

Tönkrementeli elméletek alkalmazhatóságának vizsgálata síkbeli feszültségállapot esetén

GARAB József¹, SZALAI József¹

¹ NymE FMK Műszaki Mechanika és Tartószerkezetek Intézet

Kivonat

A von Mises, a Tsai-Wu, és az Ashkenazi tönkrementeli elméleteket vizsgáltuk meg alkalmazhatóságuk szempontjából síkbeli feszültségállapot esetén. Korábban biaxiális törővizsgálatokat végeztek lucfenyő faanyagra (*Picea abies* [L.] Karst.). Több mint négyszáz feszültségi állapot keletkezett a tönkrementel pillanatában. Meghatároztuk a tönkrementeli viszonzyszámokat az egyes tönkrementeli elméleteknek megfelelően. A tönkrementeli viszonzyszámok kiértékelése alapján megállapítottuk, hogy síkbeli feszültségállapot esetén az Ashkenazi tönkrementeli elmélet írja le megfelelően a faanyag tönkrementelét.

Kulcsszavak: tönkrementeli elméletek, síkbeli feszültségállapot, tönkrementeli viszonzyszám, Ashkenazi-elmélet

Examination of strength criteria for wood in complex stress state

Abstract

In the frame of our research, three strength criteria (von Mises, Tsai-Wu, and Ashkenazi) were compared based on experimental data. The goal of this study was to establish which strength theory describes the failure of wood under biaxial load more reliably. Formerly, biaxial tests were performed on Norway spruce (*Picea abies* [L.] Karst.) specimens whereby hundreds of biaxial strength data were available. Failure prediction numbers were determined in all cases for the three theories. Our results show among the three criteria the Ashkenazi strength criterion to be the best to describe the failure of wood in planar stress state.

Key words: strength criteria, planar stress state, failure prediction number, Ashkenazi strength criterion

Bevezetés

A faanyag mechanikai tulajdonsága a makroszkopikus szerveződési szinten ortogonálisan anizotrop (ortotrop). A faanyag összetett szerkezete miatt a faanyag szilárdságának megbecsülése viszonylag bonyolult feladat. Faszervezetek kritikus pontjaiban lineáris, síkbeli, és térbeli feszültségállapot uralkodhat. Mivel a faanyag anizotrop, ezért anizotrop tönkrementeli elméletek alkalmazása szükséges. Anizotrop tönkrementeli elméletek vizsgálatával napjainkban is foglalkoznak, mivel a faszerkezetek erőtanai méretezése mélyebb elméleti ismereteket követel meg (pl.:

Seweryn és Romanovych 2007, van der Put 2009). Korábban Szalai (2008) a von Mises, a Tsai-Wu, és az Ashkenazi anizotrop tönkrementeli elméletek alkalmazhatóságát elméleti alapokon tanulmányozta. Munkánkban az elméleteket gyakorlati szempontból vizsgáltuk meg. Biaxiális kísérletek során meghatározott, a tönkrementel pillanatában uralkodó síkbeli feszültségi állapotok segítségével (Eberhardsteiner 2002) hasonlítottuk össze a von Mises-, Tsai-Wu- és az Ashkenazi-elméleteket abból a szempontból, hogy melyik szilárdsági kritérium írja le valószínűleg a faanyagok tönkrementelét.

Elméleti ismertető

Anizotrop anyagok tönkremenetele esetén nemcsak a feszültségi állapot komponenseinek nagysága számít, hanem az is, hogy a feszültségi főtengelek milyen helyzetben vannak az anyag szimmetriatengelyeihez képest. A faanyag szilárdsági jellemzőit ezért célszerű az anatómiai főirányok rendszerében megadni, valamint a feszültségi állapotot is ebben a rendszerben kell értelmezni.

A tönkremeneteli elméletek (szilárdsági kritériumok) a következő általános alakú polinomba foglalhatók össze:

$$a_{ij}\sigma^{ij} + a_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl} + a_{ijklmn}\sigma^{ij}\sigma^{kl}\sigma^{mn} + a_{ijklmnop}\sigma^{ij}\sigma^{kl}\sigma^{mn}\sigma^{op} + \dots \leq c, \quad [1]^1$$

$$i, j, k, l, m, n, o, p, \dots = 1, 2, 3$$

¹Einstein-féle összegzési konvenció alkalmazása ahol,

σ^{ij} - A ható feszültségi állapot tenzora
 $a_{ij}, a_{ijkl}, a_{ijklmnop}, \dots$ - a szilárdságra jellemző 2, 4, 6, 8, ... dimenziós tenzorok
 c - tetszőleges skálár

A szilárdsági kritériumok abban különböznek egymástól, hogy az általános szilárdsági kritérium [1] bal oldalán hány és milyen típusú tagot tartanak meg, illetve hogyan határozzák meg a tenzorkomponensek fizikai értelmét.

