KÜLÖNLENYOMAT

MATEMATIKAI LAPOK

XV. ÉVFOLYAM 1—3. SZÁMÁBÓL

Katona Gyula—Nemetz Tibor—Simonovits Miklós

Újabb bizonyítás a Turán-féle gráftételre és megjegyzések bizonyos általánosításaira

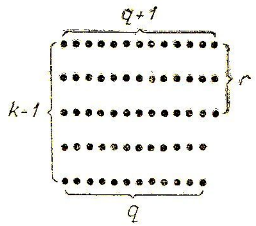
BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1964

Ujabb bizonyitás a Turán-féle gráftételre és megjegyzések bizonyos általánositásaira

KATONA GYULA—NEMETZ TIBOR—SIMONOVITS MIKLÓS

1. Turán Pál 1941-ben a következő tételt bizonyította be: [1] Legyen $n=q(k-1)+r$, ahol q, k és r egész számok, továbbá $0 \leqq r < k-1$. Jelöljön G^n_E egy n szögpontú, E élű gráfot. Ha teljesül, hogy $E > E_0(n, k) = \frac{k-2}{2(k-1)}(n^2-r^2)+\binom{r}{2}$, akkor a G^n_E gráf tartalmaz k szögpontú teljes részgráfot. (Ezt a következőkben teljes k-asnak fogjuk nevezni.) Azaz: a G^n_E gráfnak létezik olyan k szögpontja, amelyek közül bármely kettőt összekötő él a gráfhoz tartozik.

Bizonyította továbbá, hogy van és csak egy olyan E_0 élű gráf van, amelyben nincs teljes k-as, és ez a következő:



1. ábra

Soroljuk az n szögpontot $k-1$ osztályba úgy, hogy r osztályba $q+1$, a többibe q pont jusson. Szerepeljenek a gráfban azok és csak azok az élek, amelyek különböző osztálybeli pontokat kötnek össze. Az így értelmezett $T^n_{E_0}$ gráfnak, mint az könnyen belátható, E_0 éle van, és nincs benne teljes k-as, ami azt jelenti, hogy E_0+1-nél kevesebb számú él még nem biztosítja egy teljes k-as létezését.

Turán [2]-ben a következő problémát veti fel: Vezessünk be egy általánosabb gráffogalmat. Ha adott n pont és a pontok összekötése (pontpárok kiválasztása, élek megadása) helyett pont m-eseket választunk ki valamilyen módon, m-es gráfhoz jutunk. Ennek tehát speciális esete a kettes, ill. élgráf. Egy m-es gráfban „teljes k-as" alatt olyan részgráfot értünk, melynek bármely m-ese a kiválasztottak között van. Ekkor a fenti tételnek megfelelő probléma így fogalmazható:

Legyen adott egy n szögpontú gráf. Legalább hány m-est kell kiválasztani, hogy akárhogyan is választjuk ki azokat, biztosan legyen az m-es gráfban „teljes k-as"*. Ez még megoldatlan probléma, csak sejtések vannak rá. Legegyszerűbbnek látszik a probléma $m=3, k=4$-re. Ezt megoldani próbálva jutottunk el az eredeti Turán-tétel újabb két bizonyításához, amelyek a 2. fejezetben szerepelnek. Az ezekben alkalmazott módszerek bizonyos becslésekre adnak lehetőséget az általános esetben, ezt adjuk meg a 3. fejezetben. Ezek $m=3$, $k=4$ esetén aránylag jók, ezzel az esettel külön foglalkozunk a 4. fejezetben.

Megemlítjük, hogy az eredeti bizonyításon kívül ismeretes még egy Zykovtól [3] és egy Andrásfay Bélától [4] származó bizonyítás is, sőt Dirac G. [5] egy újabb általánosabb tételéből is következik a tétel.

Mivel a komplementer gráfban (amely éppen azokat az m-eseket tartalmazza, amelyek az eredetiből hiányoznak) gondolatmeneteink egyszerűbben fogalmazhatóak meg, a problémát átfogalmazzuk a komplementergráfra. (Ilyen alakban áll a probléma Turán idézett dolgozatában is.)

