Modelagem matemática em ambiente acadêmico-profissional: uma experiência de aprendizagem significativa

Mathematical modeling in academic-professional environment: a meaningful learning experience

Alex Sandro Gomes Leão[1]
http://orcid.org/0000-0001-9833-4946

Radael de Souza Parolin[2]
http://orcid.org/0000-0003-3803-8920

Charles Quevedo Carpes[3]
http://orcid.org/0000-0002-6070-3803

Patrícia Pujól Goulart Carpes[4]
http://orcid.org/0000-0001-5206-8718

RESUMO: O artigo apresenta e discute as potencialidades e limitações de uma atividade de modelagem matemática desenvolvida em 2018 por estudantes do Curso de Graduação em Matemática na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, no Campus Itaqui. Com base em pesquisa bibliográfica e dados relacionados a frota de veículos por situação de um estado do sul do Brasil, do período de 2007 a 2016, e conhecimentos das áreas da análise numérica, estatística descritiva e a discussão sobre a teoria da aprendizagem significativa, elaboramos o artigo de relato de experiência, usando a modelagem matemática como método de pesquisa. O resultado descreve o processo de construção de modelo matemático, destacando cada etapa do seu desenvolvimento e as reflexões dos professores orientadores sobre a execução como parte das atividades acadêmicas do Seminário em Educação Matemática, que é uma disciplina da graduação. O uso da modelagem matemática como método de ensino proporcionou uma aprendizagem significativa e prazerosa na educação superior, além do desafio de tornar os estudantes universitários mais ativos, considerando que eles estão acostumados com o ensino tradicional. A proposta didática exigiu o envolvimento e a mobilização dos estudantes na pesquisa, na elaboração de hipóteses, na construção de estratégia para formular o modelo matemático.
Palavras-chave: Educação Matemática, Modelagem Matemática, Ensino Superior, Aprendizagem Significativa.

ABSTRACT: The article presents and discusses the potentialities and limitations of a mathematical

[1] Doutorando em Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde pela Universidade Federal de Santa Maria e professor assistente do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal do Pampa, Campus Itaqui. E-mail: alexleao@unipampa.edu.br.

[2] Doutor em Modelagem Computacional pela Universidade Estadual do Rio de Janeiro e professor adjunto do Curso de Graduação em Matemática, Campus Itaqui. E-mail: radaelparolin@unipampa.edu.br.

[3] Doutor em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul e professor auxiliar do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal do Pampa, Campus Itaqui. E-mail: charlescarpes@unipampa.edu.br.

[4] Doutora em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Franciscana e professora adjunta do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal do Pampa, Campus Bagé. E-mail: patriciacarpes@unipampa.edu.br.

modeling activity developed in 2018 by students of the Undergraduate Course in Mathematics at the Federal University of the Rio Grande of Sul, at the Itaqui Campus. Based on bibliographic research a data related to vehicle fleet by situation of a state in southern Brazil, from 2007 to 2016, and knowledge of the area of numerical analysis, descriptive statistic, and discussion on meaningful learning theory, we elaborated the paper of experience report using mathematical modeling as a research method. The result describes the process of building a mathematical model, highlighting each stage of its development and the reflection of the guiding teachers on its execution as part of the academic activities of the Seminar in Mathematics Education, which is an undergraduate discipline. The use of mathematical modeling as a teaching method has provided significant and enjoyable learning in higher education, as well as the challenge of making university students more active, considering that, they are accustomed to traditional teaching. The didactic proposal required the involvement and mobilization of students in the research, in the elaboration of hypotheses, in the construction of strategy to formulate the mathematical model.
Keywords: Mathematics Education, Mathematical Modeling, Higher Education, Meaningful Learning.

1. INTRODUÇÃO

O artigo visa apresentar e discutir as potencialidades e limitações de uma Atividade de Modelagem Matemática (AMM) no ambiente acadêmico-profissional[5], que se desenvolveu durante a disciplina de Seminário em Educação Matemática (SEM) do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA). Essa AMM consistiu em aplicar as etapas do processo de modelagem matemática em uma situação-problema identificada pelos estudantes universitários, com a supervisão dos professores orientadores.

O objetivo do SEM era discutir sobre métodos de ensino para educação básica, com ênfase no ensino e aprendizagem de matemática, visando que cada grupo de estudo escolhesse um dos métodos para aplicação em uma situação real, cuja solução deveria empregar conceitos matemáticos estudados no curso de graduação. A turma foi organizada em cinco grupos e eles optaram pela modelagem matemática como método de ensino para desenvolver a atividade acadêmica proposta pelo professor.

Uma das situações-problemas identificada por um grupo, e explorada neste artigo, é o crescimento no número de veículos na cidade, onde residiam (Itaqui-RS) com o passar dos anos. O tema surgiu, pois, os acadêmicos destacaram vários incômodos com o trânsito e que as vias de circulação da cidade estavam em más ou péssimas condições de trafegabilidade.

Um dos motivos identificados na pesquisa virtual para a depreciação das vias é o elevado número de veículos que as utilizam. Desse modo, os grupos de estudos buscaram obter um modelo matemático para estimar a população de veículos da cidade em um determinado tempo, permitindo assim, uma previsão a partir dos dados obtidos e ainda analisar se as condições do trânsito tenderiam a piorar.

Cabe destacar que o desenvolvimento deste trabalho não é a formulação de um modelo que represente à risca a situação proposta, como é exigido em pesquisa de mestrado ou de doutorado, por exemplo. Contudo, descreve uma proposta de modelagem matemática como método de ensino, com fim de que os acadêmicos do Curso de Graduação em Matemática

[5] Optamos pelo uso do termo acadêmico-profissional em substituição ao termo formação inicial, por se adaptar melhor ao que ocorre no Brasil, assim como se refere a formação do professor ocorrer num “continuum”, ao longo de sua carreira profissional abarcando todas as etapas da formação docente, conforme discutido por Diniz-Pereira (2008).

pudessem refletir a esse respeito e vivenciar a experiência de construir um modelo matemático no 4º Semestre de 2018, a partir de um tema de interesse dos acadêmicos.