A tönkremeneteli elméleteket geometriai eszközökkel is lehet modellezni. A faanyag anatómiai fősíkjaiban értelmezett síkbeli feszültségi állapot esetén a szilárdsági felület megszerkeszthető. A szilárdsági felület mindazon pontok halmaza a térben, amelyeknek megfelelő feszültségi állapot komponensei kielégítik a szilárdsági kritérium egyenletét. A következőkben a von Mises, a Tsai-Wu és az Ashkenazi szilárdsági kritériumok kerülnek bemutatásra.

A von Mises szilárdsági kritérium

Olyan plasztikus anyagokra, melyeknél a húzó- és nyomószilárdság megegyezik, szilárdsági kritériumként von Mises (1928) egy másodfokú polinomot javasolt, melyet plasztikus potenciálnak nevezett:

$$a_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl} \leq 1, \quad [2]$$

$$i, j, k, l = L, R, T$$

ahol,

L - a fa rostiránya (a törzs hossztengele, longitudinális irány),

R - a fa sugáriránya (az évgyűrűk növekedésének iránya),

T - a fa húriránya (az évgyűrűk érintőjének iránya).

Ez a kifejezés formailag megegyezik az általános alakú polinom [1] második tagjával. A tenzorkomponenseket Szalai (1994) alapján határoztuk meg. Az alkalmazott technikai szilárdságokat (Szalai 2001) az 1. táblázatban mutatjuk be. Mivel a munkánkban vizsgált feszültségi állapotok az LR síkban uralkodó feszültségi állapotok, ezért a szilárdsági felület megszerkeszthető. Ábrázoltuk a von Mises szilárdsági felületet Szalai (2001) technikai szilárdságainak a segítségével (1. ábra). A von Mises-elmélet szerint képzett szilárdsági felület egy ellipszoid.

A Tsai-Wu szilárdsági kritérium

S. W. Tsai és E. M. Wu (1971) a kezdeti polinom [1] első két tagját tartotta meg. A Tsai-Wu szilárdsági kritérium a következő:

$$a_{ij}\sigma^{ij} + a_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl} \leq 1, \quad [3]$$

$$i, j, k, l = L, R, T$$

A Tsai-Wu-elmélet grafikus ábrázolásával szintén egy ellipszoidot kapunk (2. ábra), azonban az ellipszoid helyzete eltérő a von Mises szilárdsági felülettől. A Tsai-Wu-féle ellipszoid főtengelei nem feltétlenül párhuzamosak a koordináta-rendszerrel valamint az ellipszoid helyzete eltolódhat az origótól. A szilárdsági felületet szerkesztését, valamint a tenzorkomponensek meghatározását az 1. táblázat adataival, Szalai (1994) alapján végeztük.

Az Ashkenazi szilárdsági kritérium

E. K. Ashkenazi (1967) a szilárdság jellemzésére az általános szilárdsági kritérium második és negyedik tagját tartotta meg annyi változtatással, hogy a jobb oldalon az egység helyett egy tetszőleges állandót választott. Átalakítások után (Szalai 1994) a következő kifejezés keletkezik:

$$\frac{a_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl}}{\sqrt{I_1^2 - I_2}} \leq 1 \quad [4]$$