Egy n szögpontú gráfban legalább hány m-est kell megadnunk, hogy ne legyen benne „üres k-as"? („Üres k-as"-nak nevezzük a „teljes k-as" komplementerét, tehát egy olyan k-ast, amelynek egyetlen m-ese sincs a kiválasztottak között.) Ha egy gráfban nincs „teljes k-as", akkor a komplementerben nincs „üres k-as", ha az eredeti gráfban legfeljebb $E_0(n, k, m)$ m-es lehetett, hogy ne legyen „teljes k-as", a komplementerben legalább $M_k^m(n) = \binom{n}{m} - E_0(n, k, m)$-es szükséges, hogy ne legyen „üres k-as". A továbbiakban használni fogjuk még az $M_k = M_k^2(n)$ jelölést.

Rátérve a komplementer gráfokra, Turán tétele a következőt jelenti:

Legyen $K_{M_k}^n$ a Turán-féle $T_{E_0}^n$ extrém gráf komplementere, azaz $K_{M_k}^n$ az az n szögpontú gráf, melynek szögpontjai a lehető legegyenletesebben vannak $k-1$ osztályba sorolva, tehát minden osztályban q, ill. $q+1$ pont van (reguláris gráf esetén $q+1$) és a pontok között azok és csak azok lesznek összekötve, melyek egy osztályba tartoznak. (Ebben nincs „üres k-as", mert k kiválasztott pont között mindig van

* Vagy másképp legfeljebb hány m-est lehet kiválasztani, hogy a gráfban ne legyen „teljes k-as"?

olyan kettő, melyek egy osztályba tartoznak, így éllel vannak összekötve.) *Ha egy G^n n szögpontú gráfban nincs „üres k-as", akkor vagy több él van benne, mint $K^n_{M_k}$-ban, vagy izomorf azzal.*

(Vagyis $K^n_{M_k}$-ben fogtuk le a lehető legkevesebb éllel az összes k-ast. A tételben az extrém gráf unicitása is szerepel.)

2. *I. Bizonyítás* Turán tételére.

Ebben a bizonyításban módosítsuk q és r értelmezését úgy, hogy $n = q(k-1+r)$ legyen, ahol $0 < r \leqq k-1$. ($E_0(n, k)$ kifejezése q és r-el, mint könnyen verifikálható, így sem változik.) Ezzel a jelöléssel mindig van olyan osztály, amelyben $q+1$ pont van, és $r = k-1$ esetén minden osztály ilyen.

A bizonyítás $n-1$-ről n-re való teljes indukcióval történik. Ha $n < k$, az állítás triviális, $K^n_{M_k}$ az üres gráf.

Tegyük fel, hogy az állítás az $n-1$ szögpontú gráfokra igaz. Legyen adott egy G^n n szögpontú gráf. Elég csak azt az esetet vizsgálni, mikor G^n élszáma nem nagyobb $K^n_{M_k}$-énál. Ekkor azt kell bizonyítani, hogy

a) ha G^n élszáma is M_k és nincs G^n-ben „üres k-as", úgy G^n és $K^n_{M_k}$ izomorfak,

b) ha G^n élszáma kisebb, mint M_k, akkor tartalmaz „üres k-ast".

a) *bizonyítása:* Látható, hogy $K^n_{M_k}$-ban egy pont foka q vagy $q-1$, aszerint, hogy a pont egy $q+1$ vagy egy q pontot tartalmazó osztályban van, és így $K^n_{M_k}$-ban a maximális fokszám q. (Az egy pontból kiinduló élek számának maximuma.)