Neste trabalho, a modelagem matemática é entendida como a arte de expressar situações-problema do cotidiano utilizando-se da linguagem matemática (BASSANEZI, 2014). Em outras palavras, objetiva interpretar os fenômenos naturais e sociais, e representá-los matematicamente.

Por meio da modelagem matemática, os problemas exigem uma coleta de dados e a sua apresentação, geralmente a partir de caráter genérico, o que estimula a busca e a organização dos dados e favorece à compreensão de uma situação estudada (BURAK, 2014), o que instiga o aprendizado significativo.

Neste sentido, partindo de um problema que parece simples, mas, também, rico em desafios na mobilização de conhecimentos matemáticos e possibilitando experiências de aprendizado, faz-se a combinação dessas experiências ancoradas em conhecimentos suficientemente significativos da cognição dos sujeitos. Ou seja, uma aprendizagem baseada em relações cognitivas já existentes (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1983).

1.1 Modelagem matemática no contexto acadêmico-profissional

O ensino através da modelagem matemática é um campo rico em oportunidades para atividades na formação acadêmico-profissional de Matemática, visto que ela se desenvolve a partir do domínio de conteúdo, do inesperado, da criatividade, do diálogo, da participação de todos. Do contrário, conforme Fiorentini e Castro (2003), o professor que não é reflexivo, mecaniza sua prática não dando a seu estudante a possibilidade de ser criativo, ou seja, torna-se apenas um agente passivo, que decora conceitos e fórmulas sem dar sentido a elas.

Para Barbosa et al. (2007), a modelagem matemática é entendida como uma forma de capacitar o indivíduo para uma atuação consciente e crítica à realidade por ele vivenciada. Ou seja, ao trabalhar em sua sala com situações reais, a possibilidade de existir um elemento motivador para o aprendizado aumenta, pois, revela a interação existente entre as diferentes áreas do conhecimento. “Essa interação aumenta a cooperação entre professor e aluno, pois leva o aluno a pensar mais, argumentar mais, ter consciência de suas ações, ser inovador, criativo e ativo em sua própria aprendizagem” (ROSA; KATO, 2014, p. 225).

Por outro lado, de acordo com Brito e Almeida (2005) a modelagem matemática é compreendida como uma alternativa pedagógica para o ensino de matemática. Para esses autores, ao usar a modelagem o professor está se abrindo as novas perspectivas, concedendo a seus estudantes a chance de participar de sua aula. Enquanto, Almeida e Santos (2006) advertem que os professores precisam ter a oportunidade de aprender sobre modelagem, aprender por meio da modelagem e ensinar usando modelagem.

Ao trabalhar com essa proposta existe uma reorganização do trabalho, o conteúdo não é proposto de forma linear, o estudante não é um expectador e sim um investigador, o que o leva a deparar-se com situações que o faz pensar, interpretar, explicar e justificar.

Ao usar a modelagem o professor no ensino superior passa a ser um mediador no processo de ensino e aprendizagem, o que o faz estudar mais, pensar e repensar conceitos e práticas de forma abrangente e a todo o momento, precisa ouvir, mostrar caminhos e identificar se foi compreendido ou não. Essa reorganização não é simples, pois, geralmente, não foi assim que aprendeu a fazer durante toda sua formação.

É necessário se reinventar, se abrir para o novo e deixar de lado certos valores adquiridos durante a construção da sua identidade profissional. Acreditamos que atividades que provoquem no estudante universitário esta mobilização, reflexão e autoanálise, possibilitará se tornar um profissional mais preparado para atender às demandas educacionais das comunidades escolares.

1.2 Aprendizagem significativa

O objetivo do trabalho de Ausubel foi apresentar uma teoria abrangente de organização cognitiva, de aprendizagem e de retenção de longo prazo de conteúdos de aprendizagem apresentados verbalmente (ARAGÃO apud BURAK; ARAGÃO, 2012).

As ideias de Ausubel resultaram de sua posição assumida e que se refere a princípio, que chamou de teoria da aprendizagem verbal significativa (TAVS) e que tem por base a organização cognitiva idiossincrática e dinâmica, na qual a estrutura cognitiva é o construto fundamental de sua teoria.

A estrutura cognitiva é por hipótese, uma estrutura hierarquicamente organizada em termos e traços conceituais altamente inclusivos, nos quais são subsumidos progressivamente traços de subconceitos menos inclusivos, assim como dados de informações específicas (BURAK; ARAGÃO, 2012). De acordo com essa teoria, aprender significativamente é ampliar e reconfigurar ideias já existentes na estrutura mental e com isso ser capaz de relacionar e acessar novos conteúdos, pois quanto maior for o número de elos feitos, maior será o conhecimento. A Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) considera o sujeito como ser social, sua história e ressalta o papel dos docentes na proposição de situações didáticas que favoreçam a aprendizagem.

Ao se propor atividades de formação de professores, com objetivo de que os envolvidos tenham um aprendizado duradouro, duas condições essenciais devem ser consideradas: o conteúdo a ser ensinado deve ser potencialmente revelador e o sujeito precisa estar disposto a relacionar o material de maneira consistente e não arbitrária.

Sendo o professor "[...] um sujeito que assume sua prática a partir dos significados que ele mesmo lhes dá, um sujeito que possui conhecimentos e um saber-fazer provenientes de sua própria atividade e a partir dos quais ele a estrutura e a orienta" (TARDIF, 2014, p. 228). E que os seus saberes possibilitam ancorar os novos conhecimentos em pré-conceitos já estabelecidos e fortalecidos suficientemente para que possa a partir deles construir novos saberes. Porém, esses conceitos âncoras precisam ser investigados pelos formadores com instrumentos adequados de pesquisa, antes de se propor tal formação.