$$i, j, k, l = L, R, T$$

ahol,

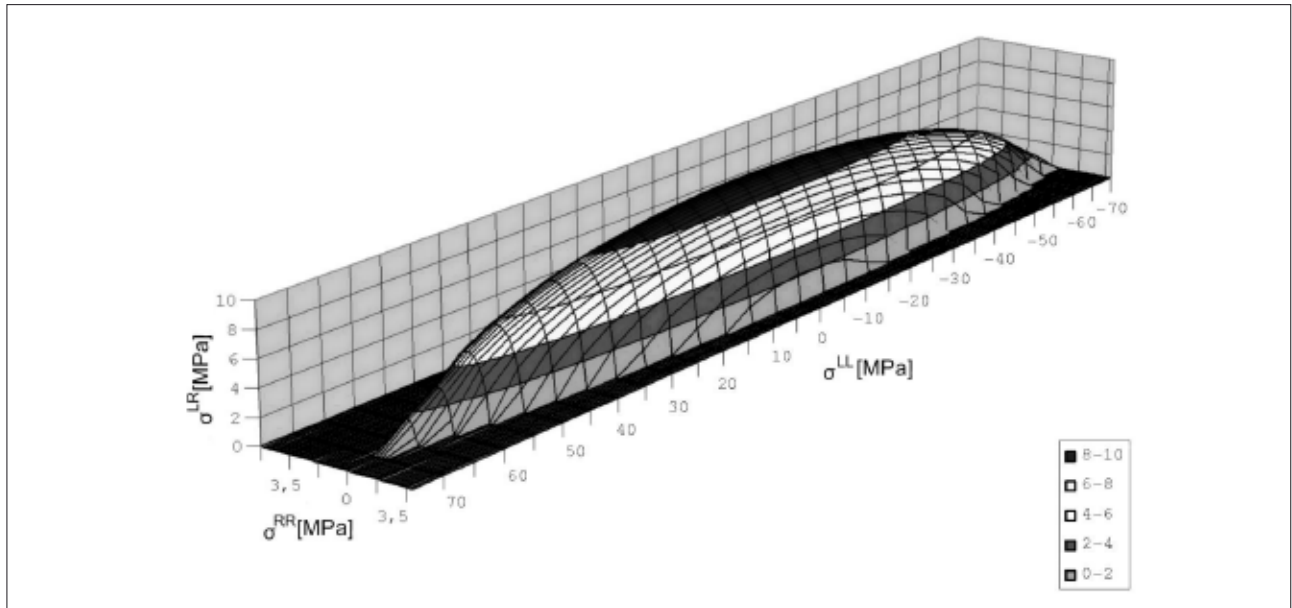
$I_1; I_2$ - első és második feszültségi invariáns

Az Ashkenazi szilárdsági kritérium ábrázolása egy zárt negyedrendű felület (3. ábra), amely tartalmazhat homorú részeket. A tenzorkomponenseket Szalai (1994) szerint határoztuk meg, a szilárdsági felület grafikus ábrázolásához az 1. táblázat adatait használtuk fel.

1. táblázat Lucfenyő (*Picea abies* [L.] Karst) technikai szilárdságai az LR anatómiai fősíkban (Szalai 2001)

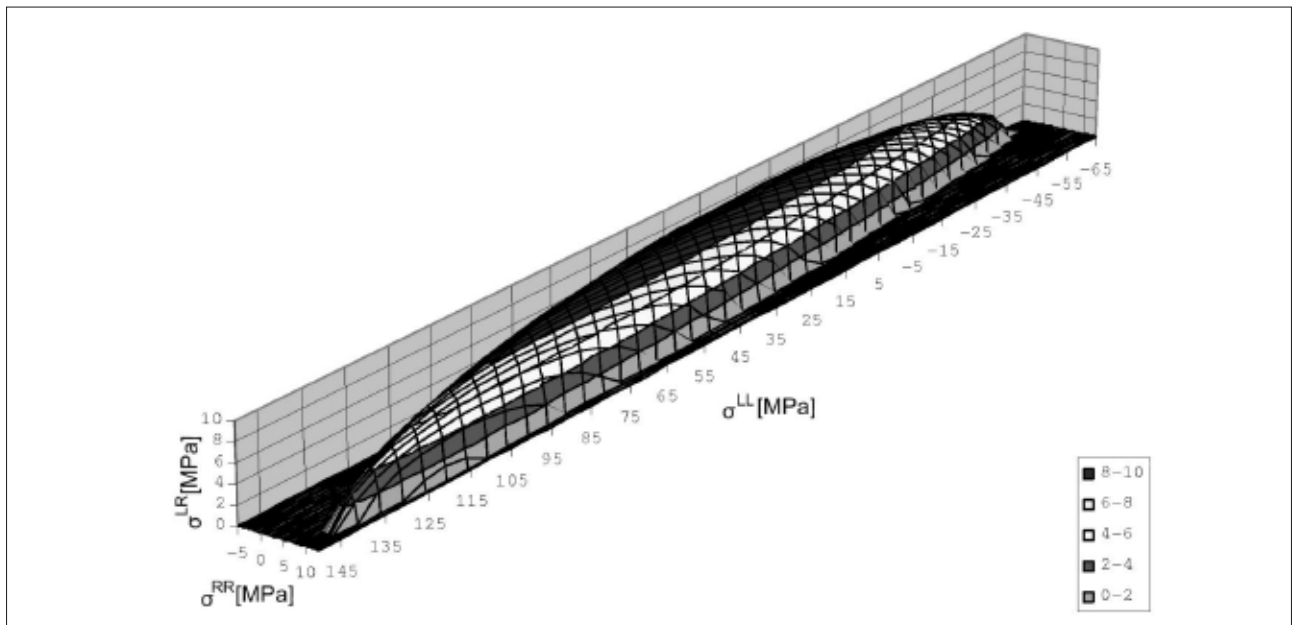
Table 1 Engineering strength (Szalai 2001) of Norway spruce (*Picea abies* [L.] Karst) in LR anatomical main plane

