important de quantifier l'impact des paramètres incertains sur les solutions obtenues.

Il existe de nombreuses approches permettant de prendre en compte l'analyse d'incertitudes dans les méthodes d'optimisation en conception mono-disciplinaire [112] et certaines ont été étendues à la propagation des incertitudes en MDO. Les premières approches proposent de prendre en compte l'incertitude grâce au concept du « cas le plus défavorable » qui permet de déterminer un intervalle maximal dans lequel se situe la fonction de performance du système [54]. Cette technique déterministe de prise en compte des incertitudes est détaillée dans l'annexe C.1. Les méthodes probabilistes capables de représenter tout type d'incertitudes (épistémiques et aléatoires)

sont rares [37], néanmoins deux méthodes le permettent : la méthode SUA (« System Uncertainty Analysis ») et la méthode CSSUA (« Concurrent Subsystem Uncertainty Analysis »). Ces méthodes probabilistes sont présentées dans cette section. Une troisième approche permettant notamment de déterminer la conception robuste optimale d'un système multidisciplinaire est également détaillée. On note qu'il existe d'autres méthodes de résolution d'optimisation multidisciplinaire notamment basées sur la théorie de l'évidence. Comme mentionné précédemment, la théorie de l'évidence, permet de modéliser les incertitudes dites épistémiques [2], il faut ensuite faire appel à une méthode probabiliste afin de modéliser les incertitudes stochastiques. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe C.2 pour plus de renseignements concernant cette méthodologie.

7.2.1 Méthodes SUA (System Uncertainty Analysis) et CSSUA (Concurrent Subsystem Uncertainty Analysis)

Dans ces approches quelle que soit leur nature (aléatoire ou épistémique), les incertitudes sont modélisées par la théorie des probabilités et quantifiées par leur distribution. Le but des méthodes SUA et CSSUA est de déterminer la distribution des sorties de chaque discipline lorsqu'on connaît les incertitudes sur les paramètres et sur le modèle. Si l'on choisit d'utiliser la moyenne et la variance pour décrire les distributions (cas de la conception robuste) le problème se pose de la façon suivante [19] :

- Les paramètres donnés sont :
 - la moyenne et la variance des paramètres d'entrée : μ_{x_s} , μ_{x_i} , $\sigma_{x_s}^2$ et $\sigma_{x_i}^2$ avec $i = 1, \dots, n$, x_s la variable d'entrée employée par plusieurs disciplines (ou variable de partage) et x_i la variable d'entrée de la discipline i (ou sous-système i), voir figure 7.8.
 - la moyenne et la variance des variables modélisant les erreurs affectant les modèles F_i : μ_{y_i} , $\mu_{\varepsilon_{y_i}}$, $\sigma_{y_i}^2$ et $\sigma_{\varepsilon_{y_i}}^2$ avec $i = 1, \dots, n$, avec y_i la variable de sortie du sous système i et utilisée comme entrée par les autres sous systèmes (ou variable de lien), ε_{y_i} l'erreur sur le modèle du sous système i , voir figure 7.8.
- Les paramètres à déterminer sont :
 - la moyenne et variance des variables de sortie : μ_{z_i} et $\sigma_{z_i}^2$ avec $i = 1, \dots, n$ et z_i la variable de sortie du sous système i , voir figure 7.8.

L'incertitude sur la variable de sortie d'un sous-système dépend de l'incertitude sur les entrées de celui-ci, de l'incertitude sur les variables de sortie d'un autre sous système qui sont utilisées comme entrées et de l'incertitude générée par l'outil permettant la simulation.

Le concept de la prise en compte des incertitudes pour les méthodes SUA et CSSUA est le même que celui de l'optimisation robuste mono-disciplinaire : l'objectif est d'optimiser la fonction objectif et ainsi la rendre moins sujette aux incertitudes de paramètres et de modèle. Cet objectif se traduit en optimisant la moyenne de la fonction objectif et en minimisant la variation de

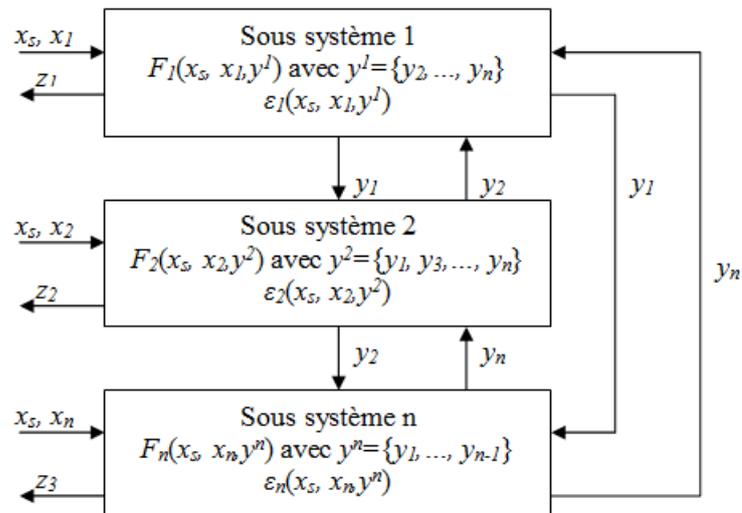


FIGURE 7.8: Système multidisciplinaire décomposé en sous systèmes

celle-ci. Les incertitudes considérées dans ces approches sont celles affectant les paramètres d'entrée de l'étude ainsi que les erreurs de modélisation. Les deux approches permettent de déterminer la moyenne et la variance des attributs d'un système multidisciplinaire en se basant sur des approximations. La méthode SUA effectue une analyse de l'incertitude au niveau système. La méthode CSSUA quant à elle permet l'analyse de l'incertitude de chaque sous système. L'efficacité de ces méthodes dépend du nombre de variables ainsi que du nombre de disciplines :

- la méthode SUA [19] : cette approche a été développée afin d'évaluer la moyenne et l'écart-type de la distribution de la performance en sortie du système. Les approximations de Taylor au premier ordre et l'analyse de sensibilité locale et globale sont employées afin de mettre en place un système d'équations linéaires et déterminer rapidement les moments du premier ordre des variables de sortie. Il est cependant nécessaire d'effectuer une analyse du système global afin d'évaluer la moyenne des variables de sortie (voir figure 7.9).

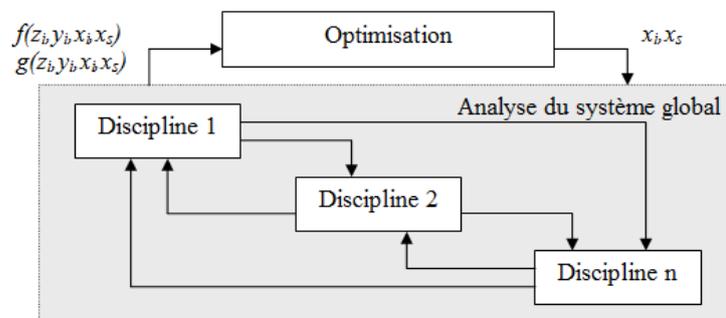


FIGURE 7.9: Méthode SUA

- la méthode CCSUA [19] : cette méthodologie est également basée sur le calcul des moments du premier ordre des variables de sortie du système (utilisation des approximations de Taylor.). Elle a été mise en place afin d'éviter une analyse du système global qui peut s'avérer coûteuse. Cette approche permet de paralléliser les calculs de variance et de moyenne des différents sous systèmes (les disciplines sont découplées). Afin d'assurer la compatibilité des différentes variables de couplage à travers les divers sous systèmes, une technique d'optimisation est employée : minimisation de la déviation entre les variables de couplage cibles et les variables générées par les sous systèmes, voir figure 7.10. Les caractéristiques aléatoires de ces variables sont définies par le biais de tirages aléatoires.

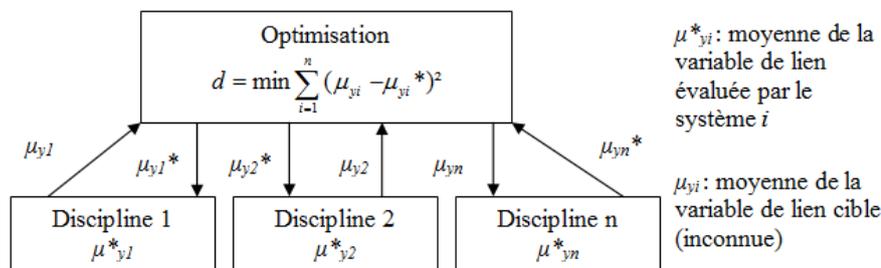


FIGURE 7.10: Détermination des variables de couplage dans la méthode CSSUA

Le choix de la méthode est fortement dépendant du nombre d'évaluations des variables des différents sous systèmes (choix guidé par l'article [3]). En effet la méthode SUA permet d'obtenir un meilleur niveau de précision des variables de conception optimales comparée à la méthode CCSUA cependant elle peut être plus coûteuse. Ces décompositions sont ensuite imbriquées dans une boucle d'optimisation. Les résultats ainsi déterminés par le biais des méthodes SUA et CCSUA ont un niveau de précision acceptable malgré les approximations au premier ordre. Ils pourraient cependant être plus rigoureux en intégrant une méthodologie permettant de représenter la distribution de la fonction objectif f et en utilisant par exemple les fonctions de densité de probabilité. Il ne faut cependant pas perdre de vue que ce type d'étude probabiliste entraînerait un coût en temps de calculs plus important. Les approches SUA et CCSUA sont plus efficaces que la méthode conventionnelle de Monte-Carlo qui nécessite un nombre de tirages élevé afin d'obtenir un résultat précis. Ces méthodes sont employées lorsque les deux premiers moments des fonctions de distribution suffisent pour représenter l'incertitude (par exemple dans un problème de conception robuste).

7.2.2 Méthode de génération de fonctions de distribution

Dans leurs travaux, De Laurentis et Mavris [33] ont également développé une méthode probabiliste afin de propager l'incertitude dans un problème MDO et obtenir une solution au problème de conception robuste pour un temps de calcul peu élevé. La nouveauté de cette technique réside dans l'utilisation d'une mesure de la probabilité de succès basée sur la fonction de répartition de la fonction objectif. Cette approche fait également appel aux métamodèles afin de minimiser le nombre d'appels des fonctions (fonction objectif ou contraintes) usuellement requis dans un problème d'optimisation robuste.

Quelque soit le type d'incertitude, elle est représentée par une variable aléatoire et stockée dans le vecteur Y . Le vecteur X est le vecteur contenant toutes les variables de conception déterministes. Le vecteur Z est quant à lui le vecteur des objectifs de conception et W celui des contraintes : $Z = f(X, Y)$ et $W = g(X, Y)$. Le principe de la méthode est décrit ci-dessous et illustré sur la figure 7.11 :

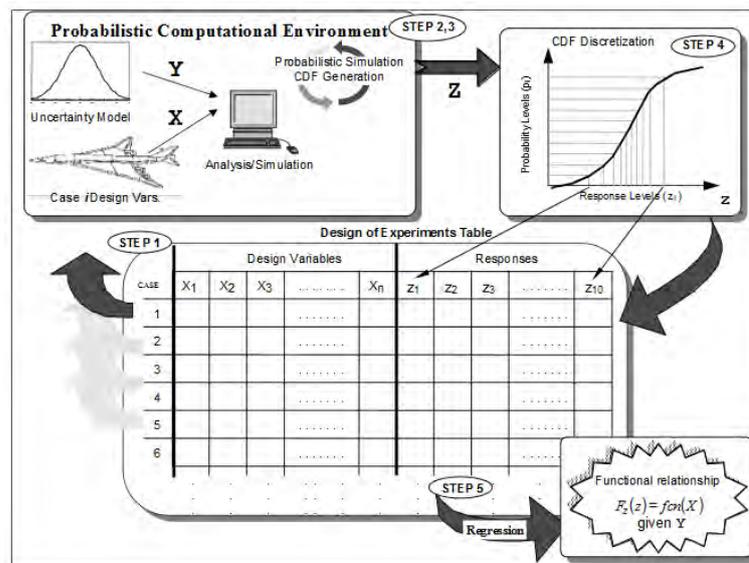


FIGURE 7.11: Étapes permettant de mettre en place la fonction de répartition (extrait de [33])

- pas 1 : mise en place du vecteur déterministe X contenant les variables de conception $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Une série de vecteurs est ainsi construite (cas 1, cas 2, ..., cas m) afin de définir l'espace de recherche et par la suite mettre en place l'équation du modèle de régression. Pour chaque vecteur plusieurs réponses sont mesurées afin de quantifier l'erreur expérimentale (la présence d'incertitudes sur le modèle ainsi que sur les variables conduit à une non répétitivité des résultats).
- pas 2 : on introduit une incertitude sur chaque variable de conception : $Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Chaque incertitude est modélisée grâce une fonction

- de densité de probabilité (PDF). Ces fonctions sont mises en place à partir de résultats expérimentaux, d'opinion d'experts ou d'analyses.
- pas 3 : pour chaque cas du tableau de conception (pas 1, cf. figure 7.11) la fonction de répartition de la fonction objectif et des contraintes est construite. Pour ce faire on procède aux simulations de Monte-Carlo.
 - pas 4 : on effectue une discrétisation des fonctions de répartition : n_{p-1} intervalles soit n_p valeurs particulières de Z et W (ici 10 valeurs) correspondant à n_p niveaux de probabilité ($P_i(z \leq z_i) = \frac{i}{n_p}$ pour les fonctions objectifs et $P_i(w \leq w_i) = \frac{i}{n_p}$ pour les contraintes). Les n_p valeurs de Z et W sont les réponses des expériences à partir desquelles les équations des surfaces de réponse sont formées. Le nombre d'intervalles doit être assez important afin d'obtenir une bonne précision des fonctions de répartition.
 - pas 5 : construction des métamodèles. On effectue des régressions non-linéaires sur les valeurs du plan d'expérience afin de mettre en place les équations des surfaces de réponses recherchées. Pour chaque rang du DOE nous associons à l'ensemble des variables de conception X la valeur $z_i(X)$. Ainsi pour une certaine valeur z_o de la contrainte, imposée sur la fonction objectif, il est possible de déterminer la probabilité $P(z \leq z_o)$. Il en est de même pour les contraintes.

La construction des fonctions de répartition en chaque point de l'espace de conception n'implique pas un coût de calculs élevé. En effet, les équations des surfaces de réponse établies à partir de ces fonctions de répartition peuvent être réutilisées pour différents ensembles de variables de conception, évitant ainsi de ré-exécuter l'analyse probabiliste coûteuse. Cette méthode a été employée dans le cadre de la phase conceptuelle avion [33]. D'autres méthodes d'optimisation multidisciplinaire sous incertitudes probabilistes appliquées à la conception avion seront présentées dans la suite de ce manuscrit.

La prise en compte des incertitudes dès la phase de conception avant-projet permet de réduire les variabilités au niveau des caractéristiques finales. Il est ainsi possible par la suite de mieux maîtriser le procédé et de réduire le nombre de pièces défectueuses. Afin de tenir compte des incertitudes impactant un système, diverses techniques probabilistes courantes ont été proposées dans cette partie permettant leur propagation dans un problème d'optimisation mono-disciplinaire. Traditionnellement, la conception aéronautique est réalisée par équipes, possédant chacune des experts et des connaissances spécifiques dans un domaine précis. Chaque équipe s'attache à obtenir un point de conception acceptable en travaillant séquentiellement. Par exemple l'aérodynamique souhaite obtenir un certain champ de pression sur l'aile et la structure cherchera un profil d'aile qui y parviendra. Les buts à atteindre sont généralement de minimiser la traînée ou le poids. L'optimisation multidisciplinaire permet d'incorporer les effets de chacune des disciplines en même temps. L'optimum global ainsi déterminé est meilleur que la configuration obtenue en optimisant chaque discipline indépendamment des autres, car on prend en compte les interactions entre les disciplines.

Des nouvelles approches basées sur l'intelligence artificielle permettent également de faciliter la convergence et de réduire le temps de calcul pour obtenir une solution optimale performante aux problèmes multidisciplinaires ; Il s'agit des systèmes multi-agents adaptatifs. Cette approche a été détaillée, notamment dans le cas d'un exemple académique : le cas test d'Alexandrov. Après avoir détaillé les techniques de résolution de l'optimisation multidisciplinaire déterministe nous nous sommes concentrés sur la prise en compte des incertitudes. Parmi les différentes méthodes existantes nous avons retenu et exposé plus en détails les approches probabilistes. L'état de l'art non exhaustif exposé dans cette partie a donc fourni les éléments nécessaires à la modélisation des incertitudes et à la propagation de celles-ci dans un problème d'optimisation multidisciplinaire.

Troisième partie

UNE NOUVELLE MÉTHODOLOGIE DE
TRAITEMENT DE LA PHASE CONCEPTUELLE
AVION

INTRODUCTION

Les modèles analytiques de basse fidélité sont souvent utilisés durant la phase de l'étude conceptuelle d'un avion. À cause de la présence d'incertitudes sur ces modèles ainsi que sur leurs variables correspondantes, l'optimisation déterministe peut aboutir à un système sous-dimensionné (sans marges de sécurité) ou sur-dimensionné (avec marges de sécurité). Ainsi il est important de considérer les incertitudes dès l'étude conceptuelle (présentée en détail dans le chapitre 9), afin d'éviter des design qui ne soient pas performants et des rebouclages coûteux en temps. Notre travail consiste donc à mettre en place un processus permettant de concevoir un système avion à la fois fiable et robuste. Pour ce faire, nous présenterons tout d'abord dans le chapitre 10 de cette partie une nouvelle méthode de modélisation des incertitudes basée sur un écart-type ajustable aux informations disponibles. Les incertitudes impactant les variables de conception et les modèles sont prises en compte de manière probabiliste. Plus précisément, en chaque point de recherche du processus d'optimisation, les incertitudes sont modélisées par le biais d'une loi normale adaptative ajustée à la base de données historiques avion. Les paramètres statistiques dépendent des informations disponibles au point courant du processus d'optimisation. Après avoir présenté la formulation de l'étude conceptuelle avion sous incertitudes dans le chapitre 11, nous résolvons ce problème par le biais d'une méthode classique (optimisation en double boucle) et exposons les résultats dans le chapitre 12. Afin d'améliorer le temps de calcul des approximations basées sur des surfaces de réponse sont construites. Elles permettent de représenter les contraintes de fiabilité. La méthodologie développée sera appliquée plus particulièrement à l'étude conceptuelle d'un avion moyen-courrier (A320) qui constitue un cas test type au sein d'Airbus (cas d'étude permettant de comparer avec précision les résultats de l'optimisation).

Dans l'optique de traiter des problèmes toujours plus complexes (par exemple augmentation du nombre de variables aléatoires et des paramètres de conception) de nouvelles méthodes d'optimisation ont été mises en place. Le système multi-agent auto-adaptatif est une nouvelle approche développée récemment permettant de prendre en compte diverses caractéristiques d'un problème d'optimisation. Plus particulièrement le système AMAS mis en place au sein du projet ANR ID4CS a pour ambition de gérer les aspects de multi-niveaux, multidisciplinarité et charges de calculs. Cette approche permet en particulier de résoudre des problèmes de conception déterministes (exemple : la conception d'un avion). Les systèmes multi-agent sont com-

posés de plusieurs entités autonomes appelées agents. Chacun des agents a un objectif local (ou plusieurs) qui peut être différent de l'objectif global du système. Il interagit avec les autres agents, sur la base de mécanismes de coopération, afin d'atteindre son propre but. Nos travaux au sein du projet ANR ID₄CS visent donc à proposer une méthodologie permettant d'intégrer le traitement des incertitudes dans un système de résolution multi-agent auto-adaptatif. Cette étude sera présentée dans le chapitre 13. Afin d'améliorer la performance de la méthode d'optimisation stochastique, le nombre d'analyses de fiabilité doit être minimisé. En effet lors d'une optimisation probabiliste une grande partie des calculs est effectuée dans le but de déterminer la fiabilité du système. Ainsi, dans la méthode que nous avons développée nous employons un processus séquentiel en boucle unique dans lequel se succèdent la résolution d'optimisations déterministes et l'analyse de fiabilité (découplées l'une de l'autre). L'analyse de fiabilité est effectuée seulement après la résolution de l'optimisation déterministe, afin de vérifier la faisabilité des contraintes sous incertitudes. Suite à l'étude probabiliste, les contraintes violées (n'atteignant pas la fiabilité requise) sont décalées vers la zone de faisabilité en intégrant des coefficients de sécurité adaptatifs dont les calculs sont basés sur des informations de fiabilité au niveau des agents. Notre nouvelle approche de résolution d'optimisation multidisciplinaire sous incertitudes combinant un système multi-agent à une méthode d'optimisation séquentielle en boucle unique sera appliqué à un problème conceptuel avion. Grâce à ce cas test industriel nous mettrons en évidence la pertinence de notre méthodologie. Enfin les conclusions et les perspectives de nos travaux seront présentées dans le chapitre 14.

PROCESSUS DE LA PHASE CONCEPTUELLE AU SEIN D'AIRBUS

L'objectif de ce chapitre est de présenter l'optimisation multidisciplinaire déterministe utilisée à ce jour au sein d'Airbus pour la conception préliminaire avion. Nous présentons la phase conceptuelle d'un avion moyen-courrier de type Airbus A320 [14]. Il s'agit d'un avion de design standard et de taille moyenne, pourvu de deux moteurs et prévu pour embarquer 150 passagers. L'avion va être optimisé pour effectuer une mission moyen-courrier d'environ 5556 km (distance représentative d'une mission type), que l'on appellera la « mission nominale ».

La phase d'étude conceptuelle est basée sur une description globale de l'avion et un ensemble de critères de performance. Elle intervient lorsque la configuration globale de l'avion (emplacement des moteurs, rapport hauteur/largeur des ailes, etc.) est fixée, voir tableau 9.1 (récapitulatif des hypothèses de conception et des performances pour l'avion étudié, données fournies par Airbus). L'objectif du problème est de définir les bonnes caractéristiques de l'appareil afin de satisfaire les performances et de minimiser la masse de l'avion au décollage (*MTOW*).

Le code de calcul *SIMCAD* est utilisé au sein d'Airbus afin de déterminer la masse maximale de l'avion au décollage à partir d'un assemblage de modèles disciplinaires. Cet algorithme permet de simuler le comportement de l'avion sur une mission complète. Il fait appel à environ 160 paramètres. Un exemple de mission est décrit sur la figure 9.1. Une mission comprend tout d'abord une phase de décollage puis une montée à vitesse conventionnelle constante jusqu'à une altitude de croisière définie. Une fois cette altitude atteinte, l'avion rentre dans la phase de croisière durant laquelle sont altitude évolue à finesse constante (la croisière peut aussi être décomposée en plusieurs paliers successifs). L'appareil redescend ensuite à vitesse conventionnelle constante vers l'altitude d'approche. Vient enfin la phase d'approche puis l'atterrissage proprement dit.

Lors de la conception détaillée d'un aéronef, le nombre de paramètres intervenant dans les différents modèles disciplinaires est très élevé, il est donc au préalable nécessaire d'effectuer l'optimisation d'un modèle avion simplifié afin de tester notre méthodologie. Ainsi lors de l'étude conceptuelle, les modèles implémentés au sein du code *SIMCAD* sont issus soit d'équations

Performances imposées		Hypothèses de conception		Contraintes	
N_{pax} Nombre total de passagers	150	N_e Nombre de moteurs	2	F_{margin} Différence entre la capacité totale de carburant et la quantité de carburant requise durant une mission nominale (l). Il s'agit de la réserve de carburant pour une mission nominale	≤ 2000
$Range$ Mission (km)	5 556	BPR Taux de dilution des moteurs	6	C_{clb} Altitude minimale durant l'ascension (ft)	$\geq 10 668$
V_{Mach} Vitesse de croisière (Mach)	0,78	Ar Coefficient d'allongement de l'aile	9,5	C_{crz} Altitude minimale de croisière (ft)	$\geq 10 668$
A_{pRef} Altitude de croisière cible (m)	10 668	Ctk Réservoir de carburant central ($Ctk = 1$ si présence d'un container, 0 sinon)	1	C_{buf} Altitude minimale avant tremblement aérodynamique (ft)	$\geq 11 277,6$
		Ttk Réservoir de carburant au niveau de la queue ($Ttk = 1$ si présence d'un container, 0 sinon)	1	C_{oei} Altitude minimale lorsqu'un des moteurs est en panne (ft)	$\geq 5 791,2$
				$Tofl$ Distance maximale au décollage (ft)	$\leq 2 100$
				V_{pax} Vitesse d'approche maximale (kt)	$\leq 41,4$

TABLE 9.1: Données de l'étude conceptuelle d'un avion de type A320

physiques simplifiées soit de modèles de régression simples à partir d'une base de données d'avions. Par exemple, la vitesse du son est calculée en supposant que l'air est un gaz parfait. Les paramètres spécifiques au bloc environnement, tels que la température et la pression normales sont également déterminés grâce à de tels modèles. Tous les autres modèles sont dérivés de modèles de régression simples à partir de bases de données historiques avions. Les mesures ont été effectuées sur 47 avions de type commerciaux (avions construits durant les dernières décennies). Un exemple d'un tel modèle de régression est donné ci-dessous et concerne l'aire brute du fuselage mouillé wA_{fus} (surface du fuselage en contact avec le flux d'air extérieur).

La régression permet de mettre en place un modèle simple (linéaire ou quadratique) ajusté à un paramètre de l'aéronef, une performance ou une

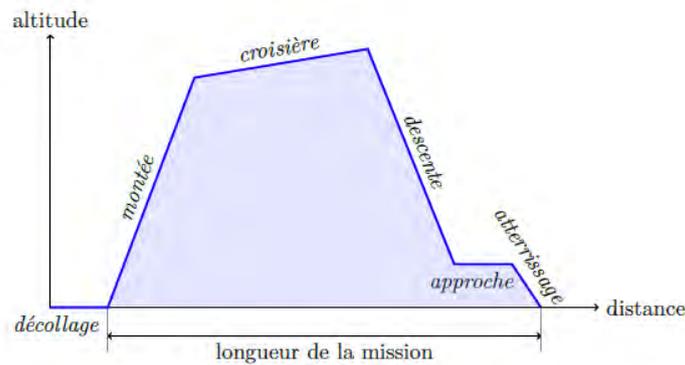


FIGURE 9.1: Profil de la mission de l'avion

caractéristique de fonctionnement y , et fonction d'un certain nombre de paramètres x . Ces paramètres x sont soit directement les paramètres de l'avion, soit une combinaison de paramètres résultant de considérations physiques. Les modèles qui décrivent le comportement physique de l'appareil sont représentés par la fonction de régression linéaire :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X(1) + \beta_2 X(2) + \dots + \beta_p X(p) \quad (9.1)$$

Y est la sortie du modèle de régression et $X(1), X(2), \dots, X(p)$ sont les paramètres d'entrée. Il faut cependant noter que chaque paramètre d'entrée peut être une combinaison non linéaire des variables caractérisant l'aéronef. Par exemple la variable $X(1)$ peut être modélisée par $X(1) = X_1 \times X_2$ où X_1 et X_2 sont d'autres variables définissant le système étudié. Afin d'illustrer nos propos nous prenons comme exemple le paramètre $wAfus$ (aire brute du fuselage mouillé) :

Un modèle linéaire permettant d'évaluer $wAfus$ est déduit d'une régression linéaire :

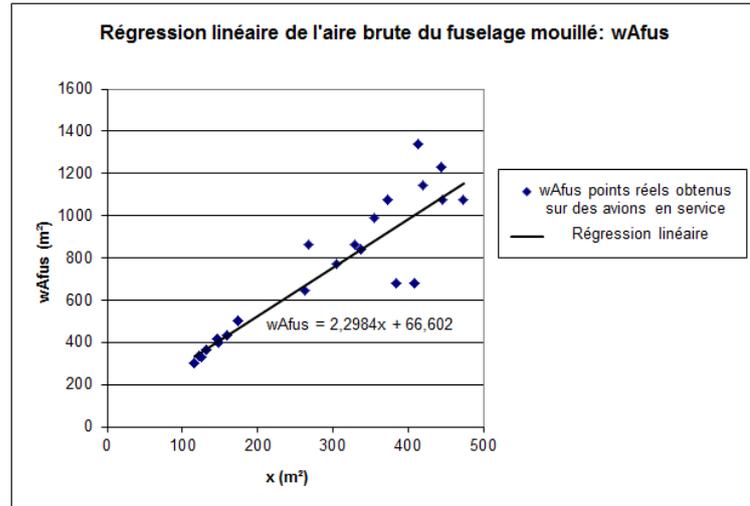
$$wAfus = \beta_1 \sqrt{w_{fus} \times h_{fus}} \times l_{fus} + \beta_0 \quad (9.2)$$

Les coefficients β_i sont déterminés grâce à la régression linéaire. Ce modèle ainsi formulé est dépendant de la variable $x = \sqrt{w_{fus} \times h_{fus}} \times l_{fus}$ où l_{fus} est la longueur du fuselage, w_{fus} est la profondeur du fuselage et h_{fus} la hauteur (x est en m^2), voir figure 9.2 :

$$wAfus = 2,2984 x + 66,602 \quad (9.3)$$

L'exemple du paramètre $wAfus$ permet de mettre en évidence la méthodologie de construction du modèle de régression, à partir de la base de données historiques, mise en oeuvre afin d'obtenir une formulation explicite de la variable étudiée dans l'espace de recherche. De nombreux paramètres exploités dans notre étude sont déterminés par le biais de ce type de modélisation.

Parmi le petit groupe de paramètres de haut niveau traités lors de la phase conceptuelle avion, trois ont un impact significatif sur la conception

FIGURE 9.2: Exemple $wAfus = f(x)$

de l'appareil : la surface de l'aile S_{wing} , la taille des moteurs guidée par la variable $SLST$ (la poussée des moteurs au niveau de la mer) et la masse maximale au décollage de l'avion ($MTOW$). Cette étude mettra l'accent sur la détermination de ces trois paramètres pour une configuration de l'aéronef donnée. Le processus déterministe est basé sur une optimisation classique sous contraintes (où les contraintes sont un ensemble d'exigences de haut niveau sur les avions). Le problème d'optimisation est piloté par deux variables de conception : la surface des ailes et la taille des moteurs, qui sont les principales variables de notre problème d'optimisation. Ces variables de conception associées aux paramètres fixes (hypothèses de conception et performances) permettent de déterminer les paramètres généraux décrivant l'aéronef (un total de 160 paramètres). La formulation du problème d'optimisation déterministe basée uniquement sur ces deux paramètres de conception est la formulation préconisée par Airbus en phase conceptuelle. Les variables $SLST$ et S_{wing} sont les variables qui engendrent le plus grand gradient des sorties du problème. Elles donnent l'ordre de grandeur des performances de l'avion, les autres variables sont contraintes par les performances imposées et leur variation dans le domaine étudié est négligeable en comparaison. Néanmoins, la méthodologie peut être directement étendue à d'autres variables de conception d'optimisation (nous pourrions par exemple considérer le nombre optimal de moteurs, de train d'atterrissage etc.). La fonction objectif f et les contraintes g_i sont construites à partir de modèles analytiques comme décrit ci-dessus. Leur valeur optimale est ensuite obtenue en résolvant le problème déterministe de l'équation 9.4 pour certaines hypothèses de conception et caractéristiques fonctionnelles du produit données [14, 81] :

$$\begin{cases} \min_{S_{wing}, SLST} MTOW = f(S_{wing}, SLST) & S_{wing}, SLST \in S \\ g_i(S_{wing}, SLST) \leq c_i & i = 1, \dots, 7 \end{cases} \quad (9.4)$$

où S est l'espace de recherche, les contraintes opérationnelles g_i sont : la vitesse d'approche maximale, la longueur de piste maximale au décollage, les plafonds de vol (altitude minimale durant l'ascension, altitude minimale de croisière, altitude minimale avant tremblement aérodynamique, altitude minimale lorsqu'un des moteurs est en panne) et la capacité de carburant (voir tableau 9.1). Les différentes étapes de la phase conceptuelle avion permettant de définir une configuration typique d'un aéronef à partir de données d'entrée arbitraires souhaitées, sont énumérées ci-dessous (voir 9.3, boucle interne). Notez que sur la figure 9.3 les flèches représentent les interdépendances entre les différentes disciplines, l'échange de variables (un paramètre de sortie de modèle peut être un paramètre d'entrée d'un autre modèle créant ainsi des boucles de rétroaction). La petite boucle représente la boucle « masse/mission » (explicitée ci-dessous) et la plus grande représente le processus d'optimisation permettant de déterminer la conception optimale.

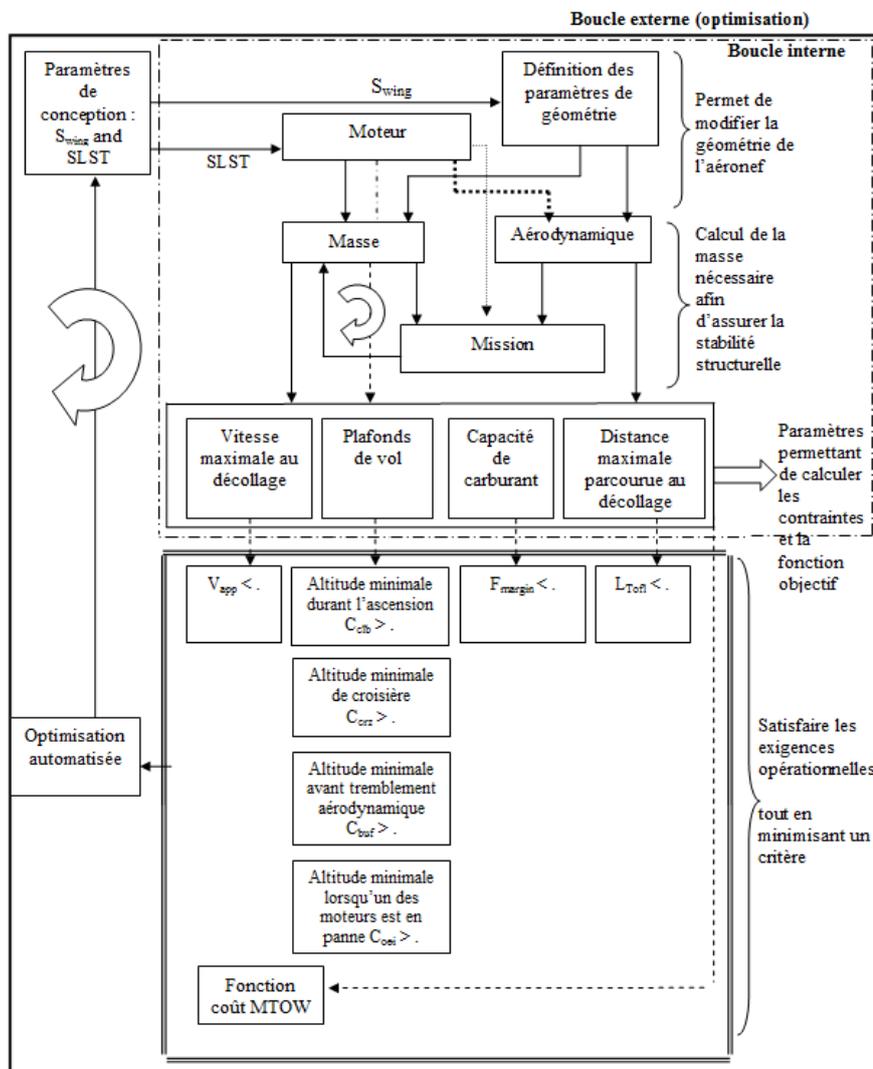


FIGURE 9.3: Description de l'étude conceptuelle avion utilisée au sein d'Airbus : SIM-CAD

Nous donnons ci-dessous les différentes étapes du processus d'optimisation :

- les hypothèses de conception et les performances sont déterminées et imposées (les performances sont les seuils imposés sur les contraintes opérationnelles et que l'on souhaite respecter lors de l'optimisation du système, voir 9.3). Ces performances et hypothèses de conception (caractéristiques fonctionnelles de l'appareil conçu) sont fixées comme des paramètres d'entrée qui ne sont pas modifiés au cours du processus d'optimisation. Ces données fournissent le contexte de l'étude, elles permettent de caractériser l'avion et donc de définir le fuselage, la propulsion, la géométrie et les conditions de vol.
- calcul des différents paramètres pour chaque discipline à l'aide de modèles analytiques simples (ces disciplines sont représentées par une boîte à l'intérieur de la boucle interne de la figure 9.3). L'ensemble des paramètres définissant l'allure générale de l'avion conceptuel (160 paramètres) est calculé à partir des données d'entrée du problème d'optimisation : les hypothèses de conception, les performances et également les paramètres de conception.
- une fois que les paramètres sont déterminés, la boucle « masse/mission » est exécutée afin d'obtenir des paramètres satisfaisant l'ensemble des disciplines. Il s'agit de la boucle de rétroaction entre la discipline « masse » et la discipline « mission » (boîtes de la boucle interne, cf. 9.3). Ce processus sert à définir la masse maximale de l'avion au décollage en fonction de la charge utile et du rayon d'action. Comme mentionné précédemment ce processus est fortement interdépendant puisqu'une mission, pour être réalisée, nécessite une quantité de carburant, qui se répercute sur la masse maximale au décollage, sur les structures de l'avion et donc sur la mission. Au niveau de la fonction de simulation, ces contraintes se traduisent par un besoin pour le modèle d'évaluation de la masse de connaître le rayon d'action, et inversement pour le modèle d'évaluation de la mission de connaître la masse de l'avion. De ce fait, la masse au décollage et la mission sont à la fois des hypothèses de calcul à fournir en entrée de la fonction et des résultats d'évaluation. Par conséquent, le système est cohérent lorsque les valeurs de la masse et du rayon d'action fournis en entrée sont égales aux valeurs obtenues en sortie. Concrètement et tel que l'illustre la figure 9.3, ce problème est résolu par une itération du système sur la masse au décollage et sur la mission. Une solution à ce problème de « masse/mission » est obtenue lorsque les deux contraintes opérationnelles d'égalité sont satisfaites simultanément (cf. figure 9.4);

- suite à la résolution de la boucle « masse / mission », les disciplines impactées par ce couplage sont recalculées ;
- la masse de l'avion au décollage *MTOW* est déterminée ;

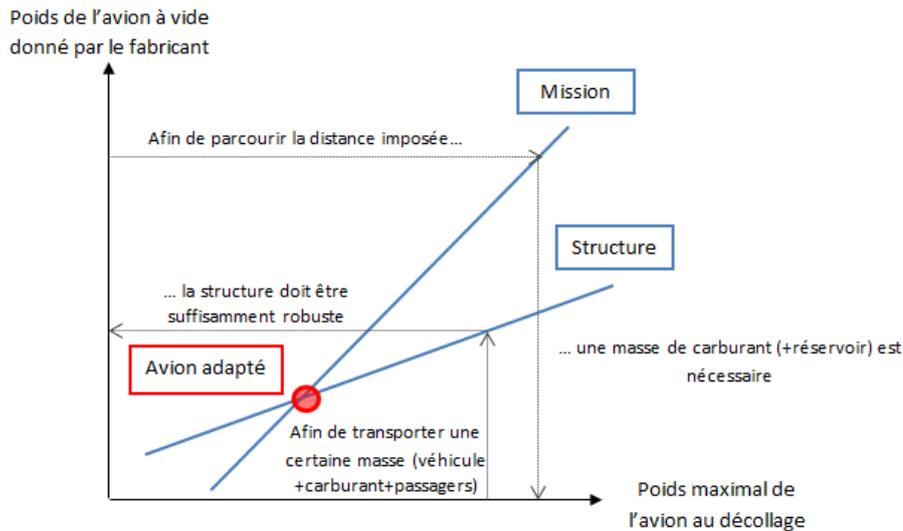


FIGURE 9.4: Le bouclage « masse/mission »

- ce calcul est ensuite imbriqué dans la boucle d'optimisation afin de résoudre le problème d'optimisation 9.4 et ainsi déterminer la configuration de l'aéronef avec la masse minimale et satisfaisant les contraintes qui ont été fixées.

L'algorithme d'optimisation est de type pattern search : en chaque point de recherche il évalue la masse au décollage de l'avion ainsi que les contraintes (grâce au calcul présenté précédemment, cf. boucle interne de la figure 9.3) :

La méthode pattern search est une méthode dite d'exploration [125]. Nous expliquons brièvement le principe :

- La valeur α_{tot} est fixée. Il s'agit de la variation entre deux points d'itération, pour laquelle nous admettons que la convergence est atteinte ;
- Initialisation : $t = 0$, le point initial du processus d'optimisation y_0 appartient au domaine du faisable, et $\alpha_0 > 0$ est le pas initial quelconque ;
- Détermination du nouveau point de recherche : nous évaluons la fonction coût f en un point z_t de $M_t = \{y_t + \alpha_t D_z, z \in Z_+^{|D|}\}$ où $D_z = \{e_1, \dots, e_n, -e_1, \dots, -e_n\}$ et α_t le pas à l'itération courante t . Si $z_t \in M_k$ est tel que $f(z_t) < f(y_t)$, où $f(y_t)$ est la valeur de la fonction coût à l'itération précédente, alors $y_{t+1} = z_t$. Le pas devient alors $\alpha_{t+1} = \alpha_t \Theta_t$, par exemple $\Theta_t = 2$ pour élargir l'espace de recherche. Dans le cas où $f(z_t) > f(y_t)$ alors $y_{t+1} = y_t$ et le pas devient $\alpha_{t+1} = \alpha_t \Theta_t$, par exemple $\Theta_t = \frac{1}{2}$ afin de réduire l'espace de recherche.
- Si $\alpha(t+1) < \alpha_{tot}$ on a atteint la convergence sinon nous incrémentons $t : t = t + 1$.

La démarche de l'étude conceptuelle avion ayant été présentée nous la mettons maintenant en oeuvre afin de concevoir un aéronef de type moyen-courrier (par exemple A320). Les hypothèses de conception et les performances opérationnelles du problème d'optimisation considéré sont données dans le tableau 9.1. L'optimum du problème sans incertitudes est déduit en résolvant l'équation 9.4. L'optimum déterministe ainsi déterminé pos-

sède les caractéristiques suivantes : la masse maximale au décollage est $MTOW = 75\,415\text{ kg}$ pour une surface de l'aile $S_{wing} = 129,35\text{ m}^2$ et une poussée des moteurs $SLST = 89\,474\text{ N}$ (cf. figure 9.5).

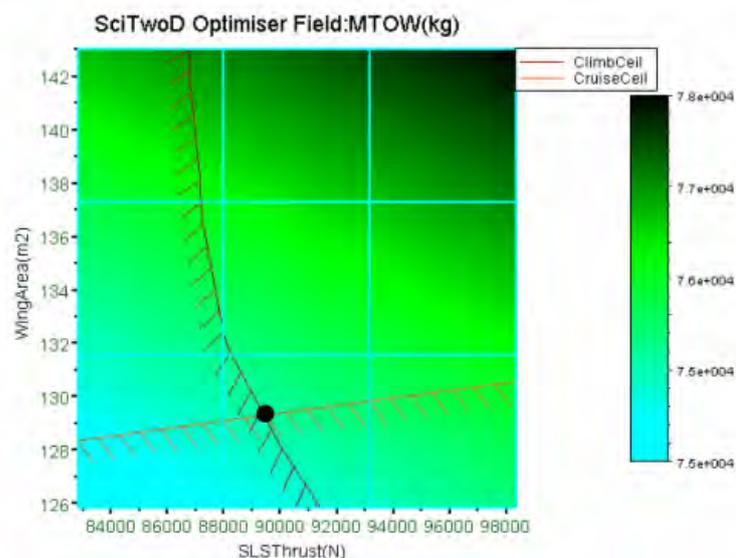


FIGURE 9.5: Optimisation déterministe

Sur la figure 9.5, la masse de l'avion au décollage $MTOW$ est représentée en arrière-plan par la carte de couleur : plus l'arrière-plan est sombre, plus la masse de l'avion au décollage est importante. L'optimum est indiqué par un point noir situé à l'intersection des deux contraintes actives. Les contraintes actives à l'optimum sont l'altitude minimale durant l'ascension et l'altitude minimale avant tremblement aérodynamique (ces contraintes se comportent comme des égalités à l'optimum). Notons que seules les contraintes actives sont représentées sur la figure 9.5.

Lors de l'étude conceptuelle d'un nouvel avion, les représentations utilisées sont donc majoritairement des modèles simplifiés qui permettent d'évaluer de façon approchée les performances du nouvel appareil pour un faible temps de calculs. Les approximations réalisées par les modèles peuvent donc avoir un fort impact si jamais le design sélectionné lors de l'étude conceptuelle se révèle trop sensible aux incertitudes. On observe généralement par exemple une dérive de la masse de l'appareil au fil des différentes phases de conception : l'avion final est souvent plus lourd que ce qui avait été prévu initialement car différents aménagements ont dû être effectués entre son étude conceptuelle et sa phase finale afin de répondre aux exigences en termes de fiabilité et de respect des réglementations.

Les constructeurs aéronautiques souhaitent prendre en compte les incertitudes lors de l'étude conceptuelle afin de minimiser les risques et s'assurer du bon déroulement du projet. En effet, il est primordial pour les constructeurs de faire des choix pertinents durant cette étape de dimensionnement

car elle détermine le déroulement de la suite de la conception et tout retour en arrière est coûteux. De plus, les performances des concepts standards d'avion arrivent désormais à leurs limites. Il devient donc nécessaire d'étudier de nouveaux concepts, assez proches des appareils existants ou bien plus éloignés. L'estimation des performances de ces nouveaux concepts est difficile car on ne possède pas de base de référence pour valider les modèles physiques utilisés. Il est donc primordial de pouvoir prendre en compte les erreurs de modélisation afin de sélectionner un design relativement robuste et fiable pour lequel on aura plus de garanties de succès.

Si des approches classiques de gestion d'incertitudes peuvent être appliquées à certains systèmes multidisciplinaires (en considérant le système complet sous la forme d'une boîte noire), elles sont généralement bien trop onéreuses pour être utilisées en pratique. D'autres méthodes n'impliquant pas un temps de calcul prohibitif se reposent sur l'intégration de marges de sécurité arbitraires (constantes quelque soit l'espace de recherche considéré) qui entraînent souvent la mise en place de systèmes trop conservatifs. De nouvelles méthodes sont donc déployées afin de minimiser le temps de calcul mais également permettre l'augmentation des degrés de liberté du problème considéré (nombre de variables aléatoires et/ou variables incertaines). Nous présenterons dans les prochains chapitres une nouvelle approche de modélisation d'incertitude ainsi que des nouvelles méthodologies de résolution de problèmes d'optimisation multidisciplinaire sous incertitudes.

MÉTHODOLOGIE DE MODÉLISATION DES INCERTITUDES

La phase conceptuelle avion est donc sujette à des incertitudes qui affectent ses performances. Dans ce contexte la modélisation des incertitudes est importante car elle permet de construire des systèmes optimaux à la fois fiables et robustes. Ainsi nous exposerons tout d'abord dans ce chapitre les techniques existantes permettant de prendre en compte les incertitudes lors de la phase conceptuelle avion. Nous présenterons ensuite l'approche que nous avons développée. Notre méthode est basée sur une modélisation de l'incertitude adaptative impactant les modèles et les paramètres de conception de l'avion. La valeur de l'écart type liée à la distribution de l'incertitude étudiée s'ajuste aux informations disponibles, reflétant ainsi le fait qu'en différents points de l'espace de recherche les incertitudes puissent être significativement différentes.

10.1 TECHNIQUES EXISTANTES DE PRISE EN COMPTE DES INCERTITUDES DURANT LA PHASE CONCEPTUELLE AVION

De récents travaux ont conduit au développement de techniques permettant la prise en compte des incertitudes durant la phase conceptuelle avion. Dans ce contexte Daskilewicz et al. [31] montrent que l'impact des incertitudes sur le design optimal d'un avion dépend de l'amplitude des incertitudes et de la localisation des paramètres de conception dans l'espace de recherche. Ces conclusions sont basées sur l'étude de fronts de Pareto, visualisés pour différents scénarios d'incertitudes (variation de la moyenne et de l'écart-type des incertitudes de modèle). Les auteurs ne définissent pas de design optimal mais fournissent des éléments au concepteur permettant de délimiter des régions de l'espace de recherche où un compromis est établi entre robustesse et performance.