Este ancoradouro, ou seja, esses conhecimentos que o professor já possui em sua cognição é denominado de subsunçor. Os subsunçores são os conhecimentos prévios e relevantes para que os materiais de aprendizagem ou, enfim, os novos conhecimentos sejam potencialmente significativos.

Sendo assim, pode-se caracterizar a aprendizagem significativa por sua interação cognitiva, a qual relaciona o novo conhecimento (emergente) ao conhecimento prévio. Nesse processo, que é não-literal e não-arbitrário, o novo conhecimento adquire significados para o sujeito e o conhecimento prévio fica mais rico e mais sofisticado em significados, e adquire mais estabilidade (MOREIRA; MASINI, 1982; 2006; MOREIRA, 1999; 2000; 2006; MASINI; MOREIRA, 2008; VALADARES; MOREIRA, 2009).

Através de novas aprendizagens significativas resultantes de novas interações entre novos conhecimentos e o subsunçor, esse ficará cada vez mais estável, mais claro, mais diferenciado e o sujeito lhe dará o significado mais generalizado, assim ele auxilia no processo de aquisição de novas aprendizagens.

Esta forma de aprendizagem significativa, na qual uma nova ideia, um novo conceito, uma nova proposição, mais abrangente, passa a subordinar conhecimentos prévios é chamada de aprendizagem significativa superordenada. Não é muito comum, a maneira mais típica de aprender significativamente é a aprendizagem significativa subordinada, na qual um novo conhecimento adquire significado na ancoragem interativa com algum conhecimento prévio especificamente relevante (MOREIRA, 2012, p. 3).

Um subsunçor já bem elaborado, com significados claros e estáveis para o sujeito pode com o tempo, por falta de uso, apresentar uma perda de significados. É um processo normal do funcionamento cognitivo, por outro lado, quando se trata de uma aprendizagem significativa, sua, reaprendizagem é possível e relativamente rápida.

No entanto, ocorrem casos em que o sujeito não dispõe de subsunçores adequados que lhe permitam atribuir significados aos novos conhecimentos. Nesse caso "costuma-se pensar que o problema pode ser resolvido com os chamados organizadores prévios, solução proposta até mesmo por Ausubel, mas que, na prática, muitas vezes, não funciona" (MOREIRA, 2012, p. 12). De acordo com este autor, o organizador prévio é o recurso instrucional apresentado em um nível maior de abstração, generalidade e inclusividade em relação ao material de aprendizagem, o qual se deve usá-lo com cuidado.

O mesmo autor pontua que, a clareza, a estabilidade e a organização do conhecimento prévio é o que mais influência na aquisição de conhecimentos significativos. Desse modo, deve haver um subsunçor no qual o novo conhecimento ganha significados, se integra e se diferencia em relação ao já existente, e este, no que lhe concerne, adquire outros significados ficando mais estável, mais diferenciado, mais rico, mais capaz de ancorar novos conhecimentos. No entanto, essa ancoragem não é um processo estático, mas sim, um processo interativo, dinâmico, e assim o subsunçor se modifica.

2 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA, COLETA DE DADOS E MÉTODO

A seção destina-se a apresentar os procedimentos metodológicos do estudo. Desse modo, são descritos a caracterização da pesquisa, os sujeitos, a forma de coleta dos dados, assim como a forma de analisá-los.

2.1 Pesquisa em educação matemática

O estudo foi desenvolvido durante o Seminário em Educação Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática da UNIPAMPA, Campus Itaqui, em 2018, sendo uma disciplina do 4° Semestre e os sujeitos da pesquisa foram os acadêmicos matriculados nesse curso. Durante o semestre letivo foram apresentados diferentes métodos de ensino de matemática.

Na sequência, foi proposto aos estudantes que escolhessem um dos métodos abordados para criarem uma situação de ensino, a qual pudessem aplicá-la para desenvolver um conteúdo para o ensino básico ou superior, e eles optaram pela modelagem matemática.

A turma era composta por vinte estudantes universitários, que se dividiram em cinco grupos de quatro componentes cada. Neste artigo, se retrata a atividade desenvolvida por um desses grupos, analisando o processo de desenvolvimento da atividade por eles elaborado. Os grupos formados, em sala de aula, buscaram por situações que tivessem interesse em investigar e buscar/construir uma solução. Foi destinado quatro semanas para o desenvolvimento da atividade. Vale destacar, que os acadêmicos, além do professor da SEM, também foram auxiliados por outros docentes da IES.

Seguindo os passos definidos por Bassanezi (2014), os estudantes universitários usaram o seguinte roteiro para a elaboração da situação-problema: (a) Experimentação: consiste na obtenção de dados, portanto, trata-se de uma atividade essencialmente laboratorial; (b) Abstração: processo que permite a formulação de modelos matemáticos.

Essa fase é composta pela (b.1) Seleção de variáveis: momento onde os conceitos e variáveis envolvidos no problema são definidos; (b.2) Problematização: formulação de problemas teóricos em uma linguagem própria e de acordo com a(s) área(s) envolvida(s); (b.3) Formulação de hipóteses: momento em que são formuladas hipóteses bem amplas que permitem deduzir manifestações empíricas específicas; (b.4) Simplificação: busca-se a simplificação do processo de modelagem por meio da restrição do problema estudado que costuma ser complexo; (c) Resolução: resolução do modelo, atividade própria do matemático que pode estar totalmente desvinculado da realidade representada. Em geral, refere-se à resolução de equações (de variações discretas ou diferenciais) advindas das hipóteses previamente determinadas. (d) Validação: onde se deve testar os modelos produzidos, confrontando-os com as hipóteses e os dados coletados no sistema real; (e) Modificação: o modelo pode ser aceito ou rejeitado de acordo com as condições iniciais, e desse modo, nenhum modelo deve ser considerado definitivo ou imutável (BASSANEZI, 2014).

