Matematikai Közlemények
II. kötet, 2014

A 3D Helmert transzformáció méretarány-tényezőjének és forgatási mátrixának becslései

Závoti József
MTA CSFK GGI
zavoti@ggki.hu

Kalmár János
MTA CSFK GGI
kalmar@ggki.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A tanulmány a geometria egyik fontos elméleti problémáját tárgyalja: két térbeli koordináta rendszer között keresünk matematikai összefüggést a két rendszerben koordinátáikkal megadott közös pontpárok felhasználásával. A térképészetben, geometriában két koordináta-rendszer közötti áttérés során a legáltalánosabban használt eljárás a 3D, 7 paraméteres Helmert transzformáció alkalmazása.

ABSTRACT. The present work deals with an important theoretical problem of geometry: we are looking for a mathematical dependency between two spatial coordinate systems utilizing common pairs of points whose coordinates are given in both systems. In cartography and geometry the most often used procedure to move from one coordinate system to the other is the 3D, 7 parameter Helmert transformation.

1. Bevezetés

A 3D, 7 paraméteres Helmert datum transzformáció számítógépes algebrai rendszerekkel történő tárgyalásában Awange és Grafarend (2002, 2003a, 2003b, 2003c) években megjelent tanulmányai új irányt adtak a téma kutatásának, Awange et al. (2004) tanulmánya kiterjesztette a megoldási módokat. A hazai szakirodalomban Závoti (2005) tanulmánya az első algebrai megközelítése a feladat megoldásának, amely egyúttal a matematikai modell javítására is javaslatot tett. A Závoti és Jancsó (2006) tanulmánya jó alapötletet adott a nemlineáris probléma lineárisra történő visszavezetésére, amit Závoti (2012) cikk dolgozott ki részletesebben. Az abszolút tájékozási probléma kvaterniókkal történő megoldását Horn (1987) tanulmánya az elsők között tárgyalta, a megoldás eltér a Závoti (2012) cikkben leírtaktól. A Kalmár és Závoti (2013) tanulmány jól összefoglalta a két megoldás különbözőségét.

2. A 3D, 7 paraméteres hasonlósági transzformáció matematikai modellje

Tegyük fel, hogy adott két különböző koordinátarendszerben mért n közös pont a koordinátáikkal. A 3D, 7-paraméteres (Helmert) térbeli túlhatározott hasonlósági transzformáció a következő modellel adható meg: Euklidészi térben keressük az elsődleges (cél) *(X, Y, Z)*- és a másodlagos (tárgy) *(x, y, z)* koordináta-rendszerek közötti leképezést az alábbi formában:

$$\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{t} + \lambda \boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_i, \qquad i = 1,2,\ldots,n, \tag{1}$$

ahol

- $\boldsymbol{s}_\mathbf{i} = [X_i, Y_i, Z_i]^T$ a célpontok koordináta értékei,
- $\boldsymbol{t} = [X_0, Y_0, Z_0]^T$ az ismeretlen eltolási-vektor,
- λ az ismeretlen méretarány-tényező,
- $\boldsymbol{R}(\alpha, \beta, \gamma)$ a forgatási mátrix,
- $\boldsymbol{p}_i = [x_i, y_i, z_i]^T$ tárgypontok koordináta értékei.

Az $\boldsymbol{R}$ forgási mátrixot a három tengely körüli elforgatás szöge definiálja.

A 3D, 7 paraméteres Helmert transzformáció algebrai megoldása érdekében Awange és Grafarend (2002) az $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrixot a ferdén szimmetrikus $\boldsymbol{C}'$ mátrix (5) bevezetésével a következő módon írta fel:

$$\boldsymbol{R} = \left(\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{C}'\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{C}'\right), \tag{2}$$

ahol $\boldsymbol{I}_3$ a három dimenziós egységmátrix, és $\mathbf{C}'$ mátrix az *a*, *b* és *c* paraméterekkel meghatározott:

$$\boldsymbol{C}' = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Ha az (1) egyenletet a (4) összefüggés alapján az $\left(\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{C}'\right)$ mátrixszal balról szorozzuk, akkor a következő alak adódik:

$$\begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 & -c & b \\ c & 1 & -a \\ -b & a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{4}$$

A fenti egyenletek képezik a 3D, 7 paraméteres Helmert transzformáció közvetítő egyenleteit, amelyek ellentmondásait az algebrai megoldás során minimalizálni kell.