Dans leurs travaux, Chung et al. [93] ont développé des méthodes d'optimisation afin de concevoir des avions à la fois fiables et robustes. Leurs techniques permettent de prendre en compte les incertitudes de modèle et de quantifier le niveau de fiabilité atteint par le système ainsi conçu. Les incertitudes de modèle sont déterminées à partir d'une base de données historiques regroupant les différents paramètres d'un avion commercial. Selon les informations disponibles, les incertitudes de modèle sont modélisées par le biais d'une loi de probabilité uniforme ou normale. La moyenne et l'écart-

type caractérisant ces incertitudes de modèle sont constants sur la plage de variation des variables de conception.

Afin de poursuivre l'amélioration de l'approche de conception du design d'un avion sous incertitudes, de nouveaux développements semblent nécessaires afin d'ajuster l'amplitude des incertitudes à la région de l'espace de recherche étudiée. En effet, la mise en place d'incertitudes normales de moyenne et d'écart-type constants peuvent dans certaines régions de l'espace de recherche considéré ne pas refléter la précision réelle des modèles analytiques et engendrer une perte de performance (les incertitudes peuvent parfois être plus importantes dans certains domaines que d'autres). Ainsi, nous proposons dans nos travaux une nouvelle approche afin de considérer les incertitudes de modélisation et de paramètres de conception durant la phase conceptuelle avion. Notre méthodologie est basée sur la construction de distributions de probabilité dont l'écart-type est variable et dépend du point courant de l'optimisation.

10.2 UNE MÉTHODOLOGIE DE PRISE EN COMPTE DES INCERTITUDES DURANT LA PHASE CONCEPTUELLE AVION

Dans cette section nous allons dans un premier temps détailler l'analyse de sensibilité mise en place afin de déterminer les variables incertaines prépondérantes dans notre problème, c'est à dire engendrant la plus grande sensibilité de la fonction objectif et/ou des contraintes. Une fois les paramètres incertains définis nous exposons la méthode développée afin de modéliser les incertitudes.

10.2.1 *Selection des incertitudes de modèle prévalentes*

Plus de 160 paramètres interviennent durant la phase conceptuelle avion. Ces paramètres sont des sorties de modèles analytiques simples. Ainsi, l'ensemble de ces paramètres peut être incertain (le paramètre de sortie d'un modèle est souvent l'entrée d'un autre modèle). En supposant qu'une incertitude soit présente sur chacun de ces paramètres, l'évaluation des contraintes probabilistes peut alors devenir très coûteuse en temps de calculs. D'autre part, toutes les incertitudes ne sont pas significatives et certaines peuvent être éliminées. Les paramètres incertains prépondérants doivent donc être choisis afin de réduire le nombre de variables incertaines et également le nombre de simulations dans le processus d'optimisation.

Une des premières étapes afin de prendre en compte les incertitudes dans un problème d'optimisation est de réaliser une analyse de sensibilité sur les solutions optimales obtenues suite à une optimisation déterministe. L'analyse de sensibilité locale [130] permet d'évaluer la sensibilité des sorties du problème point vis-à-vis de certains paramètres en effectuant une étude de la dérivée des fonctions objectifs par rapport à ces paramètres. Elle détermine l'influence de chacun des paramètres d'entrée sur les variations des sorties du système. L'analyse de sensibilité ne vise pas à quantifier la ro-

bustesse des solutions mais plutôt à analyser les effets des incertitudes en mettant en évidence les liens entre les entrées et les sorties et ainsi déterminer les variables d'entrée dont l'incertitude aura une grande influence sur les objectifs. Elle permet également d'analyser à posteriori la stabilité des solutions optimales.

Dans notre étude nous n'avons pas accès aux fonctions explicites de la fonction objectif et des contraintes. Ainsi, afin d'effectuer la sélection des variables incertaines une étude de sensibilité locale autour de l'optimum déterministe est effectuée. Le but de cette étude est de trouver une information quant à l'impact engendré par la variation d'un certain paramètre x_i à un niveau local, c'est à dire au voisinage de l'optimum déterministe X^{opt} . Cette analyse permet donc de hiérarchiser les paramètres de l'étude, c'est à dire de cibler les paramètres les plus influents sur la sortie et nécessitant le plus de précision. Dans une analyse de sensibilité locale nous faisons l'hypothèse que le comportement local est suffisant afin de caractériser l'effet de la variable étudiée sur l'ensemble de l'espace de recherche. Cependant étant donné que les modèles conceptuels sont quasi linéaires, la sensibilité locale fournit des informations quantitatives importantes concernant l'influence de chaque paramètre.

Le but de l'analyse de sensibilité est donc d'estimer le taux de variation des sorties d'un modèle par rapport à l'évolution des paramètres d'entrée de celui-ci. Afin d'y parvenir, l'impact sur la fonction objectif et sur les contraintes engendré par une faible perturbation de chaque paramètre du problème est mesuré par le biais de la formule suivante [34] :

$$S_i = \frac{x_i^{opt}}{y^{opt}} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x_i=x_i^{opt}} \quad (10.1)$$

avec S_i la sensibilité en % de la variable x_i sur la fonction $f(x) = y$, où f peut être la fonction objectif (masse de l'avion au décollage) ou l'une des contraintes du problème. La sensibilité S_i est évaluée localement à l'optimum déterministe, ainsi, y^{opt} est la valeur de la fonction objectif ou de la contrainte étudiée à l'optimum déterministe et $x_i = x_i^{opt}$ en ce point. La dérivée partielle est calculée par le biais d'une différence finie : $\Delta x = \frac{1}{100} x_i^{opt}$. Il faut noter que le calcul des sensibilités est sans dimension et est normalisé afin d'obtenir une valeur objective. Nous estimons ainsi quelle est la valeur du pourcentage de variation de la fonction objectif et des contraintes lorsqu'on considère qu'un paramètre x_i varie d'un certain pourcentage. Les paramètres du problème étudié sont donc classés selon leur degré d'influence sur la variabilité de la fonction objectif et sur les contraintes.

L'étude de sensibilité concernant les paramètres du problème de conception d'un avion de type moyen-courrier mène à 15 paramètres sur les 160 ayant un impact significatif (ces 15 paramètres représentent moins de 10% de la totalité des paramètres initiaux). Les sensibilités de ces paramètres sont énumérées dans le tableau 10.1.

		Sensibilité de la fonction objectif et des contraintes (%)							
		$MTOW$	F_{margin}	C_{clb}	C_{crz}	C_{buf}	C_{oei}	$Tofl$	V_{app}
Variables incertaines	Largueur de la section du fuselage	0,39	5,32	0,35	0,32	0,21	1,02	1,12	0,16
	Hauteur de la section du fuselage	0,39	5,32	0,35	0,32	0,21	1,02	1,12	0,16
	Longueur totale du fuselage	0,16	1,79	0,13	0,12	0,09	0,38	0,46	0,07
	Corde aérodynamique moyenne de l'aile	$< 10^{-2}$	1,52	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	0,01	0,01	$< 10^{-2}$
	Volume de carburant au niveau de l'aile	$< 10^{-2}$	8,58	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$
	Aire brute du fuselage mouillé	0,01	3,02	0,13	0,11	0,05	0,4	0,23	0,01
	Aire brute de l'aile mouillée	0,067	2,25	0,09	0,08	0,04	0,3	0,19	$< 10^{-2}$
	Coefficient de poussée maximale en configuration de décollage	0,34	11,33	0,56	0,51	0,19	1,73	0,97	0,02
	Coefficient de poussée maximale en configuration d'atterrissage	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	0,47	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$
	Poids maximal de l'équipement	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	1,5	$< 10^{-2}$
	Poids opérationnel à vide	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	0,53
	Charge utile de la mission nominale	0,16	1,01	0,11	0,1	0,09	0,31	0,45	0,09
	Poids maximal sans carburant	0,25	1,65	0,19	0,17	0,14	0,5	0,74	0,02
	Vitesse d'approche à l'atterrissage concernant le segment 1	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	1,95	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$
	Rayon d'action de la mission nominale	0,32	10,87	0,23	0,22	0,18	0,63	0,93	0,2

TABLE 10.1: Sensibilité en % de la fonction objectif et des contraintes en fonction des variables incertaines

Ces paramètres constitueront donc les variables incertaines de notre problème d'optimisation sous incertitudes. Il s'agit de tout les paramètres ayant une sensibilité supérieure à $10^{-2}\%$:

- la largeur de la section du fuselage ;
- la hauteur de la section du fuselage ;
- la longueur totale du fuselage ;
- la corde aérodynamique moyenne de l'aile ;
- le volume de carburant au niveau de l'aile ;
- l'aire brute du fuselage mouillé ;
- l'aire brut de l'aile mouillée ;
- le coefficient de poussée maximale en configuration de décollage ;
- le coefficient de poussée maximale en configuration d'atterrissage ;
- le poids maximal de l'équipement ;
- le poids opérationnel à vide ;
- la charge utile de la mission nominale ;
- le poids maximal sans carburant ;
- la vitesse d'approche à l'atterrissage concernant le segment 1 (le segment 1 marque le passage de l'avion du statut en route au statut en approche) ;
- le rayon d'action de la mission nominale.

Afin de mieux gérer les incertitudes au delà de l'identification de leurs sources, il est nécessaire de les modéliser pour pouvoir quantifier leur impact sur le système à optimiser. Ainsi, une fois que les paramètres incertains significatifs sont définis, la quantification des incertitudes est une étape primordiale en optimisation multidisciplinaire. Ce problème sera traité à la fois pour les incertitudes de modélisation et les incertitudes de paramètres de conception dans les sections suivantes.

10.2.2 Quantification des incertitudes de modélisation

Afin d'étudier la robustesse et la fiabilité des solutions d'un problème, il faut dans un premier temps quantifier et modéliser l'incertitude présente sur les différents paramètres d'entrée. Dans nos recherches nous avons choisi une représentation probabiliste, nous représenterons donc les incertitudes sous la forme de distributions de probabilité.

On rappelle que les différents paramètres intervenant dans l'étude conceptuelle sont issus de modèles de basse fidélité. Ces modèles analytiques sont générés à partir de modèles physiques simplifiés ou de modèles de régression simples (linéaires ou quadratiques) construits à partir d'une base de données historiques (regroupant les valeurs de différents paramètres d'avions). Chaque variable de sortie d'un modèle du problème conceptuel avion est supposée s'exprimer comme suit afin d'inclure les incertitudes de modèle :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X(1) + \beta_2 X(2) + \dots + \beta_p X(p) + \varepsilon \quad (10.2)$$

où Y est la sortie du modèle qui s'exprime en fonction des variables explicatives $X(i)$ par le biais des coefficients β . Les paramètres $X(i)$ sont soit directement les paramètres de l'avion, soit une combinaison de paramètres résultant

tant de considérations physiques. Chaque paramètre d'entrée peut être une combinaison non linéaire des variables caractérisant l'aéronef. Par exemple la variable $X(1)$ peut être modélisée par $X(1) = X_1 \times X_2$ où X_1 et X_2 sont d'autres variables définissant le système étudié. Y est considérée comme étant une des variables incertaines du problème d'optimisation impactée par une incertitude de modélisation due à la simplicité relative des expressions des modèles. Cette incertitude est modélisée par le biais de la variable aléatoire ε qui suit une loi de distribution normale de moyenne nulle, ainsi : $E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X(1) + \beta_2 X(2) + \dots + \beta_p X(p)$. De façon générale il s'agit d'un problème de régression linéaire pour lequel les paramètres β sont obtenus en minimisant la somme des carrés des résidus :

$$L = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n \left[y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p (\beta_j X_{ij}) \right]^2 \quad (10.3)$$

ε_i représente les résidus, c'est à dire la différence entre les points expérimentaux y_i et les points théoriques y_i^{th} donnés par le modèle $y_i^{th} = \beta_0 + \beta_1 X_i(1) + \dots + \beta_p X_i(p) = \beta_0 + \sum_{j=1}^p (\beta_j X_i(j)) = \beta_0 + \sum_{j=1}^p (\beta_j X_{ij})$. Afin de minimiser la fonction L , la dérivée partielle de cette fonction par rapport aux paramètres β est égale à zéro :

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_j} \Big|_{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_j X_{ij}) X_{ij} = 0 \quad (10.4)$$

Sous la forme matricielle :

$$\beta = (X'X)^{-1} X'y \quad (10.5)$$

où X est la matrice des X_{ij} , y le vecteur réponse au point de conception des expériences.

Les incertitudes de modélisation considérées sont dues au fait qu'il y a une différence entre les points réels découlant de la base de données historiques et les prédictions obtenues par le biais des modèles de régression linéaires. Les erreurs ainsi mesurées entre les valeurs réelles et les valeurs prédites sont mises en évidence sur un exemple de modèle de régression (voir figure 10.1) : *wAfus*, l'aire brute du fuselage mouillé.

Une façon de prendre en compte ces incertitudes de modélisation et de caractériser ε , est de les définir à partir des résidus de la régression linéaire, résultant ainsi en une incertitude normale ε , de moyenne nulle et d'écart type σ calculé à partir des résidus. En d'autres termes, il s'agit de l'erreur des moindres carrés entre les points réels et les points obtenus par le biais de modèles simples (linéaires ou quadratiques). L'hypothèse de normalité concernant les erreurs engendrées par les modèles de régression est une conjecture classique dans la théorie des régressions. Cette hypothèse est vérifiée par un test de normalité lorsque les modèles sont construits à partir

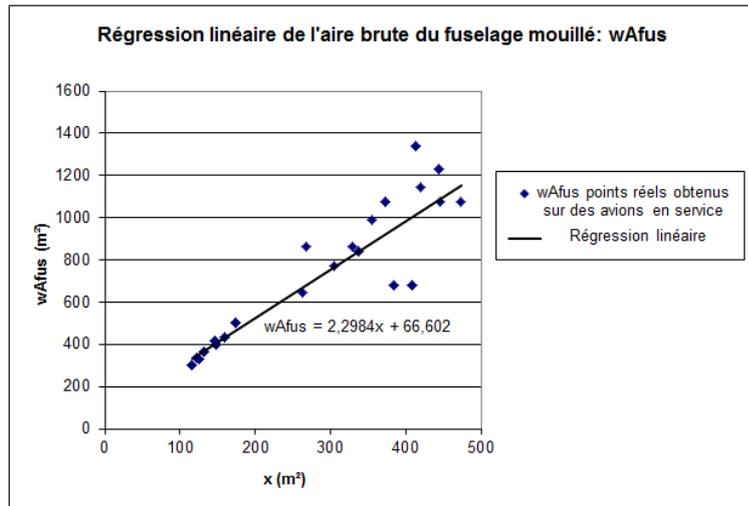


FIGURE 10.1: Comparaison entre les points réels de la base de données historiques et ceux obtenus par le biais du modèle de régression associé

d'un grand nombre de points. Dans les cas où les modèles sont établis à partir de peu de données, nous avons appliqué par analogie la même hypothèse classique de normalité.

L'écart type ainsi calculé représente les résidus sur la totalité de la plage de variation de la fonction. Cette modélisation peut être problématique, car en terme relatif par rapport à la valeur de la fonction étudiée, l'écart type peut être très important et l'intervalle de confiance très large. Afin d'illustrer ce comportement nous donnons un deuxième exemple : la variable F_{wing} (le volume de carburant au niveau de l'aile). L'écart type empirique calculé pour la fonction F_{wing} est très étendu (en terme relatif) pour les faibles valeurs de celle-ci (voir figure 10.2). Ainsi, pour les petites valeurs de F_{wing} il existe une probabilité importante que les tirages aléatoires puissent fournir des points négatifs et donc non physiques lorsqu'on considère un écart-type σ constant sur tout le domaine étudié. Ceci est illustré figure 10.2 : on peut constater que pour des valeurs de l'abscisse inférieures à 100, la valeur de la fonction retranchée d'un écart-type devient négative. Un intervalle de confiance aussi large peut conduire à des designs non physiques ou à des designs qui sont trop conservatifs au détriment des performances de l'avion (l'avion optimal sera robuste aux incertitudes mais le poids sera trop important). Ainsi nous proposons dans les paragraphes suivants une représentation améliorée des incertitudes.

Une première approche afin d'éviter la prise en compte d'incertitudes trop importantes pouvant mener à des résultats non-physiques est de tronquer les distributions par $+/- 2\sigma$. La conséquence d'une telle méthode est évaluée par un rapide cas test : les incertitudes, impactant les paramètres sélectionnés suite à l'étude de sensibilité présentée dans la section 10.2.1, sont propagées dans le problème d'optimisation par le biais de simulations. Les

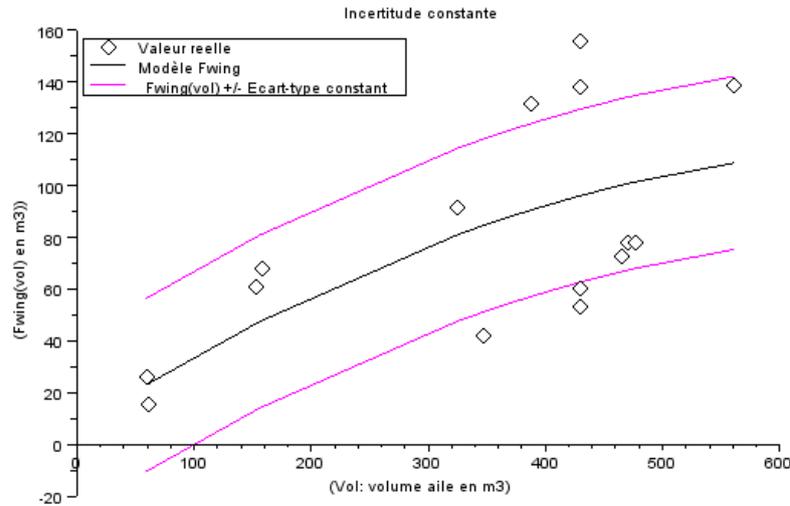


FIGURE 10.2: Écart-type constant déterminé pour le paramètre F_{wing}

tirages de Monte-Carlo suivent une loi normale dont l'écart-type σ est calculé à partir des résidus propres à chaque variable et tronquée par $+/- 2\sigma$. Malgré des simulations effectuées à partir de distributions tronquées, les incertitudes restent conséquentes car les données sont dispersées engendrant de grands écarts-types. La variabilité de la fonction objectif et des contraintes du problème d'optimisation est donc importante : la variabilité de la masse de l'avion au décollage ne peut être inférieure à 20% et les contraintes actives (l'altitude minimale durant l'ascension et l'altitude minimale de croisière) ont un seuil de fiabilité faible égal à 75%. Ces fonctions sont à l'origine très bruitées (elles donnent des estimations mauvaises) et la propagation d'incertitudes par tirages de Monte-Carlo engendre une variabilité encore plus importante. L'implémentation de cette première approche mène à des configurations jugées non propices (poids trop important), dues à des intervalles de confiance trop larges sur les contraintes. Nous souhaitons donc mettre en place un écart-type variable afin de moduler la dispersion et mieux refléter la précision du modèle. En effet, la base de données historiques comporte des régions plus ou moins bien définies suivant le nombre de données accessibles. Nous faisons maintenant une synthèse des méthodes éventuelles que nous souhaitons implémenter afin de modéliser des incertitudes de modèle variables dépendant de l'abscisse de la régression.

Nous considérons le modèle de régression linéaire suivant : $Y_i = \beta_i X_i + \varepsilon_i$, $1 \leq i \leq n$, avec (X_i) les variables de conception non aléatoires et (Y_i) les mesures des fonctions de régression inconnues. Les valeurs (Y_i) sont contaminées par les erreurs (ε_i) , qui sont supposées de moyenne nulle et ne sont pas nécessairement distribuées de façon identique. La donnée (ε_i) est dite hétéroscédastique [50, 89], si $Var(\varepsilon_i) = \sigma_i^2$ est non constante (voir par exemple figure 10.3). L'écart-type σ_i peut être déterminé par des noyaux de lissage [86, 58, 85]. Le principe des noyaux de lissage est une généralisation de l'estimation obtenue par le biais des histogrammes. C'est une méthode non

paramétrique permettant d'estimer la densité de probabilité d'une variable aléatoire. Elle est basée sur un échantillon de la population statistique et permet d'estimer la densité en n'importe quel point du support. La densité en un point x est estimée par la proportion de données x_1, x_2, \dots, x_n qui sont proches de x . Pour ce faire, une boîte est construite autour de x , dont la largeur est gouvernée par un paramètre de lissage h . Puis le nombre d'observations dans cette boîte est décompté. Cette estimation, qui dépend du paramètre de lissage h , a de bonnes propriétés statistiques mais est non-continue par construction. La méthode de Parzen-Rozenblatt [98] (méthode des noyaux) permet d'obtenir la continuité. Pour y parvenir, la boîte centrée en x est remplacée par une courbe centrée en x qui est une fonction gaussienne (fonction de distribution réduite), il s'agit de la courbe en pointillés sur la figure 10.3.

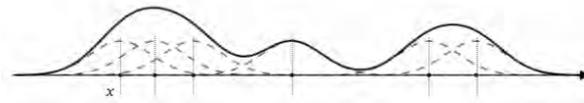


FIGURE 10.3: Fonction de densité construite à partir d'un noyau de lissage

Plus une donnée est proche de x , plus la valeur du poids est grande. À l'opposé, les observations trop éloignées de x sont assignées d'un poids faible qui les rend négligeables. L'estimation de la fonction de densité est formée par la moyenne des courbes [41], il s'agit de la courbe représentée par la ligne continue sur la figure 10.3. L'estimation résultante finale de la variance de l'erreur locale est uniformément cohérente [89]. Ces méthodes sont très populaires en économie [86, 85, 43]. Dans [43] une relation entre les factures d'électricité et la température est estimée en utilisant une régression ainsi qu'une distribution de l'incertitude de modèle basée sur des noyaux de lissage. Une méthode équivalente est employée dans [85] afin de déterminer des données financières. Concernant notre étude en phase conceptuelle avion, nous proposons une approche basée sur l'adaptation des méthodes de noyaux de lissage. Ces travaux permettent de prendre en compte à la fois le fait que certaines régions comportent une densité de points plus importante que d'autres et également le fait que certains points ne soient pas correctement prédits par le modèle analytique.

Afin de modéliser précisément les incertitudes présentes dans notre système, l'écart-type doit varier en fonction du point courant où le modèle est évalué. L'incertitude de modèle variable permettra de prendre en compte les deux phénomènes évoqués précédemment :

- phénomène 1 : les points de la base de données sont parfois concentrés dans des domaines de l'espace de recherche ;
- phénomène 2 : dans certaines régions le modèle analytique peut être bien meilleur que dans d'autres indépendamment du nombre de données.

Le premier phénomène est mis en évidence grâce à l'exemple suivant : sur la figure 10.1 représentant $wAfus$, il est possible de constater la présence de nuages de points pour les valeurs faibles de $wAfus$ ainsi qu'un nuage de points pour les valeurs élevées. Pour des valeurs moyennes de la variable $wAfus$, c'est-à-dire comprises entre 500 et 800 m² il y a relativement peu de données. Ainsi l'incertitude de modèle sera légèrement plus élevée dans les domaines où il y a moins de points dans la base de données, afin de refléter le fait que nous possédons peu d'informations accessibles permettant d'évaluer réellement l'incertitude de modélisation. Nous mettons donc en place une première modélisation variable de l'incertitude de modèle. Pour prendre en compte le phénomène 1, nous introduisons la prédiction de la variance au point x_0 , bien connue au sein de la théorie de la régression[91] :

$$\sigma_{p1}^2 = Var[\hat{y}(x_0)] = \sigma_0^2 x_0'(X'X)^{-1}x_0 \quad (10.6)$$

avec σ_0 l'écart-type caractérisant les résidus et \hat{y} l'estimation. La valeur de l'écart-type σ_{p1} s'ajuste à l'information disponible. L'écart-type est moins important si la région est bien définie (plusieurs points accessibles dans la base de données), à l'opposé il sera plus grand lorsque peu de points de la base de données définissent la région (l'incertitude sur les caractéristiques prédites peut éventuellement être plus importante).

Cette première formulation basée sur un écart-type variable permet de prendre en compte le phénomène 1 mais ne reflète pas le fait que certaines régions soient bien mieux prédites par le modèle que d'autres indépendamment du nombre de données définissant la région où l'incertitude est évaluée (phénomène 2). Ce second phénomène est à nouveau illustré par la figure 10.1 où l'on peut constater que le modèle de régression est en meilleure adéquation avec les points fournis par la base de données pour les régions dont les valeurs de $wAfus$ sont faibles, en comparaison aux régions pour lesquelles les valeurs de $wAfus$ sont élevées. Ce phénomène sera pris en compte en introduisant un écart-type moyen σ_{p2} défini au voisinage du point étudié (pour lequel nous souhaitons prédire l'incertitude de modèle). De façon similaire aux noyaux de lissage cet écart-type est l'erreur des moindres carrés calculée dans une fenêtre gaussienne de dimensions variables. Il s'agit de l'erreur moyenne des points situés dans une fenêtre dont les dimensions varient afin de maintenir un nombre de points constant à l'intérieur de celle-ci. Par exemple, dans le cas du paramètre $wAfus$, la fenêtre est construite de façon à ce que le nombre de données à l'intérieur de celle-ci soit égal à 8, quel que soit le point pour lequel nous souhaitons prédire l'incertitude (cf. figure 10.4). Un poids est assigné à chaque point de la base de données basé sur une fonction de pondération gaussienne dépendant de la région dans laquelle le point courant est localisé. Elle est telle que l'écart-type σ est égal à la moitié de la taille de la fenêtre ainsi construite (voir figure 10.4). La fonction de pondération gaussienne est également normalisée afin que le poids du point où nous souhaitons définir l'incertitude de modèle soit égal à 1. Ainsi, plus le point de la base de données est proche du point courant où nous

souhaitons définir l'incertitude, plus son impact sur le calcul de l'incertitude est important.

$$\sigma_{p2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i^{réel} - y_i^{modèle})^2 p(y_i^{réel})}{\sum_{i=1}^n p(y_i^{réel})}} \quad (10.7)$$

où n est le nombre de points dans la base de données, $y^{réel}$ est la valeur du point réel, $y^{modèle}$ est la valeur donnée par le modèle et $p(y_i^{réel})$ est le poids qui est assigné à chaque point de la base de données basé sur la fonction de pondération gaussienne. La fonction p est donnée par l'équation suivante :

$$p(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right)} \quad (10.8)$$

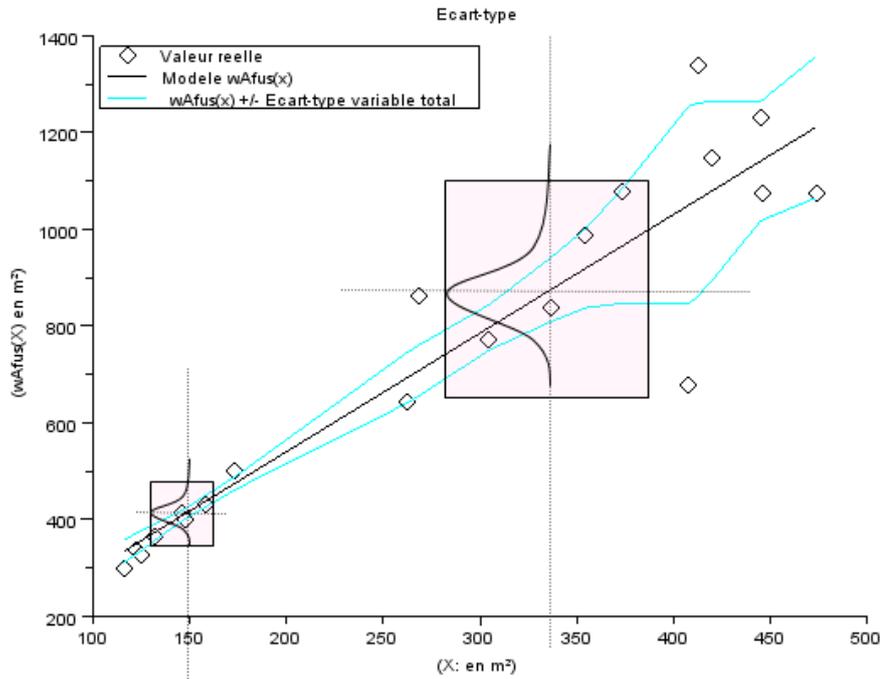


FIGURE 10.4: Ajustement de l'écart-type à la fenêtre gaussienne

L'écart-type de l'incertitude de modèle devient ainsi :

$$\sigma_{total}^2 = \sigma_{p2}^2 x_0' (X'X)^{-1} x_0 \quad (10.9)$$

L'incertitude résultante basée sur la variance totale σ_{total} est illustrée sur la figure 10.5 pour la fonction $wAfus$. La nouvelle formulation de l'écart-type est ajustée à l'information disponible : il s'agit d'un écart-type adaptatif. Comme mentionné précédemment, l'écart-type constant issu des résidus est conséquent et entraîne des résultats non physiques (notamment pour le premier point de la figure 10.2). En effet la base de données utilisée regroupe des données issues d'avions de différentes familles ce qui a pour conséquence d'aboutir à des données très dispersées. L'écart-type variable total (σ_{total})

permet de pallier ce phénomène. Sur la figure 10.5 nous pouvons constater que l'intervalle de confiance est réduit de plus de 50% sur la plage de variation des paramètres $wAfus$ et X (combinaison des dimensions du fuselage) par rapport à l'écart-type constant (σ). En comparaison à l'écart-type variable (σ_{p1}) basé uniquement sur la prédiction de la variance au point x_0 (point pour lequel nous souhaitons prédire l'incertitude) nous remarquons que l'écart-type variable total permet de mieux refléter la précision du modèle. Dans le tableau 10.2 nous établissons une comparaison du pourcentage de points, de la base de données historiques, compris dans l'intervalle de confiance ± 1 écart-type pour les différentes représentations de l'écart-type (écart-type constant σ , écart-type σ_{p1} ou écart-type total σ_{total}). Cette comparaison est effectuée pour les écarts-types des distributions de probabilité des incertitudes de modélisation affectant les paramètres $wAfus$ et F_{wing} . Concernant les autres variables aléatoires du problème nous obtenons des résultats du même ordre de grandeur. Nous mettons ainsi en évidence le fait que notre nouvelle modélisation de l'incertitude permet d'être moins conservatif.

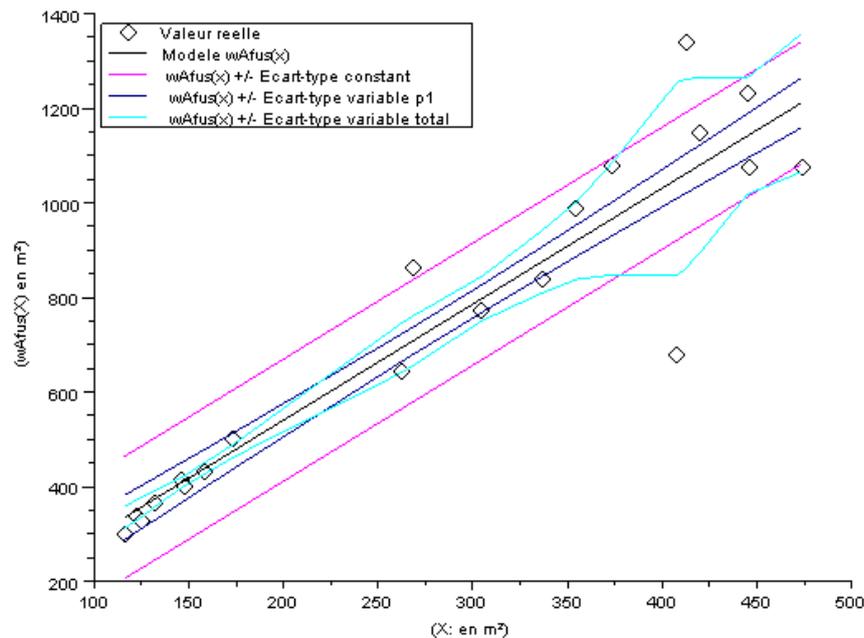


FIGURE 10.5: Comparaison des différents écarts-types pour le paramètre $wAfus$

La modélisation d'incertitudes variables à partir d'une base de données historiques permet donc d'obtenir une prédiction de la valeur de l'incertitude en chaque point de l'espace de recherche. Cette incertitude représente la variabilité pouvant survenir lors de la prédiction d'un phénomène physique. De plus, lorsque aucune information n'est accessible dans une certaine région (c'est-à-dire lorsqu'aucun avion n'a auparavant été construit

		Écart-type	Écart-type	Écart-type
		σ	σ_{p1}	σ_{total}
Pourcentage de points compris dans	wA_{fus}	80	60	65
l'intervalle +/- 1 écart-type pour les variables:	F_{wing}	70	61	63

TABLE 10.2: Comparaison du pourcentage de données comprises dans l'intervalle de confiance +/- 1 écart-type, selon la modélisation de l'écart-type choisi

avec de telles caractéristiques) il est possible de prédire les valeurs des paramètres, cependant l'incertitude sera plus importante. Bien entendu s'il existe une percée technologique conséquente, la variabilité impactant les modèles de prédiction peut être sous ou sur estimée. Mais il est alors possible d'introduire une information subjective basée sur l'avis d'experts ou calibrer l'incertitude en se basant sur de précédentes percées technologiques.

10.2.3 Quantification des incertitudes de paramètres de conception

Une autre source potentielle d'incertitudes sur les sorties des modèles de notre problème résulte du manque de précision dans la modélisation des variables de conception [46], i.e. les variables d'optimisation S_{wing} et $SLST$. Ces inexactitudes découlent des différences entre le modèle idéalisé employé pour l'étude conceptuelle avion et le design final de l'avion suite à l'ensemble des phases de conception. Par exemple lors de l'étude conceptuelle la surface de l'aile est calculée à partir de formules géométriques simples basées sur un simple polyèdre. Cependant, en ce qui concerne l'aile construite, sa surface est bien entendu calculée sur la base de paramètres géométriques de l'aile réelle, l'évaluation est donc plus rigoureuse.

Dans notre étude conceptuelle de nombreux modèles propagent des erreurs : les incertitudes de modélisation impactant les sorties de certains modèles se propagent sur les paramètres d'entrée des autres modèles engendrant à leur tour des incertitudes de modélisation. Ce phénomène est dû à la multidisciplinarité de notre problème (présence de boucles de rétroaction). Ainsi, les incertitudes affectant les paramètres d'entrée de certaines disciplines sont intégrées dans l'incertitude de modélisation perturbant la sortie de cette discipline. Les incertitudes affectant les variables de conception (variables d'entrée) peuvent donc être représentées grâce à la même méthodologie que celle développée afin de quantifier les incertitudes de modélisation.

Les variables de conception (la surface de l'aile S_{wing} et la taille des moteurs $SLST$) sont modélisées comme suit :

$$x^{incert} = E(x^{opt}) + \varepsilon(x^{opt}) \quad (10.10)$$

x^{opt} est la valeur de la variable au point courant du processus d'optimisation, $\varepsilon(x^{opt})$ est l'incertitude déterminée en utilisant la méthode d'écart-type variable présentée dans la section précédente. Cette variable suit donc une

loi de probabilité normale de moyenne nulle et d'écart-type variable (dépendant de la localisation du point courant x^{opt} dans l'espace de recherche) et déterminée à partir d'une base de données historiques (la même base de données que celle précédemment utilisée). Il faut noter que les paramètres de conception peuvent eux-mêmes être exprimés par des modèles de régression dépendant d'un certain nombre d'hypothèses de conception (voir table 9.1 section 9). En comparaison avec les données réelles découlant de la base de données historiques, on peut ainsi estimer la variabilité de ces paramètres de conception. Cette estimation de la variabilité montre que le coefficient de variation est inférieur à 5% pour le paramètre S_{wing} et 8% pour le paramètre $SLST$. L'impact des incertitudes de paramètres de conception sur le design optimal du système sera mis en évidence dans le chapitre suivant grâce aux résultats de l'optimisation probabiliste.

Dans ce chapitre nous avons montré qu'une modélisation non appropriée des incertitudes (représentation par une loi normale de paramètres constants) affectant les paramètres de l'étude conceptuelle peut conduire à l'intégration de marges de sécurité très importantes et aboutir lors des phases détaillées de la conception à un design trop conservatif. En conception avion, des marges de sécurité trop larges engendrent une augmentation de la masse de l'avion et donc de la consommation de kérosène. Or, la diminution de la consommation des avions est une nécessité absolue pour l'industrie aéronautique et une lutte sur tous les fronts. Ainsi, la nouvelle modélisation des incertitudes que nous avons développée, basée sur un écart-type ajustable aux informations disponibles, permet de pallier ce problème. Le concepteur peut maintenant évaluer en tout point de l'espace les incertitudes de modélisation correspondantes. Notre étude permet également d'évaluer précisément l'incertitude affectant les variables de conception pour un design optimal prédit.

La description des incertitudes présentes au sein d'un problème d'optimisation déterministe initial amène à la définition d'un problème stochastique où les objectifs et les contraintes possèdent une certaine distribution de probabilité. Dans le chapitre suivant nous présentons la formulation de l'étude conceptuelle avion sous incertitudes.

FORMULATION DU PROBLÈME EN PHASE CONCEPTUELLE SOUS INCERTITUDE

L'étude conceptuelle est une étape qui s'avère être cruciale mais complexe pour plusieurs raisons : l'espace de recherche des solutions doit rester suffisamment général afin de ne pas exclure de potentielles solutions, les décisions sont prises dans un contexte où peu des caractéristiques de l'avion sont définies, les données du problème ne sont pas bien connues et les modèles utilisés sont souvent de grosse granularité. À ce stade de la conception, les incertitudes dans le problème peuvent être significatives et mener à la défaillance du système. Le contrôle du risque devient donc un élément important du projet. Ainsi dans ce chapitre nous présentons la formulation probabiliste de l'étude conceptuelle avion, dans un premier temps en prenant en compte des incertitudes de modélisation puis dans un deuxième temps en introduisant également les incertitudes de paramètres de conception.

11.1 PROBLÈME CONCEPTUEL AVION SOUS INCERTITUDE DE MODÉLISATION

11.1.1 Formulation du problème

L'optimisation sous incertitude vise à concevoir un système faiblement sensible aux variations et ayant statistiquement les meilleures performances (c'est à dire satisfaisant un certain niveau de fiabilité donné). Pour ce faire, le problème d'optimisation déterministe présenté dans la section 9 (équation 9.4) est modifié de façon à introduire les contraintes de fiabilité et de robustesse comme suit [81, 13] :

$$\begin{cases} \text{Min}_{S_{wing}, SLST} E[MTOW(S_{wing}, SLST, \delta)] & \text{avec } S_{wing}, SLST \in S \\ COV(MTOW(S_{wing}, SLST, \delta)) \leq \alpha \\ \text{Prob}(g_i(S_{wing}, SLST, \delta) \leq 0) \geq P_i^g & i = 1, \dots, 7 \end{cases} \quad (11.1)$$

où δ représente les incertitudes de modélisation. La méthode que nous avons développée permet de prendre en compte toutes les incertitudes de modélisation présentes dans le problème de conception. Cependant cela entraînerait un coût de calcul prohibitif (notamment pour des calculs effectués sur

un poste de travail personnel) alors que certains paramètres n'ont qu'un effet mineur sur la variabilité des performances de l'avion. Dans le problème d'optimisation 11.1, α est la variation tolérée sur le coefficient de variation (COV), cette contrainte représente donc la contrainte de robustesse. En pratique, afin d'obtenir une variation acceptable, α est pris inférieur à 2%. Le coefficient de variation est le rapport de l'écart-type sur la moyenne, ainsi plus le coefficient de variation est grand plus la dispersion autour de la moyenne l'est. Le coefficient de variation est sans dimension, il permet donc la comparaison entre différentes distributions lorsque l'échelle des paramètres incertains n'est pas comparable. Nous traitons des paramètres physiques dont les échelles sont très différentes, le coefficient de variation est une valeur relative qui est donc plus appropriée que l'écart-type absolu. Enfin, P_i^g est la probabilité que la contrainte g_i soit satisfaite, il s'agit donc du seuil de fiabilité. Les seuils de fiabilité imposés sont basés sur le risque que le fabricant est prêt à prendre lors de la phase conceptuelle avion. Dans nos travaux ce sont ceux visés par Airbus à la fin de l'étude conceptuelle. On note qu'il serait possible d'effectuer une optimisation robuste basée sur une somme pondérée des objectifs : minimisation de la moyenne et de la variance, cependant le but ici est de maximiser les performances du système tout en minimisant la masse et en contrôlant le risque [90]. L'ensemble des valeurs des seuils de fiabilité et de robustesse est donné dans le tableau 11.1.

Contrainte	Fiabilité minimale de satisfaction de la contrainte étudiée en (%)
Vitesse d'approche maximale	98
Longueur de piste maximale au décollage	90
Altitude minimale durant l'ascension	95
Altitude minimale de croisière	90
Altitude minimale avant tremblement aérodynamique	90
Altitude minimale lorsqu'un des moteurs est en panne	95
Capacité de carburant	90

TABLE 11.1: Valeurs des seuils de fiabilité à atteindre

Au stade conceptuel nous avons pu constater que la fonction objectif est quasi-linéaire par rapport aux paramètres incertains. L'égalité 11.2 est approximativement vérifiée, ce qui permet ainsi de simplifier les calculs de la fonction objectif.

$$E [MTOW (S_{wing}, SLST, \delta)] = MTOW (S_{wing}, SLST) \quad (11.2)$$

Cette approximation a été validée par expériences : à chaque itération du processus d'optimisation $E [MTOW (x)]$ et $MTOW [E (x)]$ sont évalués et

comparés. Ainsi, la moyenne relative des erreurs entre les deux termes est calculée et estimée comme étant inférieure à 0,0006 %.

Nous expliquons maintenant comment les contraintes probabilistes sont déterminées. La robustesse du système est garantie lorsque la variation de la fonction objectif (la masse de l'avion au décollage) induite par les incertitudes est faible. Ainsi la variabilité de la fonction objectif $MTOW$, mesurée par le biais du coefficient de variation (COV), doit être inférieure à un certain seuil (soit $COV(MTOW) < 2\%$). La fiabilité du système est quant à elle atteinte lorsque les contraintes imposées sont respectées dans 90 % des cas. Habituellement lors des phases en aval plus détaillées de la conception le niveau de fiabilité recherché est plus important dû aux coûts de développement engagés. Au niveau opérationnel la probabilité de panne, exigée par la réglementation pour les aspects sécuritaires, est quant à elle de l'ordre de 10^{-9} /heure de vol.

La prise en compte des incertitudes a pour conséquence d'introduire des marges afin d'assurer la robustesse et la fiabilité du système. Les probabilités de défaillance des contraintes et la robustesse du système sont, dans un premier temps, déterminées par tirages aléatoires et donc évaluées chaque fois que la fonction objectif et les contraintes sont appelées dans le processus d'optimisation. La probabilité que chaque contrainte soit respectée est ainsi estimée par le biais du ratio du nombre de défaillances sur le nombre total d'échantillons.

De telles simulations numériques employées pour concevoir un système fiable (les contraintes sont respectées avec une probabilité de succès supérieure à 90 %) et robuste (faible variabilité de la fonction objectif induite par les incertitudes) sont extrêmement coûteuses. Leur utilisation directe pour contrôler et propager les incertitudes est problématique du fait du grand nombre d'évaluations à réaliser. C'est pourquoi nous cherchons à remplacer ces simulations par des modèles approchés plus rapides. Une solution que nous présentons dans la section suivante est l'établissement d'un modèle de substitution à partir de quelques résultats numériques réellement calculés avec la simulation coûteuse. Dans notre cas, ce modèle est générique et s'adapte à la physique du problème étudié. Une fois construit, il est ensuite validé grâce à des critères de précision. Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, il existe des méthodes permettant de mesurer la précision des modèles construits et ainsi garantir leur fiabilité (mesure du coefficient de corrélation et de l'erreur quadratique moyenne). Les modèles de substitution présentent un temps d'évaluation négligeable ce qui permet de multiplier les évaluations. Ils fournissent également une expression analytique de la fonction représentée, donnant facilement accès à certaines informations utiles comme le gradient de cette fonction par exemple.

11.1.2 Modèles de substitution

Nous souhaitons mettre en oeuvre une méthodologie subsidiaire de résolution de problèmes d'optimisation sous incertitudes afin de minimiser le temps de calculs. Notre méthode est basée sur l'élaboration de surfaces de

réponse permettant d'évaluer la fiabilité des contraintes en tout point de l'espace de recherche et de remplacer la propagation des incertitudes par tirages de Monte-Carlo. Le problème de conception auquel nous faisons face est défini par deux variables de conception, ainsi lorsque des calculateurs performants sont employés (parallélisation des calculs), la propagation des incertitudes par simulations sera préférée à une méthode d'approximation (les simulations de Monte-Carlo permettent de mieux refléter la réalité). Cependant, dans l'hypothèse où un plus grand nombre de variables de conception est pris en compte, la propagation des incertitudes par tirages de Monte-carlo devient difficile voir impossible à mettre en oeuvre (malgré l'utilisation de calculateurs performants). Il devient alors primordial de mettre en place des approches subsidiaires.

Un modèle de substitution (aussi appelé « métamodèle », « modèle réduit » ou « surface de réponse ») est une approximation d'une fonction dont l'évaluation est coûteuse. L'évaluation du modèle de substitution est très rapide, ce qui permet d'avoir en tout point de l'espace une estimation de la valeur de la fonction coûteuse sans avoir à l'évaluer réellement lors du processus d'optimisation. Comme présenté sur la figure 11.1, la construction d'un modèle de substitution est réalisée à partir de quelques échantillons de la fonction initiale, sans aucun a priori sur sa physique ou ses particularités.

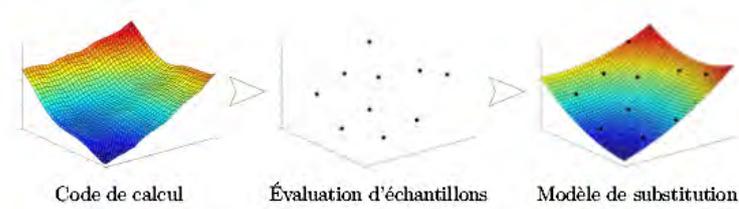


FIGURE 11.1: Construction d'un modèle de substitution à partir d'échantillons d'un code de calcul coûteux

Dans notre cas nous optons pour un modèle de substitution polynomial. Les modèles à base d'approximations polynomiales sont les modèles les plus simples mais ils ont prouvé leur efficacité sur un grand nombre de problèmes [91]. Une approximation polynomiale \hat{f} s'écrit sous la forme d'un polynôme multivarié à n_x variables et de degré fixé k :

$$\hat{f}(x) = \sum_{\alpha: \|\alpha\|_1 \leq k} c_\alpha x^\alpha \quad (11.3)$$

avec :

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, \dots, x_{n_x}) \in \mathbb{R}^{n_x} \\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_x}) \in \mathbb{N}^{n_x} \\ \|\alpha\|_1 = \sum_{i=1}^{n_x} \alpha_i \\ c_\alpha \in \mathbb{R} \\ x^\alpha = \prod_{i=1}^{n_x} x_i^{\alpha_i} \end{cases} \quad (11.4)$$

Un polynôme est donc tout simplement une somme de monômes x^α pondérés par des coefficients c_α à déterminer. La base polynomiale standard est composée des monômes x^α , mais il existe aussi des modèles polynomiaux construits sur des bases différentes. On peut par exemple citer les polynômes de chaos qui utilisent notamment les bases d'Hermite ou de Legendre [138, 95]. Les bases polynomiales sont dans tous les cas uniquement composées de puissances de x et les modèles peuvent donc se réécrire sous la forme générale présentée ci-dessus.