2.2 A coleta de dados da atividade de modelagem matemática

O trabalho teve seu ponto de partida num problema encontrado pelos estudantes durante suas idas e vindas na universidade. Observando que as ruas se encontravam em estado ruim, e considerando que a depreciação poderia estar ocorrendo pelo aumento da circulação de veículos na cidade de Itaqui, o grupo foi atrás de dados para poder validar sua hipótese e construir um problema.

Para estudar o tema da AMM, inicialmente os estudantes realizaram uma pesquisa bibliográfica e buscaram informações na Divisão de Trânsito (DITRAN), vinculada à Prefeitura Municipal de Itaqui, no qual foram orientados a acessar o Website do DETRAN/RS, com objetivo de realizar a coleta de dados.

A princípio, a situação problema visava obter um modelo matemático para estimar a população de veículos de Itaqui a partir do levantamento de dados quantitativos e por fim realizar a modelagem para prever as condições de tráfego na cidade. Porém, os acadêmicos tiveram dificuldades e enfrentaram imprevistos em relação à formulação deste modelo, pois não foi possível realizar uma coleta indireta de dados, com foco na circulação de veículos da cidade, o que se justificou pela indisponibilidade dos dados no órgão local.

Como foi possível apenas obter dados quantitativos referentes ao Estado do Rio Grande do Sul (RS), por isso optou-se por não modificar a AMM e sim adaptá-la, considerando a situação caótica das vias de circulação de veículos que perdura em todo Estado e que observamos com frequência em nosso dia-a-dia e nos meios de comunicação local.

A Tabela 1 informa a frota de veículos do RS por situação, no período de 2007 até 2016.

Tabela 1: Dados referentes à situação dos veículos no RS/Brasil
Table 1: Data regarding the situation of vehicles in the RS/Brazil

Período	Em circulação	Registro desativado	Baixado	Transferidos para outra UF
2007	3.855.215	476.328	73.891	306.596
2008	4.138.550	473.621	85.156	339.835
2009	4.417.646	471.836	99.897	372.932
2010	4.709.614	470.476	118.610	410.966
2011	5.031.931	469.234	137.543	444.680
2012	5.376.302	468.491	158.685	477.243
2013	5.721.904	467.875	184.184	513.337
2014	6.023.696	467.379	215.162	551.647
2015	6.234.770	466.852	243.927	590.382
2016	6.403.542	466.489	267.778	634.447

Fonte: (DETRAN-RS, 2018).

A partir dos dados coletados no Website do Detran-RS (2018), o grupo de estudantes universitários, com base na orientação de professores da IES se propuseram a analisá-los para elaborar um modelo matemático que respondesse a indagação inicial.

2.3. Modelagem matemática como método de pesquisa

Usando a modelagem matemática como método de pesquisa e com base em discussões da áreas da análise numérica, estatística descritiva e da teoria da aprendizagem significativa, elaboramos o artigo de relato de experiência que descreve a execução de uma AMM na educação superior.

Não há apenas uma maneira de aplicar a modelagem matemática no ambiente acadêmico-profissional ou na escola. Por isso alguns professores a interpretam como método de ensino e como método para desenvolver pesquisa, para orientar a tomada de decisão ou executar projeto de iniciação científica, cujo objetivo é construir um modelo matemático com base nas etapas de experimentação, abstração, resolução do modelo, validação e modificação ou a interação, a matematização e o modelo matemático, ou envolve a situação problema, a tarefa investigativa e a resolução do problema (BASSANEZI, 2014; BIEMBERGUT; HEIN, 2002; KFOURI, 2008).

D'Ambrosio (2009) explica que a criação de um modelo matemático depende do instrumento matemático acessível a cada modelador, bem como o seu desenvolvimento e suas limitações. A modelagem matemática resulta do esforço coletivo de um grupo, que necessita de instrumentos e conceitos matemáticos e da seleção de variáveis para aproximar-se de uma situação real.

3. DISCUSSÃO DO RESULTADO DA EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Este artigo de relato de experiência baseia-se nas ideias da modelagem matemática para mobilizar o conhecimento matemático e a aprendizagem significativa com os acadêmicos de Matemática da UNIPAMPA, cujas etapas descrevemos nesta seção.

3.1. Aplicação das estratégias de modelagem matemática no ensino superior

O processo de modelagem, de acordo com Bassanezi (2014) caracteriza-se por cinco etapas: experimentação, abstração, resolução, validação e modificação.

Na fase de "Experimentação" ocorre a coleta de dados. Este, portanto, é o momento da pesquisa onde os alunos interagem com o problema proposto, desenvolvem a intuição sobre possíveis relações de causa e efeito, e por fim inferir sobre possíveis restrições que precisam ser aplicadas ao problema matemático.

Assim, como descrito na seção anterior, os discentes partiram de uma situação-problema inicial que precisou ser adaptada devido à dificuldade de obtenção de dados sobre uma localidade específica. Os dados da Tabela 1, portanto, referem-se a um universo maior do que aquele planejado inicialmente.

A decisão em continuar a busca por um modelo, mesmo que para um conjunto de dados diferente, inspira-se no livro de Polya (1945), o qual sugere que se não é possível resolver um problema inicial, então, deve-se tentar resolver um problema análogo. Facilmente, os acadêmicos entenderam que o crescimento da frota de veículos em uma cidade do Rio Grande do Sul deveria ser similar ao crescimento estadual.

A fase de abstração do processo de modelagem é a mais rica, tanto do ponto de vista matemático quanto pedagógico. Esta fase é regularmente dividida em quatro etapas que são: a seleção de variáveis, a problematização, a formulação de hipóteses e a sua simplificação.

Durante a seleção de variáveis foi possível desenvolver os conceitos de variáveis dependentes e independentes, abordar os conceitos de relação e função e ainda tratar sobre algumas propriedades matemáticas das funções que surgiam.