3. A méretarány-tényező becslései

Závoti (2012) tanulmányában a súlyponti koordináták bevezetésével megadta az eltolási paraméterek eliminálásának módját. Igazolta, hogy a túlhatározott egyenletrendszer megoldása során az *a*, *b* és *c* paraméterek kiküszöbölésével ezen paraméterek kiesnek és a λ paraméterre egy ismeretlenes, másodfokú, túlhatározott egyenletrendszer áll elő az alábbi formában:

$$\lambda^2\left(x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2\right) = X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2, \qquad i = 1,2,\ldots,n, \tag{5}$$

ahol

$$X_{is} = X_i - X_s,\ Y_{12} = Y_1 - Y_s,\ Z_{is} = Z_i - Z_s \qquad i = 1,2,\ldots,n,$$
$$x_{is} = x_i - x_s,\ y_{is} = y_i - y_s,\ z_{is} = z_i - z_s \qquad i = 1,2,\ldots,n\,.$$

(Megjegyezzük, hogy Awange és Grafarend (2002) tanulmányában a méretarány-tényezőre egy negyedfokú egyenlet adódott.)

A (5) egyenletrendszer túlhatározott, megoldása több féle módon is megadható.

3.1. I. Megoldás:

A fenti egyenletrendszert alakítsuk szorzattá a következő módon:

$$\left(\lambda\sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2} - \sqrt{X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2}\right)\left(\lambda\sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2} + \sqrt{X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2}\right) = 0,\quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{6}$$

Tekintsük a (6) formulában szereplő szorzatok első tényezőit. Megoldandó az alábbi egyenletrendszer:

$$\lambda\sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2} = \sqrt{X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2} \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{7}$$

Adjuk össze valamennyi egyenletet! Ekkor a túlhatározott egyenletrendszer megoldása során a λ méretarány-tényező értékére az alábbi, a Závoti (2012) cikkben megadott, a tapasztalatból is ismert összefüggés adódik:

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2}}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2}}. \tag{8}$$

A szakirodalomban Albertz és Kreiling (1975) publikációja alapján ismert, hogy a λ méretarány-tényező számolható a pontok súlyponti rendszerbeli távolságok összegeinek hányadosaként is. Tehát a (5) másodfokú egyenleteket elsőfokú egyenletekre vezettük vissza.

3.2. II. Megoldás

Tekintsük ismételten a (5) egyenletrendszert és adjuk össze valamennyi egyenletet. Így az alábbi összefüggés adódik:

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^{n}\left(x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2\right) \tag{9}$$

A fenti egyenlet szorzattá alakítás nélkül is egyszerűen megoldható. A λ méretarány-tényező értékére – a számunkra fizikai jelentéssel bíró pozitív gyök alapján – az alábbi, a Horn (1987) tanulmányában a kvaterniókkal levezetett összefüggés adódik, amely Závoti (2012) alapján a Bursa-Wolf modell megoldása is:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2\right)}}\,. \tag{10}$$

Tehát jelen esetben is a λ méretarány-tényezőt a másodfokú egyenletekből egyértelműen meghatározhatjuk – a szakirodalomból ismert (Awange és Grafarend (2002)) negyedfokú polinom gyökeinek bonyolult szétválasztási eljárásával szemben.

3.3. III. Megoldás

Térjünk át a súlyponti koordinátákra: (a két koordináta rendszerben $\bar{\boldsymbol{s}}$ és $\bar{\boldsymbol{p}}$ a súlypontot jelöli):

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{s}_i &= \boldsymbol{s}_i - \bar{\boldsymbol{s}} \Rightarrow \boldsymbol{s}_i = \Delta\boldsymbol{s}_i + \bar{\boldsymbol{s}},\\ \Delta\boldsymbol{p}_i &= \boldsymbol{p}_i - \bar{\boldsymbol{p}} \Rightarrow \boldsymbol{p}_i = \Delta\boldsymbol{p}_i + \bar{\boldsymbol{p}}.\end{aligned} \tag{11}$$

Visszaírva a transzformáció (1) képletébe kapjuk:

$$\Delta\boldsymbol{s}_i + \bar{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{t} + \lambda\cdot\boldsymbol{R}\cdot\left(\Delta\boldsymbol{p}_i + \bar{\boldsymbol{p}}\right). \qquad i = 1,2,...,n. \tag{12}$$