Afin d'établir l'approximation polynomiale d'une fonction, il faut déterminer $\frac{(k+n_x)!}{k!n_x!}$ coefficients c_x . On a donc besoin d'au moins autant d'échantillons de la fonction à approcher. Le calcul de ces coefficients peut être effectué simplement par la résolution d'un système d'équations linéaires. Lorsque le nombre d'échantillons disponibles est égal au nombre de coefficients du modèle, on obtient un modèle interpolant. Mais il est également possible de choisir un nombre plus important d'échantillons afin de construire un modèle de régression. Les coefficients sont alors déterminés par la résolution d'un problème d'optimisation visant à minimiser la distance entre le modèle et les échantillons. On utilise généralement pour cela la méthode des moindres carrés, c'est à dire la minimisation de la somme des carrés de la distance euclidienne entre les échantillons et leurs valeurs estimées par le biais du modèle. Dans notre étude les contraintes probabilistes sont remplacées par des modèles de substitution polynomiaux quadratiques. En effet, les surfaces de réponse quadratiques sont une modélisation classique qui permet de bien représenter l'allure du coefficient de fiabilité. Afin d'étayer nos propos, la corrélation entre les estimations du modèle de substitution et les valeurs réelles du coefficient de fiabilité sera validée par la suite grâce à des mesures de précision. D'autre part, la mise en place de ces approximations n'induit pas un temps de calcul important car peu de coefficients doivent être déterminés. Un modèle linéaire engendrerait un temps de calcul moindre mais l'erreur de modélisation serait bien plus importante en comparaison aux surfaces de réponse quadratiques. Dans l'hypothèse où un développement d'ordre deux fourni des résultats jugés non suffisamment précis, l'ordre du modèle de substitution peut être augmenté. Si la précision voulue n'est toujours pas atteinte alors des méta-modèles subsidiaires seront testés.

Afin d'approcher nos contraintes, nous souhaitons construire des modèles de substitution les plus précis possibles à partir d'un minimum d'échantillons. L'évaluation de ces échantillons est en effet généralement coûteuse, et il faut donc les utiliser avec parcimonie. L'ensemble des échantillons destinés à l'établissement d'un modèle est appelé un « plan d'expériences » (DOE). Le but recherché est de planifier intelligemment ces expériences afin d'en tirer profit au maximum. La manière la plus simple de choisir des échantillons pour construire un modèle de substitution est de les prendre au hasard dans l'espace d'entrée. Cependant cette méthode ne garantit pas un bon recouvrement de l'ensemble de l'espace et le modèle pourra alors se révéler de mauvaise qualité dans certaines régions mal définies. C'est pourquoi on recherche d'autres moyens de générer des plans d'expériences plus repré-

sentatifs de la totalité de l'espace considéré. Le but de ces méthodes est de fournir un plan d'expériences optimal au sens d'une certaine mesure de la bonne répartition des points dans l'espace. Des exemples de plans d'expériences en deux dimensions sont représentés sur la figure 11.2. Le principe de chacun d'entre eux est détaillé ci-dessous.

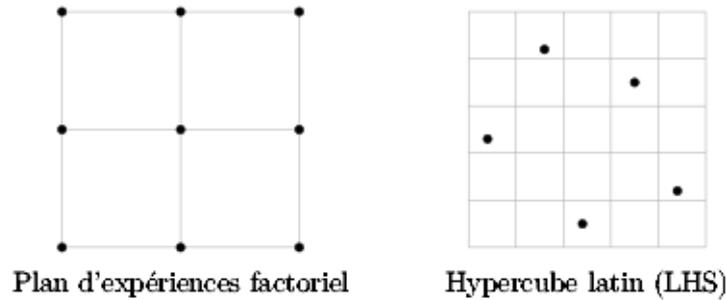


FIGURE 11.2: Exemples de plans d'expériences

Le premier type de plan d'expériences que l'on rencontre est le plan factoriel. Il consiste à utiliser une grille qui découpe le domaine de variation de chacun des n_x paramètres en k parties égales, et de disposer des points sur les noeuds de cette grille. Les échantillons sont ainsi bien répartis dans l'espace. L'inconvénient d'un tel plan est qu'il nécessite un très grand nombre de points lorsque le nombre de paramètres ou la finesse de la grille augmente. Cette méthode est donc très intéressante si la dimension du problème est petite mais n'est pas une solution adaptée au problème qui nous concerne. D'autre part, dans le cas où le modèle évalué est un polynôme quadratique ou de degré supérieur, le plan d'expériences factoriel peut ne pas rendre compte d'une telle allure notamment si le maillage n'est pas assez fin.

Les hypercubes latins (ou LHS pour « Latin Hypercube Sampling ») sont un des plans d'expériences les plus répandus aujourd'hui. Dans un espace à deux dimensions, ils reviennent à choisir les échantillons au sein d'une grille de manière à n'avoir qu'un seul point sur chaque ligne et chaque colonne. Chacune des parties du domaine de variation d'un paramètre est ainsi décrite par un unique échantillon. Les LHS permettent de recouvrir convenablement l'espace en utilisant un nombre restreint de points par rapport aux plans factoriels (il y a ici autant d'échantillons que de lignes ou de colonnes). Il s'agit d'une technique de réduction de la variance qui facilite la convergence. La grille peut aussi être adaptée afin que l'échantillonnage suive une certaine distribution, en définissant des colonnes équiprobables (plus resserrées dans les zones de forte probabilité et plus larges au niveau des zones de faible probabilité). D'autres recherches portent sur la génération des meilleurs LHS possibles parmi les différentes alternatives existantes au sein d'une grille donnée (voir [9] par exemple). Dans nos travaux nous avons opté pour ce type de plan d'expériences. Le nombre de points du plan

d'expériences est choisi en fonction du temps de calcul nécessaire afin de déterminer les coefficients de la surface de réponse (calculs effectués sur un poste de travail personnel). La courbe 11.3 montre qu'à partir d'un certain nombre de points (35 points), l'amélioration de la précision est négligeable devant l'augmentation du temps de calculs engendrée. La finesse du modèle de substitution est renseignée par le biais du coefficient de corrélation entre les points réels et ceux fournis par la surface de réponse (le coefficient de corrélation doit être proche de 1 pour une bonne précision du modèle de substitution). Nous choisissons de construire un plan d'expériences composé de 35 points.

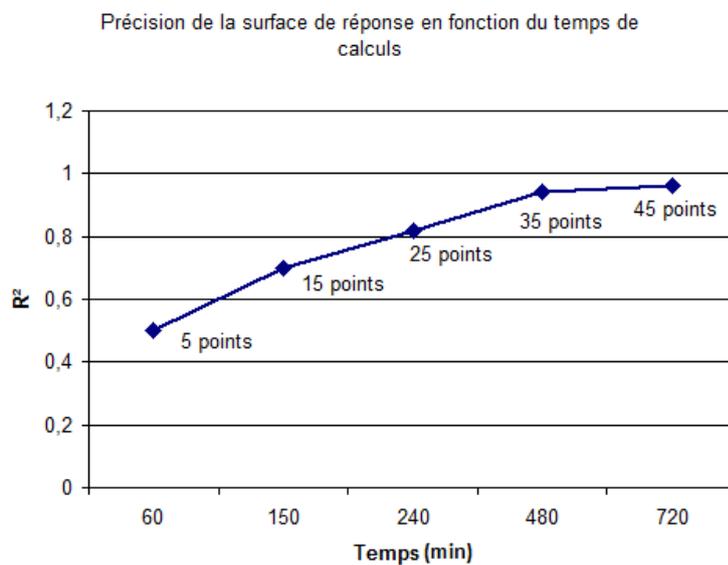


FIGURE 11.3: Évolution de la précision du modèle de substitution en fonction du temps de calculs

Ainsi, afin de réduire le nombre d'appels au code implémenté lors du processus d'optimisation et minimiser les temps de calculs, nous remplaçons les contraintes probabilistes par des modèles de substitution polynomiaux quadratiques : ces modèles de substitution fournissent directement l'indice de fiabilité β . Nous détaillons maintenant la méthode mise en place :

Le niveau minimal de fiabilité est souvent caractérisé par le biais de l'indice de fiabilité. La fiabilité des contraintes du problème déterministe présenté dans la section 9 peut donc être exprimé comme suit [83] :

$$\beta_i(S_{wing}, SLST, \delta) \geq \beta_i^g \quad (11.5)$$

où l'indice de fiabilité β_i est calculé en déterminant le point le plus probable de défaillance dans l'espace de recherche des variables normalisées et ce pour chaque équation d'état limite $g_i(S_{wing}, SLST, \delta) = 0$. Le symbole β_i^g est l'indice de fiabilité cible correspondant à la probabilité minimale admissible

estimations des valeurs réelles des fonctions de référence. Il est ainsi intéressant de pouvoir estimer l'erreur de prédiction de nos surfaces de réponse. Cette estimation n'est pas aisée car l'erreur d'un modèle est liée par définition à la valeur réelle de la fonction qu'on est en train de modéliser. Or cette fonction n'est connue qu'en un nombre limité de points. Il est impossible de connaître la véritable erreur d'un modèle en tous points, mais on peut par contre en faire des estimations à partir de données que l'on possède. Dans notre étude nous avons utilisé deux mesures globales de la qualité de l'ajustement afin d'évaluer la précision de nos surfaces de réponse construites à partir d'un ensemble particulier de valeurs d'échantillons : l'erreur quadratique moyenne (*RMSE*, « Root Mean Squared Error ») et le coefficient de corrélation R^2 [106]. Ces mesures sont des critères de validation couramment employés qui permettent d'estimer l'erreur de modélisation, dans notre cas l'erreur introduite sur β_i^g . Les définitions de ces termes sont données ci-dessous :

$$\begin{cases} RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} \\ R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i)^2)} \end{cases} \quad (11.8)$$

où y_i et \hat{y}_i correspondent respectivement aux valeurs observées et aux valeurs prédites par la surface de réponse. L'erreur *RMSE* représente une mesure de la dispersion des données autour du modèle de régression. L'erreur R^2 se définit quant à elle comme étant la part de variance expliquée par rapport à la variance totale. En effet, on sait que la valeur y_i d'une observation peut être décomposée en deux parties : une part expliquée par le modèle et une part résiduelle. La dispersion de l'ensemble des observations se décompose donc en variance expliquée par la régression et en variance résiduelle inexpliquée. L'erreur R^2 est comprise entre 0 et 1.

Ainsi, le modèle de substitution est jugé comme étant précis lorsque l'erreur *RMSE* est petite (l'unité de l'erreur *RMSE* est la même que celle de la contrainte étudiée) et lorsque R^2 est proche de 1. Ces erreurs globales peuvent être estimées à partir de l'erreur commise sur les échantillons utilisés afin de construire les surfaces de réponse. Mais ces estimations seront biaisées car tous ces échantillons ont participé à l'établissement du modèle. Pour évaluer les erreurs *RMSE* et R^2 de manière plus fiable, il est nécessaire d'utiliser d'autres échantillons qui n'ont pas servi à la construction du modèle. Plus le nombre n_t d'individus de l'échantillon de test est grand, et plus ces estimations sont précises. En effet la rapidité de convergence est proportionnelle à $\theta(\frac{1}{\sqrt{n_t}})$. Dans notre étude nous prenons $n_t = 1000$. Les erreurs déterminées pour chaque surface de réponse à partir de ces échantillons sont données dans le tableau 11.2.

Nous pouvons constater que les coefficients de corrélation R^2 sont supérieurs à 0,9 soit plus de 90 % de la variation des réponses est expliquée par

Contrainte	Erreur nulle pour $R^2 = 1$	Erreur nulle pour $RMSE = 0$
Altitude minimale durant l'ascension	0,97	0,12
Altitude minimale de croisière	0,93	0,16
Altitude minimale avant tremblement aérodynamique	0,91	0,19
Altitude minimale lorsqu'un des moteurs est en panne	0,97	0,12

TABLE 11.2: Critère de précision mesuré pour chaque surface de réponse lorsque les incertitudes de modélisation sont prises en compte

les variables de conception ($S_{wing}, SLST$), moins de 10 % est inhérente aux modèles de substitution. D'autre part les erreurs $RMSE$ sont inférieures à 0,2, la dispersion des données réelles autour des modèles de substitution est donc faible. Pour cette étude menée en phase conceptuelle les surfaces de réponses sont considérées comme étant suffisamment bien ajustées aux données observées (obtenues par simulations) et sont ainsi validées.

Nous souhaitons maintenant prendre en compte les incertitudes affectant les paramètres de conception afin d'évaluer leur impact sur la variabilité des performances de l'avion. Pour ce faire, nous donnons dans la section suivante la formulation du problème d'étude conceptuelle avion qui permet de prendre en compte les incertitudes affectant les variables de conception et les modèles.

11.2 PROBLÈME CONCEPTUEL AVION SOUS INCERTITUDES DE MODÉLISATION ET DE VARIABLES DE CONCEPTION

Comme vu dans le chapitre 10.2.3 une source potentielle d'incertitudes pouvant affecter les sorties du modèle résulte de l'inexactitude des variables de conception, i.e. variables d'optimisation. Ainsi dans cette section nous prenons en compte les incertitudes sur les variables de conception : la surface de voilure S_{wing} et la poussée des moteurs au niveau de la mer $SLST$. L'optimisation est maintenant effectuée sur les moyennes à assigner aux deux variables de conception. Le problème probabiliste à résoudre est alors le suivant :

$$\begin{cases} \text{Min}_{S_{wing}, SLST} E[MTOW(E(S_{wing}), E(SLST), \delta)] & \text{avec } S_{wing}, SLST \in S \\ COV(MTOW(E(S_{wing}), E(SLST), \delta)) \leq \alpha \\ Prob(g_i(E(S_{wing}), E(SLST), \delta) \leq 0) \geq P_i^g & i = 1, \dots, 7 \end{cases} \quad (11.9)$$

la variable δ représente les incertitudes qui affectent à la fois les paramètres de conception et les modèles disciplinaires. Nous considérons ici une incertitude δ additive, c'est à dire $f(x, \delta) = f(x) + \delta$ où δ est une variable aléatoire suivant une loi normale dont l'écart-type varie selon le point courant du processus d'optimisation (cf. méthode de l'écart-type variable exposée dans la section 10.2.2). Les surfaces de réponse présentées dans la section précédente

sont reconstruites afin de prendre en compte les incertitudes impactant les variables de design. Les erreurs $RMSE$ et R^2 déterminées pour chacune des surfaces de réponse sont données dans le tableau 11.3. Les mesures de précision sont calculées à partir de 1 000 échantillons (la taille de l'échantillon est grande afin de déterminer l'erreur le plus précisément possible).

Contrainte	Erreur nulle pour $R^2 = 1$	Erreur nulle pour $RMSE = 0$
Altitude minimale durant l'ascension	0,94	0,19
Altitude minimale de croisière	0,91	0,18
Altitude minimale avant tremblement aérodynamique	0,83	0,21
Altitude minimale lorsqu'un des moteurs est en panne	0,95	0,14

TABLE 11.3: Critère de précision mesuré pour chaque surface de réponse lorsque les incertitudes affectant les modèles et les paramètres de conception sont prises en compte

Nous pouvons constater que les coefficients de corrélation R^2 sont supérieurs à 0,9 pour les contraintes suivantes : l'altitude minimale durant l'ascension, l'altitude minimale de croisière et l'altitude minimale lorsqu'un des moteurs est en panne. Ainsi, plus de 90 % de la variation des réponses est expliquée par les variables de conception (S_{wing} , $SLST$). Concernant l'altitude minimale avant tremblement aérodynamique, l'erreur R^2 démontre que l'ajustement du modèle aux valeurs observées est moins précis. Néanmoins comme nous le verrons dans les résultats exposés au chapitre suivant, cette contrainte n'est pas active, elle n'a donc pas de répercussion sur l'optimum robuste et fiable du problème. L'erreur $RMSE$ est également plus importante pour cette contrainte. Concernant les autres contraintes l'erreur $RMSE$ est inférieure à 0,2, la dispersion des données réelles autour des surfaces de réponse est donc faible. Les modèles de substitution sont jugés comme étant bien ajustés aux données observées (obtenues par simulations) et sont ainsi validées. Si nous comparons les critères de précision obtenus lorsque nous prenons en compte les incertitudes de conception (cf. tableau 11.3) et lorsque nous ne les prenons pas en compte (cf. tableau 11.2), nous pouvons constater que les erreurs sont plus importantes dans le cas où nous tenons compte des incertitudes affectant les variables de conception. Les résultats sont donc cohérents. En effet, la prise en compte des incertitudes de paramètres de conception engendre un bruit supplémentaire. La variation est donc plus importante et les surfaces de réponse construites sont moins précises. On note qu'il est possible de diminuer les erreurs $RMSE$ et R^2 en travaillant sur les données initiales du problème ou en affinant les modèles de substitution (nombre de points dans le plan d'expériences). Cependant, comme mis en évidence sur la figure 11.3, à partir d'un certain seuil (au delà de 35 points), une augmentation du nombre de points définissant le plan d'expériences entraîne une faible amélioration de la précision pour une hausse considérable

du temps. L'amélioration des données initiales peut également entraîner un coût important, notamment lorsqu'il est nécessaire de mettre en place des campagnes d'essais afin d'améliorer la connaissance.

Maintenant que les formulations des problèmes d'optimisation sous incertitudes ont été exposées, nous les résolvons et présentons les résultats ainsi obtenus dans le chapitre suivant.

RÉSOLUTION DIRECTE DU PROBLÈME D'OPTIMISATION

Dans ce chapitre notre nouvelle méthodologie de modélisation et de propagation des incertitudes est appliquée à l'étude conceptuelle avion de type moyen-courrier afin de déterminer une conception robuste et fiable. Le problème d'optimisation sous incertitudes est tout d'abord résolu par le biais d'une méthodologie classique en double boucle : à chaque itération du processus d'optimisation déterministe une étude probabiliste utilisant directement les simulations de Monte-Carlo est effectuée. Afin de limiter le coût de simulation les contraintes probabilistes sont ensuite approximées par des surfaces de réponse permettant de prendre en compte l'aspect aléatoire. Les divers résultats ainsi obtenus sont présentés dans cette section.

12.1 OPTIMISATION EN DOUBLE BOUCLE

Le problème d'optimisation sous incertitudes de modélisation formulé dans l'équation 11.1 est tout d'abord considéré. Les variables incertaines sont celles déterminées par le biais de l'analyse de sensibilité (section 10.2.1) et sont modélisées grâce à la nouvelle méthodologie adaptative que nous avons développée et présentée dans la section 10.2.2. Ce problème d'optimisation est résolu par une procédure en double boucle : en chaque point courant du processus d'optimisation une étude de fiabilité et de robustesse est effectuée. En raison du temps de calcul impliqué, les tirages de Monte-Carlo permettant de déterminer les caractéristiques aléatoires des variables incertaines, sont limités à 500 tirages (nécessitant approximativement 24 heures calcul). Pour ce nombre de simulations la loi des grands nombres prédit une erreur sur l'estimation de la probabilité de succès (contraintes de fiabilité) inférieure à 5 % :

$$\frac{P_s}{\sqrt{n}} \leq 5\% \quad (12.1)$$

Cette erreur est considérée comme étant acceptable à ce stade de la conception par Airbus. En effet, pour une probabilité de succès souhaitée supérieure à 90%, une erreur introduite par les tirages de Monte-Carlo inférieure à 5% n'entraîne pas une violation des contraintes de fiabilité.

Afin de résoudre le problème d'optimisation multidisciplinaire sous incertitude de modélisation, l'algorithme de recherche Pattern Search [125]

est utilisé. Les résultats de l'optimisation fiabiliste et robuste sont donnés ci-dessous et illustrés sur la figure 12.1 :

$$\begin{cases} MTOW = 76703 \text{ kg} \\ S_{wing} = 136,71 \text{ m}^2 \\ SLST = 93181 \text{ N} \end{cases} \quad (12.2)$$

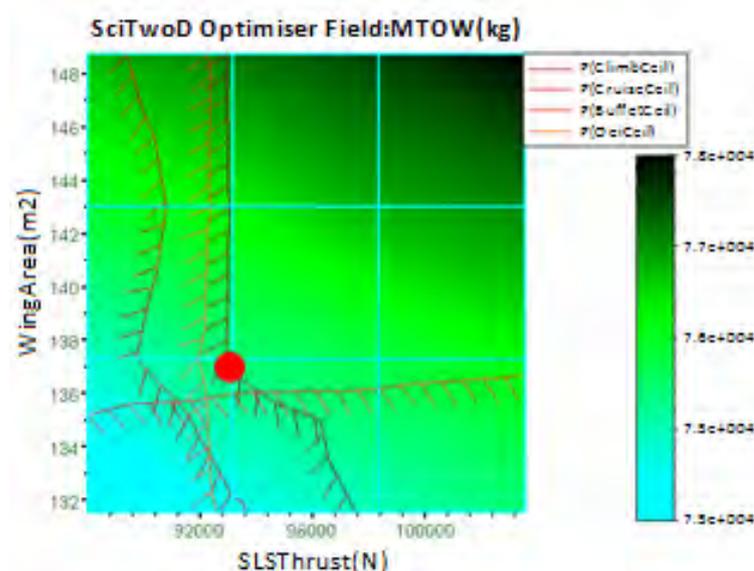


FIGURE 12.1: Résultats de l'optimisation probabiliste sous incertitude de modélisation, optimisation en double boucle

Nous rappelons que le dégradé de couleur en arrière plan représente la masse maximale de l'avion au décollage $MTOW$: plus l'arrière plan est foncé plus la masse de l'avion au décollage est importante. Tout d'abord, nous pouvons constater que les contraintes sont moins régulières comparées aux résultats de l'optimisation déterministe (voir figure 9.5). Le bruit est dû aux tirages de Monte-Carlo et à la taille de l'échantillonnage. Cependant, même si les contraintes obtenues sont approximées, elles sont relativement proches de la réalité. En effet, la variabilité liée au nombre d'expériences de Monte-carlo est faible (inférieure à 5%). La contrainte active est l'altitude minimale durant l'ascension. On note que la contrainte de robustesse imposée sur la fonction objectif n'est pas active. La résolution du problème stochastique a permis d'évaluer les marges supplémentaires nécessaires pour assurer les niveaux de robustesse et de fiabilité requis (augmentation de la masse) néanmoins le temps de calcul engendré est important. Il est d'environ 24 heures sur un poste de travail personnel.

Des algorithmes permettant de déterminer rapidement le niveau de fiabilité atteint par la performance d'un système supposent que la fonction de

performance (traduisant le scénario de défaillance, cf. 6.1.3) est disponible sous forme explicite dans l'espace des variables aléatoires de base X_i . Cette condition est satisfaite uniquement pour quelques problèmes mécaniques linéaires ou si des approximations sont faites. Dans le cas de la phase conceptuelle avion, les expressions des fonctions de performance en fonction des variables X_i ne sont pas disponibles explicitement. Les marges de sécurité ne peuvent donc être obtenues que sous forme implicite. Comme vu dans cette section, notre alternative est la technique de simulation directe (tirages de Monte-Carlo). Son défaut principal est le coût de calcul. Cela peut être contourné en procédant à une parallélisation des calculs. Une autre alternative est la méthode d'échantillonnage par tirages d'importance, qui permet de réduire significativement le temps de calcul. Cette méthode consiste à utiliser d'abord la méthode FORM afin de déterminer le point de conception P^* . Une fois P^* déterminé, une simulation limitée à des tirages au voisinage de ce point est réalisée pour améliorer l'évaluation de la probabilité de défaillance obtenue par la méthode FORM. Ainsi, elle permet de corriger l'erreur générée par l'approximation à l'ordre 1 de la surface d'état limite dans l'espace des variables gaussiennes centrées réduites. Si la courbure de l'état limite au point P^* est connue, alors une correction asymptotique de l'approximation FORM est possible. On note qu'une transformation de la surface de l'état limite par une surface quadratique est appelée méthode SORM (approximation quadratique) [56, 103].

Une autre possibilité est l'utilisation d'une approximation de l'indice de fiabilité par surface de réponse comme présentée dans la section 11.1. Nous remplaçons ainsi les fonctions de performance implicites par une fonction explicite (modèle quadratique) construite à partir des valeurs numériques obtenues par le biais de simulations sur le modèle. Ces modèles de substitution permettent de prédire la fiabilité des contraintes quelle que soit la localisation des variables de conception dans l'espace de recherche (ce qui n'est pas le cas des approximations FORM et SORM). Les résultats engendrés par les modèles de substitution sont présentés et analysés dans la section suivante.

12.2 ACCÉLÉRATION PAR MODÈLES DE SUBSTITUTION

Afin de limiter le temps de calculs et lisser le bruit engendré par les tirages de Monte-Carlo, les surfaces de réponse se substituent aux contraintes. Cette méthode est moins précise qu'une propagation des incertitudes par simulations qui reflète mieux la réalité mais elle peut être parfois nécessaire lorsque un trop grand nombre de variables de conception et/ou de paramètres aléatoires sont pris en compte. Le problème d'optimisation conceptuel avion est résolu dans un premier temps en considérant les incertitudes de modélisation puis en intégrant également les incertitudes impactant les paramètres de conception.

12.2.1 Optimisation sous incertitudes de modélisation

Le problème d'optimisation conceptuel avion sous incertitudes donné par l'équation 11.1 est résolu en substituant les contraintes fiabilistes par des surfaces de réponse et en utilisant l'algorithme Pattern Search. L'illustration graphique de l'optimum ainsi déterminé et des contraintes actives est donnée sur la figure 12.2. Les valeurs numériques à l'optimum sont les suivantes :

$$\begin{cases} MTOW = 76044 \text{ kg} \\ S_{wing} = 133,4 \text{ m}^2 \\ SLST = 92094 \text{ N} \end{cases} \quad (12.3)$$

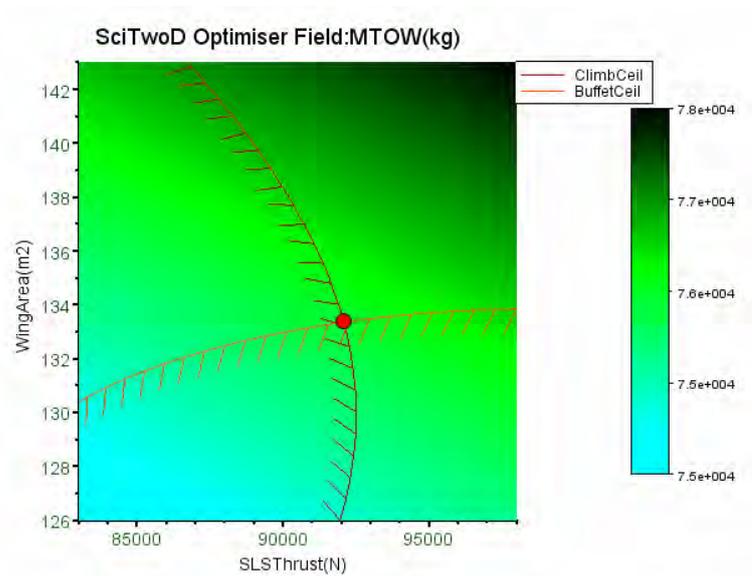


FIGURE 12.2: Résultats de l'optimisation sous incertitude de modélisation, modèles de substitution

On note que seules les contraintes actives sont représentées sur la figure (l'altitude minimale durant l'ascension et l'altitude minimale de croisière), on restreint ainsi les calculs nécessaires à la détermination des modèles de substitution. Lorsque nous comparons les résultats de l'optimisation déterministe sans prise en compte de marges de sécurité à ceux obtenus pour l'optimisation probabiliste (cf. tableau 12.1), nous constatons une augmentation de la fonction objectif : la masse de l'avion au décollage est plus importante dans le cas de l'optimum sous incertitudes. Il s'agit d'une tendance normale lorsqu'on met en place un problème fiabiliste et/ou robuste : la présence de marges dans l'optimisation orientée fiabilité a pour effet de déplacer l'optimum vers l'espace conservatif. En effet, nous souhaitons prendre en compte les incertitudes présentes dans notre problème afin de concevoir un système à la fois fiable et robuste, l'optimum doit donc être modifié. Le déplacement de l'optimum dans l'espace conservatif génère une augmentation

de la masse de l'avion au décollage d'environ 0,83 % comparé à l'optimum déterministe sans marge de sécurité. Cependant si nous choisissons de résoudre le problème d'optimisation conceptuelle avion en faisant appel à la formulation déterministe sans marge de sécurité, le concepteur ne contrôle pas le risque engendré par les incertitudes. Le tableau 12.1 permet de mettre en évidence le fait que l'approche déterministe mène à une conception non fiable. En effet les probabilités que les contraintes actives à l'optimum déterministes soient satisfaites sont de l'ordre de 50 %. Ces probabilités ont été obtenues par le biais d'expériences de Monte-Carlo, effectuées au voisinage de l'optimum déterministe et en considérant les mêmes variables aléatoires que celles de l'optimisation probabiliste (incertitudes déterminées lors de l'analyse de sensibilité 10.2.1). De telles valeurs de probabilité de succès atteintes par les contraintes ne sont pas satisfaisantes car elles impliqueraient dans de nombreux cas des itérations de reconception. En revanche, dans le cas de l'optimisation sous incertitudes les probabilités que les contraintes actives ne soient pas violées sont de l'ordre de 90 % ou 95 %. Nous constatons donc ici qu'il est préférable de choisir l'optimisation sous incertitudes. L'identification des risques et la quantification de l'impact des incertitudes sur les solutions dès les premières étapes de la conception permettent ainsi d'épargner un temps et coût de travail dans les phases suivantes de la conception. D'autre part en comparaison à l'optimisation déterministe incluant les incertitudes grâce à des marges de sécurité constantes, pour un niveau de fiabilité équivalent (cf. tableau 12.1) notre méthodologie permet de minimiser la masse de près de 15,5%. Nous mettons donc en évidence la performance de notre approche.

	Optimisation déterministe sans marge de sécurité	Optimisation déterministe avec marges de sécurité constantes	Optimisation sous incertitude variable
<i>MTOW</i>	75 415 kg	90 762 kg	76 044 kg
<i>S_{wing}</i>	129,35 m ²	222,1 m ²	133,4 m ²
<i>SLST</i>	89 474 N	129 010 N	92 094 N
Probabilités	$Prob [g_{Cclb}(S_{wing}, SLST, \delta) \leq 0] = 50\%$	$Prob [g_{Cclb}(S_{wing}, SLST, \delta) \leq 0] = 95\%$	$Prob [g_{Cclb}(S_{wing}, SLST, \delta) \leq 0] =$
dde fiabilité	$Prob [g_{Cbuf}(S_{wing}, SLST, \delta) \leq 0] = 50\%$	$Prob [g_{Cbuf}(S_{wing}, SLST, \delta) \leq 0] = 90\%$	$Prob [g_{Cbuf}(S_{wing}, SLST, \delta) \leq 0] =$

TABLE 12.1: Comparaison entre les résultats de l'optimisation déterministe et l'optimisation probabiliste

Lorsque nous comparons les résultats obtenus par les deux méthodes de propagation : tirages de Monte-Carlo (cf. figure 12.1) et surfaces de réponse (cf. figure 12.2), nous pouvons observer que la mise en place des modèles de substitution a permis de lisser les contraintes et d'obtenir des fonctions de performance continuellement dérivables. La résolution de tels problèmes par des algorithmes standards (algorithme à gradient par exemple) est donc possible mais au prix d'une perte d'information. En effet, les modèles réduits

permettent de pallier au temps de calcul important engendré par les tirages de Monte-Carlo mais ils constituent une approximation. L'optimum probabiliste déterminé grâce à l'introduction de surfaces de réponse doit donc être validé en le comparant à celui obtenu suite à la propagation des incertitudes par tirages de Monte-Carlo. Cette comparaison est effectuée dans le tableau 12.2. Nous pouvons constater que l'erreur relative entre les deux méthodologies de propagation est faible : les surfaces de réponse sont moins précises mais sont proches du phénomène physique réel (obtenu par tirages Monte-Carlo). Ainsi, les résultats obtenus grâce à la propagation des incertitudes par tirages de Monte-Carlo permettent de valider l'optimum déterminé par le biais des modèles de substitution. Les surfaces de réponse entraînent une perte d'information minimale mais constituent une approximation de la réalité nécessaire pour optimiser. Sur un poste d'ordinateur personnel 24 heures de calcul sont nécessaires afin d'effectuer la propagation par tirages de Monte-Carlo contre 8 heures par le biais des surfaces de réponse.

	Tirages de Monte-Carlo	Surfaces de réponse	Erreur relative entre les deux méthodes de propagation
<i>MTOW</i>	76 703 kg	76 044 kg	0,86 %
<i>S_{wing}</i>	136,71 m ²	133,4 m ²	2,42 %
<i>SLST</i>	93 181 N	92 094 N	1,16 %

TABLE 12.2: Comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes de propagation : tirages de Monte-Carlo et surfaces de réponse

Nous évaluons maintenant les perturbations engendrées sur les performances de l'avion lorsque nous introduisons dans l'étude conceptuelle les incertitudes de modélisation et de variables de conception.

12.2.2 Optimisation sous incertitudes de modélisation et de variables de conception

Dans cette section nous prenons en compte les incertitudes de modélisation ainsi que celles affectant les variables de conception du système. Pour ce faire, nous résolvons le problème d'optimisation probabiliste défini par l'équation 11.9. Nous rappelons que les contraintes fiabilistes sont remplacées par des surfaces de réponse. L'illustration graphique de l'optimum ainsi déterminé est donnée sur la figure 12.3. Les valeurs numériques à l'optimum sont les suivantes :

$$\begin{cases} MTOW = 76133 \text{ kg} \\ S_{wing} = 133,5 \text{ m}^2 \\ SLST = 93251 \text{ N} \end{cases} \quad (12.4)$$

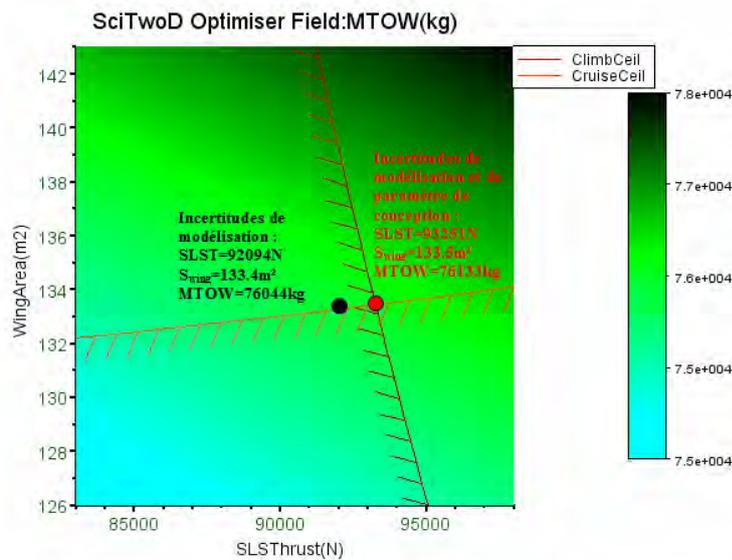


FIGURE 12.3: Comparaison entre les résultats de l'optimisation probabiliste avec ou sans prise en compte des incertitudes affectant les variables de conception

On note que seules les contraintes actives sont représentées sur la figure 12.3. La prise en compte des incertitudes sur les paramètres de conception a pour effet de déplacer l'optimum dans l'espace conservatif (le poids augmente d'environ 0,12 % en comparaison à l'optimisation sous incertitudes de modélisation) ce qui entraîne l'introduction de marges de sécurité supplémentaires afin d'assurer la fiabilité du système. Néanmoins, lorsque nous comparons les résultats des optimisations probabilistes avec et sans prise en compte des incertitudes sur S_{wing} et $SLST$ (cf. figure 12.3) nous constatons que les incertitudes affectant ces variables d'optimisation ont un effet relativement faible sur le système optimal. Nous pouvons également remarquer que l'impact des incertitudes de variables de conception n'est pas le même sur les deux contraintes actives : une des contraintes est beaucoup plus sensible aux incertitudes que l'autre. En effet l'altitude minimale durant l'ascension C_{clb} devient plus critique : la translation vers le domaine conservatif est importante (cf. figure 12.3). En revanche, l'altitude minimale avant tremblement aérodynamique n'est que faiblement modifiée.

Ces résultats illustrent donc qu'afin d'assurer la robustesse et la fiabilité de l'avion il est important de prendre en compte les incertitudes de modélisation durant la phase conceptuelle avion. Les incertitudes sur les paramètres de conception ont un impact moindre.

12.3 ANALYSES

Nous avons abordé dans les chapitres précédents le problème de l'optimisation sous incertitudes appliquée à la phase conceptuelle avion. Lors de l'étude conceptuelle des avions nous manipulons des modèles de basse fidé-

lité qui sont caractérisés par des incertitudes de modélisation significatives. Dans nos travaux, nous avons proposé une nouvelle approche afin de modéliser ces incertitudes. Celle-ci permet de mettre à jour la distribution des incertitudes à chaque itération du processus d'optimisation à partir d'une base de données historiques et ainsi mieux refléter le phénomène physique réel. Cette quantification adaptative permet en particulier de prendre en compte deux phénomènes :

- les sorties des modèles sont soumises à une incertitude variable dépendant de la région dans laquelle le modèle est analysé (la quantité de données disponibles varie).
- certaines régions sont moins bien prédites par le modèle de régression que d'autres indépendamment du nombre de données accessibles dans la base de données historiques.

La modélisation ajustable de l'incertitude ainsi développée est basée sur une combinaison de la prédiction de la variance de la régression et sur le calcul des moindres carrés dans une fenêtre dite gaussienne (semblable aux noyaux de lissage).

Nous avons ensuite mis en place la formulation probabiliste de l'étude conceptuelle avion afin de déterminer une conception optimale fiable et robuste. Ce problème est dans un premier temps résolu par le biais d'une méthodologie classique : évaluation de la fiabilité du système à chaque itération du processus d'optimisation (méthode dite en double boucle). Cependant une telle procédure entraîne des temps de calcul importants. Ce temps peut-être minimisé lorsque des calculateurs performants sont employés (parallélisation des calculs), néanmoins dans l'hypothèse où un plus grand nombre de variables de conception et/ou de paramètres incertains sont pris en compte, la propagation des incertitudes par tirages de Monte-carlo devient difficile voir impossible à mettre en oeuvre (malgré l'utilisation de calculateurs performants). Il devient alors primordial de mettre en place des méthodologies subsidiaires. Afin de pallier ce problème nous proposons dans nos travaux de remplacer les contraintes probabilistes par des modèles de substitution (les indices de fiabilité sont prédits par les surfaces de réponse quadratiques) construits à partir de simulations de Monte-Carlo. La résolution du problème par le biais d'une telle méthode permet de diviser le temps de calcul par trois, l'erreur engendrée par les modèles de substitution est quant à elle faible.

Notre nouvelle méthodologie de modélisation et de propagation des incertitudes a permis d'obtenir de bons résultats dans le cadre de l'étude conceptuelle avion. En effet, la propagation d'incertitudes ajustables à l'information disponible permet au concepteur d'obtenir une information précise sur l'incertitude en tout point de l'espace. Jusqu'alors les incertitudes étaient introduites dans la conception par le biais de marges de sécurité constantes. Cependant, l'utilisation de coefficients de sécurité empiriques ne garantissait pas une conception optimale pour le niveau de fiabilité souhaité (les systèmes étaient trop conservatifs). En comparaison à cette étude détermine notre nouvelle approche a permis une réduction de la masse de 15,5 %, elle assure également une fiabilité supérieure à 90 % du système optimal.

Suite à la résolution probabiliste de l'étude conceptuelle avion nous avons montré que les incertitudes de modélisation ont un impact important sur la localisation du point optimal. En comparaison à l'optimisation déterministe standard (sans marges de conception), les résultats présentent une différence non négligeable concernant les variables de conception. Une augmentation de la masse maximale de l'avion au décollage a également été constatée. Néanmoins pour une augmentation de l'ordre de 0,83 %, la fiabilité et la robustesse du système conçu sont assurées, ce qui n'est pas le cas de l'optimum déterministe qui s'avère être non fiable et sensible aux petites variations des paramètres. Les incertitudes sur les paramètres de conception ont également été prises en compte dans notre étude cependant nous avons mis en évidence le fait qu'elles affectent relativement peu le système.

Notre méthode a été appliquée à la conception avion avant-projet toutefois elle est généralisable. En effet dès lors où des bases de données sont accessibles notre approche de modélisation probabiliste peut-être appliquée quel que soit le problème d'optimisation. Quant à la méthodologie de propagation des incertitudes par le biais de surfaces de réponse, le nombre de variables de conception doit rester relativement faible.

En remarque finale, les travaux présentés dans les chapitres précédents ont été menés en collaboration avec Airbus. L'étude conceptuelle a fait l'objet d'analyses et de développements qui ont donné lieu au code de calcul [SIMCAD](#) (code complexe typiquement utilisé par les avionneurs). Ainsi un temps de formation important a été nécessaire afin de : comprendre le vocabulaire employé en conception avion (de nombreuses abréviations et termes spécifiques sont utilisés), s'appropriier le code de calcul SIMCAD, prendre en compte la multidisciplinarité du problème et comprendre comment celle-ci est gérée au sein du code (boucle de rétroaction) pour parvenir par exemple à intégrer la méthode de propagation dans le code.

Suite à ces travaux de modélisation et de propagation des incertitudes, nous allons intégrer le problème à un cadre d'optimisation multi-agent [72]. Nous souhaitons en effet améliorer le temps de calcul dans l'optique de prendre en compte un plus grand nombre de variables de conception.

RÉSOLUTION PAR AGENTIFICATION

Malgré la mise en place de modèles de substitution, le temps de calcul nécessaire pour résoudre un problème d'optimisation probabiliste peut s'avérer important (notamment lorsque le problème implique un grand nombre de variables de conception et de variables aléatoires). De nouvelles approches informatiques d'optimisation ont été développées afin de traiter des problèmes industriels de grande taille. En effet aujourd'hui les systèmes sont de plus en plus complexes et les méthodes de conception déployées font intervenir différents aspects : multi-niveaux, multi-disciplines, prise en compte des incertitudes, nombre de variables et de modèles très élevé. Les difficultés de résolution de ces problèmes d'optimisation ont ainsi motivé le développement de nouvelles méthodes basées sur des systèmes multi-agent auto-adaptatifs. Cette motivation a donné lieu à la mise en place du projet ANR [ID4CS](#) dans lequel s'inscrit cette thèse dont le but est de concevoir un environnement de modélisation et de simulation par agentification pour la conception de systèmes complexes. L'approche multi-agent développée par l'[IRIT](#) (laboratoire porteur du projet) est notamment proposée pour la résolution de problèmes de conception préliminaire avion, problèmes auxquels nous nous intéresserons également dans cette section. Cependant cette méthode a jusqu'alors été développée uniquement dans un contexte déterministe, et il s'avère donc nécessaire d'étendre cette approche à la résolution de problèmes sous incertitude afin de garantir la fiabilité et la robustesse des systèmes ainsi conçus. Nos travaux tentent de donner une première réponse à cette question en proposant une méthodologie de prise en compte des incertitudes dans un problème d'optimisation multi-agent. Afin de limiter le temps de calculs et d'augmenter la performance de notre méthode nous combinons l'approche multi-agent à une méthode d'optimisation séquentielle qui permet notamment de diminuer le nombre d'analyses de fiabilité du système.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la première section, nous présenterons l'architecture du problème de phase conceptuelle avion adaptée au formalisme multi-agent. Nous nous intéresserons dans la deuxième section à la méthode globale d'optimisation fiabiliste séquentielle basée sur une unique boucle de calculs : dans un cycle, une optimisation déterministe est résolue puis une étude probabiliste basée sur la détermination de la fiabilité des contraintes est menée. Les contraintes violées sont décalées grâce à l'introduction de coefficients de sécurité adaptatifs. Dans la section [13.3](#), nous appliquerons la méthodologie de gestion des incertitudes ainsi développée à

un cas test académique inspiré d'Alexandrov [4] étendu au cas probabiliste. Cette méthode sera ensuite employée afin de résoudre un cas test industriel avion (ATR 72). Enfin les conclusions et les perspectives de ce chapitre seront présentées dans la section 13.4.

13.1 ARCHITECTURE POUR LA RÉOLUTION DU PROBLÈME

Pour permettre la calibration de la performance de l'agentification d'un problème d'optimisation multidisciplinaire sous incertitude, nous étudions un avion au stade conceptuel dont la description est donnée par des formules analytiques (ATR 72). Ce cas test nous permet de comparer et de valider avec précision les résultats de l'optimisation sous incertitude résolue par un système multi-agent. L'architecture de la méthodologie développée est générique. Ainsi, notre approche pourra être étendue dans le futur à des modèles quelconques avant-projet (formulations implicites).

Dans cette section l'étude conceptuelle (inspirée de [115]) concerne les avions de transport à turbopropulseurs (par exemple ATR 72). Ce problème fait intervenir les variables de conception suivantes :

LE RATIO PUISSANCE/MASSE : $\frac{P_{TO}}{m_{MTO}} = \frac{V_{CR}g}{\frac{P_{CR}}{P_{TO}} E \eta_{CR}}$ où V_{CR} est la vitesse de croisière, g est la pesanteur, E est la finesse aérodynamique durant la phase de croisière, η_{CR} est le rendement de l'hélice pendant la phase de croisière et $\frac{P_{CR}}{P_{TO}}$ est le ratio de la puissance d'un moteur en croisière sur sa puissance au décollage. Des équations permettant de calculer ce ratio ont été étudiées et ajustées aux données disponibles. Une formulation est ainsi recommandée : $\frac{P_{CR}}{P_{TO}} = AM^m \sigma^n$ où σ est la densité, M le nombre de Mach et les coefficients A, m, n sont des constantes.

LA CHARGE ALAIRE : $\frac{m_{MTO}}{S_W} = \frac{C_L \rho_0 V_{CR}^2 \sigma(H)}{2g}$ avec C_L le coefficient de portance pendant la phase de croisière, ρ_0 la masse volumique, V_{CR} la vitesse de croisière, g la pesanteur et $\sigma(H)$ la densité relative à l'altitude H .

L'objectif du problème d'optimisation en phase conceptuelle est à nouveau de minimiser la masse de l'avion au décollage m_{MTO} et d'obtenir un ratio puissance/masse ($\frac{P_{TO}}{m_{MTO}}$) le plus petit possible, ainsi qu'une charge alaire ($\frac{m_{MTO}}{S_W}$) la plus grande possible. La masse de l'avion au décollage dépend des paramètres de conception :

$$m_{MTO} = \frac{m_{PL}}{1 - \left(1 - m_{ff,std} m_{ff,clb} m_{ff,res} m_{ff,des} e^{-\frac{t_{loiter}}{B_s} \frac{P_{TO}}{m_{MTO}} C \sqrt{\frac{m_{MTO}}{S_W}}} \right) - \frac{m_{OE}}{m_{MTO}}} \quad (13.1)$$

avec m_{PL} la charge utile, $m_{ff,std}$ la fraction combustible pour un vol standard, $m_{ff,clb}$ la fraction combustible durant l'ascension, $m_{ff,res}$ la fraction combustible pour une distance de vol supplémentaire, $m_{ff,des}$ la fraction combustible durant la descente, t_{loiter} le temps de vol en attente, B_s le facteur de Bréguet durant la croisière et C un coefficient constant défini pour la mission donnée.

Le problème d'optimisation déterministe est ainsi formulé de la façon suivante :

$$\begin{cases} \text{Min}_{\frac{m_{MTO}}{S_W}, \frac{P_{TO}}{m_{MTO}}} m_{MTO} \left(\frac{m_{MTO}}{S_W}, \frac{P_{TO}}{m_{MTO}} \right) \\ g_i \left(\frac{m_{MTO}}{S_W}, \frac{P_{TO}}{m_{MTO}} \right) \leq 0 \quad i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (13.2)$$

où les contraintes g_i sont uniquement les contraintes actives : la longueur de piste au décollage et à l'atterrissage ainsi que la vitesse de croisière. Nous donnons ci-dessous le détail des formulations de ces différentes contraintes.

LONGUEUR DE LA PISTE D'ATTERRISSAGE : La longueur de piste d'atterrissage s_{LFL} permet de dimensionner la charge alaire : $\frac{m_{MTO}}{S_W} \leq \frac{k_L \sigma C_{L,max,L} s_{LFL}}{\frac{m_{ML}}{m_{MTO}}}$ où k_L est le facteur de proportionnalité évalué à partir de la base de données de la catégorie d'avion étudiée (dans notre cas un aéronef à turbopropulseurs moyen-courrier) et $C_{L,max,L}$ est le coefficient de portance maximal pendant la phase d'atterrissage.