A partir dos dados coletados foi possível compreender que o problema posto possuía quatro variáveis "naturais", as quais poderiam ser consideradas dependentes da variável tempo. Temos as seguintes variáveis:

- Veículos em circulação - veículo que está regularmente cadastrado no Estado;
- Veículos com registro desativado - veículo com placa antiga, sem movimentação no cadastro;
- Veículos baixados - veículo tornado sucata ou definitivamente desmontado, cuja condição consta assim assentada no cadastro;
- Veículos transferidos para outra UF – veículo, que foi transferido para outro Estado e cujo registro passa a ser responsabilidade do mesmo;

Na etapa de problematização, buscamos descrever em linguagem matemática a situação analisada no estudo. Uma boa medida a ser tomada, nesta etapa, é definir e escolher uma notação, que se aplica ao problema matemático.

Neste caso, definimos que:

$C(t)$ representa o número de veículos em circulação, no instante de tempo t;
$D(t)$ representa o número de veículos com registro desativado, no instante de tempo t;
$B(t)$ representa o número de veículos baixados, no instante de tempo t;
$T(t)$ representa o número de veículos transferidos, no instante de tempo t;
$P(t)$ representa a população total de veículos, no instante de tempo t.

Logo, concluímos que o modelo matemático que nos dará a população de veículos no instante "t" é dado pela equação:

$$P(t) = C(t) - [D(t) + B(t) + T(t)]$$

A equação acima faz simplesmente o balanço entre os veículos que estão em circulação e os veículos que deixam de circular por qualquer motivo (registro desativado, baixado e transferidos), onde "t" é um número inteiro dado por:

$$t = n - 2007,$$

onde "n" corresponde ao ano de referência e deve satisfazer a condição $\{n \in Z \,/\, n \geq 2007\}$, ou seja, 2007, com base nos dados coletados é nosso tempo inicial $(t = 0)$.

As etapas de formulação de hipóteses e simplificação, seguindo a proposta de Bassanezi (2014), estão diretamente relacionadas à etapa de problematização. Após descrever o problema matematicamente é preciso inter-relacionar as restrições físicas e matemáticas para que o problema obtido seja simplificado ao ponto de ser possível de ser resolvido, tornando-se mais sofisticado ao ponto de descrever com algum detalhe o comportamento físico da situação posta.

Na situação em questão a variável P(t) é dependente de outras quatro variáveis, as quais dependem do tempo, e apenas do tempo por hipótese. Neste ponto, portanto, cabe uma observação. Um especialista na área poderia argumentar que uma das variáveis, ou todas elas, não dependem apenas do tempo, mas que estão relacionadas às diversas questões socioeconômicas. No entanto, na busca de uma solução rápida e viável é perfeitamente aceitável considerar os dados da Tabela 1 como se fossem valores gerados pela simples variação do tempo.

Neste processo de modelagem, a fase de resolução consiste, na verdade, em encontrar funções que relacionem a variável independente tempo "t" com as variáveis dependentes definidas C(t), D(t,) B(t), T(t) e P(t). Para simplificar, optamos em utilizar uma ferramenta computacional para obter uma curva de ajuste na forma de uma função polinomial.

Assim, com o auxílio do Software Excel, foram encontradas funções polinomiais de grau 3 para relacionar os dados da Tabela 1, com a variação temporal. As funções obtidas por meio da interpolação polinomial e os seus coeficientes de determinação R^2 (BURDEN; FAIRES, 2011; GUJARATI, 2006), foram as seguintes:

$D(t) = -14{,}17t^3 + 315{,}04t^2 - 2.777{,}87t + 476.248{,}69$; com $R^2 = 0{,}9994$.
$B(t) = -77{,}76t^3 + 2.185{,}48t^2 + 8.318{,}51t + 74.510{,}40$; com $R^2 = 0{,}9993$.
$T(t) = 86{,}01t^3 - 700{,}92t^2 + 35.809{,}11t + 305.623{,}87$; com $R^2 = 0{,}9999$.
$C(t) = -2.727{,}77t^3 + 32.773{,}15t^2 + 207.805{,}96t + 3.874.528{,}04$; com $R^2 = 0{,}9996$.

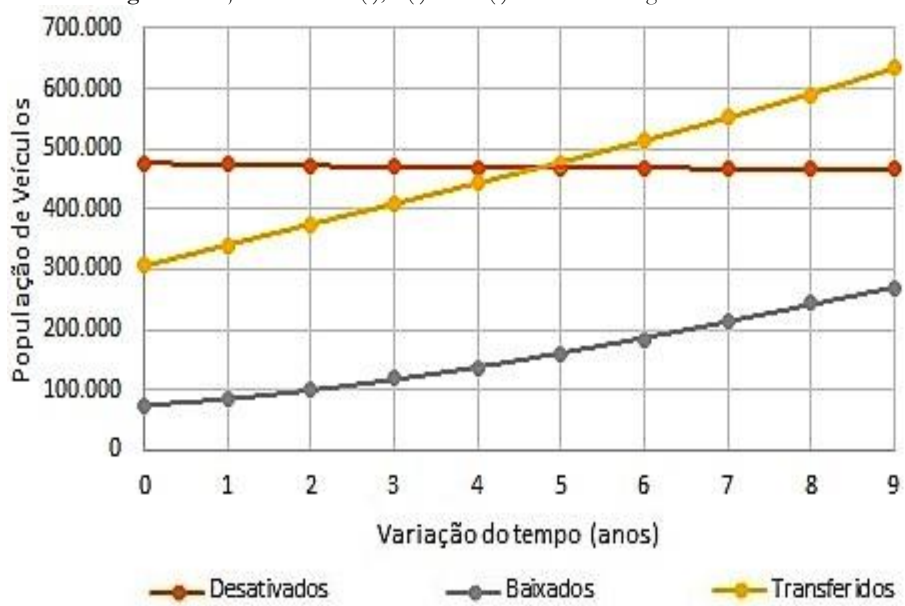
E usando a equação:

$P(t) = C(t) - [D(t) + B(t) + T(t)]$, obtemos:
$P(t) = -2.721{,}85t^3 + 30.973{,}55t^2 + 166.456{,}21t + 3.018.145{,}08$; com $R^2 = 0{,}9993$.