Könnyen belátható, hogy G^n-ben is q a maximális fokszám. Ugyanis nem lehet minden pont legfeljebb $q-1$-edfokú, mert ekkor fokszámösszege, azaz a kétszeres élszáma kisebb lenne $2M_k$-nál, tehát G^n élszáma is $K^n_{M_k}$ élszámánál. De G^n egyetlen pontja sem lehet q-nál magasabb fokú, mert azt a pontot elhagyva egy G^{n-1}-hez jutnánk, míg K^n-ből elhagyva egy q-adfokút, éppen K^{n-1}-hez jutunk. Azonban G^{n-1}-nek kevesebb éle lenne, mint K^{n-1}-nek, így az indukciós feltétel miatt tartalmazna „üres k-ast". Ez G^n-ben is üres volna, ami ellentmond feltevésünknek. Így G^n-ben is a maximális fokú pont éppen q-ad fokú. Jelöljön P egy maximális fokú pontot. Ezt elhagyva, a kapott G^{n-1}-ben sem lehet az előbbiek szerint „üres k-as", s ugyanannyi éle van, mint K^{n-1}-nek, így izomorfok az indukciós feltevés miatt. G^n-et úgy kapjuk tehát K^{n-1}-ből, hogy ennek q pontját összekötjük a P ponttal. Ha K^{n-1}-ben a $k-1$ osztály mindegyikében volna olyan pont, mely nincs összekötve P-vel, úgy minden osztályból egy ilyen pontot kiválasztva, ezen $k-1$ pont P-vel egy „üres k-ast" alkotna. Mivel ez nem lehet, kell lennie egy osztálynak, melynek minden pontjából fut P-be él. Ezen osztály q pontot tartalmaz, mivel P q-adfokú volt (egy osztály K^{n-1}-ben q vagy $q+1$ pontot tartalmaz). Ezért P-ből egy q pontot tartalmazó osztály minden pontjához fut él és máshova már nem is futhat él. Ebből következik, hogy G^n izomorf $K^n_{M_k}$-nel, mert egyformán keletkeznek K^{n-1}-ből.

A b) eset ebből egyszerűen következik. Húzzunk be annyi újabb élt G^n-be, hogy ugyanannyi éle legyen, mint K^n-nek. Ha a kapott gráf nem izomorf K^n-nel, akkor a)-ból következik, hogy az új kibővített gráf tartalmaz üres k-ast, ezt tehát annál inkább tartalmazni kellett G^n-nek. Ha a kibővített gráf izomorf K^n-nel, úgy G^n azért tartalmaz „üres k-ast", mert K^n-ből akárhogy is hagyunk el éleket, lesz „üres k-asa": egyik elhagyott él két végpontja, s a többi osztály egy-egy pontja. (Megjegyezzük, hogy az első típusú bővítés csak $k=n$ esetén nem lehetséges mindig.)

II. Bizonyítás. Legyen $M_k(n)$ a legkisebb szám, amelyhez létezik $G^n_{M_k(n)}$, melyben nincs „üres k-as".

Legyen $D_k(n) = \binom{n}{2} - E_0(n, k) = \binom{q}{2}(k-1-r) + \binom{q+1}{2}\cdot r$, ahol $n = q(k-1)+r$ és $0 \leqq r \leqq k-2$.

Bizonyítani kell, hogy $M_k(n) = D_k(n)$, amit n-ről $n+1$-re való teljes indukcióval igazolunk.

Az állítás $n \leqq k$ esetén triviálisan teljesül.

Tegyük fel, hogy n-re igazoltuk. Tekintsünk egy G^{n+1} gráfot, amelynek $M_k(n+1)$ éle van, s nincs benne üres k-as. Minden élhez rendeljünk egy multiplicitást, azt a számot, ahány n-szögpontú részgráfjában van G^{n+1}-nek. A multiplicitások összege egyrészt $(n-1)\,M_k(n+1)$, másrészt az $n+1$ darab n szögpontú részgráf éleinek összege. Mivel az n szögpontú részgráfok egyikében sincs „üres k-as," ezért ezek mindegyikében az indukciós feltevés miatt legalább $M_k(n)$ él van, így

$$(n+1)\,M_k(n) \leqq M_k(n+1)\cdot(n-1)$$

vagyis

$$M_k(n+1) \geqq \left\{M_k(n)\cdot\frac{n+1}{n-1}\right\},$$

ahol $\{x\}$ a legkisebb x-nél nem kisebb egész szám. Nyilván

$$\left\{M_k(n)\,\frac{n+1}{n-1}\right\} = M_k(n) + \left\{\frac{2M(n)}{n-1}\right\}.$$