LONGUEUR DE LA PISTE DE DÉCOLLAGE La longueur de piste de décollage s_{TOFL} mène à un rapport fixe entre les paramètres d'optimisation (ratio puissance/masse et charge alaire) : $\frac{\frac{P_{TO}}{m_{MTO}}}{\frac{m_{MTO}}{S_W}} \geq \frac{k_{TO} V g}{s_{TOFL} \sigma C_{L,max,TO} \eta_{P,TO}}$ où k_{TO} est le facteur de proportionnalité évalué à partir de la base de données de la catégorie d'avion étudiée, $C_{L,max,TO}$ est le coefficient de portance maximal pendant la phase de décollage, $\eta_{P,TO}$ est le rendement de l'hélice pendant le décollage, et $V = \frac{1,2V_{app}}{1,23\sqrt{2}} \sqrt{\frac{C_{L,max}}{C_{L,max,TO}}}$ est la vitesse moyenne durant le décollage avec V_{app} la vitesse d'approche.

VITESSE DE CROISIÈRE : La vitesse de croisière V_{CR} permet également d'obtenir un produit fixe entre les paramètres de conception : $\frac{P_{TO}}{m_{MTO}} \sqrt{\frac{m_{MTO}}{S_W}} \geq V_{CR} \frac{V_{md}}{E \eta_{P,CR} A M^m \sigma^n} \sqrt{\frac{\pi A e \rho_0 \sigma(H) g}{4 E_{max}}}$ où E_{max} est la finesse aérodynamique maximale durant la phase de croisière et V_{md} est la vitesse à traînée minimale.

La figure 13.1 permet de donner une illustration du process d'optimisation. Les flèches représentent l'échange de variables, la boucle modélise quant à elle le processus d'optimisation permettant de déterminer la conception optimale de l'avion.

Nous présentons maintenant l'agentification de l'étude conceptuelle avion (cf. figure 13.2). Chaque entité intervenant dans le processus d'optimisation multidisciplinaire est représentée par un agent. Les disciplines (vitesse de croisière, longueur de piste au décollage et à l'atterrissage, masse de l'avion) sont modélisées grâce aux agents modèles. La sortie de l'agent discipline permettant le calcul de la masse de l'avion au décollage à minimiser est représentée par l'agent objectif. Les contraintes sont encapsulées dans des agents

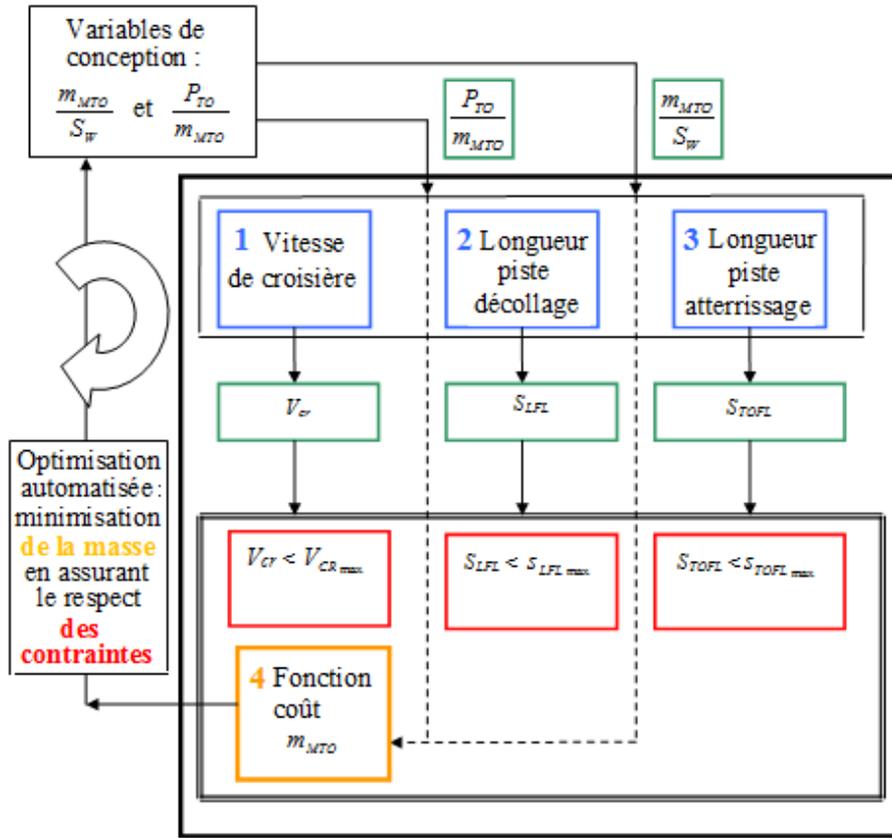


FIGURE 13.1: Description de la phase conceptuelle avion simplifiée

contraintes (vérification que les seuils minimaux imposés sur les sorties des agents disciplines définissant les performances du système sont atteints). Enfin les variables de conception (charge alaire et ratio puissance/masse) ainsi que les variables qui transfèrent une information entre les agents modèles, objectif et contraintes, sont encapsulées dans les agents variables. On note qu'il s'agit de la solution retenue au sein du projet ID4CS, d'autres décompositions étant envisageables.

On détermine dans un premier temps l'optimum de notre problème sans incertitudes par une technique d'optimisation classique (cf. figure 13.3). L'algorithme employé est de type Pattern Search, il permet d'obtenir l'optimum en 110 évaluations de la fonction objectif et des contraintes :

$$\begin{cases} \frac{m_{MTO}}{S_W} = 376 \text{ kg/m}^2 \\ \frac{P_{TO}}{m_{MTO}} = 187 \text{ W/kg} \\ m_{MTO} = 20\,945 \text{ kg} \end{cases} \quad (13.3)$$

La conception optimale de l'avion en phase conceptuelle est ensuite déterminée par le biais de la méthode multi-agent présentée dans la section 7.1.6 (cf. figure 13.4) :

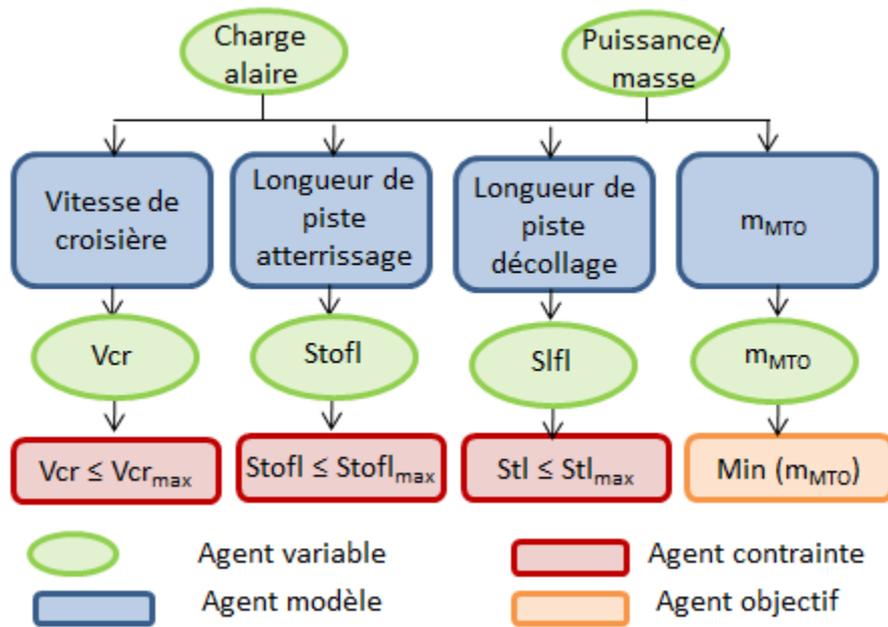


FIGURE 13.2: Agentification de l'étude conceptuelle avion

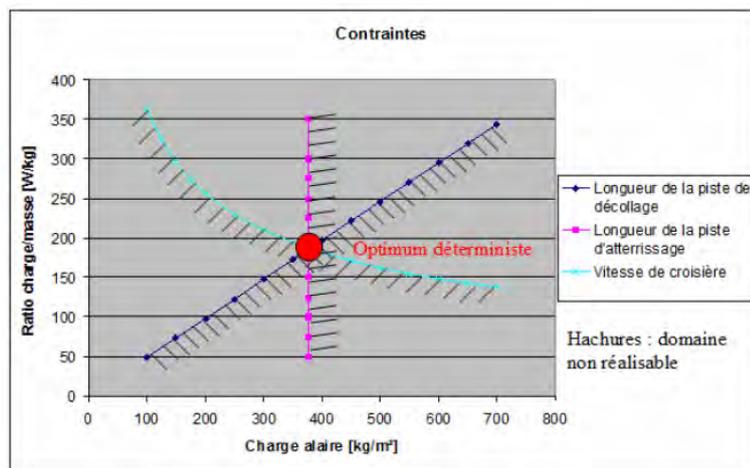


FIGURE 13.3: Optimisation déterministe

$$\begin{cases} \frac{m_{MTO}}{S_W} = 377 \text{ kg/m}^2 \\ \frac{P_{TO}}{m_{MTO}} = 187 \text{ W/kg} \\ m_{MTO} = 20\,948 \text{ kg} \end{cases} \quad (13.4)$$

Ces résultats sont validés par comparaison à ceux de la méthode d'optimisation classique (algorithme Pattern Search cf. tableau 13.1). Les optima obtenus par le biais des deux méthodologies d'optimisation sont proches. Néanmoins on note une différence concernant le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre la convergence. La méthode multi-agent nécessite 42 itérations tandis que l'algorithme d'optimisation classique (Pattern Search)

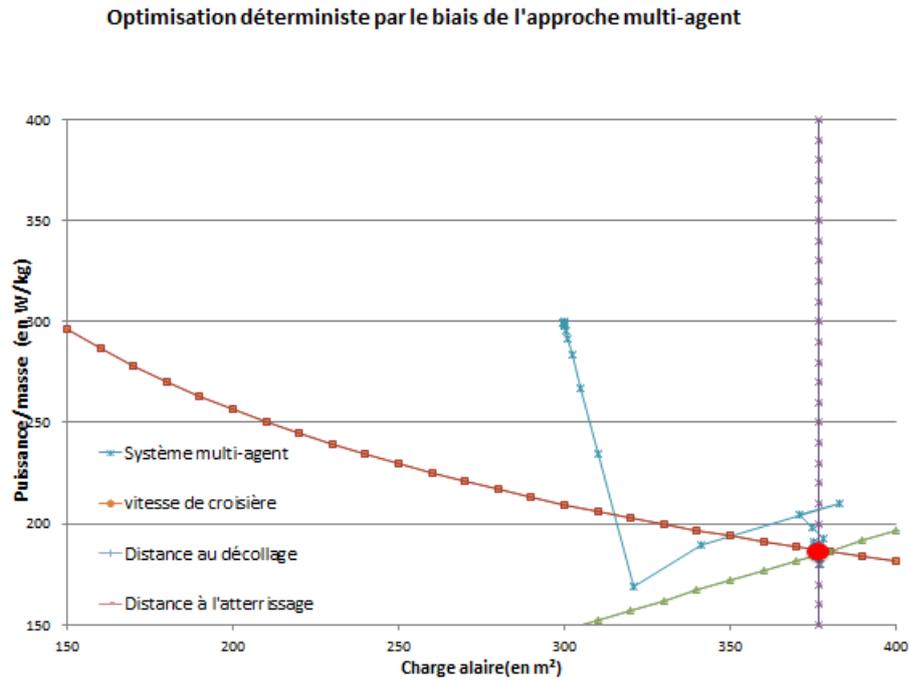


FIGURE 13.4: Résolution de l'étude conceptuelle avion déterministe par la méthode multi-agent

en nécessite 110, soit environ 3 fois plus. La convergence des deux approches est atteinte lorsque la fonction objectif et les contraintes varient en-deçà d'un seuil fixé à $\Delta = 10^{-2}$ durant un nombre d'itérations successives $n_i = 10$.

	Multi-agent	Optimisation classique
Optimum déterministe	$m_{MTO} = 20\,948 \text{ kg}$ $\frac{S_w}{m_{MTO}} = 377 \text{ kg.m}^2$ $\frac{P_{TO}}{m_{MTO}} = 187 \text{ W/kg}$	$m_{MTO} = 20\,945 \text{ kg}$ $\frac{S_w}{m_{MTO}} = 376 \text{ kg.m}^2$ $\frac{P_{TO}}{m_{MTO}} = 187 \text{ W/kg}$
Nombre d'itérations du processus d'optimisation	42	110

Table 13.1: Comparaison des résultats obtenus par le biais de la méthode multi-agent et de l'optimisation classique (algorithme Pattern Search) dans le cas de l'optimisation déterministe

Nous souhaitons maintenant prendre en compte les incertitudes affectant les paramètres de l'étude afin de mettre en place un système ayant statistiquement les meilleures performances. Ainsi, dans la section suivante nous présentons la nouvelle méthodologie de résolution de problèmes d'optimisation multidisciplinaires sous incertitudes par l'approche multi-agent que nous avons développée.

13.2 MÉTHODOLOGIE POUR LA GESTION DES INCERTITUDES DANS UNE APPROCHE MULTI-AGENT

Afin de résoudre un problème d'optimisation probabiliste par le biais d'un système multi-agent auto-adaptatif [72], une méthodologie de propagation des incertitudes doit être développée. Le but de ce chapitre est de proposer une approche pour intégrer le traitement des incertitudes dans un système d'optimisation agentifié. La nouveauté de notre méthode provient notamment de la combinaison du système multi-agent à une méthode d'optimisation séquentielle en boucle unique permettant à la fois de limiter le nombre d'analyses de la fiabilité du système et le temps de calcul. Ainsi dans cette section après avoir présenté un bref état des techniques d'optimisation séquentielles existantes, nous détaillerons le principe de la méthodologie de résolution globale que nous avons développée, puis nous expliquerons comment les incertitudes sont intégrées dans les différents types d'agents. Ce processus d'optimisation probabiliste sera ensuite appliqué à un cas test analytique et enfin à la phase conceptuelle avion.

13.2.1 Quelques généralités sur l'optimisation séquentielle

Les problèmes d'optimisation orientés fiabilité sont couramment basés sur des approches simples constituées de deux boucles reliant les algorithmes de calcul de fiabilité et d'optimisation. Généralement l'optimisation des variables de conception est réalisée par une boucle externe, puis une boucle interne permet d'analyser la fiabilité du système. Cependant ce type d'approche génère un nombre intensif d'évaluations de la fiabilité, engendrant ainsi des temps de calcul importants. La charge de calcul due à l'imbrication de l'étude de fiabilité dans le processus d'optimisation rend la RBDO (« Reliability Based Design Optimization ») conventionnelle impraticable pour les problèmes impliquant un trop grand nombre de variables. Diverses techniques ont été proposées afin de diminuer le temps de calcul. Ces techniques utilisent des formulations de l'optimisation probabiliste équivalentes qui permettent d'approximer la fiabilité du système et/ou de découpler l'optimisation et l'analyse de fiabilité.

Les méthodes RIA [22] (« Reliability Index Approach ») et PMA [129] (« Performance Measure Approach ») sont des stratégies permettant d'évaluer la fiabilité du système sur la base d'approximations du premier ordre. L'approche par indice de fiabilité RIA [22] fait partie des approches classiques en RBDO. Dans cette méthode, la probabilité de défaillance de la fonction de performance est calculée grâce à l'approximation de l'équation 6.17 où l'indice de fiabilité β est le résultat de FORM au point courant du processus d'optimisation. La méthode FORM consiste à rechercher le point le plus probable, voir section 6.1.3. Tu et al. [129] ont proposé quant à eux une méthode basée sur la mesure de la performance (PMA). Dans cette approche, une analyse de fiabilité inverse est effectuée afin de rechercher un point où la valeur de la fonction de performance est positive et la plus faible possible, sur un hyperplan déterminé par l'indice de fiabilité cible β_c (β_c est

fonction de la probabilité de défaillance maximale admissible). Lorsque ces méthodes analytiques ne parviennent pas à donner une estimation précise de la fiabilité, les simulations de Monte-Carlo peuvent être utilisées. Dans les méthodes RIA [22] et PMA [129], les analyses de fiabilité sont effectuées de manière itérative, les boucles de fiabilité et d'optimisation sont imbriquées. Elles nécessitent donc tout de même de multiples évaluations de la performance à chaque itération du processus d'optimisation. Ces dernières années des méthodologies basées sur des approches séquentielles ont été développées afin de limiter les analyses de fiabilité employées dans les approches RIA et PMA. Ces méthodes permettent de découpler l'optimisation déterministe de l'optimisation fiabiliste. Nous présentons maintenant les méthodologies les plus significatives.

Dans les travaux de Xu et al. [23] une approche de programmation séquentielle approximative est mise en oeuvre. La conception optimale est obtenue en résolvant une séquence de sous-problèmes qui se composent généralement d'une fonction objectif approximée, soumise à un ensemble de contraintes elles aussi approximées. Dans chaque sous-problème, les développements de Taylor, permettant de déterminer une valeur approchée des contraintes de fiabilité, sont remplacés par une nouvelle formulation : l'indice de fiabilité approximatif (RIA). Celui-ci est obtenu à partir d'une formule de récurrence sur la base des conditions d'optimalité pour le point de défaillance le plus probable (MPP). L'efficacité de la RBDO est ainsi améliorée grâce à cette méthode séquentielle.

Des recherches ont également mis l'accent sur des méthodes d'optimisation en boucle unique au sein desquelles l'optimisation probabiliste est transformée en une optimisation déterministe. Une méthode d'optimisation séquentielle sous incertitude (SORA, « Sequential Optimization and Reliability Assessment ») a été mise au point par Du et Chen [38] afin de séparer l'analyse de fiabilité du processus d'optimisation. SORA découple l'analyse de fiabilité et l'optimisation en séparant chaque variable de conception aléatoire en un élément de conception déterministe utilisé pour l'optimisation et une composante stochastique utilisée pour l'analyse de fiabilité. Pour chaque cycle, l'optimisation et l'analyse de fiabilité sont découplées l'une de l'autre ; l'évaluation de la fiabilité est effectuée uniquement après la résolution du problème d'optimisation déterministe afin de vérifier la faisabilité des contraintes sous incertitude. Suite à l'étude probabiliste, les contraintes violées (ayant une fiabilité faible) sont décalées vers le domaine de faisabilité en intégrant des coefficients de sécurité dont le calcul est basé sur les informations de fiabilité obtenues au cycle précédent. La méthode mise en place est notamment appliquée à la conception d'un réducteur de vitesse d'un moteur d'avion de type moyen-courrier. Le design du système est rapidement amélioré de cycle en cycle, ainsi que le temps de calcul. Dans l'approche SORA, la sensibilité et la valeur de la contrainte probabiliste au MPP sont obtenues dans le processus de recherche d'information sur la fiabilité par une analyse de fiabilité inverse. Étant donné que l'estimation de la fiabilité et l'optimisation déterministe sont exécutées séquentiellement, l'évaluation des contraintes probabilistes est effectuée lors de l'analyse de fiabilité

mais également au cours de l'optimisation déterministe. Cho. et al. [24] proposent une approche découlant de la méthode SORA. Dans leurs travaux, une approximation convexe est construite en utilisant la sensibilité et la valeur de la contrainte probabiliste au MPP. De ce fait cette méthode nécessite moins d'évaluations de la contrainte probabiliste durant l'optimisation déterministe. D'autres recherches [110, 84] proposent également des formulations dans lesquelles les termes de fiabilité des méthodes RBDO traditionnelles sont remplacés par des fonctions déterministes. Ainsi Mourelatos et al. [84] convertissent la formulation d'optimisation probabiliste en une formulation déterministe et exploitent les conditions de Karush-Kuhn-Tucker à l'optimum. L'approche proposée ne nécessite pas le calcul du point le plus probable (MPP) pour chaque contrainte probabiliste afin d'évaluer la fiabilité, ce qui élimine donc la boucle de fiabilité des méthodes traditionnelles de résolution des problèmes RBDO. Mourelatos et al. démontrent que cette méthode est plus efficace que le découplage de l'optimisation et de l'analyse de fiabilité.

La majorité des méthodes RBDO mentionnées précédemment est basée sur une analyse de fiabilité dont les résultats découlent de la méthode FORM. Bien que la méthode FORM soit une technique courante en fiabilité, l'article [145] met en évidence le fait que cette approche puisse aboutir à un système optimal non fiable ou trop conservateur pour certaines contraintes de fiabilité non linéaires. Dans l'article [145], une méthode directe de découplage est proposée. Les contraintes de fiabilité sont estimées au point de conception par un développement de Taylor du premier ordre. Une optimisation déterministe est ensuite effectuée en utilisant les contraintes de fiabilité estimées, ce qui n'implique pas d'évaluations supplémentaires de la fonction. L'analyse de fiabilité et l'optimisation sont exécutées séquentiellement jusqu'à ce que les résultats de l'optimisation convergent. En raison du découplage la méthode proposée est plus efficace que l'approche RBDO traditionnelle. L'approche proposée ne dépend pas de l'analyse de fiabilité FORM inverse, et peut par conséquent profiter de méthodes d'analyse de fiabilité plus précises en cas de besoin, y compris les méthodes de simulation, conduisant à une plus grande précision et approchant la faisabilité réelle de la solution du problème RBDO.

Dans la prochaine section nous proposons une nouvelle approche qui permet d'associer un processus séquentiel avec une approche multi-agent. L'objectif est de tirer parti de la pertinence d'une stratégie séquentielle en la couplant avec un système multi-agent.

13.2.2 Méthodes d'optimisation séquentielle mises en oeuvre dans le cadre multi-agent

Dans notre étude nous souhaitons mettre en place une méthode performante afin de limiter le temps de calcul nécessaire pour résoudre un problème d'optimisation multidisciplinaire sous incertitude. Lors de la résolution d'un problème d'optimisation probabiliste les calculs sont majoritairement dédiés à l'analyse de fiabilité. Par conséquent, pour améliorer l'effi-

cacité globale de l'optimisation probabiliste nous avons besoin de réduire autant que possible le nombre d'évaluations de la fiabilité. Pour ce faire, nous avons tout d'abord développé une méthode séquentielle à deux niveaux. Puis, nous avons amélioré notre approche en implémentant une méthodologie de résolution séquentielle en boucle unique. Ces deux méthodes sont présentées ci-après :

13.2.2.1 Méthode d'optimisation séquentielle à deux niveaux

Nous mettons en application une première méthode séquentielle à deux niveaux. Un organigramme détaillé de cette méthodologie est exposé figure 13.5.

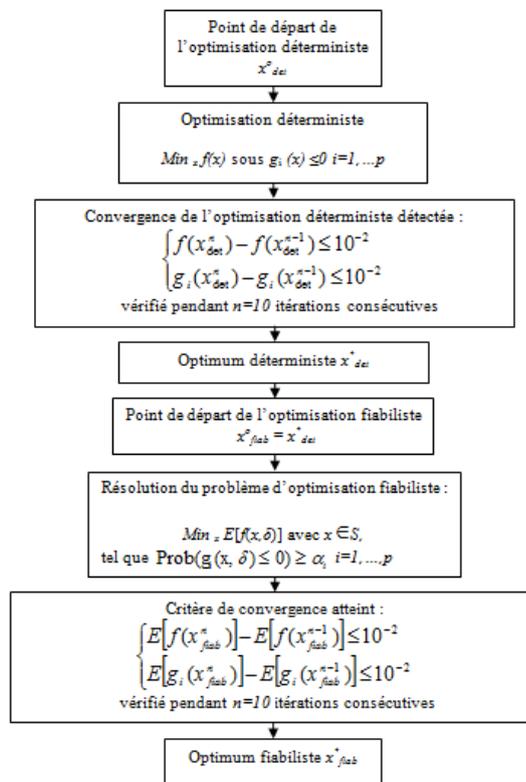


FIGURE 13.5: Optimisation séquentielle à deux niveaux

La résolution de l'optimisation fiabiliste est composée de deux procédures indépendantes. La première recherche les paramètres optimaux déterministes dans l'espace physique des variables d'optimisation :

$$\begin{cases} \text{Min}_x f(x) & x \in S \\ g_i(x) \leq 0 & i = 1, \dots, p \end{cases} \quad (13.5)$$

où f est la fonction objectif et g_i les contraintes. Dans la deuxième procédure les incertitudes sont intégrées en résolvant le problème fiabiliste donné par l'équation :

$$\begin{cases} \underset{x}{\text{Min}} E[f(x, \delta)] & x \in S \\ \text{Prob}(g_i(x, \delta) \leq 0) \geq \alpha_i & i = 1, \dots, p \end{cases} \quad (13.6)$$

où α_i est le seuil de fiabilité minimal requis pour chaque contrainte g_i . Le passage de l'optimisation déterministe à l'optimisation fiabiliste est effectué lorsque la variation relative des contraintes et de la fonction objectif est inférieure à $\Delta = 10^{-2}$ durant un nombre $n = 10$ d'itérations consécutives lors du processus d'optimisation déterministe. D'autre part, nous considérons que l'algorithme a convergé vers l'optimum fiabiliste lorsque le système 13.7 est vérifié durant 10 itérations consécutives de l'optimisation probabiliste.

$$\begin{cases} E[f(x^n)] - E[f(x^{n-1})] \leq 10^{-2} \\ E[g_i(x^n)] - E[g_i(x^{n-1})] \leq 10^{-2} \end{cases} \quad (13.7)$$

Empiriquement nous avons pu constater qu'une stabilité de la fonction objectif et des contraintes durant 10 itérations consécutives est suffisante.

Lorsque cette optimisation séquentielle à deux niveaux est couplée à un système multi-agent, les procédures d'optimisation déterministe puis fiabiliste sont résolues par le biais des AMAS (méthodologie de propagation des incertitudes dans un système multi-agent détaillée dans la section 13.2.3).

13.2.2.2 Nouvelle méthode d'optimisation séquentielle en boucle unique

L'approche séquentielle en boucle unique que nous mettons en oeuvre est basée sur la méthode SORA [38] (méthode exposée dans la section 13.2.1) et sur l'utilisation de coefficients de sécurité adaptatifs, qui conduisent à une meilleure intégration dans l'approche de résolution multi-agent développée dans le cadre du projet ID4CS. Chaque cycle du processus d'optimisation comprend deux analyses découplées : l'optimisation déterministe puis l'évaluation de la fiabilité du système à l'optimum déterministe. L'étude fiabiliste consiste à vérifier que les probabilités atteintes par chaque contrainte sont respectées avec un certain seuil de fiabilité imposé. Si le niveau de performance n'est pas atteint, nous introduisons des coefficients de sécurité dans le calcul des états limites, de sorte que les contraintes soient respectées avec un niveau de fiabilité au moins égal à 90%. Un nouveau cycle d'optimisation déterministe est alors effectué (le point initial est l'optimum déterministe obtenu au cycle précédent). Cette méthode nécessite peu d'itérations du processus d'optimisation et d'évaluations de la fiabilité afin de converger, rendant ainsi le processus plus performant que les méthodes fiabilistes à double boucles [23]. Ce processus de résolution de problèmes d'optimisation probabiliste est maintenant détaillé.

L'approche proposée débute par un cycle d'optimisation déterministe. En termes mathématiques, l'optimisation peut s'exprimer comme suit [81] :

$$\begin{cases} \underset{x}{\text{Min}} f(x) & x \in S \\ g_i(x) \leq 0 & i = 1, \dots, p \end{cases} \quad (13.8)$$

où f est la fonction objectif et g_i les contraintes du problème d'optimisation considéré. Suite à la résolution de cette optimisation déterministe, une analyse de la fiabilité du système est effectuée. Par soucis de simplification et parce que nous effectuons une étude de faisabilité, nous faisons l'hypothèse que les variables aléatoires suivent des lois normales ou peuvent être approximées par des lois normales. Ainsi, à l'optimum déterministe la fiabilité des contraintes est mesurée par :

$$\text{Prob}[g_i(x, \delta) \leq 0] \quad i = 1, \dots, p \quad (13.9)$$

où δ est le vecteur aléatoire représentant les incertitudes impliquées dans le problème. Cette probabilité peut être déterminée en employant la méthode FORM. Les variables aléatoires sont transformées dans un espace normalisé. On obtient alors :

$$\text{Prob}[g_i(x, \delta) \leq 0] = \Phi(-\beta) \quad i = 1, \dots, p \quad (13.10)$$

avec Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et β la distance minimale, appelée indice de fiabilité. Dans le cas où la probabilité est inférieure au seuil de fiabilité α_i^{cible} requis, les contraintes doivent être modifiées afin de déplacer le point le plus probable sur la frontière probabiliste et ainsi assurer la faisabilité de la contrainte probabiliste au cycle prochain. Pour ce faire, une méthode basée sur l'utilisation de facteurs de sécurité peut être mise en oeuvre. L'usage du coefficient de sécurité est une pratique courante en optimisation [139, 102]. L'intégration de coefficients de sécurité dans les fonctions de performance d'un problème d'optimisation déterministe permet de garantir la fiabilité du système. L'application de ces coefficients se traduit par une simple translation de la contrainte d'optimisation vers le domaine conservatif, entraînant une réduction de l'espace de conception. L'optimisation déterministe recherche donc la conception optimale dans le domaine réduit de l'espace de conception (l'optimum est souvent localisé sur la frontière de cet espace).

Dans notre étude, le coefficient de sécurité $s_{f_i}^K$ (coefficient de sécurité introduit sur la contrainte g_i lors du cycle d'optimisation déterministe K) est déterminé comme suit :

$$\text{Prob}[g_i(x, \delta) - s_{f_i}^K \leq 0] = \alpha_i^{cible} \Rightarrow s_{f_i}^K = E[g_i(x, \delta)] + \Phi^{-1}(\alpha_i^{cible})\sigma_{g_i} \quad (13.11)$$

où α_i^{cible} est le seuil de fiabilité requis pour la contrainte g_i et σ_{g_i} l'écart-type de la contrainte étudiée. Dans la suite α_i^{cible} sera noté α_i (lors de l'étude conceptuelle avion cette valeur est égale à 90%). Une illustration est donnée sur la figure 13.6. On note que l'utilisation de coefficients de sécurité évalués

pour chaque contrainte du problème permet un ajustement de chacune de ces fonctions de performance. En général dans l'industrie, un coefficient de sécurité commun à l'ensemble des contraintes est utilisé. À la suite d'une telle méthodologie de prise en compte des incertitudes la conception obtenue peut ne pas être optimale. En effet, les incertitudes et les conséquences de la défaillance ne sont pas les mêmes pour les différents critères de conception. L'introduction d'un coefficient de sécurité unique, identique à chaque contrainte, peut donc entraîner une solution optimale surdimensionnée ou à l'opposé moins fiable que souhaitée. Notre approche basée sur des coefficients de sécurité adaptatifs permet de pallier ce problème.

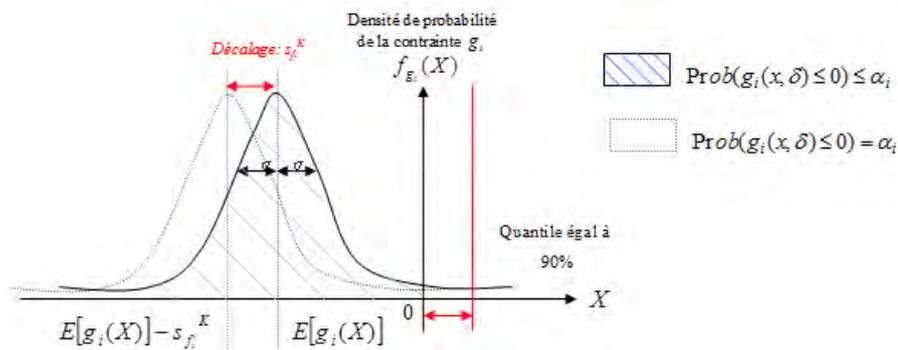


FIGURE 13.6: Modification de la contrainte en introduisant un coefficient de sécurité

Suite à l'analyse de la fiabilité du système un nouveau cycle d'optimisation déterministe $K + 1$ est effectué. Le point initial est l'optimum déterministe obtenu au cycle précédent K (pour lequel l'analyse fiabiliste a été effectuée et ayant donc permis de déterminer le coefficient de sécurité s_{fi}^{K+1}). Il est possible que les facteurs de sécurité précédemment déterminés n'impliquent pas forcément le fait que l'ensemble des nouvelles contraintes soient satisfaites en ce point de l'espace de recherche. Si cela peut être problématique pour des méthodes d'optimisation standards telle que l'algorithme de recherche Pattern Search, l'optimisation par l'approche mutli-agent utilisée dans cette étude ne nécessite pas une telle satisfaction des contraintes au point initial.

Les cycles d'optimisation déterministes et d'analyses de la fiabilité sont répétés jusqu'à l'obtention de la convergence. Nous considérons que l'algorithme a convergé vers une solution lorsque l'évolution du facteur de sécurité s_{fi} devient très faible, c'est à dire lorsque:

$$|s_{fi}^K - s_{fi}^{K+1}| \leq \epsilon, \forall i \quad (13.12)$$

où ϵ est le seuil de détection de la convergence. Un organigramme de cette méthode est donné sur la figure 13.7.

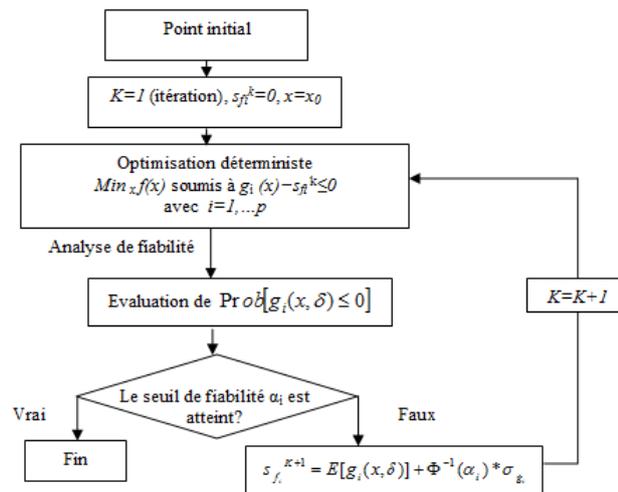


FIGURE 13.7: Organigramme de la méthode d'optimisation fiabiliste séquentielle en boucle unique

Nous détaillons l'organigramme donné figure 13.7. Si nous couplons la méthode d'optimisation séquentielle ainsi développée au système multi-agent, l'optimisation déterministe et l'évaluation de la fiabilité du système (représentées sur la figure 13.7) sont effectuées par le biais du système multi-agent. La méthodologie de propagation des incertitudes dans un système multi-agent utilisée lors de l'analyse de fiabilité est détaillée dans la section 13.2.3. Pour le premier cycle ($K = 1$), la valeur du point courant est imposée arbitrairement et le coefficient de sécurité est nul. Suite à la résolution de l'équation 13.8 (optimisation déterministe), certaines contraintes peuvent être actives. Pour une contrainte g_i active, le point optimal X se situe à la limite de cette contrainte déterministe. Lorsque nous considérons le caractère aléatoire de X , la fiabilité actuelle (probabilité que la contrainte soit respectée) peut être inférieure au seuil imposé α_i . Suite à l'évaluation de la fiabilité, si l'optimum déterministe ne satisfait pas le niveau de fiabilité requis, nous modifions les contraintes déterministes en introduisant des coefficients de sécurité afin d'assurer la faisabilité des contraintes. Pour le cycle suivant ($K = 2$) nous effectuons une nouvelle optimisation déterministe où les contraintes g_i sont mises à jour par le biais d'un facteur de sécurité $s_{f_i}^K$ propre à chaque contrainte (dispersion prise en compte). Ainsi les incertitudes sont intégrées dans le problème déterministe grâce aux facteurs de sécurité. Le point initial de l'optimisation déterministe du nouveau cycle ($K = 2$) est l'optimum déterministe obtenu au cycle précédent.

Il est important de noter la remarque suivante : si l'optimisation déterministe est résolue par le biais d'un algorithme autre que le système multi-agent, par exemple l'algorithme de recherche Pattern Search, alors le nou-

veau point de recherche du cycle d'optimisation déterministe est obtenu en résolvant le problème :

$$\begin{cases} \underset{x}{\text{Min}} \|x - x_m\|^2 & x \in S \\ g_i(x) - s_{f_i}^K \leq 0 \end{cases} \quad (13.13)$$

avec $s_{f_i}^K$ le coefficient de sécurité introduit sur la contrainte g_i , x le nouveau point de recherche de l'algorithme d'optimisation déterministe. Le point initial x est déterminé de telle sorte qu'il soit au voisinage du point x_m et tel que les contraintes imposées respectent un certain niveau de fiabilité. L'approche multi-agent n'a pas recours à ce processus d'optimisation afin d'obtenir le nouveau point de recherche du cycle d'optimisation déterministe. Par conséquent, le nombre de calculs nécessaire au système AMAS pour résoudre un problème d'optimisation probabiliste est moindre.

Les différentes étapes de l'organigramme sont ensuite répétées jusqu'à la convergence. Un système multi-agent n'est pas régi par une loi de comportement global, les agents évoluant continuellement pour tenter de satisfaire leur propre objectif. Ainsi, il appartient à l'ingénieur de stopper le processus d'optimisation lorsqu'il considère la convergence atteinte. Dans notre cas nous arrêtons le processus d'optimisation lorsque la variation des coefficients de sécurité entre deux analyses probabilistes consécutives est faible.

Dans cette section nous avons présenté la méthodologie globale de résolution d'un problème d'optimisation probabiliste par le biais d'un système multi-agent. Nous expliquons plus en détail dans la section suivante comment les incertitudes sont propagées au sein du système multi-agent.

13.2.3 Propagation des incertitudes dans le système multi-agent

On introduit maintenant la notion d'incertitude dans un système multi-agent. Du point de vue du traitement des incertitudes un agent est une boîte noire comportant des entrées, une sortie et renfermant des informations (cf. figure 13.8). Par exemple : a-t-on accès au gradient du modèle encapsulé ? Le modèle a-t-il une structure particulière ? Linéaire ? Quadratique ? Quelconque ?



FIGURE 13.8: Structure d'un agent vue des incertitudes

Un système multi agent est un ensemble d'agents qui évoluent dans un environnement commun. Notre but est donc de propager les incertitudes à

travers cet ensemble d'agents, des entrées vers la sortie (cf. figure 13.9), et de définir une stratégie permettant au système multi-agent de satisfaire les nouvelles contraintes formulées en termes de fiabilité ou de robustesse.

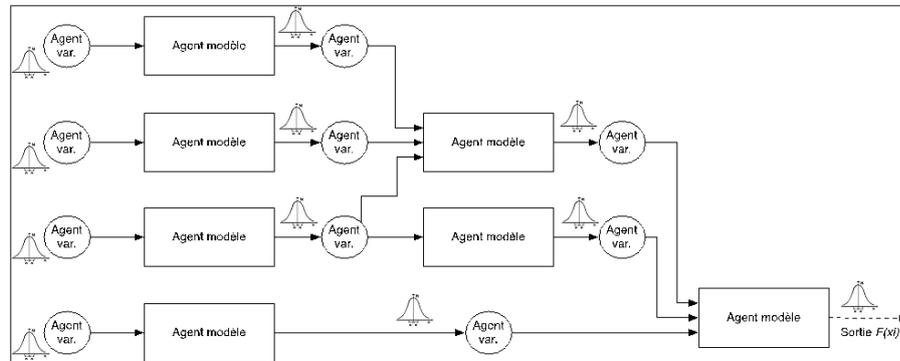


FIGURE 13.9: Propagation des incertitudes à travers un système multi-agent

Les incertitudes pourront être de deux natures différentes : les incertitudes de modélisation et les incertitudes de paramètres. Les incertitudes de modélisation sont dues à l'écart entre les prédictions des modèles et la réalité. Une autre source potentielle d'incertitude sur la sortie de notre système provient de l'incertitude sur les paramètres d'entrée. Ces variations peuvent résulter des différences entre le système réellement conçu (suite aux diverses phases de conception) et celui obtenu grâce à l'étude conceptuelle. Par exemple, lors de l'étude conceptuelle la surface de l'aile est déterminée à partir de formules de géométrie basiques sur un simple polyèdre alors que la surface réelle de l'aile finale est bien entendu déterminée par le biais de formules géométriques plus complexes.

Afin de propager les incertitudes nous intégrons à chaque agent des informations supplémentaires. Les variables aléatoires peuvent être représentées de différentes façons : par des nuages de points ou par leur distribution de probabilité. Nous souhaitons garder une approche relativement générique, ainsi nous avons conçu les agents de manière à ce qu'ils puissent manipuler différents types de distribution. Les incertitudes peuvent ainsi être représentées par les trois lois suivantes : la loi normale, la loi log-normale et la loi beta généralisée à quatre paramètres. La loi beta généralisée (utilisée au sein d'Airbus) est une loi très riche qui permet de représenter en pratique diverses distributions de probabilité et de rendre compte très souvent de la dispersion de nuage de points. Nous présentons brièvement cette loi de probabilité et ses propriétés :

La loi beta généralisée est une loi à quatre paramètres permettant de couvrir un large éventail de formes de distribution possibles. Les paramètres de cette loi sont les suivants :

- la borne inférieure du support : a ;
- la borne maximale du support : b ;

- le troisième paramètre Z . Il peut varier entre -1 et $+1$, et permet de contrôler la symétrie ;
- le quatrième paramètre P contrôle l'aplatissement de la distribution. Ce coefficient donne une information sur les queues de distribution. En effet, sa valeur est grande lorsqu'il y a beaucoup de données éloignées de la moyenne.

La densité de probabilité est donnée par :

$$D(x, a, b, Z, P) = \begin{cases} \frac{(b-x)^{q_1-1}(x-a)^{p_1-1}}{\beta(p_1, q_1)(b-a)^{p_1+q_1-1}} & a \leq x \leq b \\ 0 & x < a \text{ ou } b < x \end{cases} \quad (13.14)$$

où $\beta(p_1, q_1) = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(q_1)}{\Gamma(p_1+q_1)}$ avec Γ la loi gamma. La loi beta permet une bonne approximation des distributions Gumble, triangulaire, uniforme, normale, etc. Afin de modéliser une de ces lois par le biais de la loi beta généralisée, les quatre paramètres de la loi beta sont déterminés de telle sorte que la vraisemblance entre la loi beta et la loi souhaitée soit maximisée. La figure 13.10 illustre les différentes lois obtenues suivant les valeurs données aux quatre paramètres énumérés précédemment.

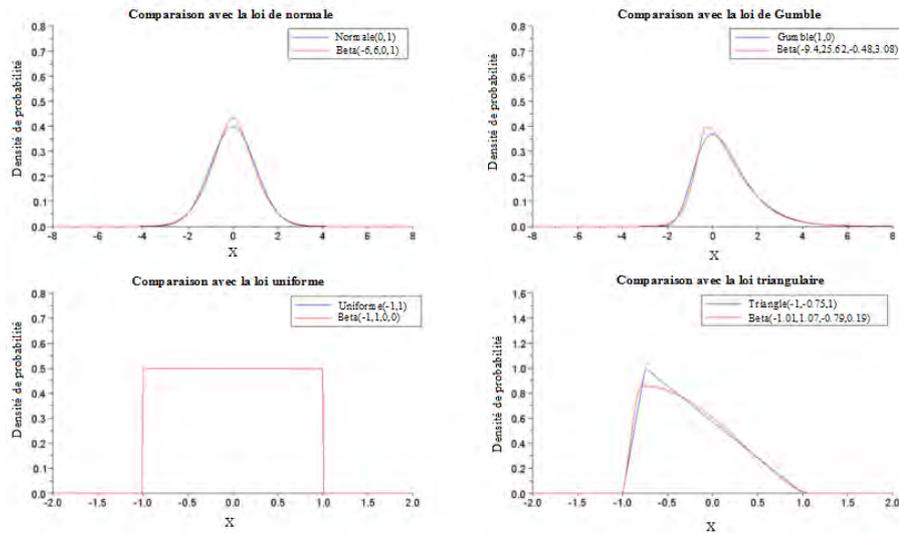


FIGURE 13.10: Évolution de la distribution beta généralisée en fonction des valeurs des paramètres

Dans le cas de la loi beta généralisée, les expressions de la moyenne, la variance, l'assymétrie de Fisher et le coefficient d'aplatissement s'écrivent comme indiqué dans les équations du système suivant [44] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Moyenne} \\ \text{Variance} \\ \text{Asymétrie} \\ \text{Aplatissement} \end{array} \right. = \begin{array}{l} = \frac{p_1 b + q_1 a}{p_1 + q_1} \\ = \frac{p_1 b (b - a)^2}{(p_1 + q_1 + 1)(p_1 + q_1)^2} \\ = \frac{2(q_1 - p_1) \sqrt{p_1 + q_1 + 1}}{(p_1 + q_1 + 2) \sqrt{p_1 q_1}} \\ = 6 \frac{(p_1 + q_1 + 1)(q_1 - p_1)^2 - p_1 q_1 (p_1 + q_1 + 2)}{p_1 q_1 (p_1 + q_1 + 2)(p_1 + q_1 + 3)} \end{array} \quad (13.15)$$

De plus avec la loi beta généralisée les précédentes équations sont réversibles comme dans le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a \\ b \\ Z \\ P \end{array} \right. = \begin{array}{l} = \text{Moyenne} - \frac{\text{somme}}{1 + \frac{q_1}{p_1}} \text{fac} \\ = \text{Moyenne} - \frac{\text{somme}}{1 + \frac{p_1}{q_1}} \text{fac} \\ = \frac{p_1 - q_1}{\text{somme} - 2} \\ = \frac{\text{somme} - 2}{3.3} \end{array} \quad (13.16)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{somme} \\ \text{prod} \\ \text{det} \\ \text{signe} \\ p_1 \\ q_1 \\ \text{fac} \end{array} \right. = \begin{array}{l} = \frac{6(\text{Asymétrie}^2 - \text{Aplatissement} - 2)}{2 \text{Aplatissement} - 3 \text{Asymétrie}^2} \\ = \frac{6(\text{somme} + 1) \text{somme}^2}{\text{Aplatissement} (\text{somme} + 2)(\text{somme} + 3) + 30 \text{somme} + 36} \\ = \text{somme}^2 - 4 \text{prod} \\ = \frac{\text{Asymétrie}}{|\text{Asymétrie}|} \\ = \frac{\text{somme} - \text{signe} \sqrt{\text{det}}}{2} \\ = \frac{\text{somme} + \text{signe} \sqrt{\text{det}}}{2} \\ = \sqrt{\text{Variance} \frac{\text{somme} + 1}{\text{prod}}} \end{array} \quad (13.17)$$

Nous détaillons maintenant la méthodologie spécifique à chaque type d'agent afin de gérer les incertitudes. Nous distinguons quatre types d'agents :

L'AGENT VARIABLE : Il n'y a pas de traitement spécifique des incertitudes dans l'agent variable. Il se contente de modifier la valeur de la moyenne (s'il est en entrée du problème) et de communiquer celle-ci ainsi que les paramètres de la variable aléatoire qu'il représente.

L'AGENT MODÈLE : Un modèle analytique représentant une certaine physique du système est encapsulé dans cet agent. L'agent prend en entrée un vecteur de paramètres aléatoires x_c . Chaque paramètre aléatoire x composante du vecteur x_c est caractérisé par sa moyenne x_m au point courant de l'optimisation ainsi que ses caractéristiques aléatoires (par exemple son écart-type σ_x ou les quatre paramètres de la loi beta généralisée, etc.), cf. figure 13.11. Une variable aléatoire peut-être modélisée par un nuage de points ou une distribution de probabilité.