Lucfenyő	f_L^+	f_L^-	$f_{LR}^{T(45)+}$	$f_{LR}^{T(45)-}$	f_R^+	f_R^-	t_{LR}	$t_{LR}^{T(45)+}$	$t_{LR}^{T(45)-}$	-
N	315	319	292	325	302	291	-	-	-	Db
Átlag	63,52	49,34	9,15	9,08	5,92	3,49	9,32	4,00	4,57	MPa
CoV	23,6	18,0	28,6	25,5	28,2	22,4	43,0	28,6	25,6	%



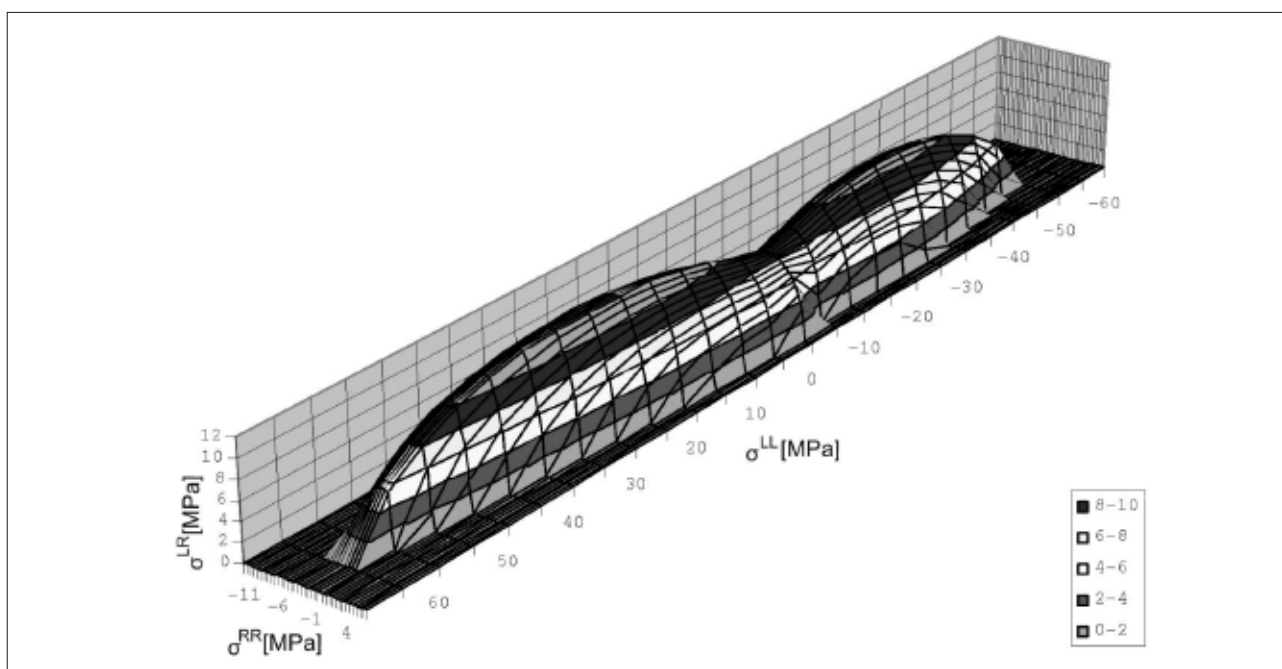
1. ábra Lucfenyő (*Picea abies* [L.] Karst.) tönkrementeli felülete az LR síkban a von Mises-elmélet szerint

Figure 1 Strength surface of Norway spruce (*Picea abies* [L.] Karst.) in the LR anatomical main plane governed by the von- Mises strength criterion



2. ábra Lucfenyő (*Picea abies* [L.] Karst.) tönkrementeli felülete az LR síkban a Tsai-Wu-elmélet szerint

Figure 2 Strength surface of Norway spruce (*Picea abies* [L.] Karst.) in the LR anatomical main plane governed by the Tsai-Wu strength criterion



3. ábra Lucfenyő (*Picea abies* [L.] Karst.) tönkrementeli felülete az LR síkban az Ashkenazi-elmélet szerint

Figure 3 Strength surface of Norway spruce (*Picea abies* [L.] Karst.) in the LR anatomical main plane governed by the Ashkenazi strength criterion

Kísérleti módszerek és anyagok

A munkánk során mechanikai vizsgálatok adatai segítségével (Eberhardsteiner 2002) hasonlítottuk össze a tönkrementeli elméleteket (von Mises, Tsai-Wu, Ashkenazi) az alkalmazhatóságuk szempontjából. A törővizsgálatok miatt a tönkrementeli elméleteknek tönkrementelt kell jelezniük, mivel a keletkezett feszültségek hatására a faanyag tönkrement.