Mivel, mint könnyen igazolható, $D_k(n+1) = D_k(n)+q$ azt kell csak kimutatni, hogy

$$q-1 < \frac{2M_k(n)}{n-1} \leqq q$$

$M_k(n)$ indukciós feltétel szerinti értékét behelyettesítve azt kell tehát belátni, hogy

$$q-1<\frac{q(q-1)(k-1-r)+q(q+1)\cdot r}{q(k-1)+r-1}\leqq q.$$

Átalakítva

$$\frac{q-1}{q}<1-\frac{k-r-2}{q(k-1)+r-1}\leqq 1,$$

ahol a jobboldali egyenlőség nyilvánvalóan fennáll, mivel $r\leqq k-2$, tehát a tört értéke nem negatív.

A baloldali egyenlőtlenséget átalakítva:

$$\frac{k-r-2}{q(k-1)+r-1}<\frac{1}{q},$$

azaz

$$q(k-1)-qr-q<q(k-1)+r-1.$$

Ez viszont teljesül, ha $q>1$, vagy $q=1$ és $r>0$. Ezzel beláttuk, hogy $M_k(n+1)\geqq M_k(n)+q=D_k(n+1)$. Hogy valóban annyi, mint a tétel állítja (azaz $M_k(n+1)=D_k(n+1)$), azt az bizonyítja, hogy a fentiekben értelmezett $K_{M_k}^{n+1}$ gráfban nincs üres k-as és éppen $M_k(n+1)$ éle van.

3. Mindkét gondolatmenetből következik általában is a következő

1. TÉTEL:

$$M_k^m(n+1)\cdot(n+1-m)\geqq M_k^m(n)\cdot(n+1).$$

Például a második bizonyítás alapján ez a következőképpen adódik: tekintsük $n+1$-re az extrém gráfot, amelyben tehát $M_k^m(n+1)$ darab m-es van. Ha az $n+1$ darab n szögpontú részgráfban összeszámoljuk, hogy hány m-es van és összeadjuk, akkor $(n+1)\cdot M_k^m(n)$-nél nem kaphatunk kevesebbet. Másrészt viszont, mivel minden m-es $(n+1-m)$ ilyen részgráfban van benne, tehát éppen $(n+1-m)\,M_k^m(n+1)$-et kapunk, ami a tétel helyességét jelenti. Ebből a tételből következik az

1. KOROLLÁRIUM: a „minden k-as lefogásához" szükséges és az összes m-esek számának hányadosa n-nel monoton nő (azaz viszonylag egyre több kell).

$$\frac{M_k^m(n+1)}{\binom{n+1}{m}}=\frac{M_k^m(n+1)\cdot(n+1-m)}{\binom{n+1}{m}(n+1-m)}\geqq$$

$$\geqq\frac{M_k^m(n)}{\binom{n+1}{m}\cdot\frac{n+1-m}{n+1}}=\frac{M_k^m(n)}{\binom{n}{m}}.$$

Innen adódik a

2. KOROLLÁRIUM:

$$\frac{\binom{n}{m}}{\binom{k}{m}} \leqq M_k^m(n) \leqq \frac{\binom{n}{m}}{\left[\frac{k-1}{m-1}\right]^{m-1}}.$$

Ugyanis

$$M_k^m(k) = 1 \quad \text{így} \quad \frac{M_k^m(n)}{\binom{n}{m}} \geqq \frac{1}{\binom{k}{m}}.$$

A felső becslést megkapandó pedig Turán által sejtett gráfot tekintsük. (Ha a pontokat $\left[\frac{k-1}{m-1}\right]$ osztályba soroljuk* a lehető legegyenletesebben és az m-es gráf tartalmazza az egy osztályba eső m-eseket, és csak ezeket, így egy „üres k-ast" nem tartalmazó gráfhoz jutunk.)