Átrendezés után adódik:

$$\Delta\boldsymbol{s}_i + \bar{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{t} + \lambda\cdot\boldsymbol{R}\cdot\bar{\boldsymbol{p}} + \lambda\cdot\boldsymbol{R}\cdot\Delta\boldsymbol{p}_i. \qquad i = 1,2,...,n. \tag{13}$$

A (13) képlet közepe elhagyható, mert az (1) összefüggés az $\bar{\boldsymbol{s}}$ és $\bar{\boldsymbol{p}}$ súlypontokra is igaz, így marad:

$$\Delta\boldsymbol{s}_i = \lambda\cdot\boldsymbol{R}\cdot\Delta\boldsymbol{p}_i. \qquad i = 1,2,...,n. \tag{14}$$

Az ismeretlen $\boldsymbol{t}$ eltolás-vektortól így átmenetileg megszabadultunk, maradnak még a λ és az $\boldsymbol{R}$ változók. Az (1) formula alapján a Bursa-Wolf modellben **t** eltolás-vektort átlagolással kaptuk:

$$\boldsymbol{t} = \sum_i \frac{\boldsymbol{s}_i - \lambda\cdot\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{p}_i}{n} = \sum_i \frac{\boldsymbol{s}_i}{n} - \lambda\cdot\boldsymbol{R}\sum_i \frac{\boldsymbol{p}_i}{n} = \bar{\boldsymbol{s}} - \lambda\cdot\boldsymbol{R}\cdot\bar{\boldsymbol{p}} \tag{15}$$

Áttérve méretarány-tényező vizsgálatára, az egyszerűbb összehasonlíthatóság végett aktualizáljuk (8) képletet a Bursa-Wolf modell jelöléseivel:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{\Delta\boldsymbol{s}_i^T\cdot\Delta\boldsymbol{s}_i} \Big/ \sum_{i=1}^{n}\sqrt{\Delta\boldsymbol{p}_i^T\cdot\Delta\boldsymbol{p}_i}. \tag{16}$$

A λ méretarány-tényező becslésére a (10) és (16) összefüggések alapján van egy lényeges különbség: a (16) képletben előbb van gyökvonás, és utána összegzés, míg (10) formulában fordítva – ezért megállapíthatjuk, hogy a (10) és (16) összefüggések nem ekvivalensek, vagyis a méretarány-tényezőre a két képlet némileg eltérő értéket számolhat. Viszont (10) és (16) képletek egyaránt statisztikai becslések a méretarány-tényezőre (eltérésük a hibaegyenletek felírásából származik), mert fixpontjuk megegyezik. Induljunk ki ugyanis abból, hogy az ideális Helmert transzformáció során minden távolság és képének hányadosa fix (λ) – ami igaz a súlyponti koordinátákra is, ugyanis a transzformáció során a súlypontot is áthelyeztük, vagyis a súlyponti koordinátákból a súlyponttól való távolságok is levezethetők:

$$\sqrt{\Delta\boldsymbol{s}_i^T\cdot\Delta\boldsymbol{s}_i}, \sqrt{\Delta\boldsymbol{p}_i^T\cdot\Delta\boldsymbol{p}_i}, \qquad i = 1,2,...,n, \tag{17}$$

és a távolságok közötti összefüggést a méretarány-tényezővel írhatjuk fel hibamentes esetben:

$$\sqrt{\Delta\boldsymbol{s}_i^T\cdot\Delta\boldsymbol{s}_i} = \lambda\cdot\sqrt{\Delta\boldsymbol{p}_i^T\cdot\Delta\boldsymbol{p}_i}, \qquad i = 1,2,...,n. \tag{18}$$

Ezt követően belátható, hogy (18) összefüggés behelyettesítése (8) képletbe, illetve (16) formulába azonossághoz vezet, vagyis a két statisztikai becslés fixpontja (az elméleti méretarány) megegyezik. Amennyiben (18) képlet alapján felírjuk közvetlenül a hibaegyenleteket:

$$v_i = \sqrt{\Delta\boldsymbol{s}_i^T\cdot\Delta\boldsymbol{s}_i} - \lambda\cdot\sqrt{\Delta\boldsymbol{p}_i^T\cdot\Delta\boldsymbol{p}_i}, \qquad i = 1,2,...,n, \tag{19}$$

akkor a kiegyenlítés az alábbi (de ugyanazon fixpontú), a korábbiaktól eltérő statisztikai becsléshez vezet:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta \boldsymbol{s}_i^T \cdot \Delta \boldsymbol{s}_i) \cdot (\Delta \boldsymbol{p}_i^T \cdot \Delta \boldsymbol{p}_i)} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \Delta \boldsymbol{p}_i^T \cdot \Delta \boldsymbol{p}_i \,. \tag{20}$$