Eberhardsteiner (2002) 423 darab kereszt alakú lucfenyő (*Picea abies* [L.] Karst.) próbatestet vizsgált meg biaxiális terhelés alatt (4. ábra). A próbatestek az LR (longitudinális-radiális) anatómiai fősíkból lettek kialakítva. A vastagságuk a terhelés módjától függött, a kiértékelt feszültség- és alakváltozásmező 140 x 140 mm volt. Lineáris u és v nagyságú terheléseket alkalmaztak különböző arányokban ($\kappa = u/v$) a terhelő berendezés tengelyei mentén (x, y). A keletkezett feszültségi állapotok síkbeli feszültségállapotok voltak σ_x, σ_y komponensekkel. A próbatestek rostlefutása (φ) eltérő volt. $\varphi = 0^\circ$ (L), $7,5^\circ$, 15° , 30° és 45° . A méréseket 20°C hőmérsékleten és 65% relatív páratartalom mellett végezték, a faanyag átlagos nedvességtartalma 12% volt. A törővizsgálatok után 423 db, a tönkrementelekek pillanatában uralkodó feszültségi állapot állt a rendelkezésünkre.

A törési kísérletekből kapott feszültségi értékeknél a gép koordináta-rendszeréhez mérték az irá-

nyokat. Mivel a tönkrementeli elméleteket csak a faanyag anatómiai főirányainak rendszerében lehet értelmezni, ezért transzformálni kellett a feszültségállapotokat. Az átszámítás alapja a gép koordináta-rendszere valamint a faanyag főirányainak rendszere között bezárt szög volt, ami a rostlefutás szögével egyezett meg (4. ábra). A tönkrementeli feszültségállapotok a főirányok rendszerében:

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{LL} &= \sigma^{xx} \cos^2 \varphi + \sigma^{yy} \sin^2 \varphi \\ \sigma^{RR} &= \sigma^{yy} \sin^2 \varphi + \sigma^{xx} \cos^2 \varphi \\ \sigma^{LR} &= (\sigma^{xx} - \sigma^{yy}) \sin \varphi \cos \varphi \\ \sigma^{RL} &= \sigma^{LR} \end{aligned} \right\} [5]$$

A feszültségállapotokat csoportosítani kellett a normál-feszültségek előjele alapján, mivel az egyes csoportoknak megfelelően másképpen kell kiszámítani a tenzorkomponenseket a tönkrementeli elméletekhez. A von Mises-, a Tsai-Wu-, és az Ashkenazi-elméletnek megfelelő szilárdsági tenzorok komponenseit meghatároztuk az 1. táblázatban bemutatott technikai szilárdságokból az egyes elméletek szerinti számítási mód szerint (Szalai 1994).

Miután átszámoltuk a feszültségállapotokat a faanyag főirányainak rendszerébe, csoportosítottuk őket a normál-feszültségek előjele alapján, meghatároztuk az egyes elméleteknek megfelelő szilárdsági tenzorokat, és alkalmaztuk a tönkrementeli elméleteket.

Tönkrementeli viszonyzámnak nevezzük azt az értéket, amelyet a szilárdsági kritériumok bal oldalain határoztunk meg. Ha a tönkrementeli viszonyszám nagysága egy, akkor a feszültségállapot a tönkrementel határállapotában van. Ha a tönkrementeli viszonyszám nagyobb, mint egy akkor a szilárdsági kritérium tönkrementelt mutat annak ellenére, hogy az anyag még ép. Ha a tönkrementeli viszonyszám kisebb, mint egy akkor a szilárdsági kritérium még nem jelez tönkrementelt, azonban az uralkodó feszültségállapot hatására az anyag már tönkrement.

A kiértékelések eredményei

Áttranszformáltunk 423 feszültségi állapotot a faanyag anatómia főirányainak rendszerébe. Ezután létrehoztunk négy feszültségcsoportot a normálfeszültségek előjele alapján. 145 feszültségállapot került a $\sigma^{LL+}\sigma^{RR+}$, 103 feszültségállapot a $\sigma^{LL+}\sigma^{RR-}$, 113 feszültségállapot a $\sigma^{LL-}\sigma^{RR-}$, valamint 62 feszültségállapot a $\sigma^{LL-}\sigma^{RR+}$ feszültségcsoportba. Kiszámoltuk az egyes szilárdsági kritériumoknak valamint a feszültségcsoportoknak megfelelő tenzorkomponenseket (2. táblázat). Meghatároztuk

a feszültségi állapotokból a von Mises-, a Tsai-Wu-, valamint az Ashkenazi-elmélet szerinti tönkrementeli viszonyszámokat. A statisztikai kiértékeléseket a 3. táblázat és az 5. ábra mutatja be.