4. Külön foglalkozunk az $m=3, k=4$ esettel. Többen sejtették, hogy a legkevesebb háromszöget tartalmazó gráf, amelyben nincs üres 4-es, a következő: Soroljuk a szögpontokat 3 osztályba a lehető legegyenletesebben és a gráf hármasai (következőkben háromszögei) legyenek azok a háromszögek, melyeknek minden pontja egy osztályban van, vagy két pontja van az első osztályban, egy pontja a másodikban, vagy két pontja a másodikban és egy pontja a harmadikban, vagy két pontja a harmadikban és egy az első osztályban van. Jelöljük H^n-nel az így kapott hármas rendszert. Könnyen látható, hogy ez a gráf kielégíti a követelményeket; nincs benne „üres 4-es".

Bizonyítjuk, hogy ha $n \neq 3s$, akkor van más gráf is, mint H^n, melyben ugyanennyi háromszög mellett nincs üres négyes. Ha $n = 3s+1$, ill. $n = 3s+2$, végezzük el az előbbi osztálybasorolást úgy, hogy az első, ill. az első két osztályba $s+1$ pont jusson. Az első osztályból annak egy P pontját elhagyva legyenek a kiválasztott háromszögek ugyanazok, mint H^{n-1}-ben, azaz az összes olyan háromszög legyen kiválasztva, melynek minden pontja egy osztályban van, vagy kettő egyben, s egy a rákövetkezőben a megfelelő ciklus szerint. Azokat a további háromszögeket, melyek tartalmazni fogják a kiválasztott P pontot, jellemezhetjük a másik két pont által alkotott éllel. Ha a H^n-et akarjuk megkapni, akkor össze kell kötni azokat a pontpárokat, melyek az első

* Ha ezzel az összes pontot egy osztályba soroltuk, állításunk semmitmondóvá fajul.

ill. a harmadik osztályban vannak, vagy az egyik pontjuk az első, másik a második osztályban van. (Természetesen most P-t nem számitjuk az első osztályba.) Vegyük ehelyett a P-t tartalmazó háromszögeket meghatározó élek egy kitté módositott rendszerét. (L. 2 ábra) Legyen Q egy második osztályba eső pont. Ez az első osztály s pontjával volt összekötve, ehelyett most összekötjük a harmadik osztály s pontjával. Az élek, így tehát a háromszögek száma nem változott. Belátjuk, hogy minden négyesben van így is háromszög. (Tehát minden négyesnek legalább egy hármasa a kiválasztottak között szerepel.) Nyilván elég ezt csak olyan négyesekre belátni, amelyekben P és Q szerepel, ugyanis csak olyan háromszögek keletkeztek vagy tűntek el, melyek P-t és Q-t tartalmazták. Vizsgáljunk tehát egy $PQAB$ négyest. Ha az A, B pontok közül az egyik, pl. A a harmadik osztályban van, akkor a négyesből a PQA háromszög szerepelni fog (ui. az AQ él szerepel). Ugyanígy nem lesz üres a négyes, ha az A, B pontok közül az egyik az első, a másik az első vagy a második osztályban van. Marad az az eset, amikor mind a kettő a második osztályban van. Ekkor viszont Q-val egy osztályba esnek, így már a P elhagyásával kapott gráfban is szerepel az ABQ háromszög. Ha $s=0$, 1, úgy nem jutunk új gráfhoz, $s \geqq 2$ esetén azonban igen.