A fentiek alapján megállapíthatjuk, hogy a (16) és (20) képletek alapján igaz a következő összefüggés:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta \boldsymbol{s}_i^T \cdot \Delta \boldsymbol{s}_i} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta \boldsymbol{p}_i^T \cdot \Delta \boldsymbol{p}_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\Delta \boldsymbol{s}_i^T \cdot \Delta \boldsymbol{s}_i\right) \cdot \left(\Delta \boldsymbol{p}_i^T \cdot \Delta \boldsymbol{p}_i\right)} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \Delta \boldsymbol{p}_i^T \cdot \Delta \boldsymbol{p}_i \,. \tag{21}$$

3.4. IV. Megoldás

Határozzuk meg (14) formula maradék vektorait:

$$\Delta \nu_i = \Delta \boldsymbol{s}_i - \lambda \cdot \boldsymbol{R} \cdot \Delta \boldsymbol{p}_i \,, \qquad i = 1,2,\ldots,n \,. \tag{22}$$

Tekintsük a következő optimalizálási feladatot:

$$\min_{\lambda,\boldsymbol{R}} \sum_i \Delta \nu_i^T \cdot \Delta \nu_i = \min_{\lambda,\boldsymbol{R}} \sum_i \left(\Delta \boldsymbol{s}_i - \lambda \cdot \boldsymbol{R} \cdot \Delta \boldsymbol{p}_i\right)^T \cdot \left(\Delta \boldsymbol{s}_i - \lambda \cdot \boldsymbol{R} \cdot \Delta \boldsymbol{p}_i\right). \tag{23}$$

Mivel $\boldsymbol{R}$ ortogonális mátrix ($\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}_3$), az egyenlet a következő alakban is felírható:

$$\min_{\lambda,\boldsymbol{R}} \left\{ \sum_i \left(\Delta \boldsymbol{s}_i^T \cdot \Delta \boldsymbol{s}_i\right) - 2\lambda \left(\sum_i \Delta \boldsymbol{s}_i^T \cdot \boldsymbol{R} \cdot \Delta \boldsymbol{p}_i \right) + \lambda^2 \sum_i \left(\Delta \boldsymbol{p}_i^T \cdot \Delta \boldsymbol{p}_i\right) \right\} . \tag{24}$$

A célfüggvény szélsőértékét a λ szerinti parciális derivált eltűnése esetén veszi fel, így kapjuk, hogy

$$\lambda = \sum_i \left(\Delta \boldsymbol{s}_i^T \cdot \boldsymbol{R} \cdot \Delta \boldsymbol{p}_i\right) \Big/ \sum_i \left(\Delta \boldsymbol{p}_i^T \cdot \Delta \boldsymbol{p}_i\right). \tag{25}$$

Másrészt a (14) képlet miatt teljesül

$$\frac{1}{\lambda} \Delta \boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{R} \cdot \Delta \boldsymbol{p}_i \,, \qquad i = 1,2,\ldots,n \,. \tag{26}$$

Ezért (25) összefüggés felírható a

$$\lambda = \frac{1}{\lambda} \sum_i \left(\Delta \boldsymbol{s}_i^T \cdot \Delta \boldsymbol{s}_i\right) \Big/ \sum_i \left(\Delta \boldsymbol{p}_i^T \cdot \Delta \boldsymbol{p}_i\right) \tag{27}$$

alakban is, amiből a szakirodalomban ismert Horn-féle képlet adódik:

$$\lambda = \sqrt{\sum_i \left(\Delta \boldsymbol{s}_i^T \cdot \Delta \boldsymbol{s}_i\right) \Big/ \sum_i \left(\Delta \boldsymbol{p}_i^T \cdot \Delta \boldsymbol{p}_i\right)} \,. \tag{28}$$

Tehát megadtunk négy levezetést a 3D, 7 paraméteres Helmert transzformáció λ méretarány-tényezőjének megoldására.