A função acima determina uma linha de tendência, a qual deve descrever, aproximadamente, o crescimento da frota de veículos no estado do Rio Grande do Sul.

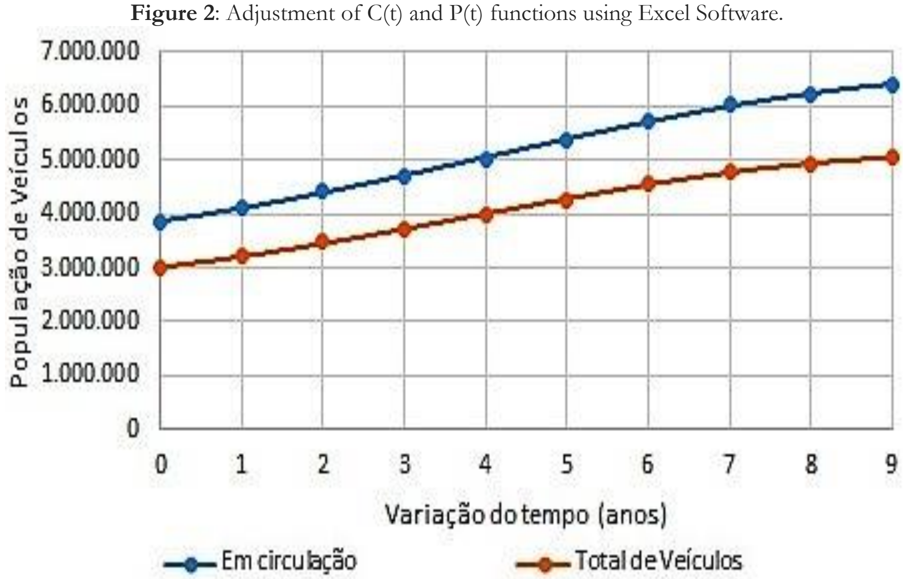
A penúltima fase do processo de modelagem consiste no que Bassanezi (2014) chama de validação. Neste ponto, os estudantes universitários analisaram as funções obtidas através gráficos de linhas, como apresentado nas Figuras 1 e 2.

Figura 1: Ajuste de Curvas das funções D(t), B(t) e T(t) utilizando o Software Excel.
Figure 1: Adjustment of D(t), B(t) and T(t) functions using Excel Software.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Figura 2: Ajuste de Curvas das funções C(t) e P(t) utilizando o Software Excel.
Figure 2: Adjustment of C(t) and P(t) functions using Excel Software.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Esta análise permite verificar se as restrições do problema foram atendidas e se o comportamento das soluções aproximam-se daquilo que era esperado intuitivamente. Este momento também contém uma grande oportunidade de reforço de conceitos matemáticos relativos às funções polinomiais. Nesta fase, buscamos produzir significado físico para conceitos abstratos, como de crescimento, concavidade, raízes, taxa de crescimento, entre outros.

A princípio, três questões orientaram a AMM, a saber: "O que acontece com essa função quando a variável independente tende ao infinito?", "O que significa tender ao infinito em termos do problema estudado?", "Será que esse comportamento é condizente com a expectativa do problema?"

A resposta a cada questão possibilitou aos grupos de estudos do SEM atribuir significado físico aos conceitos matemáticos relacionados ao tema da AMM.

Por fim, a última fase da modelagem consiste na modificação do modelo. Se os objetivos foram plenamente atingidos, esperávamos que os estudantes encontrassem as limitações do modelo construído, com o objetivo de propor estratégias e adaptações para torná-lo adequado à situação real em estudo.

A partir dos conhecimentos construídos ao longo do processo de modelagem e com base nos saberes matemáticos dos acadêmicos sobre as funções elementares, novas formulações foram propostas e analisadas, o fim de aproximar o comportamento das funções à situação real analisada.

3.2. Reflexões dos professores orientadores sobre a execução da atividade de modelagem matemática

Os dados analisados são referentes ao processo de modelagem matemática desenvolvido por estudantes universitários e seus orientadores, que são os autores do artigo de relato de experiência produzido em colaboração.

Descrevemos o processo de desenvolvimento da AMM, considerando as etapas indicadas por Bassanezi (2014), nas quais constatamos que os saberes matemáticos e didáticos foram mobilizados pelos estudantes universitários. Considerando o contexto da experiência de ensino, cabe analisar quais e como os conhecimentos prévios foram ancorados aos conhecimentos emergentes.

Essa questão fundamenta-se no debate do uso da TAS na sala de aula (MOREIRA, 2016), e que faremos com base nas reflexões dos professores orientadores que atuaram no SEM e coordenaram as seguintes etapas da AMM:

I. Acompanhamento e discussão semanais com o professor do SEM para supervisionar o andamento da atividade e engajamento do grupo;

II. Acompanhamento de um ou mais professores orientadores para elaboração do modelo matemático e organização da pesquisa;

III. Apresentação por cada grupo de estudo do resultado para banca examinadora formada por professores da UNIPAMPA e demais professores.

Durante a Etapa I durante as orientações e supervisões dos estudantes, os professores orientadores identificaram nas conversas e anotações dos estudantes, os subsunçores responsáveis pelo processo. Durante a construção do modelo matemático, na Etapa II, os orientadores analisaram os subsunçores necessários (existentes ou não), assim como recomendaram o uso de estratégias para a mobilizar os subsunçores. Por fim na Etapa III, a partir do discurso dos estudantes e apreciação pelos membros da banca examinadora, os professores identificaram a familiaridade e clareza em relação às ideias apresentadas e a sofisticação da solução obtida, considerando o ponto de partida e o final, assim como dos saberes emergentes da situação-problema estudada.