$n = 3s+1$ $\qquad$ $n = 3s+2$

2. ábra

Belátjuk, hogy az így értelmezett L^n gráf valóban különbözik H^n-től $s \geqq 2$-re. Itt is akkor mondunk egy pontot k-adfokúnak, ha éppen k szereplő háromszög szögpontja.

a) $n = 3s+1$. A P pont elhagyásával keletkező részgráf minden pontja egyenlő fokszámú. Legyen a közös fokszám k. Ekkor P hozzávétele után az első osztály pontjai $k+2s-1$, a másodiké $k+s$, a harmadiké $k+s-1$ fokúak lesznek, mert $2s-1$, s, $s-1$ él fut ki belőlük. L^n-ben $k+2s-2$, $k+s$, $k+s$ lesz a fokszám, P-é azonban $k+2s-1$ marad. Ha $s \geqq 2$, $k+2s-1$ nagyobb $k+s$-nél is, legalább három ilyen fokú pontunk volt és csak egy maradt, vagyis a két gráf valóban különböző.

b) $n = 3s+2$. Most annak a H^{n+1} gráfnak jelöljük k-val pontjai fokszámát, melyből egy pont elhagyásával kapjuk H^n-et. Ekkor az egyes osztályokban $k-s$, $k-s$, ill. $k-2s$ pont lesz. Átrendezés után P fokszáma marad, a többire $k-s-1$, $k-s$, $k-2s+1$ lesz a fokszám. Ha $s \geqq 2$, H^n-ben nincs $k-2s+1$ fokú pont. Így ekkor is különböző

H^n és L^n. Megjegyezzük, hogy a leszámolásnál is kihasználtuk már lényegesen $s \geqq 2$ kikötést.

5. A H^n gráf felső becslést ad az extrém gráf háromszögszámára, amiből csak

$$\frac{M_4^3(n)}{\binom{n}{3}} \leqq \frac{4}{9}$$

-et emeljük ki.

Most alsó becslést adunk erre.* Tudjuk, hogy $\frac{M_k^m(n)}{\binom{n}{3}}$ monoton növő sorozat, korlátos, tehát konvergens, így ha elég nagy értékre ismerjük az értékét, az egyre pontosabb becslést szolgáltat.

Tétel: $M_4^3(n) \geqq \frac{5}{14}\binom{n}{3}$, hacsak $n \geqq 8$

$M_4^3(4)=1$, $M_4^3(5)=3$, $M_4^3(6)=6$, $M_4^3(7)=12$, $M_4^3(8)=20$,

$$M_4^3(9)=30.$$

a) Ha $n=4$, a sejtés helyes, az extrém gráf egyértelmű. Minthogy $M_k^m(n) \geqq M_k^m(n-1)\cdot\frac{n}{n-3}$, így $n=5$-re legalább $\frac{5}{2}$ azaz 3 háromszög kell. Így a sejtés ekkor pontos, M^5 háromszögeinek száma 3, és ez az egyetlen 3 háromszöges, a követelményeket kielégítő gráf.

b) $n=6$. $M_4^3(5)=3$-ból következik, hogy ha $n=6$, legalább 6 háromszög kell, tehát annyi, mint H^6-ben. Ez az első érték, melyre nem triviális, hogy a sejtett H^6 gráf az egyetlen jó. Tegyük fel, hogy K^6 is egy extrém gráf. Ekkor semmilyen részgráfjában sem lehet üres négyszög. Ha egy pontot és az ezt tartalmazó háromszögeket elhagyjuk, legalább 3 háromszög marad, kell, hogy $M_4^3(5)=3$ miatt minden pontja legfeljebb 3-adfokú legyen. Mivel a fokszámösszeg 18, és minden pont legfeljebb 3-adfokú, így kell, hogy pontosan harmadfokú legyen. Ha két pontot hagyok el, marad legalább egy háromszög, így van a két ponthoz, s innen bármely két ponthoz olyan a gráfban szereplő háromszög, amelyben mind a két pont szerepel. Nevezzük k-szoros élnek a pontpárt, ha a két ponthoz van k darab háromszög, melynek ezek pontjai. Előzőek szerint minden él legalább egyszeres. Továbbá minden pontból 3 háromszög indul ki, így a pontból kiinduló élek multiplicitásösszege 6, azaz éppen egy ponthoz fut kétszeres él, a többihez legalább egyszeres (minden

* Megemlítjük, hogy Bollobás Béla egyik diákköri pályázatra írt cikkében szintén alsó becslést adott erre, de a miénknél rosszabbat.