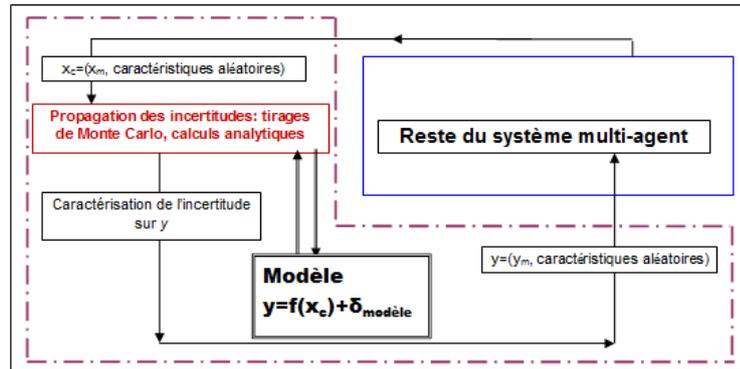


FIGURE 13.11: Propagation des incertitudes à travers un agent modèle

La sortie de l'agent s'écrit alors :

$$f(x_i) + \delta_{\text{modèle}} \quad (13.18)$$

où $\delta_{\text{modèle}}$ est l'incertitude de modèle et f la fonction encapsulée dans l'agent modèle. L'incertitude $\delta_{\text{modèle}}$ est caractérisée par une des représentations données ci-dessus (nuages de points, ou diverses lois de probabilité pouvant être représentées par exemple par le biais de la loi beta généralisée). La sortie de l'agent modèle est obtenue par le(s) propagateur(s) des incertitudes associé(s) à leur représentation. Ces propagateurs sont basés sur des calculs analytiques des moments [106] (cette méthode est employée lorsque le modèle encapsulé est linéaire ou quadratique ou approximé comme tel), ou des méthodes de simulations. La sortie de l'agent est ensuite envoyée au reste du système multi-agent (agents variables en sortie).

L'AGENT OBJECTIF : L'objectif propre à cet agent est de minimiser la fonction objectif du système. L'agent prend en entrée un vecteur de paramètres aléatoires x_c (cf. figure 13.12) avec leur représentation associée des incertitudes.

L'espérance de la fonction f est calculée sur la base des résultats du propagateur d'incertitudes (tirages de Monte-Carlo, calculs analytiques) et est

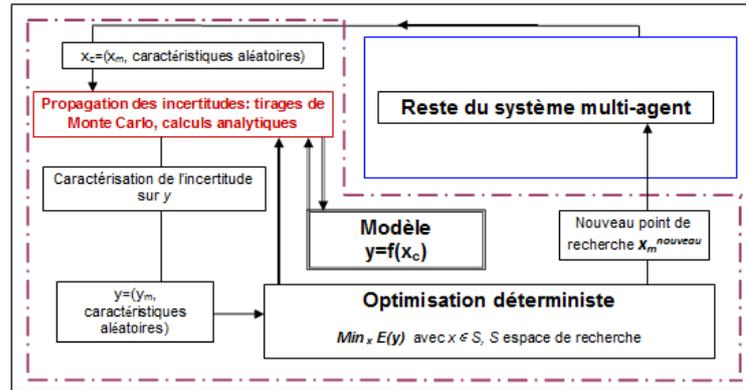


FIGURE 13.12: Propagation des incertitudes à travers un agent fonction objectif

envoyée au reste du système multi-agent. Le propagateur d'incertitudes peut également déterminer l'écart-type de la fonction objectif. Nous obtenons ainsi une information quant à la robustesse du système.

L'AGENT CONTRAINTÉ : L'agent contrainte permet de déterminer le niveau de fiabilité avec lequel chaque contrainte est vérifiée. Il prend en entrée un vecteur de paramètres aléatoires x_c (cf. figure 13.13).

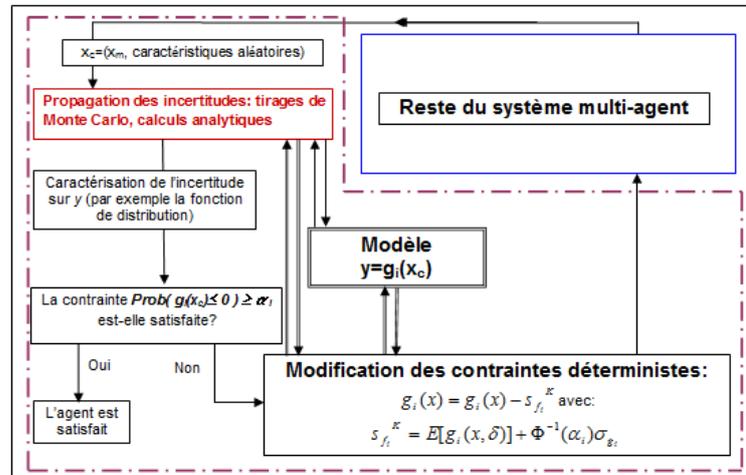


FIGURE 13.13: Propagation des incertitudes à travers un agent contrainte

Chaque composante aléatoire x_i a sa représentation associée des incertitudes. L'agent vérifie en interne si la contrainte est satisfaite en mesurant le niveau de fiabilité. Cette probabilité s'écrit $Prob[g_i(x, \delta) \leq 0]$ et est obtenue à partir des échantillons pour une représentation des incertitudes par nuages de points ou par calculs analytiques. Dans le cas d'une propagation des incertitudes basée sur le calcul analytique des moments (moyenne et écart-type), sous l'hypothèse de normalité des variables aléatoires nous avons : $Prob[g_i(x, \delta) \leq 0] = \Phi(-\beta_i) = \Phi(-\frac{\mu_{g_i}}{\sigma_{g_i}})$ avec $i = 1, \dots, p$. Bien que l'indice β_i

soit correct dans le cas de variables gaussiennes et d'un état-limite linéaire dans l'espace physique, cette condition est suffisante mais pas nécessaire [83]. Ainsi, pour des variables suivant des distributions non gaussiennes les expressions de la probabilité peuvent tout de même représenter une approximation satisfaisante pour l'évaluation de la fiabilité.

Si les contraintes n'atteignent pas les seuils de fiabilité imposés α_i , un décalage de la contrainte est introduit par un coefficient de sécurité $s_{f_i}^K$ (cf. équation 13.11), de manière à prendre en compte la dispersion de la contrainte (cf. figure 13.6) :

$$Prob[g_i(x, \delta) - s_{f_i}^K \leq 0] = \alpha_i \quad (13.19)$$

Nous avons présenté dans cette section une méthode de résolution de problèmes d'optimisation multidisciplinaire sous incertitude par l'approche multi-agent. Dans la section suivante nous mettons en place des cas test afin de valider l'approche proposée. Ainsi, les méthodes exposées dans cette section seront appliquées dans le cadre d'un problème analytique puis industriel (ATR 72).

13.3 RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

Dans cette section notre nouvelle approche de résolution de problème d'optimisation multidisciplinaire sous incertitude est dans un premier temps validée sur un cas test académique simple. Elle sera ensuite appliquée à l'étude conceptuelle d'un avion à turbopropulseurs. Concernant ces cas test, la méthodologie de propagation des incertitudes au sein des agents sera différente selon les informations disponibles en sortie de l'agent (gradient accessible, structure du modèle). Nous différencierons alors deux cas de figure :

- le modèle encapsulé dans l'agent est linéaire ou quadratique : la moyenne, l'écart-type et si besoin les moments d'ordre supérieur (loi beta généralisée) de la sortie de l'agent sont déterminés analytiquement.
- le modèle encapsulé est quelconque : si le gradient est accessible la propagation est effectuée analytiquement de manière approximative. Dans le cas contraire, on a recours aux tirages de Monte-Carlo afin de définir les caractéristiques de l'incertitude sur la sortie de l'agent.

13.3.1 Cas test analytique

Le cas test d'Alexandrov présenté précédemment dans ce mémoire (cf. section 7.1.6) est soumis à des incertitudes affectant les paramètres de conception et les modèles. Le problème déterministe est ainsi modifié afin de prendre

en compte ces incertitudes. Le problème à résoudre devient alors un problème d'optimisation sous contraintes fiabilistes :

$$\begin{cases} \underset{l_1, l_2, s}{\text{Min}} E[f(l_1, l_2, s)] & f(l_1, l_2, s) = \frac{1}{2}(a_1^2 + 10a_2^2 + 5(s-3)^2); l_1, l_2, s \in S \\ \text{Prob}(s - 10l_1 - 1 \leq 0) \geq 90\% \\ \text{Prob}(-s + l_2 + 2 \leq 0) \geq 90\% \end{cases} \quad (13.20)$$

où f est la fonction objectif que nous souhaitons minimiser, l_1 , l_2 et s sont les variables d'optimisation. Les variables a_1 et a_2 sont respectivement les sorties des disciplines 1 et 2 (cf. figure 13.14).

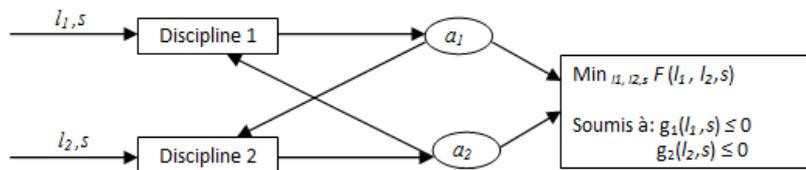


FIGURE 13.14: Modélisation du problème analytique

Les fonctions encapsulées dans les disciplines 1 et 2 sont données par :

$$\begin{cases} \text{Discipline 1 : } f_1(l_1, a_2) = \frac{1}{2}(l_1 - a_2) \\ \text{Discipline 2 : } f_2(l_2, a_1) = \frac{1}{2}(l_2 - a_1) \end{cases} \quad (13.21)$$

Les paramètres l_1 et s sont soumis à des incertitudes de paramètres, tandis que les paramètres a_1 et a_2 à des incertitudes de modèle. Les incertitudes sont modélisées par des lois normales centrées, les écarts-types sont donnés dans le tableau 13.2. Il est important de noter que dans cette formulation les deux contraintes ont une corrélation faible ($cor(g_1, g_2) = -0,05$) et peuvent ainsi être considérées comme indépendantes.

Incertitude introduite sur la variable	Valeur de l'écart-type
s	0,2
l_1	0,1
a_1	0,05
a_2	0,05

TABLE 13.2: Écarts-types des différents paramètres incertains

Dans un premier temps le problème est résolu par une approche en double boucle. Les incertitudes sont prises en compte dès les premières itérations

du processus d'optimisation. Cette démarche nous permettra de mettre en évidence l'intérêt de la mise en place d'une méthode de résolution séquentielle. Etant donné la simplicité du problème, l'analyse de fiabilité peut être effectuée soit par simulations de Monte-Carlo (50 000 tirages afin que l'erreur introduite par l'échantillonnage soit inférieure à 0,5 %), soit de manière analytique. Les résultats ainsi obtenus en employant un algorithme de recherche standard (méthode Pattern Search [125]) sont donnés dans le tableau 13.3. Ils constituent une base et sont comparés à la méthode multi-agent.

	Tirages de Monte-Carlo	Propagation analytique
Optimum fiabiliste	$s = 0,34$ $l_1 = 0,18$ $l_2 = 3,0$ $f(s, l_1, l_2) = 0,136$	$s = 0,34$ $l_1 = 0,18$ $l_2 = 2,99$ $f(s, l_1, l_2) = 0,136$
Nombre d'itérations du processus d'optimisation	689	676

TABLE 13.3: Résultats du problème analytique, optimiseur classique (algorithme Pattern Search)

Les mêmes calculs sont effectués en employant un système multi-agent (cf. tableau 13.4). Nous pouvons constater que les résultats obtenus par le biais du système multi-agent sont proches de ceux déterminés grâce à un algorithme standard d'optimisation (quelque soit la méthodologie de propagation des incertitudes). Néanmoins l'approche multi-agent nécessite 8 fois moins d'itérations en comparaison à l'algorithme de recherche Pattern Search. Un algorithme à gradient permet également d'obtenir des résultats performants lorsque les incertitudes sont propagées analytiquement (l'optimum fiabiliste est déterminé en 38 itérations). Cependant si la propagation des incertitudes est effectuée par tirages de Monte-carlo l'algorithme ne converge pas, sans doute à cause du bruit lié à l'échantillonnage. D'autre part, dans le cas d'un algorithme à gradient le point initial doit être choisi judicieusement dans l'espace du faisable.

Nos tests permettent également de valider la propagation des incertitudes par calculs analytiques dans le système multi-agent (détermination de l'écart-type et de la moyenne par des calculs de moments). En effet l'optimum fiabiliste déterminé grâce à cette méthodologie est identique à celui obtenu en propageant les incertitudes dans les agents par tirages de Monte-Carlo. L'hypothèse concernant la décorrélation des contraintes probabilistes du problème est donc vérifiée.

Les résultats présentés dans les tableaux 13.3 et 13.4 sont obtenus lorsque les incertitudes sont prises en compte dès la première itération du processus

	Tirages de Monte-Carlo	Propagation analytique
Optimum fiabiliste	$s = 0,34$ $l_1 = 0,17$ $l_2 = 3,0$ $f(s, l_1, l_2) = 0,137$	$s = 0,34$ $l_1 = 0,17$ $l_2 = 3,0$ $f(s, l_1, l_2) = 0,136$
Nombre d'itérations du processus d'optimisation	84	84

TABLE 13.4: Résultats du problème analytique, résolution par l'approche multi-agent

d'optimisation. Dans le cas d'une propagation des incertitudes par tirages de Monte-Carlo, le temps de calcul engendré par les analyses de fiabilité peut être très important notamment lorsque la complexité du problème augmente (à chaque évaluation de la fonction objectif N tirages sont effectués). Nous comparons maintenant dans le tableau 13.5 les résultats obtenus grâce aux deux méthodologies séquentielles de propagation des incertitudes dans un système multi-agent présentées dans la section 13.2.2.2. Dans cette étude, des tirages de Monte-Carlo sont effectués afin de déterminer la probabilité atteinte par les contraintes lors des analyses de fiabilité.

Les résultats obtenus par le biais des deux méthodes sont proches. Cependant l'approche séquentielle à deux niveaux engendre un temps de calcul bien plus élevé. En effet cette méthode requiert 47 évaluations de la fiabilité afin de déterminer l'optimum fiabiliste tandis qu'uniquement 3 évaluations sont nécessaires dans le cas de l'optimisation séquentielle en boucle unique (le nombre d'itérations est proportionnel au temps de calcul). Ainsi, 2 350 070 évaluations de la fonction objectif et des contraintes doivent être effectuées afin que la méthode séquentielle à deux niveaux converge. La méthode en boucle unique nécessite seulement 150 251 évaluations, soit 15 fois moins.

	Méthode séquentielle à deux niveaux	Méthode séquentielle en boucle unique
Optimum fiabiliste	$s = 0,32$ $l_1 = 0,17$ $l_2 = 3,0$ $f(s, l_1, l_2) = 0,135$	$s = 0,32$ $l_1 = 0,18$ $l_2 = 3,0$ $f(s, l_1, l_2) = 0,135$
Nombre total d'évaluations	2 350 070	150 251
Nombre d'évaluations déterministes	70	251
Nombre d'études de la fiabilité	47	3

TABLE 13.5: Résultats du problème analytique, propagation par tirages de Monte-Carlo et résolution par l'approche multi-agent

D'autre part, notre nouvelle méthodologie combinant les systèmes multi-agent à une méthodologie d'optimisation séquentielle en boucle unique permet de diviser le nombre d'analyses de fiabilité par 28 en comparaison à une méthodologie classique, c'est à dire une procédure en double boucle (cf. résultats tableau 13.3, propagation par tirages de Monte-Carlo). Notre nouvelle approche permettant de résoudre des problèmes d'optimisation multidisciplinaire sous incertitude semble donc pertinente.

Les méthodes ainsi développées dans nos recherches sont validées sur un cas test analytique simple. Nous les appliquons maintenant à un cas test industriel : l'optimisation d'un avion en phase conceptuelle.

13.3.2 Cas test industriel simplifié : la phase conceptuelle avion

À ce stade de la conception les incertitudes sont importantes et peuvent affecter les performances du système. Celles-ci doivent donc être prises en compte afin de mettre en place une conception optimale performante remplissant l'ensemble du cahier des charges lors des phases ultérieures de conception. Pour ce faire le problème conceptuel avion présenté dans la section 13.1 est modifié afin d'inclure des contraintes de fiabilité (cf. figure 13.15).

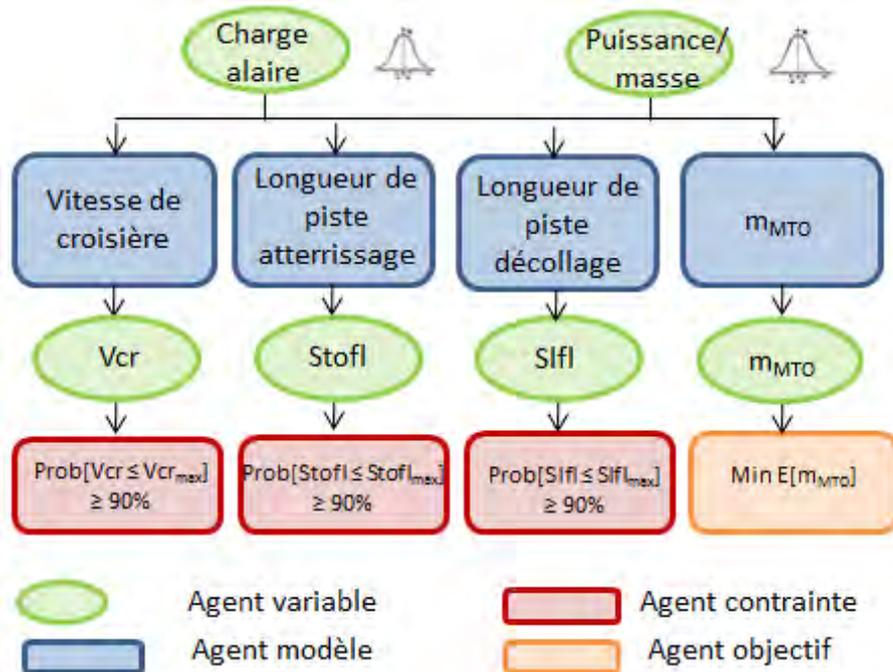


FIGURE 13.15: Agentification du problème de conception avion simplifié sous incertitude

Le problème est ainsi formulé de la façon suivante :

$$\begin{cases} \text{Min}_{\frac{m_{MTO}}{S_W}, \frac{P_{TO}}{m_{MTO}}} E[m_{MTO}(\frac{m_{MTO}}{S_W}, \frac{P_{TO}}{m_{MTO}}, \delta)] \\ \text{Prob}[g_i(\frac{m_{MTO}}{S_W}, \frac{P_{TO}}{m_{MTO}}, \delta) \leq 0] \geq 90\% \quad i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (13.22)$$

Les incertitudes δ sont introduites sur les paramètres suivants : le coefficient de portance maximal pendant la phase de décollage $C_{L,max,L}$, le coefficient de portance maximal pendant la phase d'atterrissage $C_{L,max,TO}$, la finesse aérodynamique durant la phase de croisière E et le rendement de l'hélice $\eta_{P,CR}$. Ces variables aléatoires ont été choisies sur l'avis d'experts. Différents cas sont mis en œuvre afin d'expérimenter les méthodes développées :

- Dans un premier temps les incertitudes sont représentées par des lois log-normales. De ce fait les calculs analytiques sont facilement développables dans le cas de l'étude conceptuelle avion (ATR 72). La propagation des incertitudes dans le système multi-agent est effectuée analytiquement (calcul de l'écart-type et de la moyenne des variables de sortie du système optimisé). Nous faisons l'hypothèse que les contraintes fiabilistes du problème sont décorrélées. Cette approximation sera vérifiée par tirages de Monte-Carlo.
- Un deuxième test a ensuite été effectué. Les incertitudes sont représentées par des lois normales de moyenne et d'écart-type constants propres à chaque variable incertaine. Les incertitudes sont propagées dans le système multi-agent par simulations de Monte-Carlo. Afin que l'erreur introduite par le bruit de Monte-Carlo soit faible, 50 000 tirages sont effectués (l'erreur est de ce fait inférieure à 0.5% selon la loi des grands nombres).

Les résultats de ces différents tests sont détaillés dans les paragraphes suivants.

Tout d'abord les incertitudes sont prises en compte tout au long du processus d'optimisation par une approche en double boucle. Les différents résultats obtenus par le biais du système multi-agent sont présentés dans le tableau 13.6 et comparés à un algorithme classique d'optimisation (Pattern Search) tableau 13.7 :

Dans les divers cas étudiés nous constatons que les multi-agents fournissent des solutions proches de celles obtenues par un algorithme classique (Pattern Search) pour un point initial du processus d'optimisation proche de l'optimum. Cependant lorsque nous faisons varier le point initial l'algorithme Pattern Search donne des résultats instables contrairement à l'approche multi-agent. En effet nous pouvons remarquer une faible différence entre les résultats obtenus par le biais des deux algorithmes pour une propagation des incertitudes par tirages de Monte-Carlo lorsque celles-ci sont

	Tirages de Monte-Carlo, variables aléatoires normale	Tirages de Monte-Carlo, variables aléatoires log-normale	Calculs analytiques, variables aléatoires log-normale
Optimum fiabiliste	$m_{MTO} = 21\,313\text{ kg}$ $\frac{m_{MTO}}{S_w} = 328,7\text{ kg.m}^2$ $\frac{P_{TO}}{m_{MTO}} = 244\text{ W/kg}$	$m_{MTO} = 21\,276\text{ kg}$ $\frac{m_{MTO}}{S_w} = 333\text{ kg.m}^2$ $\frac{P_{TO}}{m_{MTO}} = 238\text{ W/kg}$	$m_{MTO} = 21\,276\text{ kg}$ $\frac{m_{MTO}}{S_w} = 333\text{ kg.m}^2$ $\frac{P_{TO}}{m_{MTO}} = 238\text{ W/kg}$
Nombre d'itérations du processus d'optimisation	41	42	44

TABLE 13.6: Résultats obtenus par l'approche multi-agent pour l'optimisation fiabiliste en double boucle

	Tirages de Monte-Carlo, variables aléatoires normale	Tirages de Monte-Carlo, variables aléatoires log-normale	Calculs analytiques, variables aléatoires log-normale
Optimum fiabiliste	$m_{MTO} = 21\,311\text{ kg}$ $\frac{m_{MTO}}{S_w} = 328\text{ kg.m}^2$ $\frac{P_{TO}}{m_{MTO}} = 244\text{ W/kg}$	$m_{MTO} = 21\,324\text{ kg}$ $\frac{m_{MTO}}{S_w} = 332\text{ kg.m}^2$ $\frac{P_{TO}}{m_{MTO}} = 244\text{ W/kg}$	$m_{MTO} = 21\,281\text{ kg}$ $\frac{m_{MTO}}{S_w} = 332\text{ kg.m}^2$ $\frac{P_{TO}}{m_{MTO}} = 239\text{ W/kg}$
Nombre d'itérations du processus d'optimisation	406	362	214

TABLE 13.7: Résultats obtenus par un algorithme classique (Pattern Search) pour l'optimisation fiabiliste en double boucle

modélisées par des lois log-normales. L'algorithme Pattern Search est sensible au bruit causé par les tirages de Monte-Carlo qui est d'autant plus important pour des incertitudes suivant des lois log-normales. On note également que les hypothèses mises en place afin d'effectuer une propagation des incertitudes par calculs analytiques sont validées. Dans le tableau 13.6 nous pouvons constater que nous obtenons des résultats identiques lorsque les incertitudes (modélisées par des lois log-normales) sont propagées analytiquement et par tirages de Monte-Carlo.

Ainsi l'approche multi-agent permet à nouveau de diminuer de manière sensible le nombre de simulations utilisé. D'autre part quel que soit le point initial du processus d'optimisation, les AMAS semblent plus robustes car il permet d'obtenir le même optimum, contrairement à l'algorithme de recherche Pattern Search.

Lorsque nous comparons les résultats de l'optimisation déterministe avec ceux des optimisations fiabilistes, nous remarquons une hausse de la fonction coût (cf. tableau 13.1 et figure 13.16). La masse de l'avion au décollage est plus importante lorsque les incertitudes sont prises en compte. En effet, la présence de marges introduites dans le système suite à une optimisation

fiabiliste a pour conséquence de déplacer l'optimum. Les contraintes actives représentées figure 13.16 sont les contraintes déterministes, cependant les contraintes fiabilistes sont les mêmes avec un décalage adéquat. La masse de l'avion au décollage a augmenté mais le risque est désormais contrôlé. Les incertitudes impactant les paramètres dont la variabilité engendre la plus grande sensibilité de la fonction objectif et des performances sont prises en compte. Nous sommes maintenant capable de garantir un design satisfaisant un certain niveau de fiabilité (les contraintes actives ont un seuil de fiabilité égal à 90%) contrairement à l'optimisation déterministe.

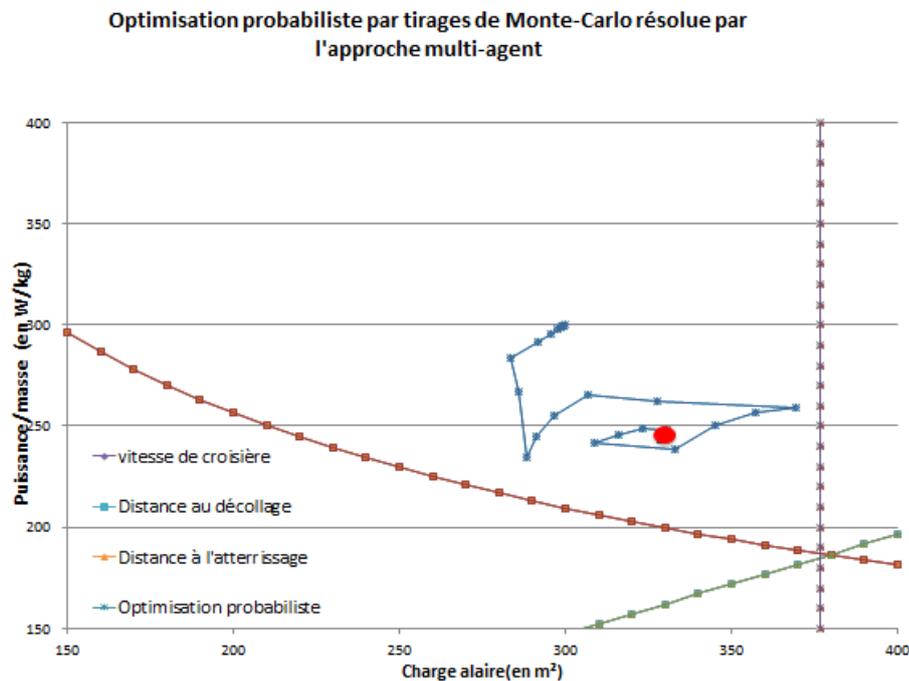


FIGURE 13.16: Résolution de l'optimisation probabiliste par tirages de Monte-Carlo par la méthode multi-agent

Dans cette première résolution de l'étude conceptuelle probabiliste, les incertitudes sont prises en compte tout au long du processus d'optimisation. Ainsi, si le point initial de l'algorithme d'optimisation se situe loin de l'optimum fiabiliste et lorsque des tirages de Monte-Carlo sont nécessaires, la prise en compte des incertitudes peut s'avérer très coûteuse. Nous souhaitons maintenant mettre en place la méthodologie de résolution précédemment développée afin de pallier ce problème. Cette approche emploie une procédure en boucle unique dans laquelle une série de cycles d'optimisation déterministe et d'évaluations de la fiabilité du système se succèdent (cf. section 13.2.2.2). Le système multi-agent est couplé à cette méthode séquentielle : l'optimisation déterministe et les analyses de la fiabilité (cf. 13.7) sont menées par le biais du système multi-agent. Cette approche est ainsi appliquée et comparée à une méthode séquentielle à deux niveaux. Dans cette

étude comparative les incertitudes sont modélisées par des lois normales. Des tirages de Monte-Carlo sont effectués afin de déterminer la probabilité atteinte par les contraintes lors de l'analyse de fiabilité. Les résultats sont donnés dans le tableau 13.8.

	Approche multi-agent combinée à une méthode séquentielle à deux niveaux	Approche multi-agent combinée à une méthode séquentielle en boucle unique
Optimum fiabiliste	$m_{MTO} = 21\,311 \text{ kg}$ $\frac{m_{MTO}}{S_w} = 328 \text{ kg.m}^2$ $\frac{P_{TO}}{m_{MTO}} = 244 \text{ W/kg}$	$m_{MTO} = 21\,303 \text{ kg}$ $\frac{m_{MTO}}{S_w} = 331 \text{ kg.m}^2$ $\frac{P_{TO}}{m_{MTO}} = 242 \text{ W/kg}$
Nombre total d'évaluations	1 100 042	150 216
Nombre d'évaluations déterministes	42	216
Nombre d'études de la fiabilité	22	3

TABLE 13.8: Comparaison des méthodes d'optimisation fiabiliste séquentielles, résolution par l'approche multi-agent

Les résultats sont semblables à ceux du cas test analytique. Les optima obtenus par le biais des deux méthodes séquentielles sont proches. La méthode séquentielle en boucle unique nécessite un plus grand nombre d'évaluations déterministes mais est néanmoins plus performante car elle requiert seulement 3 évaluations de la fiabilité. Notre nouvelle approche combinant les AMAS à une méthodologie d'optimisation en boucle unique converge vers l'optimum fiabiliste rapidement. En effet, elle nécessite un temps de calcul inférieur à 10 minutes (sur un poste de travail personnel) malgré un nombre important de simulations afin de propager les incertitudes et obtenir une bonne précision de l'analyse de fiabilité (5000 tirages de Monte-Carlo). Le trajet de l'optimisation séquentielle en boucle unique est représenté sur la figure 13.17.

Notre nouvelle approche permet de diviser le nombre d'analyses de fiabilité par 135 en comparaison à une méthodologie classique (cf. tableau 13.9). La procédure dite classique est une approche en double boucle résolue par le biais d'un algorithme de type Pattern Search, c'est à dire à chaque pas du processus d'optimisation la propagation des incertitudes est effectuée par tirages de Monte-Carlo afin de déterminer la fiabilité du système. On note également l'intérêt d'associer le système multi-agent à une méthode d'optimisation séquentielle en boucle unique : le nombre d'évaluations de la fiabilité du système est environ 14 fois moins important en comparaison à une prise en compte des incertitudes dès le point initial du processus d'optimisation (le système multi-agent seul nécessite 41 évaluations de la fiabilité contre 3 lorsqu'on le combine à l'optimisation séquentielle).

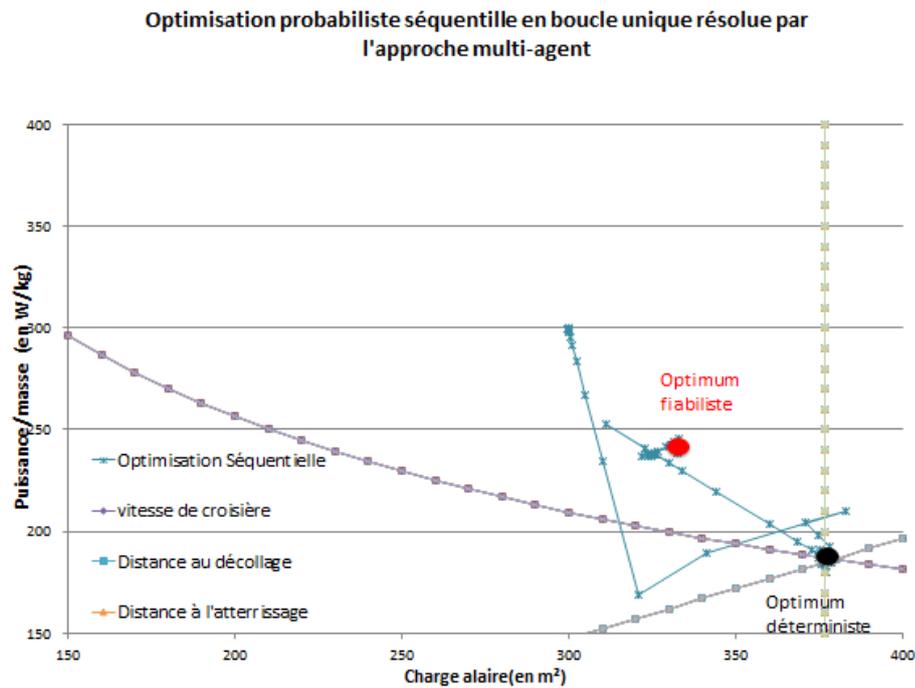


FIGURE 13.17: Optimisation séquentielle en boucle unique, résolution par l'approche multi-agent

	Optimisation double boucle résolue par un algorithme Pattern Search	Approche multi-agent combinée à une méthode séquentielle en boucle unique
Optimum fiabiliste	$m_{MTO} = 21\,311\text{ kg}$ $\frac{m_{MTO}}{S_w} = 328\text{ kg.m}^2$ $\frac{P_{TO}}{m_{MTO}} = 244\text{ W/kg}$	$m_{MTO} = 21\,303\text{ kg}$ $\frac{m_{MTO}}{S_w} = 331\text{ kg.m}^2$ $\frac{P_{TO}}{m_{MTO}} = 242\text{ W/kg}$
Nombre d'études de la fiabilité	406	3

TABLE 13.9: Comparaison entre la méthodologie d'optimisation classique et la nouvelle approche

Les méthodes ainsi développées dans ce chapitre permettent de résoudre des problèmes d'optimisation multidisciplinaire sous incertitude grâce à un système multi-agent. Notre approche permet de propager des incertitudes de natures différentes et de mettre en place un système ayant statistiquement le meilleur niveau de performance pour un temps de calcul faible. Notre méthodologie combinant l'approche multi-agent et la méthode d'optimisation séquentielle en boucle unique est très prometteuse pour la résolution de problèmes complexes.

13.4 ANALYSES

Les méthodes basées sur l'utilisation de systèmes multi-agent auto-adaptatifs sont une alternative intéressante permettant de répondre à notre problématique. Les systèmes AMAS sont le coeur du projet ANR ID4CS dont l'objectif est de mettre en place une plateforme de conception par agentification de systèmes fiables et robustes, notamment appliquée à la conception avion. La question de l'intégration des incertitudes dans l'approche multi-agent développée au sein de l'IRIT pour le projet ID4CS se pose alors. Notre travail consiste donc à mettre en place une méthode permettant la propagation des incertitudes dans un tel problème.

Tout d'abord nous avons donné la décomposition du problème d'optimisation multidisciplinaire sous incertitude en agents. Dans le cadre de l'étude conceptuelle avion, le problème peut se décomposer comme suit : la modélisation des disciplines (vitesse de croisière, longueur de piste au décollage et à l'atterrissage, masse de l'avion au décollage) est assurée par les agents modèles. L'espérance de la masse de l'avion au décollage que nous souhaitons minimiser est représentée par l'agent objectif. Les contraintes sont encapsulées dans les agents contraintes (vérification que les probabilités de fiabilité minimales imposées sur les sorties des agents disciplines définissant les performances du système avion sont atteintes). Enfin les variables de conception (charge alaire et ratio puissance/masse) ainsi que toute information transférée entre les agents sont encapsulées dans des agents variables. L'ensemble des agents interagissent dans un environnement commun afin de répondre à leur propre objectif ainsi qu'à l'objectif commun : minimiser l'espérance de la masse de l'avion au décollage en s'assurant que les contraintes sont respectées avec un niveau de fiabilité minimal (90%).

Dans ce chapitre nous avons ensuite détaillé les méthodologies que nous avons développées afin de propager les incertitudes dans un problème d'optimisation agentifié. Nous avons dans un premier temps présenté une approche permettant de prendre en compte les incertitudes tout au long du processus d'optimisation. La deuxième méthode proposée permet de résoudre le problème de manière séquentielle (résolution déterministe puis intégration des incertitudes) afin d'accélérer la convergence dans la plupart des cas. Enfin la dernière solution permet encore de réduire les temps de calcul. La nouvelle méthodologie que nous retiendrons allie le système multi-agent à une approche séquentielle en boucle unique avec un critère adaptatif d'évaluation du niveau de fiabilité. Cette approche a été testée et validée grâce à un cas test industriel. Dans le cadre de cette étude, notre nouvelle méthodologie permet de diviser le nombre d'analyses de la fiabilité du système par 135 en comparaison à une approche classique (optimisation à double boucle résolue par le biais d'un algorithme de recherche standard de type pattern search). La performance de notre nouvelle méthode a ainsi été mise en évidence. Par la suite nous envisageons de tester cette approche sur des problèmes de conception dont le nombre de variables de conception et de paramètres incertains est plus important.

En note finale, ces travaux ont été développés dans le cadre du projet ANR ID₄CS qui regroupe plusieurs partenaires (laboratoires et entreprises). Afin de permettre l'intégration de nos travaux au sein de ce projet un temps d'adaptation important était indispensable pour comprendre les travaux développés par chacun des partenaires, notamment ceux mis en place par l'IRIT (systèmes multi-agent), comprendre les besoins de chacun et adapter le travail en fonction, etc.

SYNTHÈSE SUR LES APPORTS

L'étude conceptuelle d'un système fait appel à des modèles analytiques de basse fidélité dûs à des connaissances limitées. Les incertitudes de modélisation engendrées sont donc prévalentes et le système obtenu suite à une optimisation déterministe peut ne pas atteindre les performances requises lorsqu'il sera soumis à une analyse plus détaillée. De ce fait il est nécessaire de mettre en place des méthodes d'optimisation prenant en compte les incertitudes pour garantir le succès du projet. Afin de répondre à cette problématique nos travaux se sont décomposés en deux grandes parties : dans un premier temps nous avons proposé une nouvelle approche de modélisation des incertitudes puis dans un deuxième temps nous avons présenté des méthodologies de résolution de problèmes d'optimisation multidisciplinaires sous incertitudes. Ces méthodes ont été appliquées à l'étude conceptuelle d'un avion.

Nous avons tout d'abord montré que la modélisation des incertitudes par une loi dont les paramètres sont constants ne reflète pas la précision réelle des modèles analytiques imbriqués dans l'étude conceptuelle. Elle peut de ce fait engendrer une perte de performance (les incertitudes sont parfois plus faibles dans certaines régions de l'espace de recherche) voire aboutir à des résultats non physiques. Afin de pallier à ce problème nous avons donc proposé dans cette partie une nouvelle méthodologie pour modéliser les incertitudes. Les incertitudes sont prises en compte grâce à une méthode probabiliste découlant de l'exploitation de données historiques sur les avions (caractéristiques, performances, etc.). Cette modélisation permet de prendre en compte deux phénomènes : les paramètres variables sont soumis à des incertitudes plus ou moins grandes selon les régions dans lesquelles ils se situent (le nombre de données accessibles varie) et certains points sont moins bien prédits par le modèle analytique indépendamment du nombre de données.

Après avoir donné la formulation fiabiliste et robuste de l'étude conceptuelle avion, nous avons résolu ce problème par le biais d'une approche en double boucle (analyse probabiliste à chaque itération du processus d'optimisation). La prise en compte des incertitudes a montré que des marges conséquentes sont nécessaires afin de concevoir un avion ayant statistiquement les meilleures performances et contrôler le risque. Cependant la résolution de tels problèmes d'optimisation multidisciplinaire probabiliste nécessite un temps de calcul important notamment si le nombre de variable de conception et de paramètres incertains augmentent. Des surfaces de ré-

ponses ont donc été construites à partir de tirages de Monte-Carlo afin de représenter mathématiquement les contraintes fiabilistes et minimiser le coût de calcul. Cette solution a permis de diviser le temps de calcul par trois.

Malgré une réduction du coût de l'étude grâce aux modèles de substitution, celui-ci reste important (nécessité d'effectuer un nombre conséquent de simulations afin d'obtenir des surfaces de réponses précises) en particulier si nous augmentons la dimension du problème. Une nouvelle approche d'optimisation, le système multi-agent adaptatif, a été développée ces dernières années dans l'optique de résoudre des problèmes d'optimisation complexes. Le système multi-agent est notamment la solution choisie au sein du projet [ID4CS](#) et développée par l'[IRIT](#) pour la résolution des problèmes d'optimisation multidisciplinaire déterministe. Nous proposons donc une méthodologie adaptée de gestion des incertitudes. La nouveauté de notre méthode réside notamment dans la combinaison du système multi-agent avec une méthode d'optimisation séquentielle en boucle unique découplant l'optimisation déterministe de l'analyse de fiabilité et limitant ainsi le nombre d'évaluations de la probabilité du système. Après avoir détaillé la méthodologie, nous l'avons ensuite appliquée à un cas test de conception avion. Notre approche a permis de trouver des configurations plus robustes que les design déterministes initiaux. L'application a également permis de mettre en évidence l'intérêt de l'approche développée : le nombre d'analyses de la fiabilité est divisé par 135 en comparaison à une méthode d'optimisation fiabiliste standard, le système converge donc rapidement vers une solution. D'autre part la méthodologie s'avère stable : elle permet d'aboutir à la même conception quelque soit le point initial.

Dans le futur, notre méthode pourrait être appliquée à des problèmes dont le nombre de variables est plus important, tels que les phases de conception en aval de l'étude conceptuelle avion. Nous pourrions également l'implémenter au sein d'un processus multiniveaux (l'application présentée ici utilise une stratégie de résolution mononiveau). En effet, durant l'étude conceptuelle des modèles analytiques de granularités différentes sont mis en place pour représenter une certaine physique du système. Ces modèles mathématiques peuvent être des modèles de basse fidélité peu coûteux en temps de calcul mais engendrant une perte d'information. Ils sont par exemple issus d'équations analytiques simples de type polynôme d'ordre faible ou issus de régression à partir d'une base de données historiques (régression linéaire, quadratique). À l'opposé, les paramètres de l'étude peuvent être déterminés grâce à des modèles de haute-fidélité plus coûteux. Une méthode spécifique doit donc être mise en place afin de déterminer comment utiliser au mieux ces modèles de fidélités différentes et ainsi obtenir un compromis entre temps de calculs faible et bonne précision sur la fiabilité et la robustesse des performances en sortie.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire sont centrés sur le développement de méthodologies d'optimisation multidisciplinaire sous incertitude notamment appliquées à la phase conceptuelle avion. Les principaux résultats mis en évidence concernent la modélisation des incertitudes et l'approche de propagation des incertitudes dans des problèmes d'optimisation multidisciplinaire afin de concevoir des systèmes robustes et fiables.

Nous avons tout d'abord apporté une vision globale de l'étude conceptuelle au travers de la conception avant-projet d'un avion moyen-courrier (de type A320). Puis nous avons proposé un état de l'art concernant l'optimisation en univers incertain. Dans un premier temps nous avons présenté les différentes sources d'incertitude et les méthodes de caractérisation associées. Ensuite, nous avons exposé une synthèse des méthodes de propagation des problèmes mono-disciplinaire et multidisciplinaire en environnement incertain.

De nos jours lors de la conception de systèmes complexes les incertitudes sont souvent intégrées au problème par le biais de marges de sécurité conservatrices qui pénalisent les performances. Afin de pallier ce problème nous avons développé une nouvelle approche de modélisation des incertitudes. Les incertitudes sont représentées par le biais d'une distribution de probabilité dont les paramètres s'ajustent en fonction de l'information disponible. Le concepteur peut alors prédire précisément les incertitudes en tous points de l'espace de conception. Bien que cette nouvelle méthodologie ait été développée dans le contexte aéronautique, elle peut s'étendre à de nombreux types de conception (fusée, voiture, etc.). Ces travaux ont donné lieu à des conférences [65, 63, 64] ainsi que la parution d'un article dans une revue internationale [66].

Nous avons ensuite mis en place la formulation probabiliste du problème d'optimisation multidisciplinaire avion auquel nous sommes confrontés. Ainsi, nous optimisons la masse au décollage tout en s'assurant que les contraintes (vitesse d'approche, plafonds de vol, etc.) sont respectées avec un certain niveau de fiabilité. Nous veillons également à ce que la fonction objectif soit faiblement sensible aux variations des paramètres (robustesse du système). La résolution directe de ce problème s'effectue par l'utilisation de techniques d'optimisation en double boucle associées à des tirages de Monte-Carlo qui conduisent à des temps de calcul importants (environ 24 heures de calculs sont nécessaires sur un poste de travail personnel alors que nous avons intégré des incertitudes sur moins de 10% de l'ensemble des paramètres). Pour pallier à cette difficulté, nous avons créé une méthode basée sur l'utilisation de modèles de substitution. Ces modèles approximatifs (surfaces de réponse quadratiques) viennent remplacer les contraintes fiabilistes. Lors du processus d'optimisation, la fiabilité des contraintes est renseignée par les modèles de substitution (et ce quelle que soit la localisation du point de conception dans l'espace de recherche). Ainsi, au cours de la résolution du problème d'optimisation, l'évaluation de la fiabilité (au travers de son indice de fiabilité) ne requiert plus de tirages de Monte-Carlo, améliorant donc la performance de la résolution (le temps de calcul est en moyenne

divisé par 3). Les surfaces de réponse rendent également possible l'utilisation directe d'algorithmes d'optimisation standards car les contraintes du problème sont indéfiniment dérivables.

Les nouvelles méthodes de modélisation des incertitudes et approximations des contraintes fiabilistes, que nous avons proposées, ont été appliquées avec succès sur un cas test en phase conceptuelle avion (A320). En comparaison à l'étude conservatrice qui était implémentée elle permet une réduction de la masse de 15,5 % et assure une fiabilité du système supérieure à 90 % (qui sont des risques acceptables au niveau de l'étude conceptuelle). En utilisant notre approche, le concepteur peut maintenant mettre en place dès les premières étapes de la conception un design optimal peu sensible aux incertitudes. Selon l'avis d'experts, l'implémentation de notre méthodologie permettrait un gain de 6 à 12 mois dans le processus de conception d'un nouvel avion dont la durée moyenne est de 7 ans. En effet, en positionnant correctement les marges de couverture du risque dès les premières étapes de la conception nous minimisons le nombre de boucles de reconception.

Toutefois, lorsque le nombre de degrés de liberté du problème augmente (par exemple lors des phases de conception en aval de l'étude conceptuelle), le temps de calcul nécessaire pour établir les modèles de substitution peut devenir important (notamment lorsque nous souhaitons une précision fine). Dans l'optique de pouvoir prendre en compte un plus grand nombre de variables de conception et améliorer la performance de l'étude conceptuelle, nous nous sommes orientés vers de nouvelles techniques. L'émergence de nouveaux outils informatiques, issus de l'intelligence artificielle, sont riches au niveau du raisonnement et surtout capables d'interagir, d'apprendre collectivement, et peuvent permettre de répondre au problème de temps de calculs. Une approche d'optimisation multidisciplinaire performante a récemment été développée au sein du projet ANR [ID4CS](#) dans lequel s'inscrit cette thèse : le système multi-agent adaptatif. Cependant, cette approche était jusqu'alors uniquement utilisée dans un contexte déterministe. Nous avons donc mis en place une méthodologie de gestion des incertitudes dans un problème agentifié afin de concevoir des systèmes fiables et robustes et contrôler le risque. Notre nouvelle approche de résolution de problèmes d'optimisation multidisciplinaire sous incertitude est basée sur la propagation des incertitudes par le biais d'une méthode séquentielle à boucle unique (l'optimisation déterministe et l'analyse de la fiabilité du système se succèdent). Tout au long de ce travail nous avons illustré les capacités de cette nouvelle méthodologie par l'application à des problèmes tests, et en comparant les résultats à une méthode classique d'optimisation en double boucle mettant ainsi en évidence la pertinence des résultats. Notre nouvelle méthodologie de résolution de problème d'optimisation multidisciplinaire sous incertitude a été appliquée avec succès à la phase conceptuelle d'un avion à turbopropulseurs (ATR42). En comparaison à une méthode de propagation standard, les [AMAS](#) (« Auto-adaptative Multi-Agent System ») couplés à une méthode d'optimisation séquentielle, permettent de réduire considérablement le nombre d'analyses de fiabilité du système. Notre nouvelle approche permet de déterminer l'optimum en 10 minutes (sur un poste de travail per-

sonnel) à comparer aux 2 heures de la méthode d'optimisation classique en double boucle. Ces temps de calcul peuvent paraître faibles cependant nous étudions un problème en phase conceptuelle, ainsi lors d'études en conception plus détaillées ces temps seront significatifs et les gains d'autant plus importants. On notera aussi que le nombre d'analyses de la fiabilité est divisée par 135 grâce à notre approche. D'autre part, nous avons mis en évidence des aspects importants de notre système notamment la propriété d'insensibilité par rapport au choix du point initial. La nouvelle approche que nous avons développée donne donc la possibilité au concepteur de maîtriser de nombreux aspects d'un problème d'optimisation multidisciplinaire : diverses disciplines implémentées, interdépendances entre celles-ci, incertitudes affectant les performances, simulation de modèles lourds en temps de calculs etc. Notre méthode s'avère donc être un outil performant pour la résolution de problèmes de conception complexes. Ces recherches ont donné lieu à une conférence internationale [67] et un article est en cours de soumission.