A von Mises és a Tsai-Wu szilárdsági kritériumok által meghatározott tönkrementeli viszonyszámok értékei közel esnek egyhez a $\sigma^{LL+}\sigma^{RR+}$ feszültségcsoportban. A von Mises-elméletnél 0,99 a tönkrementeli viszonyszám értéke, a Tsai-Wu-elméletnél pedig 1,14. A variációs koefficiens nagy értéke miatt a tönkrementeli viszonyszámok értékeit azonban csak fenntartásokkal fogadhatjuk el. A variációs koefficiens a von Mises-elméletnél 72,1%, míg a Tsai-Wu-elméletnél 97,6%. Hozzáteesszük, hogy negatív tönkrementeli viszonyszámokat is tapasztaltunk a von Mises- és a Tsai-Wu-elméletnél.

Ez azt jelenti, hogy a normálfeszültségeknek megfelelő képpont a vízszintes alapsíkon kívül esik a szilárdsági felület alapsíkra eső vetületén, azaz a feszültségi képpont a teljes szilárdsági felületen kívül helyezkedik el. A negatív tönkrementeli viszonyszámok tehát azt jelentik, hogy az adott elmé-

2. táblázat A von Mises-, a Tsai-Wu- és az Ashkenazi-elmélet alapján számolt tenzorkomponensek az egyes feszültségcsoportoknak megfelelően

Table 2 Results of calculated tensor components for the von Mises, Tsai-Wu and Ashkenazi strength criteria for the four stress groups

Elm.	F.cs. *	a_{LL} [Mpa ⁻¹]	a_{RR} [Mpa ⁻¹]	a_{LLLL} [Mpa ⁻¹]	a_{RRRR} [Mpa ⁻¹]	$a_{LLRR} + a_{RLLL}$ [Mpa ⁻¹]	$a_{LRLR} + a_{LRRL} +$ $a_{RLLR} + a_{RLRL}$ [Mpa ⁻¹]
von Mises	I.	-	-	0,00025	0,02853	0,00748	0,01151
	II.	-	-	0,00025	0,08210	0,01985	0,01151
	III.	-	-	0,00041	0,08210	-0,04551	0,01151
	IV.	-	-	0,00041	0,02853	-0,01894	0,01151
Tsai-Wu	I.	-0,00452	-0,11761	0,00032	0,04840	0,01424	0,01151
	II.	-0,00452	-0,11761	0,00032	0,04840	0,01449	0,01151
	III.	-0,00452	-0,11761	0,00032	0,04840	-0,03862	0,01151
	IV.	-0,00452	-0,11761	0,00032	0,04840	-0,02391	0,01151
Ashkenazi	I.	-	-	0,01574	0,16892	0,14520	0,10730
	II.	-	-	0,01574	0,28653	0,05228	0,10730
	III.	-	-	0,02027	0,28653	0,02643	0,10730
	IV.	-	-	0,02027	0,16892	-0,02963	0,10730

* A feszültségek csoportosítása: I- $\sigma^{LL+}\sigma^{RR+}$; II- $\sigma^{LL+}\sigma^{RR-}$; III- $\sigma^{LL-}\sigma^{RR-}$; IV- $\sigma^{LL-}\sigma^{RR+}$