él legalább egyszeres!) Ha két pont között kétszeres él fut, ez szimmetrikus rájuk nézve, azaz így két-két pontot rendeltünk egymáshoz, 3 pontpárt kaptunk. Egy osztályt éppen az ilyen módon egymáshoz rendelt két-két pont alkot.

Feltehető, hogy az első élre támaszkodó háromszög harmadik csúcsa éppen a második él pontja, ekkor a második élről kifutó két háromszög egyike sem futhat az első él felé, ha ui. futna, könnyen látható, hogy volna az előbbivel közös éle, tehát egy negyedik kétszeres él. Így a második élről a harmadik él egy pontjához fut háromszög, erről az élről az elsőre, onnan a másodikra: ez a ciklus éppen, s ezzel gráf egyértelműségét bizonyítottuk, hiszen H^6 is ilyen.

c) Ha $n=7$, legalább $M_4^3(6)\cdot\dfrac{7}{4}=\dfrac{42}{4}$ azaz 11 háromszög kell. Bebizonyítjuk, hogy ennyi nem elég. Ha 11 háromszög elég lenne, akkor 33 a fokszámszámösszeg, s nem lehet 6-odfokú pont, mert azt elhagyva 6 pontra csak 5 háromszög jutna. Így vagy egy harmadfokú pont van és a többi 5-ödfokú, vagy két 4-edfokú és a többi 5-ödfokú. Az első esetben elhagyunk egy 5-ödfokú pontot, és az azt tartalmazó háromszögeket, úgy, hogy olyan háromszöget is hagyjunk el, mely a 3-adfokút tartalmazza. Így a 3-adfokú pont másodfokú lesz, a 6 pontra ugyan 6 háromszög jut, de nem minden pont harmadfokú, így ismét tartalmaz egy üres négyest, s így az eredeti gráf is tartalmaz. Ha 2 negyedfokú van, s a többi 5-ödfokú, tegyük fel, hogy nincs benne üres négyes. Ekkor akármelyik 5-ödfokút is hagyjuk el, minden pont 3-adfokúvá kéne, hogy váljon. (Hisz csak úgy nem lenne a megmaradó 6 szögpontú gráfban üres négyes.) Így egy negyedfokú és egy ötödfokú pont közti él egyszeres lehet csak, hisz különben a negyedfokú pont 3-nál kisebb fokúvá válna. Mivel egy negyedfokúból 8 él fut ki, 5 az ötödfokúakhoz, tehát 3 a másik negyedfokúhoz (természetesen multiplicitással!), azaz 3-szoros él köti össze a két negyedfokút. Van olyan ötödfokú, melyhez nem fut erről az élről háromszög. Azt elhagyva 6-pontú 6 háromszögű részgráfhoz jutunk, melyben lesz háromszoros él, tehát nem lesz izomorf H^6-tal, azaz lesz benne üres négyes, ami ellentmond feltevésünknek.

Ha tehát $n=7$, legalább 12 háromszög kell.

Ha $n=8$, az 1. tétel miatt legalább 19, 2, azaz 20, ha $n=9$, legalább 30. Minthogy ezek az értékek éppen megegyeznek a H^7, H^8, H^9 gráfok háromszögeinek számával, így $M_4^3(7)=12$, $M_4^3(8)=20$, $M_4^3(9)=30$. Ezt az eredményt az 1. következménnyel egybevetve, s figyelembe véve, hogy $\binom{8}{3}=56$, adódik, hogy $n\geqq 8$ esetén

$$M_4^3(n)\geqq\frac{20}{56}\binom{n}{3}=\frac{5}{14}\binom{n}{3}.$$

Megjegyezzük, hogy a H^n háromszög-gráf háromszögeinek számát, $H(n)$-nel jelölve, a $H(n)\Big/\binom{n}{3}$ sorozat nem szigorúan monoton, $3s-1$-edik és $3s$-edik tagja megegyezik.