A análise do modelo matemático $P(t) = C(t) - [D(t) + B(t) + T(t)]$, com $t = n - 2007$, assim como do processo que levou os estudantes universitários a optarem por ele, não é trivial. Inicialmente, surgiram vários desafios e cada grupo de estudos se reuniu com o professor orientador do SEM, além de contar com os professores que estavam engajados no processo para novas discussões e/ou encaminhamentos.

Em se tratando do acompanhamento do professor do SEM, as observações e conversas se centraram primeiramente nas dificuldades em aplicar os passos propostos da modelagem matemática para a construção e análise do modelo. Há de se considerar que os estudantes universitários estão acostumados a resolver problemas matemáticos e apresentá-los aos professores na universidade. Porém, quando se propõe que eles criem e desenvolvam um problema para obter uma solução, as dificuldades aumentam exponencialmente.

Neste contexto, o primeiro desafio foi a construção do problema matemático, ou seja, os estudantes universitários escolherem uma situação real para estudo, a qual pudessem perceber algo sem resposta. Assim, foram muitas idas e vindas, diálogos e reflexões com o grupo de acadêmicos e com os professores. Esse processo embora bastante exaustivo, fez os estudantes retomarem conhecimentos desenvolvidos em outras disciplinas do Curso de Graduação em Matemática, dentre eles de assuntos de Metodologia da Pesquisa Científica.

Dessa forma, foram discutidos os elementos para construção do problema, como organizar uma pesquisa, quais as etapas e métodos para a pesquisa. Alguns desses subsunçores os estudantes universitários já haviam construído na sua formação acadêmica, outros tiveram de ser construídos ou aprofundados, por exemplo, as metodologias de pesquisa a serem utilizadas. Foi possível perceber que o grupo tinha um bom conhecimento teórico de como organizar a pesquisa, porém faltava o conhecimento prático. A construção deste processo de relacionamento entre teoria e prática não é óbvio e precisa ser praticado em diferentes espaços e tempos.

Com o problema já estruturado, toma-se a segunda etapa do estudo, a orientação de outros professores para a busca de dados e seu tratamento. Logo, mais uma barreira surgiu para encontrar os dados quantitativos para a construção do modelo matemático. Por isso, os grupos de estudos continuaram lendo, pesquisando e buscando mais informações relacionadas a atividade de modelagem matemática.

A partir dos dados recolhidos, os acadêmicos de Matemática perceberam a limitação em elaborar um modelo realístico da situação-problema identificada neste caso, pois não tinham dados suficientes para analisar as baixas e transferências de carros que circulavam na cidade. Assim, o grupo se reuniu com seus professores e traçaram novas propostas, reformulando o problema com dados próximos/análogos ao desejado.

Com o problema reformulado, o passo seguinte foi adotar um modelo que melhor descrevesse a solução do problema. A partir das orientações dos professores, algumas possibilidades de modelos matemáticos foram surgindo. Nesse momento, a escolha do modelo correspondia as possibilidades e engajamento dos estudantes, pois a carga cognitiva (conhecimentos) varia de um modelo a outro.

Uma limitação que se pontua para a escolha do modelo matemático que descreve o problema é o tempo destinado para a execução de todo o processo de modelagem matemática. Foi destinado em torno de dois meses para tal processo. Nestas condições, o modelo que se adequou foi a função polinomial de grau 3 em função do tempo (anos) e usando a ferramenta computacional para a determinação das curvas e seus gráficos.

A partir das observações, discussões e da leitura da escrita colaborativa do grupo de estudantes, foi possível identificar que os acadêmicos passaram a se sentir mais confiantes em relação aos seus resultados, quando começaram a trabalhar/estudar uma função de 3º grau de uma variável: $P_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_o$, na qual o coeficiente de determinação R^2 varia de 0 até 1 e que representa a eficiência do modelo (BURDEN; FAIRES, 2011; GUJARATI, 2006). Com base no estudo desta função matemática, percebemos que eles compreenderam seus processos de cálculos, o que mostrou a base sólida de seus saberes matemáticos. Em seguida, as descobertas passaram para a análise do comportamento da função e a expectativa de determinar a solução do problema matemático da AMM.

Vale destacar, que o processo de modelagem matemática estava baseado no engajamento, conhecimentos prévios e emergentes dos alunos em contato com a situação-problema. Neste sentido, os professores orientadores sugeriram estratégias para que o grupo de estudantes, dado seu contexto, mobilizassem conhecimentos (ou significados) com o fim de construir uma aprendizagem significativa.

Para a etapa final da modelagem matemática, a validação, e também a finalização da SEM, realizamos um seminário presencial, no qual os grupos apresentaram oralmente o resultado da pesquisa e da atividade de modelagem matemática. Os integrantes dos grupos apresentaram as etapas do processo de modelagem matemática, suas dificuldades e os resultados à banca examinadora e aos professores do Curso de Matemática da UNIPAMPA.

Os professores orientadores e os membros da banca examinadora contribuíram com o debate e a mobilização dos saberes matemáticos dos estudantes. De modo geral, os acadêmicos enfrentaram o desafio de uso da modelagem matemática como método de ensino e perceberam a mobilização entre os saberes matemáticos e didáticos para construir um problema matemático, explorá-lo e apresentar uma solução, além de instigar a cooperação e a produção de conhecimento pelos próprios acadêmicos.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta de desenvolver uma AMM, em um curto espaço de tempo, com estudantes universitários do Curso de Licenciatura em Matemática da UNIPAMPA, foi recebida de forma instigante. Contudo, com algumas limitações que precisam ser analisadas para um melhor aproveitamento, pois se tratando de um curso de graduação ofertado no horário noturno, a maioria dos estudantes tinha outras atividades no período diurno, o que limitou bastante a etapa da coleta de dados.

O trabalho acadêmico foi proposto aos estudantes do SEM/2018, que aceitaram e escolheram como método de ensino a modelagem matemática. Eles sentiram-se inicialmente motivados em desenvolver a AMM. Entretanto, nem todos os grupos de estudo superaram as dificuldades em relação à coleta de dados, já que um grupo não concluiu o referido trabalho. Os outros quatro grupos conseguiram desenvolver as etapas da AMM e recorreram aos professores orientadores para buscar auxílio e sugestões para continuar desenvolvendo o processo de modelar um problema matemático.