Les méthodologies que nous avons élaborées sont un premier pas pour la résolution de problèmes d'optimisation au stade de la conception. L'extension de ces travaux de recherches concerne tout particulièrement les domaines suivants :

- la prise en compte de l'aspect multi-niveaux. Les disciplines du problème considéré peuvent être représentées par des modèles de granularité différente. Il apparaît nécessaire de pouvoir faire évoluer la finesse de description d'un modèle au cours du processus d'optimisation afin de rendre le processus d'optimisation à la fois fidèle et efficace en termes de coûts de calcul. Ce processus d'optimisation multi-niveaux de modèles soulève alors de nombreuses questions : quelles sont les règles définissant les conditions d'utilisation de modèles de grosse granularité ou de granularité plus fine lors du processus d'optimisation ? Comment transférer les résultats d'optimisation issus d'un modèle vers un autre ?
- l'application de la méthodologie à des problèmes multi-objectifs. Dans un contexte d'optimisation international, il peut être intéressant qu'un industriel se positionne par rapport à ses concurrents au travers de diverses performances optimisées.
- les résultats, obtenus grâce à la nouvelle méthodologie de résolution de problèmes d'optimisation probabiliste par le biais d'un système multi-agent, ont été validés mais doivent encore être confrontés à d'autres problèmes de conception plus détaillés (augmentation progressive du nombre de variables de conception tout au long du processus de développement du système étudié). Nous souhaiterions également appliquer nos travaux dans un contexte de recherche de configurations innovantes d'avion pour lesquels un faible nombre de données sont disponibles (exemple : moteur au-dessus des ailes).

ANNEXES

A

TECHNIQUES DE MODÉLISATION DES INCERTITUDES

Les incertitudes peuvent être modélisées de différentes manières dont les plus répandues sont les suivantes : la modélisation par intervalle, la modélisation probabiliste, la modélisation possibiliste et la modélisation par le biais de la théorie de l'évidence. Dans cette annexe nous présentons ces différentes méthodes permettant de modéliser les incertitudes.

A.1 CADRE THÉORIQUE DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS

D'un point de vue formel, les probabilités sont définies sur un espace de probabilité PS :

$$PS = \{US, S, P\} \quad (\text{A.1})$$

où US est l'ensemble universel contenant tous les événements qui peuvent se produire dans cet univers particulier, S est un sous-ensemble de US et P est une fonction définissant une probabilité sur des éléments de S , i.e. P est une mesure de probabilité. Notez que S constitue ce qu'on appelle une σ -algèbre. La mesure de probabilité P a les propriétés suivantes : pour un événement e de S nous avons $0 \leq P(e) \leq 1$, $P(US) = 1$ et pour une séquence d'événements disjoints e_i de S nous avons alors $P(\sqcup e_i) = \sum P(e_i)$. En outre, une propriété importante intrinsèque à la théorie des probabilités est que la somme de la probabilité d'un événement et la probabilité de sa complémentaire est égale à un :

$$P(e) + P(e^c) = 1 \quad (\text{A.2})$$

Les variables aléatoires sont associées à des occurrences d'événements différents. Les variables aléatoires peuvent être discrètes ou continues, nous nous bornerons uniquement à décrire le cas de variables aléatoires continues. Une variable aléatoire est désignée par une lettre majuscule (par exemple X), alors qu'une réalisation particulière (ou instance) de la variable aléatoire est notée en minuscules (par exemple x). La nature de l'incertitude sur X est représentée par la fonction de densité de probabilité (PDF « Probability Density Function »), notée $f_X(x)$. Les densités de probabilité peuvent par exemple être uniformes, normales, log-normales, exponentielles, de type gamma etc. Pour une description détaillée de ces distributions, nous renvoyons le lecteur à n'importe quel manuel de statistiques, tel que [32]. En pratique, les densités de probabilité sont souvent construites sur la base de résultats expérimentaux (échantillons) ou à partir du jugement d'un ingénieur analyste.

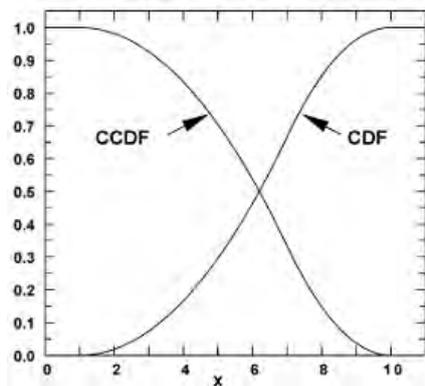
La probabilité que X ait une valeur comprise entre x_1 et x_2 s'exprime en fonction de la densité de probabilité par le biais de la formule suivante :

$$P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx \quad (\text{A.3})$$

La probabilité $P(X \leq x)$, notée $F_X(x)$ est appelée fonction de répartition ou fonction de distribution cumulative (CDF « Cumulative Distribution Function »). Elle est donnée par la formule ci-dessous. On note que la PDF est la dérivée de la CDF.

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx \quad (\text{A.4})$$

Alternativement, les fonctions de distribution cumulatives complémentaires (CCDF « Complementary Cumulative Distribution Function ») peuvent également être définies par $P(X \geq x)$. Les représentations de l'incertitude par le biais de la CCDF sont souvent favorisées car cela permet de répondre à la question : « quelle est la probabilité qu'un résultat se produise ? », qui est généralement la question d'intérêt dans l'évaluation des risques. D'autre part, les représentations utilisant cette fonction facilitent la comparaison graphique avec les modélisations d'incertitude alternatives comme nous le verrons dans les sections suivantes. Un exemple de fonction de distribution cumulative ainsi que sa complémentaire est donné figure A.1. Elles ont été obtenues pour une incertitude sur la variable X représentée par une fonction de densité de probabilité triangulaire sur l'intervalle $[1, 10]$, avec le mode à 7 (c'est à dire le pic de la distribution).



Loi triangulaire:
Densité de probabilité, continue sur $[a, b]$

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{2(x-b)}{(b-a)(c-a)} & a \leq x \leq c \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & c \leq x \leq b \end{cases}$$

FIGURE A.1: Exemple de fonction de distribution cumulative (CDF) et sa complémentaire (CCDF)

La variable aléatoire X peut également être caractérisée par des quantités telles que la moyenne μ , l'écart-type σ et le coefficient de corrélation ρ dans le cas de variables aléatoires multidimensionnelles.

$$\begin{cases} \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \\ \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx \\ \rho_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

D'autres mesures telles que l'aplatissement et l'asymétrie (moments d'ordres supérieurs) ne sont pas détaillées ici, mais nous renvoyons le lecteur à [32].

A ce stade, nous introduisons la notion de propagation d'incertitude. On considère une fonction g dépendant de plusieurs variables x_1, \dots, x_n et la réponse associée $y = g(x_1, \dots, x_n)$. On suppose qu'il existe des incertitudes sur les quantités x_1, \dots, x_n telles qu'elles deviennent des variables aléatoires X_1, \dots, X_n . On souhaite déterminer l'incertitude résultante sur la réponse y . Ainsi, nous cherchons à caractériser la variable aléatoire Y . Dans ce cas, il existe une formule analytique afin de déterminer la valeur moyenne de Y :

$$\mu_g = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2, \dots, x_n) f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (\text{A.6})$$

Si g est une fonction complexe, qui n'est pas connue de manière explicite (obtenue par exemple par le biais d'une simulation par éléments finis), alors les formules analytiques présentées ci-dessus ne sont généralement pas utilisées. Les expériences de Monte-Carlo peuvent être employées afin de propager les incertitudes de X_1, \dots, X_n sur Y . La simulation de Monte-Carlo consiste en l'échantillonnage de N valeurs X_1, \dots, X_n ainsi que le calcul de la valeur de y pour chaque échantillon. Nous obtenons ainsi N échantillons de Y que l'on peut caractériser et sur lesquels nous pouvons effectuer des tests statistiques afin de caractériser la fonction de densité de probabilité de Y . Des techniques alternatives de propagation d'incertitudes existent également. Nous pouvons citer par exemple l'approche des générateurs des nombres aléatoires communs [142] (technique de réduction de la variance permettant de diminuer la taille de l'échantillon nécessaire afin d'atteindre une précision fixée) ou le procédé de Robins Monro [107] (mise en place d'un algorithme séquentiel afin d'estimer les moments d'une variable aléatoire). De plus amples explications sont données dans les chapitres 6 et 7 selon le problème considéré.

Nous avons présenté ici un cadre général de représentation probabiliste de l'incertitude. Cependant, selon le type d'incertitudes (épistémiques ou aléatoires) affectant un système, des méthodes de modélisation différentes doivent être appliquées afin de les quantifier et ainsi d'évaluer la robustesse et la fiabilité des solutions.

A.1.1 Approche probabiliste pour les incertitudes de type aléatoire

Les incertitudes aléatoires sont généralement représentées par une modélisation probabiliste basée sur des échantillons, obtenus par le biais d'expé-

riences réelles ou par simulations, avec un certain niveau de confiance [83]. La fonction de répartition expérimentale de la variable aléatoire peut alors être obtenue à partir de ces échantillons. Un exemple de fonction de répartition empirique déterminée à partir de 1000 échantillons issus d'une distribution normale centrée réduite (de moyenne nulle et écart-type unitaire) est illustré figure A.2. Sur la figure la ligne magenta représente la CDF normale réelle.

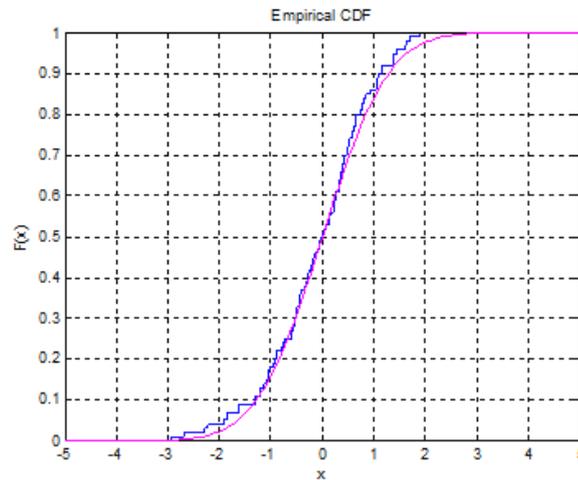


FIGURE A.2: Exemple d'une fonction de répartition empirique (en bleu) à partir de 1000 échantillons issus d'une distribution normale centrée réduite

Concernant des variables aléatoires dont les lois de probabilité sont jointes, le coefficient de corrélation empirique entre X_1 et X_2 peut être calculé à partir de :

$$\rho_{emp} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_{1,i} - \mu_{1,emp})(x_{2,i} - \mu_{2,emp}) \quad (\text{A.7})$$

Par ailleurs, des tests d'hypothèses, tels que le test de Kolmogorov-Smirnov [88], permettent de vérifier si les échantillons proviennent d'une distribution de probabilité spécifique. L'ensemble de ces mesures et des outils présentés sont adaptés à la quantification des incertitudes aléatoires lorsque suffisamment d'échantillons sont présents. Dans le cas d'un nombre d'échantillons insuffisant, ces mesures peuvent introduire une erreur revenant ainsi à considérer une incertitude épistémique supplémentaire s'ajoutant à l'incertitude aléatoire. Comme expliqué précédemment, la partie épistémique représente un manque de connaissance sur la répartition réelle du à une insuffisance des données. Cette incertitude est évidemment réductible et ce, en effectuant des simulations supplémentaires.

A.1.2 Approche probabiliste pour les incertitudes de type épistémique

Même si l'incertitude épistémique est en théorie toujours réductible, dans la pratique elle ne peut être totalement réduite en raison de ressources limi-

tées (calculs, expériences, coût, etc.). Ainsi, nous avons besoin de quantifier l'incertitude relative au manque de connaissance. Cette incertitude épistémique peut être quantifiée en utilisant une distribution de probabilité. Prenons un exemple : lorsque nous mesurons une certaine quantité, nous pouvons supposer que la valeur réelle de cette quantité est égale à la valeur mesurée à laquelle s'ajoute un biais. Celui-ci peut par exemple être représenté par une variable aléatoire dont la distribution est normale de moyenne nulle et d'écart type standard quelconque. L'incertitude épistémique est ainsi quantifiée par le biais de cette distribution normale. Les principaux avantages d'une modélisation probabiliste de l'incertitude épistémique sont les suivants :

- bonne base théorique de la méthode probabiliste ;
- théorie de modélisation des incertitudes probabilistes bien connue du public non-spécialiste ;
- efficacité des techniques probabilistes de propagation des incertitudes ;
- combinaison simple des incertitudes aléatoires et épistémiques dans un même problème ;

Un des problèmes majeurs engendrés par une modélisation probabiliste de l'incertitude épistémique concerne l'estimation de la distribution. Dans notre exemple, nous avons besoin de déterminer quel est l'écart-type à utiliser pour la distribution normale, ce qui peut s'avérer complexe, car la valeur réelle de la quantité n'est pas facile à obtenir (même en utilisant des méthodes de mesure subsidiaires). De plus, nous avons fait l'hypothèse d'une distribution normale, cette modélisation est courante mais peut ne pas refléter correctement la réalité dans certains cas (les tests de normalité permettent de valider ou non une telle hypothèse à condition de disposer des données nécessaires). Les principales questions à aborder lors de la modélisation d'incertitudes épistémiques sont alors les suivantes :

- avons-nous suffisamment de données afin de choisir une distribution particulière de paramètres fixes afin de modéliser l'incertitude ?
- si nous formulons des hypothèses arbitraires sur le type de distribution de probabilité, cela nous conduira-t-il à des résultats raisonnables ?

Nous allons mettre en évidence dans les paragraphes suivants trois illustrations de cas où la modélisation de l'incertitude épistémique basée sur une approche probabiliste pourrait être problématique et mener à des résultats contre-intuitifs.

Dans ce premier exemple nous démontrons que certains problèmes peuvent survenir lors de la modélisation des incertitudes épistémiques par le biais d'une distribution de probabilité uniforme. Dans le cas où un expert peut fournir deux bornes sur une quantité incertaine et lorsqu'aucune information supplémentaire concernant la structure de l'incertitude n'est disponible entre ces limites, le principe d'indifférence (également connu sous le nom de principe de raison suffisante) conduit à la modélisation de l'incertitude par une loi uniforme entre les bornes. Dans certains cas cette représentation peut être problématique, car une distribution uniforme a des caractéristiques spécifiques au sein de la théorie des probabilités. En particulier, le choix d'une modélisation d'une distribution uniforme sur une quantité X

ou sur son carré X_2 n'est pas indifférent. Par exemple, nous cherchons à estimer l'incertitude affectant la mesure d'une surface carrée de côté x . Afin de la prédire, nous pouvons demander à un expert d'estimer l'incertitude sur x ou d'établir directement une estimation de l'incertitude sur l'aire x^2 . Supposons que la seule information que l'expert puisse nous fournir soit des bornes. Si nous lui demandons des données concernant l'incertitude sur x , il peut nous affirmer que la valeur se situera entre a et b . Si nous lui demandons d'estimer l'incertitude sur la surface x^2 , il nous dira alors que la valeur se trouve entre a^2 et b^2 . Nous pouvons appliquer le principe d'indifférence soit sur les bornes de X , soit sur celles de X^2 et modéliser l'incertitude par une distribution uniforme. Cependant, ces deux choix ne sont pas équivalents. En effet, si nous modélisons l'incertitude par le biais d'une distribution uniforme sur X , et que nous propagions celle-ci sur X^2 , nous n'obtiendrons pas une distribution uniforme pour X^2 . Ceci est illustré figure A.3 pour une variable X suivant une distribution uniforme sur $[0,1]$. Si X suit une distribution uniforme nous observons alors que les faibles valeurs de X^2 sont plus susceptibles de se produire que les valeurs élevées. La variable aléatoire X^2 ne peut donc pas être modélisée par une distribution uniforme. Bien que ces résultats soient conformes à la théorie des probabilités, ils peuvent mener à des résultats erronés concernant la modélisation de l'incertitude épistémique. Il en est ainsi, si nous modélisons indifféremment la variable aléatoire X entre a et b ou la variable aléatoire X^2 entre a^2 et b^2 par le biais d'une loi uniforme.

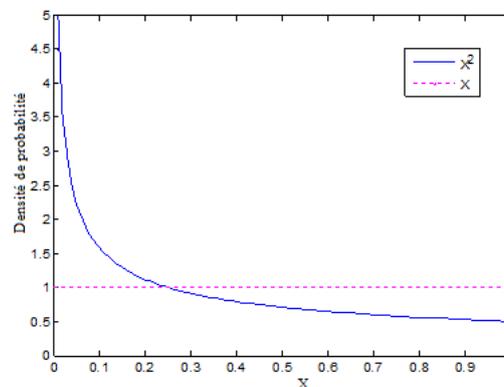


FIGURE A.3: Figure 11 Représentation de la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$ (ligne en pointillée) ainsi que celle correspondant à X^2 (trait plein) obtenue par propagation de l'incertitude

Un deuxième exemple issu de Nikolaidis et al. [94] met également en avant le fait que des résultats non physiques peuvent intervenir lorsque les incertitudes épistémiques sont modélisées de façon inappropriée. Considérons une structure soumise à des vibrations. Afin d'éviter que le système rentre en résonance et qu'une défaillance structurale se produise, certaines

fréquences doivent être évitées. Si nous imposons que la réponse de la structure soit inférieure à certaines limites (afin d'empêcher par exemple une flexion excessive), alors la zone de rupture sera délimitée telle qu'illustrée sur la figure A.4 pour une fonction générique définissant la fréquence de réponse. Supposons qu'il existe une grande incertitude épistémique sur les valeurs des fréquences auxquelles la structure sera soumise. En l'absence d'informations supplémentaires le principe d'indifférence est appliqué et nous supposons que les fréquences sont des variables aléatoires modélisées par une distribution uniforme sur $[a, b]$ (voir figure A.4). La probabilité de défaillance est ainsi définie par l'aire sous la courbe de distribution dans la zone de rupture. Nous supposons maintenant que le concepteur change d'avis et suppose que l'incertitude sur les fréquences auxquelles est soumise la structure est supérieure à celle précédemment prédite. En conséquence, l'incertitude est modélisée par une distribution uniforme à l'intérieur d'un nouvel intervalle $[\tilde{a}, \tilde{b}]$, afin de tenir compte de l'augmentation de l'incertitude épistémique (voir figure A.4). Ceci a pour conséquence de diminuer l'aire sous la courbe de distribution à l'intérieur de la zone de rupture, ce qui conduit à une diminution de la probabilité de défaillance. Cet exemple illustre une situation où lorsque nous augmentons une incertitude épistémique nous diminuons la probabilité de défaillance. Nous sommes donc confrontés à un résultat paradoxal : nous devrions normalement démontrer qu'une incertitude épistémique élevée (manque important de connaissances) conduit à des produits peu fiables (c'est à dire une forte probabilité d'échec). La fiabilité des produits peut alors être améliorée en augmentant la connaissance (i.e. réduction de l'incertitude épistémique).

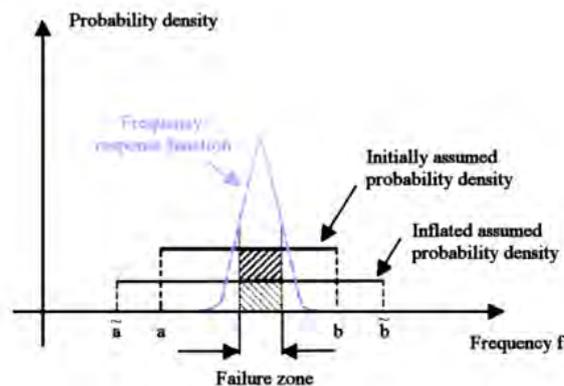


FIGURE A.4: Illustration issu de [94] d'un phénomène non physique lié à une mauvaise représentation de l'incertitude épistémique : diminution de la probabilité de défaillance lorsque l'incertitude augmente

Nous pouvons également déduire de l'exemple précédent une troisième situation paradoxale. Nous considérons que la véritable incertitude correspond à une distribution uniforme sur $[a, b]$. Du fait que nous ne connaissons pas précisément les paramètres de cette distribution et que nous souhaitons

être conservatifs, nous faisons l'hypothèse que l'incertitude est grande, ainsi f suit une loi uniforme sur $[\tilde{a}, \tilde{b}]$. En tant que concepteur, nous souhaitons modifier la structure afin de réduire la probabilité de défaillance. Nous supposons qu'une modification du design de la structure a été apportée (par exemple : changement de la géométrie, des matériaux etc.), permettant de déplacer la zone de rupture sur un intervalle $[\tilde{a}, a]$. Si l'on considère la distribution de probabilité réelle de f (uniforme sur $[a, b]$) alors cette modification de la structure a pour conséquence de diminuer la probabilité de défaillance puisque la zone de rupture se situe hors de l'intervalle $[a, b]$. Toutefois, étant donné que nous ne connaissons pas la distribution réelle de f et que nous souhaitons être conservatif, nous considérons une incertitude plus importante sur f et donc une distribution sur un intervalle plus grand. La conséquence de la modification du design est invisible ici. La probabilité de défaillance reste inchangée, car la zone de défaillance se situe toujours dans la distribution uniforme élargie. Cela signifie ainsi qu'une modélisation probabiliste de l'incertitude épistémique inappropriée peut fausser les résultats obtenus. Nous sommes donc dans l'incapacité de prévoir l'évolution de la probabilité de défaillance due à des modifications de conception.

A.2 MODÉLISATION PAR INTERVALLES

Afin de mettre en place une représentation probabiliste de l'incertitude, il faut préalablement identifier les lois de probabilité auxquelles sont soumis les paramètres incertains. En pratique, cette opération peut nécessiter beaucoup d'essais, et ce particulièrement lorsque les paramètres incertains sont nombreux. Pour cette raison, des techniques alternatives ont été proposées, basées sur des modélisations simplifiées de l'incertitude : la théorie des intervalles. Celle-ci consiste à représenter une grandeur incertaine en se donnant simplement deux bornes entre lesquelles elle varie. On cherche alors entre quelles bornes varie le résultat du calcul. L'avantage d'une telle approche est qu'elle ne nécessite pas beaucoup de données. Nous présentons dans cette section la technique de modélisation des incertitudes par intervalles, ainsi qu'une variante plus évoluée.

A.2.1 *Analyse par intervalles*

Comme vu dans la section A.1, l'un des problèmes intervenant lors de la modélisation des incertitudes épistémiques est le manque d'informations afin de déterminer une distribution de probabilité représentant fidèlement la réalité. Pourtant, dans de nombreux cas, l'incertitude peut au moins être bornée dans un certain domaine. Une quantification très large de l'incertitude peut par exemple être obtenue par le biais des contraintes physiques qui imposent des limites sur les quantités d'intérêt. Ainsi, grâce à des considérations physiques, le coefficient de Poisson d'un matériau isotrope ne peut qu'être compris entre -1 et 0.5. En obtenant l'avis d'un expert les limites peuvent être considérablement réduites. Dans notre exemple, un ex-

pert pourrait être en mesure d'affirmer que pour le matériau que nous étudions, le coefficient de Poisson se situe seulement entre 0.1 et 0.4. À partir de ces informations il est impossible de caractériser la façon dont l'incertitude varie à l'intérieur de ces limites. En effet, les bornes peuvent être la seule information connue dans certains cas. Daney et al [28] illustrent un tel cas où le bruit de mesure sur l'étalonnage de robots parallèles est modélisé par des intervalles.

L'analyse par intervalles permet de considérer les cas où l'incertitude est caractérisée par des bornes sur la quantité d'intérêt. En conséquence, l'incertitude sur les variables x_1, \dots, x_n est décrite par des bornes inférieures $x_1^{ib}, \dots, x_n^{ib}$ et des bornes supérieures $x_1^{sb}, \dots, x_n^{sb}$. De nombreuses recherches dans l'analyse par intervalles se concentrent sur la propagation de l'incertitude de x_1, \dots, x_n sur $y = g(x_1, \dots, x_n)$, où g est une fonction arbitraire. Tout le problème est alors de déterminer les limites inférieures et supérieures, ce qui revient à résoudre un problème d'optimisation global. Ainsi, de nombreux algorithmes d'optimisation globale peuvent être mis en œuvre afin de déterminer la solution de ce problème. Notez que dans le cas où la fonction g à valeurs réelles est monotone sur tout l'espace de variation des variables d'entrée x_1, \dots, x_n alors les limites inférieures et supérieures peuvent être déterminées très facilement. En effet, en raison de la monotonie, il suffit d'évaluer y aux sommets de l'hypercube formé par les bornes sur les variables d'entrée. La limite inférieure et la limite supérieure de y sont nécessairement le minimum, respectivement le maximum sur l'espace de variation. Cette méthode est appelée la méthode des vertex. D'autres techniques utilisent les développements de Taylor afin de calculer approximativement les limites de la variable de sortie. Pour un aperçu des algorithmes performants dans l'analyse des intervalles, le lecteur peut se référer à [79].

Des techniques d'échantillonnage similaires à la simulation de Monte-Carlo peuvent également être utilisées dans le cas où aucune simplification du problème (linéarisation, monotonie) ne peut être effectuée. Toutefois, ce procédé peut être extrêmement coûteux en temps de calculs et les techniques d'optimisation globale sont généralement plus efficaces (voir [79]).

Un inconvénient important concernant la modélisation des incertitudes par intervalles est qu'il n'existe pas de mesure d'incertitude. Puisque l'incertitude est caractérisée uniquement par les bornes des intervalles, nous n'avons pas d'informations à disposition concernant la probabilité des valeurs dans cet intervalle. Dans la théorie des probabilités, la vraisemblance des différentes valeurs est quantifiée par le biais de la fonction de densité de probabilité qui permet de déduire la probabilité que certaines valeurs se trouvent dans un domaine défini, soit de définir une mesure d'incertitude.

L'analyse par intervalle fournit dans la majorité des cas une mesure grossière de l'incertitude diminuant ainsi l'attrait de cette méthode dans des applications telles que l'optimisation fiabiliste ou robuste. Cependant, lorsque les variables d'entrée peuvent être délimitées avec précision, l'analyse par intervalles fournit des outils performants afin de déterminer l'intervalle auquel appartient la grandeur de sortie avec certitude (à condition que la définition des intervalles de variation des incertitudes soumises aux variables

d'entrée soit exacte). Ceci est particulièrement utile dans les cas, où seul le pire des cas, doit être pris en considération. la théorie du cas le plus défavorable est un cas particulier de la théorie des probabilités (nous souhaitons avoir une probabilité de défaillance nulle). On note que des méthodes de propagation concernant ce type d'incertitudes seront présentées en détail dans les annexes [B](#) et [C](#).

Une modélisation plus évoluée à été développée à partir de l'analyse de l'incertitude par intervalles. Nous présentons cette méthode dans la section suivante.

A.2.2 *La théorie des ensembles flous*

L'incertitude épistémique est quantifiée par le biais de bornes dans l'analyse d'intervalles, cependant dans de nombreuses études de plus amples informations sont disponibles. Par exemple lorsque vous demandez à un expert quelles sont les informations qu'il peut nous fournir concernant une quantité x , il peut être en mesure de donner les bornes de la quantité en question : [1.1, 1.9], et certifier que celle-ci ne peut se situer en dehors de cet intervalle. L'information fournie est suffisante pour l'analyse par intervalles. Toutefois, si des informations complémentaires sont demandées à l'expert, celui-ci peut être en mesure de réduire l'intervalle auquel appartient la quantité à [1.5, 1.6], et stipuler que la variable se situe en dehors de cet intervalle uniquement dans de rares cas. Les bornes 1.1 et 1.9 sont les limites des cas extrêmes, mais sont peu probables. Les informations fournies par l'expert peuvent ainsi être modélisées grâce à la théorie des ensembles flous par le biais d'une fonction d'appartenance trapézoïdale comme illustré figure [A.5](#). Les valeurs les plus probables appartiennent à l'intervalle [1.5, 1.6] et sont associées à une fonction d'appartenance égale à 1. La fonction d'appartenance diminue ensuite de manière linéaire jusqu'aux bornes 1.1 et 1.9 (limites fournies par l'expert). Pour toute valeur α de la fonction d'appartenance, nous pouvons obtenir un intervalle de x associé à cette valeur spécifique (la figure [A.5](#) illustre une α -coupe avec $\alpha = 0.6$).

Les fonctions d'appartenance triangulaires sont couramment utilisées dans la théorie des ensembles flous car elles permettent d'obtenir la valeur la plus probable d'une quantité d'intérêt ainsi que ses limites absolues. Notez que d'autres fonctions d'appartenance arbitraires peuvent également être utilisées. Si nous établissons un parallèle avec la théorie des probabilités, les intervalles associés aux diverses valeurs de la fonction d'appartenance peuvent être considérés comme équivalents à des p-boîtes pour différents niveaux de confiance. Pour de plus amples détails, le lecteur peut se référer à Zadeh [[143](#)] qui a introduit les concepts de base de la théorie des ensembles flous.

De même que pour l'analyse par intervalles, une des questions primordiales est de savoir comment l'incertitude peut être propagée à travers une fonction g . Etant donné qu'il est possible d'associer à chaque valeur d'appartenance α un intervalle correspondant, la propagation des incertitudes

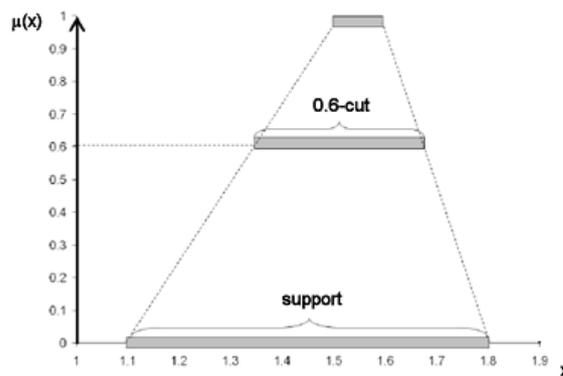


FIGURE A.5: Théorie des ensembles flous : exemple de fonction d'appartenance de type trapézoïdale

se résume à effectuer une analyse par intervalles pour différents niveaux α . Évidemment, plus le nombre de coupes à un niveau α utilisé est important, plus la précision de la fonction d'appartenance de la grandeur de sortie est fine. Afin d'illustrer cette démarche, nous allons utiliser un exemple issu de Verma et al. [132] mettant en application l'analyse des ensembles flous pour le transport des pesticides à travers les couches non saturées du sol. Dans cet article, le problème est de déterminer le profil de la concentration $C(z)$ d'un pesticide sur toute la profondeur z du sol. La concentration dépend également du temps t et de 12 autres paramètres (densité de la couche du sol considérée, coefficients de dispersion), notée p_1 à p_{12} , supposés incertains :

$$C = g(z, t, p_1, p_2, \dots, p_{12}) \quad (\text{A.8})$$

L'incertitude sur les variables p_1 à p_{12} , est modélisée par la théorie des ensembles flous à l'aide des fonctions d'appartenance triangulaires. La concentration a été déterminée par simulations numériques, le profil de celle-ci est tracé sur la figure A.6. Les profils sont représentés pour trois valeurs de la fonction d'appartenance ($\beta = 0, 0.5$ et 1). Le diagramme fournit pour chacune des valeurs précédentes la plage de concentration à une profondeur donnée. Alternativement, si nous supposons une valeur seuil de concentration, nous pouvons prédire un rang de profondeur à laquelle ce seuil sera atteint. Plus la valeur d'appartenance est faible, plus l'intervalle d'incertitude concernant la concentration ou encore la profondeur atteinte est grande.

Un des avantages concernant la quantification des incertitudes épistémiques par le biais de la théorie des ensembles flous est la capacité à modéliser des informations vagues. Cette méthode permet en particulier, d'ajouter un niveau d'incertitude comparé à l'analyse par intervalles. En effet, la théorie des ensembles flous est relativement bien adaptée à la modélisation d'informations issues d'experts concernant les incertitudes épistémiques. Des informations non concordantes fournies par des experts peuvent également être regroupées afin d'obtenir une représentation unique de l'incertitude.

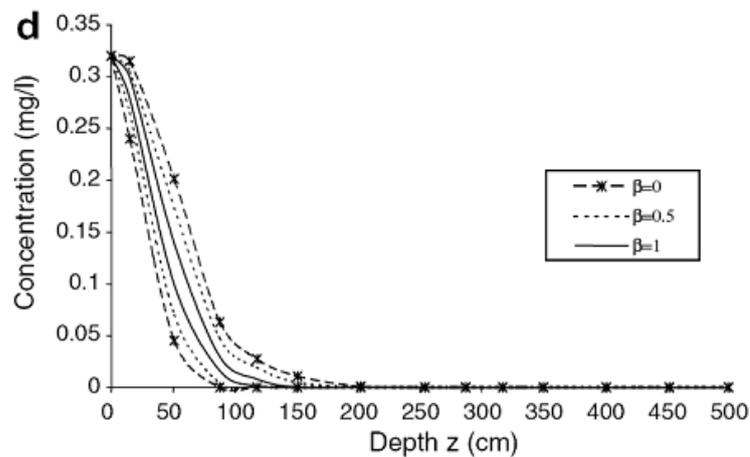


FIGURE A.6: Profil de concentration obtenu au bout de 90 jours pour différentes valeurs de la fonction d'appartenance ($\beta = 0, 0.5$ et 1), issu de l'article [132]

Des inconvénients de la représentation des incertitudes épistémiques par la théorie des ensembles flous résident cependant dans le manque d'une structure d'incertitude et parfois dans le coût de calcul. En effet, la théorie des ensembles flous ne fournit pas de mesure d'incertitude équivalente à la probabilité dans l'approche probabiliste (il en est de même pour la représentation par intervalle). Il est important de le noter car, même si une variable peut être caractérisée par sa fonction d'appartenance, la vraisemblance d'événements disjoints (dans la terminologie des ensembles flous cette notion est équivalente au concept d'événements disjoints dans la théorie des probabilités) peut ne pas être caractérisée par une valeur de la fonction d'appartenance.

Dans la théorie des ensembles flous, la quantification de l'incertitude est effectuée pour une coupe de niveau α donnée, néanmoins il n'existe pas de relation avec une mesure d'incertitude sur un ensemble de valeurs donné, ce qui a pour conséquence de diminuer l'attrait de la méthode. De plus, le temps de calcul induit par la propagation de l'incertitude peut être relativement élevé. En effet, il est nécessaire de procéder à une propagation de l'incertitude pour chaque coupe de niveau α , ce qui implique une analyse par intervalle pour chaque coupe. Dans le cas général, cela signifie qu'il est nécessaire de résoudre un problème d'optimisation globale pour chaque intervalle, ce qui peut devenir très coûteux si un nombre élevé de coupes de niveau α est pris en compte.

Afin de remédier aux inconvénients de cette méthode, la théorie des ensembles flous a été enrichie et une mesure d'incertitude nommée possibilité a été introduite. Ces études ont ainsi conduit à la théorie des possibilités que nous décrivons dans la section suivante.

A.3 LA THÉORIE DES POSSIBILITÉS

La plupart des paramètres que nous rencontrons dans le monde réel ne sont pas précisément définis [17], des techniques doivent ainsi être mises en place afin d'intégrer les incertitudes. Chaque technique ou théorie mathématique est capable de considérer seulement certains types spécifiques d'incertitudes. L'utilisation de la théorie des probabilités dans plusieurs domaines a donné des résultats importants [16]. Cependant, les outils « classiques » de la théorie des probabilités apparaissent parfois trop contraignants notamment dans la représentation de l'incertitude épistémique (manque de connaissance). Lorsque la donnée d'entrée permet seulement de juger que le paramètre incertain B se trouve entre les bornes $[a; b]$ est-il justifié de supposer a priori la forme de la loi de probabilité ? À cette question [45] répondent que l'on risque de sous- ou sur- estimer le résultat final et préconisent de rechercher d'autres outils mathématiques plus flexibles selon la donnée effectivement disponible afin de traiter ce type d'incertitude épistémique. La théorie des ensembles flous basée sur l'analyse d'intervalles a ainsi été développée et appliquée à la prédiction, le processus décisionnel et le contrôle d'actions dans des environnements caractérisés par l'incertitude, le manque de précision. Cependant cette méthode ne fournit pas de mesure de l'incertitude. La théorie des possibilités est basée sur la théorie des sous-ensembles flous [40]. Cette théorie est une branche importante de logique floue [143]. Dans cette théorie chaque variable a une distribution de possibilité associée permettant de décrire la possibilité que cette valeur spécifique soit correcte. Cette théorie permet d'évaluer quantitativement les critères qualitatifs, qui sont difficiles à modéliser par une valeur exacte [117]. Cette méthode permet ainsi une représentation unique des incertitudes et des imprécisions, et a la particularité de représenter les caractères vagues, flexibles et flous. Nous présentons cette méthode dans cette section.

D'un point de vue formel, la théorie des possibilités est appliquée sur un espace de possibilité $PosS$:

$$PosS = \{US, \pi\} \quad (A.9)$$

où US est un ensemble contenant tout les événements pouvant se produire dans l'univers en considération et π est une fonction définie sur US telle que $0 \leq \pi \leq 1$ pour $x \in US$ et $Sup \{\pi(x), x \in US\} = 1$. La fonction π est une mesure de possibilité de chaque élément de l'ensemble universel US et est appelée fonction de distribution de possibilité. Pour un événement e appartenant à l'ensemble US , la possibilité $Pos(e)$ est donnée par :

$$Pos(e) = Sup \{\pi(x), x \in e\} \quad (A.10)$$

Une seconde mesure de l'incertitude utilisée au sein de la théorie des possibilités est la nécessité d'un événement $Nec(e)$:

$$Nec(e) = 1 - Sup \{\pi(x), x \in e^c\} = 1 - Pos(e^c) \quad (A.11)$$

où e^c est le complément de e .

Un des axiomes fondamentaux concerne la possibilité de l'union d'événements disjoints, celle-ci est égale à la possibilité maximale parmi les événements :

$$\left\{ \forall A_i, i \in I \quad \pi(\cup_{i=1}^I A_i) = \underset{i \in I}{\text{Max}} \pi(A_i) \right. \quad (\text{A.12})$$

Cette relation est bien différente de la probabilité d'événements disjoints, égale à la somme des probabilités. Nous verrons dans les sections suivantes que ces axiomes permettent de modéliser les incertitudes par le biais de la théorie des possibilités de manière très différente en comparaison à la théorie des probabilités.

Les relations suivantes entre la possibilité et la nécessité découlent des définitions et axiomes précédents :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Nec}(e) \leq \text{Pos}(e) \\ \text{Nec}(e) + \text{Pos}(e^c) = 1 \\ \text{Pos}(e) + \text{Pos}(e^c) \geq 1 \\ \text{Pos}(e) < 1 \implies \text{Nec}(e) = 0 \\ \text{Nec}(e) > 0 \implies \text{Pos}(e) = 1 \end{array} \right. \quad (\text{A.13})$$

Pour une meilleure compréhension de la notion de possibilité nous fournissons ici la définition proposée par Nikolaidis et al. dans [94] :

« La possibilité permet de mesurer : a) le degré de certitude estimé par une personne qu'un événement puisse se produire, ou b) de vérifier que les informations disponibles ne contredisent pas l'hypothèse qu'un événement puisse se produire. Si un événement a une possibilité égale à 1, alors il n'y a aucune raison de croire que l'événement ne puisse avoir lieu. D'autre part, si nous croyons qu'un événement ne peut pas se produire, alors nous devons attribuer une possibilité nulle à cet événement. »

Il est possible de faire un parallèle entre la théorie des possibilités et celle des probabilités : dans une étude probabiliste la distribution de probabilité f représente une mesure de l'incertitude, dans la théorie des probabilités nous avons recours à une fonction de distribution de possibilité π afin de quantifier l'incertitude. La figure A.7 donne un exemple de distribution de possibilité. Notez que pour la quantification des incertitudes épistémiques, les fonctions d'appartenance au sein de la théorie des ensembles flous sont souvent utilisées comme une distribution de possibilité. Ce n'est toutefois pas nécessaire et toute distribution qui vérifie les axiomes de la théorie des possibilités, est appropriée.

De même que pour la théorie des ensembles flous, la distribution de possibilité peut être coupée à un niveau α (voir figure A.7) permettant ainsi d'obtenir un intervalle nécessaire lors de la propagation de l'incertitude. Encore une fois, la valeur de la possibilité (c'est à dire la valeur α) peut être

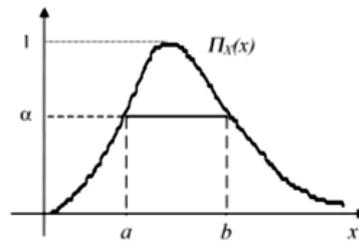


FIGURE A.7: Exemple d'une distribution de possibilité

considérée comme un niveau de confiance associé à une p-boite (soit l'intervalle $[a, b]$ ici). Cette notion est également conforme à la définition donnée ci-dessus par Nikolaidis et al. [94] en termes de confiance qu'un événement puisse se produire. Par conséquent, même si une distribution de probabilité et une distribution de possibilité sont similaires, elles ne représentent pas exactement la même information.

La théorie des possibilités donne accès à des fonctions semblables à celles de la théorie des probabilités telles que la fonction de densité de probabilité ou la fonction de distribution cumulative complémentaire. Ainsi il est possible de définir une fonction cumulative de densité de possibilité (CPoF « Cumulative Possibility Function »), une fonction cumulative de densité de nécessité (CNF « Cumulative Necessity Function »), ainsi qu'une fonction cumulative complémentaire de densité de possibilité (CCPoF « Complementary Cumulative Possibility Function ») et une fonction cumulative complémentaire de densité de nécessité (CCNF « Complementary Cumulative Necessity Function »).

Une illustration de ces fonctions cumulatives est fournie figure A.8 pour une distribution de possibilité définie comme suit : $r_X(x) = \frac{i}{5}$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$ et $i \leq x < i + 1$, $r_X(x) = \frac{10-i}{4}$ pour $i = 6, 7, 8, 9$ et $i \leq x < i + 1$ (ou $x \leq i + 1$ pour $i = 9$). Ainsi, les valeurs les plus probables se situent dans $[5, 7]$ et la valeur de la possibilité associée à cet intervalle est égale à 1. Les autres intervalles ont une possibilité de se produire plus faible, nulle en 1 et 10. Les valeurs inférieures à 1 ou supérieures à 10 sont donc considérées comme étant impossible.

Le caractère progressif de la fonction de distribution est propre à la modélisation de l'incertitude épistémique, souvent définie en termes d'intervalles. Les informations sur l'incertitude découlent typiquement du savoir des experts, qui fournissent des niveaux de confiance pour chaque intervalle dont les bornes sont de plus en plus grandes. Plus l'expert peut obtenir des informations précises sur l'incertitude, plus la distribution de la possibilité et les distributions CPoF et CNF correspondantes sont lisses.

Notez que toutes les propriétés concernant la possibilité et la nécessité, présentées au début de ce paragraphe peuvent être vérifiées pour les distributions cumulatives de la figure A.8.

Afin de construire les distributions de possibilité et de nécessité et ainsi quantifier les incertitudes, il est parfois nécessaire de combiner des données

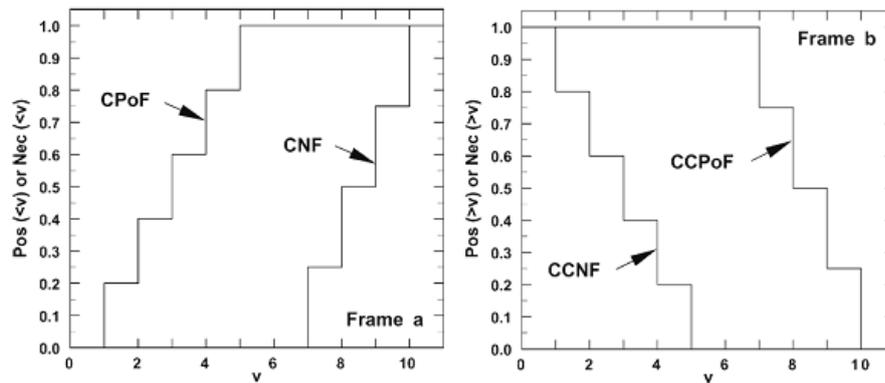


FIGURE A.8: Illustration de : a) fonction cumulative de densité de possibilité (CPoF), fonction cumulative de densité de nécessité (CNF); b) fonction cumulative complémentaire de densité de possibilité (CCPoF) et fonction cumulative complémentaire de densité de nécessité (CCNF)

issues de sources d'information distinctes. Des règles ont été développées afin d'y parvenir.

Une question importante dans la modélisation de l'incertitude épistémique est de savoir comment combiner des informations provenant de sources multiples, parfois contradictoires, (par exemple, des données antagonistes issues de différents experts). Des règles de combinaison ont ainsi été définies afin de traiter ces aspects. Considérons deux distributions de possibilité π_1 et π_2 . Voici les règles de combinaison les plus courantes :

- le mode conjonctif : équivalent à l'intersection d'événements. Nous considérons uniquement le consensus entre les deux distributions. Ce mode est représenté par les lignes en pointillés de la figure A.9.
- le mode disjonctif : équivalent à l'union des événements. Cette méthode revient à considérer l'union des deux distributions. Ce mode est représenté par une ligne en trait plein sur la figure A.9.

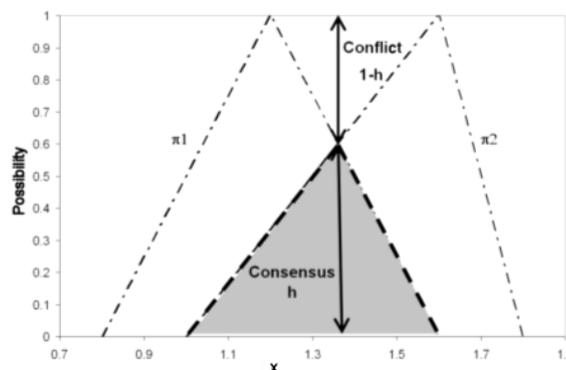


FIGURE A.9: Illustration des modes de combinaison entre deux distributions de possibilités triangulaires π_1 et π_2 : le mode de combinaison ou conjonctif (ligne en pointillés) et le mode disjonctif (trait mixte)

- le mode intermédiaire : proposé par Dubois et Prade [39], est la méthode permettant le mieux de gérer le conflit qui peut exister entre deux distributions. Le conflit est défini comme étant égal à $1 - h$, où h est le degré de consensus, c'est à dire la limite supérieure de l'intersection entre deux distributions. Le mode de combinaison intermédiaire est défini par l'équation suivante (équation A.14) et représenté graphiquement sur la figure A.10 :

$$\pi(x) = \text{Max}\left(\frac{\text{Min}(\pi_1(x), \pi_2(x))}{h}, \text{Min}((\text{Max}(\pi_1(x), \pi_2(x)), 1 - h))\right) \quad (\text{A.14})$$

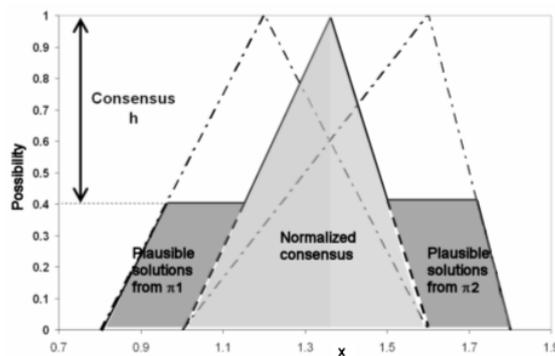


FIGURE A.10: Illustration du mode de combinaison intermédiaire (trait plein) pour deux distributions de possibilité triangulaires (traits en pointillés)

Ces trois modes de combinaison permettent généralement de traiter l'ensemble des cas pouvant être engendrés par différentes sources d'incertitude. Si les deux sources d'incertitude sont globalement concordantes (par exemple deux distributions trapézoïdales avec des noyaux qui se chevauchent) alors le mode conjonctif et le mode disjonctif sont appropriés. Le choix entre les deux se résume à savoir si nous souhaitons des résultats conservatifs (nous ne considérons que le consensus) ou si nous acceptons de prendre en considération des points de vue divergents.