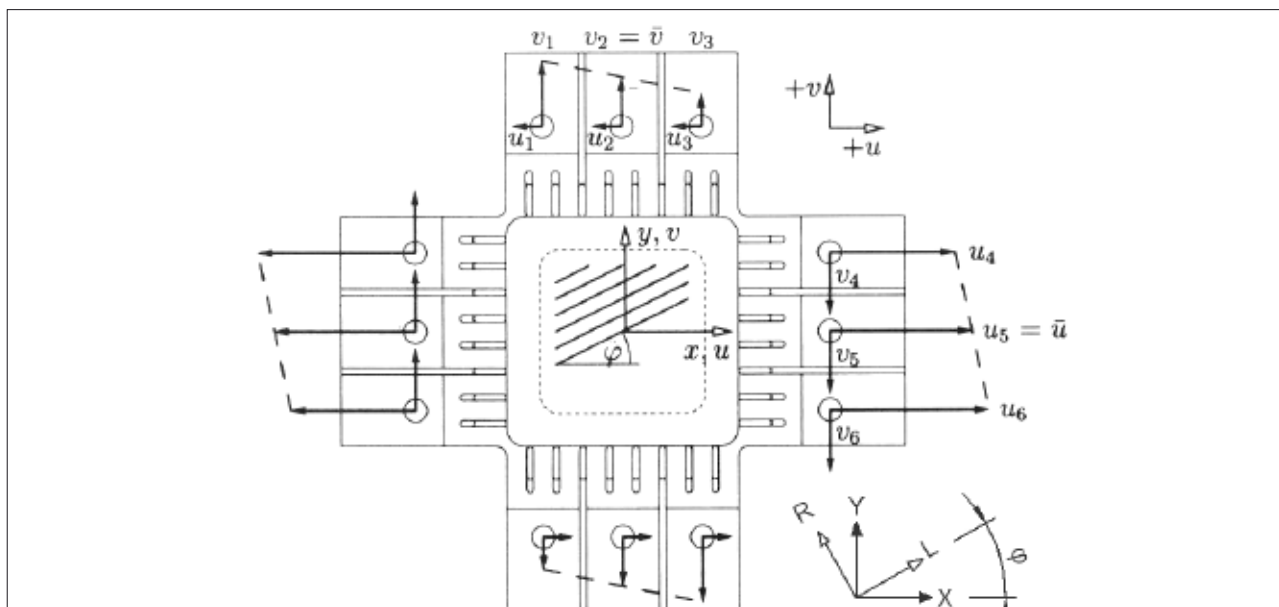


3. táblázat A tönkremeneteli viszonzyszámok alakulása a von Mises-, a Tsai-Wu és az Ashkenazi-elméleteknek megfelelően

Table 3 Results of determined failure prediction numbers for the von Mises, Tsai-Wu, and the Ashkenazi strength criteria

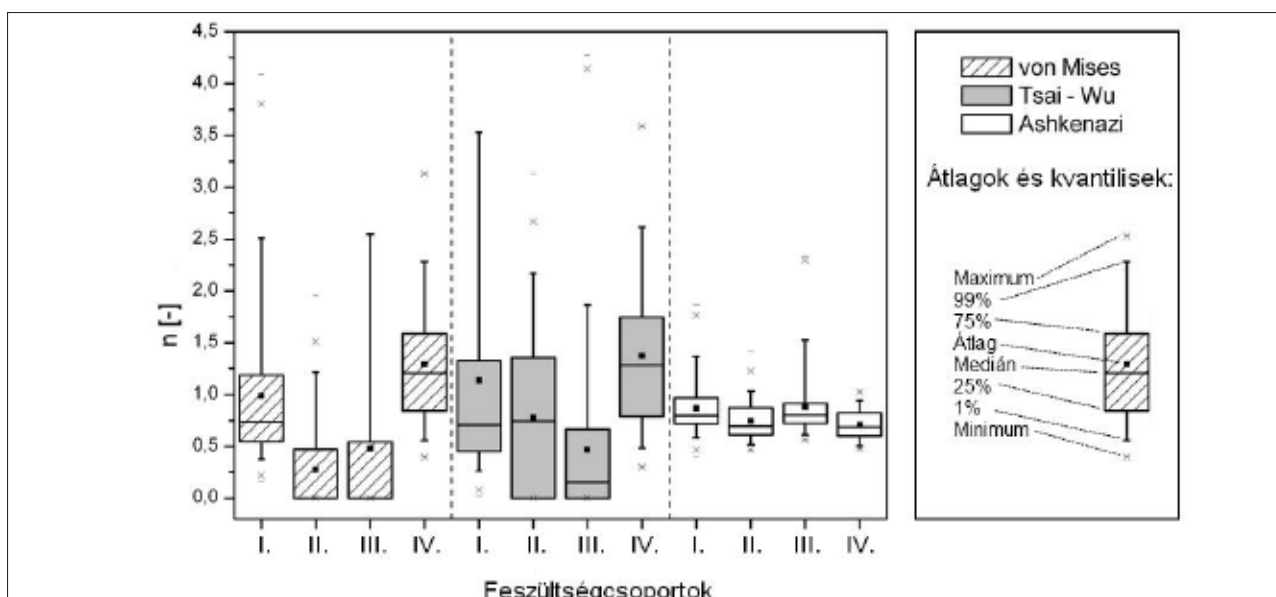
Tönkremeneteli elmélet	Tönkremeneteli viszonzyszámok „n” [-]			
	$\sigma^{LL+}, \sigma^{RR+}$	$\sigma^{LL+}, \sigma^{RR-}$	$\sigma^{LL-}, \sigma^{RR-}$	$\sigma^{LL-}, \sigma^{RR+}$
von Mises	0,99 (72,1)	0,27 (155,1)	0,48 (215,5)	1,29 (44,8)
Tsai-Wu	1,14 (97,6)	0,78 (100,0)	0,47 (165,5)	1,38 (51,5)
Ashkenazi	0,87 (28,2)	0,75 (24,4)	0,88 (35,0)	0,71 (20,1)

Zárójelben a variációs koefficiens [%] látható.