4. A Grafarend-féle és a Bursa-Wolf-féle modell R forgatási mátrixának kapcsolata

Az $\boldsymbol{C}'$ ferdén szimmetrikus mátrix az (3) képlete alapján, a (2) összefüggéssel definiált $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrix a következő alakban írható fel:

$$\boldsymbol{R}=\frac{1}{1+a^2+b^2+c^2}\begin{bmatrix} 1+a^2-b^2-c^2 & 2(ab-c) & 2(ac+b) \\ 2(ab+c) & 1-a^2+b^2-c^2 & 2(bc-a) \\ 2(ac-b) & 2(bc+a) & 1-a^2-b^2+c^2 \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Másrészről $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrix és a $\underline{\boldsymbol{q}}$ kvaternió között az alábbi összefüggés van (Shen és Chen, 2006):

$$\boldsymbol{R}=\left(q_0^2-\boldsymbol{q}^T\cdot\boldsymbol{q}\right)\cdot I_3+2\left(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}^T+q_0\cdot\mathbf{C}(\boldsymbol{q})\right). \tag{30}$$

A (30) formulát részletesen a következő formában írhatjuk fel:

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_1q_3+q_0q_2) \\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_3-q_0q_1) \\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Felmerülhet az a kérdés, hogy a (29) és (31) képletekkel adott $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrixok milyen esetben egyeznek meg?

Legyen

$$a=\frac{q_1}{q_0},\qquad b=\frac{q_2}{q_0},\qquad c=\frac{q_3}{q_0}. \tag{32}$$

Helyettesítsük a (32) összefüggésekkel adott a, b és c paramétereket a (29) formulába, az alábbi összefüggésekhez jutunk:

$$\boldsymbol{R}=\frac{q_0^2}{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}\begin{bmatrix} \frac{q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2}{q_0^2} & 2\frac{q_1q_2-q_0q_3}{q_0^2} & 2\frac{q_1q_3+q_0q_2}{q_0^2} \\ 2\frac{q_1q_2+q_0q_3}{q_0^2} & \frac{q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2}{q_0^2} & 2\frac{q_2q_3-q_0q_1}{q_0^2} \\ 2\frac{q_1q_3-q_0q_2}{q_0^2} & 2\frac{q_2q_3+q_0q_1}{q_0^2} & \frac{q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2}{q_0^2} \end{bmatrix}. \tag{33}$$

A (33) képletben az $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrix valamennyi elemének nevezőjéből kiemelve $q_0^{\,2}$ értéket, a mátrix skalárszorzójának számlálóját $q_0^{\,2}$ értékkel egyszerűsítve, és felhasználva, hogy $q_0^{\,2}+q_1^{\,2}+q_2^{\,2}+q_3^{\,2}=1$, éppen a (31) összefüggéssel adott azonossághoz jutunk, azaz a (29) összefüggésből a (31) formulát kaptuk meg.

Legyen most

$$q_1=q_0\,a,\qquad q_2=q_0\,b,\qquad q_3=q_0\,c. \tag{34}$$

Ekkor az

$$1=q_0^{\,2}+q_1^{\,2}+q_2^{\,2}+q_3^{\,2}=q_0^{\,2}\left(1+a^2+b^2+c^2\right) \tag{35}$$

egyenletből kapjuk az alábbi egyenlőséget:

$$q_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2+c^2}} . \tag{36}$$

Helyettesítsük most (34) és (36) összefüggéseket a (31) formulába, akkor az $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrixra az alábbi alak adódik:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \frac{1+a^2-b^2-c^2}{1+a^2+b^2+c^2} & 2\frac{ab-c}{1+a^2+b^2+c^2} & 2\frac{ac+b}{1+a^2+b^2+c^2} \\ 2\frac{ab+c}{1+a^2+b^2+c^2} & \frac{1-a^2+b^2-c^2}{1+a^2+b^2+c^2} & 2\frac{bc-a}{1+a^2+b^2+c^2} \\ 2\frac{ac-b}{1+a^2+b^2+c^2} & 2\frac{bc+a}{1+a^2+b^2+c^2} & \frac{1-a^2-b^2+c^2}{1+a^2+b^2+c^2} \end{bmatrix}, \tag{37}$$

amely láthatólag megegyezik a (29) összefüggéssel.