En cas d'informations contradictoires (par exemple deux distributions trapézoïdales avec des noyaux qui ne se chevauchent pas), le mode conjonctif et le mode disjonctif sont moins appropriés. En effet, la distribution du mode disjonctif présente alors deux pics. Ce résultat n'est pas souhaitable, en particulier pour la propagation de l'incertitude. Le mode conjonctif est très restrictif puisque nous ne considérons que la partie correspondant à l'intersection des fonctions de dispersion. Ainsi, le mode intermédiaire est une solution acceptable, permettant la résolution des deux problèmes précédents. D'autres variantes du mode intermédiaire existent également. Dans ces méthodes une plus grande confiance est accordée à un expert plutôt qu'à un autre. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à Dubois et Prade [39].

Notez que ces règles de combinaison s'appliquent à une distribution de possibilité quelconque, mais peuvent également être appliquées à la théorie des ensembles flous.

Un des aspects importants lors de la modélisation des incertitudes est la propagation. De façon similaire à la théorie des ensembles flous, la propagation de l'incertitude est effectuée par l'analyse d'intervalles pour un degré de possibilité donné (correspond à une coupe de niveau α). Les différentes méthodes développées pour l'analyse d'intervalles sont donc disponibles. Ainsi, la méthode du vertex est particulièrement populaire lorsque la fonction de propagation est monotone ou peut être approchée par une telle fonction. Les méthodes d'échantillonnage basées sur les simulations Monte Carlo sont également exploitables.

La modélisation de l'incertitude épistémique conduit souvent à des distributions de possibilité par paliers. Lors de la propagation des incertitudes, le choix le plus judicieux concernant le nombre d' α -coupes à utiliser est alors le nombre de paliers intervenant dans la distribution de possibilité. Toutefois, si la distribution de possibilité est continue, le nombre d' α -coupes approprié est un problème spécifique dépendant de la non-linéarité de la fonction de propagation. Il est évident que plus le nombre de coupes utilisés est important, plus le coût de propagation est onéreux.

Un dernier point qu'il convient de noter est que dans la théorie des possibilités, la valeur la plus probable d'une fonction correspond à la valeur la plus probable de l'argument. Ce qui est rarement le cas avec les distributions de probabilités. En effet, si l'on prend l'exemple d'une variable X modélisée par une distribution de possibilité triangulaire, le point le plus probable afin que X^2 corresponde à 100 est égal à 10^2 , soit le maximum de X au carré.

La théorie des probabilités et la théorie des possibilités ont un certain nombre de points communs dans la façon dont elles permettent de représenter l'incertitude. Cependant, il existe également des divergences importantes. Dans la suite de cette section nous mettons en avant les différences et les similitudes entre ces deux méthodes.

D'un point de vue théorique, les différences entre les axiomes propres à la théorie des probabilités et ceux propres à la théorie des possibilités sont énumérées dans le tableau A.1. Notons que les mesures de probabilité et de possibilité sont monotones et non négatives. Cette règle constitue un des axiomes de la théorie des probabilités, ce qui n'est pas le cas pour la théorie des possibilités, cependant elle peut être déduite des deux premiers axiomes.

Une différence fondamentale entre la théorie des possibilités et la théorie des probabilités découle du troisième axiome (cf. tableau A.1), et concerne la gestion des événements disjoints. Alors que la mesure de probabilité est additive, la mesure de possibilité est sous-additive (la possibilité d'un événement, pouvant être divisé en sous événements, est inférieure ou égale à la somme des possibilités des événements constitutifs). Pour rappel, la probabilité de l'union d'un ensemble d'événements disjoints est égale à la somme

Mesure de la probabilité $P(\cdot)$	Mesure de la possibilité $\Pi(\cdot)$
1) Conditions aux limites : $P(\Omega) = 1$	1) Conditions aux limites : $\Pi(\emptyset) = 0$ $\Pi(\Omega) = 1$
2) Non-négativité : $P(A) \geq 0 \forall A \in S$	2) Monotonie $\forall A, B \in S, \text{ si } A \subseteq B,$ alors $\Pi(A) \leq \Pi(B)$
3) Additivité $\forall A_i, i \in I, A_i \text{ disjoints,}$ $P\left(\bigcup_{i=1}^I A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$	3) Sous-additivité $\forall A_i, i \in I,$ $\Pi\left(\bigcup_{i=1}^I A_i\right) = \max(\Pi(A_i))$

TABLE A.1: Comparaison entre les axiomes fondamentaux de la théorie des probabilités et ceux de la théorie des possibilités

des probabilités de chaque événement. En conséquence, si $\{A_1, \dots, A_n\}$ est une partition de l'événement universel Ω , les probabilités des sous-ensembles A_i s'additionnent et nous obtenons ainsi une probabilité égale à un. Il n'existe pas de telle loi pour les possibilités des sous ensembles A_i . Par exemple, la somme des probabilités des événements « Demain il pleuvra » et « Demain il ne pleuvra pas » doit être égale à un (ces événements sont supposés être les uniques événements de cet univers particulier). Cependant, si nous estimons que la possibilité que demain il pleuve soit de 0.7, alors nous devons imposer une possibilité que « Demain il ne pleuve pas » égale à 1. Cette implication est due au fait que la possibilité maximale d'un univers doit être de un. En effet, puisque la possibilité de Ω est égale au maximum des possibilités des événements A_i , la possibilité d'au moins un de ces événements doit être égale à 1. Ainsi, la somme des possibilités des événements dans l'univers Ω ne doit pas nécessairement valoir 1.

La théorie des probabilités et la théorie des possibilités sont toutes deux basées sur des distributions qui permettent de fournir une représentation de l'incertitude. Malgré le fait que les distributions puissent paraître similaires, il existe des différences importantes dans la façon dont les deux théories permettent de modéliser l'incertitude. La figure A.11 présente une illustration comparative entre une distribution de probabilité et une distribution de possibilité.

On peut noter les divergences suivantes entre les deux théories :

- l'aire sous la fonction de densité de probabilité à l'intérieur d'un intervalle est égale à la probabilité de la variable et ce quelque soit la valeur prise dans cet intervalle. L'aire sous la fonction de distribution de possibilité n'a pas de sens physique.

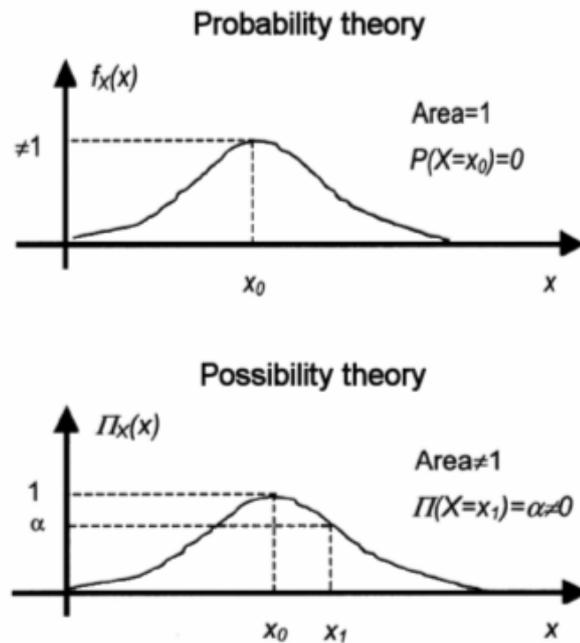


FIGURE A.11: Comparaison entre une distribution de probabilité $f_X(x)$ et une distribution de possibilité $\Pi_X(x)$

- l'aire totale sous la fonction de densité de probabilité est égale à 1 tandis que l'aire sous la fonction de densité de possibilité peut être inférieure ou supérieure à 1.
- dans le cas de distributions de probabilité continues, la probabilité que la variable prenne une valeur spécifique est nulle, alors que la possibilité d'un même événement peut prendre n'importe quelle valeur entre zéro et un.
- la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire doit être positive ou nulle, il en est de même pour la distribution de possibilité. Cependant, dans le cas de la fonction de distribution de possibilité, nous avons la condition supplémentaire que sa valeur maximale soit égale à 1.
- sur la courbe de distribution de possibilité, l'intervalle horizontal entre deux points de possibilité α représente une α -coupe, soit un ensemble précis contenant toutes les variables dont la possibilité est supérieure ou égale à α . Par exemple, l'intervalle $[a, b]$ de la figure A.7 représente un ensemble pour lequel la possibilité de chaque variable est supérieure ou égale à α . Il n'y a pas d'analogie concernant la fonction de densité de probabilité.

Pour assurer la cohérence entre les variables modélisées par la théorie des probabilités et celles modélisées par la théorie des possibilités la condition suivante est généralement imposée : la possibilité d'un événement doit être supérieure ou égale à sa probabilité. Ceci est en accord avec la distinction que nous établissons entre possible et probable : un événement probable doit être possible. Par exemple, « Il pleuvra sans doute » indique des preuves de chance de précipitation plus importantes que « Il pleuvra peut-être ». Cette

condition de cohérence induit le fait que la théorie des possibilités est habituellement plus conservatrice que la théorie des probabilités. Les différences entre les axiomes, ainsi que la condition de cohérence établie ci-dessus, impliquent ainsi des spécificités supplémentaires entre une modélisation par le biais de la théorie des probabilités et par le biais de la théorie des possibilités. Prenons par exemple une variable X dans l'intervalle $[8, 12]$ et comparons les deux façons de modéliser cette information. En se basant sur le principe d'indifférence, la variable X peut être modélisée par une distribution de probabilité uniforme sur $[8, 12]$. Cette répartition est représentée sur la figure A.12. La distribution de possibilité correspondante liée à l'information $[8, 12]$ est également représentée sur la figure A.12. Notez que plusieurs distributions de possibilité auraient pu être construites à partir de ces informations. En particulier, une distribution uniforme dont la possibilité est égale à 1. Cependant, une telle répartition est très conservatrice, et constitue la représentation la moins informative que nous puissions construire. La distribution triangulaire donnée figure A.12 est la distribution la plus informative que nous puissions obtenir, d'autre part elle satisfait toujours la condition de cohérence énoncée ci-dessus : la possibilité de tout événement sur X doit être égale ou supérieure à la probabilité correspondante. Il faut garder à l'esprit que la probabilité d'une variable X continue appartenant à un intervalle donné $[a, b]$, est l'aire sous la courbe délimitée par $x = a$ et $x = b$. La possibilité d'une variable continue X étant égale à x , est l'ordonnée de ce point sur la courbe de distribution de possibilité. Compte tenu de la propriété $Pos(e) = Sup\{\pi(x), x \in e\}$, cela signifie que pour les distributions de la figure A.12 la possibilité de tout événement X doit être égale ou supérieure à la probabilité correspondante.

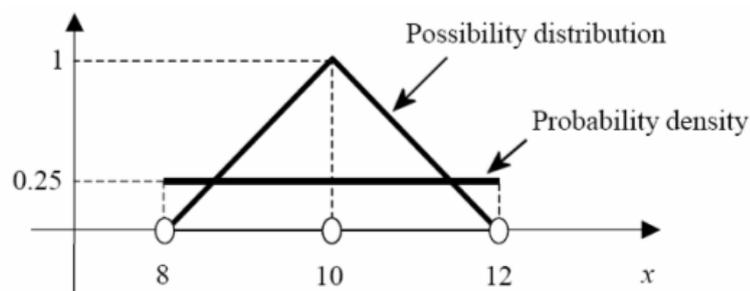


FIGURE A.12: Fonction de densité de probabilité et distribution de possibilité correspondante pour une variable X sur l'intervalle $[8, 12]$

Une dernière remarque importante qu'il convient de prendre en compte, concerne le lien entre la probabilité et la possibilité d'un événement. La possibilité et la nécessité peuvent être considérées comme étant respectivement une limite supérieure et inférieure de la probabilité réelle. Cela signifie que les distributions cumulatives de la possibilité et de la nécessité (CPoF et CNF) sont liées à la distribution de probabilité cumulative réelle. Ceci est particulièrement pertinent pour la modélisation de l'incertitude épistémique où les

informations disponibles peuvent ne pas être suffisantes afin de déterminer la fonction de densité de probabilité cumulative réelle. Les distributions CPoF et CNF délimitent ainsi une zone éventuelle des distributions de probabilité cumulative.

Ces propos sont illustrés figure A.13, tout d'abord avec la représentation des distributions cumulatives complémentaires correspondants à la figure A.12, puis avec un exemple d'analyse de modélisation de l'incertitude épistémique basé sur les travaux de Helton et al. [57]. La figure A.13a) illustre comment une CCPDF d'une loi uniforme est encadrée par la CCNF et la CCPoF découlant de distributions triangulaires. La figure A.13b) illustre quant à elle un cas où le modèle y représente une incertitude due au manque de connaissances. Cette incertitude conduit ainsi à une CCNF et une CCPoF en paliers typiques de l'incertitude épistémique. Encore une fois nous rappelons que les distributions de probabilités réelles peuvent souvent être mal connues, ce qui explique l'encadrement relativement large par des CCNF et CCPoF.

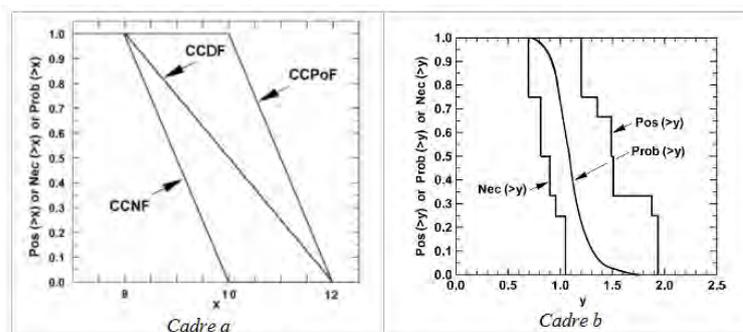


FIGURE A.13: Illustration de la CCDF bornée par la CCNF et la CCPoF déterminées pour : a) des distributions uniformes et triangulaires illustrées Figure 17, b) une incertitude épistémique sur y telle que modélisée dans l'article [57]

La précédente comparaison entre la théorie des probabilités et la théorie des possibilités a permis de montrer qu'il existe des différences fondamentales dans la modélisation des incertitudes. Nous avons également mis en évidence le fait que les résultats engendrés par des calculs de possibilités ne peuvent pas être déduits ou simulés à partir de la théorie des probabilités.

La théorie des possibilités fait suite à un développement de la théorie des ensembles flous et a acquis une certaine popularité dans le domaine de la modélisation des incertitudes épistémiques. Il est important de noter que la théorie des possibilités est un ensemble d'axiomes spécifiques qui conduit au calcul possibiliste, fondamentalement différent du calcul probabiliste. Il est également important de noter que la possibilité et la nécessité peuvent être considérées comme étant des bornes de la probabilité réelle. Certains des avantages de la théorie des possibilités sont :

- la possibilité de modéliser l'incertitude épistémique en se basant sur l'avis d'experts par le biais de p-boîtes ;

- la disponibilité d'approches permettant de combiner des informations provenant de différentes sources d'incertitude ;
- la manipulation intuitive des fonctions dépendant de variables possibilistes (soit la valeur la plus possible d'une fonction correspond à la valeur la plus possible de son argument).

Toutefois certains problèmes peuvent survenir lorsque nous modélisons les incertitudes par le biais d'une approche possibiliste :

- la nécessité de choisir une méthode parmi les différentes techniques de combinaison des incertitudes, ce qui introduit un aspect arbitraire ;
- le coût de calcul de la propagation des incertitudes peut être important car la propagation doit être effectuée pour plusieurs α -coupes ;
- la combinaison d'incertitudes épistémiques modélisées par la théorie des possibilités avec des incertitudes aléatoires modélisées par le biais de la théorie des probabilités peut être problématique ;
- le traitement contre-intuitif des possibilités de défaillance des systèmes ayant des composants en séries ou en parallèles. Prenons par exemple la possibilité de défaillance d'un système constitué de n composants en série, chaque composant ayant une possibilité d'échec p . L'axiome de l'union d'événements disjoints impose la règle suivante : si la possibilité de défaillance du système est égale au maximum des possibilités de défaillance des composants et si tous les composants sont identiques, alors la défaillance du système est égale à p . Cela signifie que le risque de défaillance du système est égal à la possibilité de défaillance d'un composant, indépendamment de n . Un résultat similaire peut être obtenu pour la possibilité de défaillance d'un système en parallèle. Ce résultat est contre-intuitif pour un ingénieur cherchant à concevoir un système avec des composants en série ou en parallèle, car la redondance ne peut pas être obtenue.

A.4 LA THÉORIE DE L'ÉVIDENCE

La théorie de l'évidence permet de traiter des cas d'information partielle, voire inexistante. Ainsi, elle arrive à modéliser et à différencier des situations qui, jusque là étaient traitées de manière identique. En effet, dans la théorie classique des probabilités, les cas d'information partielle sont modélisés comme ceux d'information complète ; or, la différence est évidente. Nous présentons dans cette section la méthode de modélisation des incertitudes basée sur la théorie de l'évidence.

D'un point de vue formel, la théorie de l'évidence (également connue sous le nom de la théorie de Dempster Shafer [118]) est appliquée sur un espace d'évidences ES :

$$ES = \{US, S, m\} \quad (A.15)$$

où US est un ensemble qui contient tout les évènements pouvant se produire dans l'univers considéré, S est un sous-ensemble de US et m une fonction définie sur S telle que pour un évènement e :

$$m(e) \begin{cases} > 0 & e \in S \\ = 0 & e \in US, e \notin S \end{cases}, \sum_S m(e) = 1 \quad (\text{A.16})$$

Pour un sous-ensemble S donné, $m(E)$ est un nombre caractérisant la vraisemblance pouvant être affectée à S . Dans la terminologie de la théorie de l'évidence, S est appelé un élément de liaison et $m(E)$ est la probabilité d'affectation basique (BPA « Basic Probability assignment ») associée à un élément de liaison. Contrairement à la théorie des probabilités, dans la théorie de l'évidence le nombre de sous ensembles S de US doit être dénombrable. Il est important de noter que m n'est pas une mesure de l'incertitude. Dans la théorie de l'évidence, les mesures sont la croyance et la plausibilité d'un évènement e , définies comme suit :

$$\begin{cases} Bel(e) = \sum_{u \subset e} m(u) \\ Pl(e) = \sum_{u \cap e \neq \emptyset} m(u) \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

En théorie, $m(u)$ peut être considérée comme étant la vraisemblance associée à u , sans préciser comment cette probabilité peut être distribuée dans u . Ainsi, la vraisemblance peut être associée à n'importe quel sous-ensemble de u . Par conséquent, la croyance $Bel(e)$ et plausibilité $Pl(e)$ peuvent être considérées comme étant respectivement la vraisemblance minimale et maximale pouvant être associées à e . Afin d'illustrer ce concept, nous supposons que l'ensemble universel US est divisé en huit sous-ensembles C_1 à C_8 . Chaque sous-ensemble C_i a une valeur de la BPA associée. Les différents sous-ensembles sont illustrés figure A.14. Supposons que nous cherchons à déterminer la croyance et la plausibilité de l'évènement A représenté par la zone hachurée de la figure A.14. Selon les définitions précédentes, le degré de plausibilité $Pl(A)$ est calculé en additionnant les BPA des sous-ensembles dont l'intersection avec A n'est pas un ensemble vide. Ainsi, toute proposition incluant au moins partiellement l'ensemble A , est considérée afin de déterminer la plausibilité de A . La croyance $Bel(A)$ est déterminée en additionnant seulement les BPA des sous-ensembles qui sont inclus dans A . Sur la figure A.14, $Bel(A)$ est obtenue en additionnant les BPA de C_1 et de C_3 qui sont totalement inclus dans la zone hachurée. La plausibilité $Pl(A)$ est quant à elle obtenue en additionnant les BPA de C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5 qui sont partiellement ou totalement inclus dans A .

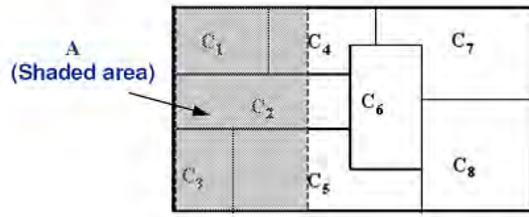


FIGURE A.14: Exemple d'éléments focaux C_i pour le calcul des fonctions de croyance et de plausibilité

Nous donnons maintenant quelques une des propriétés vérifiées par les fonctions de croyance et de plausibilité :

$$\begin{cases} Bel(e) + Pl(e^c) = 1 \\ Bel(e) + Bel(e^c) \leq 1 \\ Pl(e) + Pl(e^c) \geq 1 \end{cases} \quad (A.18)$$

A partir des définitions et propriétés précédentes, nous pouvons mettre en place la représentation des incertitudes dans la théorie de l'évidence, cf. figure A.15. L'incertitude est ici définie comme étant la différence entre la plausibilité et la croyance d'un événement A . En termes de sous-ensembles l'incertitude peut aussi être considérée comme tout ensemble n'étant ni inclus dans A ni dans son complémentaire.

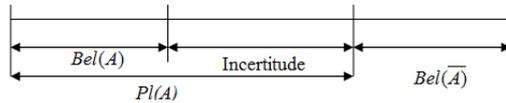


FIGURE A.15: Représentation de la croyance et de la plausibilité dans la théorie de l'évidence

L'élection présidentielle est un exemple simple permettant d'illustrer la modélisation des incertitudes dans le cas de variables discrètes. Supposons que le second tour de l'élection présidentielle oppose un candidat de gauche à un candidat de droite. L'ensemble A , représente les personnes qui voteront pour le candidat de gauche. En conséquence \bar{A} (ou encore noté A^c) est l'ensemble des personnes qui voteront pour le candidat de droite. Avant les élections, nous avons mis en place la représentation de l'incertitude : $Bel(A)$ représente le pourcentage de personnes pour lesquelles tous les éléments disponibles indiquent qu'elles voteront pour le candidat de gauche (ces personnes sont par exemple des membres du parti de gauche, elles ont toujours voté à gauche, etc.). De la même façon $Bel(\bar{A})$ représente le pourcentage de personnes pour lesquelles tous les éléments disponibles indiquent qu'elles voteront pour le candidat de droite (membres du parti de

droite, etc.). Les personnes restantes sont celles pour lesquelles nous avons des preuves qu'elles pourraient aussi bien voter pour le candidat de droite que pour le candidat de gauche (ils ont par exemple déjà voté pour les candidats de gauche et de droite dans le passé). Ces personnes représentent la tranche de la population où il y a de l'incertitude. Celle-ci peut être modélisée de manière appropriée par la théorie de l'évidence. Pour une meilleure compréhension de la représentation donnée figure A.15, nous pouvons noter que la plausibilité $Pl(A)$ représente les personnes qui pourraient voter pour le candidat de gauche. Cet ensemble comprend donc les personnes qui voteront avec certitude pour ce candidat (i.e $Bel(A)$) ainsi que celles pour lesquelles nous avons des preuves qu'elles pourraient voter pour l'un des deux candidats. L'incertitude est donc égale à la plausibilité de A à laquelle nous soustrayons sa croyance. Dans le cas des variables continues, il est en théorie possible de définir des fonctions cumulatives de croyance (CBF « Cumulative Belief Function »), des fonctions cumulatives de plausibilité (CPF « Cumulative Plausibility Function »), ainsi que des fonctions cumulatives complémentaires de croyance (CCBF « Complementary Cumulative Belief Function ») et des fonctions cumulatives complémentaires de plausibilité (CCPF « Complementary Cumulative Plausibility Function ») de manière similaire aux distributions de probabilité cumulatives et cumulatives complémentaires.

La figure A.16 illustre ces fonctions cumulatives : la variable v a des valeurs dans l'intervalle $[1, 10]$, chacun des intervalles suivants est associé à une BPA de 0.1 : $[1, 3]$, $[1, 4]$, $[1, 10]$, $[2, 4]$, $[2, 6]$, $[5, 8]$, $[5, 10]$, $[7, 8]$, $[7, 10]$ et $[9, 10]$. Bien que ces fonctions ont des similitudes avec la fonction de nécessité cumulative complémentaire et la fonction de distribution de possibilité (cf. figure A.8) il existe des différences notoires. La différence la plus importante est due aux axiomes qui régissent la possibilité. En effet, ces axiomes imposent que la nécessité soit nulle pour une possibilité différente de 1 et vice versa. Un tel axiome n'existe pas dans la théorie de l'évidence, d'autre part on peut remarquer sur la figure A.16 que la plausibilité et la croyance peuvent avoir des valeurs différentes de 0 et 1 simultanément.

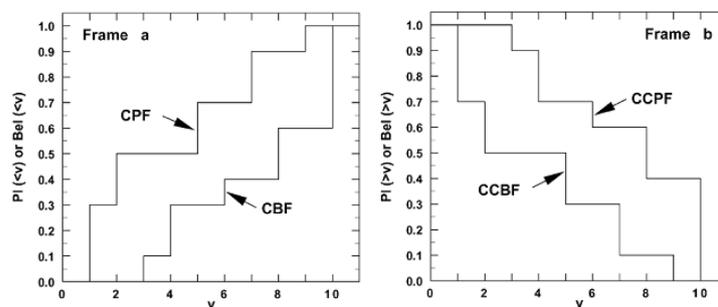


FIGURE A.16: Illustration : a) Fonction cumulative de croyance (CBF) et fonction cumulative de plausibilité (CPF), b) Fonction cumulative complémentaire de croyance (CCBF) et fonction cumulative complémentaire de plausibilité (CCPF)

Tout comme la possibilité et la nécessité, la plausibilité et la croyance peuvent être considérées comme étant respectivement la borne supérieure et inférieure de la probabilité réelle. Toutefois, étant donné que la croyance et la plausibilité peuvent être simultanément différentes de 0 et 1, l'intervalle peut être beaucoup plus étroit, donc moins conservatif que dans la théorie des possibilités. Nous illustrons à nouveau cet encadrement sur l'exemple défini par Helton et al. [57], également utilisé dans la section concernant la théorie des possibilités. La figure A.17 illustre la plausibilité cumulative complémentaire ainsi que la croyance pour une modélisation d'incertitude relativement vague, puis pour une modélisation d'incertitude précise. Nous remarquons que plus la modélisation de l'incertitude est affinée, plus l'encadrement de la distribution de probabilité réelle donné par la CCBF et la CCBF est étroit.

La représentation en paliers des distributions cumulatives reflète à nouveau la modélisation de l'incertitude épistémique où l'information peut être disponible uniquement sur certains intervalles. Cependant, contrairement à la théorie des possibilités où les distributions continues sont possibles, la théorie de l'évidence implique toujours des distributions en échelons. En effet, comme mentionné précédemment les sous-ensembles de l'ensemble universel doivent être dénombrables.

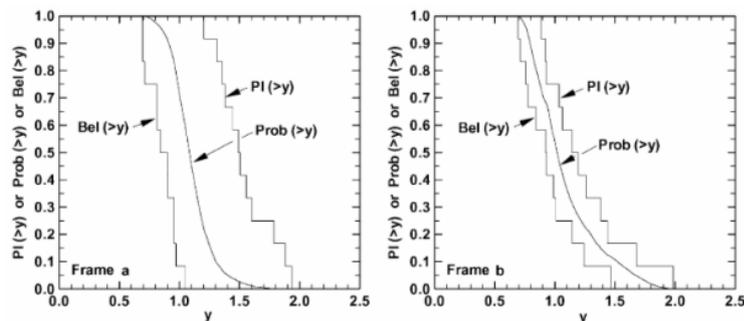


FIGURE A.17: Illustration des délimitations par la CCBF et la CCPF d'une incertitude épistémique sur y telle que modélisée dans la référence [57]. Cadre a) modélisation de l'incertitude initiale, b) modélisation de l'incertitude affinée

Afin de construire les fonctions de croyance et de plausibilité, il est parfois nécessaires de fusionner des données issues de sources d'informations distinctes. Des règles de combinaison doivent donc être mises en oeuvre.

Comme vu dans la théorie des possibilités, il est possible de définir des règles afin de combiner des informations provenant de différentes sources potentiellement contradictoires. Pour rappel, dans la théorie de l'évidence, l'incertitude est modélisée par l'affectation d'une probabilité basique (BPA). Ainsi, les règles de combinaison sont directement développées sur la BPA.

Voici quelques-unes des règles de combinaison qui ont été développées :

- la règle de combinaison de Dempster : deux BPA m_1 et m_2 , définies à partir de deux sources différentes, peuvent être combinées à l'aide de la formule suivante :

$$m(A) = \frac{\sum_{A_i \cap B_j = C} m_1(C_i) m_2(C_j)}{1 - \sum_{C_i \cap C_j = \emptyset} m_1(C_i) m_2(C_j)}, A \neq \Phi \quad (\text{A.19})$$

où C_i et C_j désignent les propositions de chaque source. Le dénominateur peut être considéré comme étant l'ensemble des contradictions ou des conflits intervenant dans les informations fournies par des sources de connaissances indépendantes. Des études menées sur la combinaison d'informations au sein de la théorie de l'évidence [141, 144] ont mis en évidence le problème suivant : lorsque des conflits interviennent au sein des informations fournies par des sources distinctes, la règle de Dempster les ignore en normalisant le degré complémentaire de contradiction. Ainsi, cette normalisation peut engendrer une combinaison des informations non intuitive et numériquement instable, notamment lorsque les informations fournies par des sources indépendantes contiennent des contradictions ou des conflits extrêmes. En d'autres termes, la règle de Dempster est appropriée pour des situations dans lesquelles il y a une certaine cohérence et un consensus suffisant parmi les opinions établies par différentes sources.

- La règle de combinaison de Yager : afin de pallier certains problèmes qui peuvent survenir lorsque nous utilisons la règle de Dempster sur des informations contradictoires, Yager propose une méthode permettant de traiter les conflits entre deux sources différentes [141]. Il postule que le conflit ou la contradiction découle de notre ignorance, ainsi, il ne normalise pas la contradiction, mais suppose que l'une des sources intervenant dans la combinaison est fiable. Une solution est donc obligatoirement dans le référentiel. Etant donné que nous ne connaissons pas la source permettant d'obtenir la vraie solution, Yager propose d'introduire l'attribution d'une masse conflictuelle q dans le calcul des BPA :

$$\begin{cases} q(C) = \sum_{A_i \cap B_j = C} m_1(A_i) m_2(B_j) \\ m(C) = q(C) \\ m(X) = q(X) + q(\Phi) \end{cases} \quad C \neq 0 \quad (\text{A.20})$$

La règle de Yager n'est cependant pas associative, ainsi des problèmes peuvent intervenir lorsque nous la mettons en œuvre. En effet, l'ordre dans lequel les sources sont combinées peut affecter la structure des BPA. Inagaki [61] a ainsi formalisé une règle unique d'association comprenant à la fois la règle de Dempster et celle de Yager.

- La règle de combinaison en moyenne : ici les informations provenant de sources multiples ont toutes le même degré de crédibilité. Le calcul d'une simple moyenne des avis donnés permet de ne pas considérer

les contradictions ou les conflits entre les sources distinctes. La règle de combinaison est donc donnée par la formule suivante :

$$m_{1..n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i m_i(A) \tag{A.21}$$

où les m_i sont les structures des BPA et les w_i sont les poids correspondants attribués selon la crédibilité de la preuve.

Ces trois règles ainsi décrites sont les plus couramment utilisées dans la théorie de l'évidence, d'autres méthodes de combinaison sont également disponibles mais nous ne les détaillerons pas ici. Pour de plus amples informations, nous renvoyons le lecteur à [116].

Nous abordons maintenant un aspect important dans la modélisation des incertitudes : la propagation. La propagation de l'incertitude dans la théorie de l'évidence est effectuée par le biais d'analyses par intervalles pour toutes les combinaisons possibles des BPA. Prenons par exemple le cas où nous voudrions propager les incertitudes affectant les paramètres p_1 et p_2 à travers une fonction $y = g(p_1, p_2)$. Nous supposons que les structures des BPA sont celles exposées sur la figure A.18. Nous avons donc ici un total de six combinaisons d'intervalles possibles. Pour chaque combinaison il est nécessaire d'effectuer la propagation des incertitudes par une analyse d'intervalles. La BPA résultante sur y est égale ici au produit des BPA de p_1 et p_2 pour chaque combinaison (les structures des deux variables incertaines sont supposées indépendantes). Une fois les structures des BPA sur y obtenues, les fonctions cumulatives de croyance et de plausibilité peuvent être construites comme expliqué dans les paragraphes précédents. Il est évident que plus les structures des BPA sont précises (c'est à dire lorsque le nombre d'intervalles est important) plus la procédure de propagation des incertitudes est coûteuse en terme de ressources informatiques. Cela peut donc engendrer des problèmes lorsque l'incertitude peut être exprimée très précisément, notamment lorsque nous souhaitons délimiter plus finement la distribution de la probabilité cumulée réelle tel que nous l'avons vu sur la figure A.17.

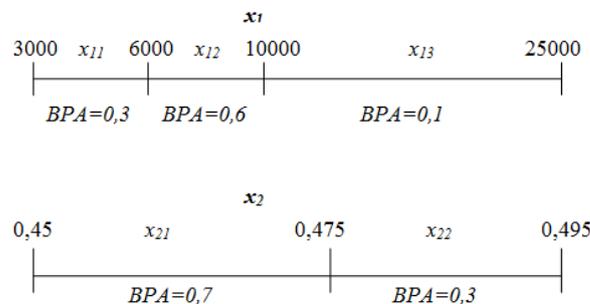


FIGURE A.18: BPA des variables incertaines x_1 et x_2

La théorie de l'évidence est une méthode permettant de modéliser l'incertitude épistémique. De façon similaire aux fonctions de possibilité et de nécessité, la plausibilité et la croyance fournissent des bornes de la probabilité réelle. Cette méthode peut s'avérer très utile dans les situations où, en raison d'un manque de connaissances nous ne pouvons pas déterminer des fonctions de densité de probabilité précises. Certains avantages concernant la théorie de l'évidence sont :

- une facilité à modéliser l'incertitude épistémique à partir d'avis d'experts en terme de probabilités basiques sur les intervalles ;
- une disponibilité des approches pour combiner des informations provenant de différentes sources ;
- une possibilité de délimiter la probabilité réelle. Les bornes ainsi déterminées peuvent être plus fines que celles obtenues par le biais de la théorie des possibilités.

Cependant les problèmes pouvant survenir lorsque nous modélisons les incertitudes par le biais de la théorie de l'évidence sont les suivants :

- une nécessité de choisir parmi les différentes techniques de combinaison d'incertitudes introduisant ainsi un aspect arbitraire.
- une nécessité d'effectuer des analyses d'intervalles multiples engendrant ainsi un coût de propagation de l'incertitude élevé.
- un manque de cohérence dans la modélisation d'incertitudes de nature différente. Les incertitudes épistémiques sont modélisées par la théorie de l'évidence, les incertitudes aléatoires sont modélisées quant à elles par la théorie des probabilités.

Notez que la théorie de l'évidence et la théorie des possibilités peuvent fournir une délimitation de la probabilité réelle par le biais de la croyance et de la plausibilité d'une part (théorie de l'évidence), et de la nécessité et de la possibilité d'autre part (théorie des possibilités). Toutefois, étant donné que la croyance et la plausibilité peuvent être simultanément différentes de 0 et 1, les limites données par la théorie de l'évidence peuvent être beaucoup plus serrées, donc moins conservatrices comparées à celles fournies par la théorie des possibilités.

A.5 CONCLUSION SUR LES DIFFÉRENTES TECHNIQUES DE MODÉLISATION DES INCERTITUDES

En résumé, cette annexe donne un aperçu des diverses méthodes de modélisation des incertitudes. Nous avons tout d'abord présenté la théorie des probabilités classique, ainsi que quelques-uns des problèmes qui peuvent survenir lorsque nous mettons en œuvre cette méthode, en particulier lorsque nous modélisons une incertitude épistémique. L'analyse par intervalles et la théorie des ensembles flous ont ensuite été présentées. Cependant, l'inconvénient majeur de ces méthodes est la quantification des incertitudes par le biais d'une mesure grossière. Enfin nous avons décrit la théorie des possibilités et la théorie de l'évidence. Le choix de la technique appropriée dépend essentiellement de la nature de ces incertitudes et aussi de la quantité d'informations disponibles. Comme note finale de cette annexe, nous citerons

l'éditorial issu du workshop sur les incertitudes épistémiques de 2002 [57], qui résume les divers points devant être considérés dans une théorie de modélisation d'incertitude. Afin d'être satisfaisante une méthode de modélisation des incertitudes doit aborder les points fondamentaux suivants :

- i. Comment convertir l'information disponible dans la structure mathématique utilisée pour représenter l'incertitude épistémique. Dans de nombreuses études, cette considération est susceptible d'impliquer un certain type d'analyses par des experts ou une procédure d'explicitation.
- ii. Agrégation d'informations provenant de sources multiples dans une seule représentation de l'incertitude. De multiples sources d'informations sont souvent employées dans les études de systèmes et la manière dont cette information est agrégée (i.e. structure mathématique utilisée pour représenter l'incertitude) peut avoir un effet important sur le résultat de l'analyse finale.
- iii. Propagation de la structure de l'incertitude imposée sur les entrées de l'analyse par le ou les modèles imbriqués dans l'analyse afin d'obtenir la structure correspondante de l'incertitude en sortie. Plus précisément, la structure de l'incertitude sur les résultats de l'analyse dépend de la structure de l'incertitude sur les entrées et du modèle qui transforme cette entrée (fonction analytique par exemple). Dans les analyses réelles, cette propagation est susceptible de représenter un enjeu majeur en termes de calculs. Les structures mathématiques trop exigeantes en nombre de calculs ne sont pas praticables.
- iv. Présentation et interprétation des résultats suite à la propagation des incertitudes. En règle générale, les résultats des analyses doivent être présentés et compris par de nombreuses personnes en plus de celles qui procèdent réellement à l'analyse. Ces personnes peuvent comprendre d'autres analystes : les gestionnaires ayant des responsabilités de supervision pour l'analyse, les évaluateurs externes, les membres de la presse ou de groupes d'intervenants, les membres intéressés du public ainsi que les personnes qui sont en charge de prendre des décisions sur la base de l'analyse. Les résultats d'une analyse d'incertitudes qui ne sont pas bien compris ou pire, qui sont mal compris, n'ont aucune valeur. Ainsi la structure mathématique utilisée afin de représenter l'incertitude doit être compréhensible par des personnes autres que celles effectuant l'analyse et des mesures doivent être mises en place pour assurer (ou du moins faciliter) la compréhension pour ceux utilisant les résultats de l'analyse.
- v. Performance de l'analyse de sensibilité. Bien que l'analyse de sensibilité ne soit pas directement intégrée dans la propagation et la représentation de l'incertitude épistémique, l'analyse de sensibilité doit être un élément fondamental de toute analyse qui porte sur l'évaluation et la propagation de l'incertitude. En particulier, les analyses de sensibilité appropriées permettent de fournir des indications quant à l'exactitude de l'analyse (à savoir l'analyse de vérification) : quelles sont les incertitudes d'entrée ayant un impact sur les incertitudes de sortie, et comment

investir suffisamment de ressources pour réduire l'incertitude dans les résultats de l'analyse.

Bien que toutes les méthodes de modélisation des incertitudes présentées dans cette annexe aient des avantages évidents, il semble qu'aucune d'entre elles ne satisfasse pleinement les points précédents. Cette situation est bien résumée par le titre du rapport de l'atelier sur les incertitudes épistémiques : « Consensus dans la diversité » [46].

B

TECHNIQUES D'OPTIMISATION MONO-DISCIPLINAIRE EN UNIVERS INCERTAIN

Dans cette annexe nous présentons les méthodes les plus communes de propagation d'incertitudes dans un problème d'optimisation mono disciplinaire. Ces approches sont basées sur l'analyse d'un intervalle maximal et sur la théorie de l'évidence (la représentation probabiliste étant détaillée dans la bibliographie chapitre 6). Le choix de la technique appropriée dépend notamment de la nature de ces incertitudes mais également de la quantité d'informations disponibles. Notons que nous ne développerons pas les méthodes basées sur les ensembles flous et sur la théorie des possibilités car elles semblent être peu abordées dans la littérature notamment sur des cas d'études industrielles.

B.1 MÉTHODE DU CAS LE PLUS DÉFAVORABLE

La méthode du cas le plus défavorable propose une modélisation des incertitudes basée sur les variations critiques. Le problème d'optimisation consiste alors à maximiser la performance en s'assurant que les contraintes sont bien respectées.

Cette méthodologie est une méthode déterministe basée sur les valeurs les plus critiques. Nous expliquons dans cette section l'approche du cas le plus défavorable par le biais d'un exemple simple [54] : nous cherchons à estimer l'incertitude affectant le vecteur z , qui est le vecteur contenant les variables de sortie du système. Soit la fonction $z = f(x, y)$, nous supposons que x et y sont les variables d'entrée dont les variations sont respectivement Δx et Δy . Si x devient $x \pm \Delta x$ alors z varie comme suit $\Delta z_x = \pm(\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x)$, de la même manière lorsque y devient $y \pm \Delta y$ alors z varie de la façon suivante $\Delta z_y = \pm(\frac{\partial z}{\partial y} \Delta y)$. En terme de variation sur la variable z , le pire des cas est obtenu lorsque x et y varient simultanément, c'est à dire : $\Delta z = \Delta z_x + \Delta z_y = [\pm(\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x)] + [\pm(\frac{\partial z}{\partial y} \Delta y)]$ et plus exactement lorsque Δz_x et Δz_y ont le même signe, équivalent à : $\Delta z = |\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x| + |\frac{\partial z}{\partial y} \Delta y| = |\frac{\partial z}{\partial x}| |\Delta x| + |\frac{\partial z}{\partial y}| |\Delta y|$. Cette incertitude est appelée le cas le plus défavorable.

Nous généralisons cette méthode : soit x le vecteur des variables d'entrée du problème d'optimisation (ou variables de conception) et α le vecteur des paramètres utilisés dans l'étude, c'est à dire les paramètres spécifiques à l'environnement dans lequel le système est embarqué (exemple : pour l'optimisation topologique d'un système, les propriétés des matériaux peuvent être

des paramètres d'entrée). Nous introduisons une incertitude épistémique Δx sur le paramètre x et une incertitude stochastique (aléatoire) $\Delta \alpha$ sur α . Ensuite, nous exprimons la fonction objective f par le biais des développements linéaires de Taylor [13] :

$$f(x + \Delta x, \alpha + \Delta \alpha) = f(x, \alpha) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i + \dots \quad (\text{B.1})$$

Le développement est tronqué après les termes du premier ordre. Ainsi, le cas le plus défavorable peut être défini comme suit :

$$f(x + \Delta x, \alpha + \Delta \alpha) = f(x, \alpha) + \sum_i \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right| + \sum_i \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i \right| \quad (\text{B.2})$$

On pose :

$$\Delta f = \sum_i \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right| + \sum_i \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i \right| \quad (\text{B.3})$$

Nous appliquons cette théorie à des contraintes d'égalité $h(x, \alpha) = 0$ et des contraintes d'inégalité $g(x, \alpha) \leq 0$. Le point x est considéré comme étant admissible s'il satisfait le pire des cas :

$$\begin{cases} h(x, \alpha) + \sum_i \left| \frac{\partial h}{\partial x_i} \Delta x_i \right| + \sum_i \left| \frac{\partial h}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i \right| = 0 \\ g(x, \alpha) + \sum_i \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \Delta x_i \right| + \sum_i \left| \frac{\partial g}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i \right| \leq 0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Les contraintes d'égalité sont difficiles à atteindre, en conséquence, seules les contraintes d'inégalité sont souvent imposées. Alternativement, les contraintes d'inégalité peuvent être obtenues sur la base de l'erreur euclidienne :

$$g(x, \alpha) + \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2 + \sum_i \left(\frac{\partial g}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i \right)^2} \leq 0 \quad (\text{B.5})$$

Cette formule a été proposée par Sundaresan et al. [123]. Afin d'utiliser ces inégalités, les incertitudes sur les paramètres doivent être bornées. Le problème d'optimisation est alors de maximiser les performances et de réduire leur sensibilité aux variations. Pour obtenir un compromis entre ces deux objectifs, nous pouvons utiliser une somme pondérée des fonctions objectifs (β étant le coefficient de pondération) [54] :

$$\begin{cases} \text{Min}(f(x, \alpha)) & x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \\ f(x, \alpha) = \beta f(x, \alpha) + (1 - \beta) \Delta f & 0 \leq \beta \leq 1 \\ h_i(x, \alpha) = h_i(x, \alpha) + \Delta h_i = 0 & i = 1, \dots, p \\ g_j(x, \alpha) = g_j(x, \alpha) + \Delta g_j \leq 0 & j = 1, \dots, q \\ x_k^L \leq x_k \leq x_k^U & k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Notez que cette méthode peut conduire à des résultats très conservatifs : les solutions obtenues en résolvant ce problème sont souvent très robustes et / ou très fiables, mais pas très performantes (par exemple : la fiabilité d'un avion serait garantie, mais il serait trop lourd pour décoller). Par conséquent, l'intérêt de ces solutions est limité dans de nombreux domaines industriels.

B.2 OPTIMISATION SOUS LA THÉORIE DE L'ÉVIDENCE

Dans les applications de l'ingénierie, il est parfois difficile de déterminer et de quantifier les incertitudes qui affectent le système en raison de données insuffisantes ou d'un manque de connaissances, (i.e incertitude épistémique) [7]. Comme nous l'avons vu dans la section 6, il existe différentes méthodes de modélisation de l'incertitude épistémique. Dans ce contexte, des méthodes telles que la théorie des ensembles flous, la théorie des possibilités (cette méthode a été par exemple utilisée dans différentes applications telle que la fiabilité des cordons de soudure [27]) ou la théorie de l'évidence (utilisée par exemple dans le cas d'une poutre encastrée en composite et pour l'optimisation d'une aile d'avion [7]) peuvent être appliquées pour résoudre des problèmes d'optimisation sous incertitudes. Dans la théorie de l'évidence, la propagation des incertitudes est basée sur l'analyse d'intervalles. Cette méthode consiste à minimiser la fonction objectif s'assurant que les contraintes sont respectées avec un certain niveau de fiabilité, exprimé en termes de fonction de croyance ou de plausibilité. On explique le principe sur un exemple simple : Soit f la fonction objectif et g_i les contraintes en fonction des paramètres de conception incertains x_1 et x_2 (la détermination des incertitudes est basée sur l'avis d'experts). On souhaite minimiser la fonction objectif en s'assurant que les contraintes soient respectées avec un certain niveau de fiabilité. Pour ce faire, nous supposons que les structures des BPA des paramètres x_1 et x_2 sont celles données sur la figure B.1. Les différentes étapes sont les suivantes :

- la propagation de l'incertitude dans la théorie de l'évidence est effectuée par le biais d'une analyse par intervalles pour toutes les combinaisons possibles des BPA. On détermine donc la valeur de l'attribution élémentaire de probabilité (BPA) pour chaque combinaison de variables incertaines (exemple de combinaison $C_{31} = [x_{13}, x_{21}]$). Sur l'exemple présenté ici, on obtient un total de six combinaisons possibles d'intervalles. La BPA de g pour une certaine combinaison de variables incertaines est le produit des BPA de ces variables, en faisant l'hypothèse que les variables x_1 et x_2 sont indépendantes ;
- on propage chaque combinaison d'incertitudes à travers le système : pour chaque ensemble C_{ij} on détermine la plus petite et la plus grande borne atteintes par la contrainte g . Pour ce faire, Agarwal et al. font l'hypothèse simplificatrice que la fonction g est monotone sur chaque intervalle C_{ij} [2]. Dans le cas plus général où la fonction g est quelconque, on a recours à des techniques d'optimisation pour chaque intervalle permettant d'obtenir sa borne supérieure et inférieure. Etant donné que la propagation de l'incertitude dans la théorie de l'évidence revient à effectuer diverses études d'intervalles, les différentes méthodes développées pour l'analyse par intervalles sont disponibles et la méthode des vertex est à nouveau particulièrement populaire lorsque la fonction de propagation est monotone ou peut être approchée par une telle fonction. Les méthodes d'échantillonnage basées sur la simulation de Monte-Carlo sont également disponibles. Comme expliqué dans la section A.4 plus

- la structure de la BPA est précise (nombre d'intervalles important) plus la procédure de propagation des incertitudes est coûteuse.
- on détermine la croyance ou la plausibilité de g .