IRODALOM

[1] TURÁN PÁL: Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról. Mat. Fiz. Lapok XLVIII 1941, p 436–452.
[2] TURÁN PÁL: Research problems. Publications of the Math. Inst. of the Hung. Ac. of Sc. Vol. VI. ser A F. 3 (1961) p 417–423.
[3] А. А, Зыков: О некоторых свойствах линейных комплексов. Мат. Сборник (Новая серия) Том 24 (66) N. 2. (1949) стр. 163–188.
[4] B. ANDRÁSFAI: Neuer Beweis eines graphen theoretischen Satzes vor P. TURÁN. Publ. of the Mat. Inst. of the Hung. Acad. of. Sc. Vol. VII. Ser. A. Fasc 1–2 p 193–196.
[5] G. DIRAC: Extensions of Turans Theorem on graphs. Acta Math. Hung. XIV (1963) Fasc. 3–4. p 417–423.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТУРАНА ИЗ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Г. Катона—Т. Немец—М. Шимонович

Резюмэ

Пусть

$$E_0 = \frac{k-2}{2(k-1)}(n^2-r^2)+\binom{r}{2}.$$

В 1941 г. Туран доказал, что существует единственный граф с $\binom{n}{2}-E_0$ ребрами такой, что для любого совокупности из к его вершин можно найти по крайней мере одно ребро графа соединяющее две из этих вершин. Авторы дают два доказательства этой теоремы.

Далее, они исследуют следуюшую задачу Турана: Обозначим через $M_k^{(m)}(n)$ наименьшее число совокупностей м элементов, взятых из множества $x_1, x_2, \ldots, x_n$, состоящего из n элементов так, что любая совокупность $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ к элементов содержит по крайней мере одну совокупност м элементов нашей системы. Если $m=2$, тогда мы получим предыдушую теорему Турана. Если $m>2$, тогда определение величины $M_k^{(m)}(n)$ кажется очень трудным. Авторы показывают что величина

$$M_k^{(m)}(n)\Big/\binom{n}{m}$$

является монотонно возрастающей функцией от n и поэтому она стремится к пределу если $n \to \infty$. Далее,

$$\frac{\binom{n}{m}}{\binom{k}{m}} \leqq M_k^{(m)} \leqq \frac{\binom{n}{m}}{\binom{k-1}{m-1}^{m-1}}$$

и также

$$\frac{5}{14}\binom{n}{3} \leqq M_4^{(3)}(n) \leqq \frac{4}{9}\binom{n}{3}.$$

ON A GRAPH-PROBLEM OF TURÁN

G. Katona–T. Nemetz–M. Simonovits

Put

$$E_0 = \frac{k-2}{2(k-1)}(n^2 - r^2) + \binom{r}{2}.$$

In 1941 Turán proved that there is a unique graph of $\binom{n}{2} - E_0$ edges so that every k-tuple of its vertices spans at least one edge. The authors give two new proofs for this theorem.

Further they investigate the following problem of Turán: Denote by $M_k^{(m)}(n)$ the smallest number of m-tuples formed from n elements $x_1, \ldots, x_n$ so that every k-tuple $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ should contain at least one m-tuple of our system. If $m=2$ we obtain Turán's theorem stated above, for $m>2$ the problem of determining $M_k^{(m)}(n)$ reems very difficult. The authors show that

$$M_k^{(m)}(n)\ \binom{n}{m}$$

is a monotone increasing function of n and hence tends to a limit as $n \to \infty$. Further

$$\frac{\binom{n}{m}}{\binom{k}{m}} \leqq M_k^{m}(n) \leqq \frac{\binom{n}{m}}{\binom{k-1}{m-1}^{m-1}}$$

also

$$\frac{5}{14}\binom{m}{3} \leqq M_4^{(3)}(n) \leqq \frac{4}{9}\binom{n}{3}.$$