Tehát összefoglalva, a Bursa-Wolf q_0, q_1, q_2 és q_3 kvaternió komponensek és a ferdén szimmetrikus $\boldsymbol{C}'$ mátrix a, b és c paraméterei között az 1. táblázatban összefoglalt összefüggések állnak fenn.

$q_0 = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2+c^2}}$	
$q_1 = q_0 a$	$a = \frac{q_1}{q_0}$
$q_2 = q_0 b$	$b = \frac{q_2}{q_0}$
$q_3 = q_0 c$	$c = \frac{q_3}{q_0}$

1. táblázat. Összefüggések a kvaterniók és az a, b és c paraméterek között

5. Összefoglaló

Tanulmányunkban a 3D, 7-paraméteres (Helmert) térbeli nemlineáris hasonlósági transzformáció tárgyalása során megadtunk egy olyan általános modellt, amelyben különböző módon levezethető a transzformáció méreterány-tényezője és a Bursa-Wolf modellt speciális esetként tartalmazza. A módszer lényege a méretarány-tényezőre levezetett túlhatározott egyenletrendszer más-más elven történő megoldásában rejlik. A kidolgozott modell előnye, hogy a méretarány-tényező meghatározásával az eredetileg nemlineáris probléma lineáris feladat megoldására vezethető vissza.

Megmutattuk azt is, hogy a Bursa-Wolf modellben bevezetett kvaterniók és az Awange-Grafarend szerzők által bevezetett ferdén szimmetrikus mátrix elemei között funkcionális kapcsolat van.

Irodalomjegyzék

[1] **Albertz, J., Kreiling, W.,** Photogrammetric Guide, *Herbert Wichmann Verlag*, Karlsruhe, (1975) 58-60.

[2] **Awange, J. L., Grafarend, E. W.,** Linearized Least Squares and nonlinear Gauss-Jacobbi combinatorical algorithm applied to the 7 parameter datum transformation C7(3) problem, *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 127 **(**2002) 109-116.

[3] **Awange, J. L., Grafarend, E.W.,** Closed form solution of the overdetermined nonlinear 7 parameter datum transformation, *Allgemeine Vermessungsnachrichten*, 110 (2003) 130-149.

[4] **Awange, J. L., Grafarend, E. W.,** Explicit Solution of the Overdetermined Three-Dimensional Resection problem, *Journal of Geodesy*, 76 (2003) 605-616.

[5] **Awange, J. L., Grafarend, E. W.,** Polinomial Optimization of the 7-Parameter Datum Transformation Problem when Only Three Stations in Both System are Given, *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 128 (2003) 266-270.

[6] **Awange, J. L., Grafarend, E. W., Fukuda, Y.,** Exact solution of the nonlinear 7-parameter datum transformation by Groebner basis, *Bul. di Geodesia e Scienze Affini*, 63 (2004) 117-127.

[7] **Horn, B.K.P.,** Closed form solution of absolute orientation using unit quaternions, *Journal of the Optical Society of America*, 4 (1987) 629-642.

[8] **Kalmár, J., Závoti, J.,** A 3D, 7-paraméteres dátum transzformáció megoldása Gröbner-bázisban és a Bursa-Wolf modellben, *Dimenziók Matematikai Közlemények I* (2013) 37-44.

[9] **Závoti, J.,** A 7 paraméteres 3D transzformáció egzakt megoldása, *Geomatikai Közlemények* 8 (2005) 53-60.

[10] **Závoti, J., Jancsó, T.,** The solution of the 7-parameter datum transformation problem with- and without the Gröbner basis, *Acta Geod. Geoph. Hung*., 41(1) (2006) 87-100.

[11] **Shen, Y.Z., Chen, Y., Zheng, D. H.,** A quaternion-based geodetic datum transformation algorithm, *J Geod* 80, (2006) 233–239

[12] **Závoti, J., Fritsch, D.,** A first attempt at a new algebraic solution of the exterior orientation of photogrammetry, *Acta Geod. Geoph. Hung*., 46 (2011) 317-325.

[13] **Závoti, J.,** A simple proof of the solutions of the Helmert- and the overdetermined nonlinear 7-parameter datum transformation, *Acta Geod. Geoph. Hung*., 47(4) (2012) 453-464.

[14] **Závoti, J.,** A 2D és 3D nemlineáris hasonlósági (Helmert) transzformációk megoldásának új levezetése. Geomatikai Közlemények, 16 (2013) 7-16.