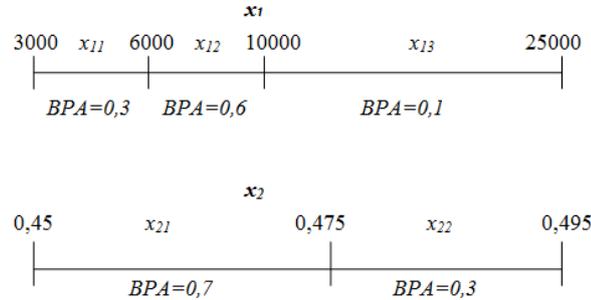


FIGURE B.1: BPA des paramètres de conception x_1 et x_2

Une fois la structure de la BPA de g obtenue, on détermine l'optimum du problème d'optimisation en résolvant :

$$\begin{cases} \min_x f(x) \\ U^M(g(x) \geq 0) - U_{req}^M \geq 0 \\ x^{min} \leq x \leq x^{max} \end{cases} \quad (B.7)$$

où U^M est une mesure d'incertitude qui peut être exprimée par le biais de la fonction de plausibilité Pl ou de la fonction de croyance Bel , et U_{req}^M est le niveau de fiabilité minimal requis. La formulation du problème d'optimisation est semblable à celle d'un problème de fiabilité : en présence d'incertitudes, nous souhaitons que les contraintes soient vérifiées avec une grande vraisemblance. Dans le cas où la fonction g est quelconque, cette méthode implique un coût en temps de calculs important (optimisation effectuée pour chaque intervalle C_{ij}).

 TECHNIQUES D'OPTIMISATION MULTIDISCIPLINAIRE
 EN UNIVERS INCERTAIN

Dans cette annexe nous présentons les méthodes de propagation d'incertitudes dans un problème d'optimisation multidisciplinaire. Les approches exposées sont basées sur l'analyse d'un intervalle maximal et sur la théorie de l'évidence (représentation probabiliste donnée dans la bibliographie chapitre 7). Tel que mentionné pour l'optimisation mono-disciplinaire, nous ne développerons pas les méthodes basées sur les ensembles flous et sur la théorie des possibilités qui sont peu utilisées dans le domaine industriel.

C.1 MÉTHODE DU CAS LE PLUS DÉFAVORABLE

La méthode du cas le plus défavorable permet d'estimer l'intervalle d'appartenance auquel appartient la fonction objectif (détermination du cas le plus défavorable cf. section B.1). La figure C.1 est une représentation schématique d'un système multidisciplinaire dont l'analyse est décomposée en trois disciplines [120]. Nous exposons la méthode dans le cas d'un problème multidisciplinaire :

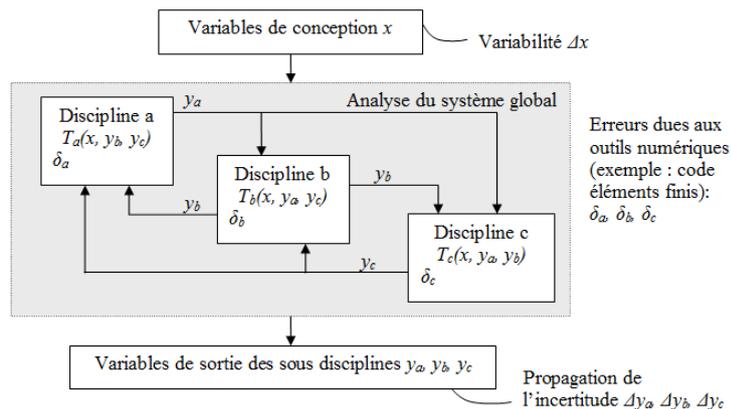


FIGURE C.1: Modèle multidisciplinaire

Les sorties de chaque disciplines sont définies par :

$$\begin{cases} y_a = T_a(x, y_b, y_c) \\ y_b = T_b(x, y_a, y_c) \\ y_c = T_c(x, y_a, y_b) \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

On introduit des incertitudes sur les variables précédentes : Δx représente les incertitudes affectant les paramètres d'entrée, $\Delta T_a = \delta_a(x, y_b, y_c)$, $\Delta T_b = \delta_b(x, y_a, y_c)$, et $\Delta T_c = \delta_c(x, y_a, y_b)$ sont les erreurs engendrées par les outils numériques. Ces incertitudes se propagent à travers les disciplines couplées et entraînent ainsi l'apparition d'incertitudes sur les sorties : Δy_a , Δy_b et Δy_c . Afin de prendre en compte ces incertitudes dans un problème MDO, Gu et al. ont mis en place pour chaque discipline l'approximation linéaire suivante [54] :

$$\Delta y_a - \frac{\partial T_a}{\partial y_b} \Delta y_b - \frac{\partial T_a}{\partial y_c} \Delta y_c = \frac{\partial T_a}{\partial x} \Delta x + \delta_a(x, y_b, y_c) \quad (\text{C.2})$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \Delta y_a \\ \Delta y_b \\ \Delta y_c \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_a & -\frac{\partial T_a}{\partial y_b} & -\frac{\partial T_a}{\partial y_c} \\ -\frac{\partial T_b}{\partial y_a} & I_b & -\frac{\partial T_b}{\partial y_c} \\ -\frac{\partial T_c}{\partial y_a} & -\frac{\partial T_c}{\partial y_b} & I_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T_a}{\partial x} \\ \frac{\partial T_b}{\partial x} \\ \frac{\partial T_c}{\partial x} \end{Bmatrix} \Delta x \\ &+ \begin{bmatrix} I_a & -\frac{\partial T_a}{\partial y_b} & -\frac{\partial T_a}{\partial y_c} \\ -\frac{\partial T_b}{\partial y_a} & I_b & -\frac{\partial T_b}{\partial y_c} \\ -\frac{\partial T_c}{\partial y_a} & -\frac{\partial T_c}{\partial y_b} & I_c \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \delta_a(x, y_b, y_c) \\ \delta_b(x, y_a, y_c) \\ \delta_c(x, y_a, y_b) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Les équations de la sensibilité globale (GSE « Global Sensitivity Equations ») peuvent être formulées selon Sobiesczanski-Sobieski [120] de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} I_a & -\frac{\partial T_a}{\partial y_b} & -\frac{\partial T_a}{\partial y_c} \\ -\frac{\partial T_b}{\partial y_a} & I_b & -\frac{\partial T_b}{\partial y_c} \\ -\frac{\partial T_c}{\partial y_a} & -\frac{\partial T_c}{\partial y_b} & I_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{dy_a}{dx} \\ \frac{dy_b}{dx} \\ \frac{dy_c}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial T_a}{\partial x} \\ \frac{\partial T_b}{\partial x} \\ \frac{\partial T_c}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

Cette équation peut être réécrite comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \frac{dy_a}{dx} \\ \frac{dy_b}{dx} \\ \frac{dy_c}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a & -\frac{\partial T_a}{\partial y_b} & -\frac{\partial T_a}{\partial y_c} \\ -\frac{\partial T_b}{\partial y_a} & I_b & -\frac{\partial T_b}{\partial y_c} \\ -\frac{\partial T_c}{\partial y_a} & -\frac{\partial T_c}{\partial y_b} & I_c \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T_a}{\partial x} \\ \frac{\partial T_b}{\partial x} \\ \frac{\partial T_c}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

En substituant l'équation C.5 dans l'équation C.3 nous obtenons :

$$\begin{Bmatrix} \Delta y_a \\ \Delta y_b \\ \Delta y_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{dy_a}{dx} \\ \frac{dy_b}{dx} \\ \frac{dy_c}{dx} \end{Bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} I_a & -\frac{\partial T_a}{\partial y_b} & -\frac{\partial T_a}{\partial y_c} \\ -\frac{\partial T_b}{\partial y_a} & I_b & -\frac{\partial T_b}{\partial y_c} \\ -\frac{\partial T_c}{\partial y_a} & -\frac{\partial T_c}{\partial y_b} & I_c \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \delta_a(x, y_b, y_c) \\ \delta_b(x, y_a, y_c) \\ \delta_c(x, y_a, y_b) \end{Bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

On pose :

$$B = \begin{bmatrix} B_{aa} & B_{ab} & B_{ac} \\ B_{ba} & B_{bb} & B_{bc} \\ B_{ca} & B_{cb} & B_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a & -\frac{\partial T_a}{\partial y_b} & -\frac{\partial T_a}{\partial y_c} \\ -\frac{\partial T_b}{\partial y_a} & I_b & -\frac{\partial T_b}{\partial y_c} \\ -\frac{\partial T_c}{\partial y_a} & -\frac{\partial T_c}{\partial y_b} & I_c \end{bmatrix}^{-1} \quad (C.7)$$

En substituant l'équation C.7 dans l'équation C.6 et en prenant la somme des valeurs absolues nous définissons ainsi l'estimation de l'incertitude dans le cas le plus défavorable :

$$\begin{Bmatrix} |\Delta y_a| \\ |\Delta y_b| \\ |\Delta y_c| \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left| \frac{dy_a}{dx} \right| \\ \left| \frac{dy_b}{dx} \right| \\ \left| \frac{dy_c}{dx} \right| \end{Bmatrix} |\Delta x| + \begin{bmatrix} |B_{aa}| & |B_{ab}| & |B_{ac}| \\ |B_{ba}| & |B_{bb}| & |B_{bc}| \\ |B_{ca}| & |B_{cb}| & |B_{cc}| \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} |\delta_a(x, y_b, y_c)| \\ |\delta_b(x, y_a, y_c)| \\ |\delta_c(x, y_a, y_b)| \end{Bmatrix} \quad (C.8)$$

L'estimation de l'incertitude ainsi déterminée est ensuite intégrée dans un problème d'optimisation robuste multidisciplinaire : nous souhaitons maximiser la performance et réduire la sensibilité de celle-ci aux variations. Ainsi afin d'aboutir à un compromis entre ces deux objectifs, nous utilisons le paramètre α qui permet de donner un poids aux objectifs. Le problème d'optimisation s'écrit tel quel [54] :

$$\begin{cases} \underset{x}{Min}[f^R(x)] & 0 \leq \alpha \leq 1; x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \\ f^R = \alpha f + (1 - \alpha)\Delta f \\ g_j^R = g_j - \Delta g_j \geq 0 & j = 1, \dots, J \\ x_i^{LR} \leq x_i \leq x_i^{UR} & i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (C.9)$$

Les incertitudes Δf et Δg_j sont obtenues grâce à la méthode exposée précédemment : $f = f(x) = \bar{f}(x, y)$ avec $y = T_i(x)$ (fonction représentant le comportement du sous système i), de la même façon $g_j = g_j(x) = g_j(\bar{x}, y)$ et :

$$\begin{cases} \Delta f = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \bar{f}(x, y)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i + \sum_{i=1}^K \left| \frac{\partial \bar{f}(x, y)}{\partial y_k} \right| \Delta y_k \\ \Delta g_j = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \bar{g}_j(x, y)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i + \sum_{i=1}^K \left| \frac{\partial \bar{g}_j(x, y)}{\partial y_k} \right| \Delta y_k \end{cases} \quad (C.10)$$

La méthode du cas le plus défavorable a été mise en application pour la conception robuste d'un aéroglisseur [54]. Cette étude montre que, selon la nature des incertitudes considérées, la méthode peut aboutir à des résultats qui peuvent ne pas être excessivement conservatifs. La propagation des incertitudes grâce à la théorie du cas le plus défavorable peut être introduite dans un problème d'optimisation robuste et résolu par exemple grâce à la méthode d'optimisation collaborative CO permettant un découplage des disciplines et une parallélisation des calculs (CO Collaborative Optimization, voir section 7.1.3). Cette méthode s'est avérée être efficace dans le cas simplifié du dimensionnement avion [53]. Cependant, d'après le papier [53], la méthode CO peut créer des problèmes de convergence, une méthodologie alternative est ainsi proposée (pour une explication détaillée de la méthode

on se réfère [53]). La différence entre les deux méthodes provient de la formulation du problème d'optimisation disciplinaire. Il est important de noter que la méthode du cas le plus défavorable ne permet pas de fournir une mesure de l'incertitude dépendant du point courant de l'itération du processus d'optimisation. Une telle évaluation de l'incertitude peut être obtenue par le biais de la théorie des probabilités ou de l'évidence.

C.2 OPTIMISATION MULTIDISCIPLINAIRE SOUS LA THÉORIE DE L'ÉVIDENCE

Les incertitudes, notamment celles de nature épistémique, peuvent également être modélisées selon la théorie de l'évidence (cf. section B.2). Des approches d'optimisation multidisciplinaire sous incertitude basées sur la théorie de l'évidence ont ainsi été développées. Nous exposons leur principe sur un exemple simple : un système composé de deux sous-systèmes CA1 et CA2 interagissant entre eux (cf. figure C.2).

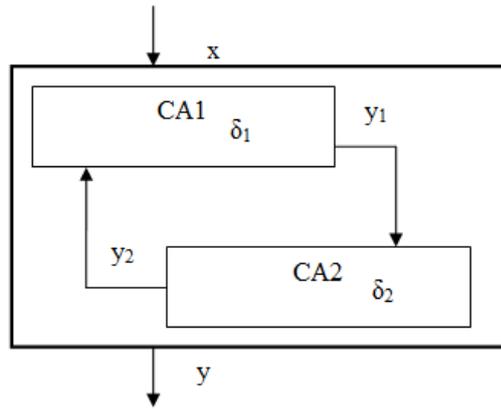


FIGURE C.2: Modèle multidisciplinaire

Les sorties y_1 et y_2 des sous systèmes respectifs CA1 et CA2 sont impactées par des incertitudes. On suppose que ces incertitudes sont de nature épistémiques et respectivement données par δ_1 et δ_2 (des experts déterminent les intervalles auxquels appartiennent ces incertitudes ainsi que les probabilités d'affectation basiques BPA correspondantes). Le vecteur x contient les variables de conception en entrée du système. Notre problème est le suivant :

$$\begin{cases} \text{Min}_x f(x) \\ U^M(g_i(x) \geq 0) - U_{req}^M \geq 0 \quad i = 1, \dots, p \\ x^{Min} \leq x \leq x^{Max} \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

La fonction f est la fonction objectif à minimiser et g_i les contraintes auxquelles est soumis le système, ces fonctions dépendent des variables de conception x . La fonction U^M est une mesure d'incertitude qui peut être

donnée soit grâce à la fonction de plausibilité Pl soit grâce à la fonction de croyance Bel et U_{req}^M est le niveau de fiabilité minimal requis. Les fonctions Pl et Bel sont des fonctions présentant des discontinuités nous empêchant ainsi d'utiliser une technique d'optimisation à gradients. Des métamodèles peuvent alors être construits afin de mener l'optimisation (méthode d'approximation). La précision de ces métamodèles doit alors être maîtrisée. Dans la note [62] la méthode implémentée est la suivante :

On utilise les surfaces de réponses afin de construire une approximation de la fonction objectif et des contraintes. On a ensuite recours à une méthode d'optimisation séquentielle pour les variables de conception. Les équations du système C.11 sont approximées et le problème d'optimisation devient alors :

$$\begin{cases} \underset{x}{\text{Min}} \tilde{f}(x) \\ \tilde{g}(x) \geq 0 \\ x^L \leq x \leq x^U \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

Les fonctions \tilde{f} et \tilde{g} sont respectivement les approximations par métamodèles de la fonction objectif et des contraintes pour x compris entre x^L et x^U qui vont être définies grâce aux régions de confiance. Les régions de confiance permettent de vérifier que l'approximation faite des fonctions objectif et contraintes sont correctes. Ainsi, elles permettent, en partant de n'importe quel point initial, d'élargir ou de rétracter la zone où l'approximation de la fonction est bonne afin de ne pas passer à côté d'un optimum local. Plus précisément le principe de fonctionnement est le suivant :

- une approximation de la fonction est construite autour du point courant. Cette approximation est appelée m_k (approximation de la $k^{\text{ième}}$ itération).
- l'approximation ainsi construite est minimisée dans une boule centrée sur le point courant appelé $x^{(k)}$ et définie par :

$$B_k = \left\{ x \in \mathfrak{R}^n : \| x - x^{(k)} \| \leq \Delta_k \right\} \quad (\text{C.13})$$

Avec Δ_k un nombre réel strictement positif qui définit le rayon de la boule. Cette boule est la région de confiance (région où m_k est une bonne approximation de la fonction).

- Le coefficient de la région de confiance est calculé. Il s'agit du rapport entre la réduction réelle et la réduction prédite par l'approximation :

$$\rho_k = \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k)} + s^{(k)})}{m_k(x^{(k)}) - m_k(x^{(k)} + s^{(k)})} \quad (\text{C.14})$$

avec $x^{(k)} + s^{(k)}$ l'optimum de l'approximation dans la région de confiance.

- suivant la valeur de ce coefficient, le rayon de la boule est agrandi ou diminué. Si l'approximation de la fonction est bonne le rayon de la région de confiance est élargi. Inversement si l'approximation est mauvaise, il faut resserrer la région de confiance.

Résoudre un problème d'optimisation revient alors à :

$$\begin{cases} \min [m_k(x^{(k)} + s)] \\ \|s\| \leq \Delta_k \end{cases} \quad (\text{C.15})$$

Afin de valider l'optimum de l'approximation comme optimum de la fonction exacte, il faut étudier la valeur de ρ_k . Pour cela, on définit :

- si $\rho_k < \eta_1$, l'approximation n'est pas assez précise : il faut resserrer la région de confiance afin d'en obtenir une meilleure.
- si $\eta_2 \leq \rho_k \leq \eta_1$, l'approximation est correcte : on ne modifie pas à la région de confiance.
- si $\eta_2 < \rho_k$, l'approximation est bonne : on peut élargir la région de confiance.

Ainsi, l'intérêt des régions de confiance est de pouvoir effectuer une optimisation sur un modèle approché (et donc plus simple) puis ensuite vérifier si cette approximation est bonne afin de valider l'optimum obtenu. Cette méthode est testée dans le cas d'un problème analytique puis dans le cadre d'un problème industriel dont le but est de résoudre un problème simplifié de dimensionnement d'avions [2]. Dans le cadre de ces applications utilisées dans cette référence les résultats obtenus sont satisfaisants.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHY

- [1] H. Agarwal. *Reliability based design optimization: formulations and methodologies*. PhD thesis, 2004. (Cited on page 43.)
- [2] H. Agarwal, J. E. Renaud, E. L. Preston, and D. Padmanabhan. Uncertainty quantification using evidence theory in multidisciplinary design optimization. *Reliability Engineering & System Safety*, 85(1-3):281–294, July 2004. (Cited on pages 61, 193 et 200.)
- [3] N. M. Alexandrov and R. M. Lewis. Comparative properties of collaborative optimization and other approaches to MDO. Technical Report 99-24, 1999. (Cited on pages 51 et 63.)
- [4] N. M. Alexandrov and R. M. Lewis. *Analytical and computational aspects of collaborative optimization*. Citeseer, 2000. (Cited on pages 52, 53, 58 et 118.)
- [5] T. Back, U. Hammel, and H. P. Schwefel. Evolutionary computation: Comments on the history and current state. *Evolutionary computation, IEEE Transactions on*, 1(1):3–17, 1997. (Cited on page 46.)
- [6] C. Badufle. *Définition conceptuelle d'avions: vers une optimisation multiobjectif, robuste et incertaine*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, May 2007. (Cited on page 22.)
- [7] H. R. Bae, R. V. Grandhi, and R. A. Canfield. An approximation approach for uncertainty quantification using evidence theory. *Reliability Engineering & System Safety*, 86(3):215–225, December 2004. (Cited on page 193.)
- [8] P. Bartholomew. The role of MDO within aerospace design and progress towards an MDO capability. In *AIAA, 7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, Paper AIAA-98-4705*, 1998. (Cited on page 50.)
- [9] S. Bates, J. Sienz, and V. Toropov. Formulation of the optimal latin hypercube design of experiments using a permutation genetic algorithm. In *5th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, April 2004. (Cited on page 100.)
- [10] V. Baudoui. Modèles réduits pour l'optimisation robuste multiobjectifs. In *Journée des thèses 2010, Branche TIS (DCSD/DPRS/DTIM)*, Toulouse, January 2010. (Cited on pages 31, 36, 38 et 57.)

- [11] J. R. Benjamin and C. A. Cornell. *Probability, statistics and decision for civil engineers*. McGraw-Hill, New York Maidenhead, 1970. (Cited on page 41.)
- [12] H.-G. Beyer and H.-P. Schwefel. Evolution strategies – a comprehensive introduction. *Natural computing*, 1(1):3–52, 2002. (Cited on page 46.)
- [13] H.-G. Beyer and B. Sendhoff. Robust optimization – a comprehensive survey. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(33-34):3190–3218, August 2007. (Cited on pages 33, 35, 36, 37, 46, 95 et 192.)
- [14] J. Birman and T. Druot. Robustness assessment of a margin setting process in preliminary aircraft sizing. In *12e congrès annuel de la société française de recherche opérationnelle et d'aide à la décision*, Saint Etienne, 2011. (Cited on pages 17, 21, 71 et 74.)
- [15] P. T. Boggs and J. W. Tolle. Sequential quadratic programming. *Acta Numerica*, 4:1–51, January 1995. (Cited on page 45.)
- [16] P. Bonnal, D. Gourc, and G. Lacoste. Where do we stand with fuzzy project scheduling? *Journal of Construction Engineering and Management*, 130(1):114–123, February 2004. (Cited on page 171.)
- [17] B. Bouchon-Meunier. *La Logique floue*. Presses Universitaires de France, Paris, 1993. (Cited on page 171.)
- [18] J. Branke. *Evolutionary optimization in dynamic environments*. Number 3 in Genetic algorithms and evolutionary computation. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2002. (Cited on page 46.)
- [19] G. Chen, X. Han, G. Liu, C. Jiang, and Z. Zhao. An efficient multi-objective optimization method for black-box functions using sequential approximate technique. *Applied Soft Computing*, 12(1):14–27, January 2012. (Cited on pages 61, 62 et 63.)
- [20] W. Chen, M. M. Wiecek, and J. Zhang. Quality Utility—A compromise programming approach to robust design. *Journal of Mechanical Design*, 121(2):179, 1999. (Cited on page 39.)
- [21] W. Chen, R. Jin, and A. Sudjianto. Analytical uncertainty propagation via metamodels in simulation-based design under uncertainty. In *10th AIAA/ISSMO Conference on Multidisciplinary analysis and optimization, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Albany, New York*, volume paper 2004-4356, 2004. (Cited on page 44.)
- [22] X. Chen and T. K. Hasselman. Reliability based structural design optimization for practical applications. Kissimmee, Florida, 1997. (Cited on pages 43, 123 et 124.)

-
- [23] G. Cheng, L. Xu, and L. Jiang. A sequential approximate programming strategy for reliability-based structural optimization. *Computers & Structures*, 84(21):1353–1367, August 2006. (Cited on pages [124](#) et [127](#).)
- [24] T. M. Cho and B. C. Lee. Reliability-based design optimization using convex linearization and sequential optimization and reliability assessment method. *Structural Safety*, 33(1):42–50, January 2011. (Cited on page [125](#).)
- [25] R. F. Coelho and P. Breitung. *Optimisation multidisciplinaire en mécanique*, volume 1. Lavoisier edition, 2009. (Cited on page [45](#).)
- [26] R. F. Coelho and P. Breitung. *Optimisation multidisciplinaire en mécanique*, volume 1. Lavoisier edition, 2009. (Cited on page [44](#).)
- [27] C. Cremona and Y. Gao. The possibilistic reliability theory: theoretical aspects and application. *Structural Safety*, 19(2):173–201, 1997. (Cited on page [193](#).)
- [28] D. Daney, N. Andreff, G. Chabert, and Y. Papegay. Interval method for calibration of parallel robots: Vision-based experiments. *Mechanism and Machine Theory*, 41(8):929–944, August 2006. (Cited on page [167](#).)
- [29] J. Darlington, C. C. Pantelides, B. Rustem, and B. A. Tanyi. Decreasing the sensitivity of open-loop optimal solutions in decision making under uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 121(2):343–362, March 2000. (Cited on page [39](#).)
- [30] I. Das. Robustness optimization for constrained nonlinear programming problems. *Engineering Optimization*, 32(5):585–618, January 2000. (Cited on pages [39](#) et [50](#).)
- [31] M. J. Daskilewicz, B. J. German, T. T. Takahashi, S. Donovan, and A. Shajanian. Effects of disciplinary uncertainty on multi-objective optimization in aircraft conceptual design. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 44(6):831–846, July 2011. (Cited on page [81](#).)
- [32] F. M. Dekking, C. Kraaikamp, H. P. Lopuhaä, and L. E. Meester. *A Modern Introduction to Probability and Statistics: Understanding why and how*. Springer, New York, 2007. (Cited on pages [159](#) et [161](#).)
- [33] D. A. DeLaurentis and D. N. Mavris. Uncertainty modeling and management in multidisciplinary analysis and synthesis. volume paper 2000-0422, Reno, January 2000. (Cited on pages [vi](#), [19](#), [64](#) et [65](#).)
- [34] N. Devitoc, J. Jacques, and C. Lavergne. *Analyse de sensibilité globale*. Pau, France, 2004. (Cited on page [83](#).)
- [35] I. Doltsinis and Z. Kang. Robust design of structures using optimization methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(23-26):2221–2237, June 2004. (Cited on page [39](#).)

- [36] X. Du and W. Chen. An integrated methodology for uncertainty propagation and management in simulation-based systems design. *AIAA Journal*, 38(8):1471–1478, 2000. (Cited on page 43.)
- [37] X. Du and W. Chen. Efficient uncertainty analysis methods for multidisciplinary robust design. *AIAA journal*, 40(3):545–581, 2002. (Cited on page 61.)
- [38] X. Du and W. Chen. Sequential optimization and reliability assessment method for efficient probabilistic design. *Journal of Mechanical Design*, 126(2):225, 2004. (Cited on pages 124 et 127.)
- [39] D. Dubois and H. Prade. Combination of fuzzy information in the framework of possibility theory. *Data Fusion in Robotics and Machine Intelligence*, pages 481–505, 1991. (Cited on page 175.)
- [40] D. Dubois, H. Prade, H. Farreny, R. Martin-Clouaire, and C. Testemale. *Théorie des possibilités: applications á la représentation des connaissances en informatique*. Masson, Paris; Milan; Barcelone, 1988. (Cited on page 171.)
- [41] R. O. Duda. *Pattern classification and scene analysis*. Wiley, New York, 1973. (Cited on page 89.)
- [42] B. Echard, N. Gayton, M. Lemaire, and N. Relun. A combined importance sampling and kriging reliability method for small failure probabilities with time-demanding numerical models. *Reliability Engineering & System Safety*, 111:232–240, March 2013. (Cited on page 46.)
- [43] R. F. Engle, C. W. J. Granger, J. Rice, and A. Weiss. Semiparametric estimates of the relation between weather and electricity sales. *Journal of the American Statistical Association*, 81(394):310–320, June 1986. (Cited on page 89.)
- [44] N. Eugene, C. Lee, and F. Famoye. BETA-NORMAL DISTRIBUTION AND ITS APPLICATIONS. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 31(4):497–512, May 2002. (Cited on page 134.)
- [45] S. Ferson and L. R. Ginzburg. Different methods are needed to propagate ignorance and variability. *Reliability Engineering & System Safety*, 54(2):133–144, 1996. (Cited on page 171.)
- [46] S. Ferson, C. A. Joslyn, J. C. Helton, W. L. Oberkampf, and K. Sentz. Summary from the epistemic uncertainty workshop: consensus amid diversity. *Reliability Engineering & System Safety*, 85(1-3):355–369, July 2004. (Cited on pages 32, 93 et 190.)
- [47] R. Fletcher. Function minimization by conjugate gradients. *The Computer Journal*, 7(2):149–154, February 1964. (Cited on page 45.)
- [48] D. B. Fogel. *Evolving Artificial Intelligence*. PhD thesis, University of California, 1992. (Cited on page 46.)

-
- [49] J. R. Fonseca, M. I. Friswell, and A. W. Lees. Efficient robust design via monte carlo sample reweighting. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(11):2279–2301, March 2007. (Cited on page 44.)
- [50] T. Gasser, L. Sroka, and C. Jennen-Steinmetz. Residual variance and residual pattern in nonlinear regression. *Biometrika*, 73(3):625–633, 1986. (Cited on page 88.)
- [51] L. L. Green, H.-Z. Lin, and M. R. Khalessi. Probabilistic methods for uncertainty propagation applied to aircraft design. In *Proceedings of 20th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, volume paper 2002-3140, 2002. (Cited on pages 39 et 57.)
- [52] H. Greiner. Robust filter design by stochastic optimization. pages 150–160, November 1994. (Cited on page 46.)
- [53] X. Gu and J. E. Renaud. Implicit uncertainty propagation for robust collaborative optimization. In *ASME Design Engineering Technical Conferences–Design Automation Conference, Pittsburgh, PA, DETC2001/DAC-21118*, Pittsburgh, September 2001. (Cited on pages 197 et 198.)
- [54] X. Gu, J. E. Renaud, S. M. Batill, R. M. Brach, and A. S. Budhiraja. Worst case propagated uncertainty of multidisciplinary systems in robust design optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 20(3):190–213, November 2000. (Cited on pages 60, 191, 192, 196 et 197.)
- [55] C. R. Gumbert, P. A. Newman, and G. J. W. Hou. Effect of random geometric uncertainty on the computational design of a 3-d flexible wing. In *Proceedings of 20th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, page 24–26, St Louis, 2002. (Cited on page 39.)
- [56] A. Haldar. *Probability, reliability, and statistical methods in engineering design*. John Wiley, New York ; Chichester [England], 2000. (Cited on pages 42, 43 et 109.)
- [57] J. C. Helton and W. L. Oberkampf. Alternative representations of epistemic uncertainty. *Reliability Engineering & System Safety*, 85(1):1–10, July 2004. (Cited on pages viii, ix, 180, 185 et 189.)
- [58] E. Herrmann. Local bandwidth choice in kernel regression estimation. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 6(1):35–54, March 1997. (Cited on page 88.)
- [59] M. R. Hestenes and E. Stiefel. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 49(6):409–436, December 1952. (Cited on page 45.)
- [60] B. Huang and X. Du. A robust design method using variable transformation and Gauss–Hermite integration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(12):1841–1858, June 2006. (Cited on page 39.)

- [61] T. Inagaki. Interdependence between safety-control policy and multiple-sensor schemes via dempster-shafer theory. *IEEE Transactions on Reliability*, 40(2):182–188, June 1991. (Cited on page 186.)
- [62] S. S. Isukapalli, A. Roy, and P. G. Georgopoulos. Stochastic response surface methods (SRSMs) for uncertainty propagation: Application to environmental and biological systems. *Risk Analysis*, 18(3):351–363, June 1998. (Cited on page 199.)
- [63] L. Jaeger, C. Gogu, S. Segonds, and C. Bes. Multidisciplinary optimization under uncertainty for preliminary aircraft sizing. In *Proceedings of SAE 2011 Aerotech Congress*, Toulouse, October 2011. (Cited on page 153.)
- [64] L. Jaeger, C. Gogu, S. Segonds, and C. Bes. Optimisation multidisciplinaire sous incertitudes en conception préliminaire avion. In *Proceedings of 20ème Congrès Français de Mécanique, Besançon*, Besançon, September 2011. (Cited on page 153.)
- [65] L. Jaeger, C. Gogu, S. Segonds, and C. Bes. Conception préliminaire avion avec prise en compte d’incertitudes de modèles et de paramètres. In *Proceedings of 13ème Colloque National AIP-Primeca*, Mont Dore, March 2012. (Cited on page 153.)
- [66] L. Jaeger, C. Gogu, S. Segonds, and C. Bes. Aircraft multidisciplinary design optimization under both model and design variables uncertainty. *Journal of Aircraft*, pages 1–11, February 2013. (Cited on page 153.)
- [67] L. Jaeger, C. Gogu, S. Segonds, and C. Bes. Uncertainty propagation in multi-agent systems for multidisciplinary optimization problems. In *10 th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, Orlando, Florida, USA, May 2013. (Cited on page 155.)
- [68] Marija Jankovic, Pascale Zarate, Jean-Claude Bocquet, and Julie Le Cardinal. Collaborative decision making. *International Journal of Decision Support System Technology*, 1(1):35–45, 2009. (Cited on page 19.)
- [69] R. Jin, W. Chen, and T.W. Simpson. Comparative studies of meta-modelling techniques under multiple modelling criteria. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 23(1):1–13, December 2001. (Cited on page 46.)
- [70] R. Jin, X. Du, and W. Chen. The use of metamodeling techniques for optimization under uncertainty. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 25(2):99–116, July 2003. (Cited on page 46.)
- [71] Y. Jin. A comprehensive survey of fitness approximation in evolutionary computation. *Soft Computing*, 9(1):3–12, October 2003. (Cited on page 46.)

-
- [72] T. Jorquera, J.-P. Georgé, and C. Régis. Self-organizing multi-agent system for MDO. In *12e congrès annuel de la Société française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision (ROADEF)*, Saint Etienne, 2011. (Cited on pages 115 et 123.)
- [73] E. Kazancioglu, G. Wu, J. Ko, S. Bohac, Z. Filipi, S. J. Hu, D. Assanis, and K. Saitou. Robust optimization of an automotive valvetrain using a multiobjective genetic algorithm. volume 2003, pages 97–108. ASME, September 2003. (Cited on page 46.)
- [74] E. Kessler and M. D. Guenov. *Advances in collaborative civil aeronautical multidisciplinary design optimization*. Number v. 233 in Progress in astronautics and aeronautics. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, Va, 2010. (Cited on page 13.)
- [75] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, and M. P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220(4598):671–680, May 1983. (Cited on page 46.)
- [76] G. J. Klir. Generalized information theory: aims, results, and open problems. *Reliability Engineering & System Safety*, 85(1-3):21–38, July 2004. (Cited on page 32.)
- [77] J. R. Koehler and A. B. Owen. Computer experiments. In *Handbook of Statistics*, volume 13, pages 261–308. Elsevier, 1996. (Cited on page 36.)
- [78] J. R. Koza. *Genetic programming: on the programming of computers by means of natural selection*. Complex adaptive systems. MIT Press, Cambridge, Mass, 1992. (Cited on page 46.)
- [79] V. Kreinovich and G. Xiang. Fast algorithms for computing statistics under interval uncertainty: An overview. *Interval / Probabilistic Uncertainty and Non-Classical Logics*, Springer Berlin Heidelberg, 46:19–31, 2008. (Cited on page 167.)
- [80] A. Kumar, A. J. Keane, P. B. Nair, and S. Shahpar. Robust design of compressor fan blades against erosion. *Journal of Mechanical Design*, 128(4):864–873, 2006. (Cited on page 46.)
- [81] R. Le Riche, O. Roustant, X. Bay, and G. Pujol. Formulation de l'optimisation avec incertitudes dans le projet RNTL/OMD. Technical report, Ecole des Mines, Saint Etienne, 2007. (Cited on pages 27, 38, 41, 74, 95 et 128.)
- [82] K.-H. Lee and G.-J. Park. Robust optimization considering tolerances of design variables. *Computers & Structures*, 79(1):77–86, January 2001. (Cited on pages 38 et 39.)
- [83] M. Lemaire, A. Chateaufneuf, and J.-C. Mitteau. *Fiabilité des structures: couplage mécano-fiabiliste statique*. Hermès Science Publications, Paris, 2005. (Cited on pages 40, 101, 137 et 162.)

- [84] J. Liang, Z. P. Mourelatos, and J. Tu. A single-loop method for reliability-based design optimisation. *International Journal of Product Development*, 5(1/2):76, 2008. (Cited on page 125.)
- [85] O. Linton, E. Mammen, J. P. Nielsen, and C. Tanggaard. Yield curve estimation by kernel smoothing methods. *Journal of Econometrics*, 105(1):185–223, November 2001. (Cited on pages 88 et 89.)
- [86] Oliver Linton and Enno Mammen. Estimating semiparametric ARCH (∞) models by kernel smoothing methods¹. *Econometrica*, 73(3):771–836, 2005. (Cited on pages 88 et 89.)
- [87] J. S. Liu. *Monte Carlo strategies in scientific computing*. Springer, New York, 2008. (Cited on page 38.)
- [88] F. J. Massey. The kolmogorov-smirnov test for goodness of fit. *Journal of the American Statistical Association*, 46(253):68, March 1951. (Cited on page 162.)
- [89] H.-G. Muller and U. Stadtmuller. Estimation of heteroscedasticity in regression analysis. *The Annals of Statistics*, 15(2):610–625, June 1987. (Cited on pages 88 et 89.)
- [90] J. M. Mulvey, R. J. Vanderbei, and S. A. Zenios. Robust optimization of large-scale systems. *Operations Research*, 43(2):264–281, March 1995. (Cited on pages 38 et 96.)
- [91] R. H. Myers. *Response surface methodology: process and product optimization using designed experiments*. Wiley series in probability and statistics. Wiley, Hoboken, N.J, 3rd ed edition, 2009. (Cited on pages 46, 90 et 98.)
- [92] J. A. Nelder and R. Mead. A simplex method for function minimization. *The Computer Journal*, 7(4):308–313, January 1965. (Cited on page 45.)
- [93] D. Neufeld, J. Chung, and K. Behdinan. Aircraft conceptual design optimization considering fidelity uncertainties. *Journal of aircraft*, 48(5):1602–1612, 2011. (Cited on page 81.)
- [94] E. Nikolaidis, S. Chen, H. Cudney, R. T. Haftka, and R. Rosca. Comparison of probability and possibility for design against catastrophic failure under uncertainty. *Journal of Mechanical Design*, 126(3):386–394, 2004. (Cited on pages viii, 164, 165, 172 et 173.)
- [95] A. Notin, N. Gayton, J. L. Dulong, M. Lemaire, P. Villon, and H. Jaifal. RPCM: a strategy to perform reliability analysis using polynomial chaos and resampling. application to fatigue design. *Revue européenne de mécanique numérique*, 19(8):795–830, December 2010. (Cited on page 99.)
- [96] W. L. Oberkampf, S. M. DeLand, B. M. Rutherford, K. V. Diegert, and K. F. Alvin. Error and uncertainty in modeling and simulation. *Reliability Engineering & System Safety*, 75(3):333–357, 2002. (Cited on page 33.)

-
- [97] S. Padula and W. Li. Options for robust airfoil optimization under uncertainty. In *9th AIAA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, September 2002. (Cited on page 39.)
- [98] E. Parzen. On estimation of a probability density function and mode. *The Annals of Mathematical Statistics*, 33(3):1065–1076, September 1962. (Cited on page 89.)
- [99] R. E. Perez, H. H. T. Liu, and K. Behdinan. Evaluation of multidisciplinary optimization approaches for aircraft conceptual design. In *AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference, Albany, NY, Albany, New York*, 2004. (Cited on pages vi, 19, 50, 51 et 56.)
- [100] D. T Pham and D. Karaboga. *Intelligent optimisation techniques: genetic algorithms, tabu search, simulated annealing*. Springer, New York, 2012. (Cited on page 46.)
- [101] E. Polak and G. Ribiere. Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées. *Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, 3(1):35–43, 1969. (Cited on page 45.)
- [102] X. Qu and R. T. Haftka. Reliability-based design optimization using probabilistic sufficiency factor. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 27(5), June 2004. (Cited on page 128.)
- [103] R. Rackwitz. Reliability analysis—a review and some perspectives. *Structural Safety*, 23(4):365–395, October 2001. (Cited on pages 43 et 109.)
- [104] D. P. Raymer. *Aircraft design: a conceptual approach*. AIAA education series. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, VA, 3rd edition, 1999. (Cited on pages vi, 11, 13 et 14.)
- [105] J.-M. Renders and H. Bersini. Hybridizing genetic algorithms with hill-climbing methods for global optimization: two possible ways. In *IEEE World Congress on Computational Intelligence*, volume 1, pages 312–317, Orlando, FL, June 1994. (Cited on page 46.)
- [106] J. A. Rice. *Mathematical statistics and data analysis*. Duxbury advanced series. Thomson/Brooks/Cole, Belmont, CA, 3rd ed edition, 2007. (Cited on pages 103 et 135.)
- [107] H. Robbins and S. Monro. A stochastic approximation method. *Annals of mathematical statistics*, 22(3):400–407, September 1951. (Cited on page 161.)
- [108] N. Rolander, J. Rambo, Y. Joshi, J. K. Allen, and F. Mistree. An approach to robust design of turbulent convective systems. *Transactions-American society of mechanical engineers journal of mechanical design*, 128(4):844–855, 2006. (Cited on page 39.)

- [109] J. Roskam. *Airplane Design: Part I, Preliminary Sizing of Airplanes*. University of Kansas, Kansas, Ottawa, 3rd edition, 2003. (Cited on page 13.)
- [110] J. O. Royset, A. Der Kiureghian, and E. Polak. Reliability-based optimal structural design by the decoupling approach. *Reliability Engineering & System Safety*, 73(3):213–221, September 2001. (Cited on page 125.)
- [111] J. Sacks, W. J. Welch, T. J. Mitchell, and H. P. Wynn. Design and analysis of computer experiments. *Statistical Science*, 4(4):409–423, November 1989. (Cited on page 36.)
- [112] N. V. Sahinidis. Optimization under uncertainty: state-of-the-art and opportunities. *Computers & Chemical Engineering*, 28:971–983, June 2004. (Cited on page 60.)
- [113] E. Sandgren and T. M. Cameron. Robust design optimization of structures through consideration of variation. *Computers & Structures*, 80(20-21):1605–1613, August 2002. (Cited on page 38.)
- [114] Y. Sang-Baeck, J. In-Soung, H. Dong-Seok, H. Jung-Pyo, and K. Young-Jung. Robust shape optimization of electromechanical devices. *IEEE Transactions on Magnetics*, 35(3):1710–1713, May 1999. (Cited on page 39.)
- [115] D. Scholz and M. Nita. Preliminary sizing of large propeller driven aeroplanes. pages 1–19, Brno, Czech Republic, October 2008. (Cited on page 118.)
- [116] K. Sentz and S. Ferson. Combination of evidence in dempster-shafer theory. Technical Report SAND2002-0835, Sandia National Laboratories, April 2002. (Cited on page 187.)
- [117] S. Seo, T. Aramaki, Y. Hwang, and K. Hanaki. Fuzzy decision-making tool for environmental sustainable buildings. *Journal of Construction Engineering and Management*, 130(3):415–423, June 2004. (Cited on page 171.)
- [118] G. Shafer. *A mathematical theory of evidence*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1976. (Cited on page 181.)
- [119] J. Shankar, R. T. Haftka, and L. T. Watson. Computational study of a nonhierarchical decomposition algorithm. *Computational Optimization and Applications*, 2(3):273–293, November 1993. (Cited on page 54.)
- [120] J. Sobieszczanski-Sobieski and R. T. Haftka. Multidisciplinary aerospace design optimization: survey of recent developments. *Structural Optimization*, 14(1):1–23, August 1997. (Cited on pages 50, 195 et 196.)

-
- [121] J. Sobieszczanski-Sobieski, J. S. Agte, and R. R. Sandusky. Bi-level integrated system synthesis (BLISS). Technical Report NASA/TM-1998-208715, Hampton, Virginia, 1998. (Cited on page 56.)
- [122] R. H. Sues and M. Cesare. An innovative framework for reliability based MDO. Atlanta, GA, 2000. (Cited on page 43.)
- [123] S. Sundaresan, K. Ishii, and D. R. Houser. A robust optimization procedure with variations on design variables and constraints. *Engineering Optimization*, 24(2):101–117, May 1995. (Cited on page 192.)
- [124] G. Taguchi. *Taguchi's quality engineering handbook*. John Wiley & Sons ; ASI Consulting Group, Hoboken, N.J. : Livonia, Mich, 2005. (Cited on page 36.)
- [125] V. Torczon. On the convergence of pattern search algorithms. *SIAM Journal on optimization*, 7(1):1–25, 1997. (Cited on pages 45, 77, 107 et 139.)
- [126] E. Torenbeek. *Synthesis of subsonic airplane design: an introduction to the preliminary design of subsonic general aviation and transport aircraft, with emphasis on layout, aerodynamic design, propulsion and performance*. Delft University Press, Delft, 1976. (Cited on page 17.)
- [127] S. Tsutsui. A comparative study on the effects of adding perturbations to phenotypic parameters in genetic algorithms with a robust solution searching scheme. In *Proceedings of the 1999 IEEE System, Man, and Cybernetics Conference*, volume 3, pages 585–591. IEEE, 1999. (Cited on page 46.)
- [128] S. Tsutsui and A. Ghosh. Genetic algorithms with a robust solution searching scheme. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1(3): 201–208, September 1997. (Cited on page 46.)
- [129] J. Tu, K. K. Choi, and Y. H. Park. A new study on reliability-based design optimization. *Journal of Mechanical Design*, 121(4):557, 1999. (Cited on pages 123 et 124.)
- [130] T. Turányi. Sensitivity analysis of complex kinetic systems. tools and applications. *Journal of Mathematical Chemistry*, 5(3):203–248, 1990. (Cited on page 82.)
- [131] P. J. Van Laarhoven. *Simulated annealing: theory and applications*. Springer, New York, 1987. (Cited on page 46.)
- [132] P. Verma, P. Singh, K. V. George, Devotta S. Singh, H. V., and R. N. Singh. Uncertainty analysis of transport of water and pesticide in an unsaturated layered soil profile using fuzzy set theory. *Applied Mathematical Modelling*, 33(2):770–782, 2 2009. (Cited on pages viii, 169 et 170.)

- [133] R. L. Wagner. Science, uncertainty and risk: the problem of complex phenomena. *APS News*, 12(1):8, 2003. (Cited on page 33.)
- [134] P. Walley. Towards a unified theory of imprecise probability. *International Journal of Approximate Reasoning*, 24(2-3):125–148, May 2000. (Cited on page 32.)
- [135] H. Wang, N. H. Kim, and Y.-J. Kim. Safety envelope for load tolerance and its application to fatigue reliability design. *Journal of Mechanical Design*, 128(4):919–927, 2006. (Cited on page 38.)
- [136] J.-B. Welcomme. *MASCODE : un système multi-agent adaptatif pour concevoir des produits complexes. Application à la conception préliminaire avion*. PhD thesis, Paul Sabatier University, Toulouse, 2008. (Cited on pages 14 et 49.)
- [137] J.-B. Welcomme, M.-P. Gleizes, and R. Redon. A self-organising multi-agent system managing complex system design application to conceptual aircraft design. *System and Information Sciences Notes (SIWN)*, 1(2):208–221, November 2009. (Cited on pages 22 et 49.)
- [138] N. Wiener. The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60(4):897–936, 1938. (Cited on page 99.)
- [139] Y. T. Wu and W. Wang. Efficient probabilistic design by converting reliability constraints to approximately equivalent deterministic constraints. *Journal of Integrated Design and Process Sciences*, 2(4):13–24, 1998. (Cited on page 128.)
- [140] Y. T. Wu, Y. Shin, R. Sues, and M. Cesare. Safety-factor based approach for probabilistic-based design optimization. Seattle, Washington, 2001. (Cited on page 43.)
- [141] R. R. Yager. On the dempster-shafer framework and new combination rules. *Information Sciences*, 41(2):93–137, March 1987. (Cited on page 186.)
- [142] W.-N. Yang and B. L. Nelson. Using common random numbers and control variates in multiple-comparison procedures. *Operations Research*, 39(4):583–591, July 1991. (Cited on page 161.)
- [143] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and control*, 8:338–353, 1965. (Cited on pages 168 et 171.)
- [144] L. A. Zadeh. Review of a mathematical theory of evidence. *AI magazine*, 5(3):81–83, 1984. (Cited on page 186.)
- [145] T. Zou and S. Mahadevan. A direct decoupling approach for efficient reliability-based design optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 31(3):190–200, January 2006. (Cited on page 125.)