Outro aspecto importante, refere-se a aplicação da TAS no processo de modelagem matemática e aos subsunçores das diferentes áreas que os estudantes precisaram resgatar para desenvolvê-lo. Nesse contexto, os orientadores tiveram que resgatar esses subsunçores esquecidos ou que até mesmo não haviam sido construídos pelos acadêmicos. Neste caso, participaram das aulas de reforço de matemática, realizaram pesquisa virtual, elaboraram no Software Excel dois gráficos estatísticos para construírem significados do tema estudado em uma etapa da formação acadêmica.

A atividade acadêmica realizada pelos estudantes com base na modelagem matemática provocou mais envolvimento e participação nas aulas presenciais e encontros de orientação. Essa constatação nos leva a refletir que o uso da modelagem matemática como método de ensino é viável e exequível no ambiente acadêmico-profissional. A AMM proporcionou uma aprendizagem mais significativa e prazerosa no ensino superior, além do desafio de tornar os estudantes universitários mais ativos, considerando que eles estão acostumados com o ensino tradicional.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; SANTOS F. V. S. O software Modellus em situações de Modelagem Matemática: uma reflexão sobre as possibilidades de um software educativo. In: ENCONTRO PARANAENSE DE INFORMÁTICA EDUCACIONAL, 2006, 2. **Anais**. Foz do Iguaçu: Unioeste, 2006.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicología Educativa**: un punto de vista cognoscitivo. 2.ed. Traducción al español de M. S. Pineda. México: Editorial Trillas, 1983.

BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Modelagem matemática na Educação Matemática Brasileira**: Pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 4.ed. São Paulo: Contexto, 2014.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 2.ed. São Paulo: Contexto, 2002.

BRITO, D. S.; ALMEIDA, L. M. W. O conceito de função em situações de modelagem matemática. **Zetetiké**, Campinas, Vol. 13, n. 23, p. 63-86, Jan./Jun. 2005.

BURAK, D. Modelagem Matemática e a Sala de Aula. In: ENCONTRO PARANAENSE DA MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2004, 1. **Anais**. Londrina: UEL, 2004.

BURAK, D.; ARAGÃO, R. M. R. **A Modelagem Matemática e Relações com a Aprendizagem Significativa**. Curitiba: CRV, 2012.

BURAK, D.; ARAGÃO, R. M. R. de. **A Modelagem Matemática e Relações com a Aprendizagem Significativa**. Curitiba: CRM, 2012.

BURDEN, R. L.; FAIRES, D. J. **Numerical Analysis**. Ninth Edition. Boston: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.

D'AMBROSIO, U. Mathematical Modeling: Cognitive, Pedagogical, Historical and Political Dimensions. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Blumenau, Vol. 1, n. 1, p. 89-98, Dec. 2009.

DEPARTAMENTO ESTADUAL DE TRÂNSITO DO RIO GRANDE DO SUL. Disponível em: ***http://www.detran.rs.gov.br/veiculos/servicos/986***. Acesso em: 16/06/2018.

DINIZ-PEREIRA, J. E. A formação acadêmico-profissional: Compartilhando responsabilidades entre as universidades e escolas. Trajetórias e processos de ensinar e aprender: didática e formação de professores. In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICAS DE ENSINO, 2008, 14. **Anais**. Porto Alegre: PUCRS, 2008. p. 253-267.

FIORENTINI, D.; CASTRO, F. C. Tornando-se professores de matemática: O caso de Allan

em Prática de Ensino e Estágio Supervisionado. In: FIORENTINI, D. (Org.). **Formação de Professores de Matemática**: Explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas; Mercado das letras, 2003. p. 121-156.
GUJARATI, D. **Econometria Básica**. 4.ed. Rio de Janeiro: Campus, 2006.
KFOURI, *W*. **Explorar e Investigar para Aprender por meio da Modelagem Matemática**. 2008. 233f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.
MASINI, E. A. F.; MOREIRA, M. A. **Aprendizagem Significativa**: Condições para ocorrência e lacunas que levam a comprometimentos. São Paulo: Ed. Vetor, 2008.
MOREIRA, M. **A Teoria da Aprendizagem Significativa e sua Implementação em Sala de Aula**. Brasília: Ed. da UnB, 2006.
MOREIRA, M. A. **Aprendizagem Significativa**. Brasília: Ed. da UnB, 1999.
MOREIRA, M. A.; MASINI, E. A. F. **Aprendizagem Significativa**: A teoria de David Ausubel. São Paulo: Editora Moraes, 1982.
MOREIRA, M. **Aprendizagem Significativa**: A teoria de David Ausubel. 2.ed. São Paulo: Centauro, 2006.
MOREIRA, M. **Aprendizaje Significativo**: Teoría y práctica. Madrid: Visor, 2000.
MOREIRA, M. ¿Al afinal, qué es aprendizaje significativo? Qurriculum: revista de teoría, investigación y práctica educativa, La Laguna, Vol. 25, p. 29-56, Marzo 2012.
POLYA, G. **How to Solve It**: A new aspect of mathematics method. First Edition. Princeton: Princeton University Press, 1945.
ROSA, C. C.; KATO, L. A. Contribuições da Modelagem Matemática para a prática reflexiva dos professores: algumas considerações. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (Org.). **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**. Londrina: Eduel, 2011. p. 201-225.
TARDIF. M. **Saberes Docentes e Formação Profissional**. Petrópolis: Vozes, 2014.
VALADARES, J. A.; MOREIRA, M. A. **A Teoria da Aprendizagem Significativa**: sua fundamentação e implementação. Coimbra: Edições Almedina, 2009.

Recebido em: 08/06/2020.
Revisado em: 21/06/2020.
Aprovado em: 24/06/2020.