4. ábra Próbatest biaxiális törővizsgálatokhoz. A próbatest alakja, a teherátadás módja, és a koordináta rendszer látható

Figure 4 Biaxial test specimen. Specimen shape, loading type and position of coordinate systems are presented



5. ábra Tönkremeneteli viszonzyszámok alakulása az egyes feszültségcsoportoknak megfelelően

A feszültségek csoportosítása: I- $\sigma^{LL+} \sigma^{RR+}$; II- $\sigma^{LL+} \sigma^{RR-}$; III- $\sigma^{LL-} \sigma^{RR-}$; IV- $\sigma^{LL-} \sigma^{RR+}$

Figure 5 Determined failure prediction numbers correspond to different criterion in each stress group

Stress groups are as follows: I- $\sigma^{LL+} \sigma^{RR+}$; II- $\sigma^{LL+} \sigma^{RR-}$; III- $\sigma^{LL-} \sigma^{RR-}$; IV- $\sigma^{LL-} \sigma^{RR+}$

let nem írja le helyesen a tönkremenetelt, ezért az ennek a mérésnek megfelelő viszonyszámot nulla értékkel vettük fel. A nulla viszonyszám ugyanis az illeszkedés teljes hiányát jelenti.

Az Ashkenazi-elmélet szerint meghatározott tönkremeneteli viszonyszámok valamennyi feszültségcsoportban egyhez közeli értékek és a variációs koefficiens értékek is a faanyag szilárdsági tulajdonságainak varianciáját tükrözi. $n(I)=0,87$; $n(II)=0,75$; $n(III)=0,88$; $n(IV)=0,71$: $CoV(I)=28,2\%$, $CoV(II)=24,4\%$, $CoV(III)=35,0\%$ és $CoV(IV)=20,1\%$. Az Ashkenazi-elmélettel meghatározott tönkremeneteli viszonyszámok értékei valamennyi feszültségcsoportban egynél kisebbek. Ez azt jelenti, hogy Szalai (2001) a méréseit gyengébb szilárdságú lucfenyőn végezte el, mint Eberhardsteiner (2002).

Összefoglalás és következtetések

Tanulmányunk segítségével bemutattuk azt, hogy szükséges kísérleti adatokkal alátámasztani az egyes tönkremeneteli elméletek alkalmazhatóságát. Elméleti megállapítások után (Szalai 2008), nagy elemszámú kísérletsorozat eredményeként kapott feszültségi állapotok segítségével megállapítottuk, hogy síkbeli feszültségállapot esetén az Ashkenazi-elmélet írja le a legmegfelelőbbben a tönkremenetelt faanyag esetén a von Mises- és a Tsai-Wu-elmülethez képest.

A tönkremeneteli elméletek alkalmazhatóságának vizsgálatára a további kutatások szükségesek:

- Ideális triaxiális terhelés létrehozása faanyagon.
- Általános helyzetű próbatest térbeli feszültségállapotának meghatározása az anatómiai főirányok rendszerében.
- A tönkremeneteli elméletek összehasonlítása térbeli feszültségállapotok esetén.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnénk köszönetet mondani Prof. Dr. Josef Eberhardsteinernek, a TU Wien professzorának, hogy rendelkezésünkre bocsátotta a mérési adatait.

Irodalomjegyzék

- Ashkenazi EK (1967) Geometry of strength theory, *Mekhanika Polimerov* 3(4):703-707
- Eberhardsteiner J (2002) *Mechanisches Verhalten von Fichtenholz. Experimentelle Bestimmung der biaxialen Festigkeitseigenschaften*. Springer-Verlag Wien New York. 174 pp
- Seweryn A, Romanovych M (2007) Strength criteria for wood under the conditions of complex stressed state. *Materials Science* 43(3):343-350
- Szalai J (1994) A faanyag és faalapú anyagok anizotrop rugalmasságtana. I. rész: A mechanikai tulajdonságok anizotrópiája. Hillebrand nyomda, Sopron, 398 oldal.
- Szalai J (2001) Különböző fafajok technikai szilárdságai. In: *Mérnöki faszerkezetek. II. rész.* (szerk. Wittman Gy.). 199. o., Mezőgazdasági Szaktudás Kiadó, Budapest
- Szalai J (2008) Festigkeitstheorien von anisotropen Stoffen mit sprödem Bruchverhalten. *Acta Silvatica Et Lignaria Hungarica* 5:61-80
- Tsai SW, Wu EM (1971) A general theory of strength for anisotropic material. *J. Composite Materials* 5: 58-80
- van der Put TACM (2009) A continuum failure criterion applicable to wood. *Journal of Wood Science* 55(5):315-322
- von Mises R (1928) Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. *Z. angew. Math. Mech.* 8. 161-185